Sexta ayudantía

Lenguajes y gramáticas regulares

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

16 de febrero de 2023

Expresiones Regulares - Propiedades

1. Asociatividad:
   1.1. $R + (S + T) = (R + S) + T$
   1.2. $R \cdot (S \cdot T) = (R \cdot S) \cdot T$
2. Conmutatividad:
   - $R + S = S + R$
3. Distributividad:
   3.1. $R \cdot (S + T) = R \cdot S + R \cdot T$
   3.2. $(S + T) \cdot R = S \cdot R + T \cdot R$
4. Elemento identidad:
   4.1 $R + \emptyset = \emptyset + R = R$
   4.2 $R \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot R = R$

Propiedades

5. Elemento neutro:
   - $R \cdot \emptyset = \emptyset \cdot R = \emptyset$
6. Idempotencia:
   6.1. $R + R = R$
   6.2. $(R^*)^* = R^*$
7. Propiedades de la cerradura de Kleene:
   7.1. $\varepsilon^* = \varepsilon$
   7.2. $\emptyset^* = \varepsilon$
   7.3. $R^+ = R \cdot R^* = R^* \cdot R$
   7.4. $R^* \cdot R^* = R^*$
   7.5. $R^* = \varepsilon + R^+ = R^+ + \varepsilon$

Propiedades

7. Propiedades de la cerradura de Kleene (continuación):
   7.6. $R? = R + \varepsilon = \varepsilon + R$
   7.7. $(R + S)^* = (R^* \cdot S^*)^* = (R^* \cdot S)^* R^*$
   7.8. $(R \cdot S)^* = \varepsilon + R \cdot (S \cdot R)^* \cdot S$
   7.10. $R \cdot (S \cdot R)^* = (R \cdot S)^* \cdot R$
8. Propiedades condicionales:
   8.1. Si $L(R) \subseteq L(S)$, entonces $R + S = S$
   8.2. Si $L(R^*) \subseteq L(S^*)$, entonces $R^* \cdot S^* = S^*$
   8.3. Si $L(R^*) \subseteq L(S^*)$, entonces $(R + S)^* = S^*$

Ejercicio 1

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$ y $S = (b + ac^*a)c + ac^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$$

Ejercicio 1

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes: $R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$ y $S = (b + ac^*a)c + ac^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$\begin{aligned} R &= bc + ac^*ac + ac^*c + a \\ &= (b + ac^*a)c + a(c^*c + \varepsilon) && \text{propiedad 3} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$ y $S = (b + ac^*a)c + ac^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$\begin{aligned} R &= bc + ac^*ac + ac^*c + a \\ &= (b + ac^*a)c + a(c^*c + \varepsilon) && \text{propiedad 3} \\ &= (b + ac^*a)c + a(c^+ + \varepsilon) && \text{propiedad 7.3} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$ y $S = (b + ac^*a)c + ac^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$\begin{aligned} R &= bc + ac^*ac + ac^*c + a & \\ &= (b + ac^*a)c + a(c^*c + \varepsilon) & \text{propiedad 3} \\ &= (b + ac^*a)c + a(c^+ + \varepsilon) & \text{propiedad 7.3} \\ &= (b + ac^*a)c + ac^* & \text{propiedad 7.5} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes: $R = bc + ac^*ac + ac^*c + a$ y $S = (b + ac^*a)c + ac^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$
\begin{aligned}
R &= bc + ac^*ac + ac^*c + a & \\
&= (b + ac^*a)c + a(c^*c + \varepsilon) & \text{propiedad 3} \\
&= (b + ac^*a)c + a(c^+ + \varepsilon) & \text{propiedad 7.3} \\
&= (b + ac^*a)c + ac^* & \text{propiedad 7.5} \\
&= S &
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Demuestre que las siguientes expresiones regulares son equivalentes $R = (a^*(b+c)^* + b^*)^*$ y $S = (a+b+c)^*$

Desarrollaremos expresión S para llegar a la expresión R.

$$S = (a+b+c)^*$$

Ejercicio 2

Demuestre que las siguientes expresiones regulares son equivalentes $R = (a^*(b+c)^* + b^*)^*$ y $S = (a+b+c)^*$

Desarrollaremos expresión S para llegar a la expresión R.

$$
\begin{aligned}
S &= (a+b+c)^* \\
&= (a^*(b+c)^*)^* && \text{propiedad 7.6 con } R = a \text{ y } S = b+c
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Demuestre que las siguientes expresiones regulares son equivalentes $R = (a^*(b+c)^* + b^*)^*$ y $S = (a+b+c)^*$

Desarrollaremos expresión S para llegar a la expresión R.

