Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

EXAMEN 02

Computación Cuántica I

Profesor: Salvador Elías Venegas Andraca

Ayudante: Héctor Miguel Mejía Díaz

Alumno: Carlos Emilio Castañón Maldonado

1. Considere los kets:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\,|11\rangle$$
$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle$$

Calcule:

(a) $\langle\psi|\phi\rangle$

El producto interno $\langle\psi|\phi\rangle$ está dado por:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 01| + \frac{-i}{\sqrt{3}}\langle 11|\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|11\rangle\right)$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 01|10\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 01|11\rangle + \frac{-i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 11|10\rangle + \frac{-i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 11|11\rangle$$

Recordando que:

$$\langle 01|10\rangle = 0 \quad \langle 01|11\rangle = 0 \quad \langle 11|10\rangle = 0 \quad \langle 11|11\rangle = 1$$

Tenemos:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\langle 11|11\rangle$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{-i}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \quad \langle\psi|\phi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{6}}$$

(b) $|\psi\rangle\langle\phi|$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\,|11\rangle\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,\langle 10| + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\langle 11|\right)$$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,|01\rangle\langle 10| + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,|01\rangle\langle 11| + \frac{i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle\langle 10| + \frac{i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle\langle 11|$$

Calculamos los coeficientes para cada término:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{i}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{i}{\sqrt{6}}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|01\rangle\langle 10| + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|01\rangle\langle 11| + \frac{i}{\sqrt{6}}\,|11\rangle\langle 10| + \frac{i}{\sqrt{6}}\,|11\rangle\langle 11|$$

$\therefore$ El operador $|\psi\rangle\langle\phi|$ es:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|01\rangle\langle 10| + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|01\rangle\langle 11| + \frac{i}{\sqrt{6}}\,|11\rangle\langle 10| + \frac{i}{\sqrt{6}}\,|11\rangle\langle 11|$$

(c) $\left(\hat{I}\otimes|0\rangle\langle 0| + \hat{X}\otimes|1\rangle\langle 1|\right)|\phi\rangle$

El estado $|\phi\rangle$ en forma expandida se define como:

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle\,.$$

Usamos la notación $|q_1q_2\rangle = |q_1\rangle\otimes|q_2\rangle$, donde el primer qubit es q_1 y el segundo es q_2.
El estado $|\phi\rangle$ se expande como:

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle\,.$$

Para $\sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle$

El segundo qubit está en $|0\rangle$, así que solo el término $\hat{I}\otimes|0\rangle\langle 0|$ actúa.
Como el primer qubit es $|1\rangle$, no se modifica:

$$\hat{I}\otimes|0\rangle\langle 0|\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle$$

Para $\sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle$

El segundo qubit está en $|1\rangle$, así que solo el término $\hat{X}\otimes|1\rangle\langle 1|$ actúa.
El operador $\hat{X}$ (NOT) cambia el primer qubit de $|1\rangle$ a $|0\rangle$:

$$\hat{X}\otimes|1\rangle\langle 1|\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,|11\rangle\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|01\rangle$$

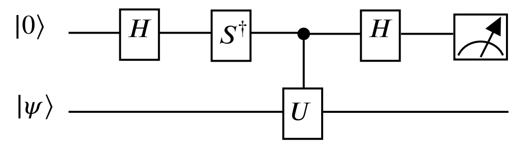
Por ende tenemos que:

$$\left(\hat{I}\otimes|0\rangle\langle 0| + \hat{X}\otimes|1\rangle\langle 1|\right)|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|01\rangle\,.$$

2. En el circuito siguiente, $|\psi\rangle$ es un estado de n qubits, $\hat{U}$ es un operador unitario que actúa sobre $|\psi\rangle$ y $\hat{S}^{\dagger} = |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/2}|1\rangle\langle 1|$ es la compuerta de fase.
Muestre que la probabilidad de medir al primer qubit en el estado $|0\rangle$ es:

$$\frac{1}{2}\Big(1 + Im\,\langle\psi|\,\hat{U}\,|\psi\rangle\Big)$$

donde Im denota la parte imaginaria de un número complejo.



