Formas normales de gramáticas libres de contexto

Teresa Becerril Torres
terebece1508@ciencias.unam.mx

13 de abril de 2023

Eliminación de símbolos inútiles

Definamos una gramática $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$, donde $\Sigma = \{a,\ b,\ d\}$, $\Delta = \{S,\ A,\ B,\ C,\ D\}$, S es el símbolo inicial y las reglas R están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\rightarrow \mathsf{AB} \mid \mathsf{AC} \mid \mathsf{CD} \\
\mathsf{A} &\rightarrow \mathsf{BB} \\
\mathsf{B} &\rightarrow \mathsf{AC} \mid \mathsf{ab} \\
\mathsf{C} &\rightarrow \mathsf{Ca} \mid \mathsf{CC} \\
\mathsf{D} &\rightarrow \mathsf{BC} \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{d}
\end{aligned}
$$

Eliminación de símbolos inútiles

Eliminación de símbolos que no generan:

1. Los símbolos a, b y d generan por la base del algoritmo.
2. Como $D \to b$ y $D \to d$, D genera.
3. Ya que $B \to ab$, b genera.
4. Como $A \to BB$, A genera.
5. Ya que $S \to AB$, S genera.

Los símbolos que generan son: $\{S, A, B, D, a, b, d\}$

Eliminación de símbolos inútiles

Al considerar sólo estos símbolos en la gramática obtenemos la gramática con sólo símbolos generadores:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AB \\
A &\rightarrow BB \\
B &\rightarrow ab \\
D &\rightarrow b \mid d
\end{aligned}
$$

Eliminación de símbolos inútiles

Eliminación de símbolos no alcanzables:

1. El símbolo S es alcanzable.
2. Como S $\rightarrow$ AB, A y B son alcanzables.
3. Ya que B $\rightarrow$ ab, a y b son alcanzables.

Los símbolos que alcanzables son: {S, A, B, a, b}

Obtenemos la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow BB \\ B &\rightarrow ab \end{aligned}$$

Eliminación de símbolos anulables

Definamos una gramática $G = (\Sigma, \Delta, S, R)$, donde $\Sigma = \{a,\ b\}$, $\Delta = \{S,\ A,\ B,\ C\}$, S es el símbolo inicial y las reglas R están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\to \mathsf{ABC} \mid \mathsf{BCB} \\
\mathsf{A} &\to \mathsf{aB} \mid \mathsf{a} \\
\mathsf{B} &\to \mathsf{CC} \mid \mathsf{b} \\
\mathsf{C} &\to \mathsf{S} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Eliminación de símbolos anulables

Detectar símbolos anulables

1. Como $C \to \varepsilon$, C es anulable.
2. Ya que $S \to ABC$ y $S \to BCB$, S es anulable.
3. Como $B \to CC$, B es anulable.

Construir producciones sin transiciones ε

1. De $S \to ABC$ obtenemos $S \to ABC \mid AB \mid AC \mid A$
2. De $S \to BCB$ obtenemos $S \to BCB \mid CB \mid BB \mid BC \mid B \mid C$
3. De $B \to CC$ obtenemos $B \to CC \mid C \mid b$
4. De $C \to \varepsilon$ obtenemos $C \to S$

Eliminación de símbolos anulables

Gramática obtenida

$$S \rightarrow ABC \mid AB \mid AC \mid A \mid BCB \mid CB \mid BB \mid BC \mid B \mid C$$
$$A \rightarrow aB \mid a$$
$$B \rightarrow CC \mid C \mid b$$
$$C \rightarrow S$$

Ejercicio 1

Demostrar que el algoritmo para encontrar producciones anulables, que se resume como:

a) Si A $\rightarrow \varepsilon$, A es anulable.
b) Si $\forall i = 1, ..., k$, C_i ya han sido encontrados y A $\rightarrow C_1C_2...C_k \in R$, entonces A es anulable.

encuentra un símbolo si y sólo si el símbolo es anulable.

Ejercicio 1

$\rightarrow$] Si el algoritmo encuentra un símbolo entonces el símbolo es anulable. Inducción sobre el número de pasos.

Base

Se encuentra en el primer paso, por lo que A $\rightarrow \varepsilon$, lo que implica A $\Rightarrow \varepsilon$. Por lo tanto A es anulable.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que cada C_i es encontrada en menos de n pasos y es anulable, para $\forall i = 1, ..., k$.

Ejercicio 1

Paso inductivo

Como A se encuentra en n pasos, A $\rightarrow$ $C_1C_2...C_k$ lo que implica A $\Rightarrow$ $C_1C_2...C_k$, por H.I. sabemos que cada C_i ha sido encontrado en menos de n pasos y que es anulable, es decir, $C_i \Rightarrow^* \varepsilon$. Por lo que $C_1C_2...C_k \Rightarrow^* \varepsilon$ por lo cual A $\rightarrow^* \varepsilon$. Por lo tanto A es anulable.

$\therefore$ Si el algoritmo encuentra un símbolo entonces el símbolo es anulable.

Ejercicio 1

$\leftarrow$] Si el símbolo es anulable entonces el algoritmo encuentra un símbolo. Inducción sobre el número de producciones.

Base

Producción en un paso A $\Rightarrow \varepsilon$, entonces A $\rightarrow \varepsilon \in R$ y es encontrado en el primer paso.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que cada C$_i$ es anulable y ha sido encontrada en menos de n pasos, para $\forall i = 1, ..., k$.

Ejercicio 1

Paso inductivo

Sea A anulable en n pasos, esto es A $\Rightarrow^* \varepsilon$ y sea A $\Rightarrow$ C$_1$C$_2$...C$_k$ $\Rightarrow^* \varepsilon$, donde para toda i, C$_i$ es anulable. Por H.I. sabemos que cada C$_i$ ha sido encontrada por el algoritmo, por lo que A $\rightarrow$ C$_1$C$_2$...C$_k$ $\in R$. Por lo tanto A es encontrado por el algoritmo.

$\therefore$ Si el símbolo es anulable entonces el algoritmo encuentra un símbolo