Eliminación de producciones unitarias

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

13 de abril de 2023

Ejercicio 2

Demostrar que dada una gramática G_1 construida eliminado producciones ε a partir de G se tiene que si A $\Rightarrow_G^* w$ en G, entonces A $\Rightarrow_{G_1}^* w$ y $w \neq \varepsilon$ en G_1.

Demostración por inducción sobre el número de pasos. Suponemos que A $\Rightarrow_G^* w$ y $w \neq \varepsilon$.

Base

En un paso, A $\rightarrow w$ y como $w \neq \varepsilon$, la producción se incluye en G_1. Por lo tanto A $\Rightarrow_{G_1}^* w$.

Ejercicio 2

Hipótesis de Inducción

Supongamos que cada X_i es derivada en menos de n pasos y $X_i \Rightarrow^*_{G_1} w_i \neq \varepsilon$, para $\forall i = 1, ..., k$.

Paso inductivo

En n pasos, tenemos que $A \Rightarrow_G Y_1 Y_2 ... Y_m \Rightarrow^*_G w$ y $w = w_1 w_2 ... w_m$. Por H.I. sabemos que $X_1 X_2 ... X_k$ con $k \leq m$ han sido derivadas en menos de n pasos y cada X_i representa una Y_i sin producciones ε. Por la construcción de G_1, tenemos que $A \rightarrow X_1 X_2 ... X_k$ por lo que $A \Rightarrow^*_{G_1} X_1 X_2 ... X_k \Rightarrow^*_{G_1} w$ y $w = w_1 w_2 ... w_k$. Por lo tanto $A \Rightarrow^*_{G_1} w$.

Eliminar producciones unitarias - Ejemplo 1

Definamos una gramática $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$, donde $\Sigma = \{a,\ b\}$, $\Delta = \{S,\ A,\ B\}$, S es el símbolo inicial y las reglas R están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\rightarrow \mathsf{A} \mid \mathsf{B} \\
\mathsf{A} &\rightarrow \mathsf{Sa} \mid \mathsf{a} \\
\mathsf{B} &\rightarrow \mathsf{S} \mid \mathsf{b}
\end{aligned}
$$

Eliminar producciones unitarias - Ejemplo 1

Encontrar pares unitarios

1. En la base (S, S), (A, A) y (B, B).
2. Como (S, S) y $S \rightarrow A$, entonces (S, A) es par unitario.
3. Dado que (S, S) y $S \rightarrow B$, se tiene que (S, B) es par unitario.
4. Como (B, B) y $B \rightarrow S$, entonces (B, S) es par unitario.

Agregar las nuevas producciones

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Sa \mid a \mid b \\
A &\rightarrow Sa \mid a \\
B &\rightarrow Sa \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Eliminar producciones unitarias - Ejemplo 2

Definamos una gramática $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$, donde $\Sigma = \{a,\, b\}$, $\Delta = \{S,\, X,\, Y,\, Z\}$, S es el símbolo inicial y las reglas R están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\rightarrow \mathsf{XYZ} \\
\mathsf{X} &\rightarrow \mathsf{aY} \mid \mathsf{Z} \mid \mathsf{b} \\
\mathsf{Y} &\rightarrow \mathsf{bX} \mid \mathsf{aZ} \\
\mathsf{Z} &\rightarrow \mathsf{aa} \mid \mathsf{bY} \mid \mathsf{Y}
\end{aligned}
$$

Eliminar producciones unitarias - Ejemplo 2

Encontrar pares unitarios

1. En la base (S, S), (X, X), (Y, Y) y (Z, Z).
2. Como (X, X) y $X \to Z$, entonces (X, Z) es par unitario.
3. Dado que (X, Z) y $Z \to Y$, se tiene que (X, Y) es par unitario.
4. Como (Z, Z) y $Z \to Y$, entonces (Z, Y) es par unitario.

Agregar las nuevas producciones

$$
\begin{aligned}
S &\to XYZ \\
X &\to aY \mid aa \mid bY \mid bX \mid aZ \mid b \\
Y &\to bX \mid aZ \\
Z &\to aa \mid bY \mid bX \mid aZ
\end{aligned}
$$