Octava ayudantía

Autómatas finitos

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

de febrero de 2023

Autómata Finito Determinsta - AFD

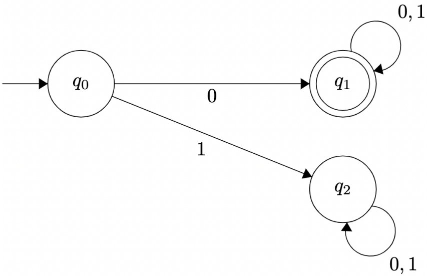
Un AFD es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ es un conjunto finito de símbolos.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales.

Ejemplo 1

Sea el AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_2\}$ y la función δ está dada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, 0) = q_1 & \delta(q_1, 0) = q_1 & \delta(q_2, 0) = q_2 \\ \delta(q_0, 1) = q_2 & \delta(q_1, 1) = q_1 & \delta(q_2, 1) = q_2 \end{array}$$



Ejemplo 1

Tabla de estados:

	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\rightarrow \mathbf{q_0}$	q_1	q_2
$*\mathbf{q_1}$	q_1	q_1
$\mathbf{q_2}$	q_2	q_2

Extensión de la función de transición:

Aplicar a la cadena 011 la función $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_1$$

Ejemplo 1

$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$$
$$\hat{\delta}(q_0, 011) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 01), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$$

Lenguaje generado por el autómata:

El autómata genera el lenguaje que contiene todas las cadenas que inician con 0.

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0(0+1)^*\}$$

Ya que $\hat{\delta}(q_0, 0(0+1)^*) = q_1 \in F$.

Ejemplo 1

Demostrar que el autómata en efecto acepta el lenguaje L:

$\Rightarrow]$ A genera w, entonces $w = 0(0+1)^*$ (Inducción en pasos del autómata).

Base:

En un paso, aplica la transición $\delta(q_0, 0)$ por lo que $w = 0$ y $w = 0 \cdot \varepsilon$. Por lo tanto $w \in L$.

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, $\hat{\delta}(q_0, x)$, $\hat{\delta}(q_0, y) \in F$ y $x = 0(0+1)^*$ e $y = 0(0+1)^*$.

Ejemplo 1

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot y$ en $n + m$ pasos y $w = 0(0+1)^*$.

Sea $w = x \cdot y$ tal que $\hat{\delta}(q_0, x)$, $\hat{\delta}(q_0, y) \in F$, por H.I. A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, por lo que A acepta a w en $n + m$ pasos y $w = 0(0+1)^*$ por cerradura de Kleene. Por lo tanto $w \in L$.

$\Leftarrow]$ Si $w = 0(0+1)^*$, entonces es aceptado por A (Inducción sobre w).

Base:

Sea $w = 0$, A tiene una transición $\delta(q_0, 0) = q_1 \in F$. Por lo tanto w es aceptada por A.

Ejemplo 1

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $x = 0(0+1)^*$, $x \in L$ y $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot a$ con $x \in L$ y $a \in \Sigma$.

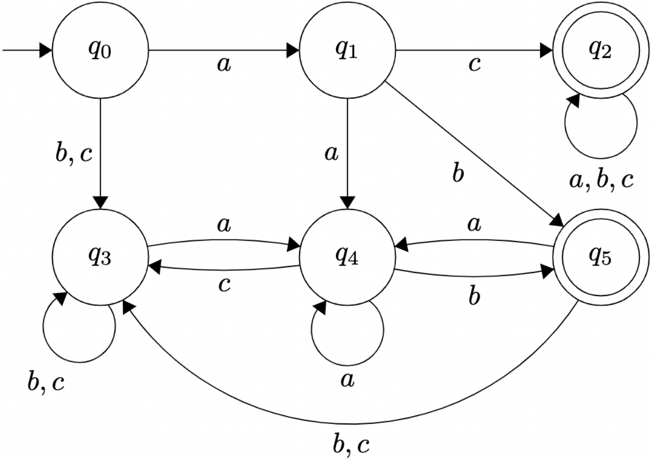
Tenemos $w = x \cdot a$ por hipóteis de inducción x es aceptado por A, es decir, $\hat{\delta}(q_0, x) = q1$ y $x = 0(0+1)^*$, por definición de *concatenación* tenemos que $w = 0(0+1)^* \cdot a$, entonces $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), a) = \delta(q_1, a) = q_1$ ya que a puede ser 0 o 1. Por lo tanto, w es aceptado por A.

