Estructuras Discretas

Lógica Proposicional

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

16 de marzo de 2023

Introducción

- Uno de los aspectos más importantes de la lógica matemática es el decidir si un argumento es correcto o no.
- Utilizar a la lógica como una herramienta para deducir la solidez o correctud de un argumento lógico.
- La primer pregunta que nos hacemos es ¿qué es un argumento lógico?
- Un argumento se da en lenguaje natural presentando ciertos hechos, verdades o situaciones; así como una conclusión.

- Ejemplo:
  Si llueve, me quedo en casa. Si me quedo en casa, leo un libro. Por lo tanto, si llueve, leo un libro.

Introducción

Características

- ¿Cómo distinguimos entre las premisas y la conclusión del argumento?
- Depende de ciertas frases del lenguaje natural que nos dan la pauta para hacer la distinción.
- Frases como
  - por lo tanto
  - luego entonces
  - de manera que
- Una vez identificadas la conclusión y las premisas se puede reescribir el argumento de una forma estructurada omitiendo ciertas frases del lenguaje natural.

- Ejemplo:
  1. Si llueve, me quedo en mi casa
  2. Si me quedo en mi casa, leo un libro
  3. Si llueve, leo un libro

- ¿Cuándo un argumento es correcto?
- ¿Cómo decidimos si un argumento es correcto?
- Un argumento lógico será correcto si la verdad de sus premisas causan necesaria y obligatoriamente la verdad de su conclusión.
- Esto puede mostrarse mediante las reglas lógicas de operación.
- Para poder manipular argumentos lógicos, les asignamos letras a ciertas frases consideradas de estructura lógica simple, llamadas proposiciones o fórmulas atómicas.
- De esta manera podemos ver en forma concisa los argumentos lógicos.

Para poder definir expresiones lógicas, empecemos por cuáles son los objetos elementales de la lógica

- La lógica tiene constantes, Falso, False o F y Verdadero, True o T.
- Estas constantes se conocen como valores lógicos o booleanos.

Objetos elementales de la lógica

- Las expresiones lógicas se conocen también como proposiciones y son enunciados u oraciones a las que les podemos asociar un valor lógico.
- Las proposiciones se dan en lenguaje natural; un enunciado es una proposición solamente si se puede decir que es falso o verdadero, **pero no ambos**.
- La proposición ***llueve***; es Falsa o Verdadera dependiendo del momento en que se diga, de si en ese momento está lloviendo o no.
- Cuando decimos que una proposición es Falsa o Verdadera, estamos determinando el valor de dicha proposición.

Definición (Proposición)

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas.

Definición (Proposiciones atómicas)

Se denomina **proposición simple** o atómica aquella que no tiene conectores lógicos.

Definición (Proposiciones compuestas)

Una **proposición compuesta** se forma a partir de proposiciones atómicas y conectivos lógicos.

Sintaxis de la lógica proposicional

Definición (Sintaxis de *LPROP*)

El lenguaje de la lógica proposicional utiliza los siguientes conjuntos de símbolos:

- Constantes: T y F
- Variables proposicionales: $p, q, r, \ldots, p_1, q_2, \ldots$
- Símbolos de conectivas: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Signos de puntuación: $(\,)$

Sintaxis de la lógica proposicional

Recursiva

Definición (Sintáxis de $LPROP$)

Las reglas gramaticales para crear expresiones bien formadas de $LPROP$, se definen recursivamente de la siguiente manera:

1. Las constantes T y F son expresiones de $LPROP$
2. Las variables proposicionales $p, q, r, \ldots$ son expresiones de $LPROP$
3. Si A es una expresión de $LPROP$ entonces $(\neg A)$ es una expresión de $LPROP$
4. Si A y B son expresiones de $LPROP$ entonces
    1. $(A \vee B)$ Disyunción
    2. $(A \wedge B)$ Conjunción
    3. $(A \rightarrow B)$ Implicación
    4. $(A \leftrightarrow B)$ Equivalencia

    son expresiones de $LPROP$
5. Sólo las anteriores son expresiones de $LPROP$

Lógica proposicional

Ejemplos

Son proposiciones:

- Está lloviendo.
- Juan es más grande que Pedro.
- $3 \leq 5$.
- El libro es rojo.

No son proposiciones:

- ¡Mario, llévate esto!
- ¿Estás seguro?
- $3+5$.
- $z > 0$
- Ni modo.

