Estructuras Discretas

Lógica Proposicional

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

23 de marzo de 2023

Equivalencia lógica

- El concepto de expresiones equivalentes es imprescindible para todo tipo de razonamiento.
- Dos expresiones son equivalentes si y sólo si en todos y cada uno de sus posibles estados se evalúan a lo mismo.

Equivalencia lógica

Ejemplo

Podemos comprobar usando una tabla de verdad, que las expresiones $\neg\neg P$ y P son equivalentes:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

Renglón por renglón, el valor correspondiente a P es el mismo que el valor correspondiente a $\neg\neg P$.

No se interprete esta definición como que estamos exigiendo tener el mismo valor en todos los renglones, esto es, que todos los renglones valieran F o todos los renglones valieran T.

Equivalencia lógica

En el caso de expresiones lógicas el concepto de equivalencia está relacionado con un tipo particular de tautología. Si tenemos una bicondicional $(A \leftrightarrow B)$ que es una tautología, entonces decimos que tenemos una equivalencia lógica.

Equivalencia lógica

Definición

Sean A, B dos fórmulas. Si $A \leftrightarrow B$ es una tautología, entonces decimos que A y B son lógicamente equivalentes y lo denotamos por $A \equiv B$. Esto es lo mismo que decir

$$A \equiv B \qquad \text{si y sólo si} \qquad \models A \leftrightarrow B.$$

Reglas de equivalencia

Asociatividad :	$(P \land Q) \land R \equiv P \land (Q \land R)$	(1)
	$(P \lor Q) \lor R \equiv P \lor (Q \lor R)$	(2)
Identidad :	$P \lor False \equiv P$	(3)
	$P \land True \equiv P$	(4)
Idempotencia :	$P \lor P \equiv P$	(5)
	$P \land P \equiv P$	(6)
Dominación :	$P \lor True \equiv True$	(7)
	$P \land False \equiv False$	(8)
Conmutatividad :	$P \lor Q \equiv Q \lor P$	(9)
	$P \land Q \equiv Q \land P$	(10)
Tercero excluido :	$P \lor \neg P \equiv True$	(11)
Contradicción :	$P \land \neg P \equiv False$	(12)
Doble negación :	$\neg\neg P \equiv P$	(13)
Distributividad :	$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$	(14)
	$P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)$	(15)

Reglas de equivalencia

De Morgan :	$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$	(16)
	$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$	(17)
Eliminación de operadores :	$P \to Q \equiv \neg P \lor Q$	(18)
	$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$	(19)
	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$	(20)
	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$	(21)
Leyes de absorción :	$P \lor (P \land Q) \equiv P$	(22)
	$P \land (P \lor Q) \equiv P$	(23)
Leyes de simplificación :	$(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \equiv Q$	(24)
	$(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \equiv Q$	(25)

Regla de Leibniz

$$\frac{X = Y}{E[z := X] = E[z := Y]}$$

Ejemplo

Para poder comprobar las reglas de equivalencia, el método más simple es realizar la tabla de verdad, por ejemplo, para comprobar que la regla 1 se cumple lo siguiente:

$$\models (P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge R$	$\leftrightarrow$	$P \wedge (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	F

Ejemplo

Para poder comprobar las regla de equivalencia 16 tenemos lo siguiente:

$$\models \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Álgebra de equivalencias lógicas

- Análogamente al razonamiento aritmético ecuacional que es la base del álgebra, las expresiones lógicas generan un álgebra.
- Esta manipula variables y constantes que representan valores de verdad.
- Podemos emplear equivalencias lógicas para deducir o simplificar nuevas expresiones a partir de otras ya conocidas.

Álgebra de equivalencias lógicas

Ejemplo

Utilizaremos este método de tomar a uno de los equivalentes y derivar, a partir de él, al otro. Consideremos la expresión $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$. Como el de la izquierda tiene más estructura, es el que tomamos como punto de partida.

1. $P \vee (P \wedge Q)$
   Usando la identidad (4) tenemos:
2. $(P \wedge True) \vee (P \wedge Q)$
   Usando la identidad (15) de distrubutividad tenemos:
3. $P \wedge (True \vee Q)$
   Usando la identidad (7) de dominación tenemos:
4. $P \wedge (True)$
   Usando de nuevo la identidad (4) tenemos:
5. P

Análisis de argumentos

- Aplicamos todos los conocimientos previos de lógica para cumplir con nuestro propósito fundamental
- El análisis de correctud de un argumento lógico proposicional
- Un argumento es correcto si y sólo si su fórmula asociada es una tautología

Análisis de argumentos

- Para decidir la correctud podemos construir la tabla de verdad
- El método de tablas de verdad puede evitarse al usar esquemas
- Una vez que se prueba que un argumento es correcto, él mismo genera un esquema, llamado regla de inferencia
- Cada instancia de esta regla será, a su vez, un argumento correcto

Análisis de argumentos

Ejemplo

Si tenemos el argumento $P \to Q,\ Q \to R / \therefore P \to R$, tenemos que decidir si éste es correcto, para ello basta ver que $\models (P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$. Lo cual realizaremos por tabla de verdad.

