EXERCÍCIO COMPLETO ES 728

PROJETAR PARA O SISTEMA ABAIXO UM CONTROLADOR "K" POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS E UM OBSERVADOR "L".

POLOS DO OBSERVADOR $\longrightarrow \{-6, -8\}$
POLOS DO SIST. MALHA FECHADA $\{-1, -2\}$

ENCONTRAR "K" e "L" USANDO AS FORMAS CANÔNICAS E F. DE ACKERMAN

PARTE 1 - CONTROLADOR

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} B & A*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(P) = 2 \Rightarrow$ É CONTROLÁVEL

GERANDO A FORMA CAN. "CONTROLADOR"

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ÚLTIMA LINHA $\rightarrow$ $p = [-0.25 \;\; 0.25]$

MONTANDO T

$$T = inv\left(\begin{bmatrix} p \\ p*A \end{bmatrix}\right) = inv\left(\begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \\ 2.75 & -1.75 \end{bmatrix}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

APLICANDO A TRANSF. DE SIMILARIDADE

$$\begin{cases} A_c = T^{-1} \cdot A\,T \\ B_c = T^{-1} \cdot B \\ C_c = C \cdot T \end{cases}$$

$$A_c = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \\ 2.75 & -1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

POL. CARACTERÍSTICO $\phi(s) = s^2 + 5s - 6$

$$B_c = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = C \cdot T = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}$$

MALHA FECHADA

$$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_0 & K_1 \end{bmatrix}$$

$$K_c = [K_0 \ \ K_1]$$

$$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (6 - K_0) & (-5 - K_1) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ POL. CARACTERÍSTICO DE MALHA FECHADA

$$\Rightarrow \phi(s) = s^2 + (5+k_1)s + (k_0 - 6)$$

POL. CARAC. DESEJADO P/ M.F.

$$\phi_{DES}(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\begin{cases} 5 + k_1 = 3 & \rightarrow k_1 = -2 \\ k_0 - 6 = 2 & \rightarrow k_0 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_c = \begin{bmatrix} 8 & -2 \end{bmatrix}$$

VOLTANDO PARA A FORMA ORIGINAL

$$K = K_c \cdot T^{-1}$$

$$K = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \\ 2.75 & -1.75 \end{bmatrix} =$$

$$K = \begin{bmatrix} -7.5 & 5.5 \end{bmatrix}$$

VERIFICANDO $\rightarrow$ EIG(A − BK) =

$$\text{EIG}\left(\begin{bmatrix} 11.5 & -7.5 \\ 22.5 & -14.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$$

CHECAR PELA F. DE ACKERMAN

$K = [0 \ 1] \cdot P^{-1} \cdot \phi_{DES}(A)$

$\phi_{DES}(A) = A^2 + 3A + 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -30 & 26 \end{bmatrix}$

$K = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -30 & 26 \end{bmatrix} = [-7.5 \ 5.5]$

OK

PARTE 2 – OBSERVADOR

SOLUÇÃO (a) – USANDO F. CAN. "OBSERVADOR"

MATRIZ DE OBSERVABILIDADE

$Q = \begin{bmatrix} C \\ C*A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

→ RANK 2 → OBSERVÁVEL

TRANSF. DE SIMILARIDADE PARA LEVAR

À FORMA CAN. "OBSERVADOR"

$$invQ = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

TOME AGORA A ÚLTIMA COLUNA

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$ E CONSTRUA

$$T = \begin{bmatrix} q & A*q \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

POL. CARACTER.

$$B_0 = T^{-1}.B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = C.T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROJETANDO O GANHO $L_0 = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}$

DO OBSERVADOR

$$(A_0 - L_0 C_0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 - l_0 \\ 1 & -5 - l_1 \end{pmatrix}$$

POL. CARAC. $\Rightarrow s^2 + (5 + l_1)s + (l_0 - 6)$

POL. CARAC. DESEJADO $\Rightarrow s^2 + 14s + 48$

... VEM DE $(s+6).(s+8)$

$$\begin{cases} 5 + l_1 = 14 \Rightarrow l_1 = 9 \\ l_0 - 6 = 48 \Rightarrow l_0 = 54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_0 = \begin{bmatrix} 54 \\ 9 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMANDO DE VOLTA :

$$L = T \, . \, L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 4.5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 54 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13.5 \end{bmatrix}$$

CONFERINDO

$$\text{EIG}(A - LC) = \text{EIG}\left(\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1.5 & -9 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} -6 \\ -8 \end{cases}$$

CHECANDO PELA F. ACKERMAN

NESSE CASO TEMOS DE USAR
A FORMA DUAL POIS ACKERMAN
É FEITO PARA PROJETO DE CONTROLE

ASSIM USAREMOS $\longrightarrow$ "A" $\longleftarrow$ A^T
"B" $\longleftarrow$ C^T

NOSSA "MATRIZ" DE CONTROLABILIDADE
SERIA

$$\bar{P} = [\text{"B"} \ \ \text{"A.B"}] = [C' \ \ A'C']$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{DES}(A') = A'^2 + 14A' + 48.I = \begin{bmatrix} 90 & 135 \\ -18 & -27 \end{bmatrix}$$

ASSIM:

$$L' = [0\ 1].\mathrm{inv}(\bar{P}).\phi_{DES}(A')$$

$$L' = [9 \quad 13.5]$$

$$L = \begin{bmatrix} 9 \\ 13.5 \end{bmatrix}$$

OK

SOLUÇÃO (b)

PROJETANDO O OBSERVADOR USANDO A FORMA DUAL E A F. CANÔNICA "CONTROLADOR"

FORMA DUAL $\begin{cases} "A" \leftarrow A' \\ "B" \leftarrow C' \\ "C" \leftarrow B' \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} B & A*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$p = [0 \quad -0.5]$$

$$T = \begin{bmatrix} p \\ p*A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 4.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_c = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

$B_c = T^{-1} . B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C_c = C . T = [7 \quad 1]$

MESMOS DA PARTE 1 !!! EMBORA T SEJA $\neq$

PROJETANDO O GANHO

$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (6 - K_0) & (-5 - K_1) \end{bmatrix}$

$\phi(s) = s^2 + (5 + K_1) s + (K_0 - 6)$

$\phi_{DES}(s) = (s+6)(s+8) = s^2 + 14 s + 48$

$\Rightarrow K_0 = 54 \quad K_1 = 9$

$K_c = [54 \quad 9]$

VOLTANDO NA TRANSF. $\Rightarrow$

$K = K_c . T^{-1} = [9 \quad 13.5]$

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 9 \\ 13.5 \end{bmatrix}$ ✓

Matrizes Dinâmicas do Modelo Completo (Controlador+Planta+Observador)

A_global =

	x1	**x2**	**x3**	**x4**
x1	11.5	-7.5	-7.5	5.5
x2	22.5	-14.5	-7.5	5.5
x3	0	0	-5	-2
x4	0	0	1.5	-9

B_global =

x1	1
x2	1
x3	0
x4	0

C_global =

	x1	**x2**	**x3**	**x4**
y1	1	0	0	0

D_global = 0

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\overline{N} \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} r$$

```
Nbar=1;
Ace=[(A-B*K) (B*K);
     zeros(size(A)) (A-L*C)];
Bce = [B*Nbar;
       zeros(size(B))];
Cce = [C zeros(size(C))];
Dce = [0];
```