Novena ayudantía

Autómatas finitos no deterministas

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

14 de marzo de 2023

Autómata Finito no determinista - AFN

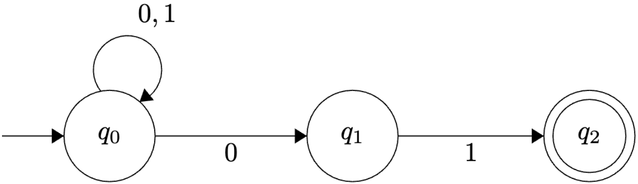
Un AFD es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ es un conjunto finito de símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición, tal que $\delta(q, a) \subseteq Q$.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales.

Ejemplo

Considérese el autómata $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ definido como $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ y las transiciones dadas por:

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\} \quad \delta(q_0, 1) = \{q_0\} \quad \delta(q_1, 1) = \{q_2\}$$



Ejemplo

Tabla de estados:

	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\rightarrow \mathbf{q_0}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\mathbf{q_1}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\mathbf{q_2}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Extensión de la función de transición:

Aplicar a la cadena 01001 la función $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

Ejemplo

$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, 010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, 0100) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, 01001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

Lenguaje generado por el autómata:

El autómata genera el lenguaje que contiene todas las cadenas que terminan con 01.

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w = (0+1)^*01\}$$

Ya que $\hat{\delta}(q_0, (0+1)^*01) \cap F \neq \emptyset$.

Ejemplo

Demostrar que el autómata en efecto acepta el lenguaje L:

$\Rightarrow$] Si $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ entonces w termina en 0.

Supongamos que $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$, tenemos dos casos:

- Si $|w| = 1$ entonces $w = 0$.
- Si $|w| > 1$ entonces $w = x \cdot a$, pero como se pasa a q_1 con 0, entonces $a = 0$ y $x = (0+1)^+$, por lo que $w = (0+1)^+ \cdot 0$.

$\therefore$ Si $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ entonces w termina en 0.

$\Leftarrow$] Si w termina en 0 entonces $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$.

Supongamos que w termina en 0. Tenemos dos casos:

- Si $|w| = 1$ entonces $w = 0$ y $\hat{\delta}(q_0, w) = \{q_0, q_1\}$. Por lo tanto $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$.

Ejemplo

- Si $|w| > 1$ entonces $w = x \cdot 0$ y $\hat{\delta}(q_0, x \cdot 0) = \{q_0\} \cup \{q_1\} = \{q_0, q_1\}$.

$\therefore$ Si w termina en 0 entonces $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$.

$\Rightarrow]$ Si $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ entonces w termina en 01.

Supongamos que $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$, entonces $|w| \geq 2$ por lo que tenemos dos casos:

- Si $|w| = 2$ entonces $w = 01$.
- Si $|w| > 2$ entonces $w = x \cdot 01$, ya que para pasar a q_2 se necesita tener 0 y 1.

$\therefore$ Si $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ entonces w termina en 01.

Ejemplo

$\Leftarrow$] Si w termina en 01 entonces $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$.

Supongamos que w termina en 01, entonces $w = x \cdot 01$. Descompóngase en $w = y \cdot 1$, $y = z \cdot 0$. Tenemos que y termina en 0 y por la demostración anterior sabemos que $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, y)$ y por definición de la función de transición extendida tenemos:

$$\hat{\delta}(q_0, y \cdot 1) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(q_i, 1) \text{ con } q_i \in \hat{\delta}(q_0, y)$$

De aquí tenemos que $q_2 \in \delta(q_1, 1) \in \hat{\delta}(q_0, y \cdot 1)$.

$\therefore$ Si w termina en 01 entonces $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$.

Autómata Finito no determinista con transiciones ε

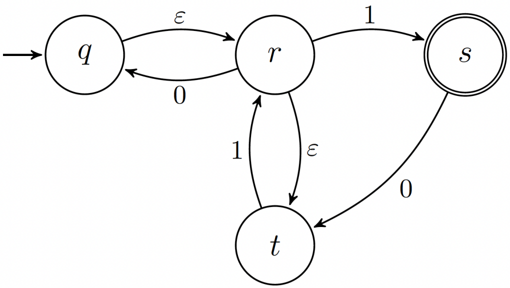
Un AFD es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ es un conjunto finito de símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales.

Ejemplo

Considérese el autómata $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ definido como $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q,\ r,\ s,\ t\}$, $F = \{s\}$ y las transiciones dadas por:

$$\delta(q, \varepsilon) = \{r\} \quad \delta(r, \varepsilon) = \{t\} \quad \delta(r, 0) = \{q\}$$
$$\delta(r, 1) = \{s\} \quad \delta(s, 0) = \{t\} \quad \delta(t, 1) = \{r\}$$



Ejemplo

Tabla de estados:

	ε	**0**	**1**
$\rightarrow$ **q**	$\{r\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
r	$\{t\}$	$\{q\}$	{s}
t	$\emptyset$	$\emptyset$	{r}
$*$**s**	$\emptyset$	{t}	$\emptyset$

Cerradura epsilon:

- ECLOSE(q) $= \{q, r, t\}$
- ECLOSE(r) $= \{r, t\}$
- ECLOSE(t) $= \{t\}$
- ECLOSE(t) $= \{s\}$

Ejemplo

Función de transición extendida:

Aplicar a la cadena 010 la función $\hat{\delta}$:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \text{ECLOSE}(q) = \{q,\ r,\ t\}$
- $\delta(q, 0) \cup \delta(r, 0) \cup \delta(t, 0) = \emptyset \cup \{q\} \cup \emptyset$ y
  $\hat{\delta}(q, 0) = \text{ECLOSE}(q) = \{q,\ r,\ t\}$
- $\delta(q, 1) \cup \delta(r, 1) \cup \delta(t, 1) = \emptyset \cup \{s\} \cup \{r\}$ y
  $\hat{\delta}(q, 1) = \text{ECLOSE}(s) \cup \text{ECLOSE}(r) = \{s,\ r,\ t\}$
  $\delta(s, 0) \cup \delta(r, 0) \cup \delta(t, 0) = \{t\} \cup \{q\} \cup \emptyset$ y
  $\hat{\delta}(s, 0) = \text{ECLOSE}(t) \cup \text{ECLOSE}(q) = \{t,\ q,\ r\}$

Por tanto $\hat{\delta}(q, 010) = \{t,\ q,\ r\}$