P	Q	R	$(P \to Q)$	$\wedge$	$(Q \to R)$	$\to$	$(P \to R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Mostrar la correctud del argumento

$$\begin{array}{l} r \to s \vee \neg t \\ (r \to s \vee \neg t) \to \neg p \wedge (q \vee w) \\ \hline \therefore \neg p \wedge (q \vee w) \end{array}$$

La tabla de verdad para este análisis tendría $2^6 = 64$ renglones, dado que tenemos seis variables. Formalmente tenemos que

$$(P \wedge (P \to Q) \to Q)[P, Q := r \to s \vee \neg t, \neg p \wedge (q \vee w)] =$$
$$= ((r \to s \vee \neg t) \wedge ((r \to s \vee \neg t) \to (\neg p \wedge (q \vee w)) \to (\neg p \wedge (q \vee w))$$

P	Q	$(P \to Q)$	$\wedge$	P	$\to$	Q
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F

y como $\models P \wedge (P \to Q) \to Q$ podemos concluir que

$$\models ((r \to s \vee \neg t) \wedge ((r \to s \vee \neg t) \to (\neg p \wedge (q \vee w)) \to (\neg p \wedge (q \vee w))$$

Análisis de argumentos

- El uso de una tabla de verdad para analizar la correctud de un argumento es una muy mala idea en general.
- Construir la tabla de verdad para una fórmula resulta, en la mayoría de los casos, innecesario.
- El concepto de consecuencia lógica supone que las premisas son ciertas y bajo este supuesto muestra que la conclusión también lo es.

Análisis de argumentos

Teorema

El argumento $A_1, \ldots, A_n / \therefore B$ *es lógicamente correcto si y sólo si*

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$$

es decir, si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

De acuerdo a las propiedades de la consecuencia lógica, existen dos formas para demostrar la correctud de un argumento, el método directo y el indirecto.

Método directo:
Probar la consecuencia $A_1, \ldots, A_n \models B$. Para esto se supone la existencia de una interpretación $\mathcal{I}$ que sea modelo de todas las premisas y se argumenta, usando esta información y la definición de interpretación, que la conclusión B también se satisface con $\mathcal{I}$

Método indirecto:
Probar que es insatisfacible el conjunto $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$. Para esto se supone que hay una interpretación $\mathcal{I}$ que hace verdaderas a todas las premisas y a la negación de la conclusión $\neg B$ o bien, equivalentemente, hace falsa a la conclusión B. Apelando a este supuesto y a la definición de interpretación, se trata de mostrar que tal interpretación no puede existir; esto se logra mostrando que cierta fórmula está forzada a ser verdadera y falsa al mismo tiempo.

Interpretaciones

Ejemplo método directo

Mostrar la correctud del argumento $p \to q, \neg q / \therefore \neg p$, Para lograr esto mostramos la consecuencia lógica $p \to q, \neg q \models \neg p$.

1.	$\mathcal{I}(p \to q)$	$= T$	Hipótesis
2.	$\mathcal{I}(\neg q)$	$= T$	Hipótesis
3.	$\mathcal{I}(q)$	$= F$	Por 2, tenemos $\mathcal{I}(\neg q) = T$
4.	$\mathcal{I}(p)$	$= F$	Por 1 y 3, tenemos $\mathcal{I}(p \to q) = T$ y $\mathcal{I}(q) = F$,

$\therefore \mathcal{I}(p)$ no puede ser T en conclusión $\mathcal{I}(\neg p) = T$.

Mostar la correctud del argumento $t \wedge k \rightarrow b, \neg t \rightarrow f, \neg f \wedge k / \therefore b$. Por el método indirecto.

1.	$\mathcal{I}(t \wedge k \rightarrow b)$	$= T$	Hipótesis.
2.	$\mathcal{I}(\neg t \rightarrow f)$	$= T$	Hipótesis.
3.	$\mathcal{I}(\neg f \wedge k)$	$= T$	Hipótesis.
4.	$\mathcal{I}(b)$	$= F$	Refutación.
5.	$\mathcal{I}(k)$	$= T$	Por 3, $\mathcal{I}(p \wedge q) = T$, $\mathcal{I}(p) = T$ y $\mathcal{I}(q) = T$.
6.	$\mathcal{I}(t \wedge k)$	$= F$	Por 4 y 1, $\mathcal{I}(t \wedge k) = F$.
7.	$\mathcal{I}(t)$	$= F$	Por 5 y 6, $\mathcal{I}(k) = T$; si $\mathcal{I}(t \wedge k) = F$, $\mathcal{I}(t) = F$.
8.	$\mathcal{I}(\neg t)$	$= T$	Por 7.
9.	$\mathcal{I}(f)$	$= T$	Por 2 y 8.
10.	$\mathcal{I}(\neg f)$	$= T$	Por 3, $\mathcal{I}(\neg f) = T$ y $\mathcal{I}(k) = T$.
11.	$\mathcal{I}(f)$	$= F$	Por 10.

El conjunto $\Gamma \cup \{\neg b\}$ insatisfacible y el argumento es correcto.