Quinta ayudantía

Inducción sobre lenguajes y gramáticas

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

de febrero de 2023

Ejercicio 3

Lenguaje:

$$\text{Sea } \Sigma = \{0,\ 1\} \text{ y } L = (0+1)^*$$

Gramática:

Sea $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$ una gramática, donde $\Sigma = \{0,\ 1\}$, $\Delta = \{S\}$, S es el inicial, y las reglas R están dadas por:

$$S \to 0S \,|\, 1S$$
$$S \to \varepsilon \,|\, 0 \,|\, 1$$

Ejercicio 3 - $L \subseteq L(G)$

Por demostrar que la gramática G puede derivar al lenguaje L utilizando inducción sobre la estructura de las cadenas ($L \subseteq L(G)$).

Base:

- Sea $w = \varepsilon$, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$ y la gramática G tiene una regla de producción $S \rightarrow \varepsilon$ entonces $S \Rightarrow_G \varepsilon$ por lo tanto $G \models \varepsilon$.
- Sea $w = 0$, tenemos que $0 \in \Sigma$ y la gramática G tiene una regla de producción $S \rightarrow 0$ entonces $S \Rightarrow_G 0$ por lo tanto $G \models 0$.
- Sea $w = 1$, tenemos que $1 \in \Sigma$ y la gramática G tiene una regla de producción $S \rightarrow 1$ entonces $S \Rightarrow_G 1$ por lo tanto $G \models 1$.

Ejercicio 3 - $L \subseteq L(G)$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $w \in \Sigma^*$ y que $S \Rightarrow_G^* w$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = xa$ con $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$:

$$S \Rightarrow_G^* xa$$

Por hipótesis de inducción y por las reglas de producción de G:

- $S \Rightarrow_G 0S \Rightarrow_G^* xS \Rightarrow_G xa$ entonces $S \Rightarrow_G^* xa$.
- $S \Rightarrow_G 1S \Rightarrow_G^* xS \Rightarrow_G xa$ entonces $S \Rightarrow_G^* xa$.

Por lo que $G \models w$ y concluimos que la gramática G puede derivar al lenguaje L. Por lo tanto $L \subseteq L(G)$.

Ejercicio 3 - $L(G) \subseteq L$

Por demostrar que el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje L utilizando inducción sobre las derivaciones de la gramática.

Base:

Sea $S \Rightarrow w$, es decir, la derivación se produce en un paso. La gramática G tiene tres producciones que derivan en un sólo paso:

- Sea $S \rightarrow \varepsilon$ por lo que $w = \varepsilon$ y $\varepsilon \in \Sigma^*$ por lo tanto $w \in L$.
- Sea $S \rightarrow 0$ por lo que $w = 0$ y $0 \in \Sigma$ por lo tanto $w \in L$.
- Sea $S \rightarrow 1$ por lo que $w = 1$ y $1 \in \Sigma$ por lo tanto $w \in L$.

Ejercicio 3 - $L(G) \subseteq L$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $S \Rightarrow_G^* x$ en n pasos y que $x \in \Sigma^*$.

Paso inductivo

Por demostrar que $S \Rightarrow_G^* w$ en $n+1$ y $w \in \Sigma^*$.

La gramática G tiene dos producciones que derivan en más de un paso: $S \rightarrow 0S$ y $S \rightarrow 1S$.

Como $S \Rightarrow_G^* w$ entonces tenemos dos casos:

- Si $w = xa$ y $a \in \Sigma$ entonces $S \Rightarrow_G 0S \Rightarrow_G^* xa$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow_G^* x$ sucede en n pasos y que $x \in \Sigma^*$, por lo que $S \Rightarrow_G xa$ se produce en $n+1$ pasos y $xa \in \Sigma^*$ por definición de *concatenación*. Por lo tanto $w \in L$.

Ejercicio 3 - $L(G) \subseteq L$

- Si $w = xa$ y $a \in \Sigma$ entonces $S \Rightarrow_G 1S \Rightarrow_G^* xa$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow_G^* x$ sucede en n pasos y que $x \in \Sigma^*$, por lo que $S \Rightarrow_G xa$ se produce en $n+1$ pasos y $xa \in \Sigma^*$ por definición de *concatenación*. Por lo tanto $w \in L$.

