



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**



**EM608 – Elementos de Máquinas
ES690 – Sistemas Mecânicos**

ELEMENTOS ELÁSTICOS (MOLAS)

Prof. Gregory Bregion Daniel gbdaniel@fem.unicamp.br

Prof.^a Katia Lucchesi Cavalca katia@fem.unicamp.br

Campinas, 2º semestre 2020



INTRODUÇÃO

O termo mola refere-se às peças feitas em configurações específicas para promover uma variação de força, correspondente à uma deflexão significativa e/ou para armazenar energia potencial.

Molas são projetadas para promover força em tração (que puxa), em compressão (que empurra) ou em torção (torque), ou ainda, para armazenar energia, e podem ser divididas nestas quatro categorias gerais.



RIGIDEZ DA MOLA

Independendentemente da configuração da mola, esta se caracteriza por uma rigidez k , definida como a inclinação da sua curva força-deflexão. Se a inclinação for constante, a rigidez pode ser definida como:

$$k = \frac{F}{y}$$

Sendo F a força aplicada e y a deflexão correspondente.



Nas combinações em série, a mesma força passa por todas as molas, e cada uma contribui com uma fração da deflexão total.

Nas molas em paralelo, todas apresentam a mesma deflexão, e a força total divide-se entre cada uma das molas.

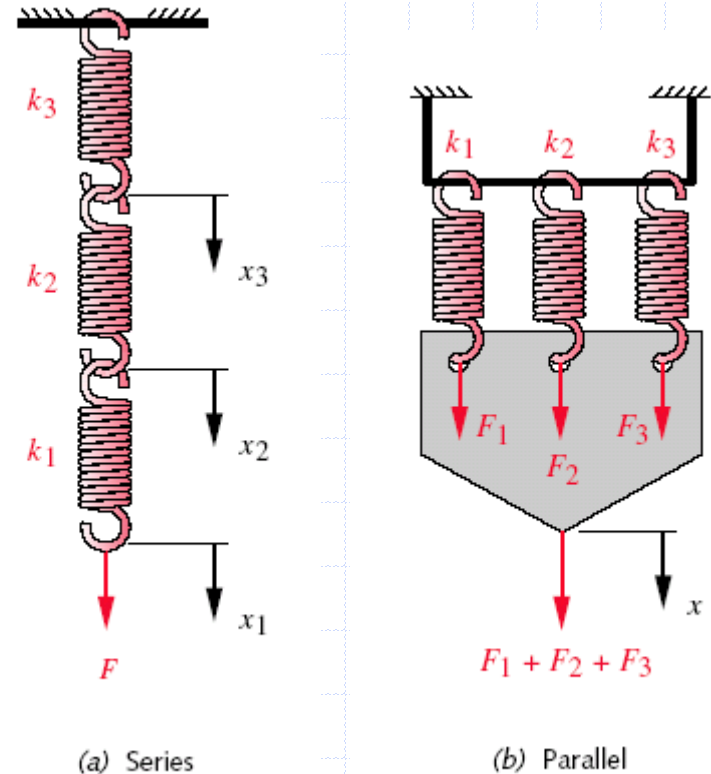
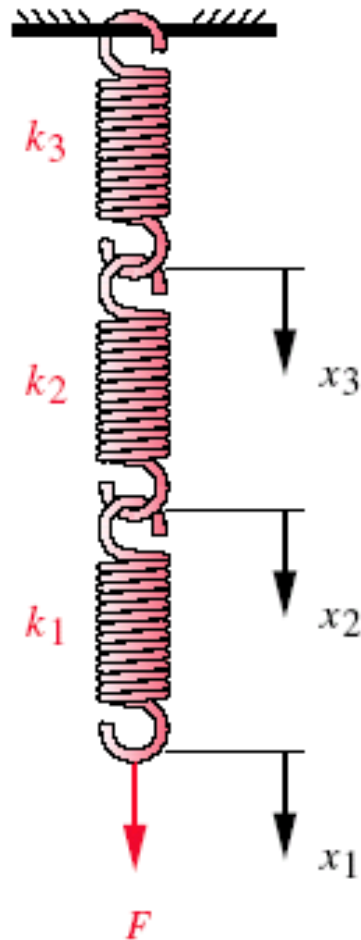