Ejemplo 2

Sea el AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2, q_5\}$ y la función δ está dada de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_4, a) = q_4 \\
\delta(q_0, b) = q_3 & \delta(q_2, b) = q_2 & \delta(q_4, b) = q_3 \\
\delta(q_0, c) = q_3 & \delta(q_2, c) = q_2 & \delta(q_4, c) = q_5 \\
\delta(q_1, a) = q_4 & \delta(q_3, a) = q_4 & \delta(q_5, a) = q_4 \\
\delta(q_1, b) = q_5 & \delta(q_3, b) = q_3 & \delta(q_5, b) = q_3 \\
\delta(q_1, c) = q_2 & \delta(q_3, c) = q_3 & \delta(q_5, c) = q_3
\end{array}
$$

Ejemplo 2



Ejemplo 2

Tabla de estados:

	a	b	c
$\rightarrow \mathbf{q_0}$	q_1	q_3	q_3
$\mathbf{q_1}$	q_4	q_5	q_2
$*\mathbf{q_2}$	q_2	q_2	q_2
$\mathbf{q_3}$	q_4	q_3	q_3
$\mathbf{q_4}$	q_4	q_5	q_3
$*\mathbf{q_5}$	q_4	q_3	q_3

Extensión de la función de transición:

Aplicar a la cadena $abcbaab$ la función $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$$

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), a) = \delta(q_0, a) = q_1$$

Ejemplo 2

$$\hat{\delta}(q_0, ab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, a), b) = \delta(q_1, b) = q_5$$
$$\hat{\delta}(q_0, abc) = \delta(\hat{\delta}(q_0, ab), c) = \delta(q_5, c) = q_3$$
$$\hat{\delta}(q_0, abca) = \delta(\hat{\delta}(q_0, abc), a) = \delta(q_3, a) = q_4$$
$$\hat{\delta}(q_0, abcab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, abca), b) = \delta(q_4, b) = q_5$$

Lenguaje generado por el autómata:

El autómata genera el lenguaje que contiene todas las cadenas que inician con ac o terminan con ab.

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w = ac(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ab\}$$

Ejemplo 2

Demostrar que el autómata en efecto acepta el lenguaje L:

$\Rightarrow]$ A genera w, entonces $w = ac(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ab$ (Inducción en pasos del autómata).

Base:

Sea $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$, es decir, el autómata genera w en dos pasos:

- $\hat{\delta}(q_0, ac) = q_2$ y $q_2 \in F$ entonces $w = ac$ y $w = ac \cdot \varepsilon$. Por lo tanto $w \in L$.
- $\hat{\delta}(q_0, ab) = q_5$ y $q_5 \in F$ entonces $w = ac$ y $w = \varepsilon \cdot ac$. Por lo tanto $w \in L$.

Ejemplo 2

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, $\hat{\delta}(q_0, x)$, $\hat{\delta}(q_0, y) \in F$ y $x, y \in L$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot y$ en $n + m$ pasos y $w = ac(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ab$.

Por H.I. A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, como $\hat{\delta}(q_0, x \cdot y) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), y)$, tenemos dos casos:

- Si $\hat{\delta}(q_0, x) = q_2$ entonces $\delta(\hat{\delta}(q_0, x), y) = \delta(q_2, y) = q_2$, por lo que A acepta a w en $n + m$ pasos y $w = ac(a + b + c)^*$ por cerradura de Kleene. Por lo tanto $w \in L$.

