

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

14 – Diagramas polares

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
 - 1) Diagrama de Nyquist;
 - 2) Diagrama de Nichols;
 - Questionário;
 - Referências;
 - Exercícios.

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.1. Forma polar:

- Seja a resposta em frequência de uma planta $G(j\omega)$. Pela representação fasorial:

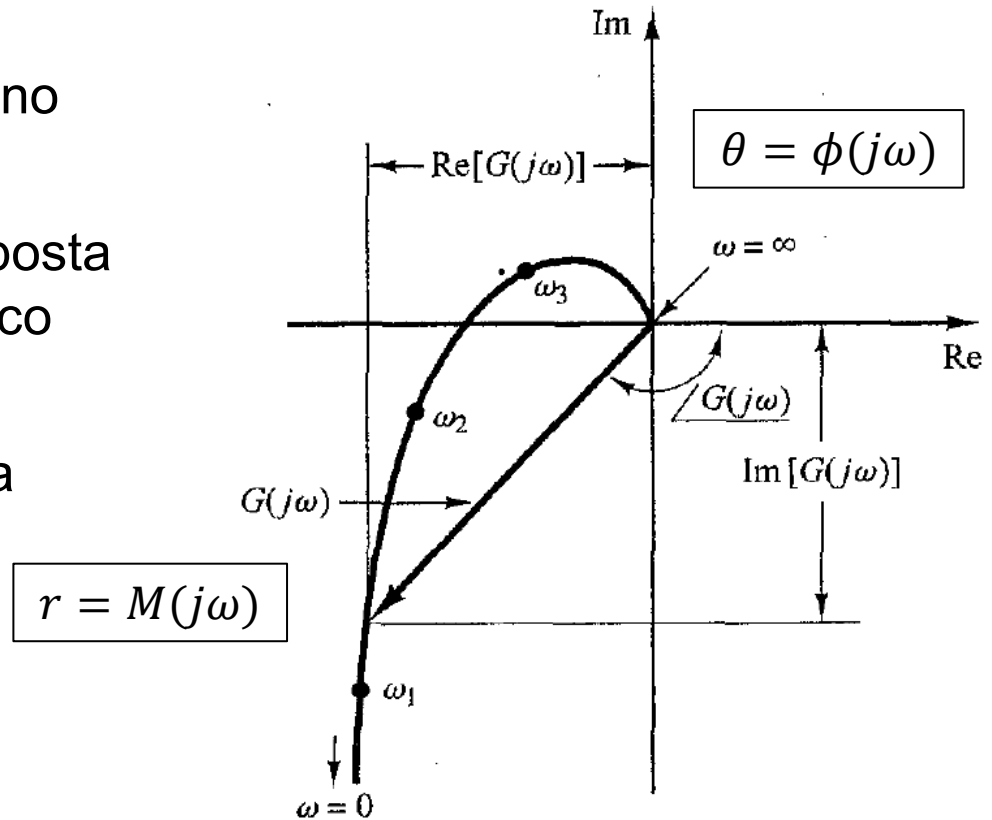
$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega) = M(j\omega)e^{j\phi(j\omega)} \quad (1)$$

- Onde $M(j\omega)$ é a magnitude e $\phi(j\omega)$ é a diferença de fase;
- Para apresentar as informações de magnitude e fase em um único gráfico, é possível plotar $G(j\omega)$ no plano complexo e variar a frequência da entrada ω para percorrer os possíveis valores de $G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega)$.

1. Diagrama de Nyquist

■ 1.2. Diagrama de Nyquist:

- Representação de $G(j\omega)$ no plano complexo;
- Permite apresentar a resposta em frequência em um único gráfico;
- Pode ser empregado para aferir a estabilidade do sistema.



1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.3. Integrador e derivador:

- Integrador:

$$\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ \quad (2)$$

- Derivador:

$$j\omega = \omega \angle +90^\circ \quad (3)$$

- O integrador é o eixo imaginário negativo enquanto que o derivador é eixo imaginário positivo (a fase é sempre constante, enquanto que a magnitude varia com a frequência);
- Aumentando ω , diminui magnitude do integrador e aumenta magnitude do derivador.

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.4. Fator de primeira ordem:

• Polo:

$$\frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega\tau) \quad (4)$$

- A magnitude é unitária em $\omega = 0$ e tende a zero com o aumento da frequência. Em $\omega = 1/\tau$ a magnitude vale 0.707;
- A fase é nula em $\omega = 0$ e varia de 0 a -90° com o aumento da frequência (sentido horário). Em $\omega = 1/\tau$ a fase vale -45° ;

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.4. Fator de primeira ordem:

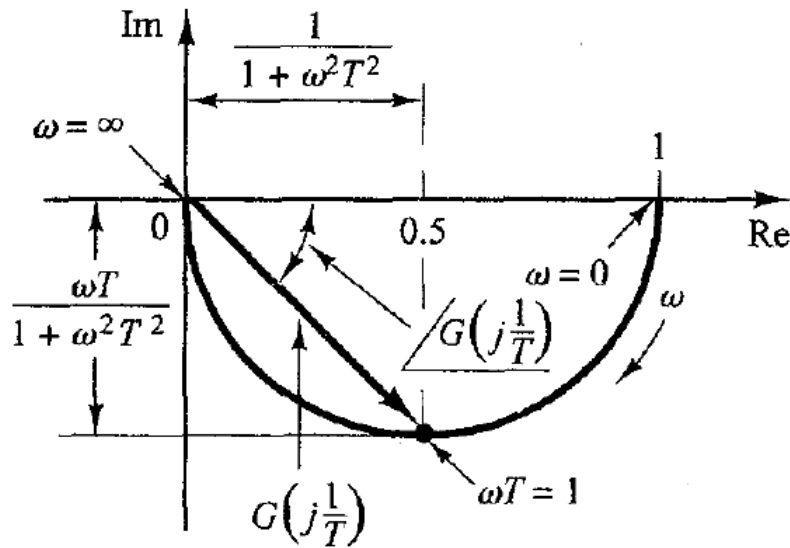
• Zero:

$$1 + j\omega\tau = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \angle + \tan^{-1}(\omega\tau) \quad (5)$$

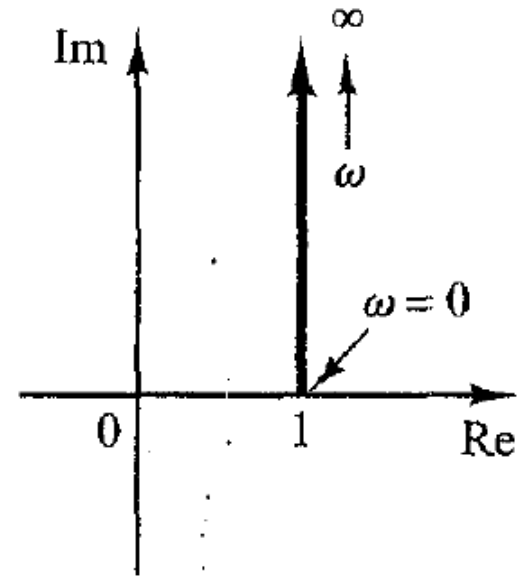
- A magnitude é unitária em $\omega = 0$ e tende ao infinito com o aumento da frequência. Em $\omega = 1/\tau$ a magnitude vale $\sqrt{2}$;
- A fase é nula em $\omega = 0$ e varia de 0 a 90° com o aumento da frequência. Em $\omega = 1/\tau$ a fase vale 45° .

1. Diagrama de Nyquist

- 1.4. Fator de primeira ordem:
 - Diagramas de Nyquist:



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.5. Fator de segunda ordem:

• Polo:

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi \omega/\omega_n]^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right]$$

(6)

- A magnitude é unitária em $\omega = 0$ e tende a zero com o aumento da frequência. Em $\omega = \omega_n$ a magnitude vale $1/(2\xi)$;
- A fase é nula em $\omega = 0$ e varia de 0 a -180° com o aumento da frequência (sentido horário). Em $\omega = \omega_n$ a fase vale -90° ;
- A frequência de ressonância aparece como um pico de magnitude (raio).