Figura 1 – Montagens de molas, em série e em paralelo



Para molas em série, a rigidez de cada uma das molas é adicionada reciprocamente (de forma inversa):



$$\Delta\delta_{total} = \Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 + \Delta\delta_3 + \dots + \Delta\delta_n$$

$$\frac{F}{k_{total}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} + \dots + \frac{F}{k_n}$$

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

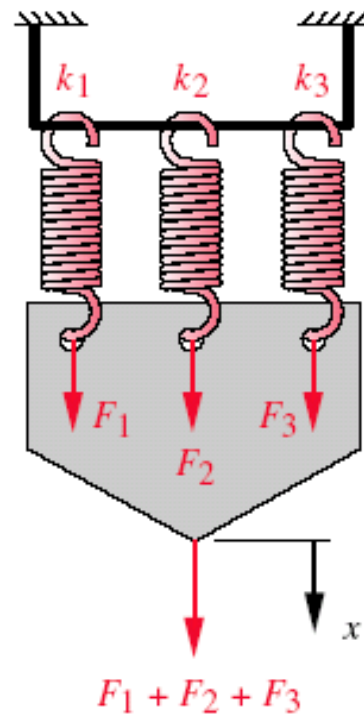


Para molas em paralelo, a rigidez de cada uma das molas é adicionada diretamente:

$$F_{total} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$$

$$K_{total} \Delta \delta = k_1 \Delta \delta + k_2 \Delta \delta + k_3 \Delta \delta + \dots + k_n \Delta \delta$$

$$k_{total} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$



CONFIGURAÇÕES DE MOLAS

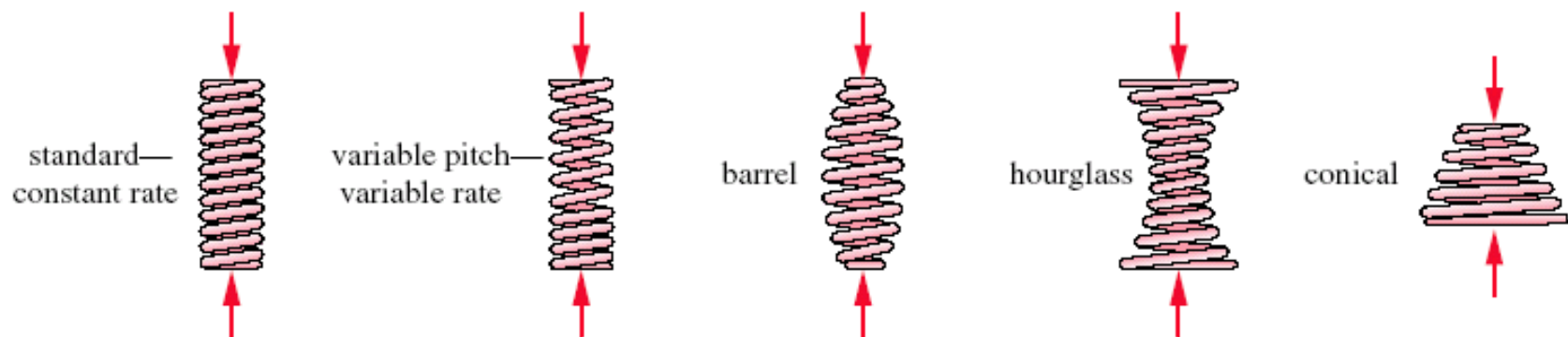
Molas podem ser divididas em categorias de diversas formas, como através de sua configuração física.

As formas das molas helicoidais podem ser em compressão, tração ou torção.

Exemplos de molas planas são as vigas biapoiadas ou engastadas, e também as molas compensadoras: mola prato, curva, ondulada, com garras, com fendas, etc.

Molas espirais são encontradas em relógios de corda, raramente encontradas atualmente.