Ejemplo 2

- Si $\hat{\delta}(q_0, x) = q_5$ entonces $\delta(\hat{\delta}(q_0, x), y) = \delta(q_5, y) = q_5$, por lo que A acepta a w en $n + m$ pasos y $w = (a + b + c)^*ab$ por cerradura de Kleene. Por lo tanto $w \in L$.

$\therefore$ Si A genera w, entonces $w = ac(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ab$

$\Leftarrow]$ Si $w = ac(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ab$, entonces es aceptado por A (Inducción sobre w).

Base:

Sea $w = 2$, tenemos dos casos:

- Sea $w = ac$ se tiene que $\hat{\delta}(q_0, w) = q_2$ y $q_2 \in F$. Por lo tanto w es aceptada por A.
- Si $w = ac$ se tiene que $\hat{\delta}(q_0, w) = q_2$ y $q_2 \in F$. Por lo tanto w es aceptada por A.

Ejemplo 2

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $x = ac(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ab$, $x \in L$ y $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot \alpha$ con $x \in L$ y $\alpha \in \Sigma$.

Por H.I. sabemos que x es aceptado por A, por lo que $\hat{\delta}(q_0, x \cdot \alpha) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), \alpha)$ tenemos dos casos:

- Si $\hat{\delta}(q_0, x) = q_2$, entonces $\hat{\delta}(q_0, x \cdot \alpha) = \delta(q_2, \alpha) = q_2$, sabemos que $q_2 \in F$ y $x = ac(a+b+c)^*$ por lo que $w = x \cdot \alpha = ac(a+b+c)^* \cdot \alpha$ por cerradura de Kleene $w = ac(a+b+c)^*$ ya que α puede ser a, b o c. Por lo tanto, w es aceptado por A.

Ejemplo 2

- Si $\hat{\delta}(q_0, x) = q_5$, entonces $\hat{\delta}(q_0, x \cdot \alpha) = \delta(q_5, \alpha) \notin F$ y $w \neq (a+b+c)^*ab$ por lo que:
  - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_4$ si $\alpha = b$, entonces $\hat{\delta}(q_0, x \cdot \alpha) = \delta(q_4, \alpha) = q_5$, sabemos que $q_5 \in F$ y $x = (a+b+c)^*ab$ por lo que $w = x \cdot \alpha = (a+b+c)^*a \cdot \alpha$ por cerradura de Kleene $w = (a+b+c)^*ab$. Por lo tanto, w es aceptado por A.
  - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_4$ si $\alpha = a$ y $\hat{\delta}(q_0, x) = q_3$ si $\alpha = c$, en estos dos estados se guardan las cadenas que terminan en a o c.

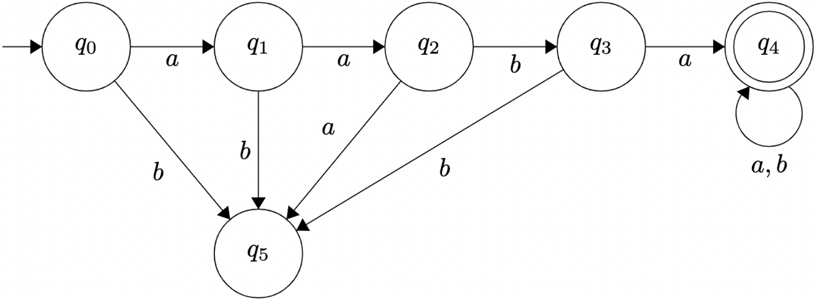
$\therefore$ Si $w = ac(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ab$, entonces es aceptado por A.