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.5. Fator de segunda ordem:

• Zero:

$$M(\omega) = \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi \omega/\omega_n]^2}$$

$$\phi(\omega) = + \tan^{-1} \left[\frac{2\xi \omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right]$$

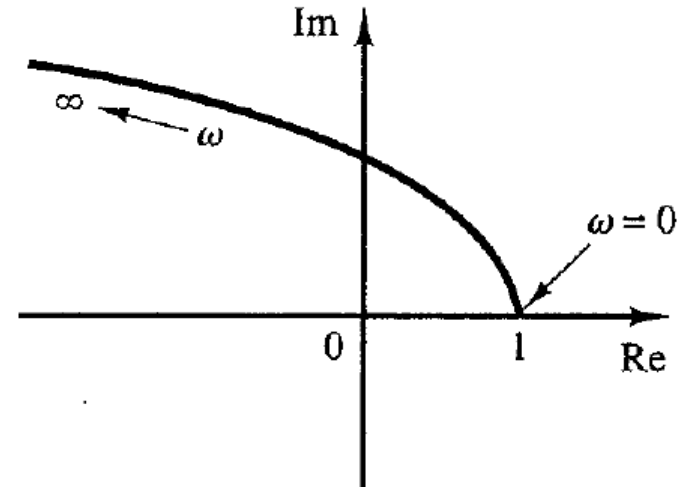
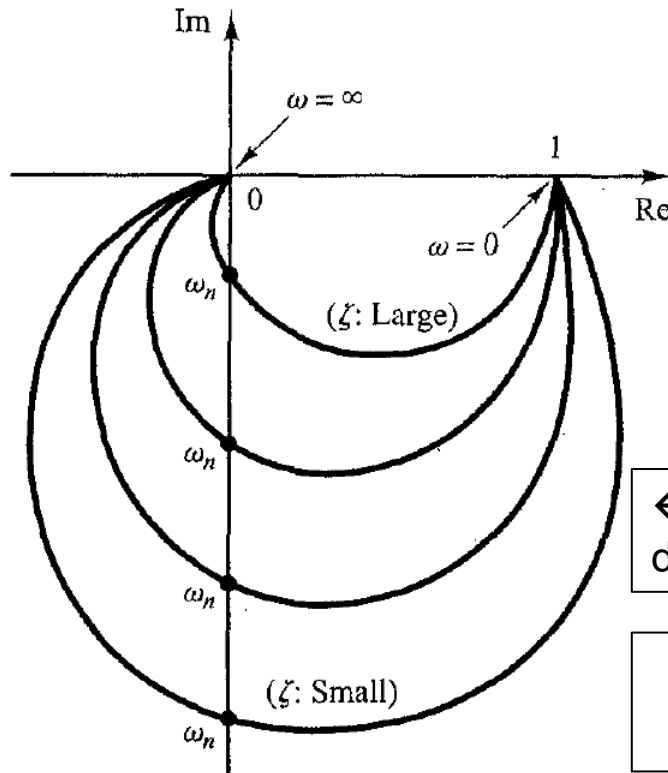
(7)

- A magnitude é unitária em $\omega = 0$ e tende ao infinito com o aumento da frequência. Em $\omega = \omega_n$ a magnitude vale 2ξ ;
- A fase é nula em $\omega = 0$ e varia de 0 a $+180^\circ$ com o aumento da frequência (sentido horário). Em $\omega = \omega_n$ a fase vale $+90^\circ$ (cruzamento com o eixo imaginário).

1. Diagrama de Nyquist

■ 1.5. Fator de segunda ordem:

• Diagrama de Nyquist:



$$G(\omega) = 1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(j\omega/\omega_n)$$

← É possível obter ξ e ω_n diretamente do diagrama de Nyquist!

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(j\omega/\omega_n)}$$

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.6. Sistemas acoplados:

- Pelas propriedades dos fasores:

$$\boxed{G(j\omega) = A(j\omega)B(j\omega)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{|G(j\omega)| = |A(j\omega)||B(j\omega)|} \\ \boxed{\angle G(j\omega) = \angle A(j\omega) + \angle B(j\omega)} \end{array} \right.$$

- A magnitude de $G(j\omega)$ será o produto das magnitudes de cada subsistema;
- A fase de $G(j\omega)$ será a soma das fases de cada subsistema.

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.6. Sistemas acoplados:

• Sistema tipo zero:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega T_a) \cdots}{(1 + j\omega T_1) \cdots}$$

(8)

- Aproximado por polos e zeros de primeira ordem concatenados
- Em $\omega = 0$, a magnitude é igual a K e a fase é nula;
- Em $\omega \rightarrow \infty$, a magnitude tende a zero e a fase tende a -90° se o número de polos for maior que o número de zeros.

1. Diagrama de Nyquist

▪ 1.6. Sistemas acoplados:

• Sistema tipo 1:

$$G(j\omega) = K \frac{1 (1 + j\omega T_a) \cdots}{j\omega (1 + j\omega T_1) \cdots} \quad (9)$$

- Aproximado por um integrador concatenado com polos e zeros de primeira ordem;
- Em $\omega = 0$, a magnitude tende ao infinito e a fase tende a -90° (integrador \rightarrow polo na origem);
- Em $\omega \rightarrow \infty$, a magnitude tende a zero e a fase tende a um ângulo menor do que -90° se o número de polos for maior que o número de zeros.

1. Diagrama de Nyquist

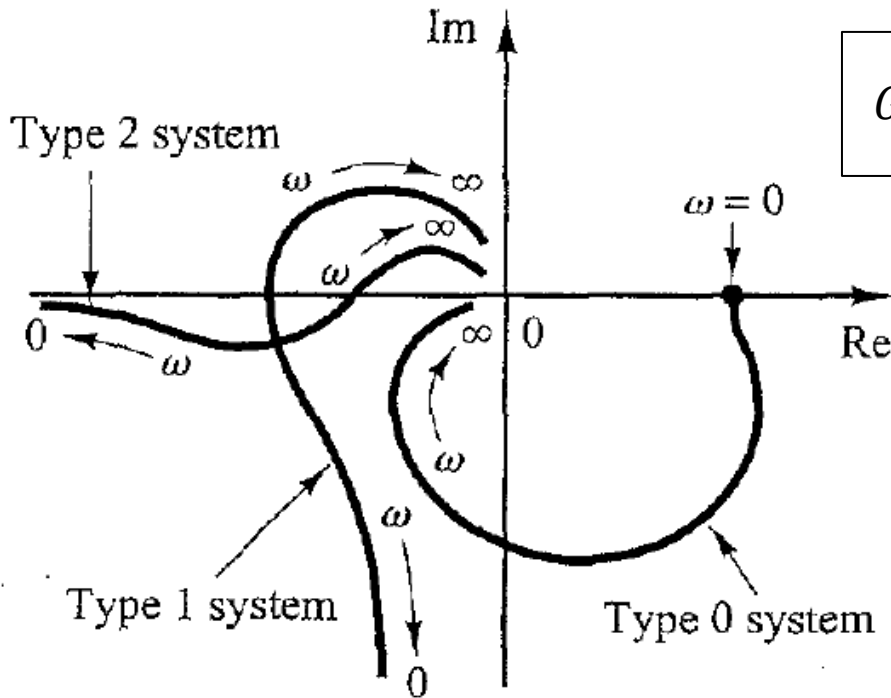
- 1.6. Sistemas acoplados:
 - Sistema tipo 2:

$$G(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^2} \frac{(1 + j\omega T_a) \cdots}{(1 + j\omega T_1) \cdots} \quad (10)$$

- Aproximado por dois integradores concatenados com polos e zeros de primeira ordem;
- Em $\omega = 0$, a magnitude tende ao infinito e a fase tende a -180° ($-180^\circ = -90^\circ - 90^\circ$);
- Em $\omega \rightarrow \infty$, a magnitude tende a zero e a fase tende a um ângulo menor do que -90° se o número de polos for maior que o número de zeros.

