

Estructuras Discretas

Recursión

Rafael Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

01 de febrero de 2023

Conjuntos definidos recursivamente

Un conjunto es definido recursivamente si está parcialmente definido en términos de sí mismo:

- 1 Un **caso base** que es el conjunto inicial de elementos que se definen de forma directa. Podemos verlos como la semilla a partir de la cuál se generan los otros elementos.

Suponiento que se desea definir recursivamente el conjunto A , las reglas de caso base son de la forma:

x es un elemento de A

- 2 Un **caso recursivo** que corresponde a la regla que define nuevos elementos utilizando la misma definición que se está dando.

Si x es un elemento de A entonces $c(x)$ es un elemento de A .

Considerando que $c(x)$ es una función constructora.

- 3 Un **caso de exclusión** que indica que el conjunto no contiene nada más que aquello especificado por las reglas anteriores.

Ejemplo

Cadenas binarias

En el siguiente ejemplo se definirán cadenas de 0's y 1's el cuál denotamos por *Bin*.

$$Bin = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$$

Podemos verificar que los elementos más pequeños son los símbolos 0 y 1 y cualquier cadena se forma al ir pegando 0's y 1's, ya sea al inicio o final, hasta formar la cadena deseada.

La función que pega un símbolo binario sería en este caso la función constructora.

Definición recursiva

Cadenas binarias

El conjunto de cadenas binarias (Bin) se define recursivamente mediante las siguientes reglas.

- 1 **Caso base:** 0 y $1 \in Bin$.
- 2 **Caso recursivo:** Si $x \in Bin$, entonces
 - a) $0x \in Bin$
 - b) $1x \in Bin$
- 3 **Caso de exclusión:** Sólo lo generado con las reglas 1 y 2 forma parte del conjunto Bin .

Cadenas formadas por Bin

A continuación veremos como se genera paso a paso la cadena $1100 \in Bin$:

1. $0 \in Bin$ (por la regla 1)
2. $00 \in Bin$ (por la regla 2.a)
3. $100 \in Bin$ (por la regla 2.b)
4. $1100 \in Bin$ (por la regla 2.b)

Sucesiones definidas recursivamente

- Una sucesión es un conjunto de cosas (normalmente números).
- Se encuentran en un cierto orden.
- Siguen una regla o patrón, por medio del cual se puede calcular el valor de cada término.

Ejemplo

Consideren la siguiente sucesión

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

En este caso el i -ésimo término t_i se puede calcular con la fórmula $t_i = 2^i$, considerando que el primer término es t_0 .

Sin embargo, esta ecuación **no es recursiva**. Debemos encontrar un patrón recursivo.

Observemos que el siguiente término es el resultado de multiplicar por 2 el último término dado.

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \\ t_n &= 2 * t_{n-1} \end{aligned}$$

Término de la sucesión

El cálculo de un término siempre depende del anterior, si queremos calcular el décimo término, que es t_9 , tenemos:

$$\begin{aligned}t_9 &= 2 * t_8 \\&= 2 * (2 * t_7) \\&= 2 * (2 * (2 * t_6)) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * t_5))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * t_4)))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * t_3))))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * t_2)))))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * t_1))))))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * t_0)))))))) \\&= 2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * (2 * 1)))))))) \\&= 2^9 = 512\end{aligned}$$

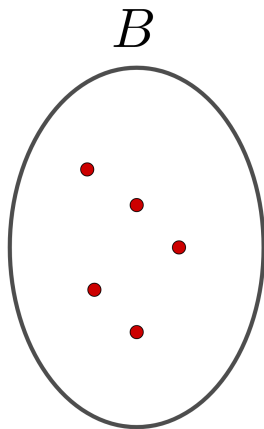
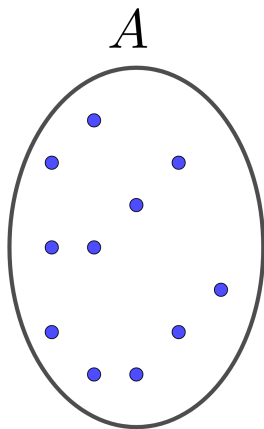
Recursión en naturales

- Se definirán las operaciones básicas de los números naturales.
- Utilizaremos definiciones recursivas usando naturales para poder definir operaciones entre ellos.
- Aprenderemos a analizar funciones básicas para definir otras más complejas de manera recursiva.

