UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea Examen 3

ALUMNO

Carlos Emilio Castañon Maldonado

PROFESOR

Javier Enríquez Mendoza

AYUDANTES

Kevin Axel Prestegui Ramos
Karla Denia Salas Jiménez
Ramón Arenas Ayala
Oscar Fernando Millán Pimentel

Lógica Computacional

Tarea Examen 3

1 **(4 pto) Deriva los siguientes secuentes respetando el nivel de negación indicado y usando exclusivamente las reglas de inferencia para negación de cada sistema:**

(a) $\vdash_m (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to B \to \bot), A \vdash_m A}\ (Hip)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to B \to \bot), A \vdash_m B}\ (\to L)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to B \to \bot), A \vdash_m A \to B}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to B \to \bot), A \vdash_m \bot}\ (\to L)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to B \to \bot) \vdash_m A \to \bot}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to \neg B) \vdash_m A \to \bot}\ (\neg)$$

$$\dfrac{}{(A \to B), (A \to \neg B) \vdash_m \neg A}\ (\neg)$$

$$\dfrac{}{(A \to B) \vdash_m (A \to \neg B) \to \neg A}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{\vdash_m (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A}\ (\to R)$$

(b) $\vdash_i (A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$
Antes de iniciar con el ejercicio, notemos que podemos usar la equivalencia lógica de:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$$

Para que entonces de esa forma podamos aprovechar al máximo las reglas que nos ofrece la `Lógica Intuicionista`.

$$(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A) \equiv ((A \to \neg B) \to (B \to \neg A)) \land ((B \to \neg A) \to (A \to \neg B))$$

$$\dfrac{}{A \to B \to \bot, B, A \vdash_i B}\ (Hip) \qquad \dfrac{}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i A}\ (Hip)$$

$$\dfrac{}{A \to B \to \bot, B, A \vdash_i A \to B}\ (\to R) \qquad \dfrac{}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i B \to A}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{A \to B \to \bot, B, A \vdash_i \bot}\ (\to L) \qquad \dfrac{}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i \bot}\ (\to L)$$

$$\dfrac{}{A \to B \to \bot, B \vdash_i A \to \bot}\ (\to R) \qquad \dfrac{}{B \to A \to \bot, A \vdash_i B \to \bot}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{A \to \neg B, B \vdash_i A \to \bot}\ (\neg) \qquad \dfrac{}{B \to \neg A, A \vdash_i B \to \bot}\ (\neg)$$

$$\dfrac{}{A \to \neg B, B \vdash_i \neg A}\ (\neg) \qquad \dfrac{}{B \to \neg A, A \vdash_i \neg B}\ (\neg)$$

$$\dfrac{}{A \to \neg B \vdash_i B \to \neg A}\ (\to R) \qquad \dfrac{}{B \to \neg A \vdash_i A \to \neg B}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{\vdash_i (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)}\ (\to R) \qquad \dfrac{}{\vdash_i (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)}\ (\to R)$$

$$\dfrac{}{\vdash_i ((A \to \neg B) \to (B \to \neg A)) \land ((B \to \neg A) \to (A \to \neg B))}\ (\land R)$$

(c) $\vdash_c \neg\neg A \leftrightarrow A$

Antes de iniciar con el ejercicio, notemos que podemos usar la equivalencia lógica de:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$$

Para que entonces de esa forma podamos aprovechar al máximo las reglas que nos ofrece la `Lógica Clásica`.

$$\neg\neg A \leftrightarrow A \equiv (\neg\neg A \to A) \land (A \to \neg\neg A)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A, \neg A, A \vdash_c \bot}\,(Exp)}{\neg\neg A, \neg A, A \lor \neg A \vdash_c \bot}\,(\lor L)}{\neg\neg A, \neg A \vdash_c \bot}\,(TEL)}{\neg\neg A \vdash_c A}\,(RA)}{\vdash_c (\neg\neg A \to A)}\,(\to R) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash_c \bot}\,(Exp)}{A \vdash_c \neg A \to \bot}\,(\to R)}{A \vdash_c \neg\neg A}\,(\neg)}{\vdash_c (A \to \neg\neg A)}\,(\to R)}{\vdash_c (\neg\neg A \to A) \land (A \to \neg\neg A)}\,(\land R)$$

