Estructuras Discretas

Inducción

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

14 de febrero de 2023

La inducción es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable asociada a los números naturales.

Es decir, que toma una infinidad de valores enteros.

Principio de Inducción Matemática

La inducción matemática consiste en aplicar el siguiente razonamiento:

Supongamos que tenemos una propiedad $S(n)$ cuyo dominio son los números naturales, para poder demostrar que todo el dominio cumple con la propiedad se debe cumplir lo siguiente

1. $S(1)$ debe ser verdadero.
2. Suponer que $S(n)$ es verdadero y en consecuencia probar que se cumple $S(n+1)$.

Si estas condiciones se cumplen entonces podemos deducir que $S(n)$ es verdadero para todo el dominio, en este caso los naturales.

Inducción

Ejemplo

Si nosotros quisiéramos probar que se cumple la siguiente propiedad sobre los número naturales

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Nos damos cuenta de que es imposible verificar a uno por uno de los elementos que cumplen con esta propiedad, ya que son todos los naturales.
Pero eso no significa que no podamos verificar la validez de la propiedad y para demostrarla lo hacemos por ***inducción***.

Demostrar por el método de inducción que se cumple la siguiente propiedad sobre los número naturales

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Paso Base: $n = 1$

Esto en general es sencillo ya que sólo tenemos que verificar que se cumple la propiedad para el primer elemento de nuestro conjunto de naturales

$$1 = 1! \geq 2^{1-1} = 1$$

Demostrar por el método de inducción que se cumple la siguiente propiedad sobre los número naturales

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Hipótesis Inductiva: Suponemos que se cumple para n, es decir,

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Este caso es el más simple ya que estamos asumiendo que la propiedad se cumple para un cierto número de elementos

Inducción

Ejemplo

Demostrar por el método de inducción que se cumple la siguiente propiedad sobre los número naturales

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Paso Inductivo: Probar que se cumple para el siguiente elemento $n+1$, es decir

$$(n+1)! \geq 2^{n}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} (n+1)! = (n+1)\cdot n! &\geq (n+1)\cdot 2^{n-1} \quad \text{Por la H.I.} \\ &\geq 2\ \cdot 2^{n-1} = 2^{n} \quad \text{Ya que } n+1 \geq 2 \end{aligned}$$

$$\therefore (n+1)! \geq 2^{n-1}$$

Sea $H_0 = 0$ y $H_n = 1 + 2H_{n-1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Demostrar que $H_n = 2^n - 1$.

Demostración.

Base: Verificamos que la propiedad se cumpla para el primer elemento o el elemento base, en este caso $n = 0$

$$\begin{aligned} H_0 &= 2^0 - 1 && \text{Por definición} \\ &= 1 - 1 = 0 && \text{Aritmética} \end{aligned}$$

Hipótesis de Inducción: Suponemos $H_n = 1 + 2H_{n-1} = 2^n - 1$
Paso Inductivo: Verificar que $H_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= 1 + 2H_n && \text{Por definición} \\ &= 1 + 2(2^n - 1) && \text{H.I.} \\ &= 1 + 2 \cdot 2^n - 2 && \text{Aritmética} \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

□

Demuestre que las siguientes propiedades se cumplen

1. $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$
2. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$