Estructuras Discretas

Lógica de Predicados

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

8 de mayo de 2023

- El proceso de especificación o traducción del español a la lógica formal no siempre es sencillo.
- Algunas frases del español no se pueden traducir de una manera completamente fiel a la lógica de predicados.
- Únicamente podemos especificar afirmaciones o proposiciones; no es posible traducir preguntas, exclamaciones, órdenes, invitaciones, etcétera.
- La idea es extraer predicados a partir de los enunciados dados en español, de manera que el enunciado completo se construya al combinar fórmulas atómicas mediante conectivos y cuantificadores.

Especificación formal

- La conjunción “y” se traduce como $\wedge$. La palabra “pero” también, aunque el sentido original del español se pierde.
- La disyunción es incluyente.
- Con la implicación hay que ser cautelosos, sobre todo en el caso de frases de la forma A sólo si B lo cual es equivalente con Si no B entonces no A, que a su vez es equivalente con Si A entonces B. Es un error común intentar traducir dicha frase inicial mediante $B \to A$.

Especificación formal

- Si en el español aparecen frases como para todos, para cualquier, todos, cualquiera, los, las, debe usarse el cuantificador universal $\forall$.
- Si en el español hay frases como para algún, existe un, alguno, alguna, uno, una, alguien, generalmente se usa el cuantificador existencial $\exists$.

Especificación formal

- Pronombres como él, ella, eso no se refieren a un individuo particular sino que se usan como referencia a algo o alguien mencionado previamente, por lo que obtienen significado del contexto particular. Cuando un pronombre aparezca en un enunciado debe uno averiguar primero a quién o qué se refiere.
- Las variables no se mencionan en español sino que son sólo un formalismo para representar individuos.

Especificación formal

- Los esquemas $\forall x(A \to B)$ y $\exists x(A \wedge B)$ son de gran utilidad y bastante comunes.
- El esquema $\exists x(A \to B)$, si bien es una fórmula sintácticamente correcta, es extremadamente raro que figure en una traducción del español.
- El hecho de que se usen dos o más variables distintas no implica que éstas representen a elementos distintos del universo, de manera que para especificar dos individuos distintos no es suficiente contar simplemente con variables distintas.

Juicios aristotélicos

Una gran parte de las especificaciones en lenguaje natural pueden formalizarse mediante instancias de alguno de los cuatro juicios aristotélicos, los cuales se refieren a dos relaciones y expresan las posibilidades de que éstas se cumplan o no en ciertos individuos.

Juicios aristotélicos

Ejemplo

Tomemos como universo de discurso al reino animal. Vamos a construir los llamados juicios aristotélicos fundamentales a partir de las propiedades ser perico y ser feo. Primero definimos los predicados necesarios:

$$
\begin{array}{ll}
P(x) & x \text{ es perico} \\
F(x) & x \text{ es feo}
\end{array}
$$

Juicios aristotélicos

Ejemplo

(a) **Juicio universal afirmativo**: Todos los pericos son feos,

$$\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$$

(b) **Juicio existencial afirmativo**: Algunos pericos son feos,

$$\exists x(P(x) \wedge F(x))$$

Ejemplo

(c) **Juicio existencial negativo**: Algunos pericos no son feos,

$$\exists x(P(x) \land \neg F(x))$$

(d) **Juicio universal negativo**: Ningún perico es feo, lo cual es equivalente a decir que cualquier perico no es feo o bien todos los pericos no son feos; de manera que las dos siguientes especificaciones son correctas:

$$\neg \exists x(P(x) \land F(x))$$
$$\forall x(P(x) \to \neg F(x))$$

Ejemplo

Tenemos los siguientes predicados en el universo de discurso de los habitantes de la Ciudad de México:

$$\begin{array}{rl} I(x) & x \text{ es inteligente} \\ E(x) & x \text{ es estudiante de la UNAM} \\ M(x) & \text{a } x \text{ le gusta la música} \end{array}$$

Ejemplo

- Todos los estudiantes de la UNAM son inteligentes.

$$\forall x(E(x) \to I(x))$$

- A algunos estudiantes inteligentes les gusta la música.

$$\exists x(E(x) \land I(x) \land M(x))$$

- Todo aquel a quien le gusta la música es un estudiante que no es inteligente.

$$\forall x(M(x) \to E(x) \land \neg I(x))$$

Ejemplo

En este ejemplo observamos el significado de las distintas combinaciones de dos cuantificaciones. Sea $Q(x,y)$ el predicado x quiere a y.

