Estructuras Discretas

Lógica Proposicional

Liliana Reyes

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

22 de marzo de 2023

Árbol de sintaxis

Otra forma de representar una expresión es mediante un árbol de sintaxis.

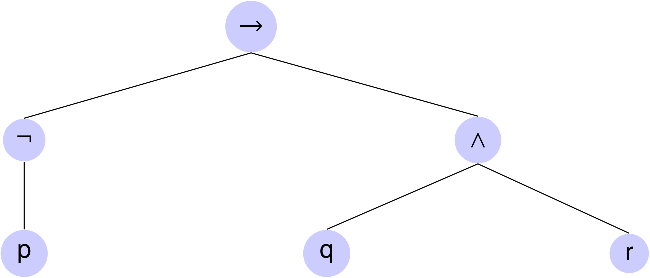
- El nodo raíz está etiquetado justo por el operador principal.
- El subárbol izquierdo corresponderá al árbol con la subexpresión izquierda.
- El subárbol derecho corresponde con la subexpresión derecha.

Árbol de sintaxis

Otra forma de representar una expresión es mediante un árbol de sintaxis.

- Las hojas están etiquetadas con variables o constantes proposicionales, que representan las fórmulas atómicas.
- Los nodos intermedios están etiquetados por los conectivos lógicos.
- El árbol se lee de abajo hacia arriba.
- En dicho árbol se omiten los paréntesis, pero en la reconstrucción de la expresión es necesario que se incluyan.

Árbol de sintaxis



$$((\neg p) \to (p \wedge r))$$

Clasificación de fórmulas

Las tablas de verdad nos permiten observar el valor de una fórmula en todos sus posibles estados.
Esto nos permite clasificar a las fórmulas de la siguiente manera:

- **Tautologías**: Aquellas fórmulas que se evalúan a verdadero en todos los estados posibles.
- **Contradicciones**: Aquellas fórmulas que se evalúan a falso en todos los posibles estados.
- **Contingencias:** Aquellas fórmulas que no son ni tautologías ni contradicciones.

Tautologías

Las tautologías son muy importantes, es por ello que tenemos una notación especial para representarlas.
Volviendo al cálculo proposicional, si A es una proposición que es tautología, escribimos $\models A$.
El símbolo $\models$ no es un operador de la lógica proposicional y la expresión $\models P$ no es una proposición, sino que nos habla acerca de la proposición P, diciéndonos que P es una tautología.
Conocemos ya varias tautologías, como es el caso de $p \vee \neg p$, $p \rightarrow p \vee q$, $p \wedge p \leftrightarrow p$.
Para convencernos, veamos sus tablas de verdad:

p	q	$p \vee \neg p$		$p \rightarrow p \vee q$		$p \wedge p \leftrightarrow p$	
		$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$	$\vee$	$\wedge$	$\leftrightarrow$
T	T	**T**	F	**T**	T	T	**T**
T	F	**T**	F	**T**	T	T	**T**
F	T	**T**	T	**T**	T	F	**T**
F	F	**T**	T	**T**	F	F	**T**

Tautologías

Ejemplos

Como ejemplos de tautologías de gran importancia tenemos:

- **Ley del tercero excluido**, nos dice que toda proposición tiene que evaluarse a falso o verdadero, que no hay ningún otro valor posible.

$$p \vee \neg p$$

- **Falso implica cualquier cosa**, cuando el antecedente es falso, se puede concluir cualquier proposición.

$$\text{False} \rightarrow p$$

- **Cuando el consecuente es verdadero**, cualquier proposición lo implica (lo "justifica").

$$p \rightarrow \text{True}$$

Contradicciones

Una contradicción es una expresión que se evalúa a falso en todos los estados posibles.

Para verificar que una expresión es una contradicción utilizamos para ello tablas de verdad, como en el caso de las tautologías.

Por ejemplo, $p \leftrightarrow \neg p$ y $p \wedge \neg p$ son contradicciones, como se muestra en su tabla de verdad:

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F	F
F	T	F	F

Las contradicciones están íntimamente relacionadas con las tautologías. Si A es una tautología, entonces $\neg A$ es una contradicción y viceversa.

