



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

EM608 – Elementos de Máquinas
ES690 – Sistemas Mecânicos

ENGRENAGENS CILINDRICAS DE DENTES RETOS

"Tensões nos Dentes da Engrenagem"

Prof. Gregory Bregion Daniel gbdaniel@fem.unicamp.br

Prof.^a Katia Lucchesi Cavalca katia@fem.unicamp.br

Campinas, 2º semestre 2020



CARREGAMENTOS EM ENGRENAGENS DE DENTES RETOS:

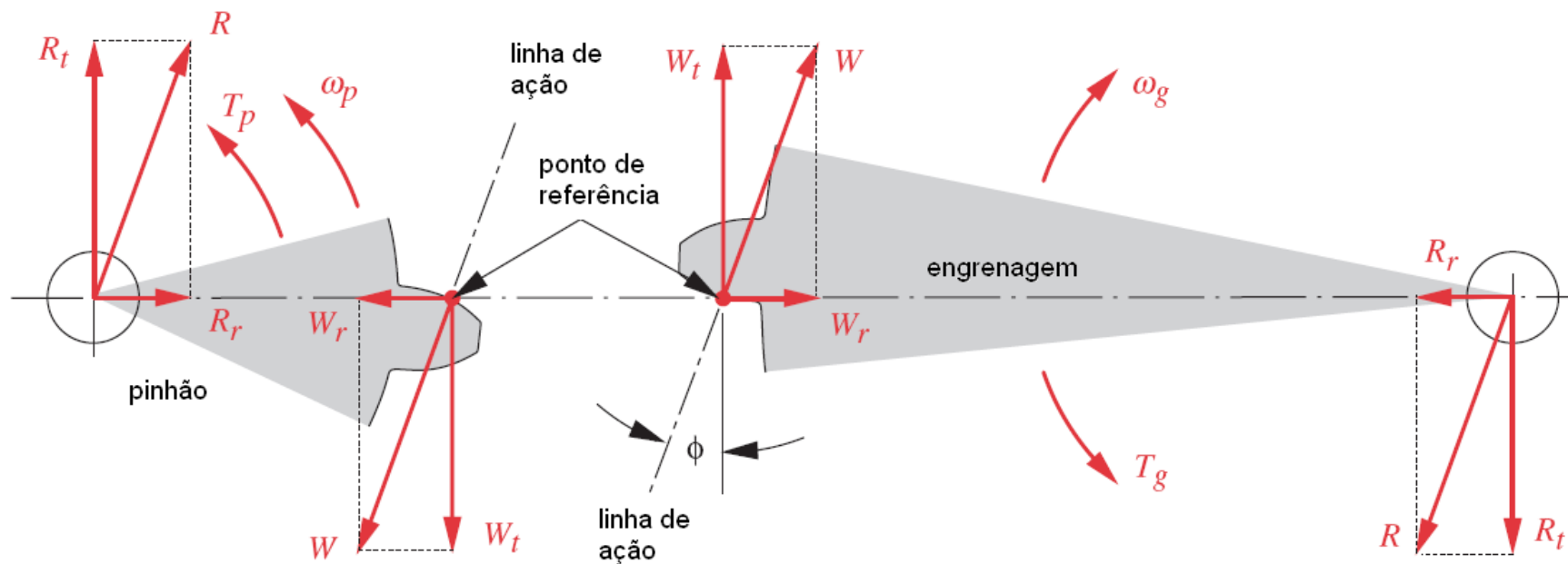


Figura 1 - Estado de Carregamento .



Deflexão do Dente da Engrenagem

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2 T_p}{d_p} = \frac{2 p_d T_p}{N_p}$$

T_p – torque no eixo pinhão.

N_p – número de dentes.

r_p – raio primitivo.

p_d – passo diametral do pinhão.

d_p – diâmetro primitivo.

W_t – força tangencial

O componente radial W_r é:

$$W_r = W_t \tan \phi$$

A força resultante é:

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi}$$

Existem dois modos de falha que afetam os dentes de engrenagens: fratura por fadiga devido à flutuação das tensões de flexão na raiz do dente; e fadiga de superfície (pitting/spalling) nos dentes.



