Estructuras Discretas

Lógica Proposicional Derivaciones

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

17 de abril de 2023

Derivaciones

- Muchos argumentos lógicos correctos pueden obtenerse mediante composición de otros argumentos correctos previamente obtenidos
- La conclusión de un argumento puede servir como premisa para un siguiente argumento
- Esto sucede hasta llegar a una conclusión deseada
- Esta composición de argumentos es un mecanismo puramente sintáctico
- No usamos la noción de verdad o interpretación

Sistemas para derivaciones

- Describimos formalismos para desarrollar pruebas o derivaciones en lógica proposicional de manera sistemática
- Los cuales se conocen como cálculos deductivos o sistemas para derivaciones

Sistemas para derivaciones

- Existen diversos sistemas para desarrollar derivaciones pero, todos tienen las siguientes características:
  1. Hay un conjunto de argumentos lógicos admisibles, que definimos como reglas de inferencia. En algunos casos se aceptan argumentos sin premisas los cuales se llaman axiomas
  2. La derivación es una lista de expresiones lógicas. Originalmente, la lista está vacía y una expresión puede agregarse a la lista si es una premisa, o si se puede obtener como conclusión de alguna de las reglas de inferencia. Este proceso continúa hasta que se llega a la conclusión

Sistemas para derivaciones

Definición

Sean $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas. Si existe una derivación de B a partir de Γ, es decir, donde las premisas son fórmulas del conjunto Γ, entonces decimos que B es derivable a partir de Γ y escribimos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B$, o simplemente $\Gamma \vdash B$ si el conjunto de reglas de inferencia válidas ya es conocido.

Reglas de inferencia

Regla	Nombre	Notación
$A \quad B/A \wedge B$	Introducción de $\wedge$	I$\wedge$
$A \wedge B/B$	Eliminación de $\wedge$	E$\wedge$
$A \wedge B/A$	Eliminación de $\wedge$	E$\wedge$
$A/A \vee B$	Introducción de $\vee$	I$\vee$
$B/A \vee B$	Introducción de $\vee$	I$\vee$
$A \quad A \rightarrow B/B$	Modus Ponens	MP
$\neg B \quad A \rightarrow B/\neg A$	Modus Tollens	MT
$A \rightarrow B \quad B \rightarrow C/A \rightarrow C$	Silogismo Hipotético	SH
$A \vee B \quad \neg A/B$	Silogismo Disyuntivo	SD
$A \vee B \quad \neg B/A$	Silogismo Disyuntivo	SD
$A \rightarrow B \quad \neg A \rightarrow B/B$	Caso simple	CS
$A \leftrightarrow B/A \rightarrow B$	Eliminación de equivalencia	E$\leftrightarrow$
$A \leftrightarrow B/B \rightarrow A$	Eliminación de equivalencia	E$\leftrightarrow$
$A \rightarrow B \quad B \rightarrow A/A \leftrightarrow B$	Introducción de Equivalencia	I$\leftrightarrow$
$A, \neg A/B$	Inconsistencia	Inc

Derivaciones

Ejemplo

Uno de los más reconocidos pensadores “lógicos” es Sherlock Holmes, el detective creado por Arthur Conan Doyle. Veamos una de sus argumentaciones más famosas, que aparece en el libro “Estudio en Escarlata”:

> *Y ahora llegamos a la gran pregunta del motivo. El robo no fue la razón del asesinato, ya que nada fue sustraído. Entonces, ¿fue la política o fue una mujer? Esta es la pregunta a la que me enfrenté. Me incliné desde un principio a la segunda suposición. Los asesinos políticos hacen su trabajo lo más rápido posible y huyen en cuanto terminan. Este asesinato, en cambio, fue hecho de manera deliberada y el asesino dejó sus huellas en todo el cuarto, mostrando que permaneció ahí mucho tiempo.*

Derivaciones

Ejemplo

Para expresar esta cita, utilizaremos las siguientes variables proposicionales:

1. r: fue un robo
2. s: algo fue sustraído
3. p: fue la política (motivos políticos)
4. m: fue una mujer
5. h: el asesino huyó inmediatamente
6. c: el asesino dejó sus huellas en todo el cuarto

Veamos la derivación que llevó a cabo Sherlock Holmes, y que lo llevó a concluir que fue una mujer, en la siguiente tabla.

Derivaciones

Ejemplo

Derivación	Regla	Comentario
1. $r \to s$	Premisa	Si fue un robo entonces algo debió ser sustraído
2. $\neg s$	Premisa	Nada fue sustraído
3. $\neg r$	Modus Tollens 1,2	No fue un robo
4. $\neg r \to p \vee m$	Premisa	Si no fue un robo, debió ser motivo político o una mujer
5. $p \vee m$	Modus Ponens 3,4	Fue motivo político o una mujer
6. $p \to h$	Premisa	Si fue motivo político, el asesino debió huir inmediatamente
7. $c \to \neg h$	Premisa	Si el asesino dejó huellas en todo el cuarto, no huyó inmediatamente
8. c	Premisa	El asesino dejó huellas en todo el cuarto
9. $\neg h$	Modus Ponens 7,8	El asesino no huyó inmediatamente
10. $\neg p$	Modus Tollens 6,9	El motivo no fue político
11. m	Silogismo Disyuntivo 5,10	Por lo tanto debió ser una mujer