La probabilidad de medir el primer qubit en $|0\rangle$ está dada por:

$$P(0) = \left\| \frac{1}{2}\left(|\psi\rangle - iU\,|\psi\rangle\right) \right\|^2$$

Calculamos la norma:

$$\||\psi\rangle - iU\,|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle - i\,\langle\psi|U\,|\psi\rangle\rangle + i\,\Big\langle\psi|U^{\dagger}\,|\psi\rangle\Big\rangle + \Big\langle\psi|U^{\dagger}U\,|\psi\rangle\Big\rangle$$

Dado que U es unitario ($U^{\dagger}U = I$) y $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, esto se simplifica a:

$$\||\psi\rangle - iU\,|\psi\rangle\|^2 = 1 + \mathrm{Im}\,\langle\psi|U\,|\psi\rangle\rangle$$

Por ende, tenemos:

$$P(0) = \frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{Im}\,\langle\psi|U\,|\psi\rangle\rangle\right)$$

$$\therefore P(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Im}\,\langle\psi|U\,|\psi\rangle\rangle\right)$$

3. La siguiente tabla ilustra una instancia particular del protocolo BB84, en ausencia de Eve.
Las convenciones de notación son las siguientes:

$+$: Base Computacional

- $\uparrow$: 0
- $\rightarrow$: 1

$\times$: Base Diagonal

- $\nearrow$: 0
- $\nwarrow$: 1

Con base en la información presentada, indique la llave pública resultante.
Justifique su respuesta.

Bit aleatorio de Alice	0	1	1	0	1	0	0	1
Base de Alice	$+$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$
Polarización	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$
Base de Bob	$+$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$+$
Medición de Bob	$\uparrow$	$\nearrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

Observemos que bases coinciden:

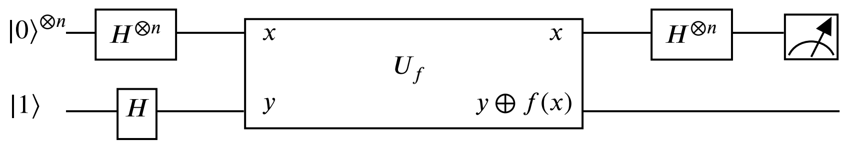
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8
Bit aleatorio de Alice	0	1	1	0	1	0	0	1
Base de Alice	$+$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$
Base de Bob	$+$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$+$
	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✓

Comparamos polarización y medición:

Posición	Polarización (Alice)	Medición (Bob)	Bit Resultante
1	$\uparrow$	$\uparrow$	0
3	$\nwarrow$	$\nwarrow$	1
6	$\nearrow$	$\nearrow$	0
8	$\rightarrow$	$\rightarrow$	1

$\therefore$ La llave publica resultante es: 0101

4. El circuito siguiente implementa el algoritmo de Deutsch-Jozsa.
Explique en qué consiste el problema de Deutsch-Jozsa y por qué el algoritmo del mismo nombre lo resuelve con una sola medición.



El problema de Deutsch-Jozsa consiste en determinar si una función $f(x)$, definida como; $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, es constante o balanceada.
Una función:

Es constante si para todos los valores de entrada x, $f(x)$ tiene el mismo valor ,es decir, siempre $f(x) = 0$ o siempre $f(x) = 1$.

Es balanceada si el número de resultados no necesariamente siempre son $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$.

El algoritmo utiliza la superposición cuántica para evaluar todos los posibles valores de $f(x)$ de manera simultánea, ademas que la interferencia cuántica asegura que la información sobre si es constante o balanceada se concentre en la amplitud del estado final, eliminando la necesidad de evaluaciones adicionales.

Por lo tanto, basta una sola medición para determinar si $f(x)$ es constante o balanceada.

5. Explique, sin precisar detalles matemáticos, en qué consiste la inversión sobre la media en el algoritmo de Grover.

La inversión sobre la media ajusta las amplitudes de los estados cuánticos para aumentar la probabilidad de encontrar el elemento deseado.