Aproximação de Lewis

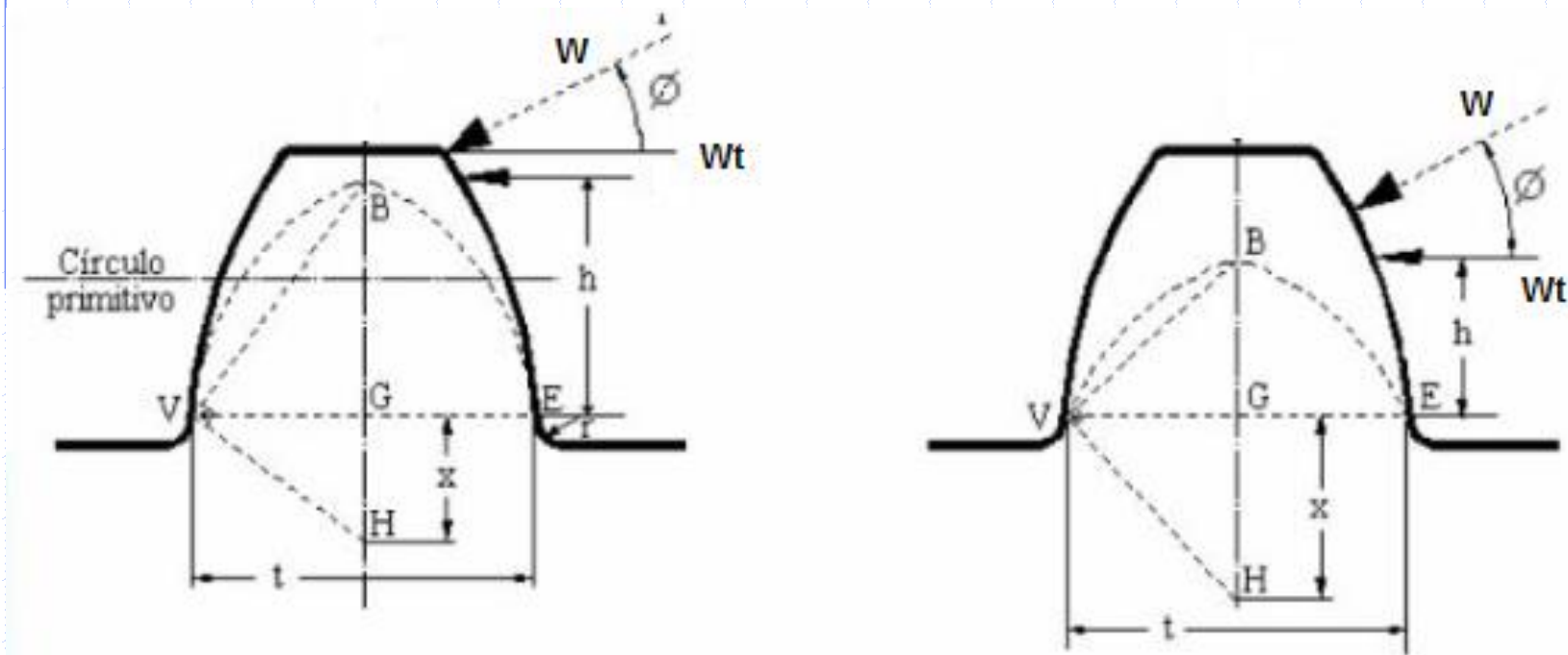


Figura 2 – Aproximação de Lewis.



Para uma viga retangular:

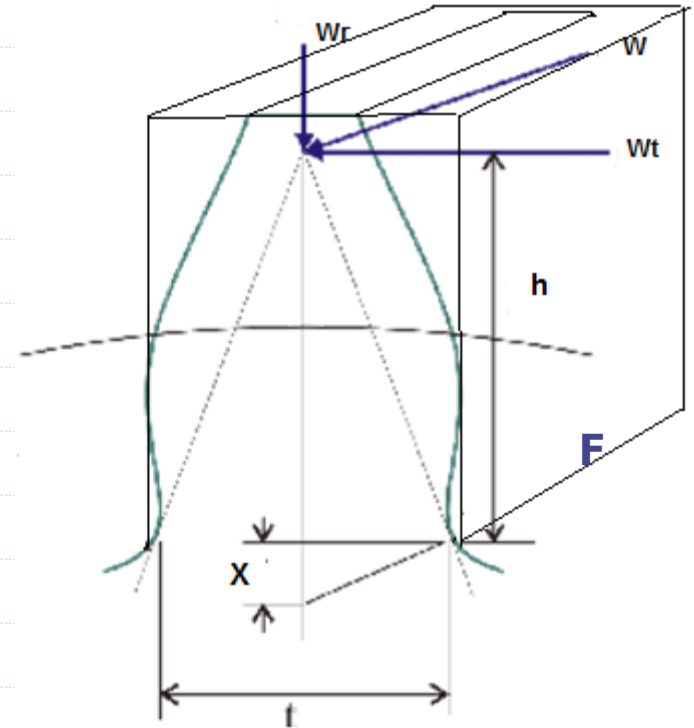
$$\sigma = \frac{M.c}{I} = \frac{(W_t h)t/2}{I} \text{ sendo } I = \frac{Ft^3}{12}$$

$$\sigma = \frac{(W_t h)t/2}{\frac{Ft^3}{12}} = \frac{6(W_t h)}{Ft^2}$$

Aproximação para viga de altura linearmente variável (semelhança de triângulos):

$$\frac{t/2}{h} = \frac{x}{t/2} \Rightarrow x = \frac{(t/2)^2}{h} = \frac{t^2}{4h} \Rightarrow \frac{t^2}{h} = 4x$$

$$\sigma = \frac{6(W_t h)}{Ft^2} = \frac{6W_t}{F} \frac{1}{4x} = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} \frac{p_c}{p_c}$$



$$\sigma = \frac{6(W_t h)}{F t^2} = \frac{6W_t}{F} \frac{1}{4x} = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} \frac{p_c}{p_c}$$

$$\sigma = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} \frac{p_c}{p_c} = \frac{W_t}{F} \frac{1}{\frac{2x}{3}} \frac{p_d}{p_c} = \frac{W_t p_d}{F \left(\frac{2x}{3} \frac{\pi}{p_c} \right)} \Rightarrow Y = \left(\frac{2x}{3} \frac{\pi}{p_c} \right)$$

Tensões de flexão - A equação de Lewis:

$$\sigma_b = \frac{W_t p_d}{F Y}$$

W_t – Força tangencial no dente

p_d – passo diametral

F – largura da face

Y – fator geométrico adimensional



EQUAÇÃO DE TENSÃO DE FLEXÃO DA AGMA

Equação de tensão de flexão da AGMA – como definido na AGMA padrão 2001-B88 é válida somente para certas considerações sobre geometria do dente e do engrenamento:

- A relação de contato está entre 1 e 2;
- Não há interferência entre as pontas e os filetes das raízes dos dentes engrenados;
- Nenhum dos dentes é pontiagudo;
- Existe folga não nula no engrenamento;
- Os filetes das raízes são padronizados, assumidos como suaves, e produzidos por um processo de geração;
- As forças de atrito são desprezadas.



A equação de tensões de flexão AGMA diferem um pouco para as especificações U.S e S.I de engrenagens, devido a recíproca relação entre o passo diametral e o módulo.

$$\sigma_b = \frac{W_t p_d}{F J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad \text{U.S.}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F m J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad \text{S.I.}$$

Fator J – O Fator geométrico J pode ser calculado através de um algoritmo definido na AGMA padrão 908-B89.



A equação de tensões de flexão AGMA diferem um pouco para as especificações U.S e S.I de engrenagens, devido a recíproca relação entre o passo diametral e o módulo.

$$\sigma_b = \frac{W_t p_d}{F J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad \text{U.S.}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F m J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad \text{S.I.}$$

Fator J – O Fator geométrico J pode ser calculado através de um algoritmo definido na AGMA padrão 908-B89.



Fator J – O Fator geométrico J pode ser calculado através de um algoritmo definido na Norma AGMA 908-B89.

