Estructuras Discretas

Lógica Proposicional

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

12 de abril de 2023

Interpretaciones

Definición

Un estado de las variables proposicionales es una función $\mathcal{I}$ que asigna a cada variable proposicional el valor de falso o verdadero:

$$\mathcal{I} : \text{Variables proposicionales} \to \{0, 1\}$$

Cada estado genera una función de interpretación sobre todas las fórmulas

Interpretaciones

Definición

Cada estado $\mathcal{I}$ determina una interpretación de las fórmulas, definida como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(True) &= 1 \\
\mathcal{I}(Falso) &= 0 \\
\mathcal{I}(\neg P) &= 1 \quad \text{si y sólo si } \mathcal{I}(P) = 0 \\
\mathcal{I}(P \vee Q) &= 0 \quad \text{si y sólo si } \mathcal{I}(P) = 0 = \mathcal{I}(Q) \\
\mathcal{I}(P \wedge Q) &= 1 \quad \text{si y sólo si } \mathcal{I}(P) = 1 = \mathcal{I}(Q) \\
\mathcal{I}(P \to Q) &= 0 \quad \text{si y sólo si } \mathcal{I}(P) = 1 \text{ e } \mathcal{I}(Q) = 0 \\
\mathcal{I}(P \leftrightarrow Q) &= 1 \quad \text{si y sólo si } \mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)
\end{aligned}
$$

Si $\mathcal{I}(P) = 1$ entonces decimos que $\mathcal{I}$ satisface a P, P es satisfacible en $\mathcal{I}$, o bien que $\mathcal{I}$ es un modelo de P

Interpretaciones

Ejemplo

Si tenemos la fórmula

$$A = p \to q \vee r$$

con la siguiente asignación de estados

$$\mathcal{I}(p) = 1, \quad \mathcal{I}(q) = 0, \quad \mathcal{I}(r) = 0$$

hace $\mathcal{I}(p \to q \vee r) = 0$, por lo que $\mathcal{I}$ no es un modelo para la fórmula.
Por otro lado, el estado

$$\mathcal{I}(p) = 1, \quad \mathcal{I}(q) = 0, \quad \mathcal{I}(r) = 1$$

hace que $\mathcal{I}(p \to q \vee r) = 1$, por lo que sí es un modelo para la fórmula

Interpretaciones

Definición

Sea P una fórmula, entonces

- Si $\mathcal{I}(P) = 1$ para toda interpretación $\mathcal{I}$, decimos que P es una tautología o fórmula válida y escribimos $\models P$
- Si $\mathcal{I}(P) = 1$ para alguna interpretación $\mathcal{I}$, decimos que P es satisfacible y escribimos $\mathcal{I} \models P$
- Si $\mathcal{I}(P) = 0$ para alguna interpretación $\mathcal{I}$, decimos que P es insatisfacible en $\mathcal{I}$ y escribimos $\mathcal{I} \not\models P$
- Si $\mathcal{I}(P) = 0$ para toda interpretación $\mathcal{I}$, decimos que P es una contradicción o fórmula no satisfacible.

Interpretaciones

Definición

Similarmente, si Γ es un conjunto de fórmulas decimos que:

- Γ es satisfacible si tiene un modelo, es decir, si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(P) = 1$ para toda $P \in \Gamma$
- Γ es insatisfacible o no satisfacible si no tiene un modelo, es decir, si no existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(P) = 1$ para toda $P \in \Gamma$

Interpretaciones

Ejemplo

Sean $\Gamma_1 = \{p \to q, r \to s, \neg s\}$, $\Gamma_2 = \{p \to q, \neg(q \vee s), s \vee p\}$, entonces

- Si $\mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(p) = 0$, entonces $\mathcal{I}(\Gamma_1) = 1$ por lo que Γ_1 es satisfacible.
- Γ_2 resulta insatisfacible pues supóngase que existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\Gamma_2) = 1$, entonces, se tiene que

  $$\mathcal{I}(\neg(q \vee s)) = 1 \text{ por lo que } \mathcal{I}(\neg q) = \mathcal{I}(\neg s) = 1$$

  además como $\mathcal{I}(p \to q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(p) = 0$ puesto que el antecedente de la implicación es falso.
  De esto último se tiene $\mathcal{I}(s) = 1$ dado que $\mathcal{I}(s \vee p) = 1$, de manera que $\mathcal{I}(\neg s) = 1 = \mathcal{I}(s)$ lo cual es imposible.
  Por lo tanto no puede existir una interpretación I que satisfaga a Γ_2

Consecuencia lógica

Definición

Sean $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas y B una fórmula. Decimos que B es consecuencia lógica de Γ si toda interpretación $\mathcal{I}$ que satisface a Γ también satisface a B. Es decir, si todo modelo de Γ es modelo de B. En tal caso escribimos $\Gamma \models B$

Nótese que la relación de consecuencia lógica está dada por una implicación de la forma

$$\mathcal{I}(\Gamma) = 1 \ \text{ entonces } \ \mathcal{I}(B) = 1$$

De manera que no se afirma nada acerca de la satisfacibilidad del conjunto Γ, sino que simplemente se supone que es satisfacible y, en tal caso, se prueba que la fórmula B también lo es con la misma interpretación.

Considera el siguiente conjunto $\Gamma = \{q \to p, p \leftrightarrow t, t \to s, s \to r\}$. Muestra que $\Gamma \models q \to r$.

- Sea $\mathcal{I}$ un modelo de Γ, tenemos que demostrar que $\mathcal{I}(q \to r) = 1$
- Si $\mathcal{I}(q) = 0$ entonces $\mathcal{I}(q \to r) = 1$ y terminamos
- En otro caso se tiene $\mathcal{I}(q) = 1$ de donde $\mathcal{I}(p) = 1$ pues $\mathcal{I}(q \to p) = 1$
- Entonces $\mathcal{I}(t) = 1$, pues $\mathcal{I}$ es modelo de $p \leftrightarrow t$, donde $\mathcal{I}(s) = 1$ dado que $\mathcal{I}$ también es modelo de $t \to s$
- Como $\mathcal{I}(s \to r) = 1$ y $\mathcal{I}(s) = 1$ entonces $\mathcal{I}(r) = 1$
- Por lo tanto $\mathcal{I}(q \to r) = 1$

Consecuencia lógica

Teorema

El argumento $A_1, \ldots, A_n / \therefore B$ *es lógicamente correcto si y sólo si*

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$$

es decir, si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

De acuerdo a las propiedades de la consecuencia lógica, existen dos formas para demostrar la correctud de un argumento, el método directo y el indirecto.

Método directo:

Probar la consecuencia $A_1, \ldots, A_n \models B$. Para esto se supone la existencia de una interpretación $\mathcal{I}$ que sea modelo de todas las premisas y se argumenta, usando esta información y la definición de interpretación, que la conclusión B también se satisface con $\mathcal{I}$

Método indirecto:
Probar que es insatisfacible el conjunto $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$. Para esto se supone que hay una interpretación $\mathcal{I}$ que hace verdaderas a todas las premisas y a la negación de la conclusión $\neg B$ o bien, equivalentemente, hace falsa a la conclusión B. Apelando a este supuesto y a la definición de interpretación, se trata de mostrar que tal interpretación no puede existir; esto se logra mostrando que cierta fórmula está forzada a ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

Consecuencia lógica por interpretaciones

Ejemplo método directo

Mostrar la correctud del argumento $p \to q, \neg q / \therefore \neg p$, Para lograr esto mostramos la consecuencia lógica $p \to q, \neg q \models \neg p$.

1.	$\mathcal{I}(p \to q)$	$= T$	Hipótesis
2.	$\mathcal{I}(\neg q)$	$= T$	Hipótesis
3.	$\mathcal{I}(q)$	$= F$	Por 2, tenemos $\mathcal{I}(\neg q) = T$
4.	$\mathcal{I}(p)$	$= F$	Por 1 y 3, tenemos $\mathcal{I}(p \to q) = T$ y $\mathcal{I}(q) = F$,

$\therefore \mathcal{I}(p)$ no puede ser T en conclusión $\mathcal{I}(\neg p) = T$.

Consecuencia lógica por interpretaciones

Ejemplo método indirecto

Mostar la correctud del argumento $t \wedge k \rightarrow b, \neg t \rightarrow f, \neg f \wedge k / \therefore b$. Por el método indirecto.

1.	$\mathcal{I}(t \wedge k \rightarrow b)$	$= T$	Hipótesis.
2.	$\mathcal{I}(\neg t \rightarrow f)$	$= T$	Hipótesis.
3.	$\mathcal{I}(\neg f \wedge k)$	$= T$	Hipótesis.
4.	$\mathcal{I}(b)$	$= F$	Refutación.
5.	$\mathcal{I}(k)$	$= T$	Por 3, $\mathcal{I}(p \wedge q) = T$, $\mathcal{I}(p) = T$ y $\mathcal{I}(q) = T$.
6.	$\mathcal{I}(t \wedge k)$	$= F$	Por 4 y 1, $\mathcal{I}(t \wedge k) = F$.
7.	$\mathcal{I}(t)$	$= F$	Por 5 y 6, $\mathcal{I}(k) = T$; si $\mathcal{I}(t \wedge k) = F$, $\mathcal{I}(t) = F$.
8.	$\mathcal{I}(\neg t)$	$= T$	Por 7.
9.	$\mathcal{I}(f)$	$= T$	Por 2 y 8.
10.	$\mathcal{I}(\neg f)$	$= T$	Por 3, $\mathcal{I}(\neg f) = T$ y $\mathcal{I}(k) = T$.
11.	$\mathcal{I}(f)$	$= F$	Por 10.

El conjunto $\Gamma \cup \{\neg b\}$ insatisfacible y el argumento es correcto.