ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

05 – Análise no tempo: sistema de primeira ordem

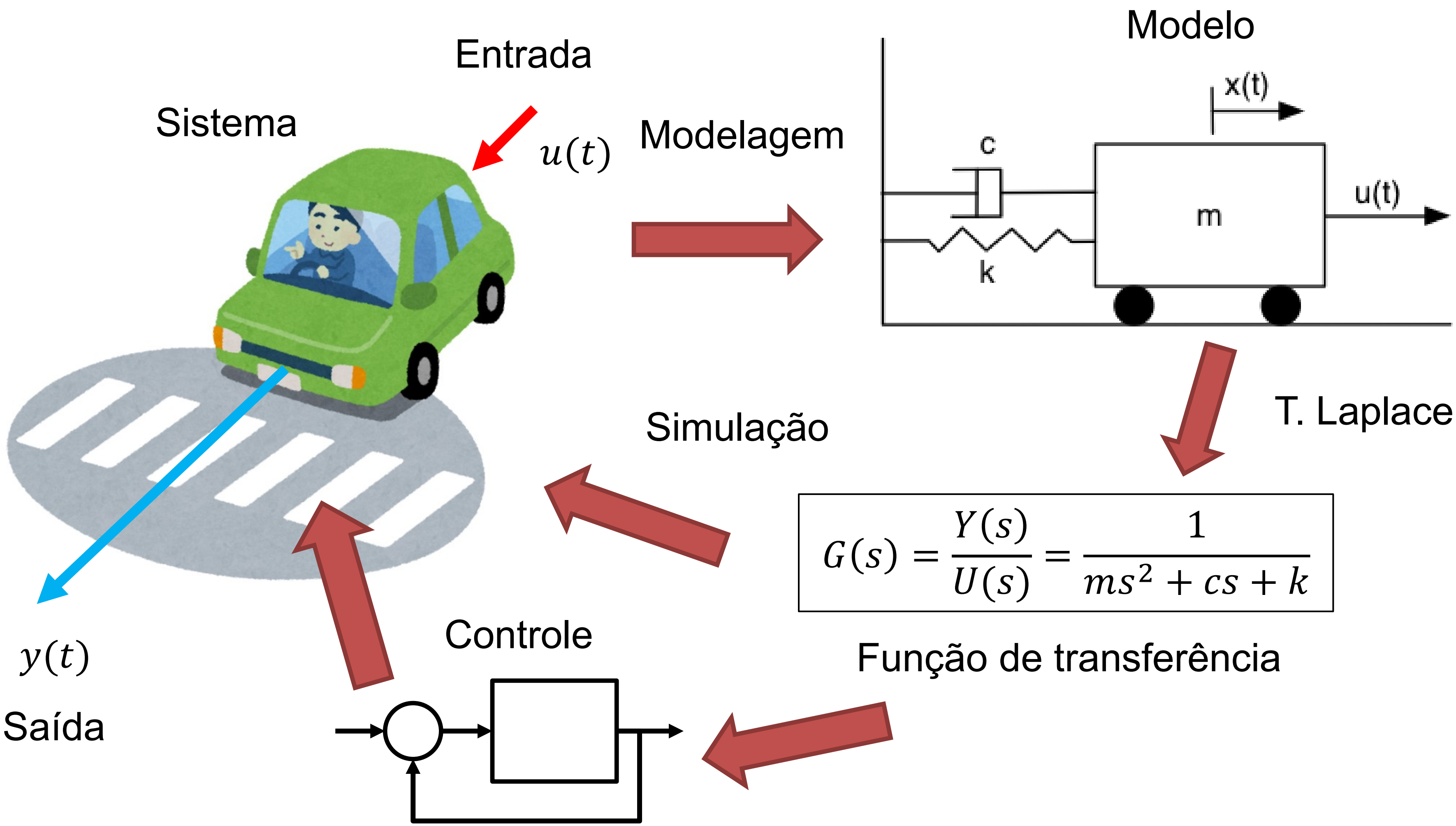
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Resposta no tempo;
  - 2) Sistema de primeira ordem;
  - 3) Resposta ao degrau;
  - 4) Resposta à rampa;
  - 5) Resposta ao impulso;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Modelagem e controle



1. Resposta no tempo

- **1.1. Resposta transiente e estacionária:**
  - Um sistema LTI excitado por um sinal $u(t)$ produz uma saída $y(t)$ com característica similar à entrada;
  - A resposta $y(t)$ varia no tempo e pode ser representada pela combinação linear de uma componente **transiente** $y_{tr}(s)$ e uma componente de **regime estacionário** $y_{ss}(s)$:

$$\boxed{y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)} \tag{1}$$

  - Quando $t \to \infty$, a resposta transiente evanesce $y_{tr}(\infty) = 0$ e a saída do sistema tende à resposta estacionária $y(\infty) = y_{ss}(\infty)$.

2. Sistema de primeira ordem

- **2.1. Sistema de primeira ordem:**
  - Um **sistema de primeira ordem** é caracterizado por

$$\boxed{a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)} \quad (2)$$

$$\boxed{\tau\dot{y}(t) + y(t) = u(t)} \quad (3)$$

  - $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ é a **constante de tempo** do sistema (s).

2. Sistema de primeira ordem

- **2.2. Função de transferência:**
  - Aplicando a transformada de Laplace:

$$\boxed{Y(s)(\tau s + 1) \; = U(s)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}} \qquad (4)$$

    - O sistema de primeira ordem apresenta um polo real em $s = -\frac{1}{\tau}$;
  - Seja $Y(s) = G(s)U(s)$, uma vez determinado $G(s)$ é possível simular a resposta do sistema $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ para uma entrada $U(s) = \mathcal{L}\,[u(t)]$ conhecida.

