ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

15 – Critério de estabilidade de Nyquist

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Critério de estabilidade de Nyquist;
  - 2) Análise de estabilidade;
  - 3) Margens de estabilidade
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Critério de estabilidade de Nyquist

- **1.1. Introdução:**
  - O **critério de estabilidade de Nyquist** consiste em analisar a **resposta em frequência do sistema em malha aberta** para determinar a sua **estabilidade em malha fechada**;
  - A TF em malha fechada

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}} \tag{1}$$

    - Apresenta polinômio característico

$$\boxed{1 + G(s)H(s)} \tag{2}$$

    - As raízes de (2) devem se encontrar no **semi-plano esquerdo** para que o sistema em malha fechada seja estável.

1. Critério de estabilidade de Nyquist

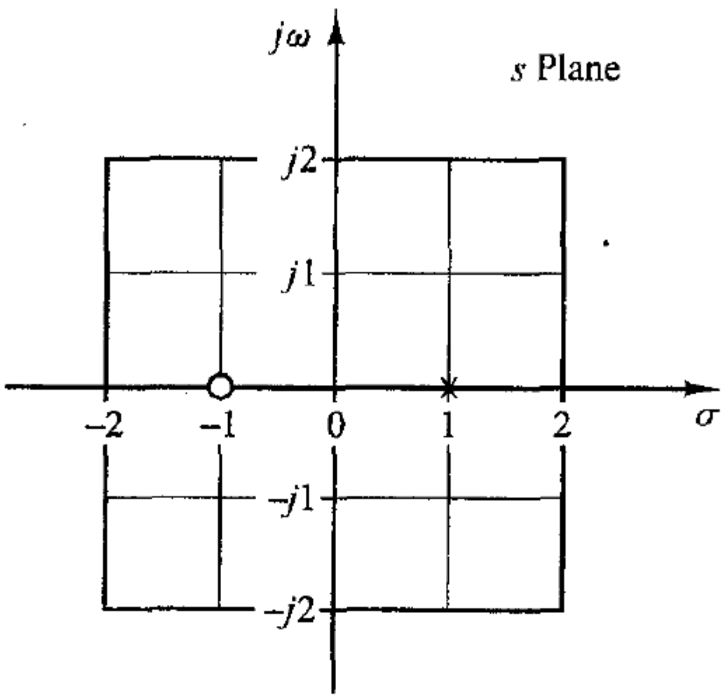
- **1.2. Mapeamento:**
  - Seja $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, onde $G(s)H(s)$ é uma razão de polinômios;
  - $F(s)$ pode ser representado como $F(\sigma + j\omega)$ ou $|F(s)|\angle F(s)$ no plano complexo: linhas em $(\sigma, j\omega)$ (cartesiano) são mapeadas como círculos em $(\mathrm{Re}, \mathrm{Im})$ (polar);
    - Linhas: $(\sigma, \pm\infty)$ ou $(\pm\infty, \omega)$;
  - Exemplo:

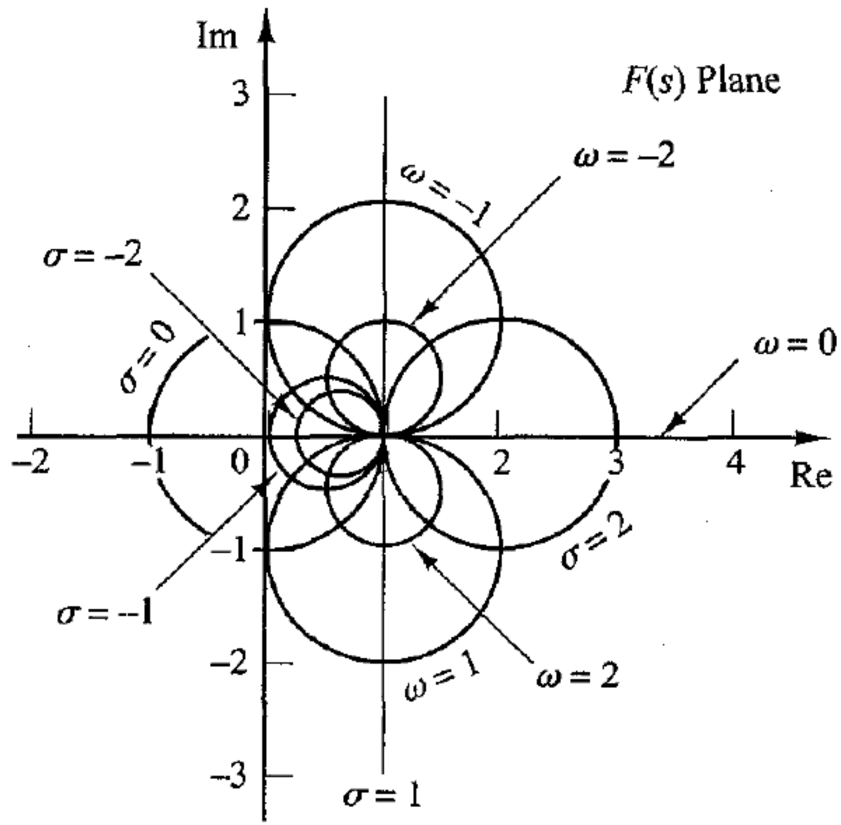
$$\boxed{G(s) = \frac{2}{s-1}} \qquad \boxed{F(s) = 1 + G(s) = \frac{s+1}{s-1}}$$

    - $F(s)$ possui um polo em $s = 1$ e um zero em $s - 1$.