Concluimos que el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje L. Por lo tanto $L(G) \subseteq L$.

$$\therefore L = L(G)$$

Ejercicio 4

Lenguaje:

$$\text{Sea } \Sigma = \{a,\, b\} \text{ y } L = (b + ab)^*$$

Gramática:

Sea $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$ una gramática, donde $\Sigma = \{a,\, b\}$, $\Delta = \{S,\, B\}$, S es el inicial, y las reglas R están dadas por:

$$\begin{aligned} S &\to bS \mid aB \\ S &\to \varepsilon \mid b \\ B &\to bS \end{aligned}$$

Ejercicio 4 - $L \subseteq L(G)$

Por demostrar que la gramática G puede derivar al lenguaje L utilizando inducción sobre la estructura de las cadenas ($L \subseteq L(G)$).

Base:

- Sea $w = \varepsilon$, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$ y la gramática G tiene una regla de producción $S \to \varepsilon$ entonces $S \Rightarrow_G \varepsilon$ por lo tanto $G \models \varepsilon$.
- Sea $w = b$, tenemos que $b \in \Sigma$ y la gramática G tiene una regla de producción $S \to b$ entonces $S \Rightarrow_G b$ por lo tanto $G \models \varepsilon$.

Ejercicio 4 - $L \subseteq L(G)$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $w \in L$ y que $S \Rightarrow_G^* w$.

Paso inductivo:

Por demostrar que se cumple para $w = xc$ con $x \in L$ y $c \in \Sigma$:

$$S \Rightarrow_G^* xc$$

Por hipótesis de inducción y por las reglas de producción de G:

- $S \Rightarrow_G bS \Rightarrow_G^* xS \Rightarrow_G xc$ por lo tanto $S \Rightarrow_G^* xc$
- $S \Rightarrow_G aB \Rightarrow_G^* xS \Rightarrow_G xc$ por lo tanto $S \Rightarrow_G^* xc$

Por lo que $G \models w$ y concluimos que la gramática G puede derivar al lenguaje L. Por lo tanto $L \subseteq L(G)$.

Ejercicio 4 - $L(G) \subseteq L$

Por demostrar que el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje L utilizando inducción sobre las derivaciones de la gramática.

Base:

Sea $S \Rightarrow w$, es decir, la derivación se produce en un paso. La gramática G tiene dos producciones que derivan en un sólo paso:

- Sea $S \rightarrow \varepsilon$ por lo que $w = \varepsilon$ y $\varepsilon \in \Sigma^*$ por lo tanto $w \in L$.
- Sea $S \rightarrow b$ por lo que $w = b$ y $b \in \Sigma$ por lo tanto $w \in L$.

Ejercicio 4 - $L(G) \subseteq L$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que $S \Rightarrow_G^* x$ en n pasos y que $x \in L$.

Paso inductivo

Por demostrar que $S \Rightarrow_G^* w$ en $n+1$ y $w \in L$

La gramática G tiene dos producciones iniciales que derivan en más de un paso: $S \rightarrow bS$ y $S \rightarrow aB$.

Como $S \Rightarrow_G^* w$ entonces tenemos dos casos:

- Si $w = xc$ y $c \in \Sigma$ entonces $S \Rightarrow_G bS \Rightarrow_G^* xc$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow_G^* x$ sucede en n pasos y que $x \in L$, por lo que $S \Rightarrow_G xc$ se produce en $n+1$ pasos y $xc \in L$ por definición de *concatenación*. Por lo tanto $w \in L$.

Ejercicio 4 - $L(G) \subseteq L$

- Si $w = xc$ y $c \in \Sigma$ entonces $S \Rightarrow_G aB \Rightarrow^*_G xc$, por H.I. sabemos que la derivación $S \Rightarrow^*_G x$ sucede en n pasos y que $x \in L$, por lo que $S \Rightarrow_G xc$ se produce en $n+1$ pasos y $xc \in L$ por definición de *concatenación*. Por lo tanto $w \in L$.

Concluimos que el lenguaje de la gramática está contenido en el lenguaje L. Por lo tanto $L(G) \subseteq L$.

$$\therefore L = L(G)$$