3. Resposta ao degrau

- **3.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - Seja um sinal do tipo degrau unitário e sua transformada de Laplace:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = 0, & t < 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{array}} \qquad \boxed{U(s) = \frac{1}{s}} \tag{5}$$

  - A resposta do sistema de primeira ordem é calculada por

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s}}$$

3. Resposta ao degrau

- **3.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - Re-arranjando:

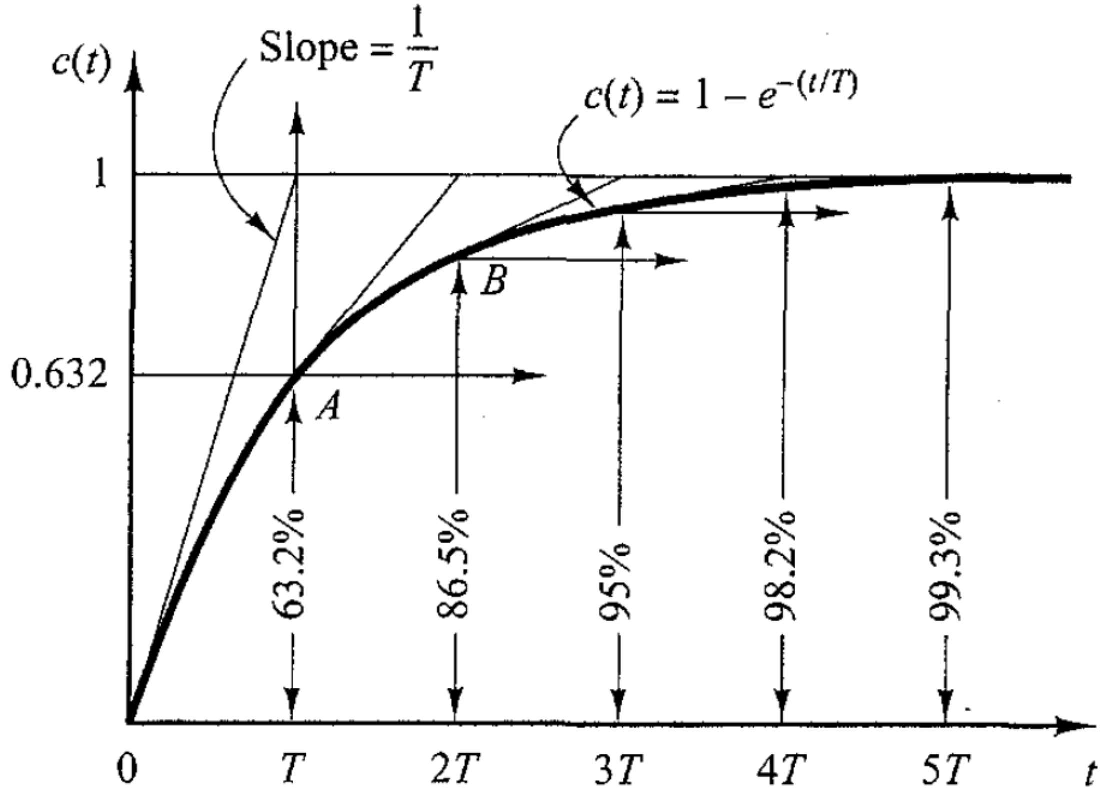
$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\frac{1}{s}}$$

    - $Y(s)$ possui dois polos: $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ e $p_2 = 0$;
  - Calculando a transformada de Laplace inversa ($t \geq 0$, $y(0) = 0$):

$$\boxed{y(t) = \underbrace{1}_{\text{Resposta estacionária}} - \underbrace{e^{-t/\tau}}_{\text{Resposta transiente}}} \tag{6}$$

3. Resposta ao degrau

- **3.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - Quanto maior a constante de tempo τ, mais tempo o sistema demora para atingir o valor final;
  - (A subida fica mais lenta).



3. Resposta ao degrau

- **3.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - Observações:
    - A saída do sistema tende à resposta estacionária $y_{ss} = 1$ quando $t \to \infty$:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} y(t) = 1}$$

    - Quando $t = \tau$, a saída atinge 63,2% do valor final:

$$\boxed{y(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 1 - \frac{1}{e} = 0.6321}$$

3. Resposta ao degrau

- **3.2. Identificação de um sistema à partir da resposta ao degrau:**
  - Seja um **sistema de primeira ordem** excitado por uma função do tipo degrau. Para identificar o sistema experimentalmente:
    - 1) Transladar o eixo do tempo para que o degrau inicie em $t = 0$ (opcional);
    - 2) Normalizar a saída para que o degrau seja unitário (opcional);
    - 3) Verificar o valor de tempo ($t = \tau$) para o qual a saída atinge 63,2% do valor final;
    - 4) Conhecendo τ, basta determinar a função de transferência $G(s)$;
  - **Obs:** uma vez determinada a TF pela resposta ao degrau, o sistema pode ser testado para qualquer entrada (a TF é uma propriedade do sistema, e não da entrada).

