ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

22 – Projeto de controladores discretos

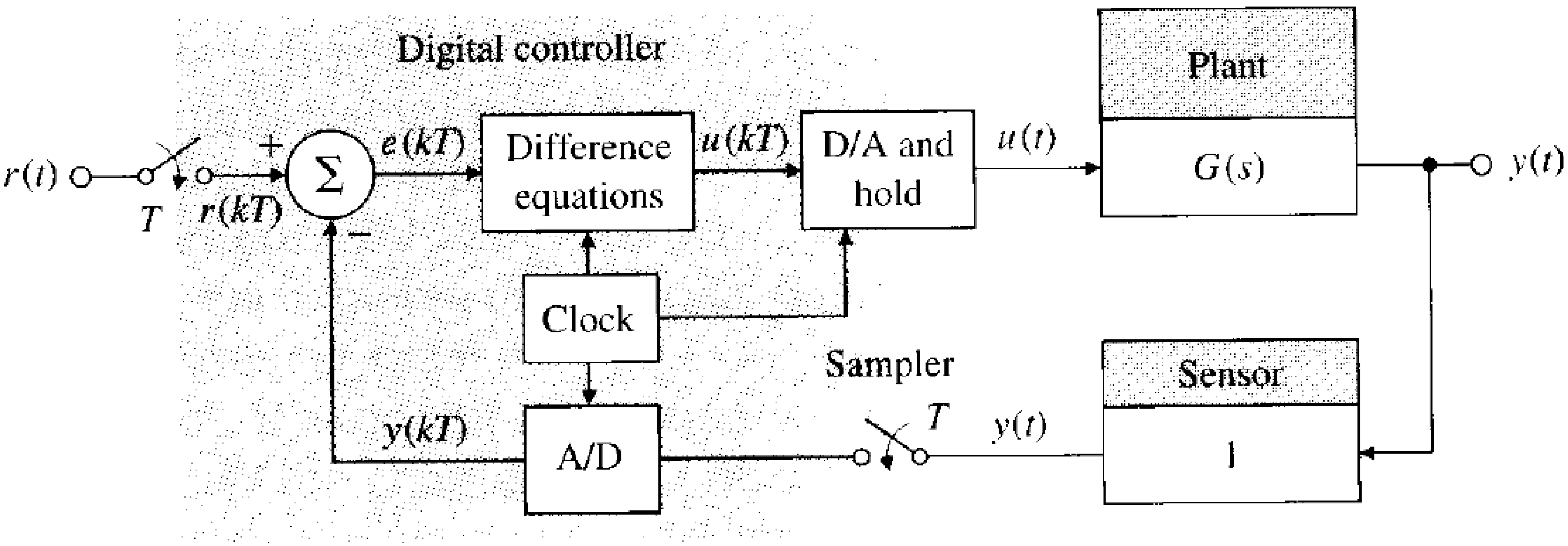
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Método do lugar das raízes;
  - 2) Método da análise em frequência;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Controle discreto



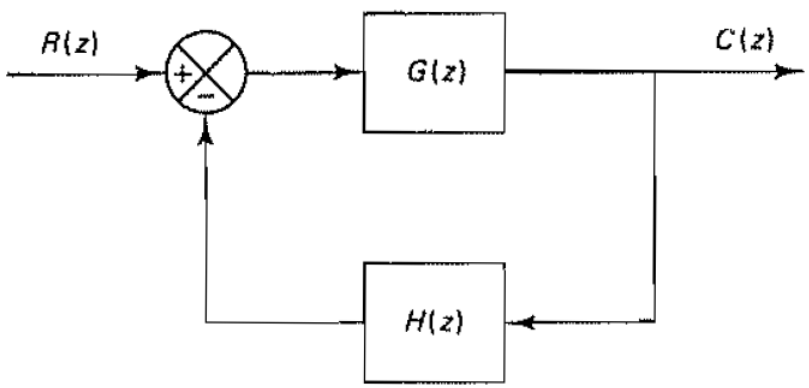
1. Método do lugar das raízes

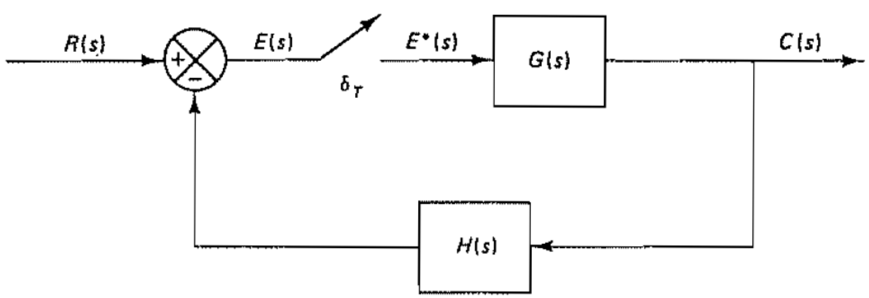
- **1.1. Root locus:**
  - Sejam as TF em malha fechada do sistema discreto $C(z)$ e do sistema com amostragem $D(z)$:

$$\boxed{C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}}$$

$$\boxed{D(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}}$$

    - Onde $GH(z) = \mathcal{Z}[G(s)H(s)]$.





1. Método do lugar das raízes

- **1.1. Root locus:**
  - Equações características:

$$\boxed{1 + G(z)H(z) = 0} \qquad \boxed{1 + GH(z) = 0}$$

  - Fazendo $F(z) = G(z)H(z)$ ou $F(z) = GH(z)$

$$\boxed{1 + F(z) = 0 \Rightarrow F(z) = -1}$$

$$\boxed{|F(z)| = 1} \qquad \boxed{\phi(z) = \pm 180°(2k + 1)} \tag{1}$$

  - Os polos em malha fechada devem satisfazer (1) em z. Dado um ganho em malha aberta, os valores que satisfazem (1) definem o root locus do sistema.