1. Diagrama de Nyquist

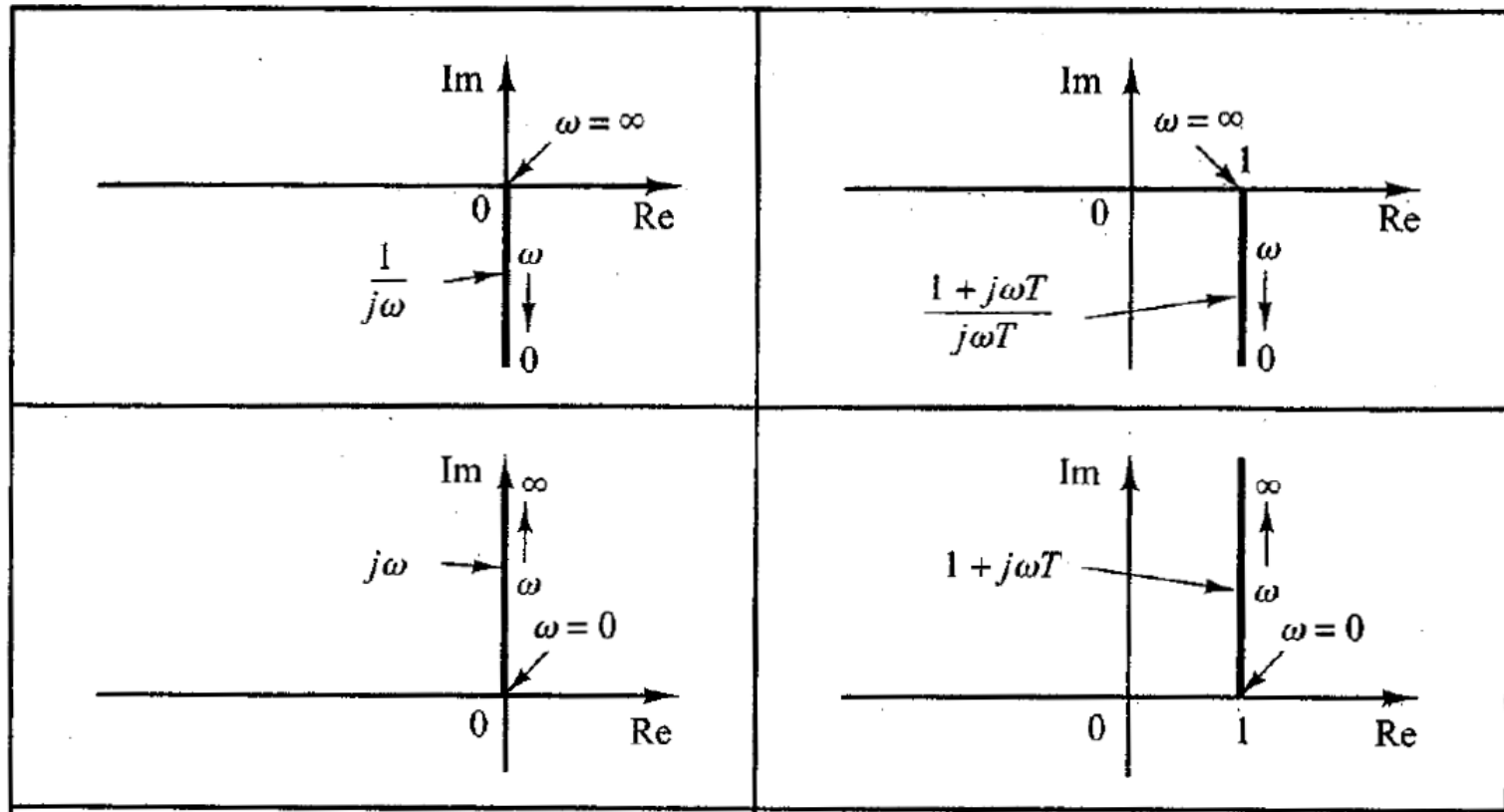
- 1.6. Sistemas acoplados:
 - Diagrama de Nyquist:



$$G(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^N} \frac{(1 + j\omega T_a) \cdots}{(1 + j\omega T_1) \cdots}$$

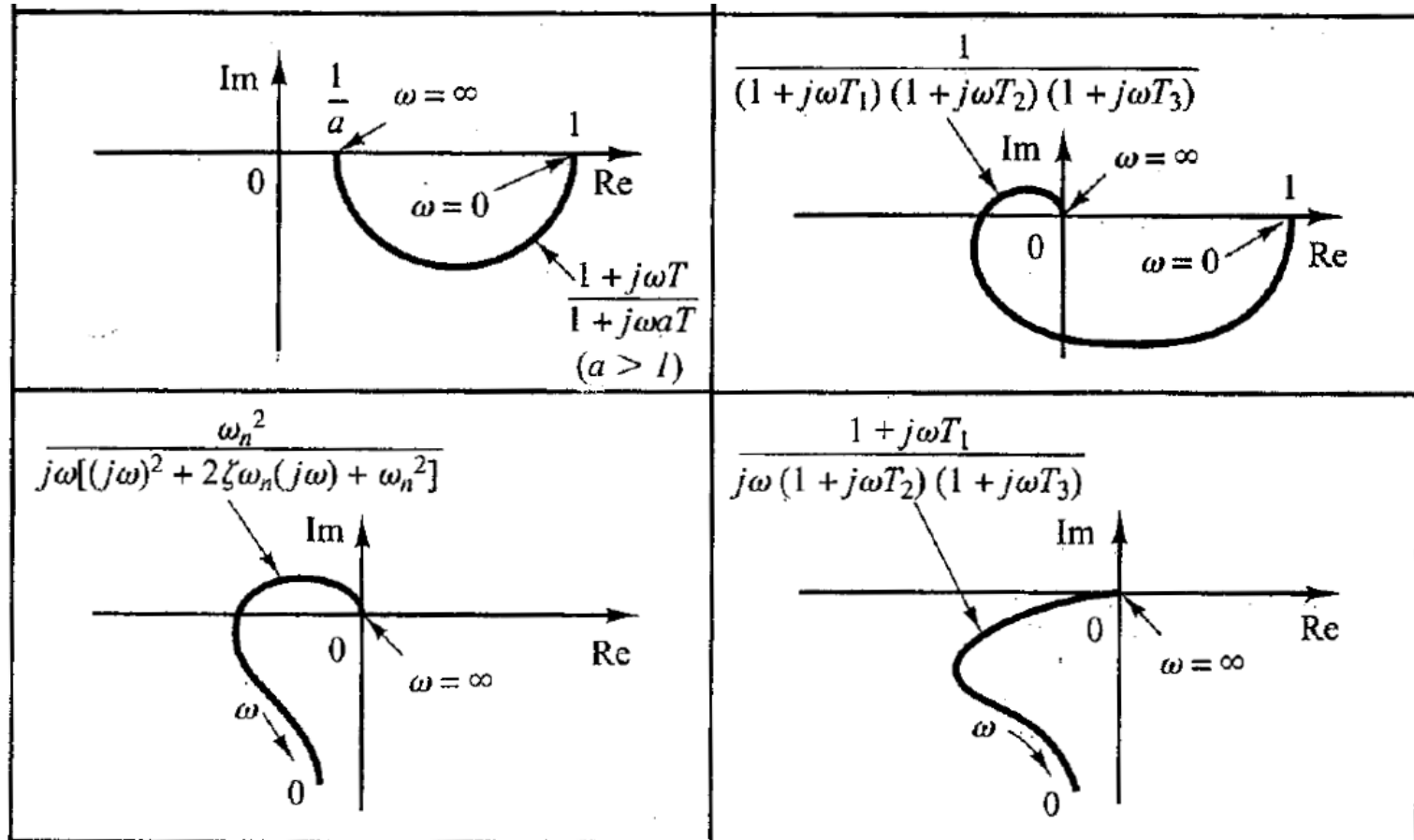
1. Diagrama de Nyquist

- 1.7. Exemplos:



1. Diagrama de Nyquist

1.7. Exemplos:



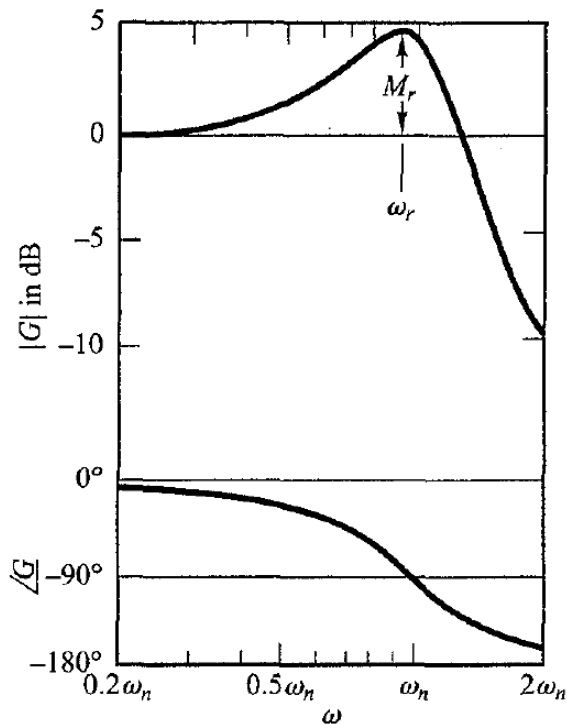
2. Diagrama de Nichols

▪ 2.1. Diagrama de Nichols:

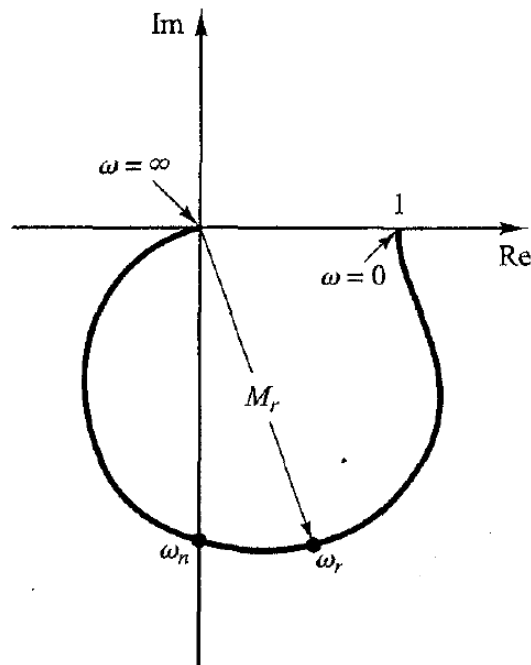
- O diagrama de Nichols é o gráfico da magnitude em dB $20 \log|G(s)|$ em função da fase $\phi = \angle G(s)$ ou da margem de fase $\phi - (-180^\circ) = \phi + 180^\circ$;
- Assim como no diagrama de Nyquist, a vantagem do diagrama de Nichols sobre o Bode é a possibilidade de visualizar a informação de magnitude e fase em um mesmo gráfico.

2. Diagrama de Nichols

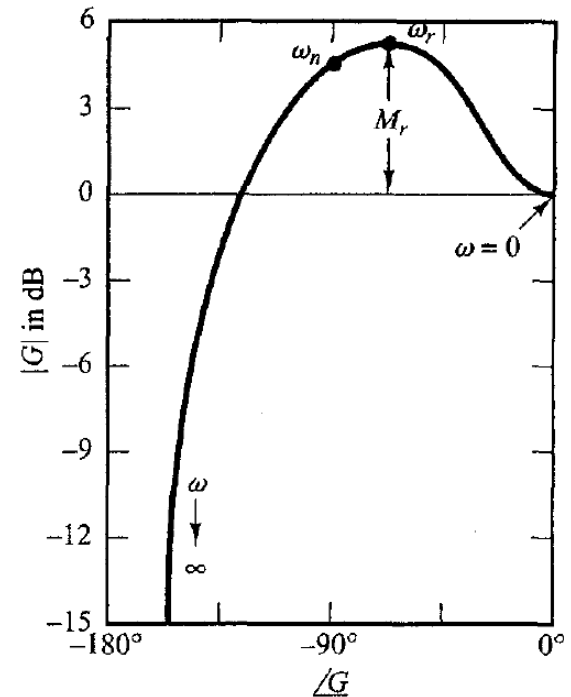
- 2.1. Diagrama de Nichols:
 - Sistema de segunda ordem:



Bode



Nyquist



Nichols

Questionário

▪ Questionário:

- 1) O que significa o diagrama de Nyquist? Ele proporciona a representação de qual característica de um sistema real?
- 2) Quais são as variáveis de entrada e de saída em um diagrama de Nyquist e de Nichols?
- 3) Quais são as vantagens e desvantagens do diagrama de Nyquist em relação ao diagrama de Bode?

Referências

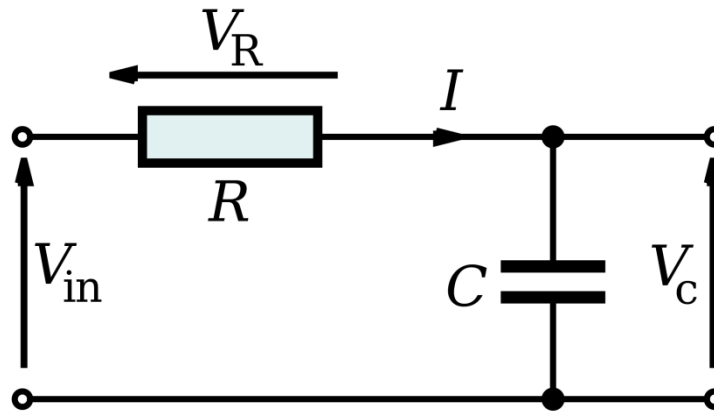
■ Referências:

- R. S. Figliola, D. E. Beasley, Theory and Design for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
- G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
- K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 14.1)** Filtro passivo baseado em circuito RC em série ($R = 100 \, \Omega$, $C = 100 \, \mu\text{F}$):
 - a) Obtenha a função de transferência do filtro passa-baixas $G_L(s) = V_C(s)/V_S(s)$ e do passa-altas $G_H(s) = V_R(s)/V_S(s)$;
 - b) Trace os diagramas de Bode, Nyquist e Nichols e discuta os resultados.



Exercícios

▪ Ex. 14.1)

- Função de transferência:
 - Filtro passa-baixas:

$$G_L(s) = \frac{V_C(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{1 + sRC}$$

$$M_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\phi_L(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

- Em $\omega = 0$, $M = 1$ e $\phi = 0$;
- Em $\omega = 1/RC = 100$ rad/s, $M = 1/\sqrt{2}$ e $\phi = -45^\circ$;
- Em $\omega \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow -90^\circ$.

