ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

21 – Mapeamento entre os planos s e z

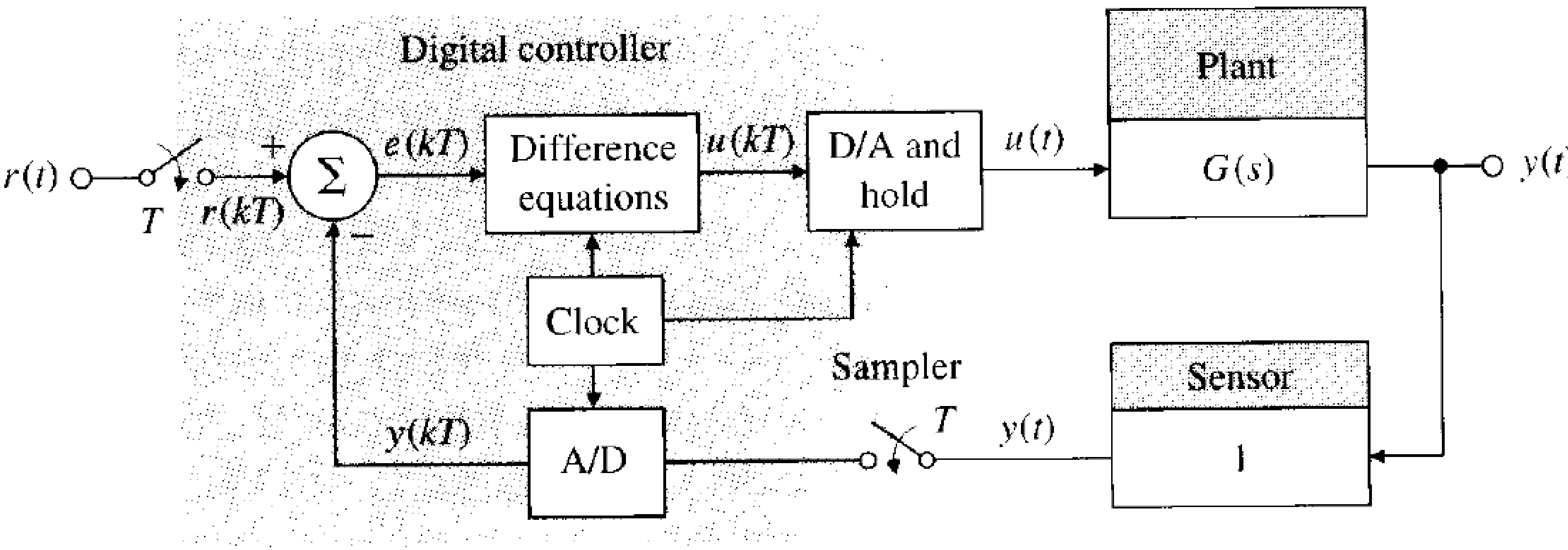
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Mapeamento s-z;
  - 2) Estabilidade;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Controle discreto



1. Mapeamento s-z

- **1.1. Introdução:**
  - Na aula anterior, foi abordada a implementação de controladores discretos através da amostragem por impulsos e discretização pela transformada Z;
  - Nesta aula, será apresentado o mapeamento entre os planos s (Laplace) e z, bem como as implicações de estabilidade e características de resposta transiente e estacionária.

1. Mapeamento s-z

- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - Seja a conversão entre as variáveis da transformada de Laplace e da transformada Z baseada na amostragem por impulsos:

$$\boxed{z = e^{Ts}} \qquad \boxed{s = \frac{1}{T}\ln z} \tag{1}$$

  - Onde,

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$\boxed{z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma}e^{j(T\omega + 2\pi k)} = |e^{T\sigma}|\angle(T\omega + 2\pi k)} \tag{2}$$

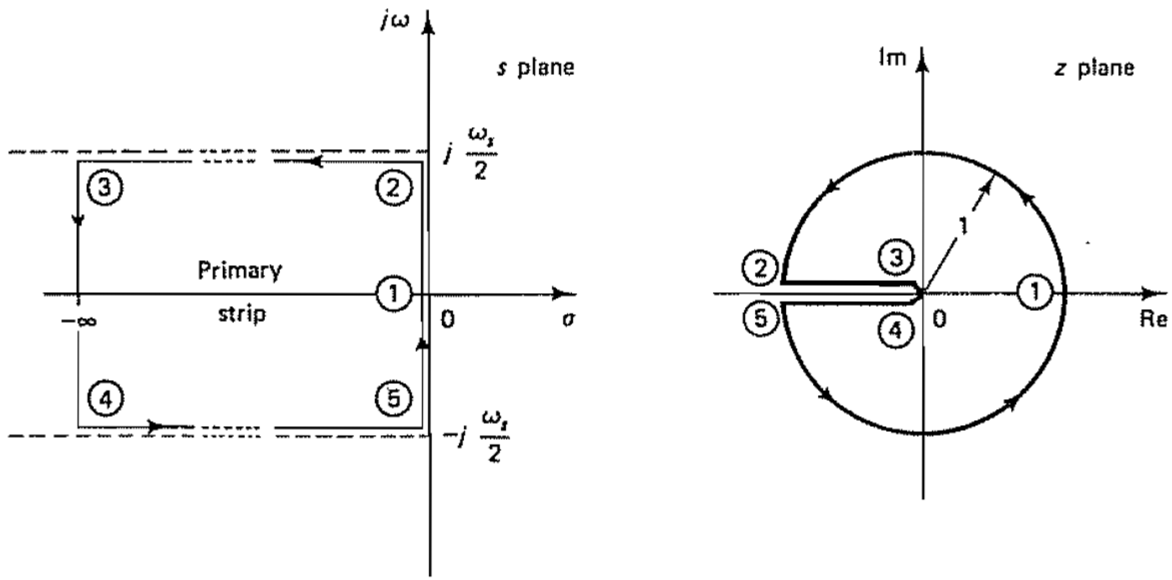
    - Os polos e zeros em s são mapeados como valores periódicos em z, múltiplos da frequência de amostragem $2\pi/T$.

