Estructuras Discretas

Lógica de Predicados

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

25 de abril de 2023

Lógica de predicados

Introducción

- Hemos utilizado fórmulas proposicionales para representar proposiciones en español.
- Solo cuando se trata de enunciados que son falsos o verdaderos.
- Tales como los siguientes enunciados:
  1. Todo plátano es amarillo.
  2. Algunas especies de aves migran.
  3. Todos los vaqueros usan sombrero.
  4. Ningún perro maúlla.
  5. Baja California Sur es el único estado de la República Mexicana con mar en tres de sus cuatro bordes.

Lógica de predicados

Introducción

- Observamos que los enunciados anteriores son proposiciones pues tiene un valor de falso o verdadero.
- Difieren de las estudiadas anteriormente ya que no reconocemos palabras correspondientes a conectivos lógicos.
- La única manera que tenemos de formalizarlos es con una variable proposicional asignada a todo el enunciado.

El lenguaje de la lógica proposicional no tiene suficiente poder expresivo para analizar proposiciones y argumentos que requieren de una clase de enunciados como los anteriores, que contienen referencias a colectividades de objetos.

Ejemplo

> ***Algunas personas van al teatro. Todos los que van al teatro se divierten. De manera que algunas personas se divierten.***

La intuición dice que el argumento es correcto. Sin embargo la representación correspondiente en lógica proposicional es:

$$p, q / \therefore r$$

Lógica de predicados

Introducción

- Esta situación nos permite concluir únicamente que el argumento en lógica proposicional es incorrecto.
- Esto en el sentido de que la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas.
- A partir de este hecho no es posible concluir que el argumento en lenguaje natural sea incorrecto.
- Podría ser que lo sea en base a ciertos principios lógicos más fuertes.
- Necesitamos desarrollar un lenguaje de especificación formal más poderoso.
- A este nuevo lenguaje lo llamaremos **lógica de predicados**.

Predicados

Consideremos los siguientes enunciados:

- Cualquier empleado tiene un jefe.
- Algunos programas usan ciclos.
- Hay una lista que está ordenada.

Predicados

Para representar a cada uno de estos enunciados la única forma de hacerlo, es mediante una simple variable proposicional para cada una de ellos.

- De los dos ejemplos anteriores, esta representación no es adecuada.
- No es capaz de reflejar la estructura interna del enunciado.
- Buscamos una herramienta lógica que tome en cuenta a esa estructura interna.
- Tanto los individuos como los predicados se definen en un contexto particular dependiendo del problema que queramos representar.
- Este contexto se conoce como universo de discurso, el cual es una colección de todas las personas, ideas, cosas, necesarios para analizar una fórmula o argumento lógico.

Predicados

Veamos algunos ejemplos para hacer la distinción entre predicados e individuos en universos de discurso.

- En cada caso los individuos se encuentran encerrados en una caja y los predicados son las partes del enunciado que describen las relaciones entre ellos.
- De igual forma que las acciones que los individuos llevan a cabo; por ejemplo, ser colegas; ser padre de; ser canario; ser la suma de; usar; visitar; ir; jugar.

Predicados

Ejemplo

- El universo de discurso son personas:
  1. $\boxed{\text{Isabel}}$ y $\boxed{\text{María}}$ son colegas.
  2. $\boxed{\text{Pedro}}$ es el padre de $\boxed{\text{Juan}}$.
- El universo de discurso son los animales:
  1. $\boxed{\text{Piolín}}$ es un canario.
  2. $\boxed{\text{Claudio}}$ es un gallo.
- El universo son números:
  1. La suma de $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ es $\boxed{5}$.
  2. El producto de $\boxed{10}$ y $\boxed{-2}$ es negativo.

Predicados
Ejemplo

- El universo puede constar de diversas clases de individuos, como en el caso de que los siguientes enunciados se usen en un mismo contexto:
    1. La infanta $\boxed{\text{Christina}}$ visita $\boxed{\text{museos}}$.
    2. El $\boxed{\text{teatro}}$ al que la condesa $\boxed{\text{Karla Michelle}}$ fue ayer tiene asientos cómodos.
    3. Su majestad $\boxed{\text{Martha Elena III}}$ y el perro imperial $\boxed{\text{Bu}}$ juegan en el $\boxed{\text{jardín}}$ de palacio.