4. Resposta à rampa

- **4.1. Resposta à rampa unitária:**
  - Função rampa unitária:

$$\begin{array}{ll} r(t) = 0, & t < 0 \\ r(t) = t, & t \geq 0 \end{array} \qquad\qquad R(s) = \frac{1}{s^2} \tag{7}$$

  - A resposta do sistema:

$$Y(s) = G(s)U(s) \ = \frac{1}{\tau}\frac{1}{(s+\frac{1}{\tau})}\frac{1}{s^2}$$

    - $Y(s)$ possui um polos simples $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ e um polo duplo $p_2 = 0$;
    - Dica: resíduo de um polo duplo: $z = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds}[(s - s_0)^2 y(s) e^{st}]$

4. Resposta à rampa

- **4.1. Resposta à rampa unitária:**
  - Resposta no tempo ($t \geq 0$ e condições iniciais nulas):

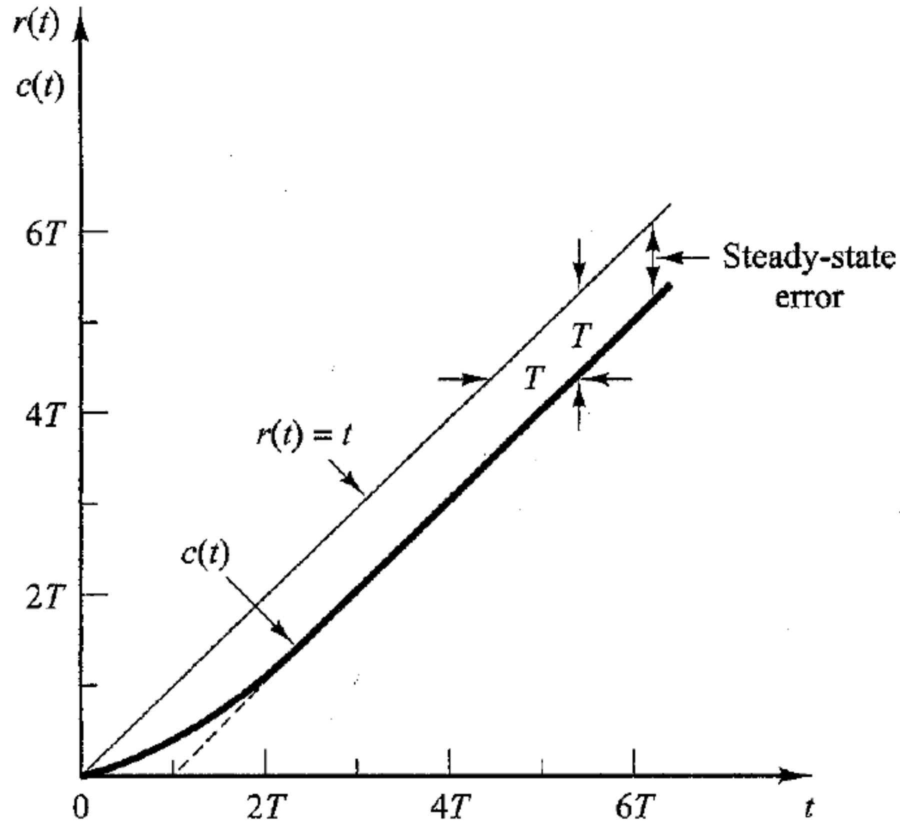
$$\boxed{y(t) = \underbrace{t - \tau}_{\text{Resposta estacionária}} + \underbrace{\tau e^{-t/\tau}}_{\text{Resposta transiente}}} \tag{8}$$

  - Quando $t \to \infty$, $y(t)$ tende a acompanhar $u(t)$ com um offset constante τ:

$$\boxed{e\,(t)\Big|_{t\to\infty} = [u\,(t) - y(t)]\Big|_{t\to\infty} = \tau}$$

4. Resposta à rampa

- **4.1. Resposta à rampa unitária:**
  - Quanto maior a constante de tempo, maior será a diferença entre os sinais de entrada e de saída;
  - (Aumenta o erro estacionário do sistema).



5. Resposta ao impulso

- **5.1. Resposta ao impulso unitário:**
  - Função “impulso unitário”:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(t) = 0, & t \neq 0 \\ f(t) = 1, & t = 0 \end{array}} \qquad \boxed{F(s) = 1} \tag{9}$$

  - Resposta do sistema:

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s) \ = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}}$$

    - $Y(s)$ possui um polos simples $p_1 = -\frac{1}{\tau}$;
    - Nota-se que **a resposta ao impulso é a própria planta** $G(s)$.

5. Resposta ao impulso

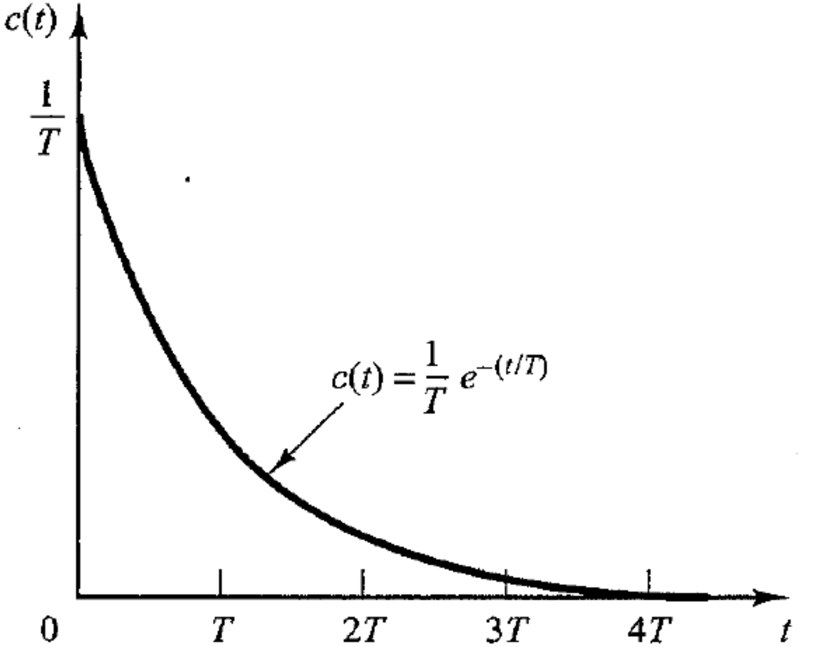
- **5.1. Resposta ao impulso unitário:**
  - Resposta no tempo ($t \geq 0$ e condições iniciais nulas):

$$\boxed{y(t) = \underbrace{0}_{\text{Resposta estacionária}} + \underbrace{\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}_{\text{Resposta transiente}}} \tag{10}$$

  - A resposta ao impulso unitário é a própria função de transferência do sistema.

