Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

TAREA 02

Computación Cuántica I

Profesor: Salvador Elías Venegas Andraca

Ayudante: Héctor Miguel Mejía Díaz

Alumno: Carlos Emilio Castañón Maldonado

1. Construya, con todo detalle, el protocolo de superdense coding utilizando el estado de Bell:

$$\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

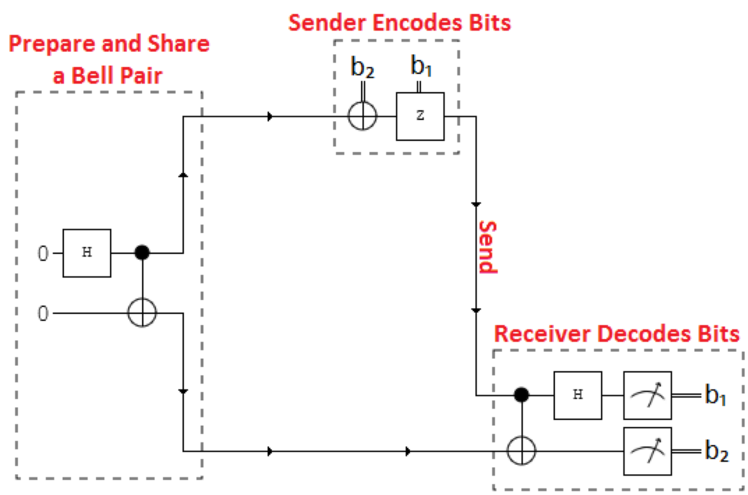
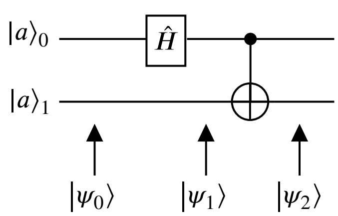


Imagen recuperada de: https://en.wikipedia.org/wiki/Superdense_coding

Recordando que el protocolo de superdense coding establece que primero debemos preparar nuestros bits a mandar siguiendo lo siguiente:



$$\hat{B}\,|00\rangle = \hat{C}_{not}((\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{I}})\,|00\rangle) = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\hat{B}\,|01\rangle = \hat{C}_{not}((\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{I}})\,|01\rangle) = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\hat{B}\,|10\rangle = \hat{C}_{not}((\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{I}})\,|10\rangle) = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\hat{B}\,|11\rangle = \hat{C}_{not}((\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{I}})\,|11\rangle) = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Podemos darnos cuenta que los bits que estamos usando son 01 los cuales terminaron convirtiéndose en:

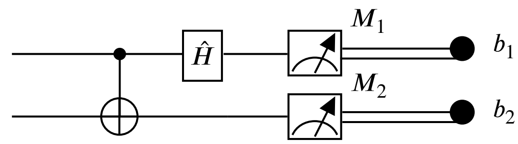
$$\hat{B}\,|01\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Ya que queremos mandar esa información, procedemos a aplicar el operador $\hat{\sigma}_x$ al qubit:

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$|\psi\rangle = \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbf{I}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle + |10\rangle]\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle] = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Ahora, ya que hemos enviado nuestro qubit, del lado del receptor vamos a aplicar lo siguiente para poder decodificar los bits de nuestro qubit:



$$\hat{C}_{not}\left[\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{C}_{not}(|00\rangle + |11\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(|00\rangle + |10\rangle)\right] = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H}\left[\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{H}(|00\rangle + |10\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{H}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{H}|0\rangle|0\rangle + \hat{H}|1\rangle|0\rangle\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[|10\rangle + |01\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[|01\rangle + |10\rangle\right]$$

Como podemos observar hemos terminado con el estado de bell:

$$\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Lo cual sabemos que corresponde a:

$$\hat{B}|01\rangle = \hat{C}_{not}((\hat{H} \otimes \hat{\mathbf{I}})|01\rangle) = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Y por ende que los bits obtenidos por el destinatario a partir del qubit son de 01.