P1 - CONTROLE AVANÇADO

1) Projetar para o sistema abaixo um controlador "K" por realimentação de estados e um observador "L".

* Pólos do observador → {-6, -8}
* Pólos do sistema malha fechada → {-1, -2}

Encontrar "K" e "L" usando as formas canônicas e a forma de Ackerman.

PARTE 1 - CONTROLADOR

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} B & A*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

RANK (P) = 2 ⇒ É CONTROLÁVEL!

↳ matriz transformação

* Gerando a forma canônica "controlador"

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{última linha} \rightarrow p = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

* Montando T (se usasse P obteria forma canônica controlável)

$$T = inv\left(\begin{bmatrix} p \\ p*A \\ \vdots \\ p*A^{n-1} \end{bmatrix}\right) = inv\left(\begin{bmatrix} -0,25 & 0,25 \\ 2,75 & -1,75 \end{bmatrix}\right)$$

matriz transformação

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

* Aplicando a transformação de similaridade

$$\begin{cases} A_c = T^{-1} A T \\ B_c = T^{-1} B \\ C_c = C T \end{cases}$$

$$A_c = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 \\ 2{,}75 & -1{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}}$$

Pol. característico $\phi(s) = s^2 + 5s - 6$

$$B_c = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = C.T = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}$$

* MALHA FECHADA

$$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_0 & K_1 \end{bmatrix} \qquad K_c = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \end{bmatrix}$$

$$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (6 - K_0) & (-5 - K_1) \end{bmatrix}$$

* Pol. característico de malha fechada

$$\phi(s) = s^2 + (5 + K_1)s + (K_0 - 6)$$

* Pol. carac. desejado para mal. fec.

$$\phi_{DES}(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\begin{cases} 5 + K_1 = 3 \longrightarrow K_1 = -2 \\ K_0 - 6 = 2 \longrightarrow K_0 = 8 \end{cases} \Rightarrow K_c = \begin{bmatrix} 8 & -2 \end{bmatrix}$$

* Voltando para a forma original

$$K = K_c \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 \\ 2{,}75 & -1{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}5 & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

* Verificando → EIG (A - BK)

$$\rightarrow EIG\left(\begin{bmatrix} 11{,}5 & -7{,}5 \\ 22{,}5 & -14{,}5 \end{bmatrix}\right) = \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} . P^{-1} . \phi_{DES}(A)$$

$$\phi_{DES}(A) = A^2 + 3A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -30 & 26 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -30 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}5 & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

OK ✓

* PARTE 2 - OBSERVADOR

Matriz de observabilidade

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ C*A \\ \vdots \\ C*A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{RANK } 2$$

↳ observável

"observável"

* Transf. de simil. p/ forma canon. "observador"

$$inv(Q) = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

→ pegar a última coluna e construir

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$T = [q \quad A*q \quad \dots A^{n-1}*q] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 4,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A_0 = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \\ B_0 = T^{-1} . B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_0 = C . T = [0 \quad 1] \end{cases}$$

pol. caracter.

* Projetando o ganho $L_0 = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}$ do observador

$$(A_0 - L_0 C_0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 6 - l_0 \\ 1 & -5 - l_1 \end{bmatrix}$$

* Pol. carac. $\Rightarrow s^2 + (5 + l_1) s + (l_0 - 6)$

* Pol. carac. desejado $\Rightarrow s^2 + 14s + 48$

$$(s+6)(s+8)$$

$$\begin{cases} 5 + l_1 = 14 \Rightarrow l_1 = 9 \\ l_0 - 6 = 48 \Rightarrow l_0 = 54 \end{cases} \Rightarrow L_0 = \begin{bmatrix} 54 \\ 9 \end{bmatrix}$$

* Transformando de volta

$$L = T . L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 4,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 54 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13,5 \end{bmatrix}$$

* Conferindo

$$EIG(A - LC) = EIG\left(\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1,5 & -9 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} -6 \\ -8 \end{cases}$$

* Checando pela F. ACKERMAN

Nesse caso temos que usar a forma dual pois Ackerman é feito para projeto de controle.

Assim usaremos $\longrightarrow$ "A" $\longleftarrow A^T$

"B" $\longleftarrow C^T$

Nossa "matriz de controlabilidade" seria

$$\overline{P} = [\text{"B"} \quad \text{"A.B"}] = [C' \quad A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{DES}(A') = A'^2 + 14A' + 48.I = \begin{bmatrix} 90 & 135 \\ -18 & -27 \end{bmatrix}$$

Assim: $L' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot inv(\bar{P}) \cdot \phi_{DES}(A')$

$\Rightarrow L' = \begin{bmatrix} 9 & 13,5 \end{bmatrix}$

PARTE 2 - SOLUÇÃO b)

Projetando o observador usando a forma dual e a forma canônica "controlador"

FORMA DUAL
$$\begin{cases} \text{"A"} \leftarrow A' \\ \text{"B"} \leftarrow C' \\ \text{"C"} \leftarrow B' \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} B & A*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} p \\ p*A \\ \vdots \\ p*A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 4,5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$