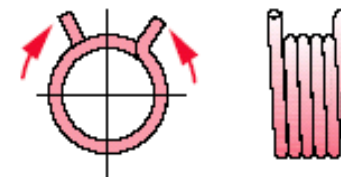
(a) Helical compression springs. *Push*—wide load and deflection range—round or rectangular wire. Standard has constant coil diameter, pitch, and rate. Barrel, hourglass, and variable-pitch springs are used to minimize resonant surging and vibration. Conical springs can be made with minimum solid height and with constant or increasing rate.



(b) Helical extension springs. *Pull*—wide load and deflection range—round or rectangular wire, constant rate.



(c) Drawbar springs. *Pull*—uses compression spring and drawbars to provide extension pull with fail-safe, positive stop.



(d) Torsion springs. *Twist*—round or rectangular wire—constant rate.

Figura 2 - Principais configurações de molas helicoidais

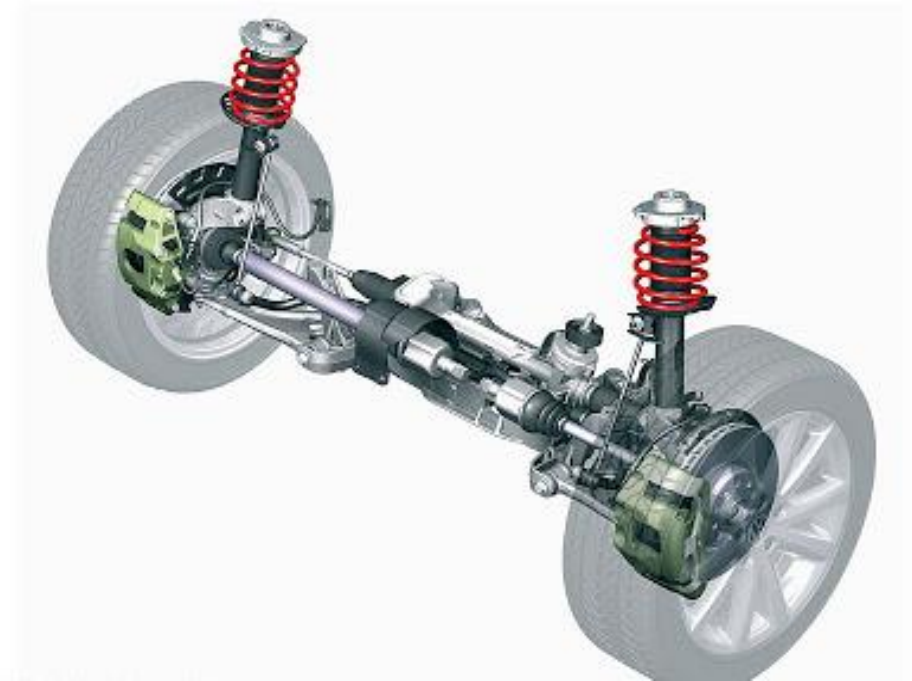


Aplicação molas helicoidais de compressão

Comando de válvula



Suspensão



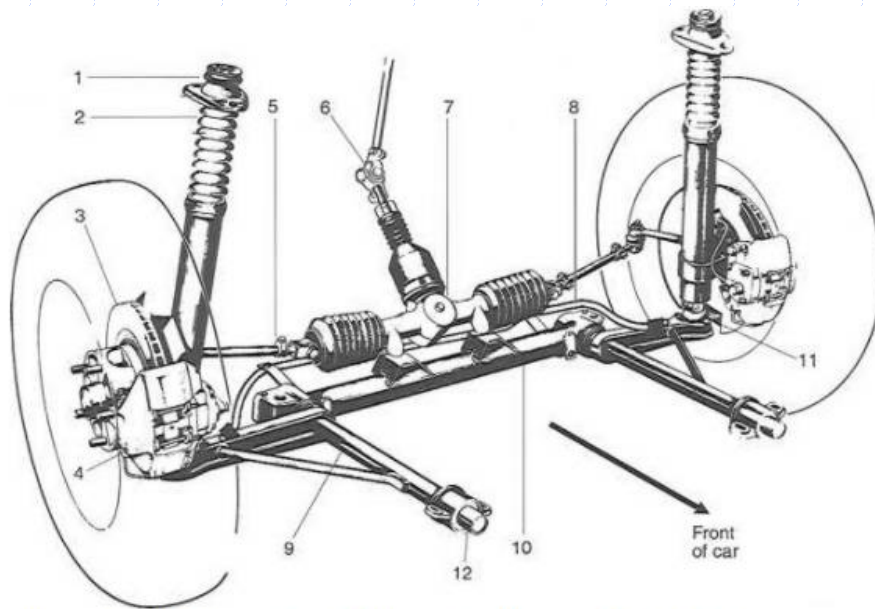
Aplicação molas helicoidais de tração

Cama Elástica

Máquina de lavar roupa



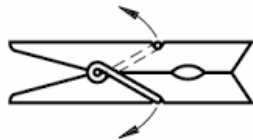
Aplicação molas helicoidais de torção