2 **(4 pto) Muestre lo siguiente mediante una derivación por tácticas, indica en cada paso la táctica usada.**

(a) $(r \lor p) \land q \to l, m \lor q \to s \land t, s \land t \land l \to r, p \to q \vdash m \land p \to r$

```
Example dosA : forall p q r s l m t: Prop, ((r \/ p) /\ q -> l)
-> ((m \/ q) -> s /\ t) -> (s /\ t /\ l -> r) -> (p -> q) -> m /\ p -> r.
Proof.
intros p q r s l m t H H1 H2 H3.
intros H4.
destruct H4 as [H5 H6].
apply H2.
split.
- destruct H1 as [H7 H8].
   + apply or_introl.
     apply H5.
+ apply H7.
- cut (s /\ t /\ l).
   + intros H9.
      destruct H9 as [H10 H11].
      destruct H11 as [H12 H13].
      split ; [apply H12 | apply H13].
+ split.
  * apply H1.
    apply or_introl.
    apply H5.
  * split.
    -- apply H1.
       apply or_introl.
       apply H5.
    -- apply H.
       split.
       apply or_intror.
       apply H6.
       apply H3.
       apply H6.

Qed.
```

(b) $(\neg P \vee Q) \wedge R, Q \to S \vdash_c P \to R \to S$

```
Example dosB :forall p q r s: Prop, ((~ p \/ q) /\ r) -> (q -> s) -> p -> r -> s.
Proof.
intros p q r s H H1 H2 H3.
destruct H as [H4 H5].
apply H1.
destruct H4 as [H6 | H7].
- contradiction.
- apply H7.
Qed.
```

3 **(4 pts) Derive el siguiente secuente ya sea usando calculo de secuentes o tácticas, justificando cada paso de la derivación correspondiente (mencione el nivel de negación usado y por que prefiere el método utilizado.)**

$$(C \to M) \to (N \to P), (C \to N) \to (N \to M), (C \to P) \to \neg M, C \to N \vdash \neg C$$

```
Example tres : forall c m n p: Prop, ((c -> m) -> (n -> p))
-> ((c -> n) -> (n -> m)) -> ((c -> p) -> (~ m)) -> (c -> n) -> ~ c.
Proof.
intros c m n p H H1 H2 H3.
cut (n -> p).
- intros H4.
  cut (n -> m).
  + intros H5.
   *   unfold not.
       intros H6.
       absurd (m).
       -- unfold not.
          intro.
       absurd (m).
       ** unfold not.
          apply H2.
          intros H7.
          apply H.
          intros.
          apply H5.
          apply H3.
          apply H6.
          apply H3.
          apply H6.
       ** apply H5.
          apply H3.
          apply H6.
       -- apply H5.
          apply H3.
          apply H6.
+ intros.
  apply H1.
  intro.
  apply H0.
  apply H0.
- apply H.
```

```
    intros.
    apply H1.
    -- intros.
    apply H3.
    apply H0.
    -- apply H3.
    apply H0.

    Qed.
```

El método de tácticas mediante el uso de `Coq` lo he escogido ya que en `Coq` solo debemos poner las reglas que estemos usando sin tener que poner todo el contexto que lo antecede, además de que uno de los beneficios que mas me gustan es que `Coq` se encarga de ir escribiendo el resultado a cada paso que le estemos dando (además de claro indicarnos si estamos errando en algun paso o si existe alguna meta que por descuido o alguna otra razón hemos omitido y necesitemos demostrar), teniendo de esta forma un lenguaje sumamente útil para ejercicios como estos.