Análisis sintáctico

- Una expresión es una cadena o palabra construida mediante símbolos de un alfabeto dado.
- No todas las cadenas que construyamos pegando símbolos van a ser expresiones útiles.
- Sólo aquellas construidas de acuerdo a una gramática diseñada con ese propósito particular.
- El proceso de evaluación descrito requiere que la expresión a evaluar sea sintácticamente válida.

Ejemplo

No podemos ni debemos intentar evaluar una cadena de símbolos como $p\neg q$, puesto que ésta no es una expresión válida y el intento de evaluarla fracasará.

Análisis sintáctico

- Las expresiones generadas por la gramática de la lógica proposicional se llaman expresiones lógicas, proposiciones o bien, fórmulas.
- El proceso de evaluación de una expresión debe ser precedido por el proceso de reconocer cuándo una cadena de símbolos es una fórmula bien formada.
- El proceso se conoce como análisis sintáctico.
- ¿Cuándo una cadena de símbolos es una expresión lógica?
- Hasta ahora la única manera de responder es derivando dicha cadena mediante las reglas de la gramática.

Esquemas

Definición

Un esquema es una expresión construida de manera similar a las fórmulas pero usando, en algunos casos, identificadores en vez de variables proposicionales.

Ejemplo

Si A y B son identificadores, entonces $A \to B$ es un esquema.

Ejemplo

La expresión $(A \to B)$ es un esquema, y si $A = (p \wedge q)$ y $B = (p \vee q)$ entonces nos proporciona una forma más concisa de escribir

$$(p \wedge q) \to (p \vee q)$$

Esquema

Definición

Instanciar un esquema consiste en hacer una sustitución textual simultánea de cero o más identificadores en el esquema, por fórmulas bien construidas, que pueden o no involucrar a identificadores que aparecen originalmente en el esquema.

Un esquema tiene tantas instancias como fórmulas bien formadas. Todo esquema es una instancia de sí mismo, ya que resulta de la sustitución textual simultánea de cero identificadores en el esquema o, visto de otra manera, donde cada identificador que aparece en el esquema es sustituido por sí mismo.

Esquemas

Esquemas básicos		
	Nombre	Expresión
1.	Negación	$(\neg A)$
2.	Conjunción	$(A \wedge B)$
3.	Disyunción	$(A \vee B)$
4.	Condicional	$(A \rightarrow B)$
5.	Equivalencia	$(A \leftrightarrow B)$

Observamos que toda fórmula debe ser atómica, o bien corresponder a una o varias sustituciones textuales simultáneas de uno de estos cinco esquemas.

Rango y conectivo principal

Definición

El concepto de rango o alcance de un conectivo en una fórmula o esquema E se define, con base en los esquemas básicos, como sigue:

1. Si E es instancia de $\neg A$, entonces el rango de $\neg$ en E es A.
2. Si E es instancia de uno de los esquemas básicos binarios $A * B$, donde $*$ es un conectivo lógico binario, entonces el conectivo $*$ en E tiene un rango izquierdo que es A y un rango derecho que es B.

$$\underbrace{(A \vee B)}_{\text{rango izq}} \to \underbrace{C}_{\text{rango derecho}}$$

rango izq $\vee$

rango der

$\neg A \vee B$

rango $\neg$

Rango

- El rango o rangos de un conectivo en una expresión corresponden a los operandos.
- En caso de que no estén explícitamente indicados se obtienen tomando en cuenta las reglas de asociatividad y precedencia.

Ejemplo

En el esquema $\neg A \vee B$ el rango del operador $\neg$ es únicamente el identificador A. Si queremos que el rango sea $A \wedge B$ debemos encerrar este esquema entre paréntesis, obteniendo $\neg(A \wedge B)$.

Ejemplo

En la fórmula $A \wedge B \wedge C$ el rango izquierdo del segundo conectivo $\wedge$ es la fórmula $(A \wedge B)$, ya que como no hay paréntesis, las reglas de precedencia y asociatividad hacen que la colocación de los paréntesis implícita de la fórmula sea $((A \wedge B) \wedge C)$.

rang izq

rango der

Conectivo principal

Otro concepto importante es el de conectivo principal.

Definición

Si una expresión E resulta ser instancia de uno de los esquemas básicos, entonces el conectivo que observamos en el esquema correspondiente será también el conectivo principal de E.