Exercícios

▪ Ex. 14.1)

- Função de transferência:
 - Filtro passa-altas:

$$G_H(s) = \frac{V_R(s)}{V_S(s)} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

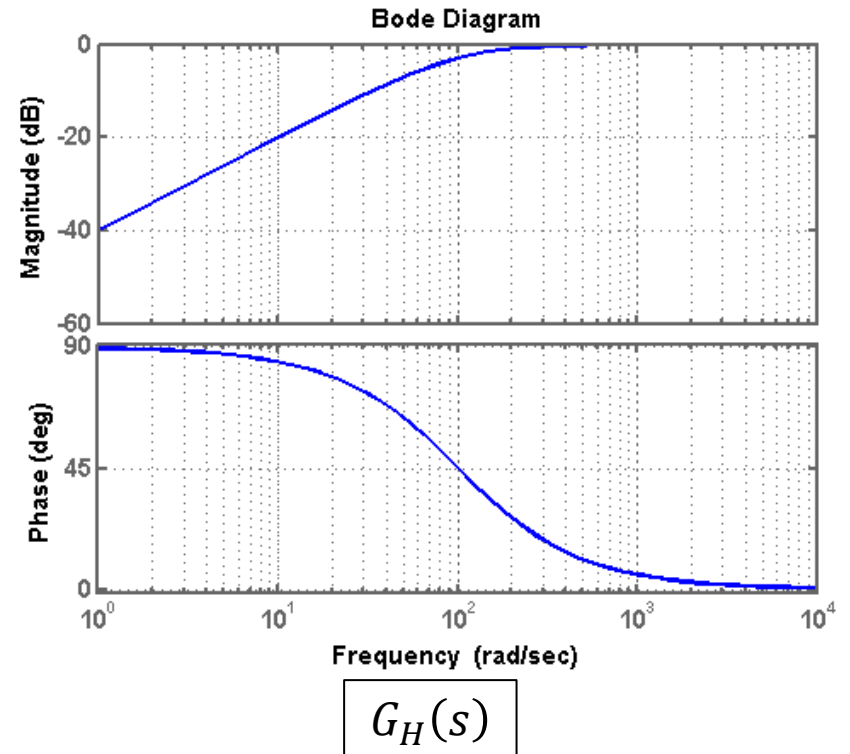
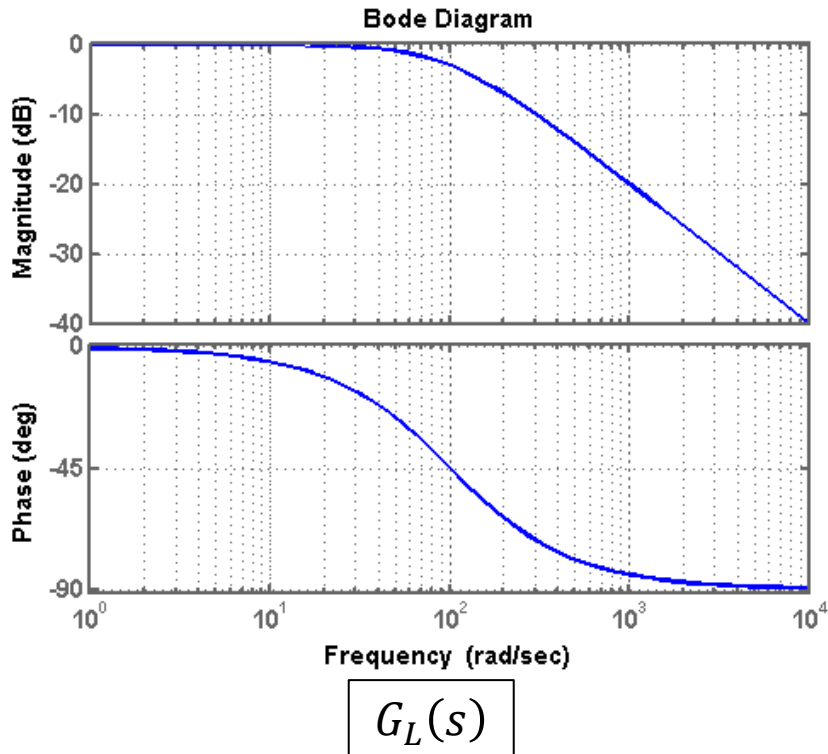
$$M_H(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\phi_H(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$

- Em $\omega = 0$, $M = 0$ e $\phi = 90^\circ$;
- Em $\omega = 1/RC = 100 \text{ rad/s}$, $M = 1/\sqrt{2}$ e $\phi = 45^\circ$;
- Em $\omega \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 1$ e $\phi \rightarrow 0^\circ$.

Exercícios

- Ex. 14.1)
 - Diagrama de Bode:

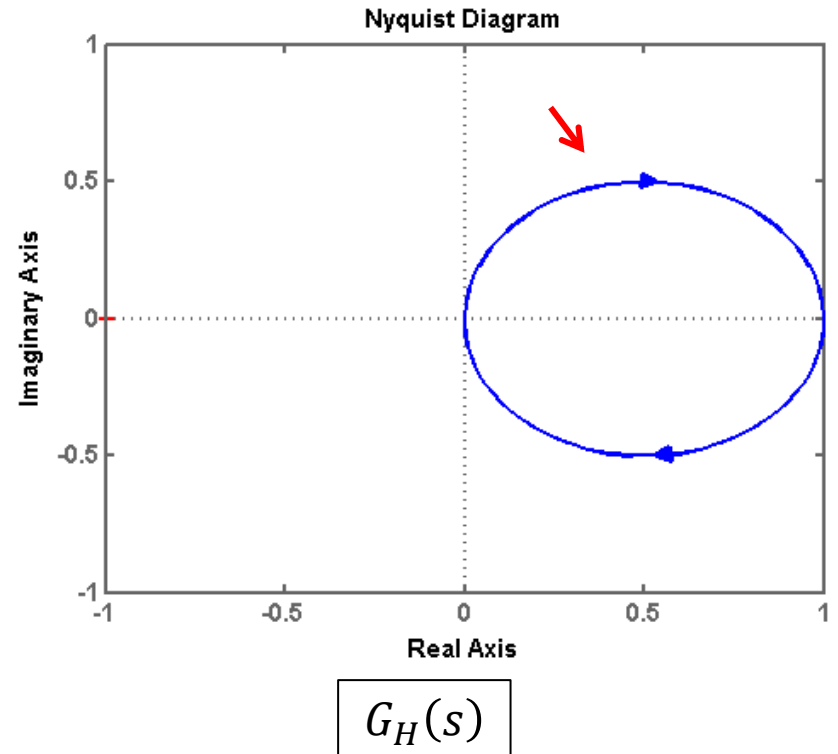
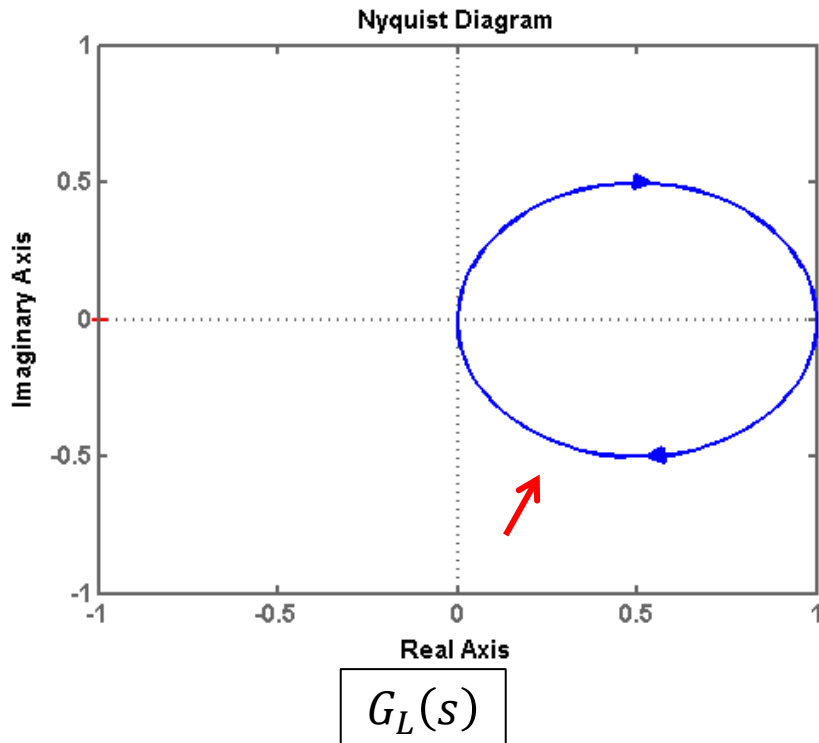