5. Resposta ao impulso

- **5.1. Resposta ao impulso unitário:**
  - Quanto maior a constante de tempo, mais o sistema demora para atingir o valor final.



5. Resposta ao impulso

- **5.2. Relação entre respostas ao impulso, degrau e rampa:**
  - Válido para sistemas LTI.

$$y(t) = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$

Resposta à rampa

s $\qquad$ $\frac{1}{s}$

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

Resposta ao degrau

s $\qquad$ $\frac{1}{s}$

$$y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Resposta ao impulso

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Qual é o significado físico da constante de tempo de um sistema primeira ordem?
  - 2) Por que a integral da resposta ao impulso é igual à resposta ao degrau do sistema? E por que a integral da resposta ao degrau é igual à resposta à rampa?
  - 3) Suponha que você deseja identificar experimentalmente um sistema eletromecânico (entrada elétrica e saída mecânica):
    - Como determinar se o sistema é de primeira ordem?
    - Como determinar os parâmetros do modelo a_0, a_1 e τ?

Referências

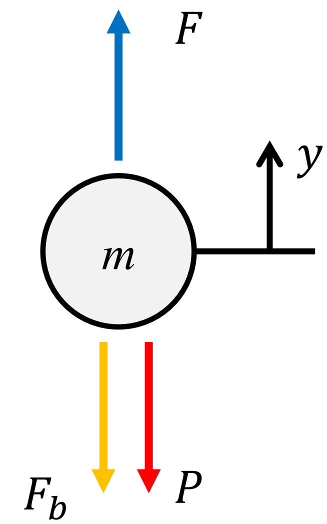
- **Referências:**

  - R. S. Figliola, D. E. Beasley, Theory and Deisign for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex 5.1)** Seja um drone de massa m sujeito a uma força de propulsão F e à força de arrasto $F_b = bv = b\dot{y}$. Assuma que o drone só consegue se mover na direção vertical y.
  - a) Obtenha a TF do sistema $G(s) = V(s)/F(s)$;
  - b) Obtenha a resposta ao impulso, ao degrau, e à rampa unitária.
  - Dados do modelo:
    - $m = 0.8$ kg;
    - $b = 0.4$ N.s/m.



Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Equilíbrio de forças:

$$\boxed{m\dot{v}(t) = F(t) - F_b(t) - P}$$

$$\boxed{m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t) - mg = u(t)}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{V(s)[ms + b] = U(s)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} = \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{m}{s}\right)s + 1}}$$

$$\boxed{U(s) = F(s) - mg}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s}V(s)}$$

Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Parâmetros do sistema de primeira ordem:

$$\boxed{G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{m}{s}\right)s + 1}}$$

- $a_1 = m = 0.8$ kg;
- $a_0 = b = 0.4$ N.s/m;
- $\tau = \frac{m}{b} = 2$ s;
- $K = \frac{1}{b} = 2.5$.

Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Implementação no MATLAB:

```
%Parametros do modelo
m = 0.8;
b = 0.4;
g = 9.81;
tau = m/b
K = 1/b

%Funcao de transferencia
s = tf('s');
Gs = K/(tau*s+1)
Gs = Gs/K     %Normalizado
```

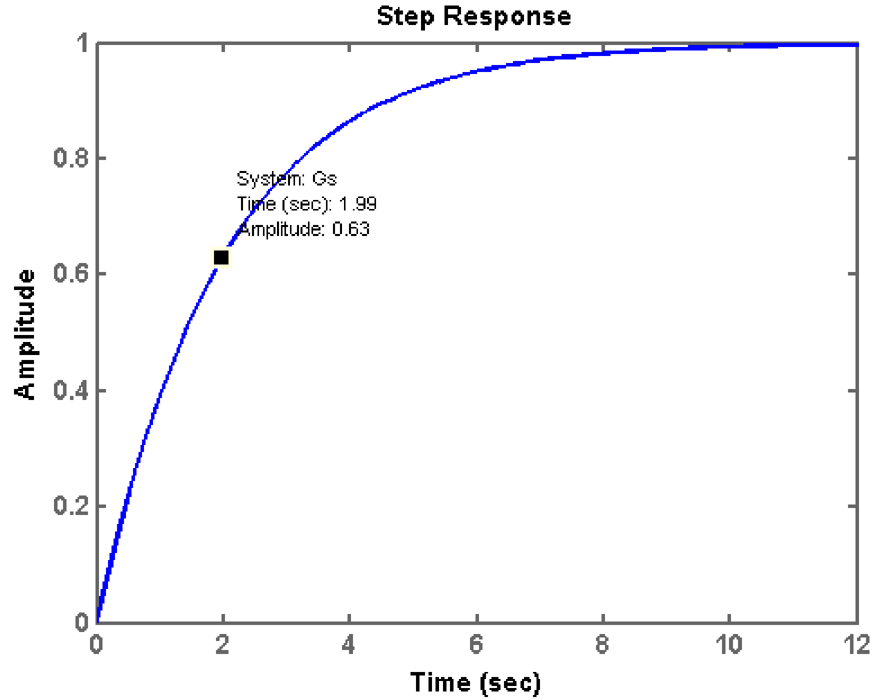
```
%Resposta ao degrau
figure
step(Gs)

%Resposta ao impulso
figure
impulse(Gs)

%Resposta a rampa
figure
step(Gs/s)
```