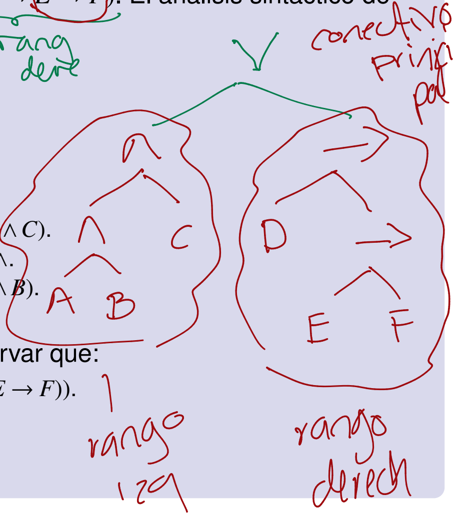
Ejemplo

Si $E = (p \land q) \land C$, entonces el conectivo principal de E es $\land$, puesto que $E = (A \land B)[A, B := p \lor q, C]$.

Ejemplo

Consideremos el esquema $(A \land B \land C) \lor (D \to E \to F)$. El análisis sintáctico de este esquema es el siguiente: rang izq   rang dere

- Para el esquema original:
  - El conectivo principal es $\lor$.
  - El rango izquierdo es $(A \land B \land C)$.
  - El rango derecho es $(D \to E \to F)$.
- Para el rango izquierdo:
  - Los paréntesis implícitos son $((A \land B) \land C)$.
  - El conectivo principal es el segundo $\land$.
  - El rango izquierdo corresponde a $(A \land B)$.
  - El rango derecho corresponde a C.
- Para el rango derecho, podemos observar que:
  - Los paréntesis implícitos son $(D \to (E \to F))$.
  - El conectivo principal es el primer $\to$.
  - El rango izquierdo es D.
  - El rango derecho es $(E \to F)$.



Sustitución textual

Supongamos que tenemos dos expresiones E y R, y una variable x.
Usamos la notación

$$E[x := R]$$

para denotar la expresión que es la misma que E, pero donde cada presencia de x en la expresión E ha sido sustituida por la expresión R.
Llamamos sustitución textual al acto de sustituir todas las presencias de x en E por R.

$$\underbrace{(A \to B \vee C)}_{E}[\underbrace{B}_{x} := \underbrace{P \to P}_{R}]$$

$$A \to (P \to P) \vee C$$

Sustitución textual

Nota: La sustitución textual afecta a la expresión más pequeña bien formada a su izquierda

Ejemplo

Expresión $E[x := R]$	Resultado
$a + b[a := x + y]$	$a + b$
$(a + b)[a := x + y]$	$((x + y) + b)$
$(x \cdot y)[x := z + 2]$	$((z + 2) \cdot y)$
$(4 \cdot a \cdot b)[a := b]$	$(4 \cdot (b) \cdot b)$
$(p \to q)[p := F]$	$((F) \to q)$
$(p \to p \vee q)[p := p \vee q]$	$((p \vee q) \to (p \vee q) \vee q)$
$(5 \cdot x)[x := 2 + 6]$	$(5 \cdot (2 + 6))$

$x + y[x := 3]$

$(x + y)[x := 3]$

Sustitución textual

Debemos notar algunos puntos como:

- Debe quedar claro el porqué la sustitución se define poniendo entre paréntesis a R dentro de E ya que de no ser así corremos el riesgo de alterar los paréntesis.
  (R)
- R, la expresión por la que vamos a sustituir, puede o no tener presencias de x, la variable a la que vamos a sustituir. $\underbrace{(p \wedge q)}_{E}[q := q \to r] = p \wedge (q \to r)$
  $[x := R]$
- Si E no tiene ninguna presencia de x, la expresión queda exactamente igual a como estaba. $(p \wedge q)[r := p \vee q] = p \wedge q$
- Si hay varias presencias de x en E, se piensa en la sustitución hecha simultáneamente a cada presencia de x en E. $(p \to q \wedge p)[p := \neg p]$
  $\neg p \to q \wedge \neg p$
- Es común que en el resultado queden paréntesis que no aportan nada. En este caso, y cuando la eliminación de los paréntesis no afecte la precedencia y asociatividad del resultado, éstos pueden eliminarse.