1. Critério de estabilidade de Nyquist

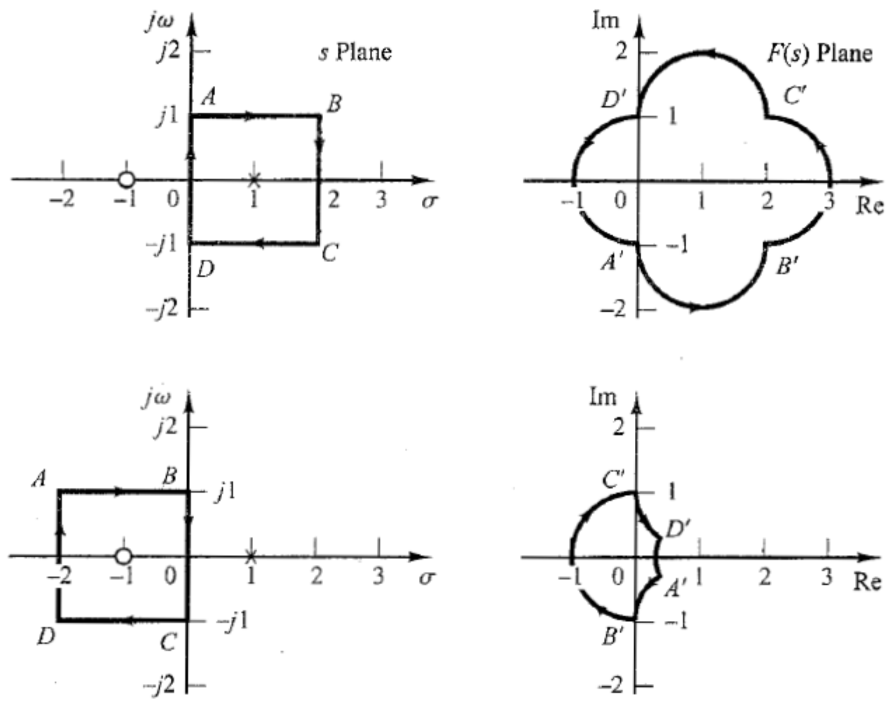
- **1.2. Mapeamento:**





1. Critério de estabilidade de Nyquist

- **1.2. Mapeamento:**
  - Da mesma forma, contornos fechados em volta de polos e zeros em $(\sigma, j\omega)$ no sentido horário resultam em contornos fechados em $(\mathrm{Re}, \mathrm{Im})$ no sentido horário ou anti-horário.



1. Critério de estabilidade de Nyquist

- **1.3. Critério de estabilidade de Nyquist:**
  - Seja $G(s)H(s)$ a TF em malha aberta sem polos ou zeros sobre o eixo $j\omega$;
  - Se $G(s)H(s)$ possui k polos no semi-plano direito e $\lim_{s \to \infty} G(s)H(s) = \text{cte}$, então, para que o sistema em malha fechada seja **estável**, $G(j\omega)H(j\omega)$ deve circundar o ponto $-1 + 0j$ k vezes no sentido anti-horário variando $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

1. Critério de estabilidade de Nyquist

- **1.3. Critério de estabilidade de Nyquist:**
  - Para que o sistema em malha fechada seja estável:

$$\boxed{Z = N + P} \tag{3}$$

    - Z: número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no SPD;
    - N: número de círculos no sentido horário em torno de $-1 + 0j$, variando ω;
    - P: número de polos de $G(s)H(s)$ no SPD;

  - Se $G(j\omega)H(j\omega)$ passa por $-1 + 0j$, então existem polos ou zeros sobre o eixo $j\omega$.

2. Análise de estabilidade

- **2.1. Análise de estabilidade:**
  - Utilizando o critério de estabilidade de Nyquist, é possível analisar o comportamento do sistema em malha fechada;
  - 1) Se não existem círculos em torno do ponto $-1 + 0j$, o sistema é **estável** se não existirem polos de $G(s)H(s)$ no SPD. Caso contrário, o sistema é **instável**;
  - 2) Se existe 1 ou mais círculos no sentido anti-horário em torno de $-1 + 0j$ (N negativo), o sistema é **estável** se o número de voltas for igual ao número de polos de $G(s)H(s)$ no SPD. Caso contrário, o sistema é **instável**;
  - 3) Se existem círculos no sentido horário em torno de $-1 + 0j$, o sistema é **instável**.