1. Método do lugar das raízes

- **1.2. Projeto de compensador proporcional:**
  - **1) Obter a TF em malha aberta** $G(z)$:
    - Supondo que a realimentação é unitária, $H(z) = 1$;
    - Se a entrada da planta contínua $G_p(s)$ for amostrada por um segurador $G_h(s)$, então $G(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)G(s)]$;
  - **2) Determinar** $F(z)$:

$$\boxed{F(z) = KG(z) = K\frac{(z+z_1)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)\cdots(z+p_n)}} \qquad (2)$$

    - K: ganho em malha aberta;
    - $m < n$.

1. Método do lugar das raízes

- **1.2. Projeto de compensador proporcional:**
  - **3) Traçar o root locus de $F(z)$ e determinar o ganho crítico:**
    - O ganho crítico K_{cr} é obtido pela condição de magnitude,

$$\boxed{|F(z)| = |KG(z)| = 1 \Rightarrow \ |G(z)| = \frac{1}{K}}$$

    - $K = K_{cr}$ quando o root locus cruza o circulo de raio unitário.

1. Método do lugar das raízes

- **1.2. Projeto de compensador proporcional:**
  - **4) Utilizando o ganho crítico, dimensionar os ganhos do controlador:**
    - Se o controlador for do tipo P, basta fazer $K_P = K_{cr}$;
  - **5) Fechar a malha, avaliar a resposta do sistema com controlador, e refinar o projeto se necessário.**

1. Método do lugar das raízes

- **1.2. Projeto de compensador proporcional:**
  - **6) Observações:**
    - Se o controlador for PI, PD ou PID, é necessário mudar o projeto para

$$\boxed{F(z) = G_D(z)\mathcal{Z}[G_h(s)G(s)]} \qquad (3)$$

      – Controlador PID discreto

$$\boxed{G_D(z) = K_P + K_I\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) + K_D(1-z^{-1})} \qquad (4)$$

    - Note que os ganhos do método Ziegler-Nichols contínuo não podem ser aplicados diretamente no caso discreto.

1. Método do lugar das raízes

- **1.3. Projeto de controlador baseado em alocação de polos:**
  - **1) Baseado nos requisitos de desempenho, determinar os polos desejados no contínuo:**
    - Sejam os requisitos de amortecimento, tempo de estabilização, erro estacionário, etc., determinar

$$\boxed{s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d} \qquad (5)$$

1. Método do lugar das raízes

- **1.3. Projeto de controlador baseado em alocação de polos:**
  - **2) Converter os polos desejados de s para z:**
    - Utilizando a conversão

$$\boxed{z = e^{sT} = e^{(-\xi\omega_n \pm j\omega_d)T}}$$

    - Magnitude e fase:

$$\boxed{|z| = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \qquad \boxed{\angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}} \qquad (6)$$

      – Onde $\omega_s = 2\pi/T$.

1. Método do lugar das raízes

- **1.3. Projeto de controlador baseado em alocação de polos:**
  - **3) Traçar o root locus da planta em malha aberta:**
    - Planta em malha aberta (com segurador):

$$\boxed{F(z) = K\mathcal{Z}[G_h(s)G_h(s)]}$$

  - **4) Verificar se é possível fazer o root locus passar pelos polos desejados ajustando o ganho** K:
    - Caso afirmativo, os requisitos de projeto podem ser atingidos com um compensador proporcional;
    - Caso contrário, é necessário realizar a alocação/cancelamento de polos e zeros.

1. Método do lugar das raízes

- **1.3. Projeto de controlador baseado em alocação de polos:**
  - **5) Projeto do controlador:**
    - Seja o compensador

$$\boxed{G_D(z) = K\frac{z+\alpha}{z+\beta}} \tag{7}$$

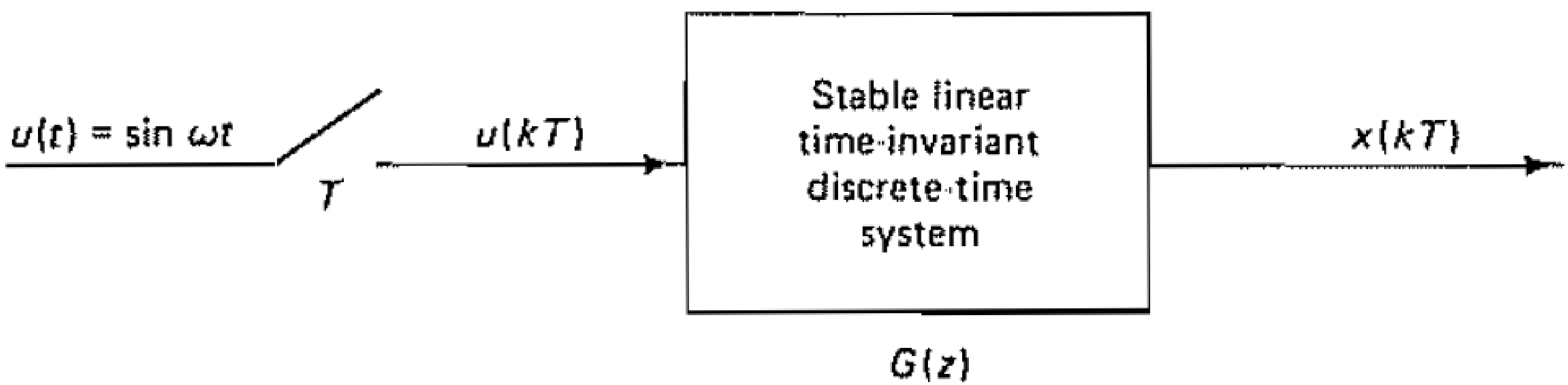
    - Alocar o polo $z = -\beta$ e o zero $z = -\alpha$ e determinar o ganho K necessário para fazer o root locus passar pelos polos desejados.