Suspensão dianteira com tipo McPherson do Porsche 911: a barra de torção está indicada pelo número 12 (Desenho: Porsche Repair Blog)

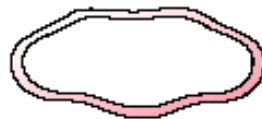
Portas automáticas

Prendedor de roupa





Belleville



wave



slotted

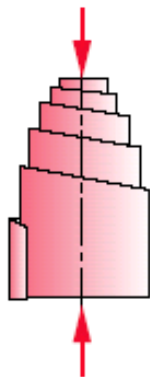


finger

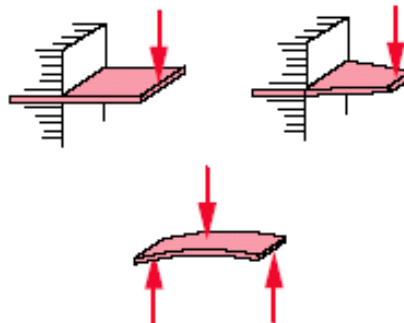


curved

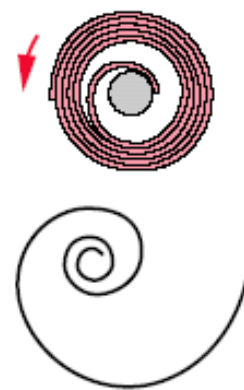
(e) Spring washers. *Push*—Belleville has high loads and low deflections—choice of rates (constant, increasing, or decreasing). Wave has light loads, low deflection, uses limited radial space. Slotted has higher deflections than Belleville. Finger is used for axial loading of bearings. Curved is used to absorb axial end play.



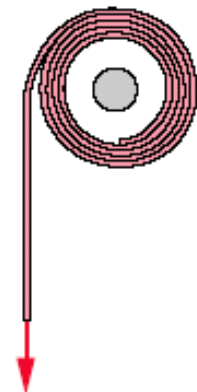
(f) Volute spring. *Push*—may have an inherently high friction damping.



(g) Beam springs. *Push or Pull*—wide load but low deflection range—rectangular or shaped cantilever, or simply supported.



(h) Power or motor springs. *Twist*—exerts torque over many turns. Shown in, and removed from, retainer.



(i) Constant Force. *Pull*—long deflection at low or zero rate.