3. Margens de estabilidade

- **3.1. Estabilidade marginal:**
  - Seja um sistema com um ganho em malha aberta $KG(s)$;
  - A estabilidade depende do valor de K: geralmente, o sistema é estável para ganhos pequenos e se torna instável depois que o ganho excede um valor crítico K_{cr};
  - A estabilidade do sistema é avaliada em termos de dois critérios: **margem de ganho** (GM) e **margem de fase** (PM);
  - As margens medem o quanto o diagrama de Nyquist se aproxima do ponto $-1 + j0 = 1\angle -180°$ → quando o diagrama passa por este ponto, o sistema se encontra no limite da instabilidade ($K = K_{cr}$).

3. Margens de estabilidade

- **3.1. Estabilidade marginal:**
  - **Margem de ganho (GM):** valor de ganho K que pode ser aumentado antes que o sistema se torne instável, ou seja, ganho acima de $|G(j\omega)| = 1 = 0\ \mathrm{dB}$ quando $\phi = -180°$ (Obs: verificar se o valor de ganho é linear ou em dB);
  - **Margem de fase (PM):** quantidade de fase que excede $\phi = -180°$ quando $|G(j\omega)| = 1 = 0\ \mathrm{dB}$;
  - **Frequência de cruzamento (crossover)** ω_c: valor de frequência na qual a magnitude é unitária (0 dB).

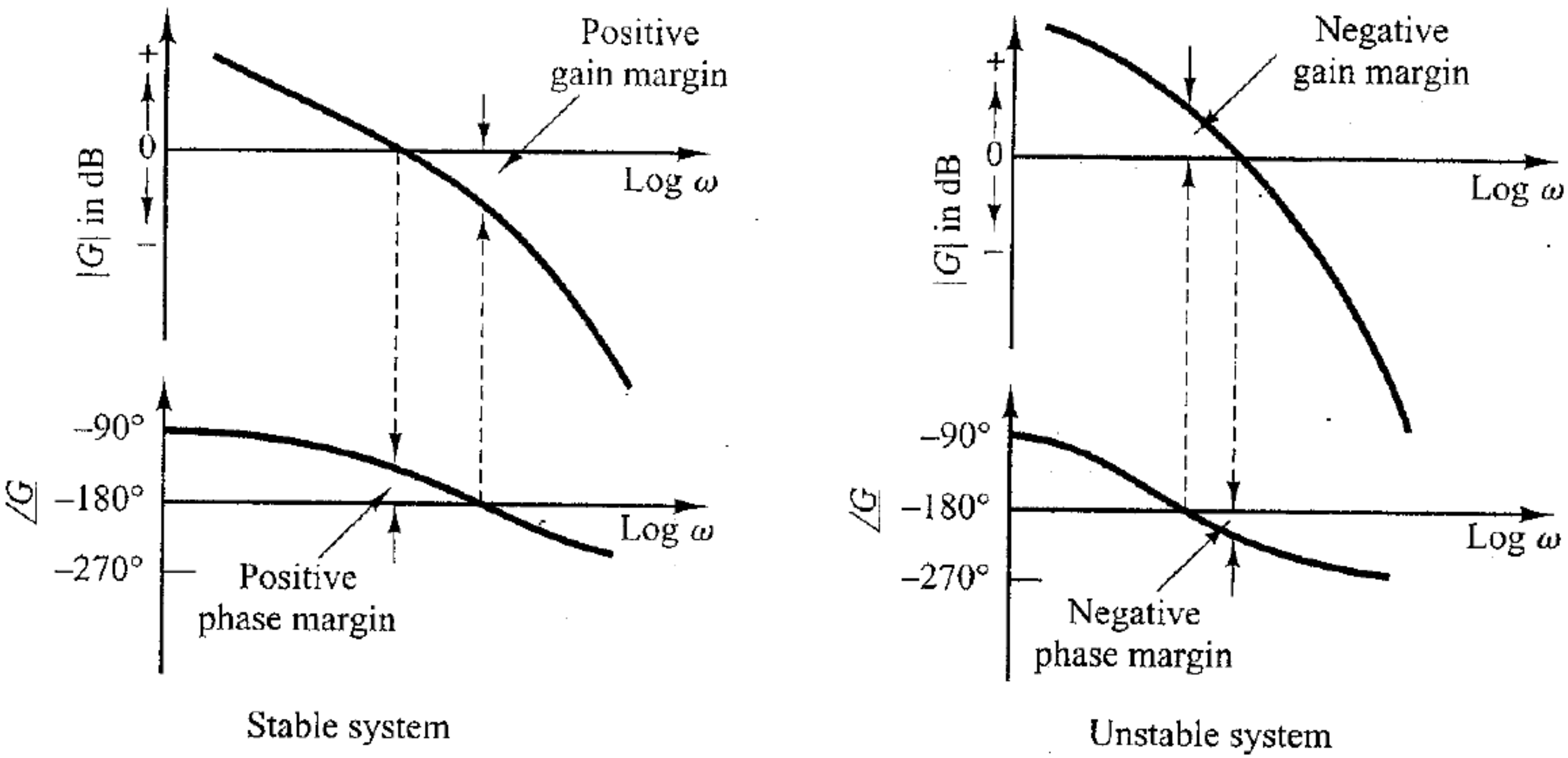
3. Margens de estabilidade

- **3.1. Estabilidade marginal:**
  - Em sistemas de fase mínima, as **margens de ganho e fase** devem ser **positivas** para que o sistema seja **estável**;
  - Margens **negativas** indicam **instabilidade**;
  - Na prática, para que o desempenho do sistema seja satisfatório (e estável), $30° \leq PM \leq 60°$ e $GM \geq 6$ dB.;
  - Em **sistemas de segunda ordem**, para $0 \leq \xi \leq 0.6$, vale a relação:

$$\boxed{\xi = \frac{PM}{100}} \qquad (4)$$

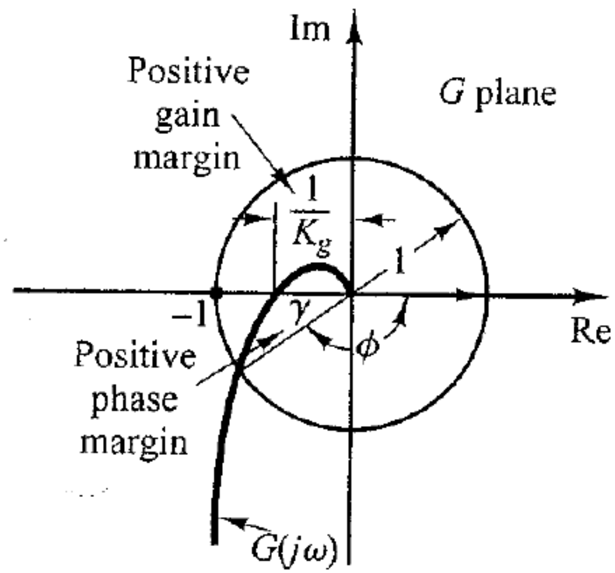
3. Margens de estabilidade

- **3.2. Método gráfico:**
  - Determinação de GM e PM no **diagrama de Bode**:

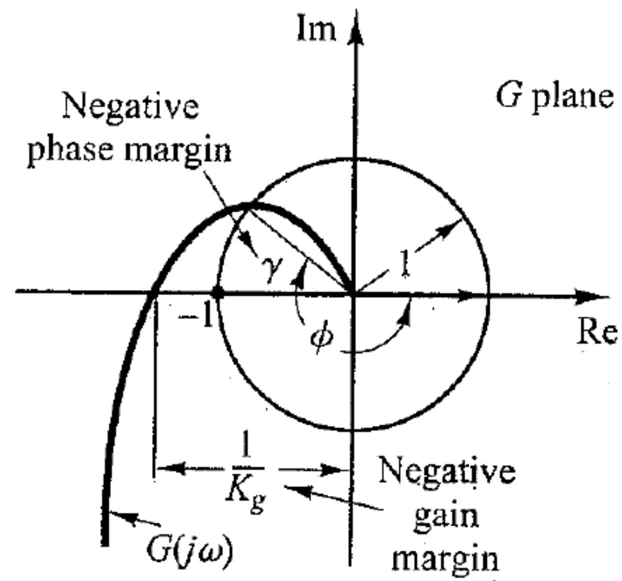


3. Margens de estabilidade

- **3.2. Método gráfico:**
  - Determinação de GM e PM no **diagrama de Nyquist**:



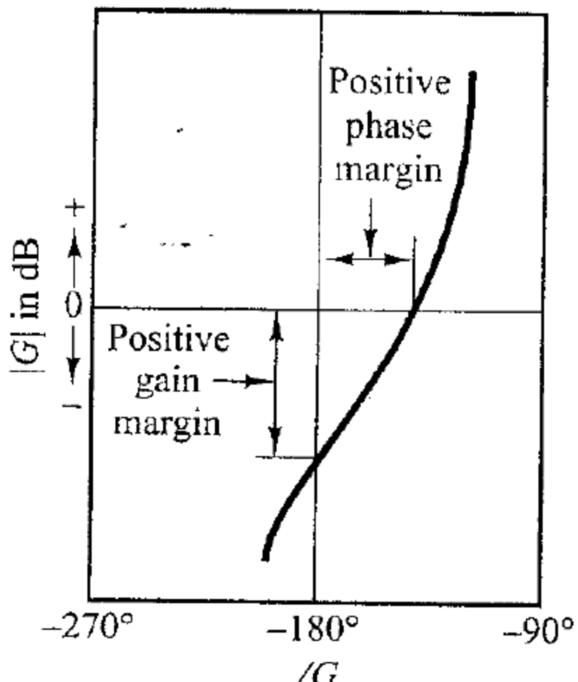
Stable system



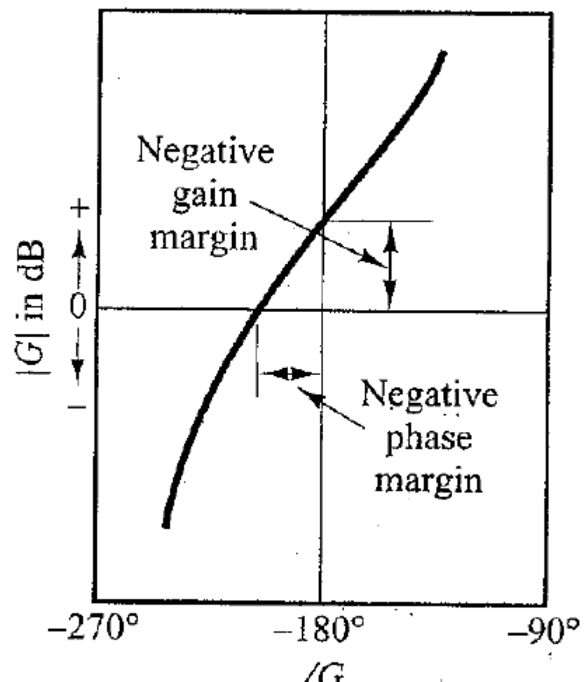
Unstable system

3. Margens de estabilidade

- **3.2. Método gráfico:**
  - Determinação de GM e PM no **diagrama de Nichols**:



Stable system



Unstable system

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Explique o critério de estabilidade de Nyquist;
  - 2) Qual é a vantagem do critério de Nyquist em relação ao critério de Routh-Hurwitz?
  - 3) Segundo o critério de Nyquist, como é representado um sistema com polo na origem? Este sistema é estável ou instável?
  - 4) Como é representado o cruzamento com o eixo imaginário no diagrama de Nyquist?
  - 5) Defina as margens de ganho e de fase de um sistema.

Referências

- **Referências:**
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 15.1)** Seja a função de transferência do sistema em malha aberta $G(s)$ apresentada abaixo:
  - a) Avalie a estabilidade do sistema em malha fechada pelo critério de Nyquist para um ganho em malha aberta $K = 1$;
  - b) Obtenha as margens de ganho e fase e verifique a resposta do sistema para o ganho crítico $K = K_{cr}$;
  - c) Aumente o ganho para $K = 2$ e avalie a estabilidade do sistema.

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}}$$

Exercícios

- **Ex. 15.1)**
  - Função de transferência, $K = 1$:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{2s^3 + 3s^2 + s}}$$

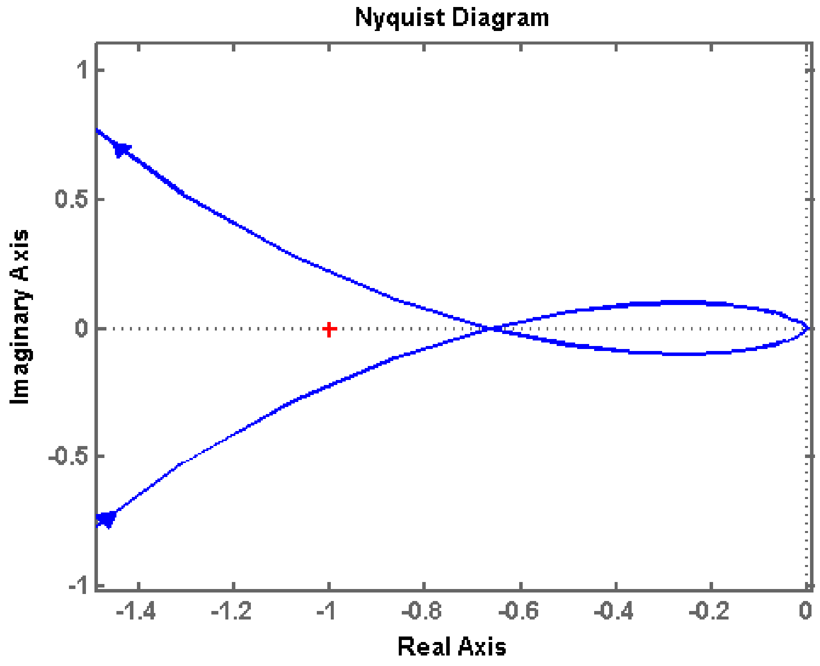
  - $G(s)$ possui um polo na origem ($s = 0$) e dois polos no SPE ($s = -1; s = -0.5$) → $P = 0$;

$$\boxed{F(s) = 1 + G(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s}}$$

  - $F(s)$ possui três zeros no SPE: $s = -1.4;\ s = -0.05 \pm j0.6$ → $Z = 0$.