  - **6) Fechar a malha, avaliar a resposta do sistema com controlador, e refinar o projeto se necessário.**

2. Método da análise em frequência

- **2.1. Resposta em frequência:**
  - A resposta de uma planta discreta $G(z)$ a uma entrada periódica $u(t) = \sin \omega t \Rightarrow u(kT) = \sin(k\omega T)$ é dada por

$$\boxed{X(z) = G(z)\mathcal{Z}[\sin(k\omega T)]} \tag{8}$$



2. Método da análise em frequência

- **2.1. Resposta em frequência:**
  - Considerando que os termos transientes evanescem no tempo, a resposta em frequência pode ser obtida fazendo $z = e^{j\omega T}$,

$$\boxed{X(\omega) = G\left(e^{j\omega T}\right) = \left|G(e^{j\omega T})\right| \angle G\left(e^{j\omega T}\right) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}} \qquad (9)$$

  - $G(e^{j\omega T})$ é a função de transferência de pulso senoidal.

2. Método da análise em frequência

- **2.2. Transformação bilinear:**
  - Para mapear todo semi-plano esquerdo de s no espaço discreto sem ficar limitado ao circulo unitário em z, utiliza-se a **transformação bilinear**

$$\boxed{z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w}} \qquad \boxed{w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}} \tag{10}$$

  - Esta operação mapeia a faixa de frequências $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$ no contínuo para o intervalo $-\infty < \nu < \infty$, onde ν é a frequência fictícia no plano w

$$\boxed{\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}} \tag{11}$$

    – $\nu \cong \omega$ para $\omega T/2$ pequeno.

2. Método da análise em frequência

- **2.2. Transformação bilinear:**
  - Recapitulando a transformação bilinear de $s \to z$:

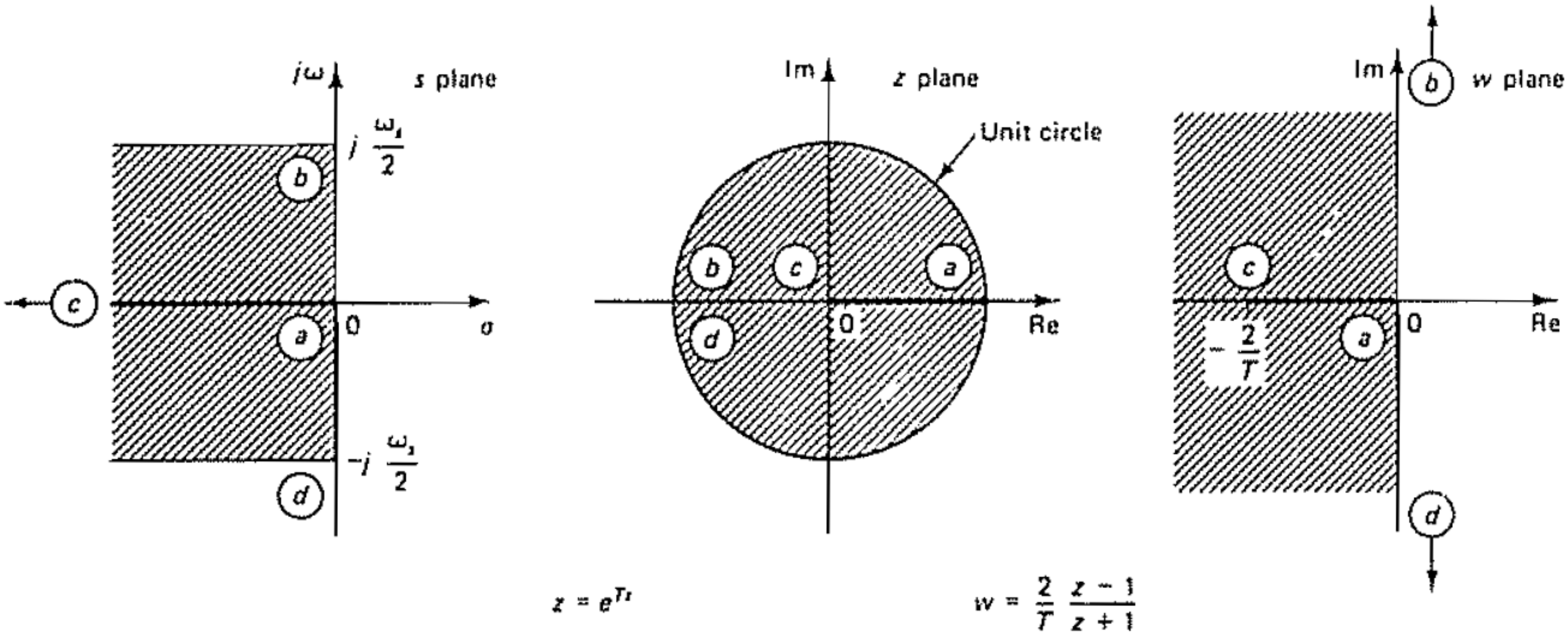
$$\boxed{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