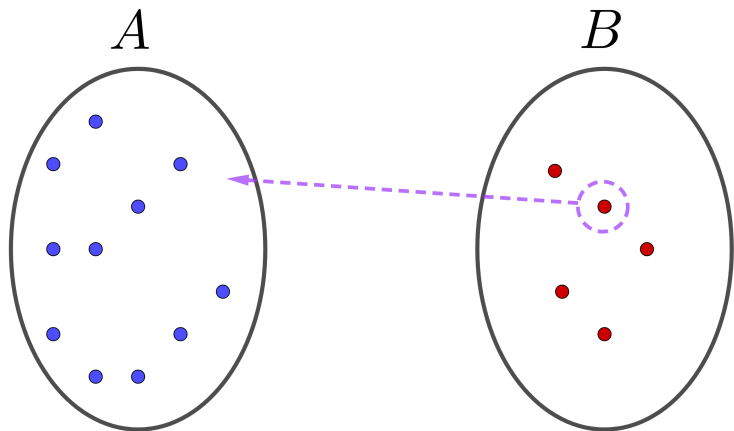
¿Cómo sumamos?

- Tenemos que analizar la suma como la unión de dos conjuntos.
- La idea es ir pasando elementos de un conjunto a otro.
- Este proceso se hace de uno en uno hasta que uno de los conjuntos se encuentra vacío.
- El resultado es el número de elementos que tenga el conjunto al que se pasó el contenido del otro.

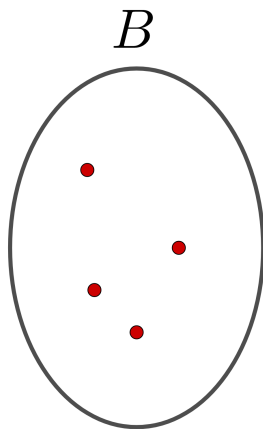
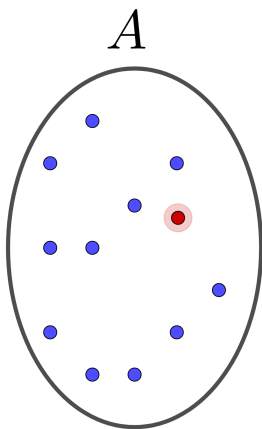
Ejemplo de suma