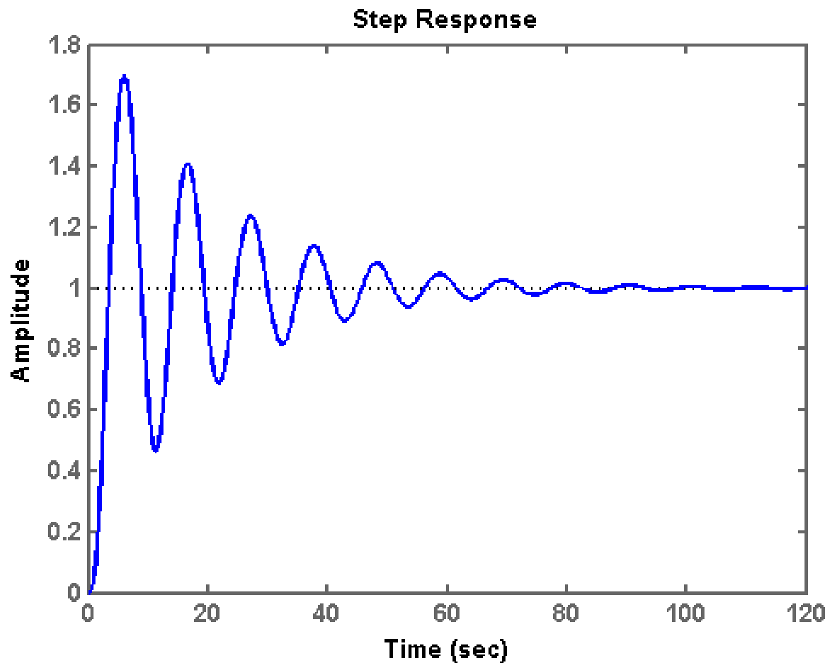
Exercícios

- **Ex. 15.1)**
  - Diagrama de Nyquist de $G(s)$:
    - O diagrama não envolve o ponto -1 → $N = 0$;
    - Critério de Nyquist:
      - $Z = N + P \Rightarrow 0 = 0$;
      - O sistema em malha fechada é estável para $K = 1$.



Exercícios

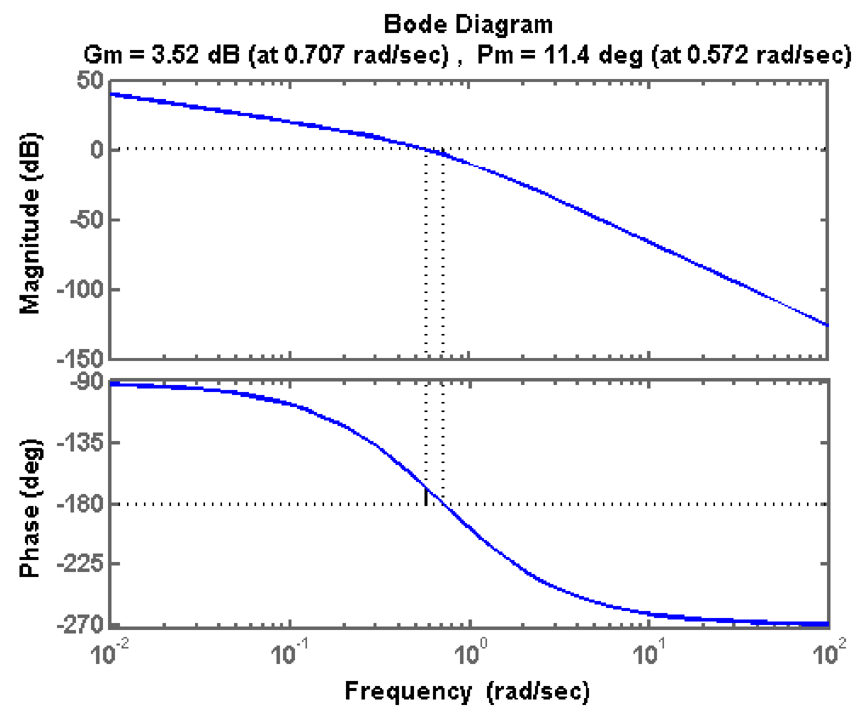
- **Ex. 15.1)**
  - Resposta ao degrau, sistema em malha fechada:



Exercícios

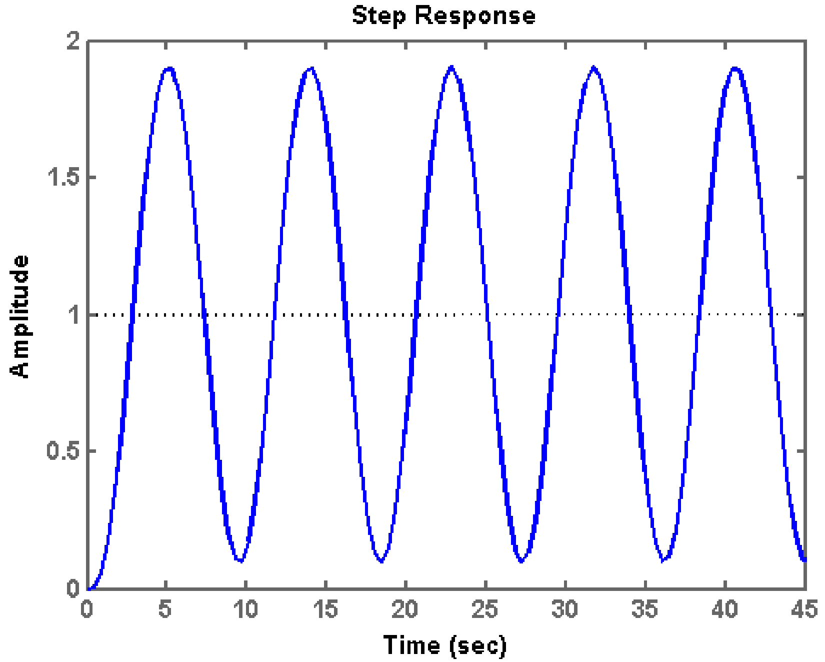
- **Ex. 15.1)**
  - Margens de estabilidade:
    - (Pode ser feito também pelo `sisotool`);
    - A margem de ganho é $GM = 3.53 \text{ dB} = 1.5$ → O ganho K pode ser aumentado de 1.5 até que o sistema atinja o limite da estabilidade.

```
margin(Gs);
[GM,PM,wG,wP] = margin(Gs)
```