  - Para compensar a distorção de frequência entre ω e v, utiliza-se a aproximação de Tustin com prewarping:

$$\boxed{s = \frac{v}{\tan(\omega T/2)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \qquad (12)$$

2. Método da análise em frequência

- **2.2. Transformação bilinear:**



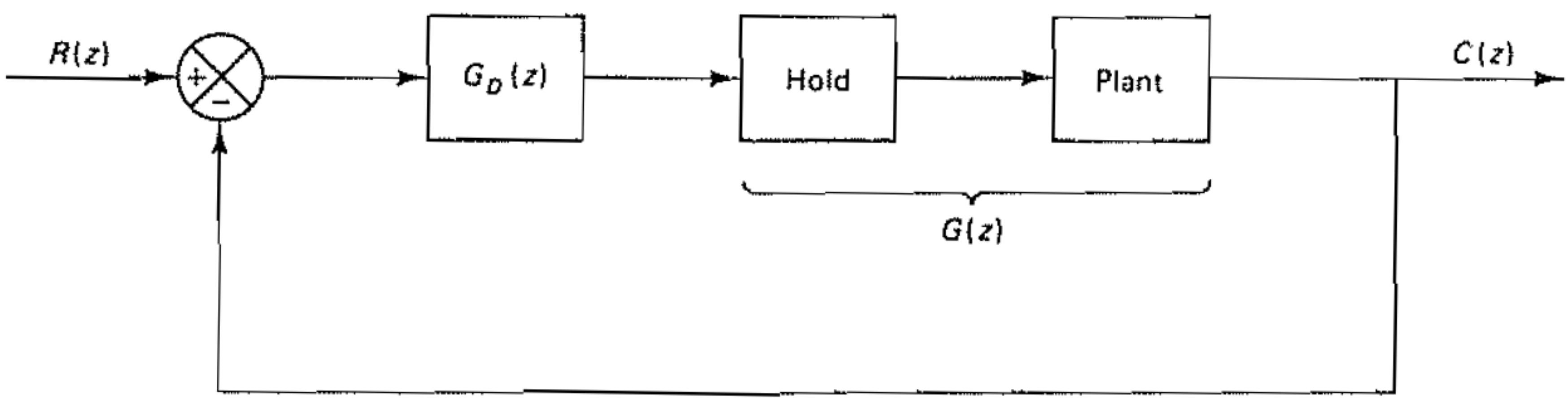
2. Método da análise em frequência

- **2.3. Diagrama de Bode:**
  - Utilizando a transformação bilinear ($s \rightarrow z \rightarrow w$), a resposta em frequência do sistema $G(j\omega)$ pode ser representada em termos de $G(j\nu) = M(\nu)e^{j\phi(\nu)}$ através do diagrama de Bode.
  - Analogamente ao caso contínuo:
    - As assíntotas em baixas frequências indicam as constantes de erro estacionário;
    - A resposta transiente é caracterizada em termos de margem de ganho, margem de fase, largura de banda, etc.

2. Método da análise em frequência

- **2.4. Projeto de compensadores em frequência:**
  - Seja a planta discreta $G(z)$ controlada por $G_D(z)$, onde G_D pode ser um compensador avanço ($0 < \alpha < 1$, análogo ao PD), atraso ($\alpha > 1$, PI), ou avanço-atraso (PID):

$$\boxed{G_D(w) = \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha \tau w}} \tag{13}$$



2. Método da análise em frequência

- **2.4. Projeto de compensadores em frequência:**
  - **1) Transformação bilinear:**
    - Sejam $G(s)$ a planta contínua e $G_h(s)$ o segurador, obter a planta discreta $G(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)KG(s)]$, onde K é um ganho em malha aberta;
    - Utilizando a transformação bilinear, calcular $G(w) = G(z)|_{z=w}$

$$\boxed{z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w}}$$

    - A frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi/T$ deve ser pelo menos 10 vezes maior do que a frequência de largura de banda do sistema em malha fechada.

2. Método da análise em frequência

- **2.4. Projeto de compensadores em frequência:**
  - **2) Diagrama de Bode:**
    - Traçar o diagrama de Bode $G(j\nu) = M(\nu)e^{j\phi(\nu)}$;
  - **3) Caracterização do sistema:**
    - Obter os valores de constante de erro estacionário (K_p, K_v ou K_a), margem de fase PM e margem de ganho GM;
    - Note que a frequência é distorcida de ω para ν. A frequência de largura de banda ω_b é transformada em

$$\boxed{\nu_b = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_b T}{2}}$$

2. Método da análise em frequência

- **2.4. Projeto de compensadores em frequência:**
  - **4) Projeto do controlador:**
    - Para o sistema sem controlador, $G_D(w) = 1$, calcular o ganho em malha aberta K que garanta o requisito de erro estacionário;
    - Utilizando os requisitos de margem de ganho e fase, dimensione os parâmetros de $G_D(w)$ (α e τ) conforme o tipo de compensador (avanço, atraso, ou avanço-atraso);
    - A planta em malha aberta será $G_D(w)G(w)$.

2. Método da análise em frequência

- **2.4. Projeto de compensadores em frequência:**
  - **5) Transformação bilinear:**
    - Converter a planta novamente ao plano z fazendo $G_D(w)G(w)|_{w=z}$

$$\boxed{w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

  - **6) Fechar a malha, avaliar a resposta do sistema com controlador, e refinar o projeto se necessário.**

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) A alocação dos polos no domínio contínuo é idêntica ao caso discreto? Por quê?
  - 2) Por que a resposta em frequência é distorcida utilizando um segurador de ordem zero?
  - 3) Um controlador projetado no domínio discreto possui a mesma resposta que um controlador contínuo discretizado por um segurador?