1. Mapeamento s-z

- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Semi-plano esquerdo:**
    - O SPE em s é mapeado como um circulo de raio < 1 no plano z, pois $-\infty < \sigma < 0$:

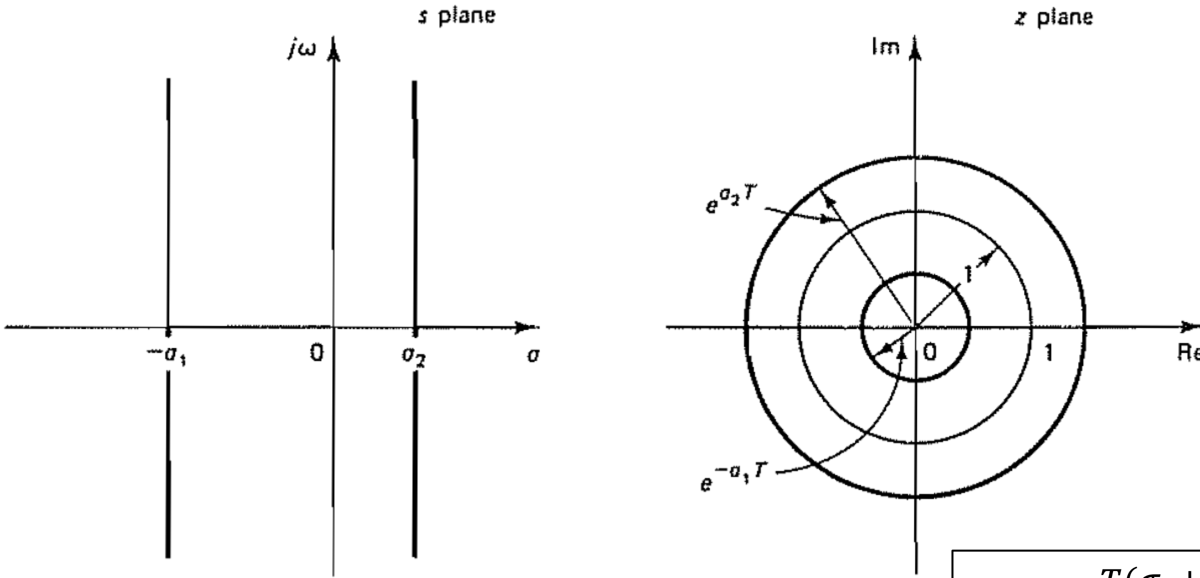
$$\boxed{|z| = e^{T\sigma} < 1} \tag{3}$$

    - Um contorno fechado retangular em s é mapeado como um contorno fechado circular em z.



1. Mapeamento s-z

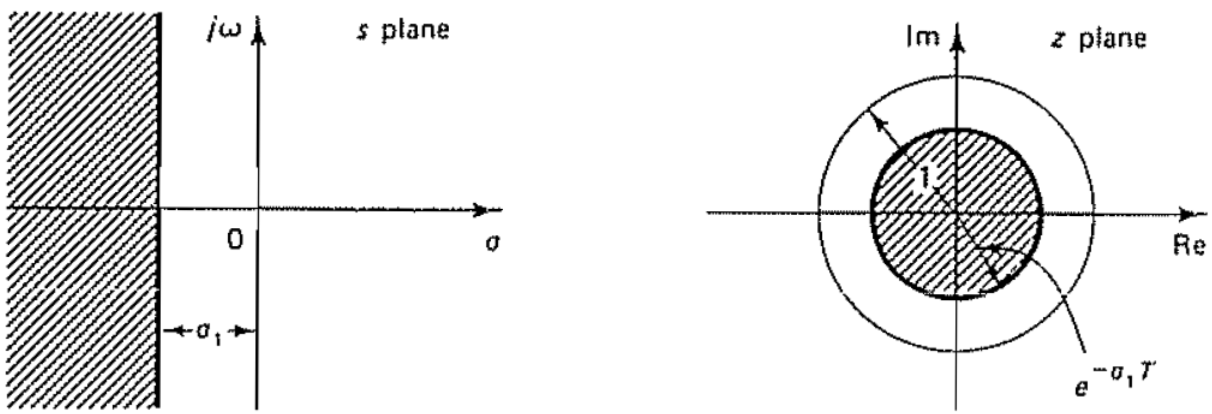
- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Região de atenuação constante:**
    - Uma linha com $\sigma = \sigma_1$ constante em s é mapeada como um círculo de raio $|z| = e^{T\sigma_1}$ centrado na origem do plano z.



$$z = e^{T(\sigma_1 + j\omega)} = |e^{T\sigma_1}| \angle (T\omega + 2\pi k)$$

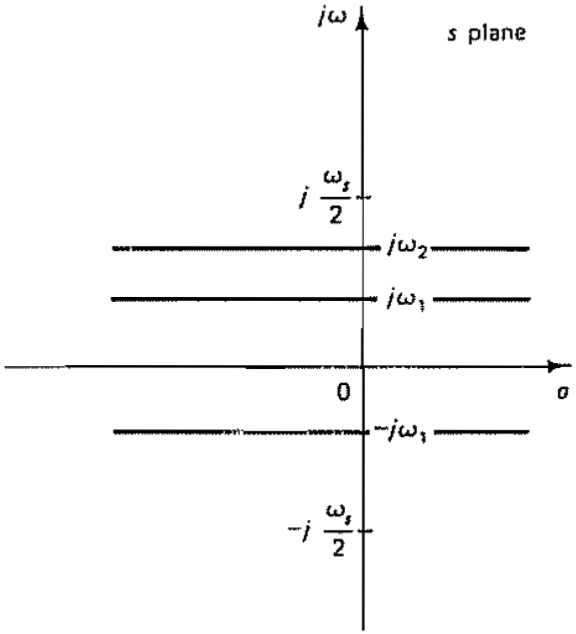
1. Mapeamento s-z

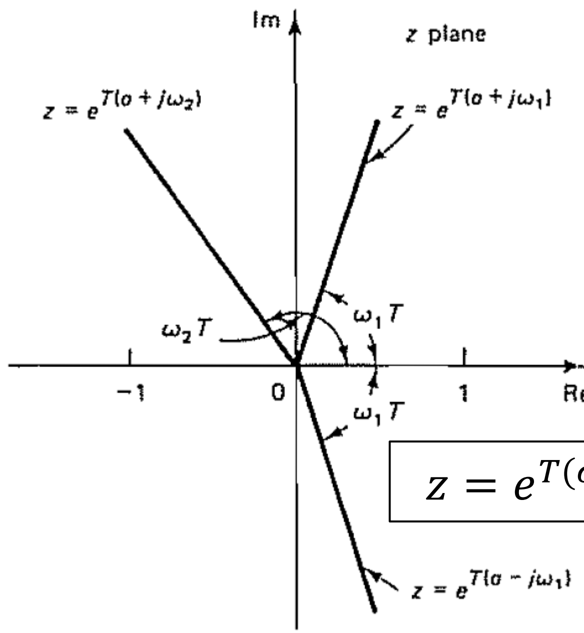
- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Tempo de estabilização:**
    - O tempo de estabilização de um sistema de segunda ordem é $t_s = \frac{\alpha}{\xi\omega_n} = \frac{\alpha}{\sigma}$. Seja $\sigma = \sigma_1$ o valor associado a t_s, a região correspondente é mapeada como um circulo $|z| = e^{T\sigma_1}$ em z.