Tabela 1 - Fator Geométrico J para 20°.

Table 11-8 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with Tip Loading

Gear teeth	Pinion teeth															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.24	0.24								
26	U	U	U	U	U	U	0.24	0.25	0.25	0.25						
35	U	U	U	U	U	U	0.24	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26				
55	U	U	U	U	U	U	0.24	0.28	0.25	0.28	0.26	0.28	0.28	0.28		
135	U	U	U	U	U	U	0.24	0.29	0.25	0.29	0.26	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29

Table 11-9 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with HPSTC Loading

Gear teeth	Pinion teeth															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.33	0.33								
26	U	U	U	U	U	U	0.33	0.35	0.35	0.35						
35	U	U	U	U	U	U	0.34	0.37	0.36	0.38	0.39	0.39				
55	U	U	U	U	U	U	0.34	0.40	0.37	0.41	0.40	0.42	0.43	0.43		
135	U	U	U	U	U	U	0.35	0.43	0.38	0.44	0.41	0.45	0.45	0.47	0.49	0.49



FATOR DE APLICAÇÃO K_a

Fator de Aplicação K_a – Se a máquina motora ou movida tem torques ou forças variando no tempo, o tipo de aplicação pode tornar o carregamento nos dentes da engrenagem mais críticos.

Tabela 2 - Fator de aplicação K_a

Fatores de Aplicação K_a			
Máquina motora	Máquina movida		
	Uniforme	Choque moderado	Choque severo
Uniforme (motor elétrico, turbina)	1.00	1.25	1.75 ou mais
Choque leve (motor multi-cilindros)	1.25	1.50	2.00 ou mais
Choque médio (motor de um único cilindro)	1.50	1.75	2.25 ou mais



FATOR DE DISTRIBUIÇÃO DE CARGA K_m

Fator de distribuição de Carga K_m – Qualquer desalinhamento axial ou desvio axial na forma do dente resultará em uma distribuição de carga (W_t) não uniforme sobre a largura da face (F) dos dentes da engrenagem.

Uma maneira aproximada e conservativa de corrigir a distribuição de carga é aplicando o fator K_m .

A largura da face F de uma engrenagem de dentes retos deve estar entre $8/p_d < F < 16/p_d$, ou ainda $12/p_d$.

Tabela 3

Fatores de distribuição de carga K_m

Largura da face in (mm)		K_m
<2	(50)	1.6
6	(150)	1.7
9	(250)	1.8
≥20	(500)	2.0



FATOR K_v

Fator K_v – O fator dinâmico K_v considera as cargas de vibração geradas internamente pelos impactos dente-dente. A AGMA apresenta curvas empíricas para K_v em função da velocidade tangencial na curva primitiva V_t .

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}} \right)^B \quad \text{U.S.} \qquad K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{200V_t}} \right)^B \quad \text{S.I.}$$

Os fatores A e B são definidos como:

$$A = 50 + 56(1 - B) \qquad B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \qquad \text{para } 6 \leq Q_v \leq 11$$

Q_v é o índice de qualidade da engrenagem.



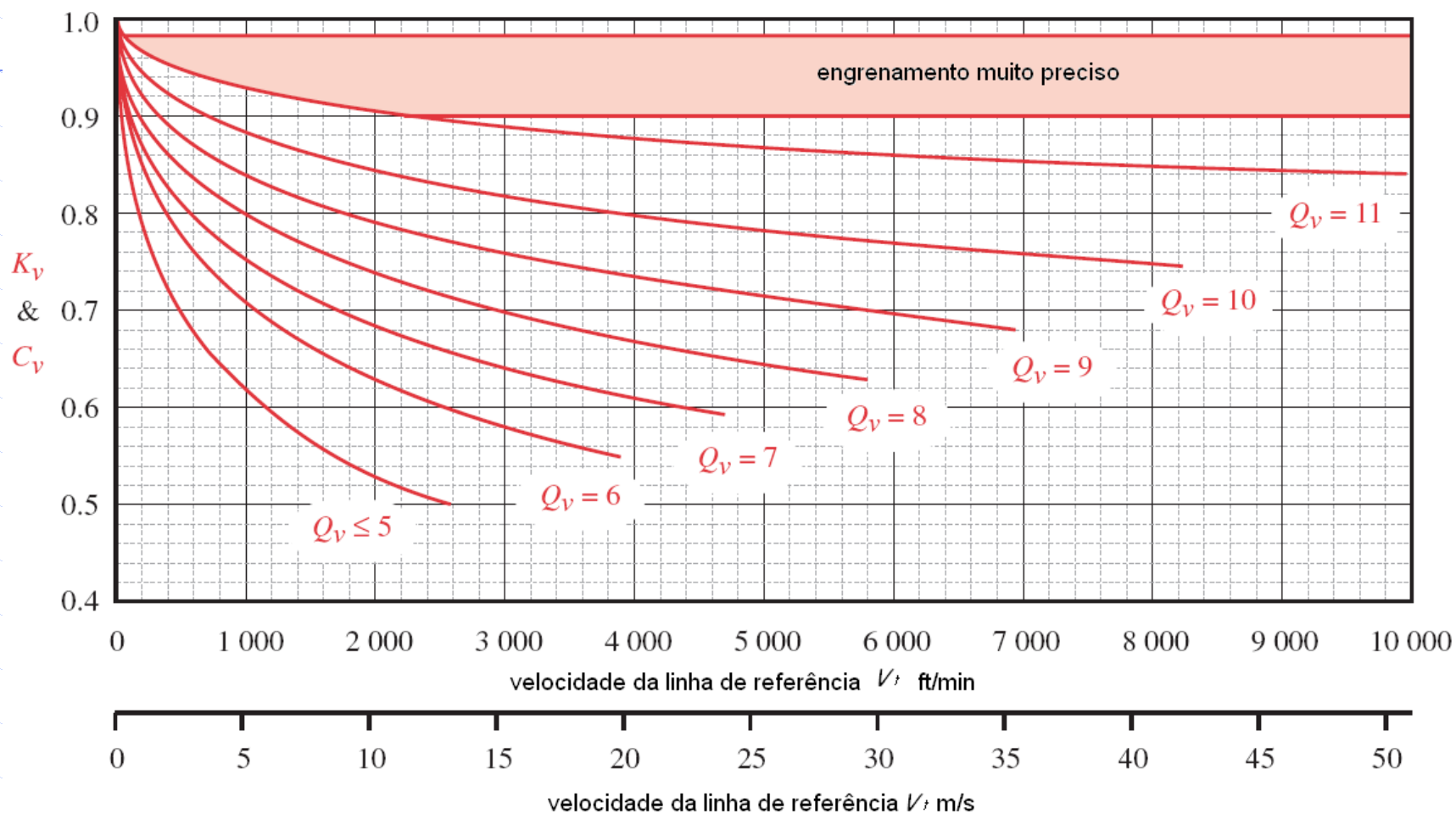


Figura 3 - Fator de qualidade x velocidade na linha de contato.



