Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estructuras Discretas

Tarea Examen: Relaciones

Castañon Maldonado Carlos Emilio

Preguntas:

1 **Determina si cada relación R definida en el conjunto de enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) es: Reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de un orden parcial.**

(a) $(x, y) \in R$ si $x = y^2$

Antes de iniciar notemos que estamos ante una igualdad por lo que por la definicion de orden parcial (la cual dice que si se satisface alguna de las siguientes; $x < y$, $x = y$ o $y < x$, entonces estamos ante un orden parcial), es entonces que podemos decir que $(x, y) \in R$ si $x = y^2$ **es de un orden parcial**.
Ahora, notemos que $x = y^2$ lo que nos quiere decir es que si tenemos un numero y y a eso le aplicamos su cuadrado (y^2) , su valor sera el de x, es por esto que podemos decir que el valor de x y de y esta ligado a esta desigualdad entre nuestras dos variables $y \leq x$, notemos que aunque pareciera que es la única desigualdad que debería existir para esta igualdad en particular esta no la podremos usar si no tenemos también $x \leq y$.
Esto es importante ya que entonces:

$$x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq x, \quad \text{entonces} \quad x = y^2$$

Ahora si por ejemplo tuviéramos $x = 1$ y $y = 1$, entonces tendríamos

$$1 \leq 1 \quad 1 \leq 1, \quad \text{entonces} \quad 1 = 1^2$$

Ahora si por ejemplo tuviéramos $x = 81$ y $y = 9$, entonces tendríamos

$$81 \nleq 9 \quad 9 \leq 81, \quad \text{entonces} \quad 81 = 9^2$$

Con esto podemos notar que esta relación **no es simétrica** por la definicion de simetría:

$$\forall x \forall y((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$$

También notemos que por la definicion de relación antisimétrica

$$\forall x \forall y(((x, y) \in R \land (y, x) \in R) \rightarrow x = y)$$

La presente relación **es antisimétrica.**

Ahora para saber si es reflexiva procedamos con el siguiente ejemplo:

$$x = 10 \ \text{ y } \ y = 10$$

$$10 \leq 10 \quad 10 \leq 10, \quad \text{entonces} \quad 10 \neq 10^2$$

Con esto podemos notar que esta relación **no es reflexiva** por la definicion de reflexividad:

$$\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$$

Ahora para saber si es transitiva, recordemos su definicion:

$$\forall x \forall y \forall z(((x, y) \in R \land (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$$

A partir del anterior, consideremos el siguiente ejemplo:

$$x = 16, \quad y = 4 \ \text{ y } \ z = 2$$

$$(x, y) = (16, 4) \rightarrow 16 = 4^2$$

$$(y, z) = (4, 2) \rightarrow 4 = 2^2$$

$$(x, z) = (16, 2) \rightarrow 16 \neq 2^2$$

Por ende podemos decir que la presente **no es transitiva**

(b) $(x, y) \in R$ si $x \geq y$

Antes de iniciar notemos que estamos ante una desigualdad por lo que por la definicion de orden parcial (la cual dice que si se satisface alguna de las siguientes; $x < y$, $x = y$ o $y < x$, entonces estamos ante un orden parcial), es entonces que podemos decir que $(x, y) \in R$ si $x \geq y$ **es de un orden parcial**.

Ahora, notemos que $x \geq y$ es lo mismo que decir $y \leq x$

Dicho lo anterior veamos como es que si estuviéramos ante un caso como:

$$y \leq x \quad \text{y} \quad x \leq y$$

Caeríamos en que $y = x$

Es entonces que ahora podemos observar que esta relación **no es simétrica** ya que si por ejemplo tuviéramos $y = 9$ y $x = 10$, tendríamos que:

$$9 \leq 10 \quad \text{y} \quad 10 \nleq 9$$

Por lo que por la definicion de relación antisimétrica

$$\forall x \forall y(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow x = y)$$

Podemos decir que $(x, y) \in R$ si $x \geq y$ **es antisimétrica.**

Ahora, veamos con el siguiente ejemplo si $(x, y) \in R$ si $x \geq y$ es Reflexiva

$$x = 10 \quad y = 10$$

$$(x, y) = (10, 10) = 10 \geq 10$$

Notemos que esto siempre se va a cumplir por que estamos diciendo que un x cumple que es mayor o **igual** a una y es por esto que por la definicion de reflexividad la relación presente **es reflexiva**.

Ahora para saber si es transitiva, recordemos su definicion:

$$\forall x \forall y \forall z(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$$

O en otras palabras:

$$x \geq y \wedge y \geq z \rightarrow x \geq z$$

Notemos que si una x es mayor o igual a una y, además de que esa y es mayor o igual a una z , es lógico pensar que si esa z es menor o igual a esa y, entonces tendremos que nuestra x será irremediablemente mayor o igual que nuestra z.