- Todos quieren a alguien:
$$\forall x \exists y Q(x,y)$$
- Alguien quiere a todos:
$$\exists x \forall y Q(x,y)$$
- Alguien es querido por todos:
$$\exists x \forall y Q(y,x)$$
- Algunos se quieren entre sí, o bien alguien quiere a alguien:
$$\exists x \exists y Q(x,y)$$

Ejemplo

- Alguno no es querido por nadie:

$$\exists x \forall y \neg Q(x, y)$$

- Alguien no quiere a nadie:

$$\exists x \forall y \neg Q(x, y)$$

- Todos no quieren a alguien:

$$\forall x \exists y \neg Q(x, y)$$

- Nadie quiere a todos:

$$\neg \exists x \forall y Q(x, y)$$

- Nadie quiere a nadie:

$$\forall x \forall y \neg Q(x, y)$$

Negaciones

Con frecuencia necesitaremos traducir la negación de una cuantificación, lo cual ejemplificamos a continuación.

Ejemplo

La negación de una cuantificación puede obtenerse simplemente anteponiendo el operador de negación:

- No todos son leones se traduce como

$$\neg \forall x L(x)$$

- No existen leones se traduce como

$$\neg \exists x L(x)$$

Negaciones

Sin embargo, estas traducciones no proporcionan información suficiente y pueden mejorarse usando equivalencias intuitivas del español, como sigue:

Ejemplo

- No todos son leones es lo mismo que existe algo que no es león cuya traducción es:

$$\exists x \neg L(x)$$

- No existen leones es lo mismo que cualquiera no es león cuya traducción es:

$$\forall x \neg L(x)$$

Ejemplo

Traducir el enunciado no todos los planetas tienen una luna. Definimos los predicados $P(x)$, $L(x)$, $T(x,y)$ para ser planeta, ser luna y x tiene a y respectivamente.

- Lo más simple es especificar primero la cuantificación universal y anteponer la negación, obteniendo

$$\neg\forall x(P(x) \to \exists y(L(y) \wedge T(x,y))).$$

- Otra opción es transformar la frase a una equivalente en español que permita una estructura lógica que nos dé más información. En este caso el enunciado original es equivalente a existe un planeta que no tiene lunas, cuya especificación es:

$$\exists x(P(x) \wedge \neg\exists y(L(y) \wedge T(x,y))).$$

Ejemplo

- Es posible refinar aún más la traducción si observamos que la frase no existe una luna tal que x la tenga se puede reescribir como para toda luna, x no la tiene, obteniendo así la especificación más refinada posible.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(L(y) \to \neg T(x,y))).$$

Contando objetos

Como ya mencionamos, el hecho de usar variables diferentes no implica que se refieran necesariamente a individuos distintos, de manera que para representar cantidades particulares se requiere especificar explícitamente que ciertos individuos no son iguales.

Contando objetos

Ejemplo

En las siguientes especificaciones se utiliza el predicado binario de igualdad = de manera infija. Además las fórmulas del esquema $\neg(t = s)$ se escriben como $t \neq s$, como es usual en matemáticas.

- Hay al menos una luna, esto resulta equivalente a hay una luna:

$$\exists x L(x).$$

- Hay más de una luna, es decir, existen al menos dos lunas:

$$\exists x \exists y (L(x) \land L(y) \land x \neq y).$$

Contando objetos

Ejemplo

- Hay al menos tres lunas. De manera similar al enunciado anterior usamos tres variables y hacemos explícito el hecho de que denotan a tres individuos diferentes:

$$\exists x \exists y \exists z (L(x) \land L(y) \land L(z) \land x \neq y \land x \neq z \land y \neq z).$$

  En general es posible definir el enunciado hay al menos n objetos de manera análoga. Sin embargo es imposible especificar que existe una infinidad de objetos.

Contando objetos

Ejemplo

- Existe un único sol. Lo usual aquí es especificar que hay un sol y que cualesquiera dos soles en realidad son iguales:

$$\exists x(S(x) \land \forall y \forall z(S(y) \land S(z) \to y = z)).$$

Este esquema es de gran utilidad en matemáticas y suele abreviarse como $\exists ! x P(x)$ para cualquier predicado P.