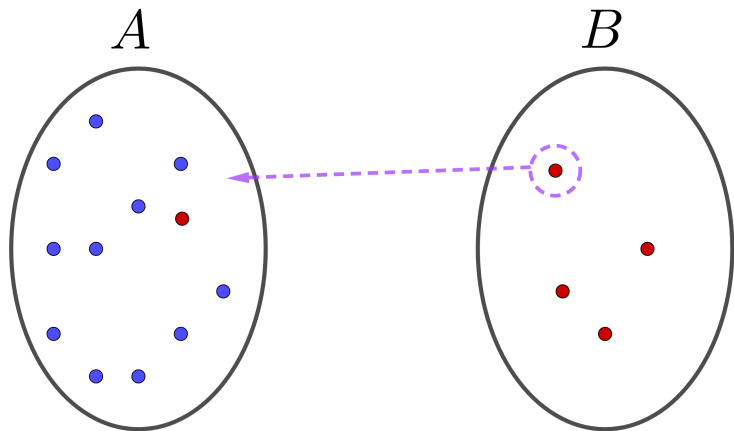
Ejemplo de suma



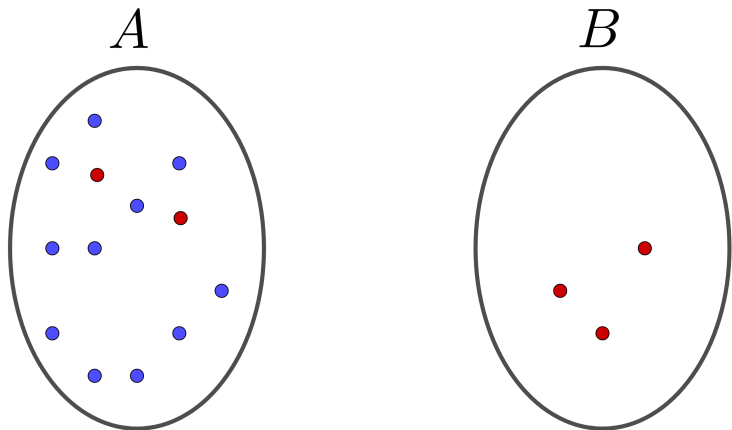
Ejemplo de suma



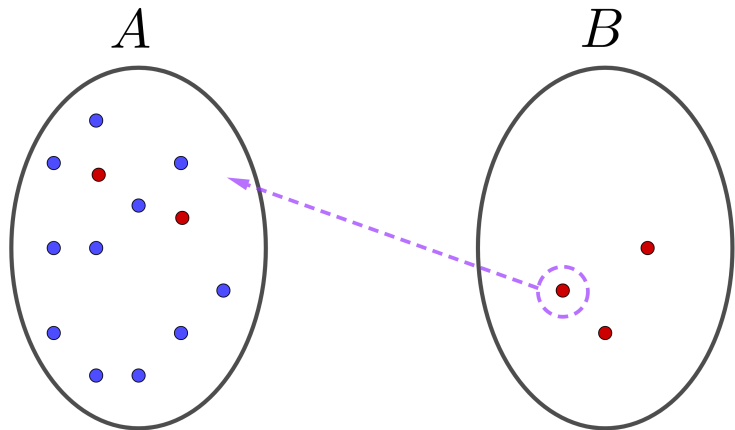
Ejemplo de suma



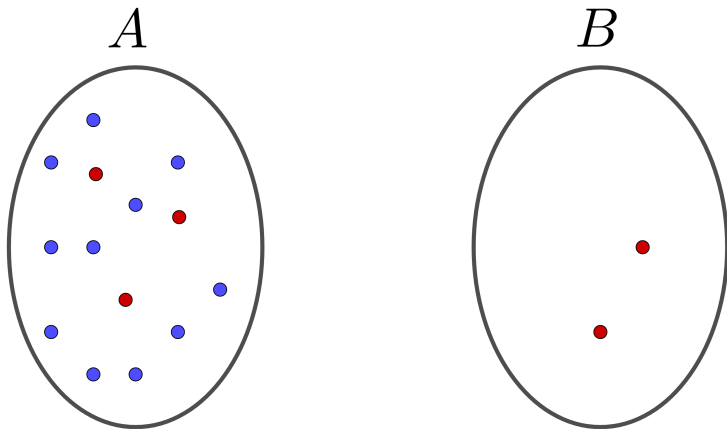
Ejemplo de suma



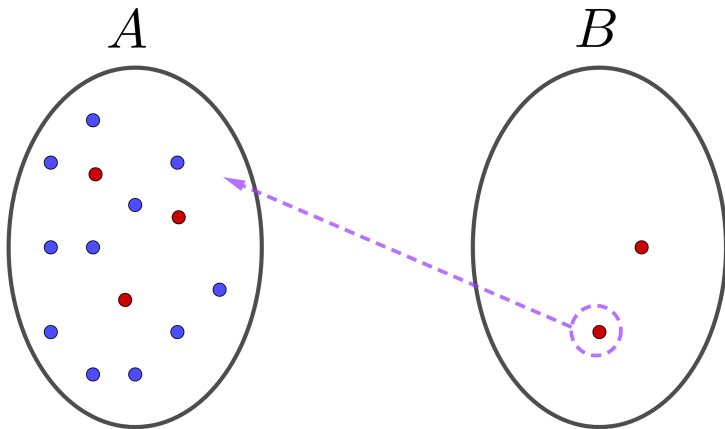
Ejemplo de suma



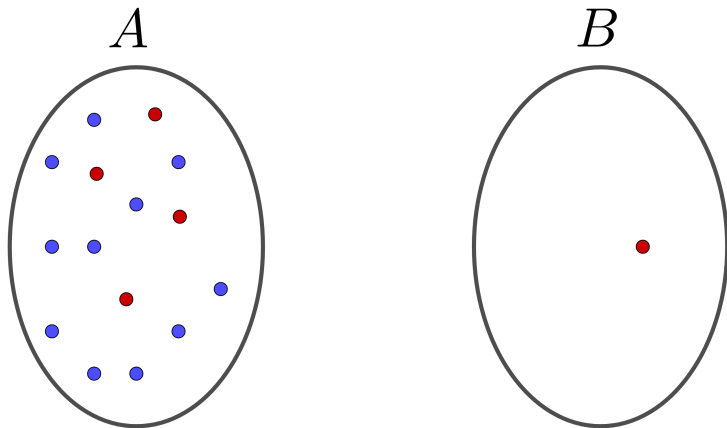
Ejemplo de suma



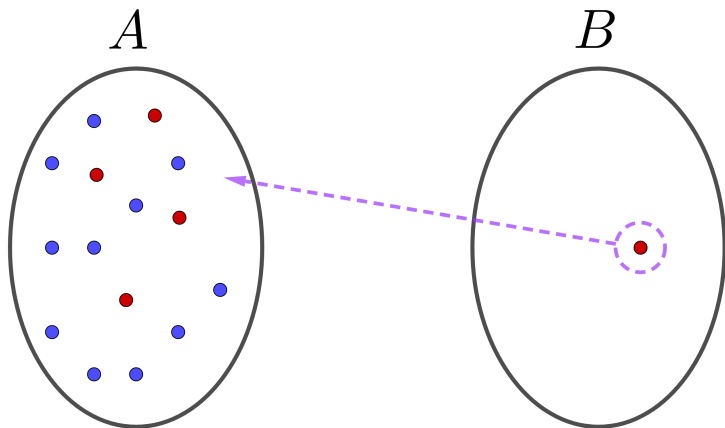
Ejemplo de suma



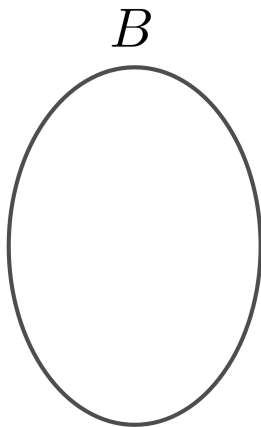
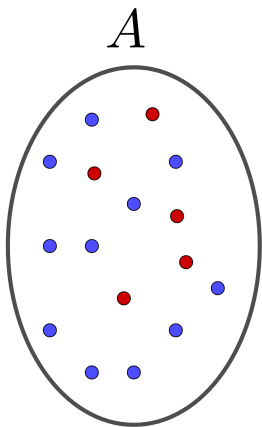
Ejemplo de suma



Ejemplo de suma



Ejemplo de suma



Suma recursiva

- Primero debemos generar un caso base

El cual representa cuando la función se detiene y el caso más simple que podemos aplicar en una suma.

Caso base:



Suma recursiva

- Primero debemos generar un caso base

El cual representa cuando la función se detiene y el caso más simple que podemos aplicar en una suma.

Caso base:

$$suma(n, 0) = n$$



Suma recursiva

- Primero debemos generar un caso base

El cual representa cuando la función se detiene y el caso más simple que podemos aplicar en una suma.

Caso base:

$$suma(n, 0) = n$$

- Posteriormente generamos un caso recursivo

En este caso la función constructora debe de aplicarse hasta que podamos llegar al caso base.

Caso recursivo:

Suma recursiva

- Primero debemos generar un caso base

El cual representa cuando la función se detiene y el caso más simple que podemos aplicar en una suma.

Caso base:

$$suma(n, 0) = n$$

- Posteriormente generamos un caso recursivo

En este caso la función constructora debe de aplicarse hasta que podamos llegar al caso base.

Caso recursivo:

$$suma(n, m) = suma(n + 1, m - 1)$$

Ejemplo

suma(7,4)

Ejemplo

$$\textit{suma}(7,4) = \textit{suma}(7+1,4-1) = \textit{suma}(8,3)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7, 4) &= suma(7 + 1, 4 - 1) = suma(8, 3) \\ &= suma(8 + 1, 3 - 1) = suma(9, 2) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7, 4) &= suma(7 + 1, 4 - 1) = suma(8, 3) \\ &= suma(8 + 1, 3 - 1) = suma(9, 2) \\ &= suma(9 + 1, 2 - 1) = suma(10, 1) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$suma(0,5)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$suma(0,5) = suma(0+1,5-1) = suma(1,4)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} suma(0,5) &= suma(0+1,5-1) = suma(1,4) \\ &= suma(1+1,4-1) = suma(2,3) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} suma(0,5) &= suma(0+1,5-1) = suma(1,4) \\ &= suma(1+1,4-1) = suma(2,3) \\ &= suma(2+1,3-1) = suma(3,2) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} suma(0,5) &= suma(0+1,5-1) = suma(1,4) \\ &= suma(1+1,4-1) = suma(2,3) \\ &= suma(2+1,3-1) = suma(3,2) \\ &= suma(3+1,2-1) = suma(4,1) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} suma(0,5) &= suma(0+1,5-1) = suma(1,4) \\ &= suma(1+1,4-1) = suma(2,3) \\ &= suma(2+1,3-1) = suma(3,2) \\ &= suma(3+1,2-1) = suma(4,1) \\ &= suma(4+1,1-1) = suma(5,0) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} suma(7,4) &= suma(7+1,4-1) = suma(8,3) \\ &= suma(8+1,3-1) = suma(9,2) \\ &= suma(9+1,2-1) = suma(10,1) \\ &= suma(10+1,1-1) = suma(11,0) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} suma(0,5) &= suma(0+1,5-1) = suma(1,4) \\ &= suma(1+1,4-1) = suma(2,3) \\ &= suma(2+1,3-1) = suma(3,2) \\ &= suma(3+1,2-1) = suma(4,1) \\ &= suma(4+1,1-1) = suma(5,0) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Multiplicación recursiva

- La función de multiplicación es una suma abreviada.
- La multiplicación de dos números es sumar el mismo número tantas veces como indique el otro.
- Sabemos que multiplicar un número por cero es cero.
- Para generar una función recursiva esta debe estar basada en la suma.
- El caso base debe contener el caso más simple de multiplicación.

Idea de la multiplicación

- La multiplicación es una suma abreviada.
- Los casos más simples para multiplicar son por 0 y 1.
- Para multiplicar debemos poder sumar.
- En tal caso multiplicar 7×5 es sumar 5 veces el 7 o 7 veces el 5.

Idea de la multiplicación

$$7 \times 5$$

Idea de la multiplicación

$$7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned} 7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ &= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned} 7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ &= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\ &= 7 + (7 \times 4) \end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2)))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1))))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (0)))))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7))))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (14)))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (14))) \\&= 7 + (7 + (21))\end{aligned}$$

Idea de la multiplicación

$$\begin{aligned}7 \times 5 &= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\&= 7 + (7 + 7 + 7 + 7) \\&= 7 + (7 \times 4) \\&= 7 + (7 + (7 \times 3)) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 \times 2))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 1)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (7 \times 0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7 + (0))))) \\&= 7 + (7 + (7 + (7 + (7)))) \\&= 7 + (7 + (7 + (14))) \\&= 7 + (7 + (21)) \\&= 7 + (28) = 35\end{aligned}$$

Multiplicación recursiva

1 Caso base:

$$\text{multiplica}(n, 0) = 0$$

2 Caso recursivo:

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\textit{multiplica}(n, m) = \textit{suma}(n, \textit{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\textit{multiplica}(7, 5)$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\textit{multiplica}(n, m) = \textit{suma}(n, \textit{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned}\textit{multiplica}(7, 5) \\ = \textit{suma}(7, \textit{multiplica}(7, 4))\end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\textit{multiplica}(n, m) = \textit{suma}(n, \textit{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned}\textit{multiplica}(7, 5) \\ &= \textit{suma}(7, \textit{multiplica}(7, 4)) \\ &= \textit{suma}(7, \textit{suma}(7, \textit{multiplica}(7, 3)))\end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\text{multiplica}(7, 5)$$

$$= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4))$$

$$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3)))$$

$$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2))))$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\text{multiplica}(7, 5)$$

$$= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4))$$

$$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3)))$$

$$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2))))$$

$$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1)))))$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$\text{multiplica}(7, 5)$

$= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4))$

$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3)))$

$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2))))$

$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1)))))$

$= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0)))))$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0))))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 7))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 7))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, 14)) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 7))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 14))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, 21)) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 7)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 14))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, 21)) \\ &= \text{suma}(7, 28) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\text{multiplica}(n, m) = \text{suma}(n, \text{multiplica}(n, m - 1))$$

$$\begin{aligned} &\text{multiplica}(7, 5) \\ &= \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 4)) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 3))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 2)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 1))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{multiplica}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 0))))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 7)))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, \text{suma}(7, 14))) \\ &= \text{suma}(7, \text{suma}(7, 21)) \\ &= \text{suma}(7, 28) \\ &= 35 \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

multiplica(0,4)

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\textit{multiplica}(0,4) = \textit{suma}(0,\textit{multiplica}(0,3))$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0)))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0))) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,0)) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,0)) \\ &= \text{suma}(0,0) \end{aligned}$$

Ejemplo multiplicación recursiva

$$\begin{aligned} \text{multiplica}(0,4) &= \text{suma}(0,\text{multiplica}(0,3)) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,2))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,1)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{multiplica}(0,0))))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0)))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,\text{suma}(0,0))) \\ &= \text{suma}(0,\text{suma}(0,0)) \\ &= \text{suma}(0,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$