Esto lo podemos verificar al hacer uso de nuestro Axioma de Extensionalidad

$$\forall x \forall y \Big(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \Big)$$

Es por esto que podemos decir que $(x, y) \in R$ si $x \geq y$ **es transitiva**.

(c) $(x, y) \in R$ si 3 divide a $x + 2y$

Notemos como la relación que nos interesa es $\frac{x+2y}{3}$

Por este motivo procedemos a ilustrar la matriz de $\mathbb{Z}^+ \times \ \mathbb{Z}^+$

$$\mathbb{Z^+}_{m\times n} = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & (1,9) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & (2,9) & \cdots & (2,n) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) & (3,9) & \cdots & (3,n) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & (4,9) & \cdots & (4,n) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & (5,7) & (5,8) & (5,9) & \cdots & (5,n) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & (6,7) & (6,8) & (6,9) & \cdots & (6,n) \\ (7,1) & (7,2) & (7,3) & (7,4) & (7,5) & (7,6) & (7,7) & (7,8) & (7,9) & \cdots & (7,n) \\ (8,1) & (8,2) & (8,3) & (8,4) & (8,5) & (8,6) & (8,7) & (8,8) & (8,9) & \cdots & (8,n) \\ (9,1) & (9,2) & (9,3) & (9,4) & (9,5) & (9,6) & (9,7) & (9,8) & (9,9) & \cdots & (9,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & (m,3) & (m,4) & (m,5) & (m,6) & (m,7) & (m,8) & (m,9) & \cdots & (m,n) \end{bmatrix}$$

Por ende la Matriz de la relación será:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ m \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots & (m,n)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Reflexividad:
$\forall x(x \in A \rightarrow (x,x) \in R)$
Con esto podemos saber que la relación **es reflexiva.**

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots & (m,n)
\end{bmatrix}$$

Simetría:
$\forall x \forall y((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R)$
Con esto podemos saber que la relación **no es simétrica.**

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots & (m,n)
\end{bmatrix}$$

Anti-Simetría:
$\forall x \forall y(((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \to x = y)$
Con esto podemos saber que la relación
no es anti simétrica.
Ya que como podemos notar, en la relación tenemos a los pares ordenados $(3,9)$ y a $(9,3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots & (m,n) \end{bmatrix}$$

Transitividad:
Primero observemos como la matriz R^2 (que es la que esta presente) cumple que $R^2 \subseteq R$ por esto y la definicion de transitividad.
$\forall x \forall y \forall z(((x,y) \in R \land (y,z) \in R) \to (x,z) \in R)$
Podemos saber que la relación **es transitiva.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots & (m,n) \end{bmatrix}$$

Por definicion de orden parcial sabemos que la relación **no es de orden parcial.**

2 **Sea X el conjunto de todas las cadenas de 4 bits (por ejemplo, 0011, 0101, 1000).**
Define una relación R sobre X como $s_1 R s_2$ si alguna subcadena s_1 de longitud 2 es igual a alguna subcadena s_2 de longitud 2.
Ejemplo: $0111R1010$ (porque ambas 0111 y 1010 contienen 01); $1110R0001$ (porque 1110 y 0001 no tienen una subcadena común de longitud 2).
¿Es ésta una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de un orden parcial?

Reflexividad:

$$\forall x(x \in A \to (x,x) \in R)$$

Notemos como, cada cadena de 4 bits contiene subcadenas de longitud 2 que son iguales a sí mismas, por ende y por definicion, la relación R es reflexiva.

Simetría:

$$\forall x \forall y((x,y) \in R \to (y,x) \in R)$$

Notemos como en este caso también, si una subcadena s_1 de longitud 2 es igual a una subcadena s_2 de longitud 2, entonces también se cumple que s_2 es igual a s_1, por ende y por definicion, la relación R es simétrica.

Anti-Simetría:

$$\forall x \forall y(((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \to x = y)$$

En este caso, si una subcadena s_1 de longitud 2 es igual a una subcadena s_2 de longitud 2, no implica que s_1 sea igual a s_2 en su totalidad, por ende y por definicion, la relación R no es antisimétrica.

Transitiva:

$$\forall x \forall y \forall z(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$$

En este caso, si hay subcadenas s_1 y s_2 de longitud 2 que son iguales, y también hay subcadenas s_2 y s_3 de longitud 2 que son iguales, entonces se cumple que s_1 y s_3 tienen una subcadena común de longitud 2, por ende y por definicion, la relación R es transitiva.

Orden Parcial:

Como no poseemos transitividad en nuestra relación podemos decir que por definicion esta relación no es de orden parcial.