$$\begin{aligned}
S &= (a+b+c)^* \\
&= (a^*(b+c)^*)^* && \text{propiedad 7.7 con } R = a \text{ y } S = b+c \\
&= (b^* + a^*(b+c)^*)^* && \text{propiedad 8.3 con } R = b^* \text{ y } S = a^*(b+c)^*
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Demuestre que las siguientes expresiones regulares son equivalentes $R = (a^*(b+c)^* + b^*)^*$ y $S = (a+b+c)^*$

Desarrollaremos expresión S para llegar a la expresión R.

$$
\begin{aligned}
S &= (a+b+c)^* \\
&= (a^*(b+c)^*)^* && \text{propiedad 7.7 con } R = a \text{ y } S = b+c \\
&= (b^* + a^*(b+c)^*)^* && \text{propiedad 8.3 con } R = b^* \text{ y } S = a^*(b+c)^* \\
&= (a^*(b+c)^* + b^*)^* && \text{propiedad 2} \\
&= R
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$\begin{aligned} R &= a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^* \\ &= a + a(b + aa)(b + aa)^* + a(aa + b)^* \qquad \text{propiedad 7.7} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b+aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa+b)^*$ y $S = a(aa+b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$\begin{aligned} R &= a + a(b+aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa+b)^* \\ &= a + a(b+aa)(b+aa)^* + a(aa+b)^* && \text{propiedad 7.7} \\ &= a(\varepsilon + (b+aa)(b+aa)^*) + a(aa+b)^* && \text{propiedad 3.1} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$
\begin{aligned}
R &= a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^* & \\
&= a + a(b + aa)(b + aa)^* + a(aa + b)^* & \text{propiedad 7.7} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)(b + aa)^*) + a(aa + b)^* & \text{propiedad 3.1} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)^+) + a(aa + b)^* & \text{propiedad 7.3}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$
\begin{aligned}
R &= a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^* && \\
&= a + a(b + aa)(b + aa)^* + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.7} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)(b + aa)^*) + a(aa + b)^* && \text{propiedad 3.1} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)^+) + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.3} \\
&= a(b + aa)^* + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.5}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes: $R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$
\begin{aligned}
R &= a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^* & \\
&= a + a(b + aa)(b + aa)^* + a(aa + b)^* & \text{propiedad 7.7} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)(b + aa)^*) + a(aa + b)^* & \text{propiedad 3.1} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)^+) + a(aa + b)^* & \text{propiedad 7.3} \\
&= a(b + aa)^* + a(aa + b)^* & \text{propiedad 7.5} \\
&= a(aa + b)^* + a(aa + b)^* & \text{propiedad 2}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Demuestre que siguientes expresiones regulares son equivalentes:
$R = a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^*$ y $S = a(aa + b)^*$.

Desarrollaremos expresión R para llegar a la expresión S.

$$
\begin{aligned}
R &= a + a(b + aa)(b^*aa)^*b^* + a(aa + b)^* \\
&= a + a(b + aa)(b + aa)^* + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.7} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)(b + aa)^*) + a(aa + b)^* && \text{propiedad 3.1} \\
&= a(\varepsilon + (b + aa)^+) + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.3} \\
&= a(b + aa)^* + a(aa + b)^* && \text{propiedad 7.5} \\
&= a(aa + b)^* + a(aa + b)^* && \text{propiedad 2} \\
&= a(aa + b)^* \\
&= S
\end{aligned}
$$

Lenguajes Regulares

Un lenguaje regular L es la denotación de una expresión regular R. Esto es $L = [[R]]$. Cuando conocemos la expresión regular lo denotamos como $L(R)$.

i. $[[\emptyset]]$ es un lenguaje regular.
ii. $[[\varepsilon]]$ es un lenguaje regular.
iii. $[[a]]$ es un lenguaje regular, $\forall a \in \Sigma$.
iv. Sean R_1 y R_2 regex de los lenguajes L_1 y L_2 respectivamente, entonces:
    a) $L_1 \cup L_2 = [[R_1]] \cup [[R_2]] = [[R_1 + R_2]]$ es un lenguaje regular.
    b) $L_1 \cdot L_2 = [[R_1]] \cdot [[R_2]] = [[R_1 \cdot R_2]]$ es un lenguaje regular.
    c) $L_1^* = [[R_1^*]] = [[R_1]]^*$ es un lenguaje regular.

GramáticasRegulares

Una gramática $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$ es **regular** si cada regla de producción es de la forma $X \to aY$ ó $X \to \varepsilon$, donde $X, Y \in \Delta$ y $a \in \Sigma$.

- Σ es un alfabeto de símbolos terminales.
- Δ es un alfabeto de símbolos no terminales.
- S es el símbolo inicial, $S \in \Delta$.
- R son las reglas de producción.