Contando objetos

Ejemplo

- Hay a lo más un sol, lo cual es equivalente a Cualesquiera dos soles son el mismo.

$$\forall x \forall y (S(x) \land S(y) \to x = y).$$

Obsérvese que esta especificación incluye el caso en que no haya soles. Otra posibilidad es especificar que No es cierto que existen al menos dos soles.

Micromundos

- Un micromundo es un modelo artificialmente simple de una situación real.
- Si se desea programar un robot para que mueva objetos, basta modelar los movimientos deseados.
- Sin tomar en cuenta sus dimensiones reales ni la cantidad total de objetos en juego.
- Basta considerar una idealización del mundo real con pocos objetos.

- En este micromundo hay cubos de color amarillo, azul o rojo.
- Un cubo puede estar sobre otro o en el piso.
- Definimos los predicados $S(x, y)$ representando que el cubo x está sobre el cubo y.
- $A(x)$, $Z(x)$ y $R(x)$ que representan que un cubo puede ser de color amarillo, azul o rojo respectivamente.
- $L(x)$ significa que el cubo x está libre, es decir que ningún cubo está sobre el cubo x.
- La constante p representa al piso.

Ejemplo

- Ningún cubo amarillo está libre:

$$\forall x(A(x) \rightarrow \neg L(x)).$$

- Hay un cubo azul libre y un cubo rojo libre:

$$\exists x \exists y(Z(x) \wedge L(x) \wedge R(y) \wedge L(y)).$$

- Cualquier cubo amarillo tiene un cubo sobre él:

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(S(y,x) \wedge x \neq y)).$$

Ejemplo

- No todos los cubos azules están libres:

$$\exists x(Z(x) \land \neg L(x)).$$

- Hay un cubo azul sobre el piso con un cubo amarillo sobre él y un cubo rojo sobre el amarillo:

$$\exists x \exists y \exists w(Z(x) \land A(y) \land R(w) \land S(x,p) \land S(y,x) \land S(w,y)).$$

Noción informal de verdad

- Si el dominio de interpretación (universo de discurso) que esté en uso es finito, entonces podemos asignar el valor de falso o verdadero a cada predicado analizando todas las posibles combinaciones de individuos en dicho universo de discurso.
- El uso de tablas de verdad para la lógica de predicados es inadecuado.
- La noción de verdad en lógica de predicados es mucho más complicada.

Noción informal de verdad

- Depende de un mundo en particular.
- La noción de verdad dependerá del mundo que hayamos fijado de antemano.
- Al cambiar éste, el valor de verdad de una fórmula también puede hacerlo.

Noción informal de verdad

Antes de dar una definición de verdad analicemos el caso de los cuantificadores con un ejemplo sencillo en el micromundo de figuras:

Ejemplo

- Todos son círculos: $\forall x C(x)$. Esto será cierto si y sólo si al revisar cada objeto del micromundo, el objeto resulta ser un círculo. Si suponemos que hay n objetos, denotados por las constantes $a_1, \ldots, a_n$, entonces $\forall x C(x)$ será cierto si y sólo si $C(a_1)$ es cierta y $C(a_2)$ es cierta y ... y $C(a_n)$ es cierta; es decir, si y sólo si la conjunción $C(a_1) \wedge \cdots \wedge C(a_n)$ es cierta. Esto no puede ser una definición, pues en el caso en que el universo sea infinito es imposible formar la conjunción de todos los objetos.

Noción informal de verdad

Ejemplo

- Existe algo pequeño: $\exists x P(x)$. Esta fórmula es cierta si y sólo si alguno de los objetos $a_1, \ldots, a_n$ resulta ser pequeño, es decir, si la disyunción $P(a_1) \vee \cdots \vee P(a_n)$ es cierta.