Lógica proposicional

- Una proposición es un enunciado que puede calificarse como falso o verdadero, dependiendo del estado en que se evalúe.
- Decimos que una proposición es atómica si no puede subdividirse en proposiciones más simples.

Ejemplos

Proposiciones compuestas

Las siguientes proposiciones son compuestas:

- Juan y Pedro están hambrientos.
- Está nublado, por lo que va a llover, entonces no saldremos.
- $0 \leq 5 \leq 10$.
- El libro es rojo o azul.

Estas proposiciones se llaman compuestas pues cada una de ellas se puede descomponer en dos o más proposiciones atómicas

- Juan está hambriento **y** Pedro está hambriento.
- Está nublado, **por lo que** va a llover **entonces** no saldremos
- $0 \leq 5$ **y** $5 \leq 10$
- El libro es rojo **o** el libro es azul

Lógica proposicional

- En el proceso de traducción de lenguaje natural al formal se asocian identificadores (letras) a las proposiciones atómicas.
- A estos identificadores se les conoce como variables proposicionales.
- Se necesitan de constantes y operadores lógicos y que corresponden estos últimos a las frases en lenguaje natural que hemos llamado conectivos.

Lógica proposicional

Veamos ahora el paso del español al lenguaje formal de proposiciones mediante algunos ejemplos.

Proposición atómica	Variable proposicional
Juan está hambriento	a
Pedro está hambriento	b
está nublado	c
va a llover	d
saldremos	e
$0 < 5$	p
$5 < 10$	q
el libro es rojo	r
el libro es azul	s

La forma en que conectamos las proposiciones lógicas por medio de conectivos los cuales representamos de la siguiente forma:

Significado	Conectivo
no	$\neg$
y, además, pero	$\wedge$
o	$\vee$
implica, si, entonces, por lo que, se sigue de	$\rightarrow$
si y sólo si	$\leftrightarrow$

Lógica proposicional

Ejemplo

Las proposiciones no atómicas de los ejemplos anteriores son representadas de la siguiente manera:

- Juan y Pedro están hambrientos

$$a \wedge b$$

- Está nublado por lo que va a llover; entonces no saldremos

$$(c \rightarrow d) \rightarrow \neg e$$

- $0 < 5 < 10$

$$p \wedge q$$

- El libro es rojo o el libro es azul

$$r \vee s$$

- Una vez discutido informalmente qué es una proposición así como la sintaxis para proposiciones, es momento de hablar de su significado.
- Los aspectos relacionados con el significado de cualquier clase de expresiones forman lo que se conoce como la semántica del lenguaje. Cada proposición tiene como significado un valor booleano que depende tanto del valor particular de sus variables proposicionales como del significado de las constantes y operadores lógicos.

- Para poder entender el significado de una proposición debemos empezar definiendo el significado de cada constante u operador lógico.
- El significado de las constantes lógicas debe ser claro, la constante (T) significa verdadero y la (F) falso.
- La manera más fácil para definir el significado de un operador lógico es mediante lo que se conoce como tablas de verdad.

La negación de una proposición A se denota de la siguiente forma:

$$(\neg A)$$

Su significado en español es:
no A, no es cierto que A, es falso que A.
Su tabla de verdad es:

A	negación $(\neg A)$
T	F
F	T

La conjunción de dos proposiciones A y B se denota de la siguiente forma:

$$(A \wedge B)$$

Su significado en español es:
A y B, A además de B, A pero B.
Su tabla de verdad es:

A	B	Conjunción $(A \wedge B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

La disyunción de dos proposiciones A y B se denota de la siguiente forma:

$$(A \vee B)$$

Su significado en español es:
A o B, o A o B,
Su tabla de verdad es:

A	B	Disyunción $(A \vee B)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

La implicación de dos proposiciones A y B se denota de la siguiente forma:

$$(A \to B)$$

Su significado en español es:
si A entonces B, A implica B, A es (condición) suficiente para B, B si A, A sólo si B, B se sigue de A, B es (condición) necesaria para A.
Su tabla de verdad es:

A	B	Implicación $(A \to B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

La equivalencia de dos proposiciones A y B se denota de la siguiente forma:

$$(A \leftrightarrow B)$$

Su significado en español es:
A si y sólo si B, A es equivalente a B, A es (condición) necesaria y suficiente para B.
Su tabla de verdad es:

A	B	Equivalencia $(A \leftrightarrow B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Al conocerse el significado de cada conectivo lógico mediante su tabla de verdad es posible obtener el significado de cualquier fórmula mediante una tabla de verdad que combine las tablas de cada subfórmula componente de la fórmula original.

