**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

# Estructuras Discretas

## Tarea 7

**PRESENTA**

**Castañon Maldonado Carlos Emilio**
**Bazán Rojas Karina Ivonne**

**PROFESORA**

**Araceli Liliana Reyes Cabello**

**AYUDANTES**

**Rafael Reyes Sánchez**
**Ricardo Rubén Gónzalez García**
**Javier Enríquez Mendoza**
**José Eliseo Ortíz Montaño**

# Estructuras Discretas

## Tarea Semanal 7

1 **Verifica si las siguientes son equivalencias válidas, por medio de álgebra de equivalencias lógicas y tablas de verdad.**

a) $(p \to q) \to q \equiv p \lor q$

$$\neg(p \to q) \lor q \equiv p \lor q \quad \text{Eliminación de operadores}$$
$$\neg(\neg p \lor q) \lor q \equiv p \lor q \quad \text{Eliminación de operadores}$$
$$(p \land \neg q) \lor q \equiv p \lor q \quad \text{De Morgan y Doble Negación}$$
$$(q \lor p) \land (q \lor \neg q) \equiv p \lor q \quad \text{Distributividad}$$
$$(q \lor p) \land (True) \equiv p \lor q \quad \text{Tercero Excluido}$$
$$(q \lor p) \equiv p \lor q \quad \text{Identidad}$$
$$p \lor q \equiv p \lor q \quad \text{Conmutatividad}$$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $(p \to q) \to q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \lor q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \to \neg q) \land (\neg q \to \neg p) \quad \text{Eliminación de operadores}$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \lor \neg q) \land (q \lor \neg p) \quad \text{Eliminación de operadores}$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \lor \neg p) \land (p \lor \neg q) \quad \text{Conmutatividad}$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q) \quad \text{Conmutatividad}$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \land (q \to p) \quad \text{Eliminación de operadores}$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow q) \quad \text{Eliminación de operadores}$$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \leftrightarrow \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

c) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

$$\begin{aligned}
\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{Eliminación de operadores}\\
\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{De Morgan}\\
(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{De Morgan}\\
(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p) &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{Conmutatividad}\\
(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p) &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{Eliminación de operadores}\\
p \leftrightarrow \neg q &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{Eliminación de operadores}
\end{aligned}$$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $\neg(p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \leftrightarrow \neg q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

2 **Para cada una de las fórmulas muestra si son o no satisfacibles, si lo son muestra un modelo para cada una.**

a) $(\neg p \vee q) \wedge p$

$$\mathcal{I}(p) = 1, \mathcal{I}(\neg p) = 0, \mathcal{I}(q) = 1$$

entonces $\mathcal{I}(\neg p \vee q) = 1 \Rightarrow \mathcal{I}((\neg p \vee q) \wedge p) = 1$, por lo que si es un modelo para la fórmula.

b) $p \wedge q \wedge \neg p$
No es satisfacible,no hay ninguna asignación de verdad para las variables $p$ y $q$ que haga que la fórmula sea verdadera ya que $p \wedge q \wedge \neg p \equiv q \wedge p \wedge \neg p$ por *Conmutatividad* y como podremos recordar $p \wedge \neg p \equiv$ *False* por lo que tendríamos $q \wedge$ *False* y no hay modelo que satisfaga eso.

c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
Si $p$ y $q$ son verdaderos, entonces ambas implicaciones son verdaderas y la conjunción de ambas también es verdadera.
Si $p$ y $q$ son falsos, entonces ambas implicaciones son trivialmente verdaderas (ya que si el antecedente es falso, implica verdadero), y la conjunción de ambas también es verdadera.
Por lo tanto, podemos concluir que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ es satisfacible.

$$\mathcal{I}(p) = 1, \mathcal{I}(q) = 1$$

entonces $\mathcal{I}(p \rightarrow q) = 1$ y $\mathcal{I}(q \rightarrow p) = 1 \Rightarrow \mathcal{I}(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = 1$, por lo que si es un modelo para la fórmula.

3 **Demuestra la consecuencia lógica por medio de interpretaciones en cada uno de los casos**

a) $\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \models r$

1) $\mathcal{I}(p \vee q) = T$ Por hipótesis
2) $\mathcal{I}(p \to r) = T$ Por hipótesis
3) $\mathcal{I}(q \to r) = T$ Por hipótesis
4) $\mathcal{I}(r) = F$ Refutación
5) $\mathcal{I}(p) = F$ Por 2 y 4
6) $\mathcal{I}(q) = F$ Por 3 y 4
7) $\mathcal{I}(p \vee q) = F$ Por 5 y 6

$\therefore$ El conjunto $\Gamma \cup \{\neg r\}$ insatisfacible y el argumento es correcto.

b) $\{r \wedge s \to t, \neg t\} \models t \to q$

1) $\mathcal{I}(r \wedge s \to t) = T$ Por hipótesis
2) $\mathcal{I}(\neg t) = T$ Por hipótesis
3) $\mathcal{I}(t) = F$ Por 2.

$\therefore t \to q$

c) $\{\neg q \to \neg r, \neg r \to \neg p, \neg p \to \neg q\} \models q \leftrightarrow r$

1) $\mathcal{I}(\neg q \to \neg r) = T$ Por hipótesis
2) $\mathcal{I}(\neg r \to \neg p) = T$ Por hipótesis
3) $\mathcal{I}(\neg p \to \neg q) = T$ Por hipótesis
4) $\mathcal{I}(\neg(\neg q) \vee \neg r) \equiv \mathcal{I}(q \vee \neg r)$ Eliminación de op. 1
5) $\mathcal{I}(\neg(\neg r) \vee \neg p) \equiv \mathcal{I}(r \vee \neg p)$ Eliminación de op. 2
6) $\mathcal{I}(\neg(\neg p) \vee \neg q) \equiv \mathcal{I}(p \vee \neg q)$ Eliminación de op. 3
7) $\mathcal{I}(q \vee \neg r) = T$ Por 1 y 4
8) $\mathcal{I}(r \vee \neg p) = T$ Por 2 y 5
9) $\mathcal{I}(p \vee \neg q) = T$ Por 3 y 6
10) $\mathcal{I}(q) = T$ Por 7 y 9
11) $\mathcal{I}(r) = T$ Por 7 y 10

$\therefore q \leftrightarrow r$