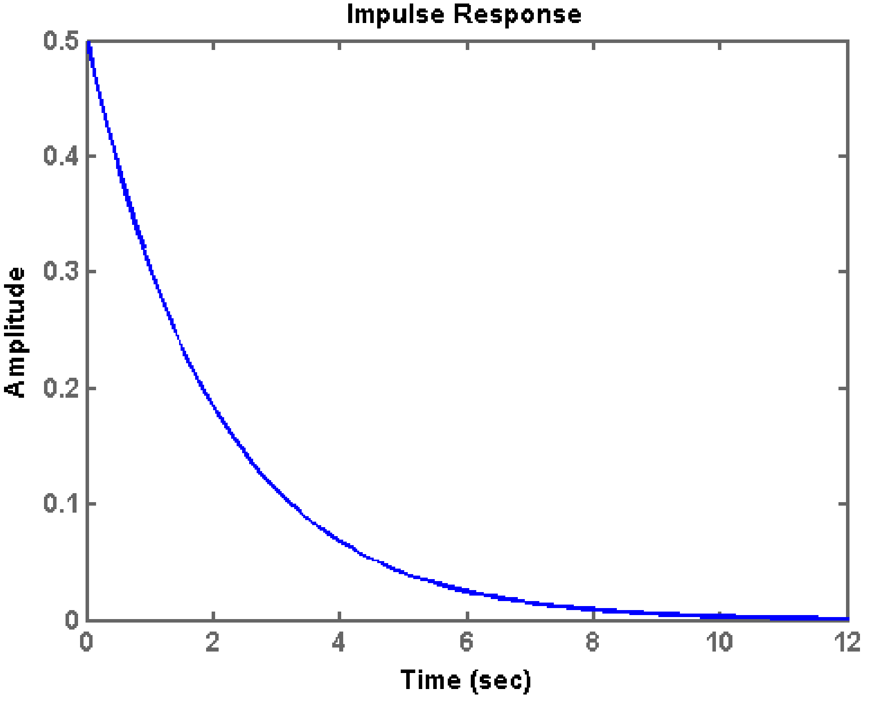
Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Resposta ao degrau:
    - Em $t = \tau = 2$ s, a saída atinge 63% do valor final;
    - Note que a planta foi normalizada para que a saída seja unitária;
    - Note que a força aplicada é $u(t) = F(t) - mg$;



Exercícios

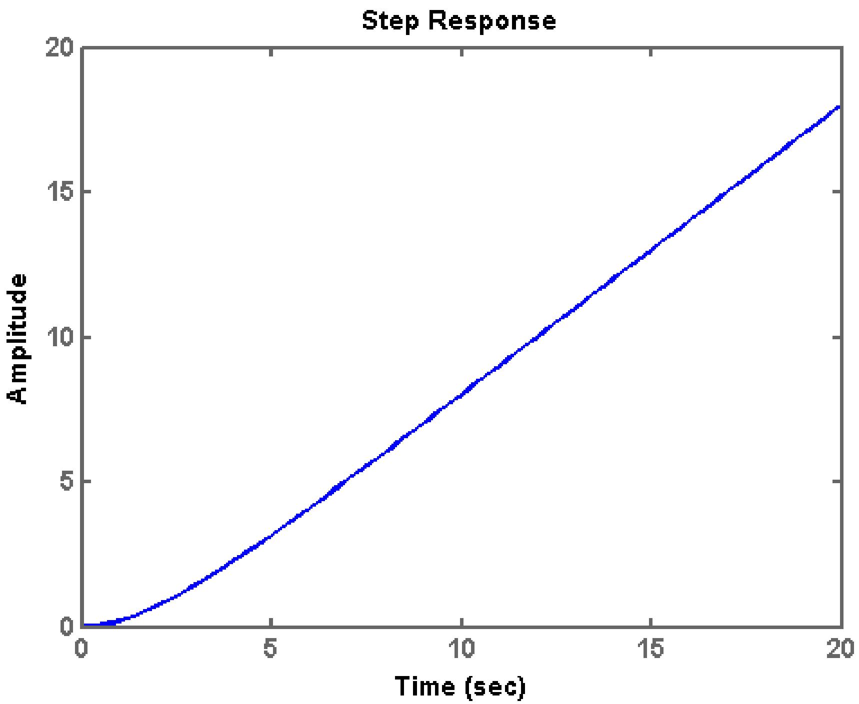
- **Ex 5.1)**
  - Resposta ao impulso:
    - O valor final tende a zero para $t \rightarrow \infty$.