1. Mapeamento s-z

- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Região de frequência constante:**
    - Regiões com $\omega = \omega_1$ em s são mapeadas como linhas com ângulo $\angle T\omega_1$ em z.





$$\boxed{z = e^{T(\sigma + j\omega_1)} = |e^{T\sigma}|\angle(T\omega_1 + 2\pi k)}$$

1. Mapeamento s-z

- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Região de constante de amortecimento constante:**
    - Um polo em s da forma

$$\boxed{s = -\xi\omega_n + j\omega_d} \tag{4}$$

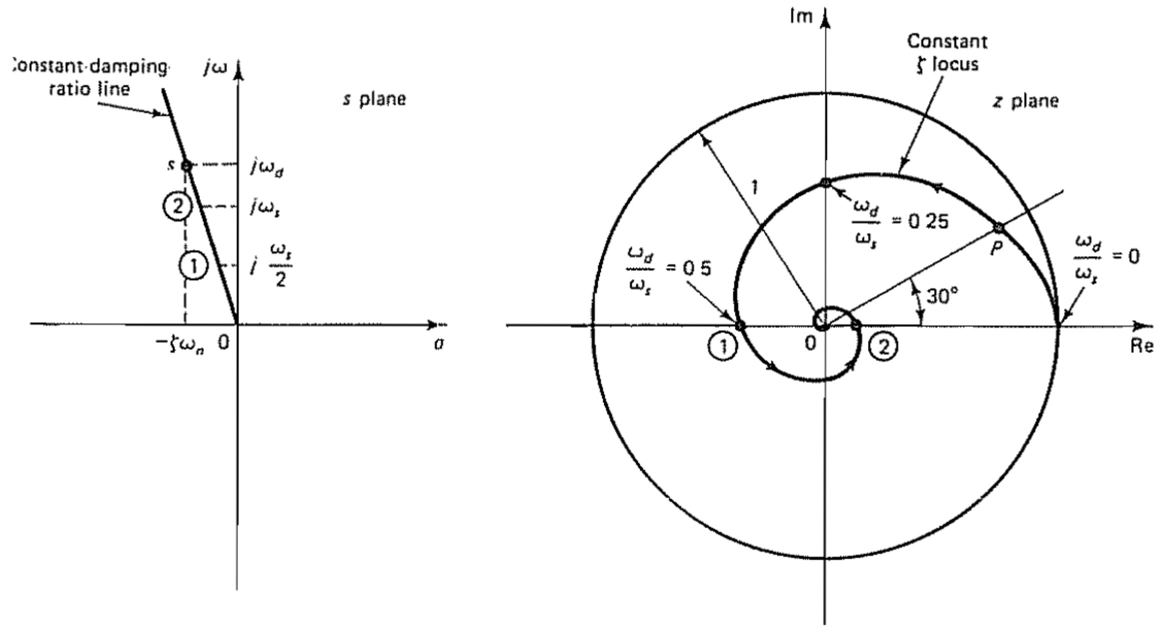
    - É mapeado em z como

$$\boxed{z = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)\angle\left(2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \tag{5}$$

      – Onde $\omega_s = 2\pi/T$ é a frequência de amostragem.

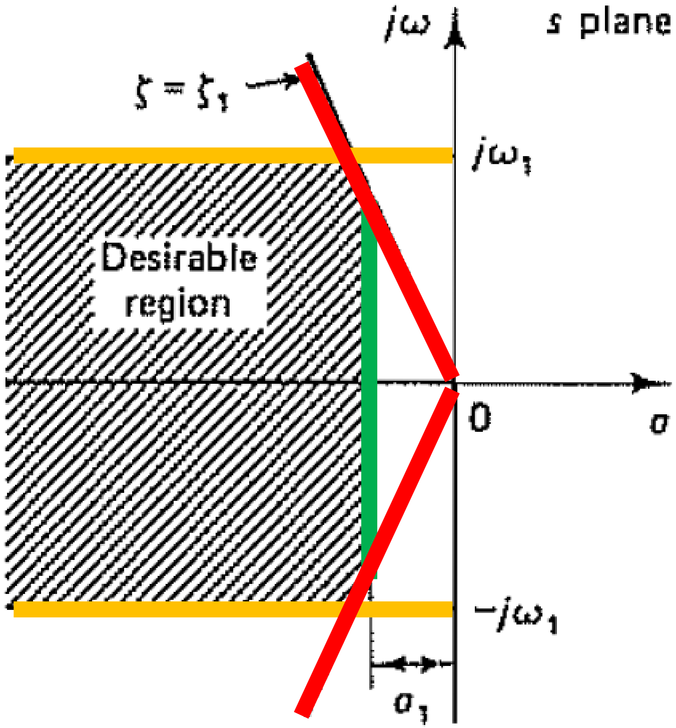
1. Mapeamento s-z

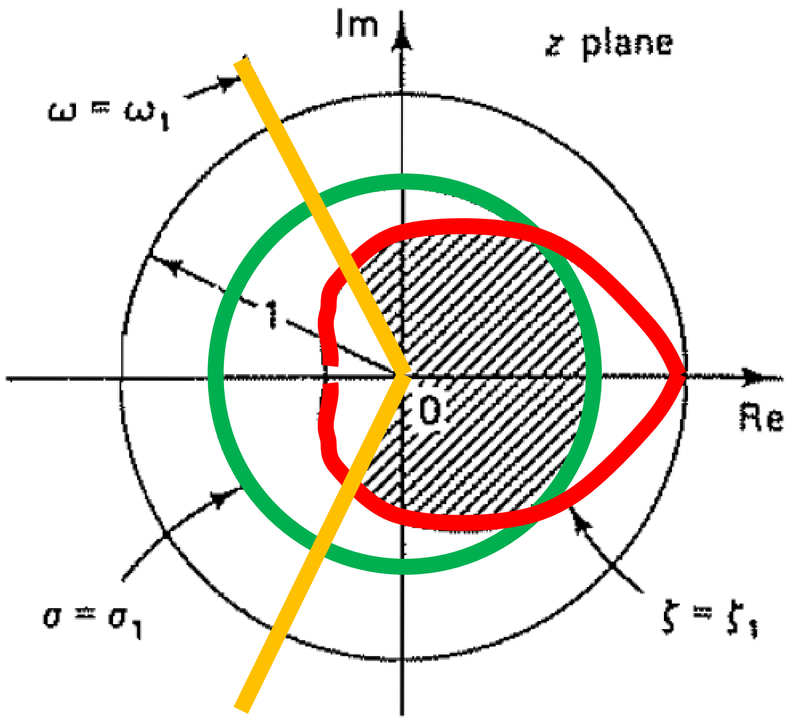
- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Região de constante de amortecimento constante:**
    - Para $\xi < 1$ constante, s é mapeado como uma trajetória periódica com raio decrescente em z, pois a posição varia somente com ω_n.