3 **Sean R y S relaciones sobre X. Determina si cada afirmación en los es verdadera o falsa. Si la afirmación es verdadera, demuéstrala; en caso contrario, da un contraejemplo.**

(a) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva.
Contraejemplo:
Sean los conjuntos $A = 1, 2, 3$ y $B = 3, 4, 5$ y las relaciones R y S de la siguiente manera:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}(\text{R es transitiva}) \qquad S = \{(3, 4), (4, 5), (3, 5)\}(\text{S es transitiva})$$

$$R \cup S = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (4, 5), (3, 5)\}$$

Observamos que $(1, 2)$ y $(2, 3)$ pertenecen a $R \cup S$, y también $(1, 3)$ y $(3, 4)$ pertenecen a $R \cup S$.
Sin embargo, no existe un par $(2, 4)$ en $R \cup S$ tal que $(2, 3)$ y $(3, 4)$ estén relacionados a través de él.
Por lo tanto, hemos encontrado un contraejemplo donde tanto R como S son transitivas pero la unión $R \cup S$ no es transitiva, lo que demuestra que la afirmación es falsa.

(b) Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ es reflexiva.
Demostración:
Supongamos que R y S son reflexivas, esto significa que para cada elemento x en el conjunto sobre el cual están definidas las relaciones R y S, se cumple que (x, x) pertenece tanto a R como a S.

Consideremos ahora la unión $R \cup S$, para que $R \cup S$ sea reflexiva, debemos demostrar que para cada elemento x en el conjunto sobre el cual está definida $R \cup S$, se cumple que (x, x) pertenece a $R \cup S$.

Tomemos un elemento arbitrario x en el conjunto, si (x, x) pertenece a R, entonces también pertenece a $R \cup S$ debido a la propiedad de inclusión de conjuntos, de manera similar, si (x, x) pertenece a S, entonces también pertenece a $R \cup S$.
En ambos casos, tenemos que (x, x) pertenece a $R \cup S$.

Dado que hemos demostrado que para cada elemento x en el conjunto, (x, x) pertenece a $R \cup S$, podemos concluir que $R \cup S$ es reflexiva.

Por lo tanto, hemos demostrado que si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ también es reflexiva.

(c) Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.
Demostración:
Supongamos que R y S son relaciones simétricas, esto implica que para cada par ordenado (a, b) que pertenece a R, también se cumple que (b, a) pertenece a R, del mismo modo, para cada par ordenado (c, d) que pertenece a S, también se cumple que (d, c) pertenece a S.

Ahora consideremos un par ordenado (x, y) que pertenece a $R \cap S$, lo cual significa que (x, y) pertenece tanto a R como a S.

Debido a la simetría de R, sabemos que (y, x) también pertenece a R, del mismo modo, debido a la simetría de S, sabemos que (y, x) también pertenece a S.

Por lo tanto, hemos demostrado que para cada par ordenado (x, y) que pertenece a $R \cap S$, también se cumple que (y, x) pertenece a $R \cap S$.

Por lo tanto $R \cap S$ es simétrica.

(d) Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.
Antes de iniciar recordemos que la definicion de R^{-1} es:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

Demostración:
Supongamos que R es una relación simétrica, esto significa que para cada par ordenado (a, b) que pertenece a R, también se cumple que (b, a) pertenece a R.

Para demostrar que R^{-1} es simétrica, debemos demostrar que para cada par ordenado (b, a) que pertenece a R^{-1}, también se cumple que (a, b) pertenece a R^{-1}.

Consideremos un par ordenado (b, a) que pertenece a R^{-1}, esto significa que (a, b) pertenece a R, ya que la inversa de R^{-1} se obtiene intercambiando los elementos de cada par ordenado de R.

Dado que R es simétrica, tenemos que (a, b) pertenece a R, pero esto implica que (b, a) pertenece a R debido a la simetría de R.

Por lo tanto, hemos demostrado que si R es simétrica, entonces su inversa R^{-1} también es simétrica.

(e) Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ es antisimétrica.
Demostración:
Supongamos que R y S son relaciones antisimétricas, esto implica que si (a, b) y (b, a) pertenecen a R, entonces $a = b$, y lo mismo se aplica a la relación S.

Para demostrar que $R \cap S$ es antisimétrica, debemos demostrar que si (a, b) y (b, a) pertenecen a $R \cap S$, entonces $a = b$.

Consideremos un par ordenado (a, b) que pertenece a $R \cap S$, esto significa que (a, b) pertenece tanto a R como a S.
Dado que R es antisimétrica, si (a, b) y (b, a) pertenecen a R, entonces $a = b$.
Del mismo modo, dado que S es antisimétrica, si (a, b) y (b, a) pertenecen a S, también tenemos $a = b$.
Dado que (a, b) pertenece tanto a R como a S, podemos concluir que $a = b$.