Tablas de verdad

Ejemplo

Consideramos la siguiente proposición compuesta

$$((P \to (\neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg R))) \to ((\neg P) \leftrightarrow R)$$

P	Q	R	$(P \to (\neg Q))$	$\vee$	$(Q \wedge (\neg R))$	$\to$	$((\neg P) \leftrightarrow R)$
T	T	T	F	F	F	***T***	F
T	T	F	F	T	T	***T***	T
T	F	T	T	T	F	***F***	F
T	F	F	T	T	F	***T***	T
F	T	T	T	T	F	***T***	T
F	T	F	T	T	T	***F***	F
F	F	T	T	T	F	***T***	T
F	F	F	T	T	F	***F***	F

Como se observa, las tablas de verdad crecen tanto en columnas como en renglones, al volverse más compleja la fórmula en cuestión.

Tablas de verdad

$$((P \to (\neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg R))) \to ((\neg P) \leftrightarrow R)$$

Otro aspecto que podemos observar en la proposición compuesta es que esta se encuentra completamente parentizada, lo cual ayuda mucho para saber en qué orden ir resolviendo cada una de las subfórmulas.
¿Qué pasaría si no contamos con estos paréntesis? La fórmula quedaría como:

$$P \to \neg Q \vee Q \wedge \neg R \to \neg P \leftrightarrow R$$

En este caso la pregunta es, ¿en qué orden evaluamos?

Precedencia y asociatividad

- Se han utilizado paréntesis en expresiones.
- Los paréntesis nos indican agregación.
- Por ejemplo, la expresión $3+(4\cdot 5)$ los paréntesis agregan la expresión $4\cdot 5$ como el segundo operando de la suma para indicar que la operación que queremos realizar es la suma de 3 con el producto de 4 y 5, su resultado es 23.
- Si la expresión tuviera los paréntesis $(3+4)\cdot 5$, se estaría agregando la suma de 3 y 4 como operando del producto, dando como resultado 35.
- Para reducir el número de paréntesis en una expresión se asignan precedencias a los operadores.

Precedencia y asociatividad

Otro concepto, que se relaciona en particular con el orden de evaluación de una expresión, es el de asociatividad. Esta propiedad nos permite decidir, si tenemos al mismo operador más de una vez en una expresión y en ausencia de paréntesis para indicar el orden de evaluación,

Precedencia y asociatividad

Ejemplo

En la expresión $p \to q \to r$, ¿cuál de los dos debe evaluarse primero, el de la izquierda o el de la derecha?
El resultado de la evaluación es distinta, dependiendo de la asociatividad que tengamos:

p	q	r	$(p \to q) \to r$	Valor	$p \to (q \to r)$	Valor
F	F	F	$T \to F$	F	$F \to T$	T

Precedencia y asociatividad

Tabla de precedencias y asociatividades de los operadores aritméticos y lógicos más comunes.

- En el orden en que aparecen, la precedencia va de mayor a menor.
- Los operadores que tienen la misma precedencia aparecen en el mismo renglón de la tabla.

Orden	Operador	Descripción	Asociatividad
1	$\neg$	operador negación	izquierda
2	$\wedge \; \vee$	conjunción y disyunción	izquierda
3	$\rightarrow$	implicación	derecha
4	$\leftrightarrow$	equivalencia	izquierda

Precedencia y asociatividad

Se puede observar lo siguiente:

- En ausencia de paréntesis la evaluación de $p \to q \to r$ como $p \to (q \to r)$, ya que el operador $\to$ asocia a la derecha
- Esto quiere decir que evaluamos de derecha a izquierda, como si hubiera paréntesis alrededor de $q \to r$

Precedencia y asociatividad

La tabla no nos ayuda a determinar los paréntesis implícitos en expresiones como

$$P \land Q \lor R$$

- El motivo es que $\land$ y $\lor$ tienen la misma precedencia
- Aunque no son el mismo operador, por lo que no podemos utilizar la asociatividad para solucionar el conflicto
- En este tipo de expresiones es costumbre poner siempre paréntesis para indicar la precedencia
- De otra manera la evaluación de la expresión es ambigua

Precedencia y asociatividad

Puede haber estados en los que la evaluación sea la misma. Veamos la evaluación de estas dos asociatividades en un estado en el que no se obtiene el mismo valor, para corroborar que en ese estado no producen el mismo resultado y por lo tanto las dos expresiones no son equivalentes.