1. Mapeamento s-z

- **1.2. Mapeamento entre os planos s e z:**
  - **Exemplo:** $\omega = \pm\omega_1$, $\xi = \xi_1$, $\sigma = -\sigma_1$





2. Estabilidade

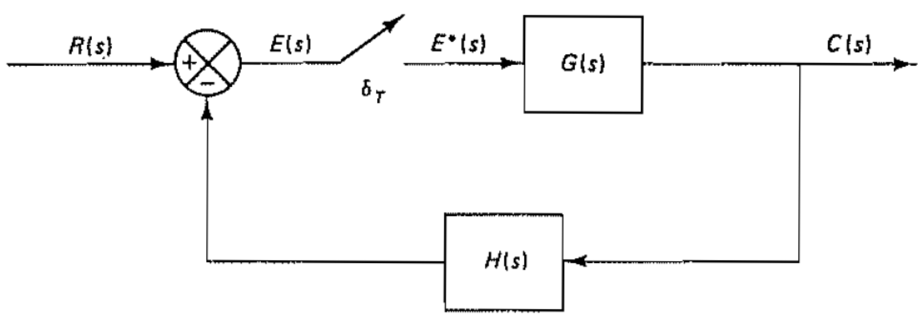
- **2.1. Estabilidade no plano z:**
  - Um sistema em malha fechada

$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}} \tag{6}$$

  - Possui equação característica

$$\boxed{P(z) = 1 + GH(z)} \tag{7}$$

  - A estabilidade do sistema discreto é definida com base nas raízes de $P(z)$, ou seja, os polos em malha fechada no plano z.



2. Estabilidade

- **2.1. Estabilidade no plano z:**
  - 1) Se os polos do sistema estão dentro do **círculo de raio unitário** em z, então o sistema é **estável**. Se existem polos fora do circulo unitário, então o sistema é instável;
    - Correspondem a polos no SPE do plano s;
  - 2) Um **polo simples** ou **um par de polos complexo conjugados** em $z = 1$ resultam em um **sistema criticamente estável**. Polos múltiplos em $z = 1$ tornam o sistema instável;
    - Correspondem a polos sobre o eixo imaginário ($\sigma = 0$) no plano s;
  - 3) **Zeros em malha fechada não afetam a estabilidade** do sistema.

2. Estabilidade

- **2.2. Transformação bilinear (método de Tustin):**
  - **Transformação bilinear**:

$$\boxed{z = \frac{w+1}{w-1}} \qquad \boxed{w = \frac{z+1}{z-1}} \qquad (8)$$

- Seja $w = \sigma + j\omega$, para que o sistema seja estável, os polos em z devem se encontrar no interior do círculo unitário, ou seja

$$\boxed{z = \left|\frac{\sigma + 1 + j\omega}{\sigma - 1 + j\omega}\right| < 1} \qquad (9)$$

  – Portanto, $\sigma < 0$.

- Seja a equação característica $P(z)$, pode-se utilizar a transformação bilinear para obter $P(w)$ e avaliar a estabilidade pelo critério de Routh.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Por que linhas no plano s são mapeadas como curvas no plano z?
  - 2) Um sistema contínuo, estável em malha fechada será sempre estável em sua representação discreta? Por quê?
  - 3) Verifique os mapeamentos da seção 1.2, plotando manualmente as curvas nos planos s e z.

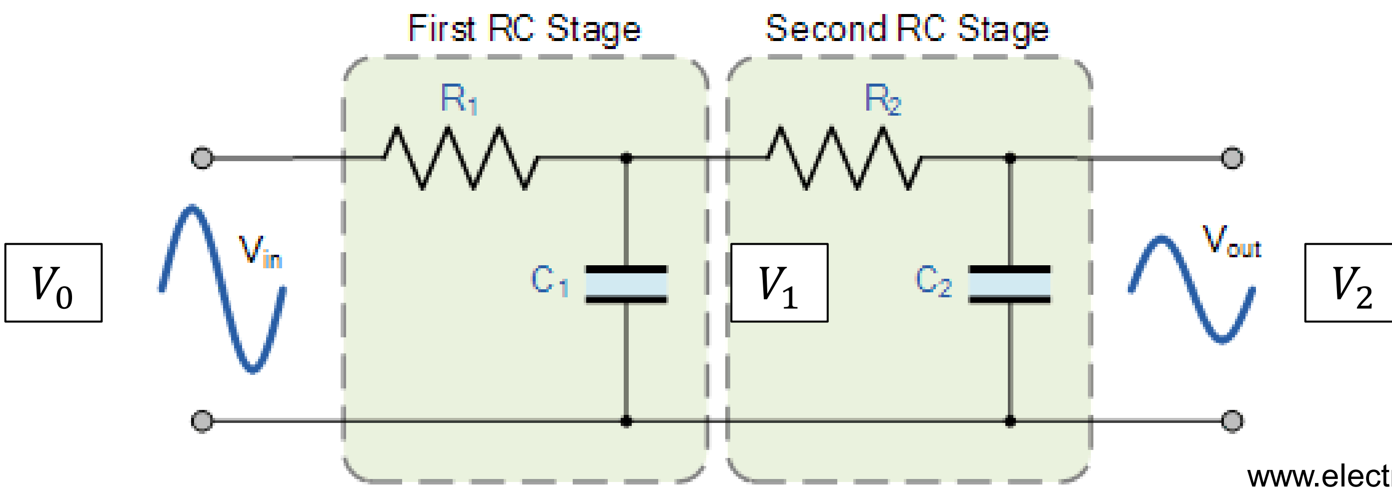
Referências

- **Referências:**
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995.
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, Signals and Systems, Pearson, 1996.
  - J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1996.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 21.1)** Considere um filtro RC passivo de dois estágios:
    - Estágio 1: $R_1 = 100\ \Omega$, $C_1 = 0.1$ F;
    - Estágio 2: $R_2 = 2000\ \Omega$, $C_2 = 0.1$ F;
  - Plote o diagrama do lugar das raízes e a reposta em malha fechada do filtro RC com 1 ou 2 estágios nas formas contínua e discreta (ZOH, 1 s). Avalie a estabilidade do sistema.



www.electronics-tutorials.ws

Exercícios

- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 1 estágio:
    - Função de transferência contínua:

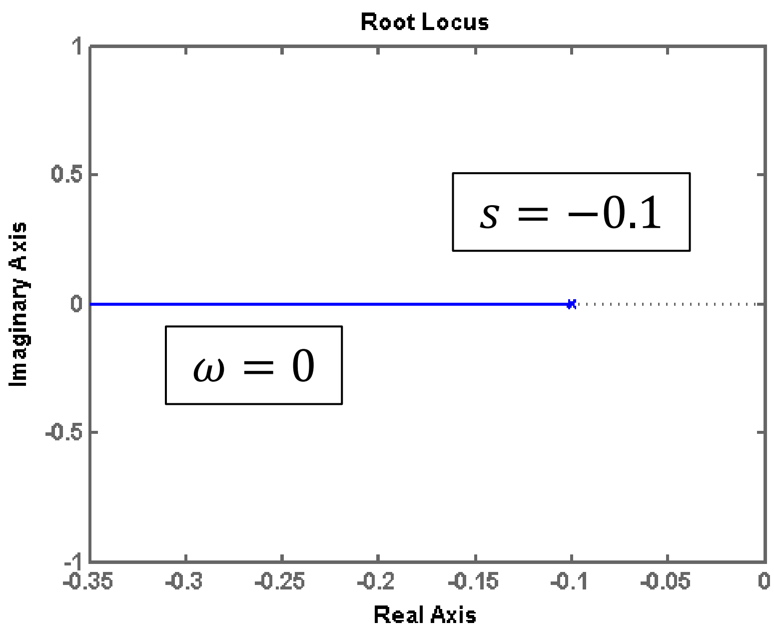
$$\boxed{G_1(s) = \frac{V_1}{V_0} = \frac{0.1}{s + 0.1}}$$