Questionário

- **Questionário:**
  - 4) Explique, com as suas palavras, como você faria para implementar os seguintes projetos (modelagem, simulação e realização em hardware):
    - A) Servo-controle de posição de um braço robótico;
    - B) Linha de montagem automatizada conectada por esteira;
    - C) Sistema de auto-foco (ou zoom) em uma câmera;
    - D) Controle de trajetória de um veículo autônomo (não é SISO!);
    - E) Forno inteligente para assar uma “pizza perfeita” (quais são as variáveis de entrada e saída envolvidas?);

Referências

- **Referências:**
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 22.1)** Seja o sistema $G(s)$ amostrado com um segurador de ordem zero ($T = 0.2$ s). Projete um compensador discreto $K(z)$ que proporcione fator de amortecimento $\xi = 0.5$ e tempo de estabilização (2%) de $t_{2\%} = 2$ s.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+2)}}$$

$$\boxed{K(z) = K\frac{z+\alpha}{z+\beta}}$$

Exercícios

- **Ex. 22.2)** Seja um posicionador linear com $\xi = 0.4$ e $\omega_n = 50$ rad/s. Projete um compensador que ajuste o fator de amortecimento para $\xi = 0.7$ mantendo o mesmo tempo de estabilização. O sistema é amostrado por um segurador de ordem zero ($T = 0.01$ s).

Exercícios

- **Ex. 22.3)** Para o sistema $0.1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$, obtenha $G(z)$ amostrada por um segurador de ordem zero ($T = 0.1$ s), e $G(w)$ utilizando a transformação bilinear.

Exercícios

- **Ex. 22.3)**
  - Função de transferência contínua:

$$\boxed{G(s) = \frac{10}{s + 10}}$$

  - Amostragem: ZOH, $T = 0.1$ s:

$$\boxed{G(z) = \frac{0.63}{z - 0.37}}$$

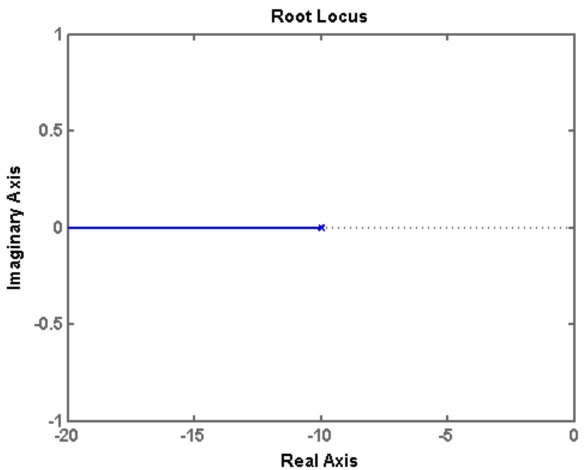
  - Conversão $z \to w$, transformação bilinear:

$$\boxed{G(w) = \frac{-0.46w + 9.24}{s + 9.24}}$$

```
wc = 1;    %Frequencia critica (rad/s)
Gw = d2c(Gz,'prewarp',wc)
```

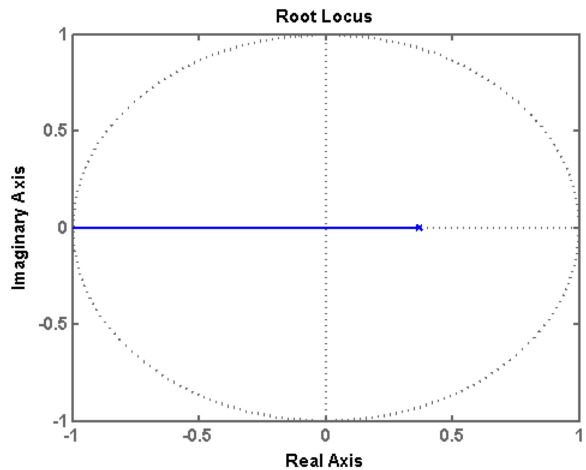
Exercícios

- **Ex. 22.3)**
  - Diagrama de lugar das raízes:



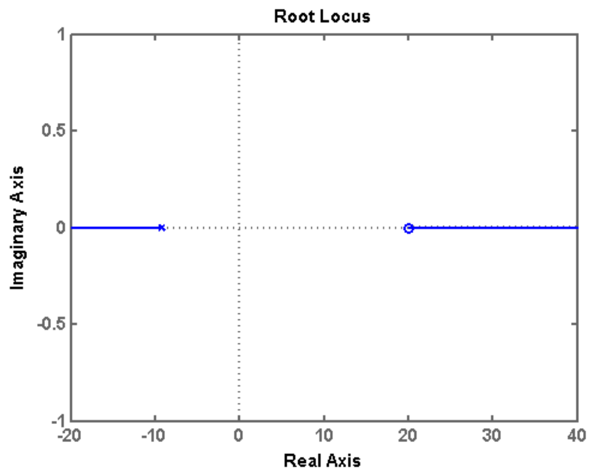
$G(s)$

$s = -10$



$G(z)$

$z = 0.37$

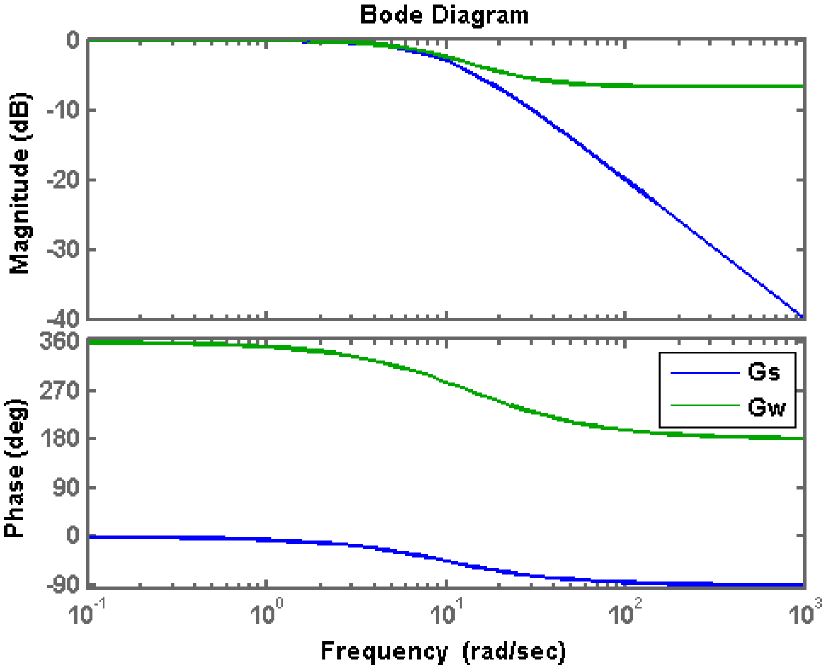


$G(w)$

$w = -9.24$

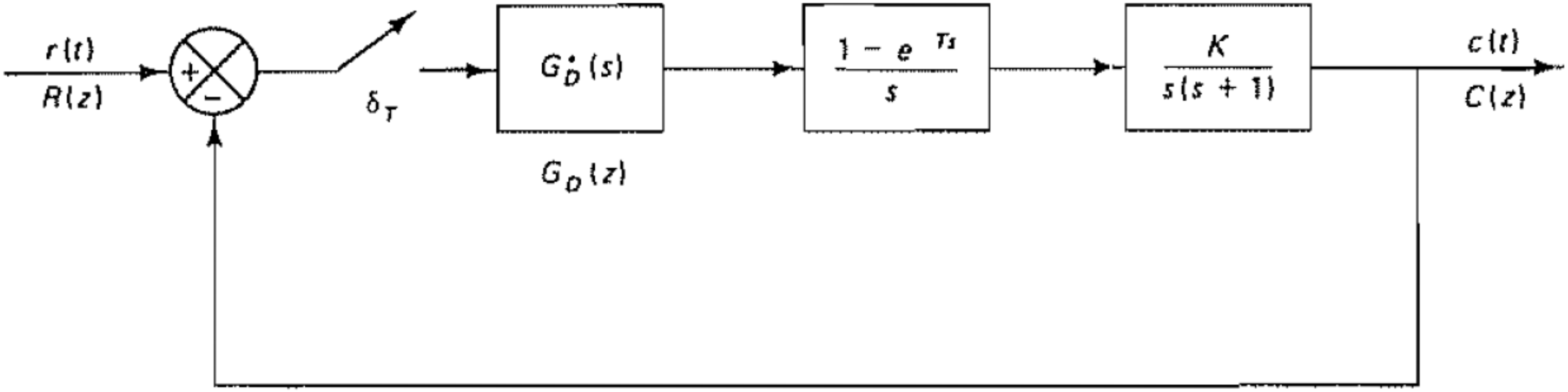
Exercícios

- **Ex. 22.3)**
  - Diagrama de Bode:
    - Note que a transformação bilinear mapeia frequências $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$, ou $\omega \leq 31.4$ rad/s no diagrama de Bode;
    - O que acontece se o período de amostragem for alterado para $T = 0.001$ s?



Exercícios

- **Ex. 22.4)** Projete um controlador digital para o sistema abaixo que proporcione margens de fase e de ganho mínimas de 50° e 10 dB, respectivamente, e um erro estático de velocidade de $K_v = 2$ m/s. O sistema é amostrado com um ZOH ($T = 0.2$ s).



Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Função de transferência contínua:

$$\boxed{G(s) = K\frac{1}{s(s+1)}}$$

  - Amostragem (ZOH):

$$\boxed{G(z) = K\frac{0.019z + 0.018}{z^2 - 1.819z + 0.819}}$$

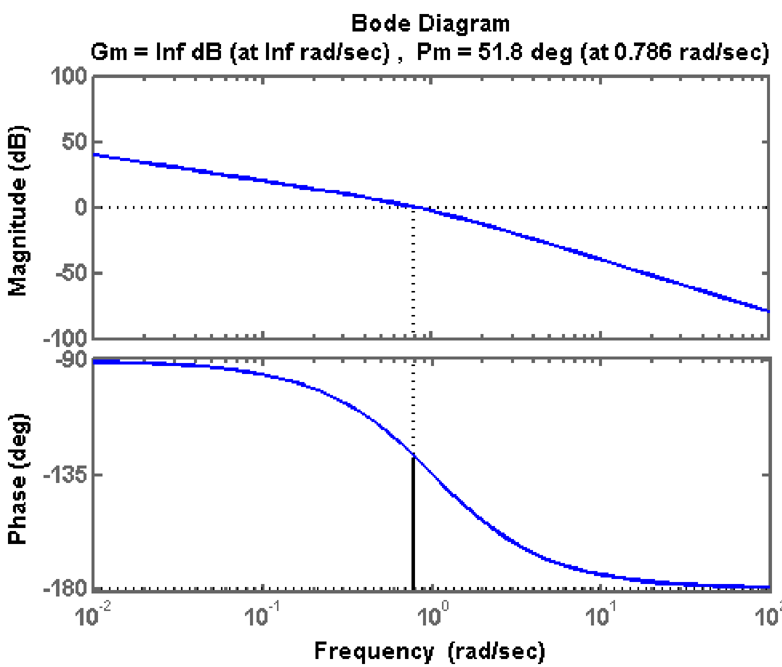
  - Transformação bilinear:

$$\boxed{G(w) = K\frac{-3.32\times 10^{-4}w^2 - 0.096w + 0.99}{w^2 + 0.993w - 3.29\times 10^{-15}}}$$