Exercícios

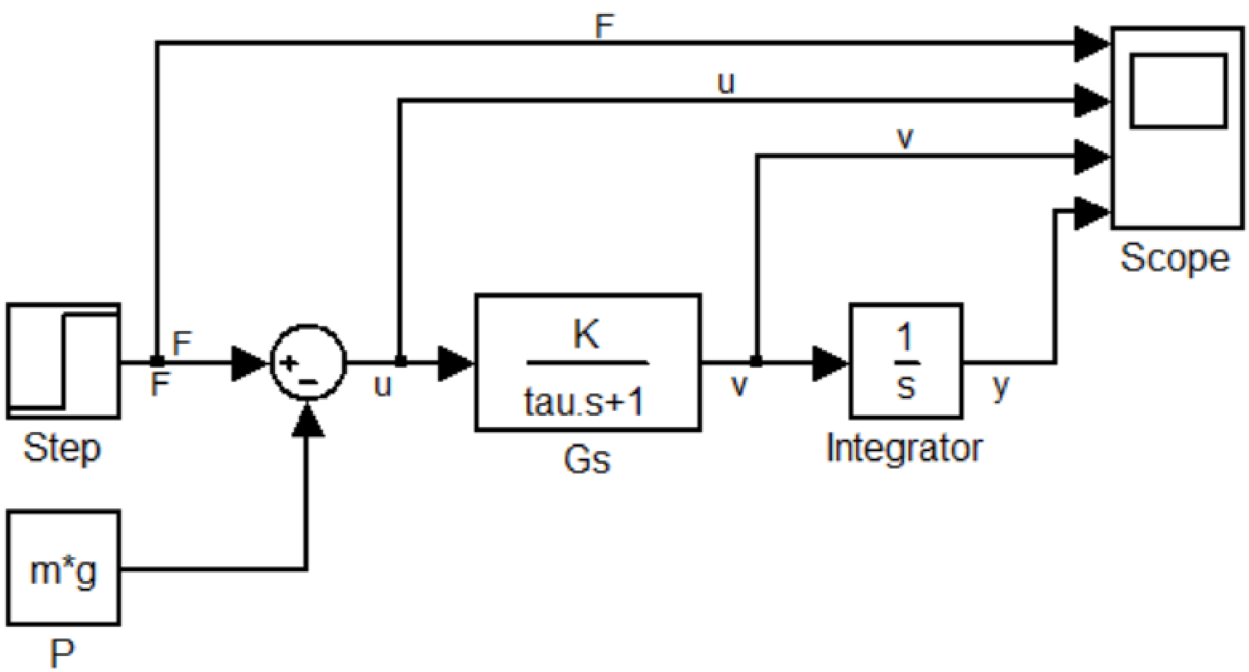
- **Ex 5.1)**
  - Resposta à rampa:
    - A resposta do sistema acompanha a rampa unitária de entrada.
    - Sugestão: plotar a rampa unitária de entrada como referência:

```
figure
step(Gs/s)
hold on
plot([0 20],[0 20],'k:')
hold off
```



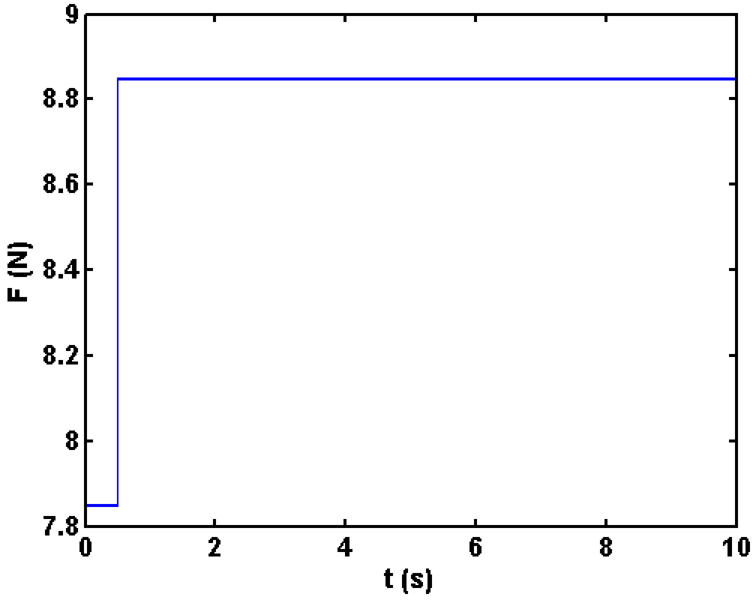
Exercícios

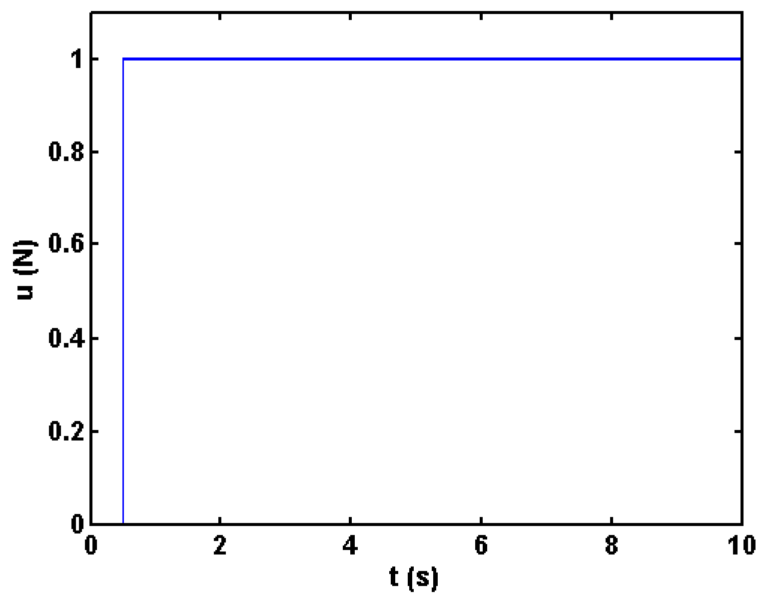
- **Ex 5.1)**
  - Implementação no Simulink:



Exercícios

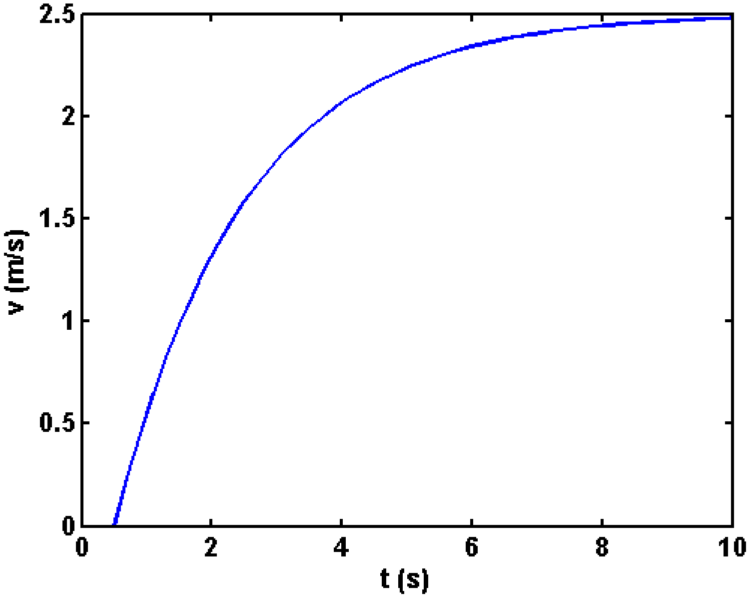
- **Ex 5.1)**
  - Resposta ao degrau: força de propulsão $F(t)$ e esforço unitário $u(t)$. Foi aplicado um offset de mg em $F(t)$ para garantir sustentação ao drone no repouso.