    - Função de transferência discreta:

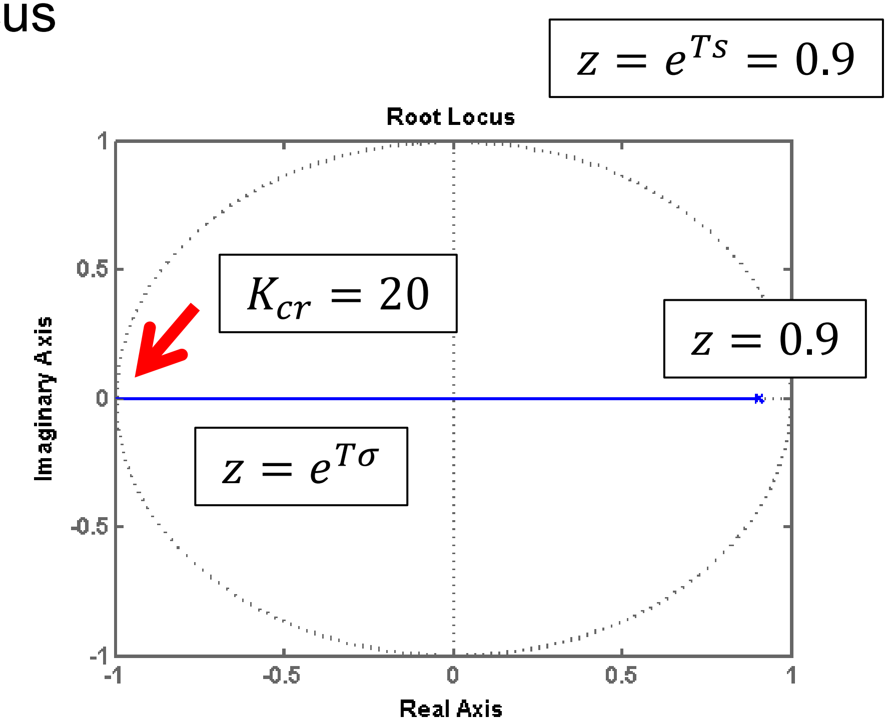
$$\boxed{G_1(z) = \frac{V_1}{V_0} = \frac{0.1}{z + 0.9}}$$

Exercícios

- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 1 estágio: Root locus



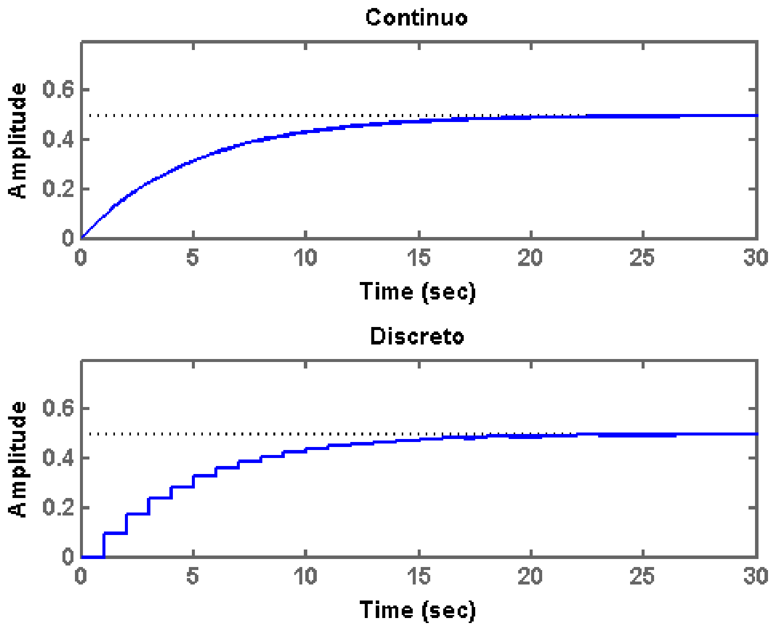
`rlocus(Gs)`



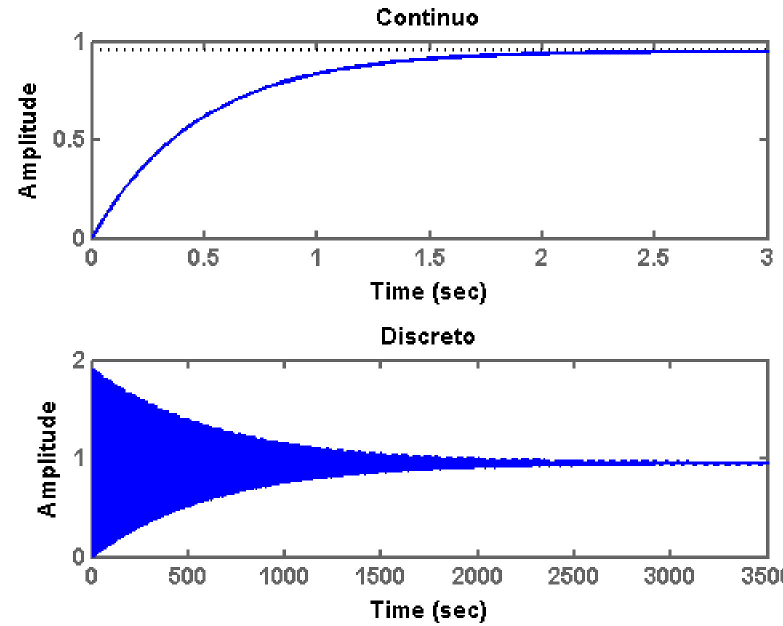
`rlocus(c2d(Gs,T,'zoh'))`

Exercícios

- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 1 estágio: resposta ao degrau em malha fechada



$K = 1$



$K = 20$

Exercícios

- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 2 estágios:
    - Função de transferência contínua:

$$\boxed{G_2(s) = \frac{V_2}{V_0} = \frac{0.0005}{s^2 + 0.105s + 0.0005}}$$

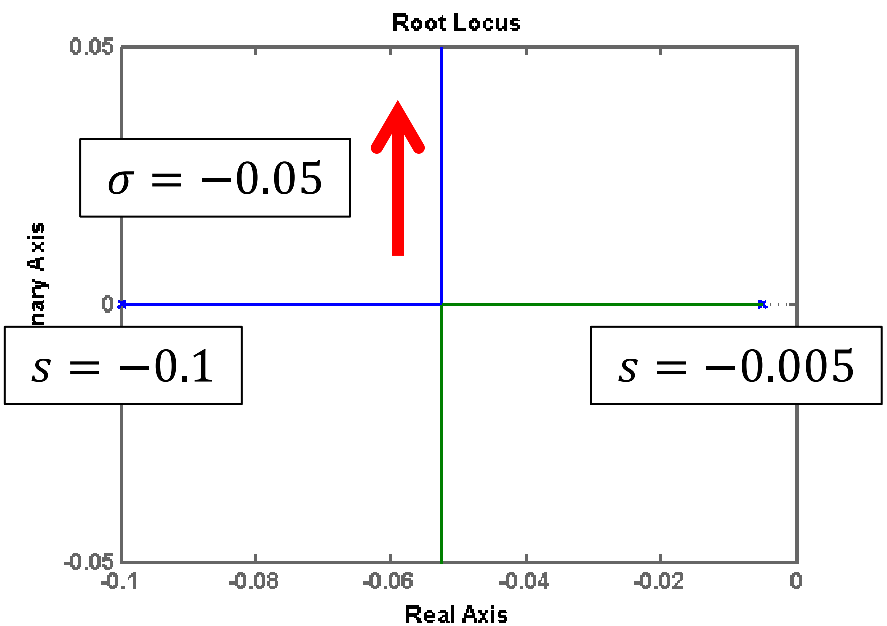
    - Função de transferência discreta:

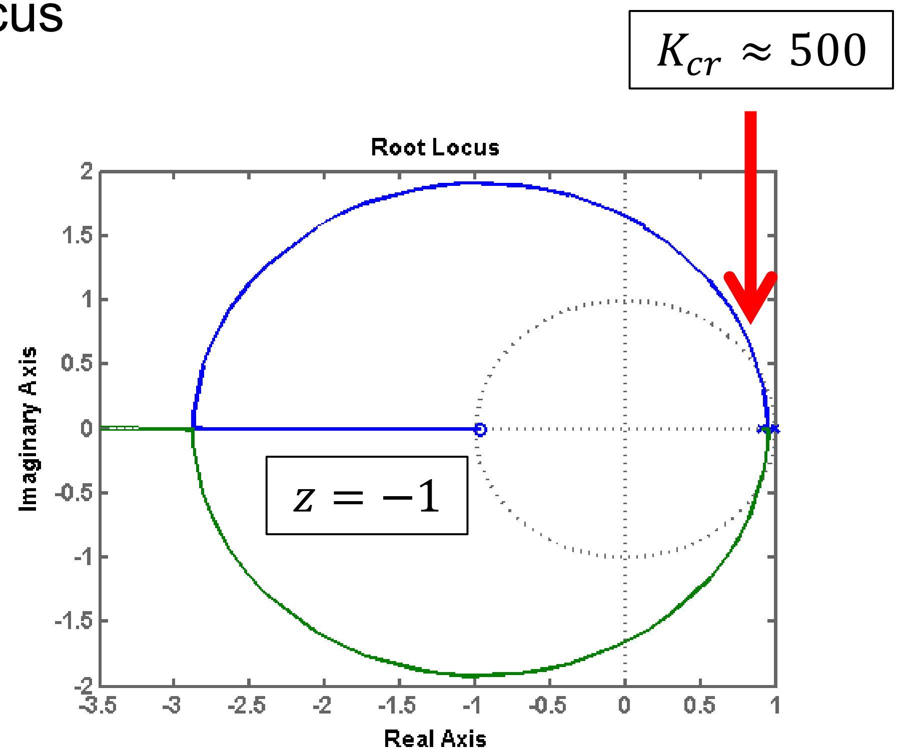
$$\boxed{G_2(z) = \frac{V_2}{V_0} = \frac{0.0002z + 00002}{z^2 - 1.9z + 0.9}}$$

      – Existem um zero em $z = -1$.

Exercícios

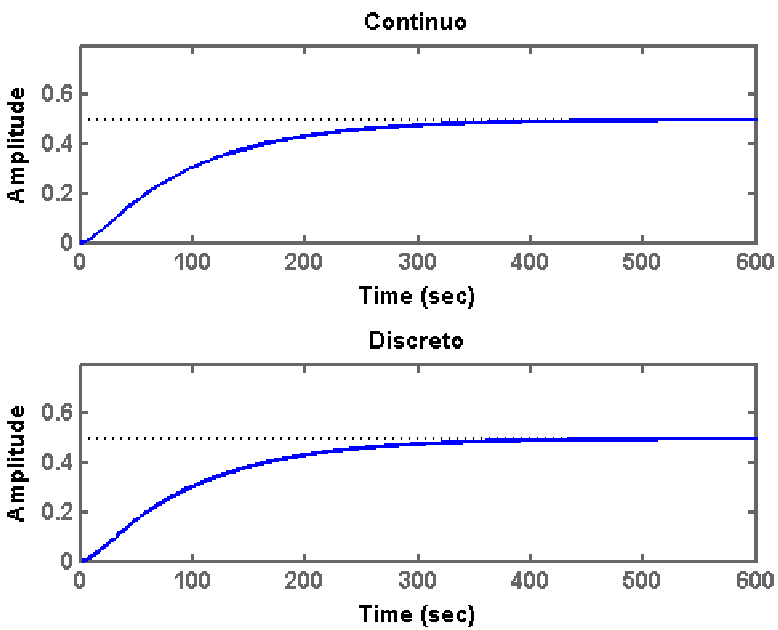
- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 2 estágios: Root locus