Exercícios

■ Ex. 14.1)

nyquist(Gs)

- Diagrama de Nyquist (mostra também ω negativo)

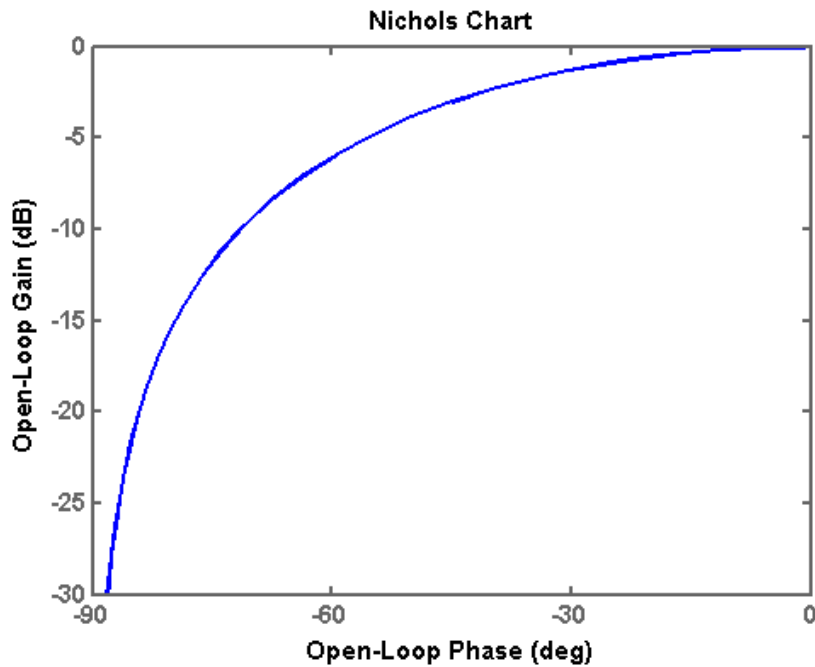


Exercícios

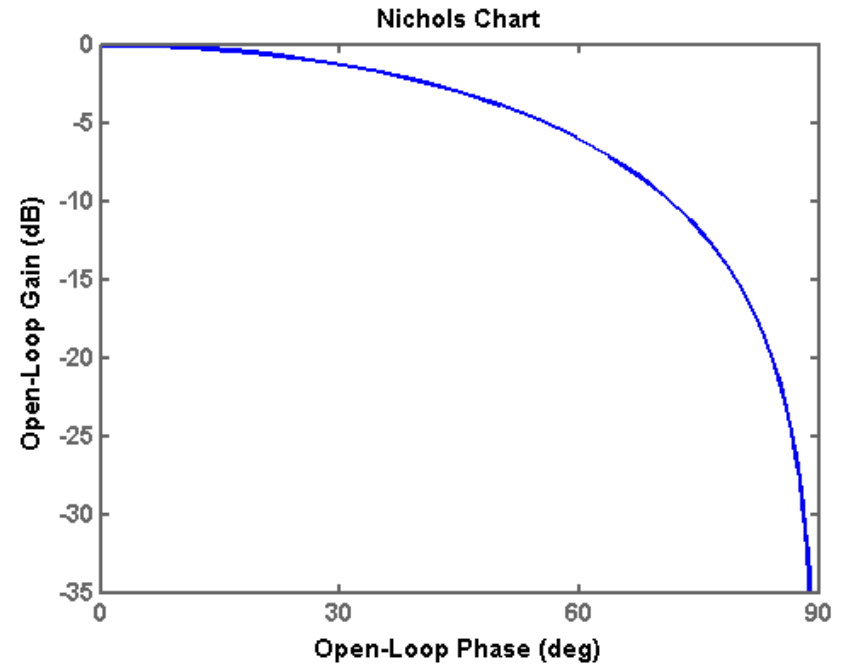
■ Ex. 14.1)

- Diagrama de Nichols:

`nichols(Gs)`



$G_L(s)$



$G_H(s)$

Exercícios

- **Ex. 14.2)** Considere um sistema de segunda ordem com $\omega_n = 500$ rad/s e $\xi = 0.1$. Plote os diagramas de Bode, Nyquist e Nichols e discuta os resultados obtidos.

Exercícios

▪ Ex. 14.2)

- Função de transferência:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{25 \times 10^4}{s^2 + 100s + 25 \times 10^4}$$

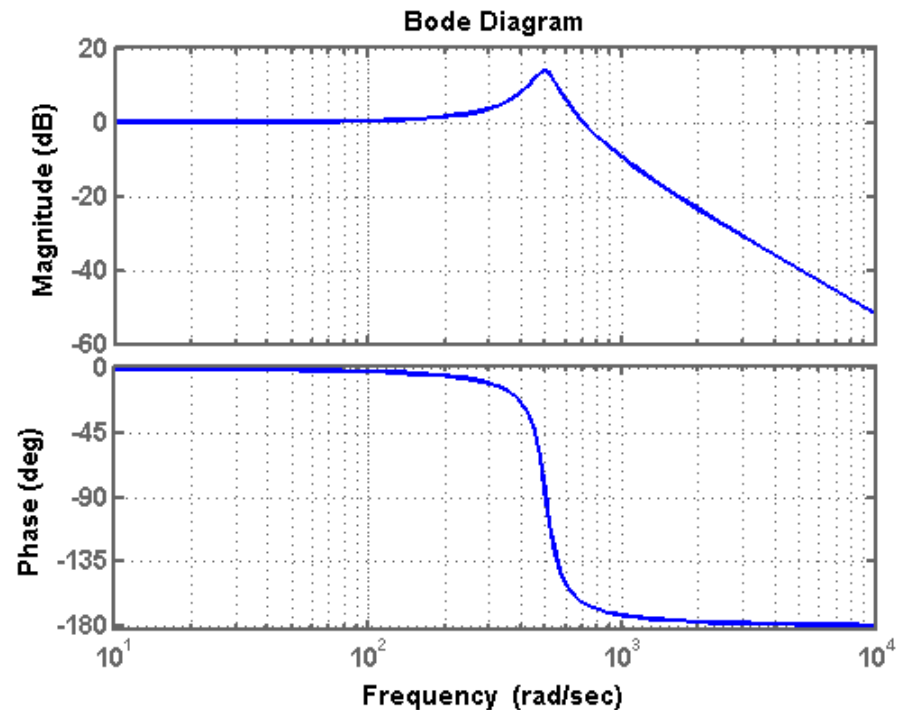
- $\sigma = \xi\omega_n = 50$;
- $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 497.97 \text{ rad/s}$;
- $s = -\sigma \pm j\omega_d = -50 \pm j497.97$;
- $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} = 494.97 \text{ rad/s}$.