Exercícios

- **Ex. 15.1)**
  - Resposta ao degrau, sistema em malha fechada com ganho $K = 1.5$:
    - As oscilações são sustentadas com período constante para $K = K_{cr}$;
    - O diagrama de Nyquist de $G(s)$ apresenta alguma característica particular?
    - Qual é o novo valor de GM e PM? Verificar!



Exercícios

- **Ex. 15.1)**
  - Função de transferência, $K = 2 > K_{cr}$:

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{2s^3 + 3s^2 + s}}$$

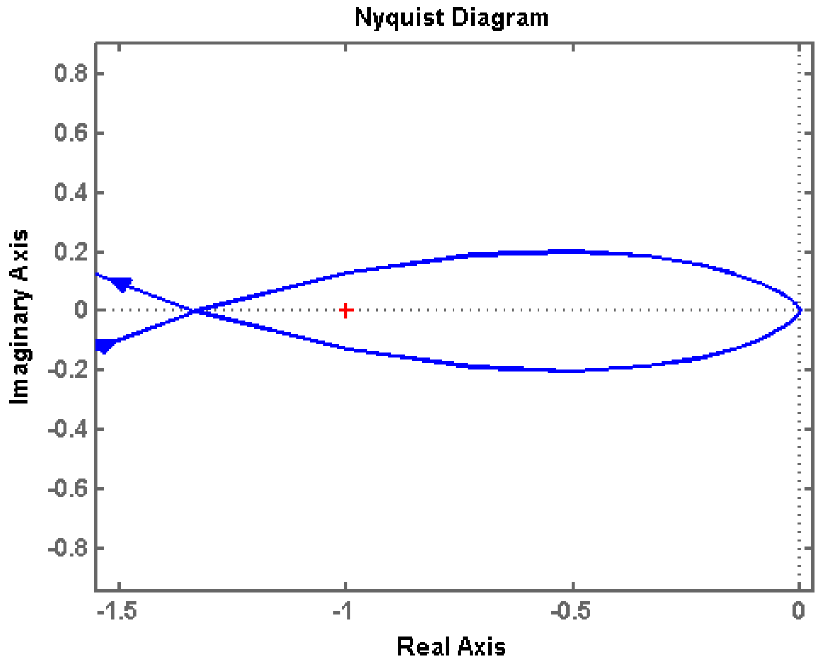
  - $G(s)$ possui polos: $s = 0; s = -1; s = -0.5$ → $P = 0$;

$$\boxed{F(s) = 1 + G(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + s + 2}{2s^3 + 3s^2 + s}}$$

  - $F(s)$ possui zeros: $s = -1.4;\ s = 0.04 \pm j0.8$ → $Z = 2$.