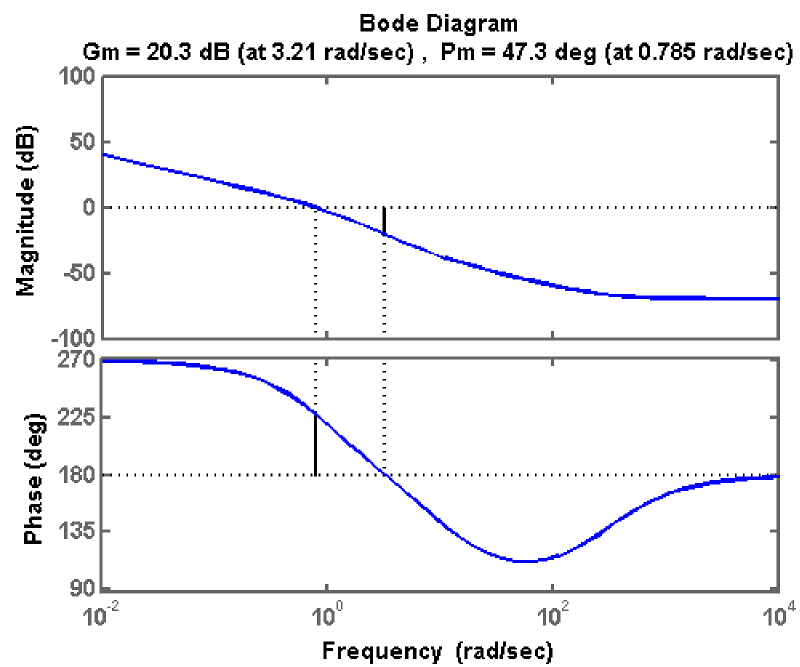
Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Margens de ganho e de fase:

$$\omega \leq \frac{1}{2}\omega_s = 15.7 \text{ rad/s}$$



$G(s)$



$G(w)$

Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Compensador avanço:
    - O compensador avanço será necessário para que o sistema atinja os requisitos de margem de fase (50°):

$$\boxed{G_D(w) = \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha \tau w}}$$

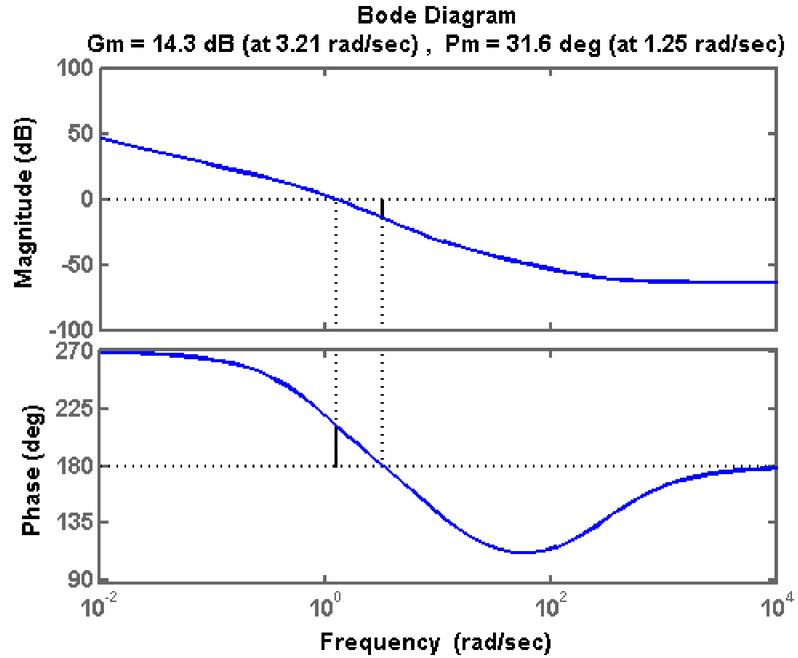
– Onde $0 < \alpha < 1$.

Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Constante de erro de velocidade:

$$\boxed{K_v = \lim_{w \to 0} wG_D(w)G(w) = K = 2}$$

  - Margens de estabilidade de $KG(w)$:
    - GM = 14.3 dB > 10 dB;
    - PM = 31.6° < 50°



Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Margem de fase necessária: assumindo uma margem de tolerância de 10°:

$$\boxed{\phi_m = 50 - 32 + 10 = 28°}$$

  - Parâmetros do compensador:

$$\boxed{\alpha = \frac{1 - \sin\phi_m}{1 + \sin\phi_m} = 0.361}$$

Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Nova frequência de cruzamento:

$$\boxed{\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1.66 = -4.42\ \text{dB}}$$

$$\boxed{v_c = v\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = 1.648\ \text{rad/s}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{v_c\sqrt{\alpha}} = 1.01}$$

  - Compensador avanço:

$$\boxed{G_D(w) = \frac{1+1.01w}{1+0.365w}}$$

Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Planta + compensador:

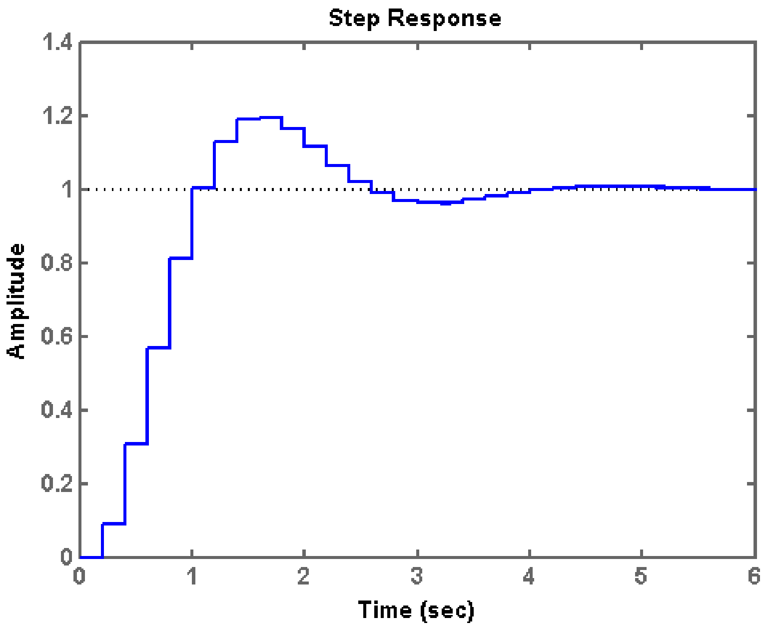
$$KG(w) = KG_D(w)G(w) = 2\left(\frac{1 + 1.01w}{1 + 0.365w}\right)G(w)$$

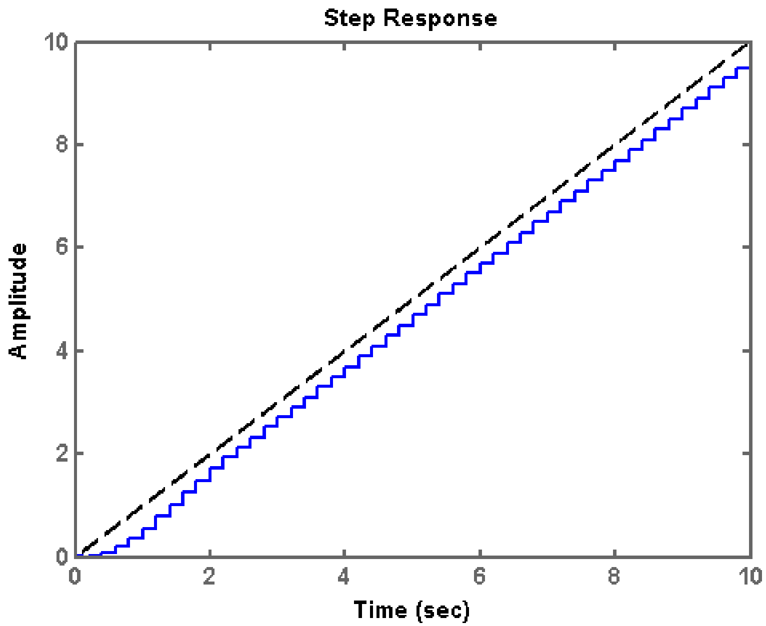
  - Conversão $w \rightarrow z$:

$$KG(z) = \frac{7.97 \times 10^{-18}z^3 + 0.09z^2 + 0.01z - 0.069}{z^3 - 2.387z^2 + 1.852z - 0.465}$$

Exercícios

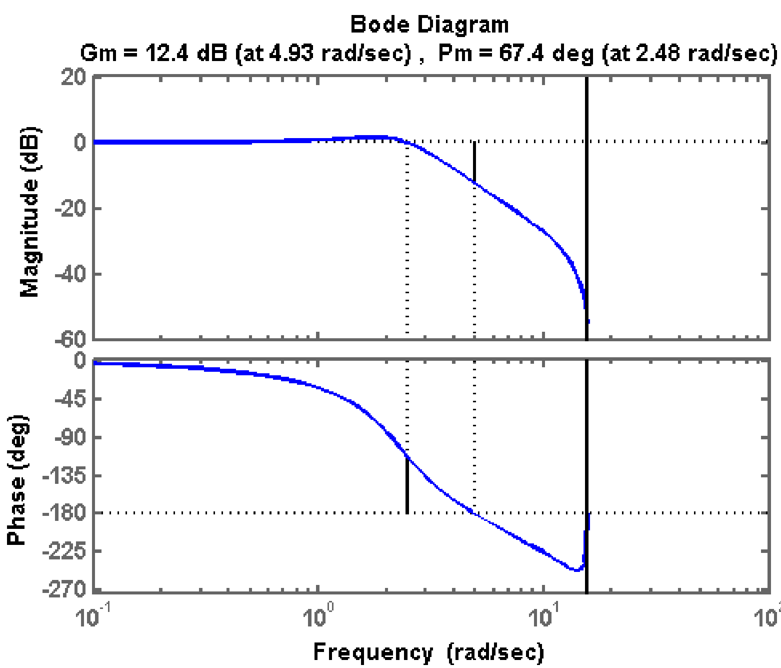
- **Ex. 22.4)**
  - Resposta em malha fechada: planta+compensador (discreto)





Exercícios

- **Ex. 22.4)**
  - Resposta em malha fechada: planta+compensador (discreto)
    - Margens de estabilidade:



$$\boxed{\omega \leq \frac{1}{2}\omega_s = 15.7 \text{ rad/s}}$$