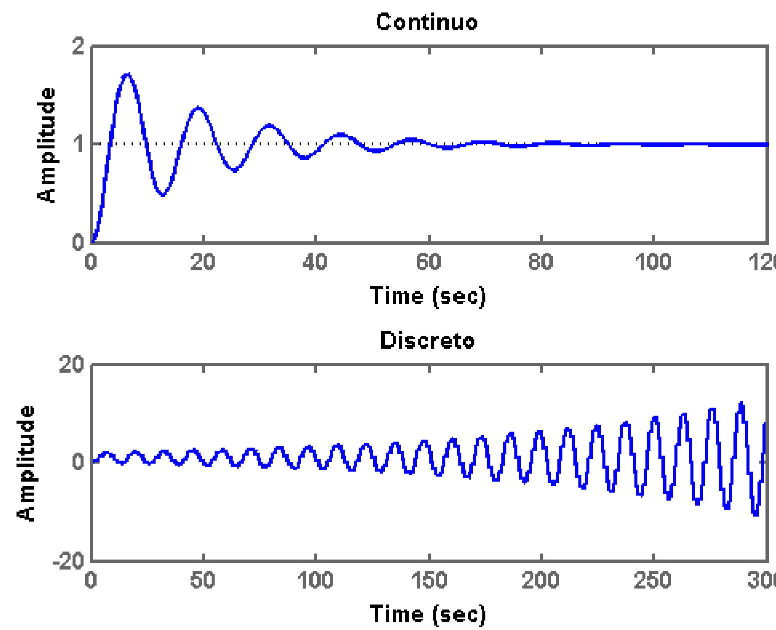


Exercícios

- **Ex. 21.1)**
  - Filtro RC – 2 estágios: resposta ao degrau em malha fechada



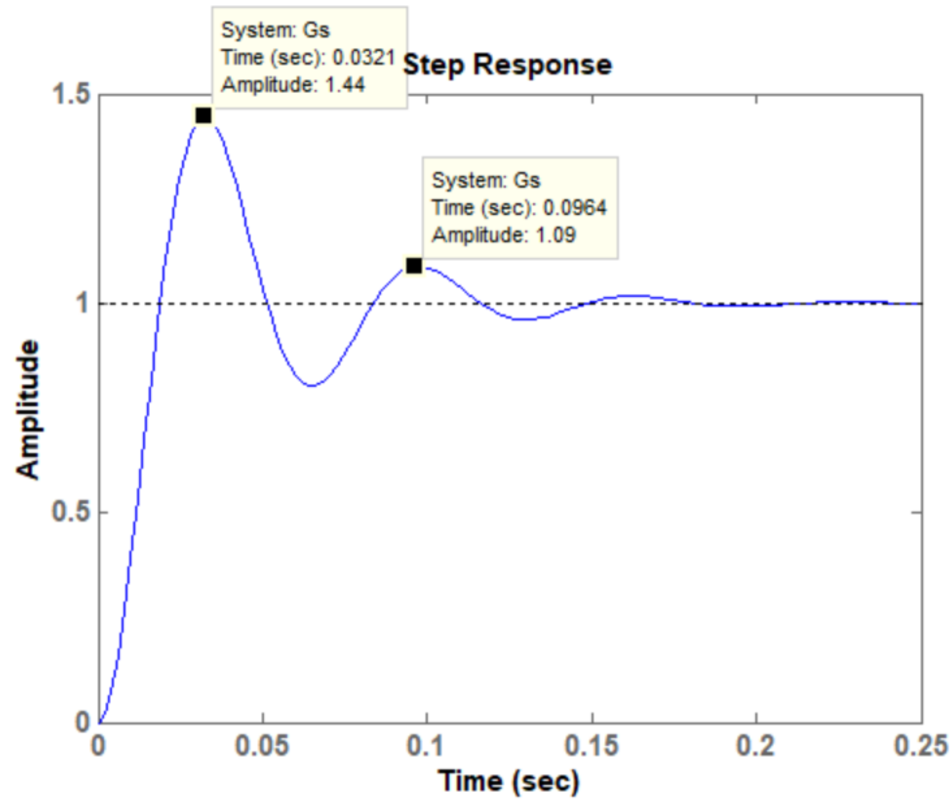
$\boxed{K = 1}$



$\boxed{K = 500}$

Exercícios

- **Ex. 21.2)** A figura abaixo apresenta a resposta ao degrau unitário de um posicionador linear.
  - Plote o diagrama do lugar das raízes e a resposta em malha fechada do sistemas contínuo e discreto para $T = 1$, 0.01, e 0.001 s. Avalie também a estabilidade do sistema.



Exercícios

- **Ex. 21.2)**
  - Identificação da planta (sistema de segunda ordem):
    - $\omega_d = 96.8$ rad/s;
    - $\xi = 0.25$;
    - $\omega_n = 100$ rad/s

$$\boxed{G(s) = \frac{10000}{s^2 + 50s + 10000}}$$

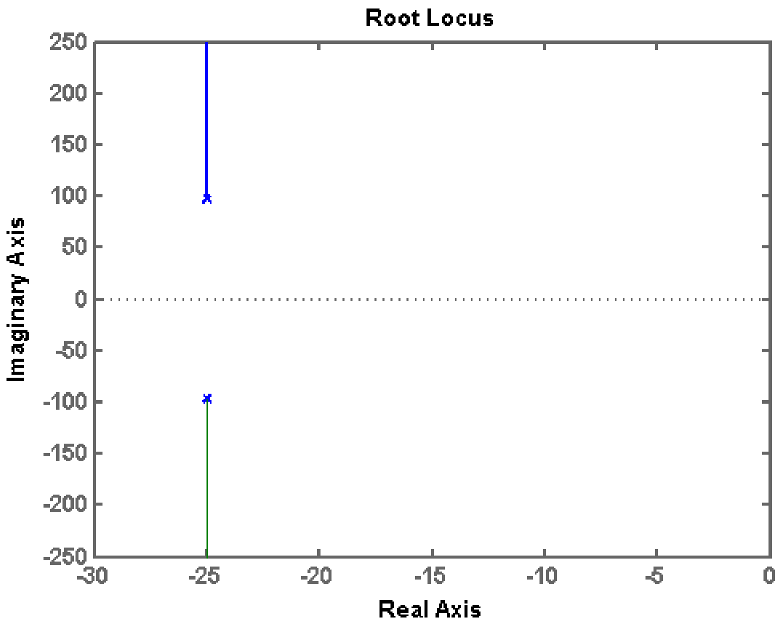
  - Segurador de ordem zero:

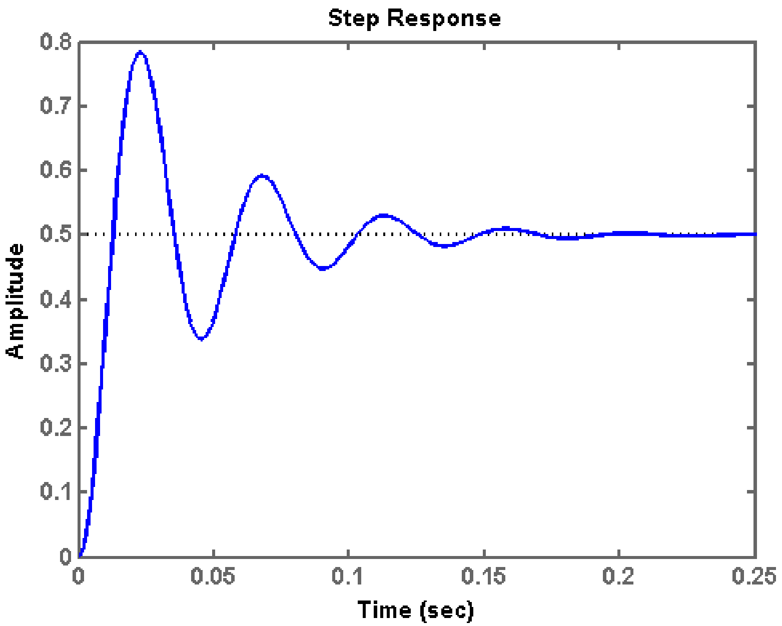
$$\boxed{G(z) = \frac{z + 10^{-11}}{z^2 - 10^{-11}z + 10^{-22}}} \qquad \boxed{G(z) = \frac{0.39z + 0.33}{z^2 - 0.9z + 0.61}} \qquad \boxed{G(z) = \frac{0.005z + 0.005}{z^2 - 1.9z + 0.95}}$$

$$\boxed{T = 1\ \text{s}} \qquad \boxed{T = 0.01\ \text{s}} \qquad \boxed{T = 0.001\ \text{s}}$$