$(p \wedge q)[p := \neg s \wedge t] = ((\neg s \wedge t) \wedge q)$

$\neg s \wedge t \wedge q$

Sustitución textual

$(p \wedge q \to s)[p, q, s := \neg t, p \wedge t, \neg p]$

$(\neg t \wedge (p \wedge t)) \to \neg p$

Definición

Si tenemos una lista de variables $x : x_1, x_2, \ldots, x_n$ distintas y una lista de expresiones $R : R_1, R_2, \ldots, R_n$ (no forzosamente distintas), podemos definir la sustitución textual simultánea $E[x := R]$ como el reemplazo simultáneo de cada una de las variables de la lista x por su correspondiente expresión en la lista R. Esto es, x_1 se reemplaza con R_1, x_2 con R_2, y así sucesivamente.

$(p \wedge q \to t)[p := \neg t, q := p \wedge t, s := \neg p]$

sustitución textual

Ejemplo

Si tenemos,

$$(p \wedge q)[p, q := T, F],$$

su sustitución textual quedaría como

$$((T) \wedge (F)),$$

cuyo valor es F.

Ejemplo

Mientras que si tenemos,

$$(p \wedge q)[p, q := T, p]$$

su sustitución textual es

$$((T) \wedge (p)),$$

ya que no se puede regresar a hacer la sustitución textual de la variable x que aparece en la expresión R, en la expresión resultante.

Sustitución textual

$(:=) :: \text{Explog} \to \text{Var} \to \text{Explog} \to \text{Explog}$

- Un punto mucho muy importante a notar es que la sustitución textual se utiliza únicamente para sustituir presencias de variables, no de expresiones ni de constantes.
- La asociatividad de la sustitución textual es izquierda, por lo que $E[x := R][z := S]$ se asocia $(E[x := R])[z := S]$, donde E, R y S son expresiones y x y z son variables.
- Esta operación se define como una copia de E en la que las presencias de x fueron sustituidas por R, y en esa copia las presencias de z fueron sustituidas por S.

  – secuencial
- Es importante notar que, en general, $E[x := R][z := S]$ es distinto a $E[x, z := R, S]$, como se puede ver en las siguientes sustituciones:

simultanea

$$(p \to p \vee q)[p := q][q := p] \quad \text{es} \quad p \to p \vee p$$
$$(p \to p \vee q)[p, q := q, p] \quad \text{es} \quad q \to q \vee p$$

$\cancel{(p \vee q := S)}$

$[p \vee q := t]$

Ejemplos de esquemas

$$\underbrace{\boxed{(p \wedge r)\vee s}}_{A} \to \underbrace{\boxed{\neg t \wedge q}}_{B}$$

