Tercera ayudantía

Inducción sobre palíndromos

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

9 de febrero de 2023

Inducción sobre palíndromos

Lenguaje:

Sea $\Sigma = \{0,\, 1\}$ y $L = \{w \in \Sigma^* | w = w^R\}$

Gramática:

Sea $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$ una gramática, donde $\Sigma = \{0,\, 1\}$, $\Delta = \{S\}$, S es el inicial, y las reglas R están dadas por:

$$S \rightarrow 0S0 \,|\, 1s1$$
$$S \rightarrow \epsilon \,|\, 0 \,|\, 1$$

Inducción sobre palíndromos

Por demostrar que la gramática G deriva palíndromos utilizando inducción sobre la estructura de las cadenas ($L \subseteq L(G)$).

Base:

- Sea $w = \epsilon$, tenemos que $\epsilon \in \Sigma^*$ y $\epsilon = \epsilon^R$ por definición del *inverso*, la gramática G tiene una regla de producción $S \to \epsilon$ por lo tanto $S \Rightarrow_G \epsilon$.
- Sea $w = 0$, tenemos que $0 \in \Sigma$ y $0 = 0^R$ por definición del *inverso*, la gramática G tiene una regla de producción $S \to 0$ por lo tanto $S \Rightarrow_G 0$.
- Sea $w = 1$, tenemos que $1 \in \Sigma$ y $1 = 1^R$ por definición del *inverso*, la gramática G tiene una regla de producción $S \to 1$ por lo tanto $S \Rightarrow_G 1$.

Inducción sobre palíndromos

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $w = w^R, w \in \Sigma^*$ y que $S \Rightarrow_G^* w$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = axa$ con $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$

$$S \Rightarrow_G^* axa$$

Por hipótesis de inducción y por las reglas de producción de G:

- $S \Rightarrow_G 0S0 \Rightarrow_G^* 0x0$ por lo tanto $S \Rightarrow_G^* 0x0$
- $S \Rightarrow_G 1S1 \Rightarrow_G^* 1x1$ por lo tanto $S \Rightarrow_G^* 1x1$

Por lo tanto la gramática G puede derivar cualquier palíndromo sobre Σ^*. Por lo tanto $L \subseteq L(G)$.

Inducción sobre palíndromos

Por demostrar que el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje de palíndromos utilizando inducción sobre las derivaciones de la gramática.

Base:

Sea $S \Rightarrow w$, es decir, la derivación es en un paso. La gramática G tiene tres producciones que derivan en un sólo paso:

- Sea $S \rightarrow \epsilon$ por lo que $w = \epsilon$ y $\epsilon = \epsilon^R$ por definición del *inverso*, por lo tanto w es palíndromo.
- Sea $S \rightarrow 0$ por lo que $w = 0$ y $0 = 0^R$ por definición del *inverso*, por lo tanto w es palíndromo.
- Sea $S \rightarrow 1$ por lo que $w = 1$ y $1 = 1^R$ por definición del *inverso*, por lo tanto w es palíndromo.

Inducción sobre palíndromos

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $S \Rightarrow_G^* x$ en n pasos y que $x = x^R, x \in \Sigma^*$.

Paso inductivo

Por demostrar que $S \Rightarrow_G^* w$ en $n+1$ pasos.

La gramática G tiene dos producciones que derivan en más de un paso: $S \rightarrow 0S0$ y $S \rightarrow 1S1$.

Como $S \Rightarrow_G^* w$ tenemos dos casos:

- Sea $w = 0x0$ entonces $S \Rightarrow_G 0S0 \Rightarrow_G^* 0x0$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow_G^* x$ sucede en n pasos y que x es palíndromo, por lo que $S \Rightarrow_G 0x0$ se produce en $n+1$ pasos y $w^R = (0x0)^R = 0(0x)^R = 0x^R0 = 0x0$. Por lo tanto w es palíndromo.

Inducción sobre palíndromos

- Sea $w = 1x1$ entonces $S \Rightarrow_G 1S1 \Rightarrow_G^* 1x1$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow_G^* x$ sucede en n pasos y que x es palíndromo, por lo que $S \Rightarrow_G 1x1$ se produce en $n+1$ pasos y $w^R = (1x1)^R = 1(1x)^R = 1x^R1 = 1x1$. Por lo tanto w es palíndromo.

Por lo tanto el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje de palíndromos. Por lo tanto $L(G) \subseteq L$.

$$\therefore L = L(G)$$