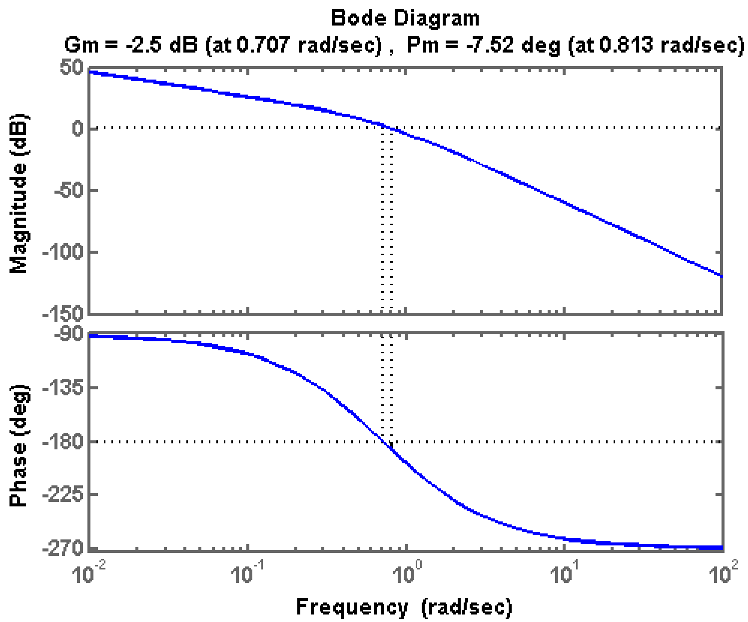
Exercícios

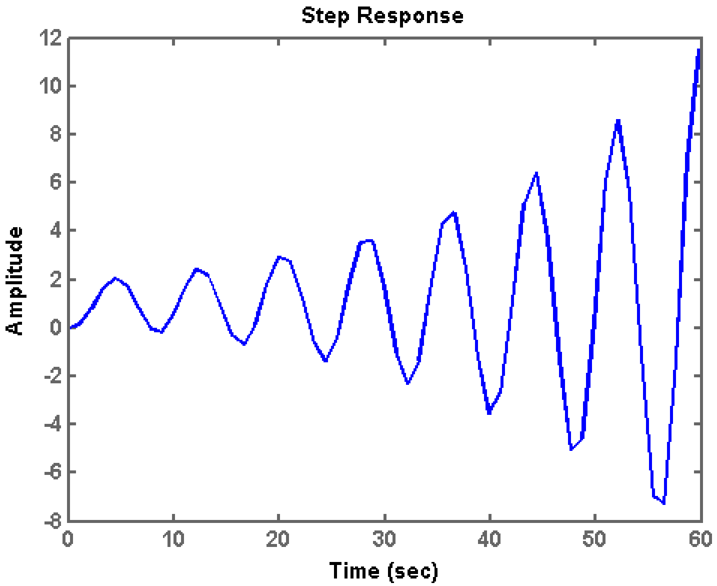
- **Ex. 15.1)**
  - Diagrama de Nyquist de $G(s)$:
    - O diagrama envolve o ponto -1 uma vez no sentido horário → $N = 1$;
    - Critério de Nyquist:
      - $Z = N + P \Rightarrow 2 \neq 1$;
      - O sistema em malha fechada é instável para $K = 2$.



Exercícios

- **Ex. 15.1)**
  - Margens de estabilidade de $G(s)$ e resposta ao degrau de $H(s)$:
    - É preciso reduzir o ganho em -2,5 dB = 0,75 para atingir o ganho crítico.





Exercícios

- **Ex. 15.2)** Considere a função de transferência do motor DC de imãs permanentes com saída de posição. Assumindo um ganho de malha aberta unitário, avalie as características do sistema em malha fechada.
    - Dados do motor (SI):
        - $R = 0.1$;
        - $L = 0.001$;
        - $J = 1 \times 10^{-3}$;
        - $B = 2 \times 10^{-3}$;
        - $k = 2$.

Exercícios

- **Ex. 15.2)**
  - Função de transferência:

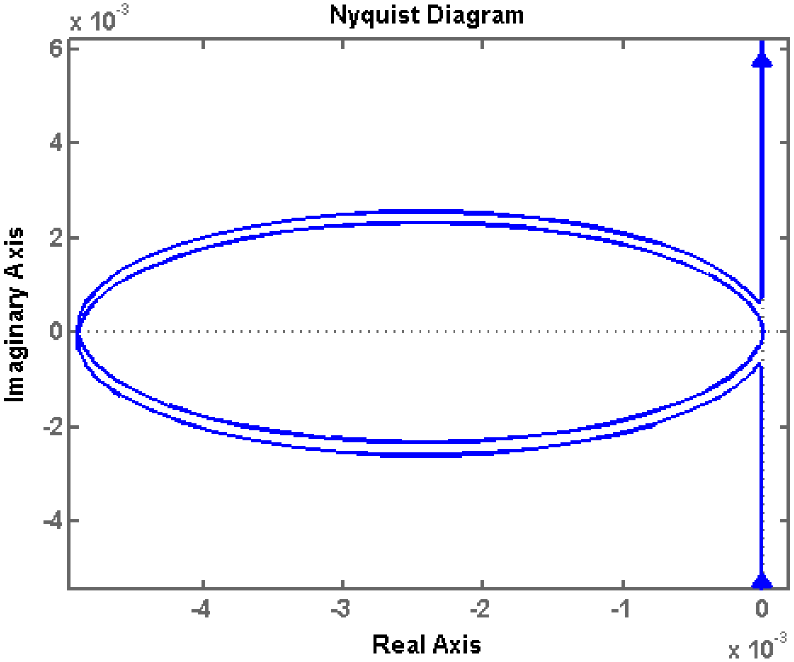
$$\boxed{G(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{k}{s[(sL+R)(sJ+B)+k^2]}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{1\times 10^{-6}s^3 + 1.02\times 10^{-4}s^2 + 4s}}$$

$$\boxed{F(s) = 1 + G(s) = \frac{1\times 10^{-6}s^3 + 1.02\times 10^{-4}s^2 + 4s + 2}{1\times 10^{-6}s^3 + 1.02\times 10^{-4}s^2 + 4s}}$$

Exercícios

- **Ex. 15.2)**
  - Diagrama de Nyquist;
  - Critério de estabilidade de Nyquist:
    - $N = 0$;
    - $P = 0$;
    - $Z = 0$;
    - $Z = N + P \rightarrow 0 = 0$;
    - Sistema em malha fechada estável.



Exercícios

- **Ex. 15.2)**
  - Margens de estabilidade e resposta ao degrau em malha fechada (ganho unitário):