Exercícios

■ Ex. 14.2)

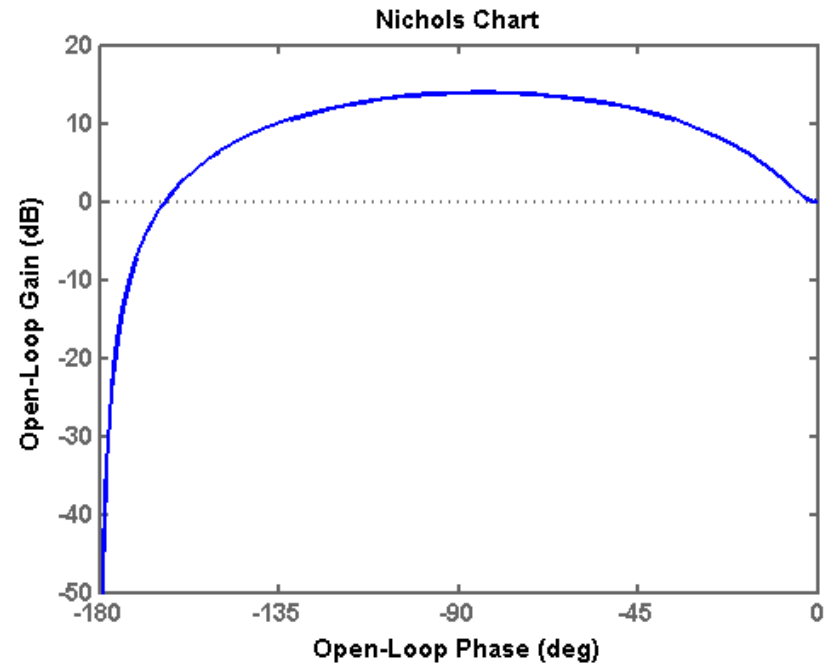
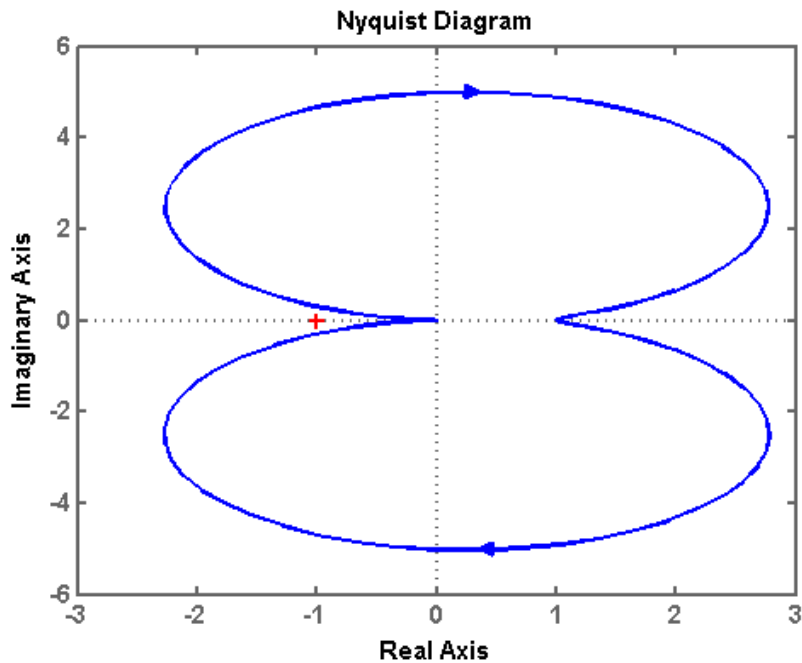
- Diagrama de Bode:

- Em $\omega = \omega_n$, a fase atinge -90° e a magnitude vale 13.8 dB;
- $\frac{1}{2\xi} = 10^{13.8/20} \Rightarrow \xi \approx 0.1$;
- Pico de ressonância em $\omega = 495 \text{ rad/s}$.



Exercícios

- Ex. 14.2)
 - Diagramas de Nyquist e Nichols:



Exercícios

- **Ex. 14.3)** Analise a resposta de um motor de corrente contínua sem carga considerando as plantas com saída de velocidade e de posição.
 - Dados do motor (SI):
 - $R = 0.2 \, \Omega$;
 - $L = 0.01 \, \text{H}$;
 - $J = 1 \times 10^{-5}$;
 - $B = 0.2$;
 - $k = 10$.

Exercícios

▪ Ex. 14.3)

- Função de transferência – velocidade:

- Tipo 0;

$$G_{\omega}(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{k}{(sL + R)(sJ + B) + k^2} = \frac{10}{10^{-7}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 100}$$

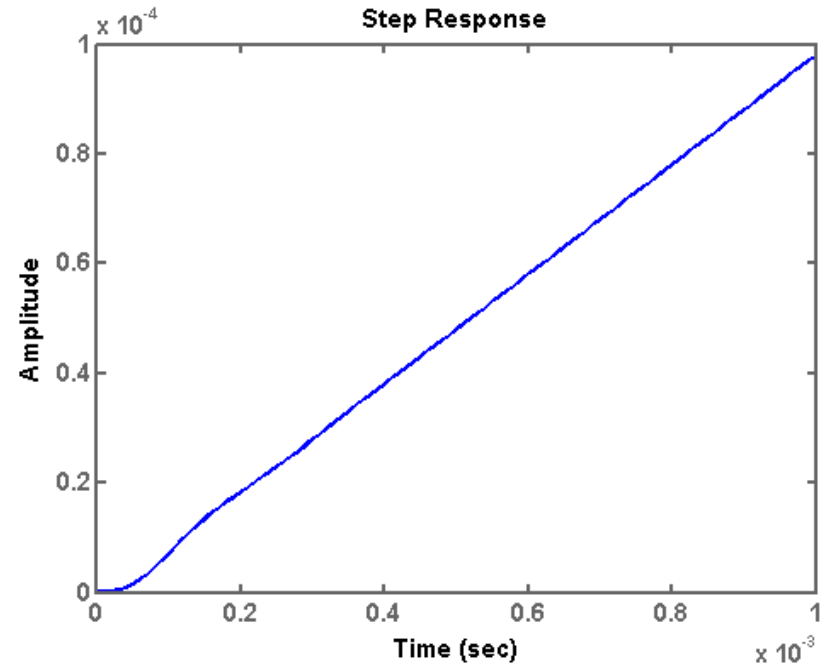
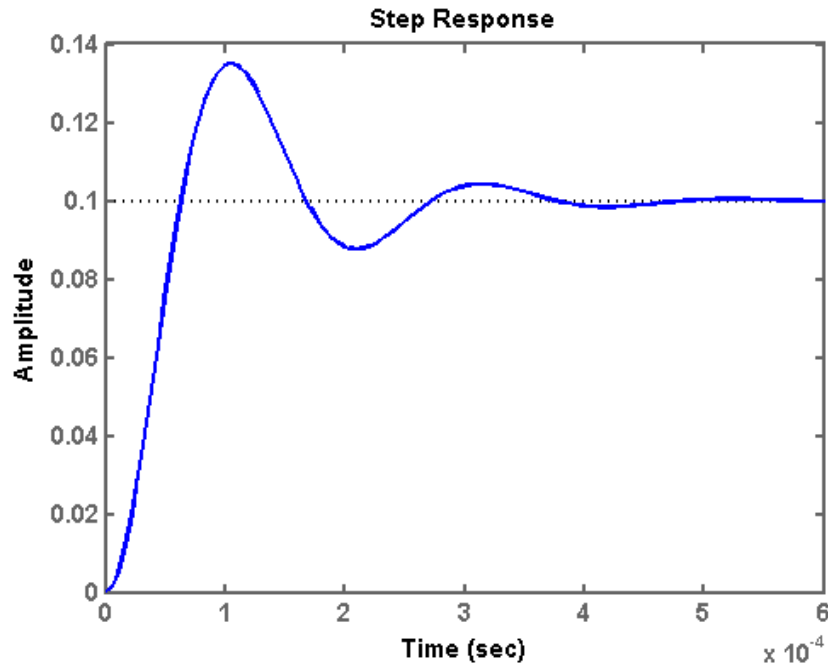
- Função de transferência – posição:

- Tipo 1;

$$G_{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1}{s} \frac{k}{(sL + R)(sJ + B) + k^2} = \frac{10}{10^{-7}s^3 + 2 \times 10^{-3}s^2 + 100s}$$