Derivaciones

Ejemplo

$$\begin{array}{ll|l} 1. & r \to s & \\ 2. & \neg s & \text{Modus Tolles} \\ \hline 3. & \neg r & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} 3. & \neg r & \\ 4. & \neg r \to p \vee m & \text{Modus Ponens} \\ \hline 5. & p \vee m & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} 7. & c \to \neg h & \\ 8. & c & \text{Modus Ponens} \\ \hline 9. & \neg h & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} 6. & p \to h & \\ 9. & \neg h & \text{Modus Tollens} \\ \hline 10. & \neg p & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} 5. & p \vee m & \\ 10. & \neg p & \text{Silogismo disyuntivo} \\ \hline 11. & m & \end{array}$$

Derivaciones
Ejemplo

Mostrar la correctud del siguiente argumento:

$$p \to r, r \to s, t \vee \neg s, \neg t \vee u, \neg u / \therefore \neg p.$$

Vamos a desarrollar una derivación de $\neg p$ con premisas

$$\Gamma = \{p \to r, r \to s, t \vee \neg s, \neg t \vee u, \neg u\}.$$

Derivaciones

Ejemplo

Derivación:

1.	$p \to r$	Premisa
2.	$r \to s$	Premisa
3.	$t \vee \neg s$	Premisa
4.	$\neg t \vee u$	Premisa
5.	$\neg u$	Premisa
6.	$p \to s$	(SH) con 1,2
7.	$\neg t$	(SD) con 4,5
8.	$\neg s$	(SD) con 7,3
9.	$\neg r$	(MT) con 2,8
10.	$\neg p$	(MT) con 9,1

Derivaciones

Ejemplo

Mostrar la correctud del siguiente argumento:

$$p \to q, q \to r \land s, \neg r \lor \neg t \lor u, p \land t / \therefore u$$

Derivación:

1.	$p \to q$	Premisa
2.	$q \to r \land s$	Premisa
3.	$\neg r \lor \neg t \lor u$	Premisa
4.	$p \land t$	Premisa
5.	$p \to r \land s$	SH 1,2
6.	p	E$\land$ 4
7.	$r \land s$	MP 5,6
8.	r	E$\land$ 7
9.	$\neg t \lor u$	SD 8,3
10.	t	E$\land$ 4
11.	u	SD 9,10

Estrategias para las derivaciones

Presentamos algunas estrategias para la derivación de argumentos correctos. La meta es construir una derivación $\Gamma \vdash B$. De acuerdo al conectivo principal de la conclusión B de un argumento, podemos simplificar la derivación del mismo.

Estrategias para las derivaciones

Conjunción
Para derivar una conjunción $\Gamma \vdash P \wedge Q$ basta derivar ambos operandos por separado. Es decir,

$$\text{Si } \Gamma \vdash P \text{ y } \Gamma \vdash Q, \text{ entonces } \Gamma \vdash P \wedge Q$$

Esta propiedad es inmediata de la regla de inferencia (I$\wedge$).

Estrategias para las derivaciones

Disyunción
De acuerdo a la regla de introducción de la disyunción (I$\vee$), para mostrar $\Gamma \vdash P \vee Q$ basta mostrar alguno de los dos operandos. Es decir,

$$\text{Si } \Gamma \vdash P \text{ o bien } \Gamma \vdash Q, \text{ entonces } \Gamma \vdash P \vee Q.$$

En este caso la afirmación recíproca no es necesariamente cierta; por ejemplo, tenemos $p \vee q \vdash p \vee q$ pero no es posible derivar $p \vee q \vdash p$ ni $p \vee q \vdash q$.

Estrategias para las derivaciones

Implicación
Basta suponer como premisa adicional el antecedente y derivar a partir de ello el consecuente. Esto se expresa en la siguiente propiedad conocida como el metateorema de la deducción:

$$\text{Si } \Gamma, P \vdash Q \text{ entonces } \Gamma \vdash P \to Q.$$

Esta regla se usa prácticamente siempre en las demostraciones matemáticas en general.

Estrategias para las derivaciones

Equivalencia
Para derivar una equivalencia $P \leftrightarrow Q$ basta probar ambas implicaciones.

$$\text{Si } \Gamma \vdash P \to Q \text{ y } \Gamma \vdash Q \to P, \text{ entonces } \Gamma \vdash P \leftrightarrow Q.$$

Nuevamente esta propiedad es muy común en demostraciones matemáticas.

Estrategias para las derivaciones

Negación

Para derivar una negación no hay estrategia general. En algunos casos podemos usar equivalencias lógicas, si deseamos

$$\Gamma \vdash \neg(P \wedge Q)$$

entonces basta mostrar $\Gamma \vdash \neg P \vee \neg Q$, para demostrar esto usamos la estrategia para la disyunción y probar alguna de $\Gamma \vdash \neg P$ o bien $\Gamma \vdash \neg Q$.