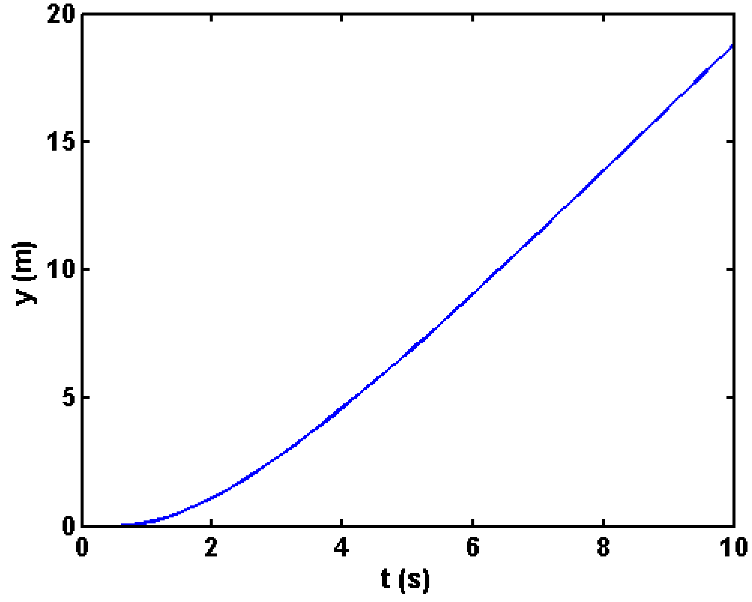




Exercícios

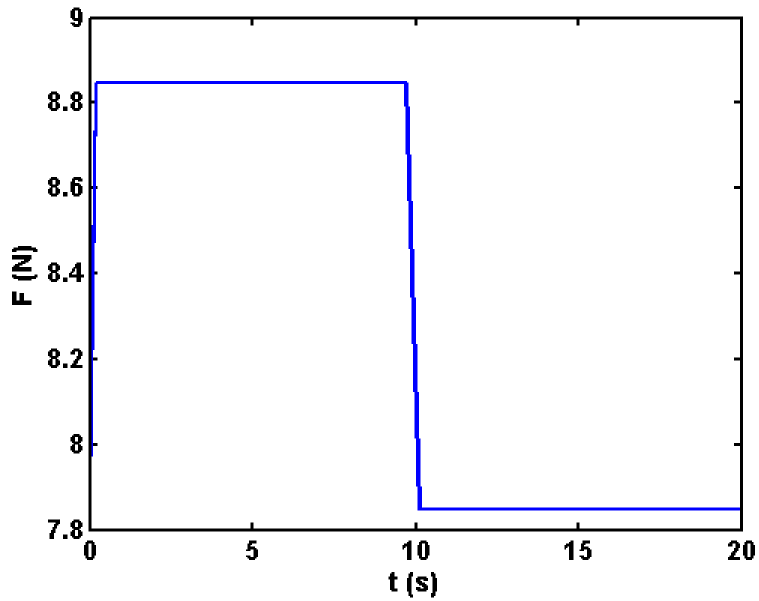
- **Ex 5.1)**
  - Resposta ao degrau: velocidade $v(t)$ e altitude $y(t)$. A velocidade segue o sinal de entrada. Como a velocidade é constante, o drone continua subindo.