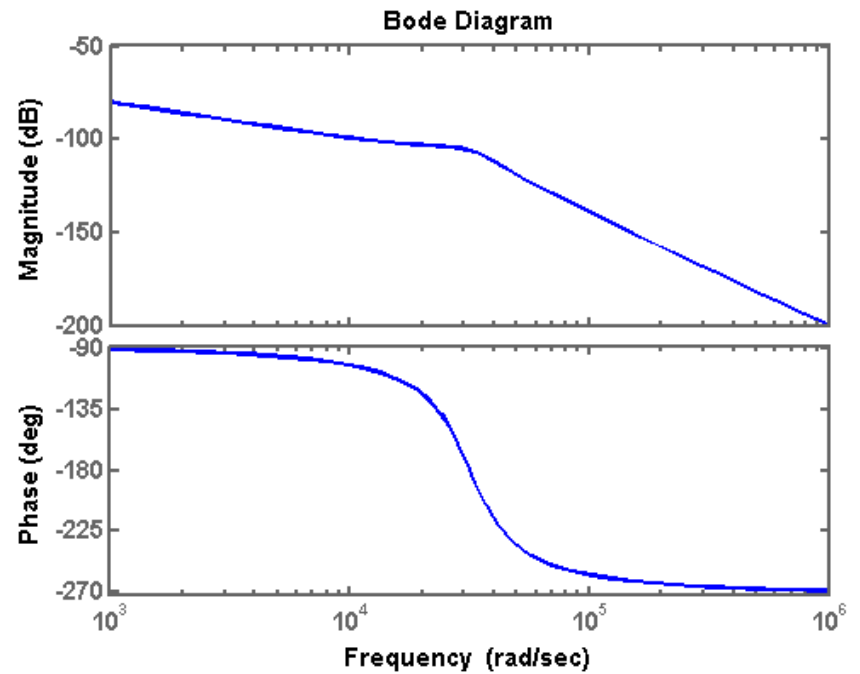
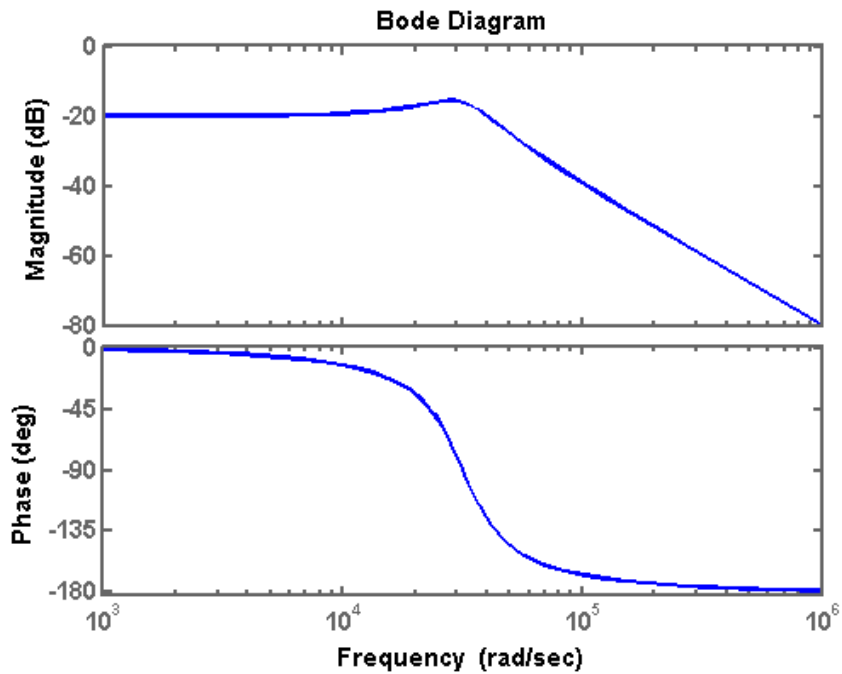
Exercícios

- Ex. 14.3)
 - Resposta ao degrau:



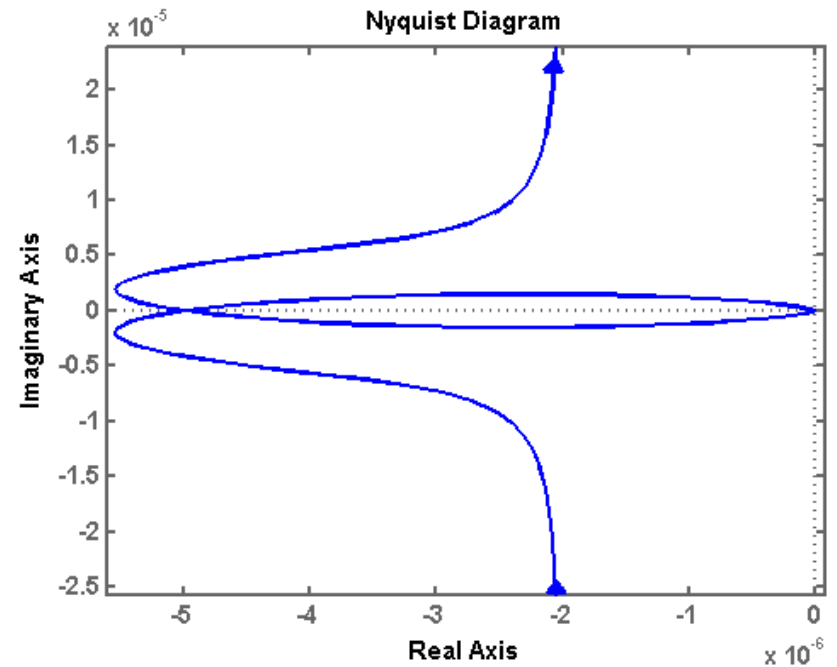
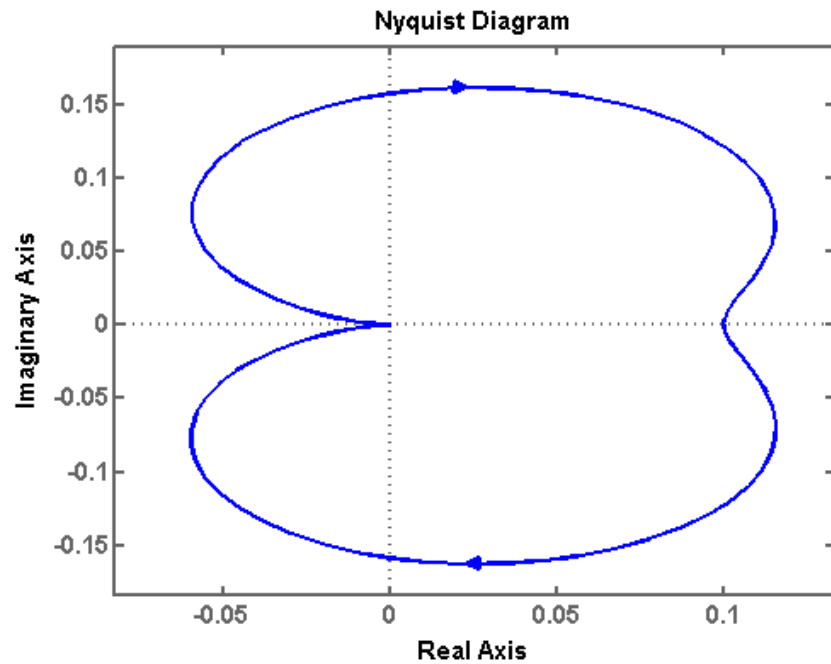
Exercícios

- **Ex. 14.3)**
 - Diagrama de Bode:



Exercícios

- Ex. 14.3)
 - Diagrama de Nyquist:



Exercícios

- Ex. 14.3)
 - Diagrama de Nichols:

