ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

12 – Projeto de compensadores: método do lugar das raízes

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Projeto baseado no lugar das raízes;
  - 2) Compensador avanço;
  - 3) Compensador atraso;
  - 4) Compensador avanço-atraso;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Projeto baseado no lugar das raízes

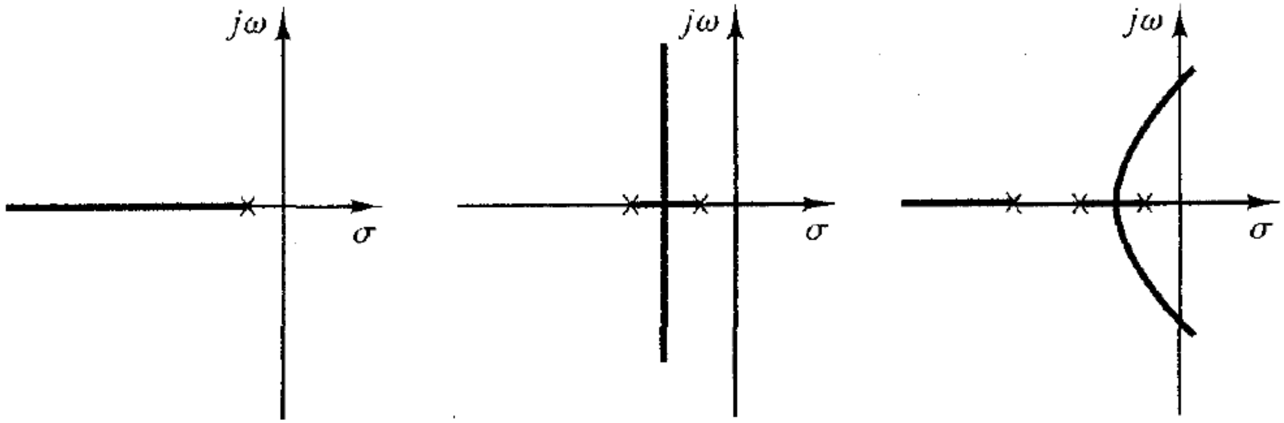
- **1.1. Requisitos de desempenho:**
  - O controlador projetado pelo método ZN **não garante requisitos** como tempo de resposta, erro estacionário e estabilidade: trata-se de um ajuste meramente empírico;
  - Aplicações de alto desempenho (ex: servo-controle, posicionadores, etc) exigem que os requisitos de projeto sejam atendidos estritamente para garantir a viabilidade e evitar danos ao sistema;
  - Nesta aula, serão apresentadas metodologias de projeto baseadas no **diagrama root locus** que visam atender os requisitos de desempenho.

1. Projeto baseado no lugar das raízes

- **1.2. Polos dominantes:**
  - Uma maneira de modular as características do sistema é **forçar os branches do root locus a passarem pelos polos desejados em malha fechada desejados**;
  - Assumir que o sistema apresenta **polos dominantes** em malha fechada:
    - Polos dominantes são os **polos mais próximos do zero no eixo real** que apresentam maior influência sobre o comportamento dinâmico do sistema (verifique pela constante de tempo);
    - Assim, um sistema de ordem N pode ser simplificado por um sistema de ordem 2 ou 1 com polos dominantes.

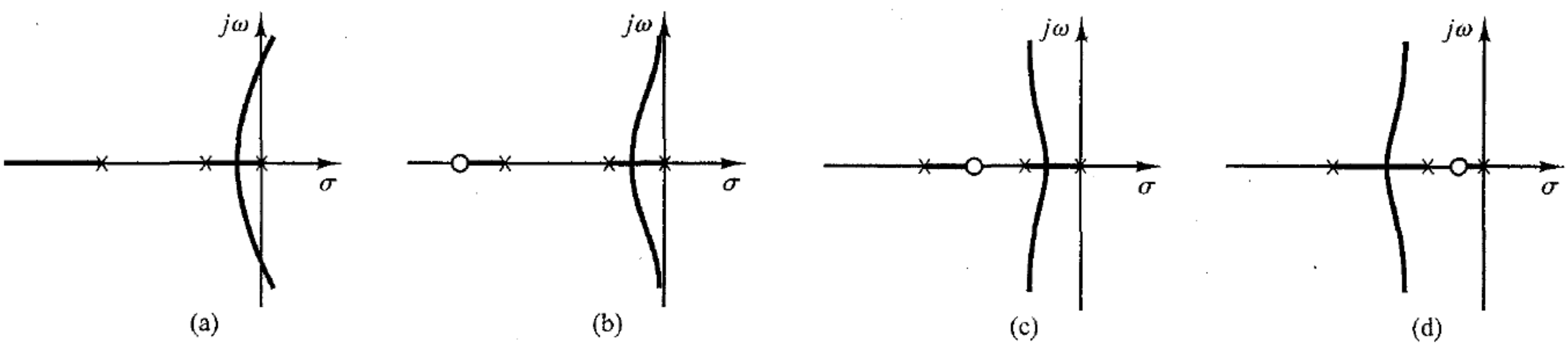
1. Projeto baseado no lugar das raízes

- **1.3. Inclusão de polos:**
  - Incluir um **polo na TF em malha aberta (integrador)** implica:
    - 1) “Puxar” o root locus para direita;
    - 2) Reduzir a estabilidade do sistema;
    - 3) Aumentar o tempo de estabilização.



1. Projeto baseado no lugar das raízes

- **1.4. Inclusão de zeros:**
  - Incluir um **zero na TF em malha aberta (derivador)** implica:
    - 1) “Puxar” o root locus para esquerda;
    - 2) Aumentar a estabilidade do sistema;
    - 3) Reduzir o tempo de estabilização.



2. Compensador avanço

- **2.1. Compensador avanço:**
  - O compensador avanço cria um “adiantamento de fase” na resposta do sistema, análogo a uma impedância capacitiva $1/sC$;
  - A TF do compensador avanço é:

$$\boxed{G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}} \tag{1}$$

    - K_c: ganho em malha aberta;
    - T: constante de tempo;
    - $0 < \alpha < 1$.

2. Compensador avanço

- **2.1. Compensador avanço:**
  - A função do compensador avanço pode ser comparada ao controlador PD:

$$\boxed{K(s) = k_P + k_d s = k_p(1 + T_d s) = k_p\left(s + \frac{1}{T_d}\right)}$$

$$\boxed{G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}}$$

Polo distante do eixo $j\omega$

2. Compensador avanço

- **2.2. Projeto de compensador avanço:**
  - 1) Dados os **requisitos de desempenho**, definir a posição dos **polos desejados em malha fechada**:
    - Por exemplo, seja uma planta com polos dominantes de segunda ordem $s = \sigma \pm j\omega = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, determinar os valores de ξ e ω_n que satisfaçam os requisitos de sobressinal e tempo de estabilização;
    - Lembrando que os polos dominantes são os polos mais próximos da origem no eixo real ($\sigma = 0$).

2. Compensador avanço

- **2.2. Projeto de compensador avanço:**
  - 2) Verifique se o **root locus passa pelos polos em malha fechada especificados**:
    - Caso afirmativo, é possível mover os polos dominantes para a posição desejada somente alterando o valor do ganho em malha aberta K_c;
    - Caso negativo, é preciso inserir polos através do compensador avanço.

2. Compensador avanço

- **2.2. Projeto de compensador avanço:**
  - 3) **Determine a posição do polo** $(\alpha T)^{-1}$ **e do zero** T^{-1} **do compensador** e o **ganho em malha aberta** K_c necessários para que o sistema atinja os polos desejados em malha fechada;
    - Note que os polos e zeros são situados no eixo real;
    - Existem diversos valores possíveis para α, T e K_c;
    - Sugestão: aloque o polo do compensador 4 vezes à esquerda dos polos desejados, ajuste o ganho para atingir o valor de ω_n e desloque o zero para que o sistema atinja os polos desejados. Refine o procedimento até conseguir o valor desejado (utilize a função `sisotool`).

2. Compensador avanço

- **2.2. Projeto de compensador avanço:**
  - 4) **Verifique se os requisitos de projeto foram atingidos**;
    - Utilizando a planta com compensador $G_c(s)G(s)$, feche a malha e observe a sua resposta no tempo;
    - Verifique se todos os requisitos de projeto foram atendidos;
    - Refine o projeto se necessário.

3. Compensador atraso

- **3.1. Compensador atraso:**
  - O compensador avanço cria um "atraso de fase" na resposta do sistema, análogo a uma impedância indutiva sL;
  - A TF do compensador atraso é:

$$\boxed{G_c(s) = K_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\,\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}} \tag{2}$$

    - K_c: ganho em malha aberta;
    - T: constante de tempo;
    - $\beta > 1$.

3. Compensador atraso

- **3.1. Compensador atraso:**
  - A função do compensador atraso pode ser comparada ao controlador PI.

$$K(s) = k_P + \frac{k_i}{s} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = k_p\left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}\right)$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \approx K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s}$$

Polo próximo ao eixo $j\omega$

3. Compensador atraso

- **3.2. Projeto de compensador atraso:**
  - 1) Dados os **requisitos de desempenho**, definir a posição dos **polos dominantes em malha fechada**;
  - 2) Assumindo que o polo e o zero do compensador atraso ficam próximos à origem do plano imaginário, **calcule a constante de erro de velocidade**:

$$\boxed{\widehat{K}_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} G_c(s)K_v = K_c\beta K_v} \qquad (3)$$

  - Onde $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$ é a constante de erro de velocidade do sistema sem o compensador.

3. Compensador atraso

- **3.2. Projeto de compensador atraso:**
  - 3) Determine a **posição do polo e do zero do compensador** de modo a forçar o sistema a atingir os polos em malha fechada desejados;
    - Utilize as condições de βK_c calculadas anteriormente;
    - Note que o polo deve ser localizado próximo à origem ($s \to 0$);
  - 4) **Feche a malha e verifique o desempenho do sistema**. Refine o projeto se necessário.

4. Compensador avanço-atraso

- **4.1. Compensador avanço-atraso:**
  - O **compensador avanço-atraso** combina as características individuais dos compensadores avanço e atraso para aprimorar a resposta do sistema em malha fechada em termos de tempo de resposta, estabilidade e erro estacionário;
  - Função de transferência:

$$\boxed{G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma} s + 1\right)} \frac{(T_2 s + 1)}{(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}\right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right)} \qquad (4)$$

    - Onde $\beta > 1$ e $\gamma > 1$ (pode-se escolher $\beta = \gamma$ para simplificar o projeto);

4. Compensador avanço-atraso

- **4.1. Compensador avanço-atraso:**
  - A função do compensador avanço-atraso pode ser comparada ao controlador PID:

$$\boxed{K(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = k_p\left[\frac{(T_i s + 1) + T_i T_d s^2}{T_i s}\right]}$$

$$\boxed{G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)} \frac{(T_2 s + 1)}{(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right)}$$

  - O compensador avanço-atraso aumenta a ordem do sistema em pelo menos 2, a não ser que ocorra cancelamento de polos pelo sistema.

4. Compensador avanço-atraso

- **4.2. Projeto do compensador avanço-atraso:**
  - 1) Determinar a posição dos polos dominantes em malha fechada;
  - 2) Dadas as especificações do projeto, determinar a posição dos polos desejados;
  - 3) Fazendo $T_2 \rightarrow \infty$ (a FT do compensador atraso é unitária), determinar os valores de γ e T_1 do **compensador avanço** e o ganho K_c necessários para atingir os polos desejados → **Ajuste das características transientes**;
  - 4) Utilizando os requisitos de constante de erro de velocidade, calcular os parâmetros do **compensador atraso**, β e T_2 → **Ajuste do erro estacionário**.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Qual é a principal diferença entre os projetos de compensadores apresentados nesta aula e o controlador PID projetado pelo método Ziegler-Nichols?
  - 2) Do ponto de vista prático, quais são as vantagens e desvantagens de cada método?
  - 3) Os polos alocados pelo controlador modificam a planta sistema em malha aberta? E no caso do sistema em malha fechada?
  - 4) Como implementar compensadores avanço, atraso, e avanço-atraso nas formas analógica e digital?

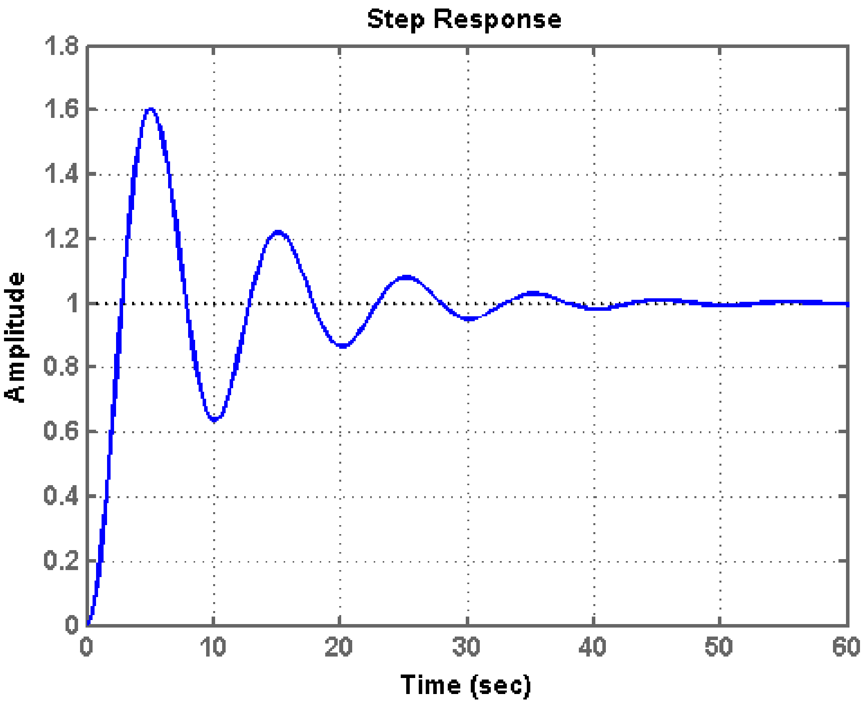
Referências

- **Referências:**
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 12.1)** O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem em malha aberta $G(s)$;
  - Projete um compensador avanço que proporcione um tempo de estabilização (2%) de 10 s e que mantenha fator de amortecimento.



Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Identificação do sistema:
    - Sobressinal:

$$\boxed{M_p = \frac{y_p - y_\infty}{y_\infty} = 60\%}$$

    - Fator de amortecimento:

$$\boxed{\xi = \frac{\ln(100/M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln(100/M_p)\right)^2}} = 0.1605}$$

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Identificação do sistema:
    - Frequência natural amortecida:

$$\boxed{\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 0.6209 \text{ rad/s}}$$

    - Frequência natural:

$$\boxed{\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.629 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{\sigma = \xi\omega_n = 0.101}$$

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Identificação do sistema:
    - Planta:

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.3957}{s^2 + 0.2019s + 0.3957}}$$

    - Polos em malha aberta:

$$\boxed{s = -\sigma \pm j\omega_d = -0.101 \pm j0.6290}$$

      – Polos no SPE → sistema estável.

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Requisitos de projeto:
    - Manter $\xi = 0.1605$, tempo de estabilização de 10 s:

$$\boxed{t_{s,2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 2.5298 \text{ rad/s}}$$

    - Polos desejados:

$$\boxed{\sigma = \xi\omega_n = 0.4}$$

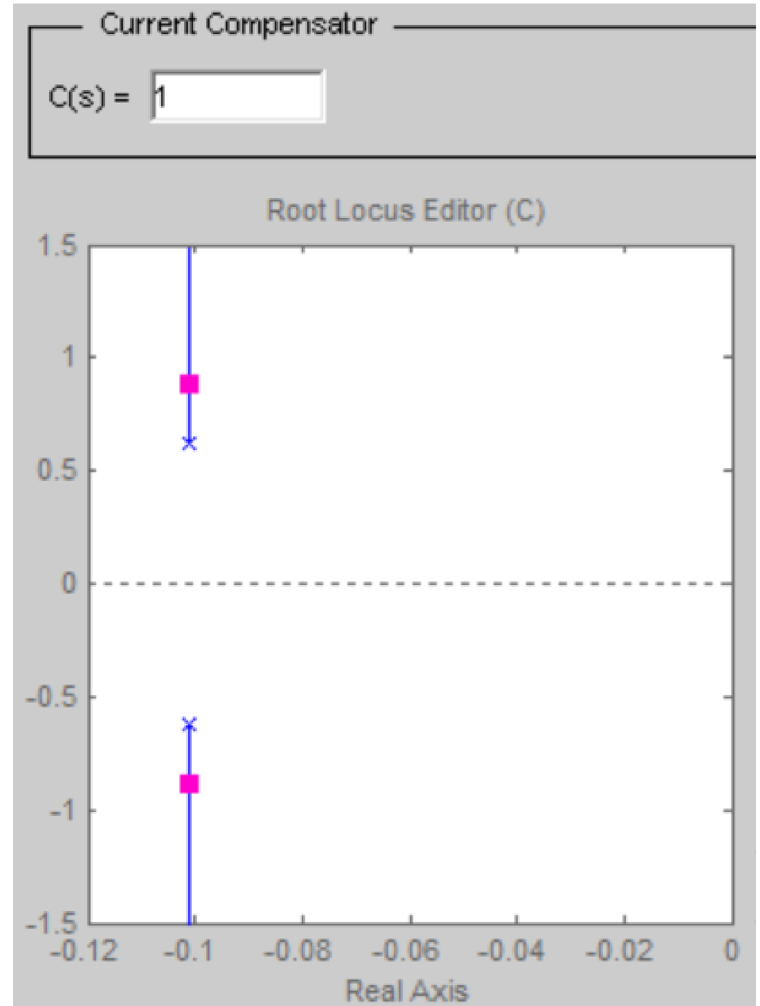
$$\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2.498 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{s = -\sigma \pm j\omega_d = -0.4 \pm j2.498}$$

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Projeto do compensador avanço:
    - Root locus de $G(s)$: `sisotool`;
      - Alterando o valor de K_c, não é possível alocar os polos na posição desejada, portanto, é necessário implementar o compensador avanço.
      - Polos desejados:

$$\boxed{s = -0.4 \pm j2.498}$$



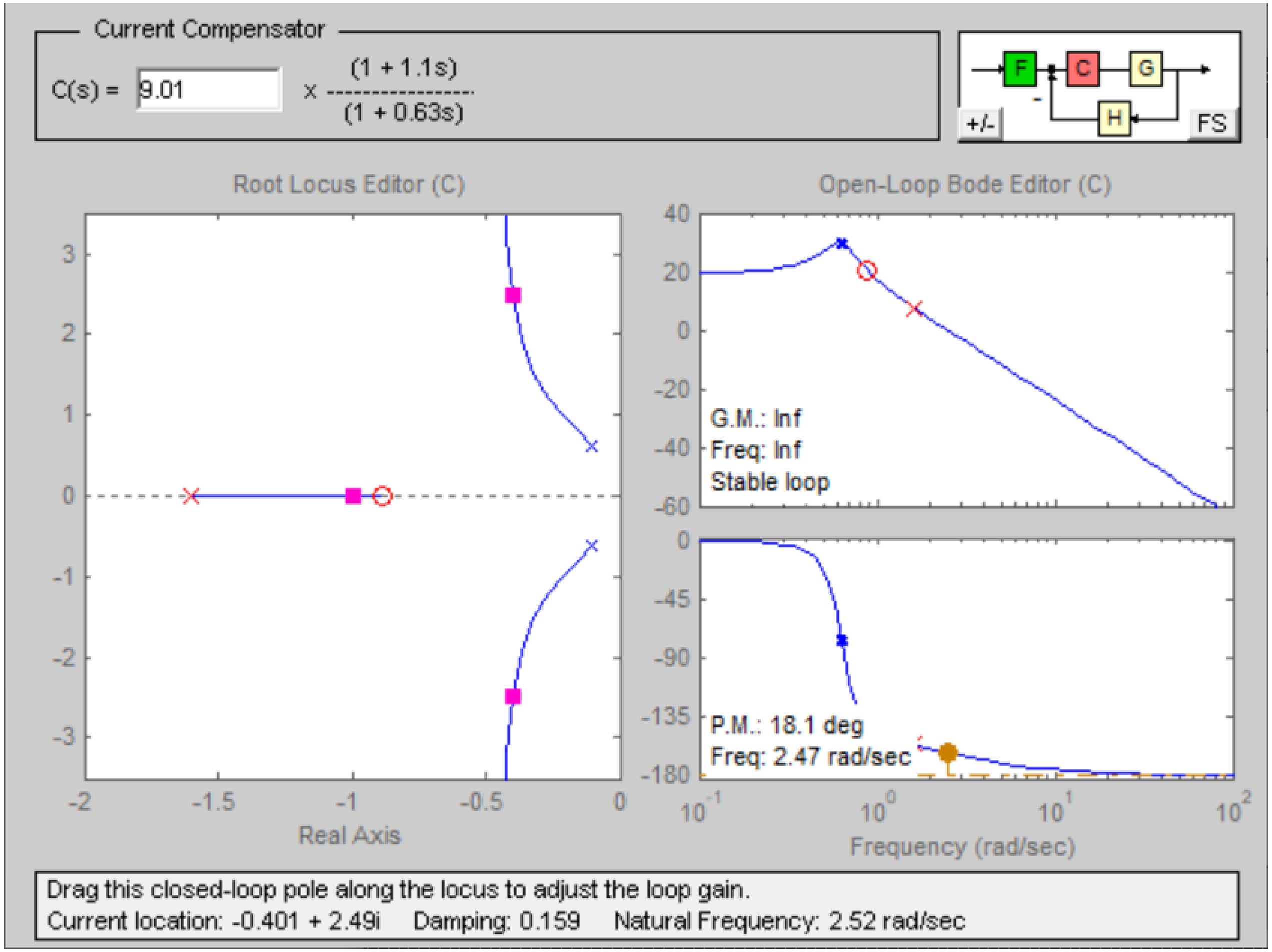
Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Projeto do compensador avanço:
    - Posicionar sobre o eixo real em $-4\sigma = -1.6$;
    - Ajustar a posição do zero e o ganho K_c até que o branch do root locus passe sobre os polos desejados;
    - Determinar K_c, T e $0 < \alpha < 1$:
      - $T = 1.1$;
      - $\alpha = 0.5727$;
      - $K_c = 15.738$.

$$\boxed{G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = 9.01\frac{1.1s+1}{0.63s+1}}$$

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Projeto do compensador avanço:



Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Projeto do compensador avanço:
    - Planta em malha fechada com compensador:

$$G_c(s)G(s) = 9.01\left(\frac{1.1s+1}{0.63s+1}\right)\left(\frac{0.3975}{s^2+0.2019s+0.3957}\right)$$

$$H(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)}$$

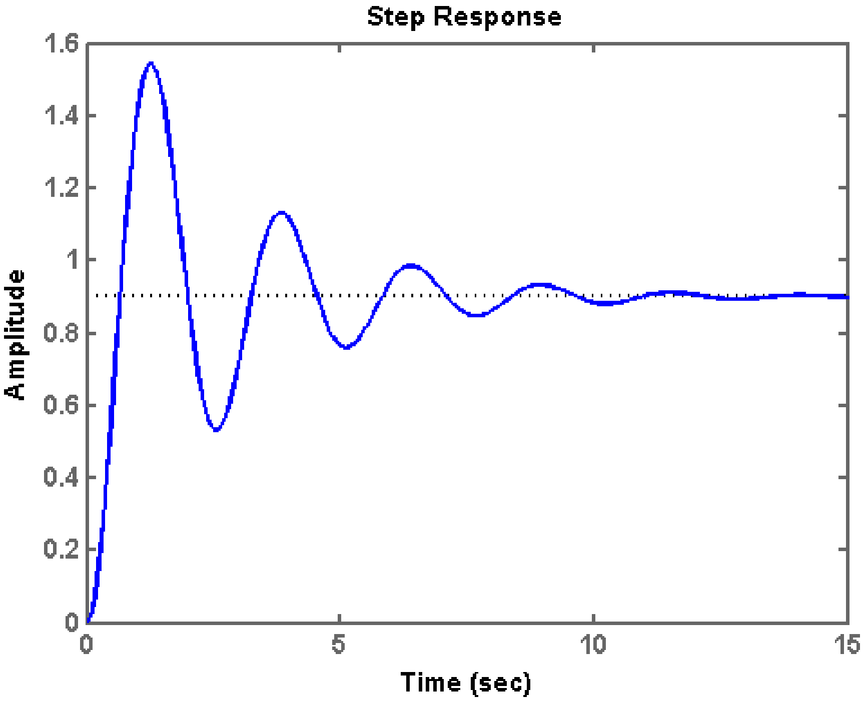
    - Polos em malha fechada:

```
-0.3840 + 2.4513i
-0.3840 - 2.4513i
-1.0212
```

$$s = -0.4 \pm j2.498$$

Exercícios

- **Ex. 12.1)**
  - Projeto do compensador avanço:
    - Resposta ao degrau de $H(s)$:
      - Tempo de estabilização <5 s;
      - Sobressinal de 71%;
      - Erro estacionário ao degrau de 0.098.



Exercícios

- **Ex. 12.2)** Seja o modelo do drone que relaciona a altitude $y(t)$ à força de propulsão $F(t)$. O sistema possui massa $m = 0.8$ kg e coeficiente de atrito $b = 0.4$ N.s/m. Despreze o efeito da gravidade.
  - Projete um compensador atraso que proporcione um erro estacionário à rampa unitária $e_{ss} \leq 0.1$ m/s.

Exercícios

- **Ex. 12.2)**
  - Função de transferência em malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms+b)} = \frac{1}{0.8s^2 + 0.4s}}$$

$$\boxed{s = (0, -0.5)}$$

  - Erro estacionário à rampa unitária:
    - Constante de erro estático:

$$\boxed{K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = 2.5}$$

    - Erro estacionário à rampa:

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.4\ \text{m/s}}$$

Exercícios

- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Requisito de erro estacionário:

$$\boxed{e'_{ss} = 0.1 \Rightarrow K'_v = 10}$$

$$\boxed{K'_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = K_c \beta K_v}$$

$$\boxed{K_c \beta = \frac{K_v{}'}{K_v} = \frac{10}{2.5} = 4}$$

Exercícios

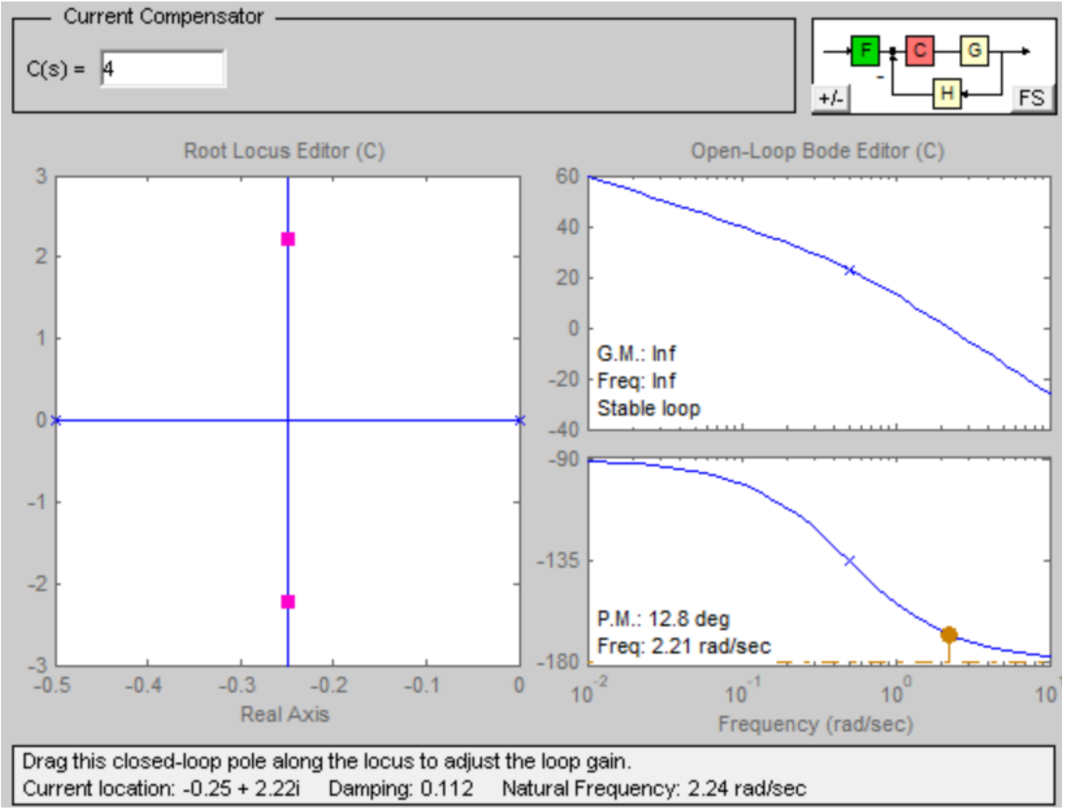
- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Função de transferência:

$$\boxed{G_c(s) = K_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}}$$

    - O polo de $G(s)$ deve ser alocado próximo à origem do eixo real. Por exemplo, se o polo é alocado em $s = 0.01$, supondo $K_c = 1$ e $\beta = 4$, então $T = 25$ e o zero é alocado em $s = 0.04$.

Exercícios

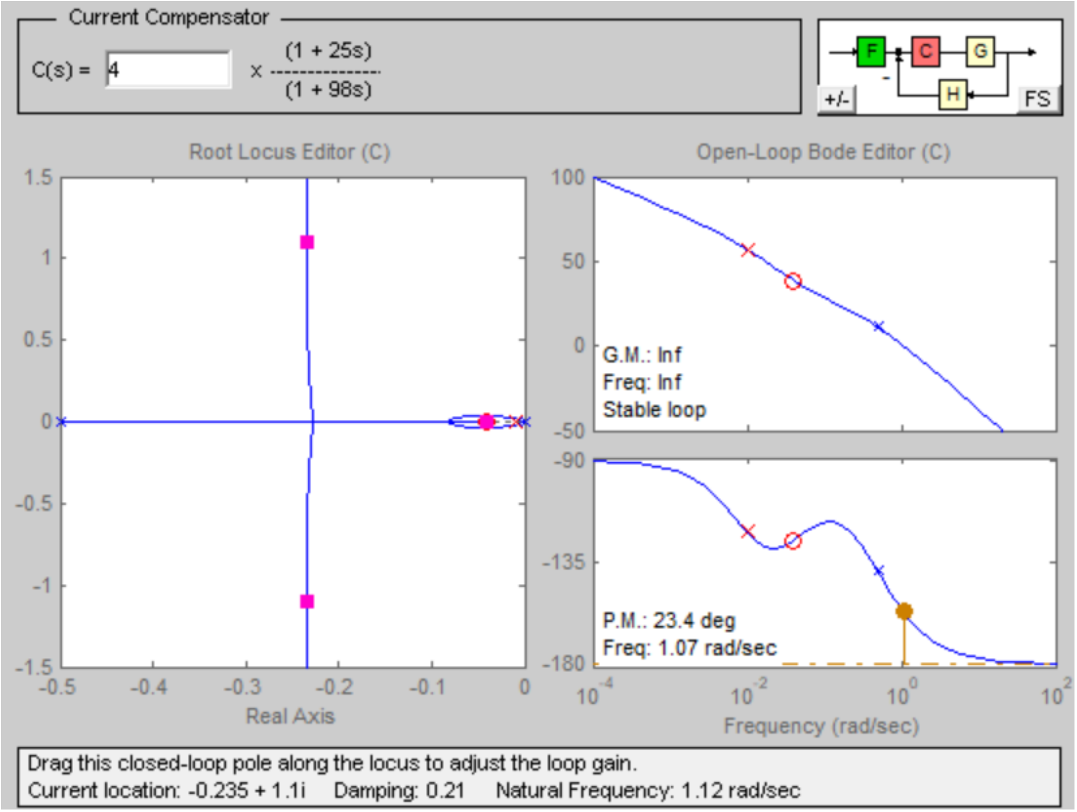
- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Root locus – malha aberta.



Exercícios

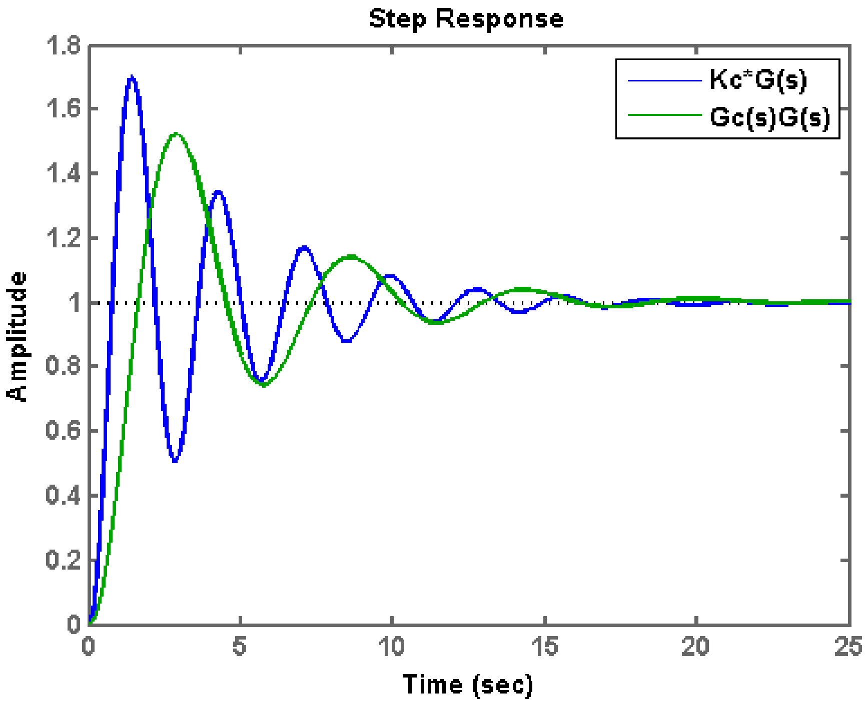
- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Root locus – malha fechada.

$$\boxed{G_c(s) = 4\frac{25s+1}{98s+1}}$$



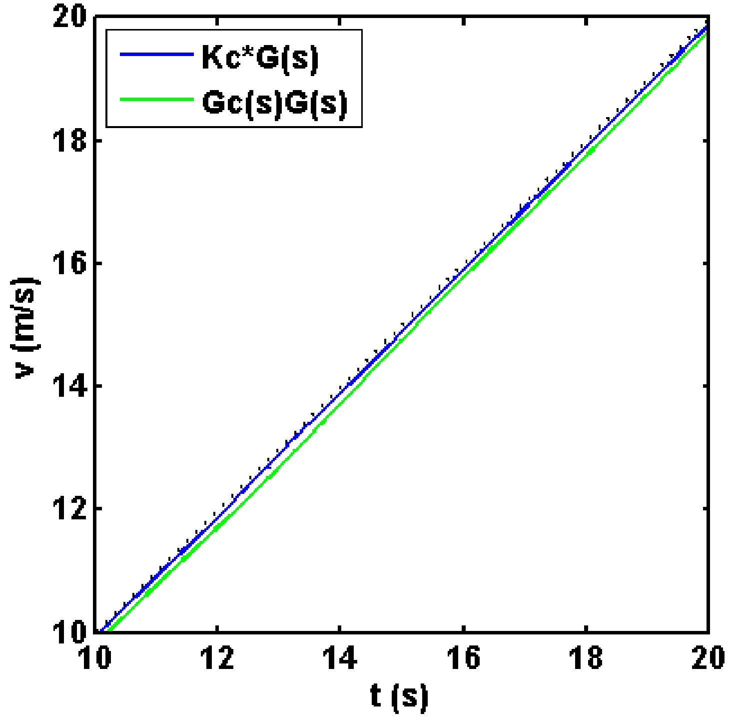
Exercícios

- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Resposta ao degrau: planta em malha fechada com ganho proporcional e com compensador atraso;
    - Erro estático ao degrau nulo.



Exercícios

- **Ex. 12.2)**
  - Projeto do controlador:
    - Resposta à rampa: planta em malha fechada com ganho proporcional e com compensador atraso;
    - Requisito de erro estacionário atendido.



Exercícios

- **Ex. 12.3)** Para a planta em malha aberta $G(s)$, projete um compensador que garanta um erro estático à rampa unitária de $e_{ss} = 0.02$ m/s e polos dominantes com fator de amortecimento $\xi = 0.5$, de modo a cancelar o polo em $s = -1$.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}}$$

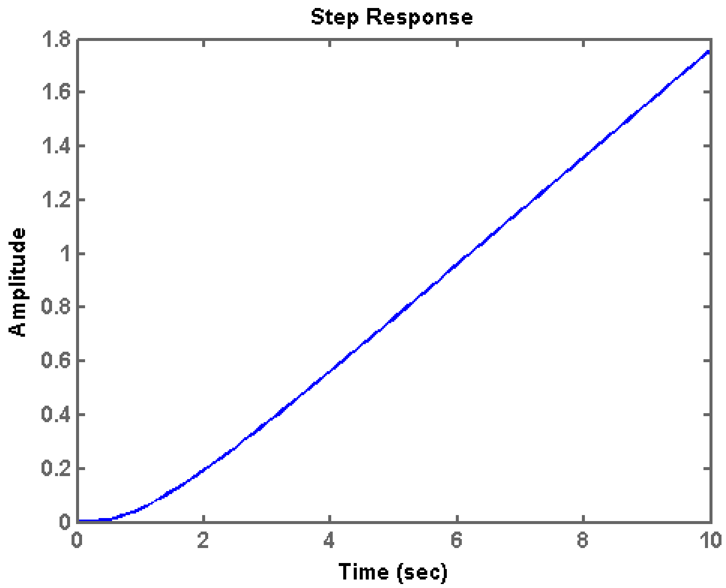
Exercícios

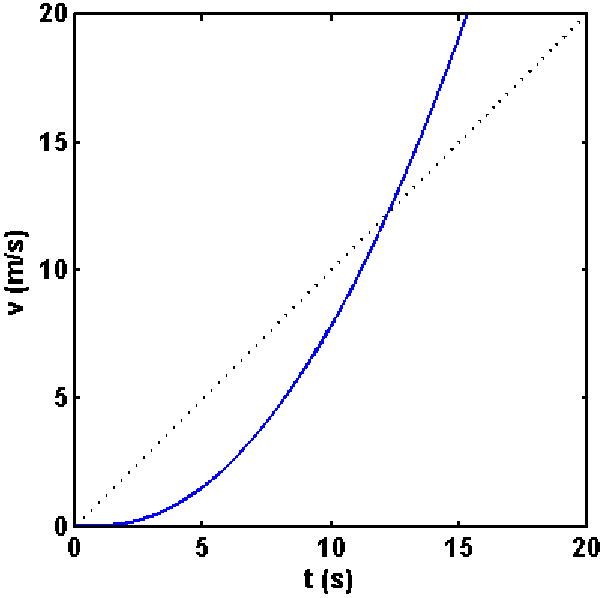
- **Ex. 12.3)**
  - Caracterização do sistema:
    - Sistema tipo 1;
    - Polos em malha aberta: $s = 0$, $s = -1$, $s = -5$;
    - O sistema possui 2 polos no SPE e um polo na origem → sistema instável.

    - Erro estacionário em malha fechada:
      - Posição: $K_p = \infty$, $e_{ss} = 0$;
      - Velocidade: $K_v = 0.2$, $e_{ss} = 5$.

Exercícios

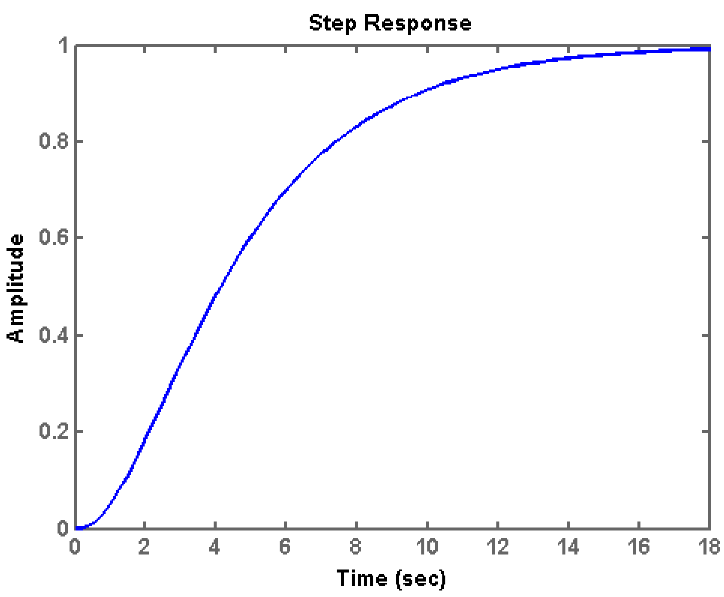
- **Ex. 12.3)**
  - Resposta ao degrau e à rampa – malha aberta

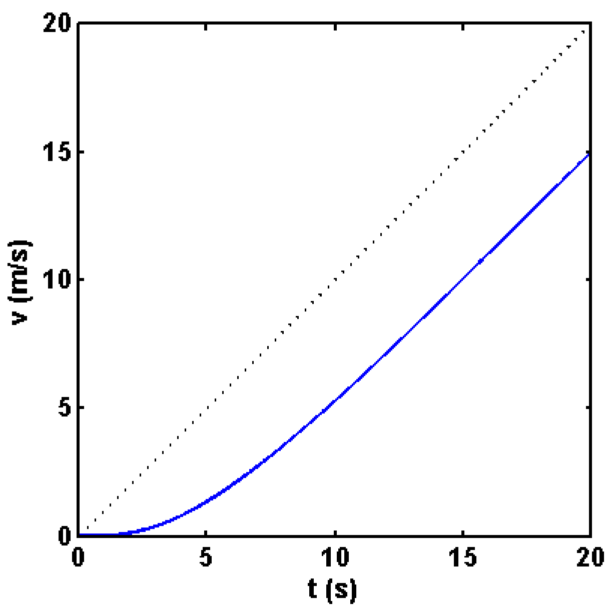




Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Resposta ao degrau e à rampa – malha fechada sem controlador, realimentação unitária





Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Projeto do compensador:
    - Compensador avanço atraso, $\beta = \gamma > 1$:

$$\boxed{G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)} \frac{(T_2 s + 1)}{(\beta T_2 s + 1)}}$$

    - De acordo com a metodologia, inicialmente é projetado o controlador avanço baseado nos requisitos de resposta transiente, seguido do projeto do controlador atraso baseado no requisito de erro estacionário.

Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Projeto do compensador:
    - O sistema deve possuir polos dominantes com $\xi = 0.5$;
    - Para cancelar o polo em $s = -1$, o compensador avanço deve possuir um zero em $s = -1$, logo,

$$\boxed{\frac{1}{T_1} = 1 \Rightarrow T_1 = 1}$$

Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Projeto do compensador:
    - Requisito de erro estacionário: $K_v' = \frac{1}{0.02} = 50$;
    - Planta com controlador:

$$\boxed{K_v' = \lim_{s \to 0} K_c K_v \Rightarrow K_c = \frac{50}{0.2} = 250}$$

    - Escolhendo o polo do compensador atraso em $s = -0.01$,

$$\boxed{\beta T_2 0.01 = 1 \Rightarrow T_2 = \frac{100}{\beta}}$$

Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Projeto do compensador:
    - Assim, a função de transferência do compensador é:

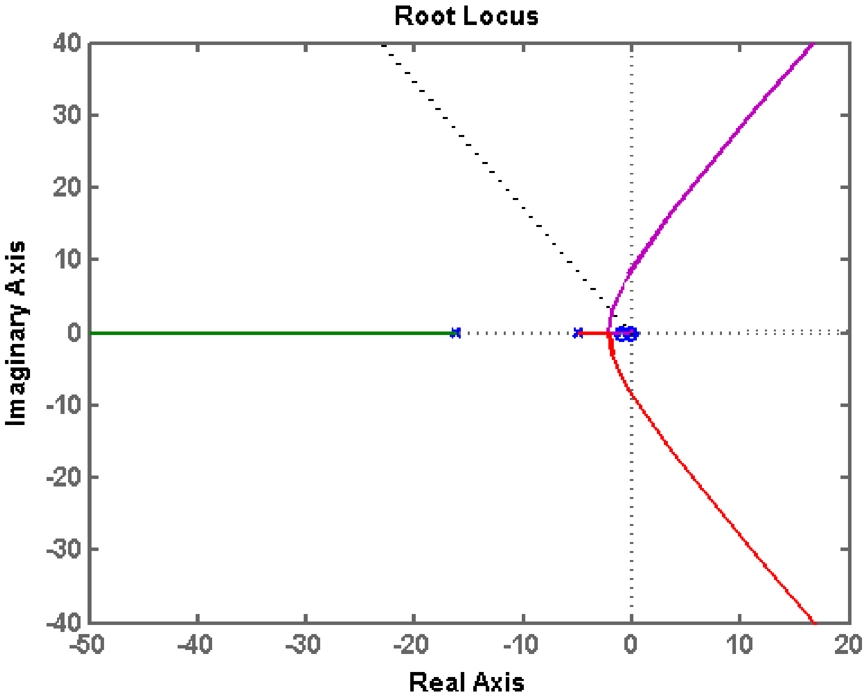
$$\boxed{G_c(s) = 250\,\frac{(s+1)}{\left(\frac{1}{\beta}s+1\right)}\,\frac{\left(\frac{100}{\beta}s+1\right)}{(100s+1)}}$$

    - Variando β, observar no root locus a condição para qual os polos dominantes sejam situados em $\xi = 0.5$ para $K_c = 250$;
    - Dica: verificar o cruzamento do branch com a assíntota de coeficiente angular $\frac{\omega_n}{\sigma} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

Exercícios

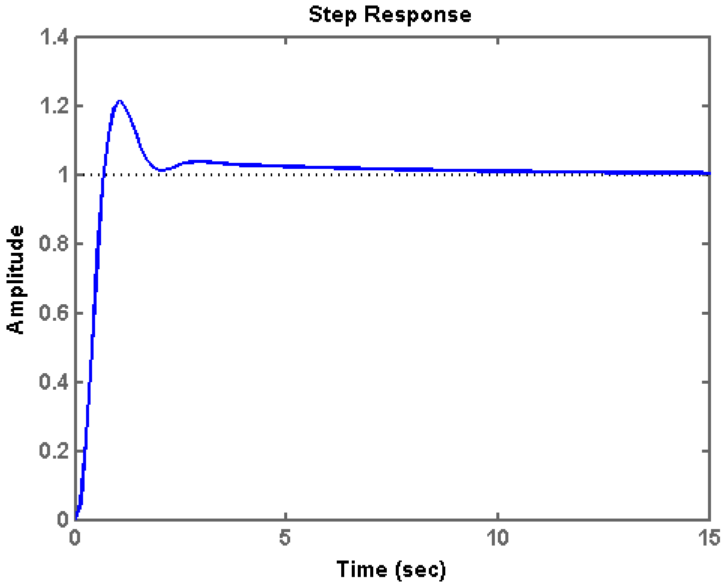
- **Ex. 12.3)**
  - Projeto do compensador:
    - Root locus:
      - Por tentativa e erro, a condição é satisfeita para $\beta \approx 16.25$.

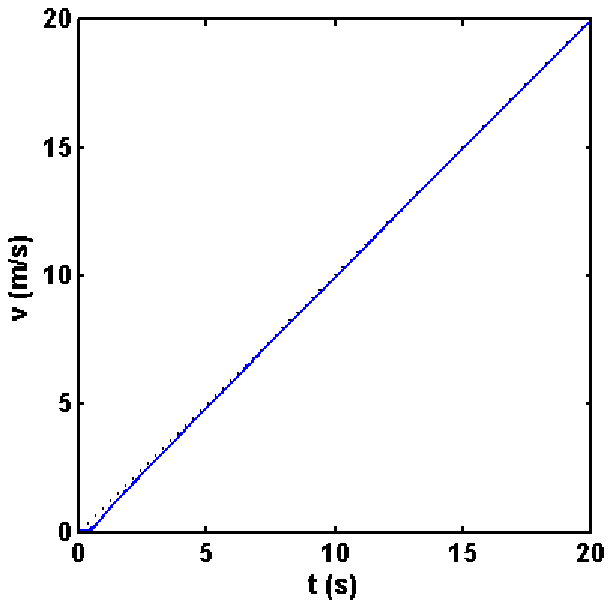
```
beta = 16.25; Kc = 250;
csi = 0.5;
Gc = ((s+1)*(100/beta*s+1))/
((s/beta+1)*(100*s+1));
rlocus(Gc*Gs)
hold on
plot([0 -csi],
[0 sqrt(1-csi^2)],':k')
```



Exercícios

- **Ex. 12.3)**
  - Resposta ao degrau e à rampa – malha fechada com controlador





Exercícios

- **Ex. 12.4)** Para a planta em malha aberta $G(s)$, projete um compensador que garanta $\xi = 0.5$ e tempo de estabilização (2%) de $t_{2\%} = 2$ s.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+2)}}$$

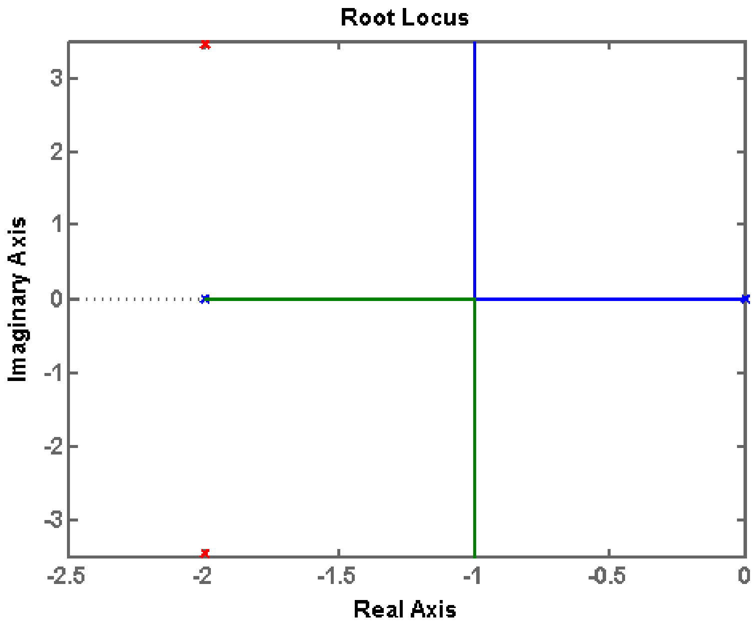
Exercícios

- **Ex. 12.4)**
  - Polos desejados:

$$\boxed{\xi = 0.5} \qquad \boxed{\omega_n = \frac{1}{\xi t_{2\%}} = 4 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -2 \pm 3.46j}$$

  - O diagrama de lugar das raízes de $G(s)$ não passa pelos polos desejados.



Exercícios

- **Ex. 12.4)**
  - Vamos projetar um compensador do tipo:

$$\boxed{K(s) = K\frac{s+\alpha}{s+\beta}}$$

  - Para “puxar” o root locus para a esquerda e forçar a passagem pelos polos desejados, pode-se fazer:
    - Cancelar o polo $s = -2$ de $G(s)$ com um zero $\alpha = -2$;
    - Incluir um polo em $s = -4$;
    - Ajustar o ganho para $K = 7.9$.

Exercícios

- **Ex. 12.4)**
  - Resposta ao degrau: planta+compensador.
    - Note que os requisitos de projeto são atendidos.