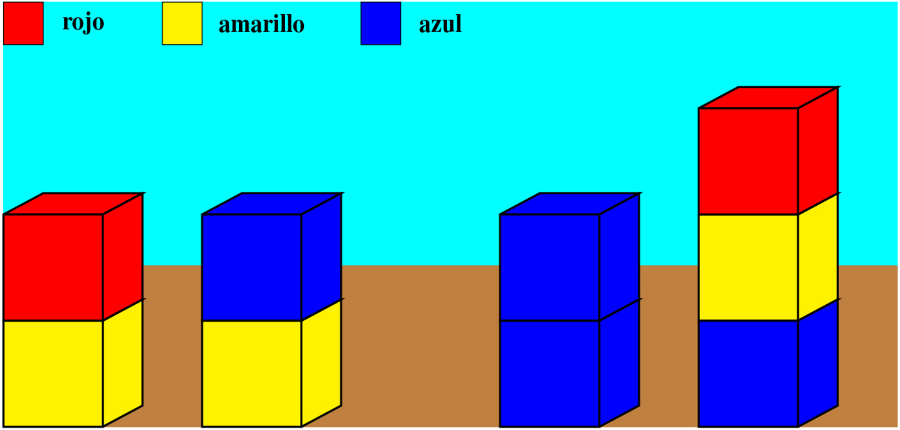
Definición

Dada una fórmula A de la lógica de predicados, definimos cuándo A es verdadera en un mundo o universo de discurso dado M, de acuerdo a su forma sintáctica, como sigue:

- Si A es una fórmula atómica, digamos $P(t_1, \ldots, t_n)$, entonces A es verdadera en M si y sólo si los valores de los términos $t_1, \ldots, t_n$ como individuos de M están en la relación del universo definida por P.
- Si A es una fórmula proposicional, entonces usamos los criterios de verdad de la lógica proposicional.
- Si $A = \forall x B$ es una fórmula universal, entonces A es verdadera en M si y sólo si B es verdadera en M para todos los posibles valores de x como individuo de M.
- Si $A = \exists x B$ es una fórmula existencial, entonces A es verdadera en M si y sólo si B es verdadera en M para algún valor de x como individuo de M.

Verdad en micromundos

Regresamos a los micromundos particulares empezando con el mundo de los cubos.



Verdad en micromundos

Queremos determinar la semántica de algunas fórmulas en este micromundo.

1. Cualquier cubo rojo está libre:

$$\forall x(R(x) \to L(x)).$$

   Verdadero, pues los cubos rojos en la primera y cuarta torre, que son todos los cubos rojos en este micromundo, están libres.

2. Todos los cubos sobre el piso son azules:

$$\forall x(S(x,p) \to Z(x)).$$

   Falso, pues la primera y segunda torre tienen cubos amarillos sobre el piso, por lo que no todos los cubos sobre el piso son azules.

Verdad en micromundos

3. Cualquier cubo que esté sobre un cubo amarillo es rojo o azul:

$$\forall x(\exists y(A(y) \wedge S(x,y)) \rightarrow R(x) \vee Z(x)).$$

   Cierto, ya que los cubos amarillos de la primera y cuarta torre tienen a un cubo rojo encima; y el cubo amarillo de la segunda torre tiene encima a un cubo azul.

4. Hay un cubo rojo sobre un cubo rojo:

$$\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x,y)).$$

   Falso. Los dos cubos rojos, en la primera y cuarta torre, son libres, por lo que no tienen encima a ningún cubo, en particular a uno rojo.

Verdad en micromundos

5. Hay un cubo amarillo libre sobre el piso:

$$\exists x(A(x) \wedge L(x) \wedge S(x,p)).$$

   Falso. No hay ningún cubo libre sobre el piso, en particular que sea amarillo, por lo que la fórmula es falsa.

6. Ningún cubo está sobre el piso:

$$\forall x \neg S(x,p).$$

   Falso, pues el cubo amarillo en la primera torre sí está sobre el piso.

Verdad en micromundos

7. Hay un cubo amarillo que está sobre uno azul y hay un cubo azul sobre él:

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge Z(y) \wedge S(x,y) \wedge \exists w (Z(w) \wedge S(w,x))).$$

   Falso. No hay una torre que contenga una secuencia de cubo azul, cubo amarillo y cubo azul.

8. Todos los cubos están sobre algo:

$$\forall x \exists y S(x,y).$$

   Verdadera. Todos los cubos están o sobre el piso o sobre algún otro cubo.

Equivalencias lógicas

Todas las equivalencias lógicas para la lógica proposicional siguen siendo válidas en la lógica de predicados y pueden usarse también dentro de una cuantificación.