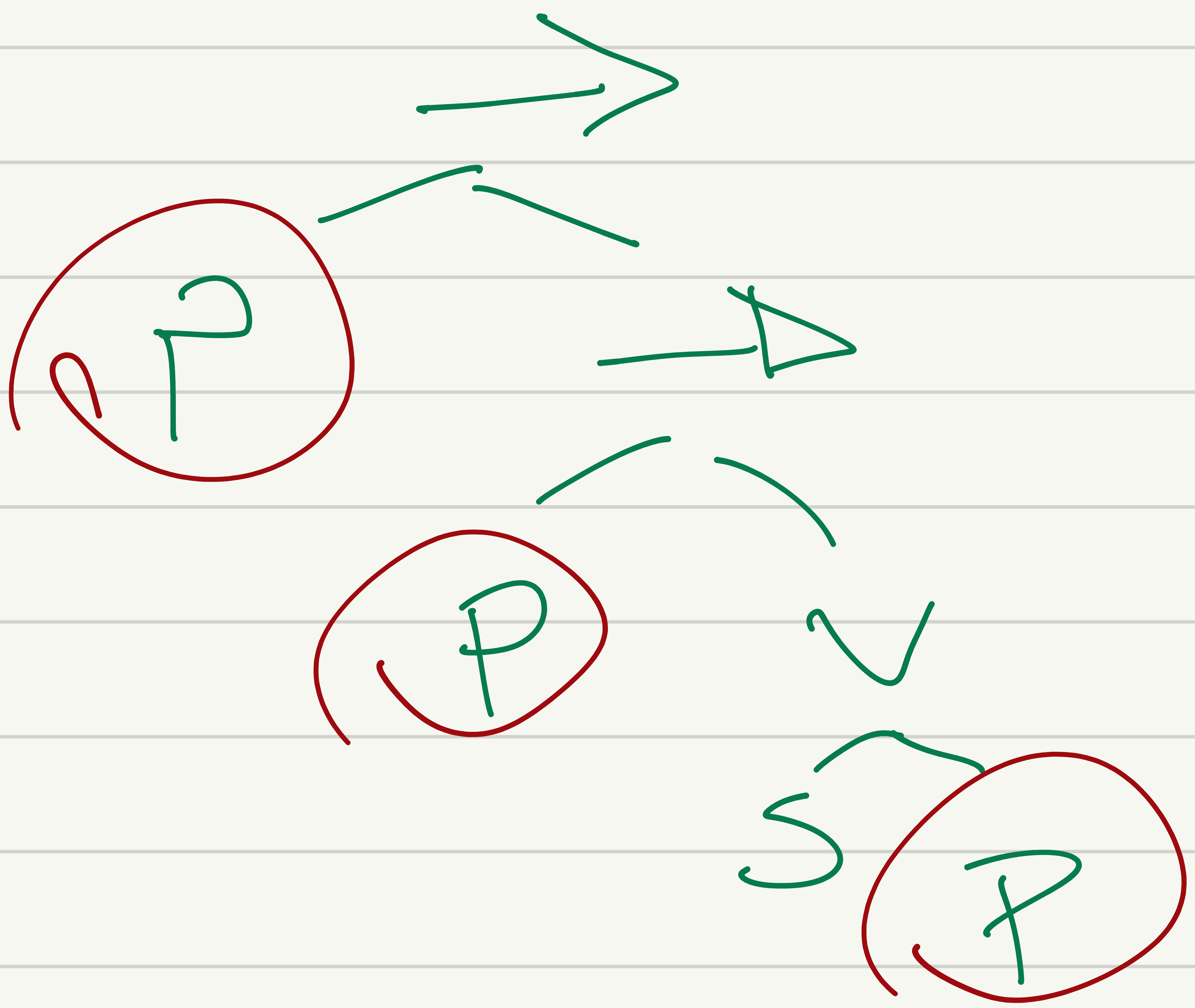
esquema

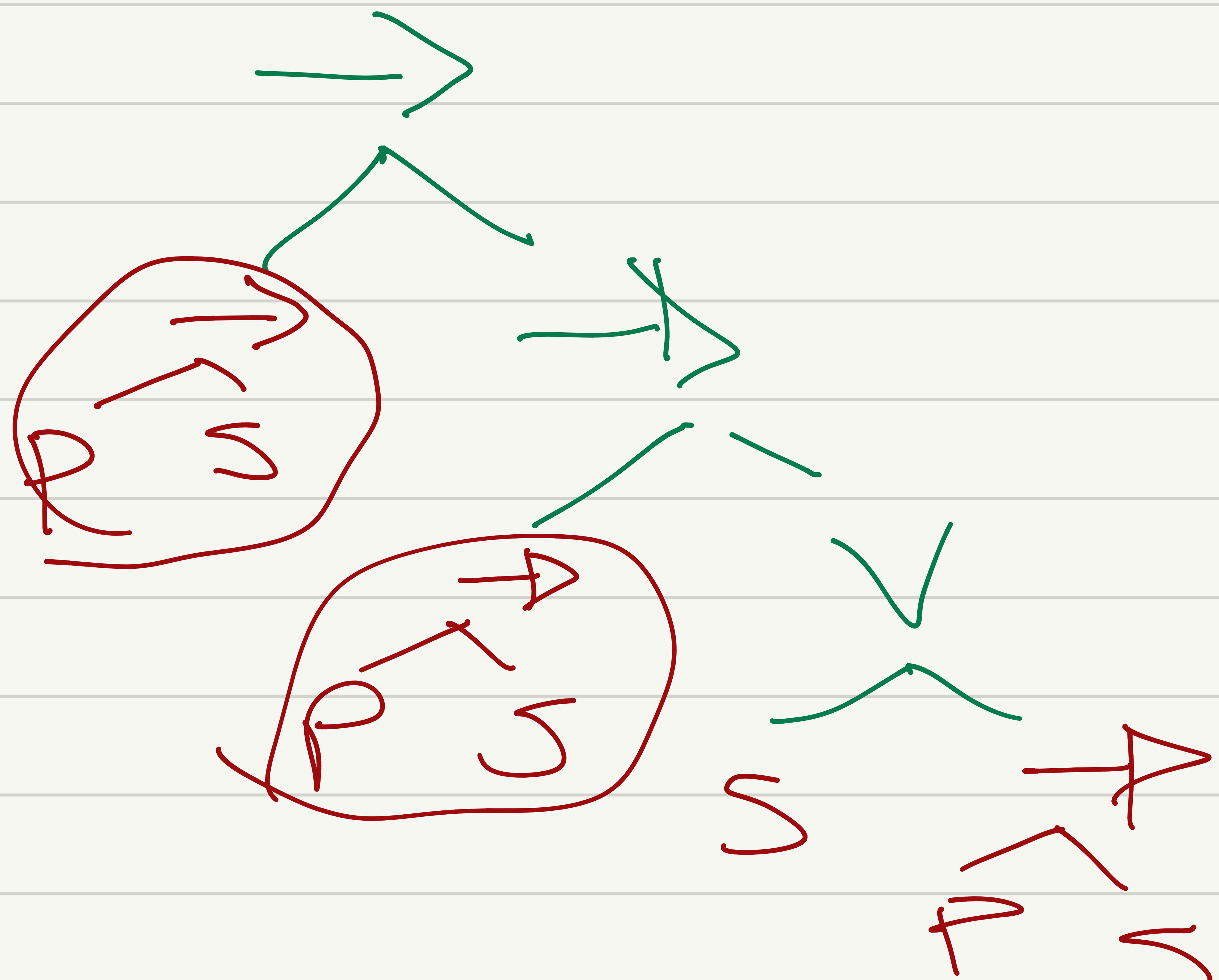
$$(A \to B)\left[A := (p \wedge r) \vee s,\ B := \neg t \wedge q\right]$$

$$(p \to q \vee s)[p := r \wedge t] = (r \wedge t) \to q \vee s$$

$$(p \to p \to s \vee p)[p := p \to s] =$$

$$(p \to s) \to (p \to s) \to s \vee (p \to s)$$





Alcance de la sustitución

$$p \to q\,[q := r,\ p := \neg t] = p \to r$$

$$p \vee (q \to p)\,[q := r,\ p := \neg t] = p \vee (r \to \neg t)$$

$$(p \vee (q \to p))\,[q := r,\ p := \neg t] =$$

$$\neg t \vee (r \to \neg t)$$

$(p \wedge s \Rightarrow \neg t \wedge s)[p, s, t := \neg t, q \vee r, s \Rightarrow p]$

Sistitución simultanea

$\neg t \wedge (q \vee r) \Rightarrow \neg(s \Rightarrow p) \wedge (q \vee r)$

composición de sustituciones secuencial

sustitución

$(p \wedge s \Rightarrow \neg t \wedge s)[p := \neg t][s := q \vee r][t := s \Rightarrow p]$

$(\neg t \wedge s \Rightarrow \neg t \wedge s)[s := q \vee r][t := s \Rightarrow p]$

$(\neg t \wedge (q \vee r) \Rightarrow \neg t \wedge (q \vee r))[t := s \Rightarrow p]$

$\neg(s \Rightarrow p) \wedge (q \vee r) \Rightarrow \neg(s \Rightarrow p) \wedge (q \vee r)$

$$(\underline{p} \wedge t \rightarrow \underline{q} \vee \underline{p})\underbrace{[p, q := t, \neg p]}\underbrace{[p, t := s, \neg q]}$$

$$(\underline{t} \wedge \underline{t} \rightarrow \neg p \vee t)[p, t := s, \neg q]$$

$$\neg q \wedge \neg q \rightarrow \neg s \vee \neg q$$

$$(p \wedge q)[p := t,\ q := t]$$

$$(p \wedge q)\,[\underbrace{p, q}_{n\text{-var}} \underbrace{\cancel{:= t\,]}}_{n\text{-expresiones } \checkmark}$$

$$[p, q := t, t] \checkmark$$