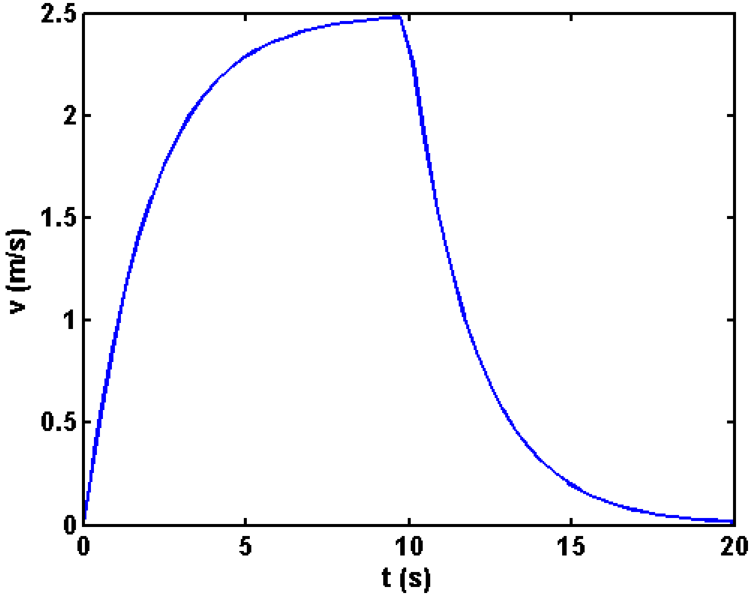
Exercícios

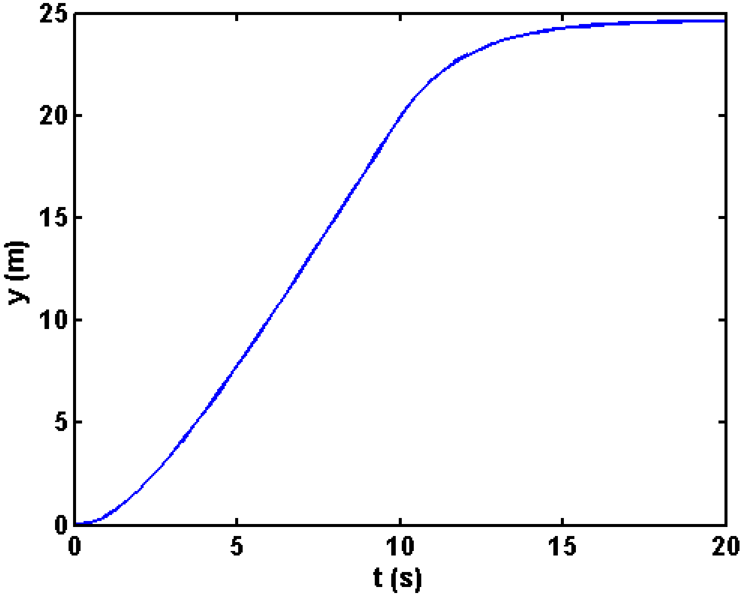
- **Ex 5.1)**
  - Para manter a altitude do drone constante, pode-se aplicar um perfil trapezoidal de velocidade, lembrando de manter o offset de mg para compensar o peso.



Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Perfis de velocidade e altitude:



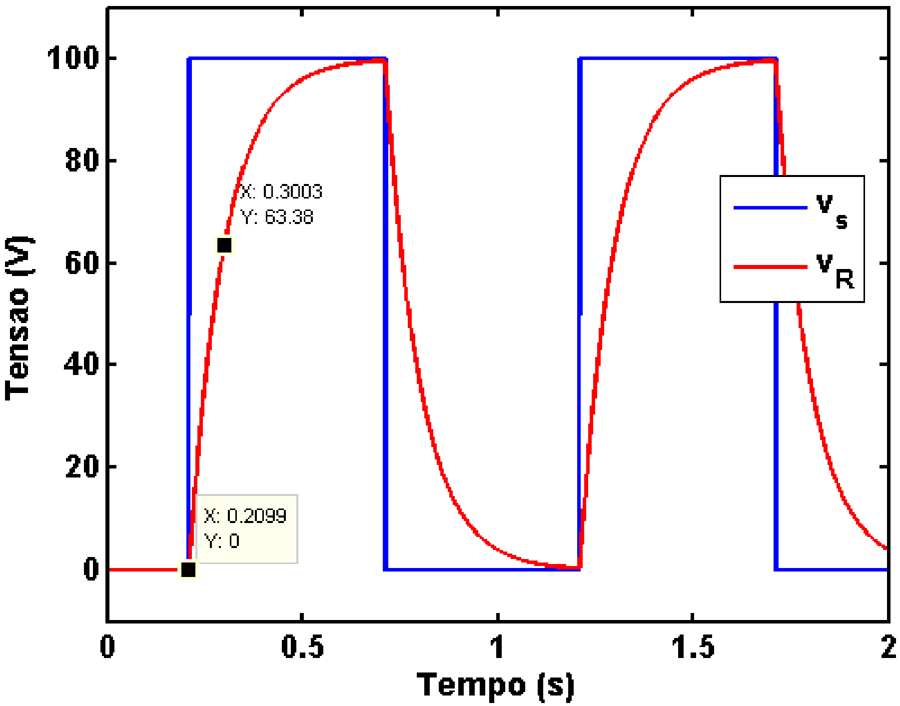


Exercícios

- **Ex 5.1)**
  - Comentários:
    - A entrada do sistema é a força de propulsão $F(t)$ e a saída é a velocidade de subida $v(t)$;
      - Na verdade, a força é a velocidade de rotação das hélices, ou a tensão aplicada nos motores;
    - **Na prática, você acha conveniente controlar a velocidade a partir de um sinal de força?**
    - **Solução:** desenvolver um **controlador** que, dada uma velocidade desejada $v^*(t)$, produza uma força $F(t)$ de modo a garantir que o drone se mova com uma velocidade $v(t) = v^*(t)$.

Exercícios

- **Ex 5.2)** Seja um circuito RL em série excitado por um trem de pulsos v_s de amplitude 100 V.
  O gráfico ao lado mostra a tensão no resistor v_R medida com um osciloscópio.
  Obtenha a função de transferência que relaciona a corrente de saída $i(t)$ com a tensão de entrada $v_s(t)$, $G(s) = I(s)/V_s(s)$.
  - Resistência medida com multímetro: $R = 15\ \Omega$.



Exercícios

- **Ex 5.2)**
  - Circuito RL série:

$$\boxed{V_s(s) = [sL + R]I(s)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{I(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{sL + R} = K\frac{\frac{1}{R}}{\tau s + 1}}$$

$$\boxed{\frac{V_R(s)}{V_s(s)} = RG(s) = K\frac{1}{\tau s + 1}}$$

Exercícios

- **Ex 5.2)**
  - Constante de tempo:

$$\boxed{\tau = t_{63.2\%} - t_0 = 0.299 - 0.209 = 0.09\ \mathrm{s}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = 1.35\ \mathrm{H}}$$

  - Ganho:
    - Normalizando a entrada ($v_s/100$), a saída também se torna unitária, com valor de estabilização $v_R(t \to \infty) = 1$ V. Portanto, $K = 1$;

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{I(s)}{V_s(s)} = \frac{0.067}{0.09s + 1}}$$