Exercícios

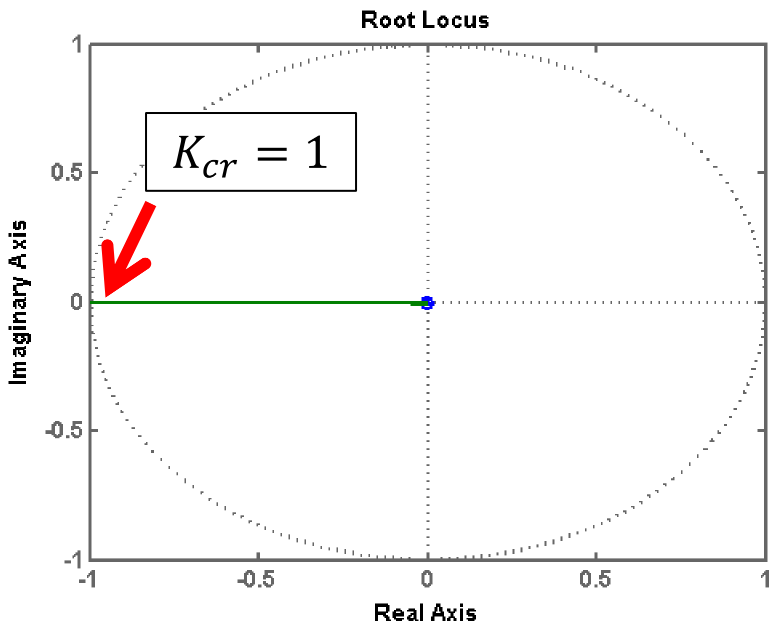
- **Ex. 21.2)**
  - Root locus e resposta ao degrau ($K = 1$):

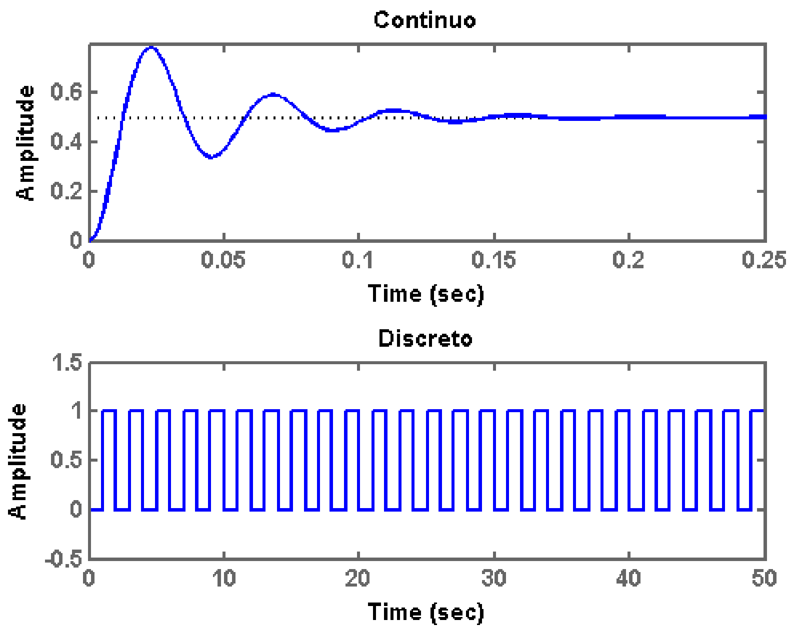




Exercícios

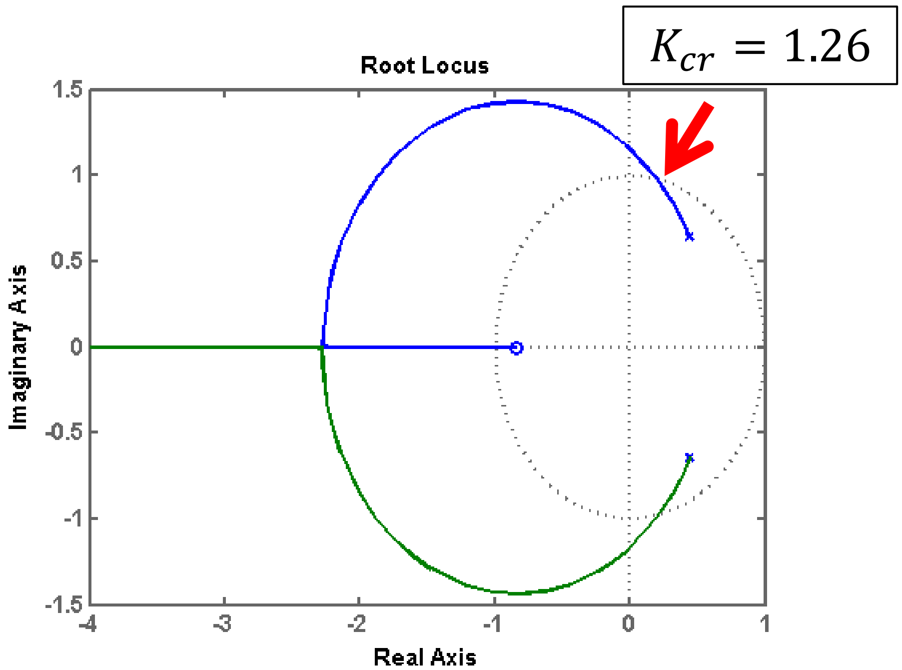
- **Ex. 21.2)**
  - Root locus e resposta ao degrau ($T = 1$, $K = 1$):

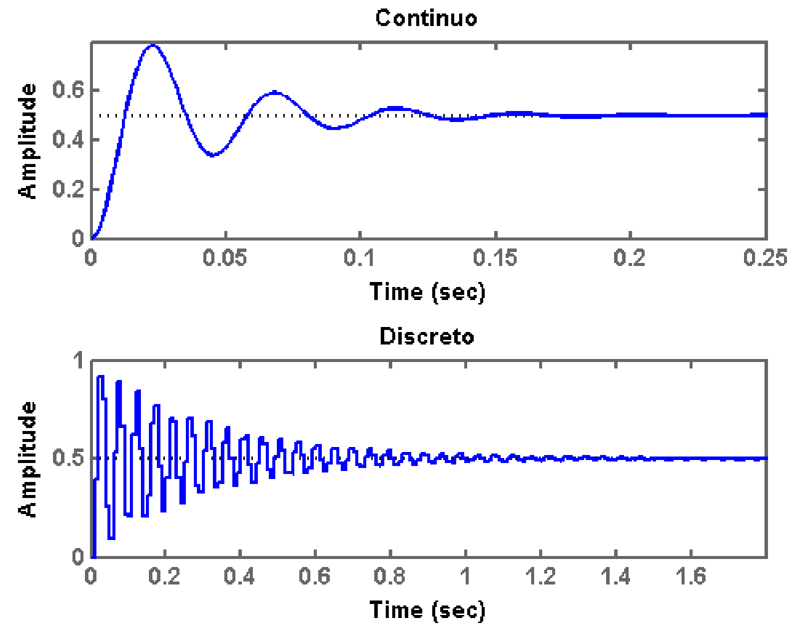




Exercícios

- **Ex. 21.2)**
  - Root locus e resposta ao degrau ($T = 0.01$, $K = 1$):





Exercícios

- **Ex. 21.2)**
  - Root locus e resposta ao degrau ($T = 0.001$, $K = 1$):