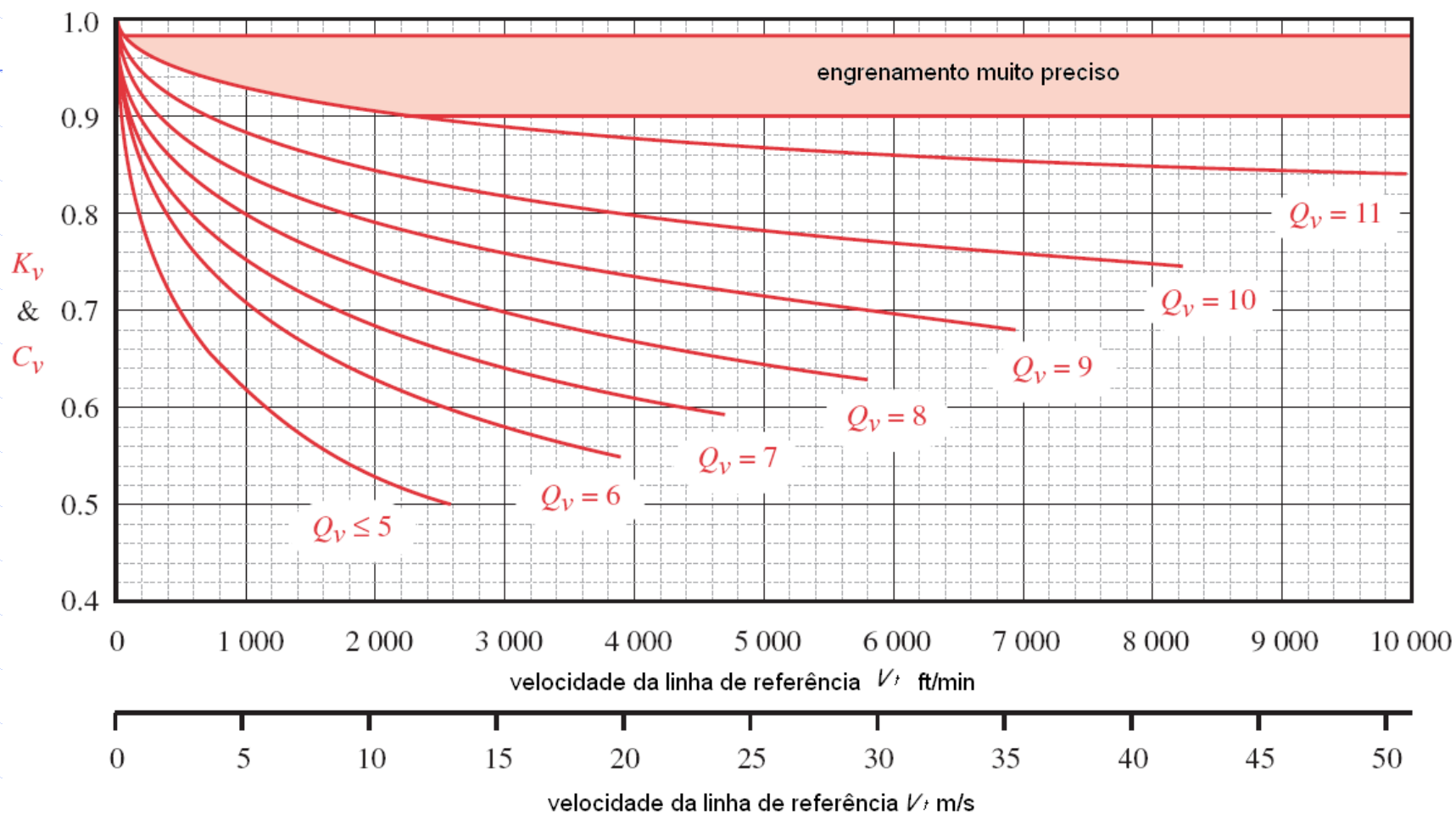


Figura 3 - Fator de qualidade x velocidade na linha de contato.



Nota-se que as curvas empíricas terminam abruptamente para um determinado valor de V_t . Os valores finais de V_t para cada curva podem ser calculados:

$$V_{t_{\max}} = [A + (Q_v - 3)]^2 \quad ft / \min \quad \text{U.S.}$$

$$V_{t_{\max}} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} \quad m / s \quad \text{S.I.}$$

Para engrenagens com $Q_v \leq 5$, uma equação diferente é usada para K_v :

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{V_t}} \quad \text{U.S.}$$

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200V_t}} \quad \text{S.I.}$$

Essa relação é válida para velocidades inferiores a 2500 ft/min (13 m/s), como pode ser visto da linha $Q_v = 5$.



FATOR DE TAMANHO K_s

Fator de tamanho K_s – As amostras de teste usadas para desenvolver os dados de resistência a fadiga são relativamente pequenos (cerca de 0.3 in diâmetro). Se a parte projetada é maior, pode ser menos resistente do que indicado pelos dados dos teste.

O fator K_s permite uma modificação da tensão no dente para levar em conta essa situação. A AGMA não estabeleceu padrões para utilizar o fator K_s .

Recomenda-se que seja ajustado para 1, a menos que o projetista deseje aumentar esse valor para levar em conta situações como a de dentes muito grandes. Um valor de 1.25 a 1.5 é um valor conservativo neste caso.