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$\vee$	R	Valor	P	$\wedge$	$(Q \vee R)$	Valor
F	F	T	F	T	T	T	F	F	T	F

El concepto de asociatividad sólo se puede aplicar cuando se trata de dos o más presencias consecutivas del mismo operador; no son los niveles de precedencia los que definen la asociatividad.

Ejercicios

1. Usa variables proposicionales p, q y r para formalizar los siguientes argumentos lógicos. Lista cómo asignas las variables a las proposiciones atómicas.
   1. Si n es número primo, no puede ser divisible entre 2; sabemos que 24 es divisible entre 2, por lo que no es número primo.
   2. Si lo mató, fue un crimen pasional; y si es un crimen pasional, el asesino sale corriendo; sabemos que ella no salió corriendo; entonces no lo mató.
2. Construye la tabla de verdad para cada una de las siguientes fórmulas
   1. $(p \wedge q) \to \neg(r \wedge q)$
   2. $(p \wedge (r \wedge q)) \to r$
   3. $((p \to q) \wedge \neg q) \to p$
3. De acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, parentiza las siguientes expresiones
   1. $p \vee \neg q \to r \wedge p \leftrightarrow q \to r$
   2. $p \wedge p \to q \leftrightarrow q$

Propiedades de los conectivos lógicos

Conmutatividad: Nos dice que el orden en que aparecen las proposiciones relacionadas por el conectivo lógico no afecta el resultado de la operación.
Por ejemplo, la evaluación de $p \wedge q$ da siempre el mismo resultado que la evaluación de $q \wedge p$.
En el caso de los conectivos lógicos no todos son conmutativos. Los conectivos $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ son conmutativos.

El valor de:	es el mismo que el de:
$p \vee q$	$q \vee p$
$p \wedge q$	$q \wedge p$
$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$

Si vemos la tabla de verdad de la implicación $(\leftrightarrow)$ es fácil ver no es conmutativa.

Propiedades de los conectivos lógicos

Asociatividad: Nos dice el orden en el que podemos relacionar los conectivos lógicos y que no se altere la operación.
Por ejemplo, los conectivos que son asociativos son la conjunción $(\wedge)$, la disyunción $(\vee)$ y la equivalencia $(\leftrightarrow)$.

El valor de:	es el mismo que el de:
$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

Nuevamente, la condicional $(\rightarrow)$ tampoco presenta esta propiedad.

Propiedades de los conectivos lógicos

Elemento identidad: Un elemento identidad para un operador es aquel valor que al operarlo con una expresión el resultado es esa misma expresión.
El elemento identidad va a depender del operador o conectivo particular.
Estamos suponiendo la conmutatividad del operador con respecto al elemento identidad y cualquier otro elemento.
Los elementos identidad de cada operador se dan a continuación.

Operador	Identidad	El valor de	Es el valor de
$\land$	True	$p \land$ True	p
$\lor$	False	$p \lor$ False	p
$\leftrightarrow$	True	$p \leftrightarrow$ True	p

Para ver que, en efecto, son elementos identidad, se sugiere desarrollar las tablas de verdad correspondientes.

Propiedades de los conectivos lógicos

Elemento neutro: Es aquella constante que al operar con cualquier otro valor, el resultado es la constante misma.
Es decir, e es un elemento neutro para el operador y para cualquier expresión.
En este caso sólo podemos tener elemento neutro en los operadores conjunción $(\wedge)$ y disyunción $(\vee)$.

El valor de:	Es el valor de:
$p \vee$ True	True
$p \wedge$ False	False

Propiedades de los conectivos lógicos

Idempotencia: Esta propiedad habla de un operador que al tener dos operandos iguales el resultado es el operando mismo.
Por ejemplo, si tenemos la proposición $p \wedge p$ podemos observar de la tabla de verdad, que su valor es el mismo que el de p.
Sólo los operadores $\wedge$ y $\vee$ son idempotentes:

p	$p \wedge p$	$p \vee p$
T	T	T
F	F	F

Propiedades de los conectivos lógicos

Para la implicación hay otras proposiciones interesantes que vale la pena mencionar.
Se caracterizan porque al operar con la constante False o True, dan siempre como resultado el valor de True:

p	False $\to p$	$p \to$ True
T	T	T
F	T	T