Predicados

- Aunque parezca que podemos utilizar lógica proposicional para representar a los individuos y relaciones, esto no es posible.
- No tiene sentido decir que el primer enunciado se formaliza como $p \wedge q$ donde p significa Isabel es colega y q significa María es colega.
- La conjunción de estos dos enunciados no consigue explicar la relación de colegas entre Isabel y María.

Predicados

Definición

En lógica de predicados utilizamos la notación

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

para describir que la propiedad o relación P se da entre los individuos $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Predicados

Ejemplo

1. Colegas(Isabel,María), con P = ser colegas, t_1 = Isabel y t_2 = María.
2. Padre(Pedro,Juan), con P = padre de, t_1 = Pedro y t_2 = Juan.
3. Canario(Piolín), con P = ser canario y t_1 = Piolín.
4. Suma(2,3,5), con P = suma, t_1 = 2 y t_2 = 3 son los sumandos y t_3 = 5 es el resultado.

Variables y cuantificadores

- El uso de predicados en lugar de variables proposicionales podría parecer simplemente otra manera de escribir enunciados.

  Anastasia recita poesía medieval.

- Se representa con predicados como

  Recita(Anastasia, poesía medieval),

- Lo cual parece ser simplemente una manera distinta de escribir el mismo enunciado en español.

Variables y cuantificadores

- La principal diferencia es que el predicado puede cambiar de argumentos.

  Recita(Licantro, odas en sánscrito).

- Podemos sustituir individuos por variables, como en Recita(x, y).
- De esta manera podemos definir predicados de manera más formal.

Variables

Ejemplo

1. $F(x, y)$ significa que x es padre de y.
2. $E(x)$ significa que x es un estudiante.
3. $J(x, y)$ significa que x es más joven que y.

Variables

- Los nombres de las variables no importan siempre y cuando se usen de forma consistente.
- Las expresiones anteriores no corresponden a proposiciones, puesto que los valores de x y y están indeterminados.
- Entonces resulta imposible verificar si el predicado Recita se cumple.
- Las variables juegan el papel de representantes de valores concretos, como un estudiante, un número.
- Un mismo predicado puede representar un número potencialmente infinito de proposiciones.
- Una por cada individuo que pueda tomar el lugar de cada una de las variables del predicado.

Cuantificadores

Considerando los siguientes enunciados:

1. Hay un gato rayado.
2. Algunas personas van al teatro.
3. Todos los programas en Java usan clases.
4. Todos los estudiantes trabajan duro.
5. Algunos estudiantes se duermen en clase.
6. Ocho de cada diez gatos lo prefieren.
7. Nadie es más tonto que yo.
8. Al menos seis estudiantes están despiertos.
9. Hay una infinidad de números primos.
10. Hay más computadoras PC que Mac.

Cuantificadores

- Todos estos enunciados tienen en común el hecho de que no involucran a ningún individuo en particular.
- Necesitamos un mecanismo para formalizar las partes de los enunciados que se refieren a una cantidad.
- Tales como todos, algunos, hay, nadie, cualquiera, ...
- A estas cantidades es a lo que llamamos cuantificadores.

Cuantificadores

- Al emplear operadores de cuantificación sobre individuos indeterminados.
- $\forall$, se lee para todo.
- $\exists$, se lee existe.
- Siempre van seguidos de una variable que representa a los individuos de la colectividad que se está especificando.

Para decir todos hablan español escribimos

$$\forall x E(x)$$

donde $E(x)$ significa que x habla español.

Cuantificadores

Ejemplo

Similarmente, si $C(x)$ significa que x es cuervo, entonces para especificar que hay un cuervo escribimos

$$\exists x C(x).$$

Cuantificadores

Ejemplo

Usando cuantificadores en combinación con la lógica proposicional, podemos representar enunciados más complejos.

Todos los estudiantes son más jóvenes que algún profesor

Cuya especificación es como:

$$\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge J(x,y)))$$

donde $P(x)$ significa x es profesor; $E(x)$ significa que x es estudiante y $J(x,y)$ significa que x es más joven que y.

Términos

La lógica de predicados, a diferencia del caso proposicional, varía dependiendo del universo de discurso particular y de las relaciones y propiedades de los individuos que se deseen especificar.

Definición

Un término es una constante, una variable o bien un símbolo de función aplicado a otros términos.

Los términos se generan mediante una gramática. En los casos en que aparezca una coma (“,”), ésta es parte de la sintaxis.

Términos

$$
\begin{aligned}
\text{term} &::= \text{var} && (1)\\
\text{term} &::= \text{const} && (2)\\
\text{term} &::= \text{func(lista-de-term)} && (3)\\
\text{var} &::= x && (4)\\
\text{var} &::= y && (5)\\
\text{var} &::= z && (6)\\
\text{const} &::= a && (7)\\
\text{const} &::= b && (8)\\
\text{const} &::= c && (9)\\
\text{func} &::= f && (10)\\
\text{func} &::= g && (11)\\
\text{func} &::= h && (12)\\
\text{lista-de-term} &::= \text{term} && (13)\\
\text{lista-de-term} &::= \text{term, lista-de-term} && (14)
\end{aligned}
$$

Términos

Ejemplo

Supongamos que el universo consta de los países del mundo.

- Las variables x y y denotan a países cualesquiera.
- La constante a denota a Alemania y la constante b a Brasil.
- El símbolo funcional f de índice 1 denota a la operación que recibe un país y devuelve su ciudad capital. Es decir, $f(x)$ es la capital de x. Esto es posible dado que cada país tiene una única capital de manera que dicha asociación es funcional. En particular $f(a)$ denota a Berlín y $f(b)$ a Brasilia.

Términos

Ejemplo

Si el universo consta de números naturales, entonces:

- La constante a denota al individuo 0 y la constante b al individuo 1.
- Los términos funcionales $f(x,y)$ y $g(x,y)$ denotan a los individuos $x+y$ y $x*y$ respectivamente.
- En tal caso, los individuos 2 y 4 se representan mediante $f(b,b)$ y $g(f(b,b),f(b,b))$ respectivamente.

Fórmulas

Podemos construir las fórmulas del lenguaje, las cuales representan a las relaciones entre individuos, así como a los enunciados generales del lenguaje. Empecemos con las fórmulas más simples, las atómicas.

Definición

Una fórmula atómica es una expresión de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, donde P es un símbolo de predicado de índice n y $t_1, \ldots, t_n$ son términos.

Fórmulas

Ejemplo

Definimos los símbolos de predicado P, R, Q, los símbolos de función f y g y las constantes a, b y c. Las siguientes son fórmulas atómicas:

- $P(b, f(y))$.
- $Q(g(f(a), c))$.
- $R(z, f(g(a, c)), b)$.

Fórmulas

Ejemplo

Ahora que tenemos fórmulas atómicas, podemos combinarlas con los conectivos proposicionales para obtener fórmulas más complejas.
En el universo de discurso de los números naturales, si $a+b=c+b$ entonces $a=c$. Definimos las constantes a, b, c y los siguientes símbolos de función:

$$f(x,y) \text{ para representar } x+y$$

$$\mathrm{igual}(x,y) \text{ para representar } x=y$$

Y la especificación queda como sigue:

$$\mathrm{igual}(f(a,b),f(c,b)) \to \mathrm{igual}(a,c)$$

Fórmulas

Ejemplo

En la expresión Bombón es un gato que araña tenemos lo siguiente:

1. El universo de discurso son los animales.
2. Los predicados que definimos son:
   - $G(x)$, x es un gato.
   - $A(x)$, x araña.

Siendo Bombón uno de los individuos concretos del universo de discurso, estará representado por una constante, su propio nombre. La expresión lógica queda como sigue:

$$G(\text{Bombón}) \wedge A(\text{Bombón})$$

Fórmulas

Las fórmulas con predicados se generan de la misma manera que las fórmulas de la lógica proposicional, sólo que las fórmulas atómicas han cambiado de simples variables proposicionales a predicados que involucran términos.

Fórmulas

La gramática formal es la siguiente:

$$
\begin{array}{rcl}
E & ::= & \text{pred(lista-de-term)} \\
E & ::= & \neg E \\
E & ::= & E \rightarrow E \\
E & ::= & E \vee E \\
E & ::= & E \wedge E \\
E & ::= & E \leftrightarrow E \\
E & ::= & (E) \\
E & ::= & \forall \text{ var } E \\
E & ::= & \exists \text{ var } E \\
\text{pred} & ::= & P \mid Q \mid R \mid \ldots \\
\text{lista-de-term} & ::= & \text{term} \\
\text{lista-de-term} & ::= & \text{term, lista-de-term}
\end{array}
$$

Fórmulas cuantificadas

Finalmente definimos las fórmulas que involucran cuantificadores, las cuales proporcionan una gran expresividad al lenguaje.

Definición

Sea E una fórmula. La expresión $\forall xE$ es la cuantificación universal de E con respecto a x y representa al enunciado para todo x se cumple E. Análogamente, la expresión $\exists xE$ es la cuantificación existencial de E con respecto a x y representa al enunciado existe un x que cumple E.
En ambos casos la fórmula E se conoce como el alcance de la cuantificación y la variable que figura inmediatamente después del cuantificador se conoce como variable del cuantificador.

Fórmulas cuantificadas

Ejemplo

Supongamos que el universo de discurso es el universo astronómico.

Sea $S(x)$ el predicado ser sol y $P(x)$ el predicado ser planeta. Vamos a traducir algunos enunciados sencillos que involucran cuantificadores.

- Todo es un sol: $\forall x S(x)$.
- Todo es un planeta: $\forall y P(y)$.
- Existe un planeta y un sol: $\exists x \exists y (P(x) \land S(y))$.
- Cualquiera es sol o planeta: $\forall z (P(z) \lor S(z))$.

Fórmulas cuantificadas

Ejemplo

A continuación ejemplificamos el concepto de alcance.
Veamos un ejemplo de los alcances de cuantificaciones. Marcaremos los alcances, marcando a la variable de las cuantificaciones correspondientes.

$$\forall x \left(\overbrace{\boxed{\left(x > i \wedge i > j\right) \to \exists i \exists j \left(\underbrace{\boxed{x > i \wedge x > j}}_{i,j} \right)}}^{x} \right)$$

El recuadro más grande marca el alcance de la cuantificación $\forall x$ mientras que el recuadro más pequeño marca el alcance de las cuantificaciones $\exists i$ y $\exists j$.

Variables libres y ligadas

Definición

Una presencia específica de una variable x en una fórmula A está libre si no es la variable artificial de un cuantificador ni figura dentro del alcance de una cuantificación cuya variable artificial también es x.

Variables libres y ligadas

Ejemplo

Cuantificación	Variables libres
$\forall x((x > i \land i > j) \to (x > j))$	i,j
$\exists x(x > i \land i > j)$	i,j
$\forall i \forall j((x > i \land i > j) \to (i > j))$	x
$\forall i((x > i \land i > j) \to (x > j))$	x,j
$\exists i \exists j(x > i \land i > j)$	x
$\exists j(x > i \land i > j)$	i,x

Variables libres y ligadas

Definición

Decimos que una presencia determinada de una variable x en una fórmula A es ligada o acotada si x es una variable artificial de A o cae dentro del alcance de un cuantificador con la misma variable artificial x.

Definición

Un enunciado es una fórmula A que no contiene presencias libres de variables.

En la expresión

$$\overset{(1)}{i} > 0 \vee \forall \overset{(2)}{i} (0 \leq \overset{(3)}{i} \rightarrow x \cdot \overset{(4)}{i} = 0)$$

tenemos cuatro presencias de i. La primera presencia de i, anotada con (1), es una presencia libre, pues no se encuentra dentro de ninguna cuantificación. La segunda presencia es la variable artificial de un cuantificador por lo que es ligada. Las otras dos presencias de i también son ligadas, el valor de la cuantificación no depende del valor particular que tenga i.

Variables libres y ligadas

Ejemplo

En la expresión

$$\overset{(1)}{(k} + \overset{(2)}{j}) > 0 \land \exists \overset{(3)}{j} (0 \leq \overset{(4)}{j} \leq 5 \land \overset{(5)}{k} < \overset{(6)}{j})$$

las presencias (1) y (5) de k son presencias libres, pues en el primer caso la k se encuentra fuera de la cuantificación y aunque en el segundo caso se encuentra dentro de una cuantificación, la variable artificial es j, no k.
La presencia (2) de j es distinta que las presencias (3), (4) y (6), pues mientras la primera se encuentra fuera de una cuantificación y es, por lo tanto, presencia libre, las otras tres se encuentran dentro de una cuantificación donde la variable artificial es ella misma, por lo que son presencias acotadas.
El valor de esta fórmula dependerá del estado en el que se evalúen los valores libres de j y k.

Variables libres y ligadas

- Al trabajar con predicados es muy importante que el universo de discurso esté bien definido y sea claro.
- Los términos y las fórmulas son ajenos, es decir ningún término es fórmula y ninguna fórmula es término.
- Los términos denotan exclusivamente a individuos u objetos.
- Las fórmulas atómicas (predicados) denotan únicamente proposiciones o propiedades acerca de los términos.
- Únicamente los individuos u objetos son cuantificables. Esta característica justifica la denominación primer orden que se le da a la lógica de predicados que estamos estudiando.