FATOR ESPESSURA DA BORDA K_B

Fator Espessura da borda K_B – A AGMA define uma razão de retorno m_B como:

$$m_B = \frac{t_R}{h_t}$$

onde:

t_R – espessura da borda

h_t – profundidade total do dente

Essa razão é usada para definir o fator de espessura da borda.

$$K_B = -2m_B + 3.4 \quad 0.5 \leq m_B \leq 1.2$$

$$K_B = 1.0 \quad m_B > 1.2$$

Razão de retorno < 0.5 não é recomendada.

Engrenagens de discos sólidos sempre têm $K_B = 1$.

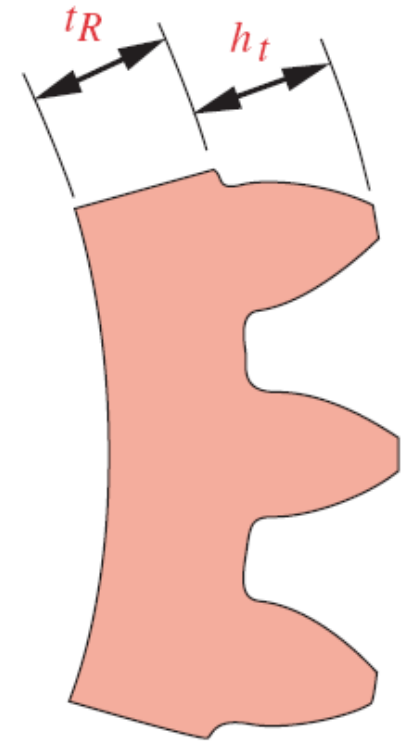
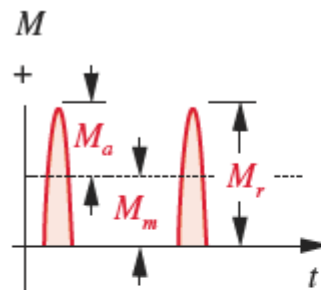
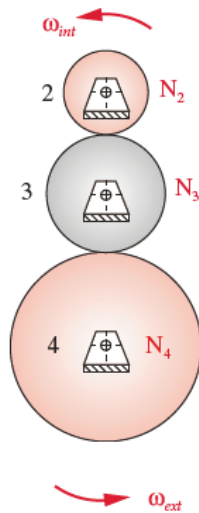


Figura 4

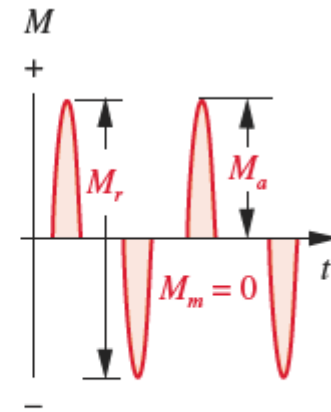


FATOR PARA ENGRENAGEM INTERMEDIÁRIA K_I

Fator IDLER K_I – Uma engrenagem intermediária está sujeita a mais ciclos de tensão por unidade de tempo e a cargas alternadas simétricas. Para levar em conta essa situação, o fator K_I é ajustado para 1,42 para uma engrenagem intermediária ou 1,0 para uma engrenagem fixa.



(a) Momento repetido em dente de engrenagem



(b) Momento invertido em dente de engrenagem intermediária

Figura 4 – Momentos aplicados nos dentes



TENSÕES DE SUPERFÍCIE EM ENGRENAGENS DE DENTES RETOS

As tensões na superfície do dente são tensões de contato de Hertz. As tensões de cisalhamento têm valores de pico abaixo da superfície de contato.

A fórmula AGMA de tensão de contato é:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I d} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

W_t – força tangencial no dente.

d – diâmetro primitivo.

F – largura da face.

I – fator de geometria de superfície adimensional para resistência ao pitting.

C_p – Coeficiente elástico equivalente que considera os módulos de elasticidade dos materiais na engrenagem e no pinhão.

Os coeficientes C_a , C_m , C_v e C_s são iguais, respectivamente, a K_a , K_m , K_v , e K_s definidos anteriormente.