Por lo tanto, hemos demostrado que si R y S son antisimétricas, entonces su intersección $R \cap S$ también es antisimétrica.

4 **Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{3, 4\}$ y $C = \{1, 3\}$.**
Define la relación R en $P(X)$, el conjunto de todos los subconjuntos de X como :

$$ARB \textbf{ si } A \cup Y = B \cup Y$$

Demuestra que R es una relación de equivalencia.

Notemos que a simple vista podemos intuir que si la unión de un conjunto A con uno Y es exactamente igual a la unión de un conjunto B con uno Y, entonces estamos ante que A y B son el mismo conjunto y por ende el probar que la relación de equivalencia sobre este mismo conjunto es verdadera se vuelve trivial, es por eso que es exactamente lo que haremos, ahora procederemos a demostrar que A y B son el mismo conjunto.

Recordemos nuestro Axioma de Extensionalidad nos ofrece mas herramientas que las empleadas anteriormente, una de estas es la que nos dice que dos conjuntos serán iguales si y solo si tienen los mismos elementos, es decir:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Ahora, recordemos que las contenciones van a lucir de la siguiente forma:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \qquad B \subseteq A \leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$A \subseteq B$
Sea $\forall x(x \in A)$ y sea x un valor arbitrario de A
Queremos ver si $x \in B$
Asumimos que $B \subseteq A$
$\therefore\ x \in B$
$\therefore\ A \subseteq B$

$B \subseteq A$
Sea $\forall y(y \in B)$ y sea y un valor arbitrario de B
Queremos ver si $y \in A$
Asumimos que $A \subseteq B$
$\therefore\ y \in A$
$\therefore\ B \subseteq A$

$$\therefore\ A = B$$

Otra forma de demostrar que son los mismos conjuntos es mediante *idempotencia*, la cual nos dice que para todo conjunto A, $A \cup A = A$.
Es por esto que si tenemos $A \cup B$ esto debe ser $A \cup B = A$ o bien $A \cup B = B$ (es lo mismo pero nos enfocaremos en este ultimo), veamos que $A \cup B = B$ se cumplirá si y solo si $A \subseteq B$, para demostrar todo lo descrito, suponemos $A \subseteq B$, observemos entonces que $A \cup B \subseteq B$.
Sea $x \in A \cup B$ entonces por la definicion de unión tendremos que $x \in A \vee x \in B$

$\rightarrow$
Si $x \in A$, y como por hipótesis tenemos $A \subseteq B$, entonces $x \in B$

$\leftarrow$
Si $x \in B$, podemos ver con claridad que $x \in B$

$\therefore$ Con todo lo anterior podemos decir que $A \cup B = B$ además de que si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$.

Con todo lo que hemos dicho, ahora podemos decir sin lugar a dudas que:

$$A \cup Y = B \cup Y$$

$$B \cup Y = B \cup Y$$

$$B \cup Y$$

Y por ende la relación quedaría como:

$$ARB = BRB$$

$$BRB$$

Ahora para demostrar que BRB es una relación de equivalencia debemos ver que esta cumpla en ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad:

$$\forall x(x \in A \to (x,x) \in R)$$

Para demostrar la reflexividad, debemos mostrar que cada elemento de B está relacionado consigo mismo. En este caso, como queremos demostrar que BRB es una relación de equivalencia, debemos demostrar que todos los elementos de B están relacionados consigo mismos.
Podemos afirmar que esto se cumple trivialmente, ya que por definición, la relación R en B relaciona cada elemento con sí mismo, entonces, la reflexividad se cumple automáticamente.

Simetría:

$$\forall x \forall y((x,y) \in R \to (y,x) \in R)$$

Para demostrar la simetría, debemos mostrar que si un elemento x está relacionado con otro elemento y, entonces y también está relacionado con x.
En este caso, nuevamente, la propiedad de simetría se cumple trivialmente, ya que por definición, cada elemento de B está relacionado consigo mismo, por lo tanto, si xRy, entonces yRx.
Es por esto que la simetría se satisface automáticamente.

Transitiva:

$$\forall x \forall y \forall z(((x,y) \in R \land (y,z) \in R) \to (x,z) \in R)$$

Para demostrar la transitividad, debemos mostrar que si un elemento x está relacionado con y y y está relacionado con z, entonces x también está relacionado con z.
En este caso, también se cumple de manera trivial, dado que todos los elementos de B están relacionados consigo mismos, si xRy y yRz, entonces automáticamente se cumple que xRz, ya que todos están relacionados consigo mismos.

$\therefore$ Podemos concluir que R **si es una relación de equivalencia.**