Ejemplo 3

Sea el AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_4\}$ y la función δ está dada de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
\delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_2, a) = q_5 & \delta(q_4, a) = q_4 \\
\delta(q_0, b) = q_5 & \delta(q_2, b) = q_3 & \delta(q_4, b) = q_4 \\
\delta(q_1, a) = q_2 & \delta(q_3, a) = q_4 & \delta(q_5, a) = q_5 \\
\delta(q_1, b) = q_5 & \delta(q_3, b) = q_5 & \delta(q_5, b) = q_5
\end{array}$$

Ejemplo 3



Ejemplo 3

Tabla de estados:

	a	**b**
$\rightarrow \mathbf{q_0}$	q_1	q_5
$\mathbf{q_1}$	q_2	q_5
$\mathbf{q_2}$	q_5	q_3
$\mathbf{q_3}$	q_4	q_5
$*\mathbf{q_4}$	q_4	q_4
$\mathbf{q_5}$	q_5	q_5

Extensión de la función de transición:

Aplicar a la cadena $aabab$ la función $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$$
$$\hat{\delta}(q_0, a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), a) = \delta(q_0, a) = q_1$$

Ejemplo 3

$$\hat{\delta}(q_0, aa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, a), a) = \delta(q_1, a) = q_2$$
$$\hat{\delta}(q_0, aab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aa), b) = \delta(q_2, b) = q_3$$
$$\hat{\delta}(q_0, aaba) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aab), a) = \delta(q_3, a) = q_4$$
$$\hat{\delta}(q_0, aabab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aaba), b) = \delta(q_4, b) = q_4$$

Lenguaje generado por el autómata:

El autómata genera el lenguaje que contiene todas las cadenas que inician con $aaba$.

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w = aaba(a+b)^*\}$$

Ejemplo 3

Demostrar que el autómata en efecto acepta el lenguaje L:

$\Rightarrow]$ A genera w, entonces $w = aaba(a+b)^*$ (Inducción en pasos del autómata).

Base:

Sea $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$, es decir, el autómata genera w en cuatro pasos, tenemos que $\hat{\delta}(q_0, w) = q_4$ y $q_4 \in F$ entonces $w = aaba$ y $w = aaba \cdot \varepsilon$. Por lo tanto $w \in L$.

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, $\hat{\delta}(q_0, x)$, $\hat{\delta}(q_0, y) \in F$ y $x, y \in L$.

Ejemplo 3

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot y$ en $n + m$ pasos y $w = aaba(a + b)^*$.

Por H.I. A acepta a x e y en n y m pasos respectivamente, como $\hat{\delta}(q_0, x \cdot y) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), y) = \delta(q_4, y) = q_4$, entonces A acepta acepta a w en $n + m$ pasos y $w = x \cdot y = aaba(a + b)^* \cdot aaba(a + b)^* = aaba(a + b)^*$ por cerradura de Kleene. Por lo tanto $w \in L$.

$\therefore$ Si A genera w, entonces $w = aaba(a + b)^*$

Ejemplo 3

$\Leftarrow$] Si $w = aaba(a+b)^*$, entonces es aceptado por A (Inducción sobre w).

Base:

Sea $w = 4$, tenemos que $w = aaba$ se tiene que $\hat{\delta}(q_0, w) = q_4$ y $q_4 \in F$. Por lo tanto w es aceptada por A.

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que $x = aaba(a+b)^*$, $x \in L$ y $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.

Ejemplo 3

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = x \cdot \alpha$ con $x \in L$ y $\alpha \in \Sigma$.

Por H.I. sabemos que x es aceptado por A, por lo que $\hat{\delta}(q_0, x \cdot \alpha) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), \alpha) = \delta(q_4, \alpha) = q_4$, sabemos que $q_2 \in F$ y $x = aaba(a+b)^*$ por lo que $w = x \cdot \alpha = aaba(a+b)^* \cdot \alpha$ por cerradura de Kleene $w = aaba(a+b)^*$ ya que α puede ser a o b. Por lo tanto, w es aceptado por A.

$\therefore$ Si $w = aaba(a+b)^*$, entonces es aceptado por A.