Fator de Geometria de Superfície I – A AGMA define uma equação para I:

$$I = \frac{\cos \phi}{\left(\frac{1}{\rho_p} \pm \frac{1}{\rho_g} \right) d_p}$$

Par externo +
Par interno -

sendo:

ρ_p e ρ_g os raios de curvatura dos dentes do pinhão e da engrenagem, respectivamente.

ϕ - ângulo de pressão.

d_p – diâmetro primitivo do pinhão.



Os símbolos levam em conta se o par engrenado é externo ou interno. O raio de curvatura dos dentes é calculado a partir da geometria do engrenamento:

$$\rho_p = \sqrt{\left(r_p + \frac{1 + x_p}{p_d}\right)^2 - (r_p \cos \phi)^2} - \frac{\pi}{p_d} \cos \phi \quad \rho_g = C \sin \phi \mp \rho_p$$

Par externo -
Par interno +

Onde:

p_d – passo diametral.

r_p – raio primitivo do pinhão.

φ - ângulo de pressão.

C – distância entre os centros do pinhão e da engrenagem.

x_p – coeficiente de addendum do pinhão, que é igual à porcentagem decimal do alongamento de addendum nos dentes. Para padrão, dente profundidade total, **x_p**=0. Para dentes com **25%** de addendum longo, **x_p**=0.25.



COEFICIENTE ELÁSTICO C_p

Coeficiente Elástico C_p – Leva em conta diferenças nos materiais dos dentes do pinhão e da engrenagem:

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[\left(\frac{1 - \nu_p^2}{E_p} \right) + \left(\frac{1 - \nu_g^2}{E_g} \right) \right]}}$$

E_p e E_g são respectivamente os módulos de elasticidade do pinhão e da engrenagem. ν_p e ν_g são os respectivos coeficientes de Poisson.

As unidades de C_p são $(\text{psi})^{0.5}$ ou $(\text{MPa})^{0.5}$.

A tabela a seguir mostra valores de C_p para várias combinações de materiais comuns de engrenagem e pinhão, assumindo $\nu=0.3$ para todos os materiais.



Tabela 4 - Coeficiente de elasticidade C_p .

O coeficiente elástico C_p da AGMA em unidades de $[\text{psi}]^{0.5}([\text{Mpa}]^{0.5})^{*†}$

Material Pinhão	E_p psi (MPa)	Material da engrenagem					
		Aço	Ferro maleável	Ferro nodular	Ferro fundido	Alumínio bronze	Estanho bronze
Aço	30E6 (2E5)	2 300 (191)	2 180 (181)	2 160 (179)	2 100 (174)	1 950 (162)	1 900 (158)
Ferro maleável	25E6 (1.7E5)	2 180 (181)	2 090 (174)	2 070 (172)	2 020 (168)	1 900 (158)	1 850 (154)
Ferro nodular	24E6 (1.7E5)	2 160 (179)	2 070 (172)	2 050 (170)	2 000 (166)	1 880 (156)	1 830 (152)
Ferro fundido	22E6 (1.5E5)	2 100 (174)	2 020 (168)	2 000 (166)	1 960 (163)	1 850 (154)	1 800 (149)
Alumínio bronze	17.5E6 (1.2E5)	1 950 (162)	1 900 (158)	1 880 (156)	1 850 (154)	1 750 (145)	1 700 (141)
Estanho bronze	16E6 (1.1E5)	1 900 (158)	1 850 (154)	1 830 (152)	1 800 (149)	1 700 (141)	1 650 (137)

† Os valores de E_p nesta tabela são aproximados e $\nu=0,3$ foi usado como coeficiente de Poisson aproximado para todos os materiais. Se números mais precisos para E_p e ν estiverem disponíveis, eles devem ser usados na equação acima para obter C_p .

FATOR DE ACABAMENTO SUPERFICIAL C_f

Fator de Acabamento Superficial C_f – É usado para levar em conta rugosidades excessivas no acabamento superficial nos dentes das engrenagens.

A AGMA não estabelece ainda padrões para esse fator, e recomenda que C_f seja ajustado 1 para engrenagens fabricadas por métodos convencionais.