1. Hay un círculo grande es equivalente a hay alguna figura grande que es círculo:
$$\exists x(C(x) \land G(x)) \equiv \exists x(G(x) \land C(x)).$$
2. Cualquier figura o es triángulo o es mediana equivale a que toda figura que no es triángulo es mediana:
$$\forall x(T(x) \lor M(x)) \equiv \forall x(\neg T(x) \to M(x)).$$

Equivalencias lógicas

3. No es cierto que hay un cuadrado y que todas las figuras sean pequeñas significa lo mismo que o bien no hay cuadrados o bien no todas las figuras son pequeñas:

$$\neg(\exists x S(x) \wedge \forall y P(y)) \equiv \neg\exists x S(x) \vee \neg\forall y P(y).$$

4. Si todas las figuras son cuadrados entonces no hay figuras grandes equivale a si existen figuras grandes entonces no todas son cuadrados:

$$\forall S(x) \rightarrow \neg\exists y G(y) \equiv \exists y G(y) \rightarrow \neg\forall S(x).$$

Negación de cuantificadores

Las leyes de negación, también se conocen como leyes de De Morgan generalizadas.

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$$

$$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$$

Negación de cuantificadores

Ejemplo

No es cierto que si hay un triángulo entonces todas los figuras son medianas.

$$\begin{aligned}\neg(\exists x T(x) \to \forall y M(y)) &\equiv \exists x T(x) \land \neg\forall y M(y)\\ &\equiv \exists x T(x) \land \exists y \neg M(y).\end{aligned}$$

Hay un triángulo y no todas las figuras son medianas, lo que equivale asimismo a hay un triángulo y hay una figura que no es mediana.

Negación de cuantificadores

Ejemplo

El dominio de interpretación son los habitantes de la Ciudad de México, los lapsos de tiempo y los exámenes; utilizaremos los siguientes predicados:

$$
\begin{aligned}
F(x) &: x \text{ es estudiante} \\
I(x) &: x \text{ es inteligente} \\
A(x) &: x \text{ es alumno} \\
T(x) &: x \text{ es un tiempo} \\
E(x,y) &: x \text{ estudia en el tiempo} y \\
R(x) &: x \text{ reprueba} \\
C(x) &: \text{ el examen } x \text{ fue calificado} \\
P(x) &: x \text{ es un examen}
\end{aligned}
$$

Negación de cuantificadores

- No es cierto que todos los estudiantes sean inteligentes:

$$\begin{aligned}\neg\forall x(F(x) \to I(x)) &\equiv \exists x\neg(F(x) \to I(x)) \\ &\equiv \exists x(F(x) \land \neg I(x))\end{aligned}$$

Hay un estudiante inscrito que no es inteligente.

Negación de cuantificadores

- No hay alumnos que estudien todo el tiempo:

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x(A(x) \wedge \forall y(T(y) \to E(x,y))) &\equiv \forall x \neg(A(x) \wedge \forall y(T(y) \to E(x,y))) \\
&\equiv \forall x(\neg A(x) \vee \neg\forall y(T(y) \to E(x,y))) \\
&\equiv \forall x(\neg A(x) \vee \exists y \neg(T(y) \wedge \neg E(x,y))) \\
&\equiv \forall x(\neg A(x) \vee \exists y(T(y) \wedge \wedge \neg E(x,y))) \\
&\equiv \forall x(A(x) \to \exists y(T(y) \wedge \neg E(x,y)))
\end{aligned}
$$

Para cualquier alumno hay un tiempo en el que no estudia.

Distributividad

Leyes distributivas entre cuantificadores y conectivos.

$$\forall x(A \land B) \equiv \forall xA \land \forall xB$$
$$\exists x(A \lor B) \equiv \exists xA \lor \exists xB$$

Cuantificación vacua

Cuantificación vacua, si x no figura libre en A entonces

$$\forall x A \equiv A$$

$$\exists x A \equiv A$$

Prenexación

Prenexación de cuantificadores: si x no figura libre en A entonces,

$$A \wedge \forall x B \equiv \forall x(A \wedge B)$$
$$A \vee \forall x B \equiv \forall x(A \vee B)$$
$$A \wedge \exists x B \equiv \exists x(A \wedge B)$$
$$A \vee \exists x B \equiv \exists x(A \vee B)$$

Prenexación

Prenexación de cuantificadores: si x no figura libre en A entonces,

$$A \rightarrow \forall x B \equiv \forall x(A \rightarrow B)$$
$$A \rightarrow \exists x B \equiv \exists x(A \rightarrow B)$$

Prenexación de cuantificadores: si x no figura libre en B entonces,

$$\forall x A \rightarrow B \equiv \exists x(A \rightarrow B)$$
$$\exists x A \rightarrow B \equiv \forall x(A \rightarrow B)$$