Figura 3 - Principais configurações de molas



Aplicação molas Planas

Embreagem

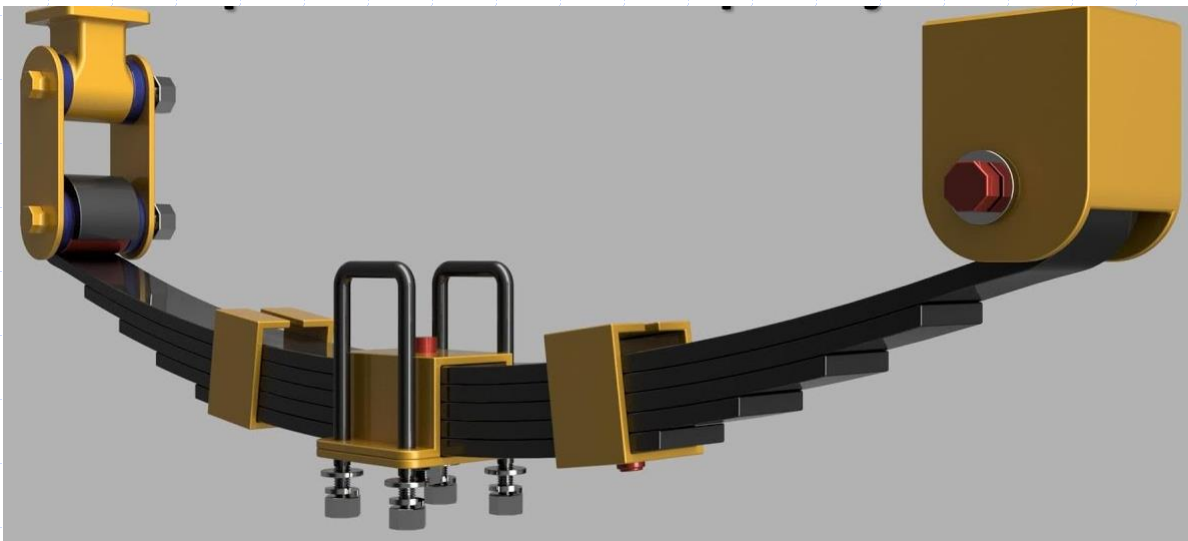


Ponta de eixo



Acoplamento flexível





Aplicação molas Planas

Feixe de molas - suspensão



MATERIAIS PARA MOLA

O material ideal para uma mola deve apresentar elevada resistência, alto limite de escoamento e um baixo módulo de elasticidade, para proporcionar máximo armazenamento de energia (área sob a região elástica da curva tensão- deformação).

Para molas solicitadas dinamicamente, as propriedades de resistência à fadiga do material são de importância fundamental.

Arame para Molas Helicoidais

Arame circular é o material mais comum para molas helicoidais, identificados pelo código ASTM.

Encontra-se disponível em uma seleção de ligas e numa faixa limitada de diâmetros para cada uma das ligas disponíveis.



Tabela 1 – Diâmetros de Arames mais comuns.

Ips (in)	A228	A229	A227	A232	A401	SI (mm)
0,004	X					0,10
0,005	X					0,12
0,006	X					0,16
0,008	X					0,20
0,010	X					0,25
0,012	X					0,30
0,014	X					0,35
0,016	X					0,40
0,018	X					0,45
0,020	X	X				0,50
0,022	X	X				0,55
0,024	X	X				0,60
0,026	X	X				0,65
0,028	X	X	X			0,70
0,030	X	X	X			0,80



Ips (in)	A228	A229	A227	A232	A401	SI (mm)
0,035	X	X	X	X		0,90
0,038	X	X	X	X		1,00
0,042	X	X	X	X		1,10
0,045	X	X	X	X		
0,048	X	X	X	X		1,20
0,051	X	X	X	X		
0,055	X	X	X	X		1,40
0,059	X	X	X	X		
0,063	X	X	X	X	X	1,60
0,067	X	X	X	X	X	
0,072	X	X	X	X	X	1,80
0,076	X	X	X	X	X	
0,081	X	X	X	X	X	2,00
0,085	X	X	X	X	X	2,20
0,092	X	X	X	X	X	
0,098	X	X	X	X	X	2,50
0,105	X	X	X	X	X	
0,112	X	X	X	X	X	2,80
0,125	X	X	X	X	X	3,00



Ips (in)	A228	A229	A227	A232	A401	SI (mm)
0,135	X	X	X	X	X	3,50
0,148	X	X	X	X	X	
0,162	X	X	X	X	X	4,00
0,177	X	X	X	X	X	4,50
0,192	X	X	X	X	X	5,00
0,207	X	X	X	X	X	5,50
0,225	X	X	X	X	X	6,00
0,250	X	X	X	X	X	6,50
0,281		X	X	X	X	7,00
0,312		X	X	X	X	8,00
0,343		X	X	X	X	9,00
0,362		X	X	X	X	
0,375		X	X	X	X	
0,406		X	X	X		10,0
0,437		X	X	X		11,0
0,469		X	X			12,0
0,500		X	X			13,0
0,531		X	X			14,0
0,562		X	X			15,0
0,625		X	X			16,0



RESISTÊNCIA A TRAÇÃO

A relação entre o diâmetro do arame e a resistência à tração é mostrada na figura 4.

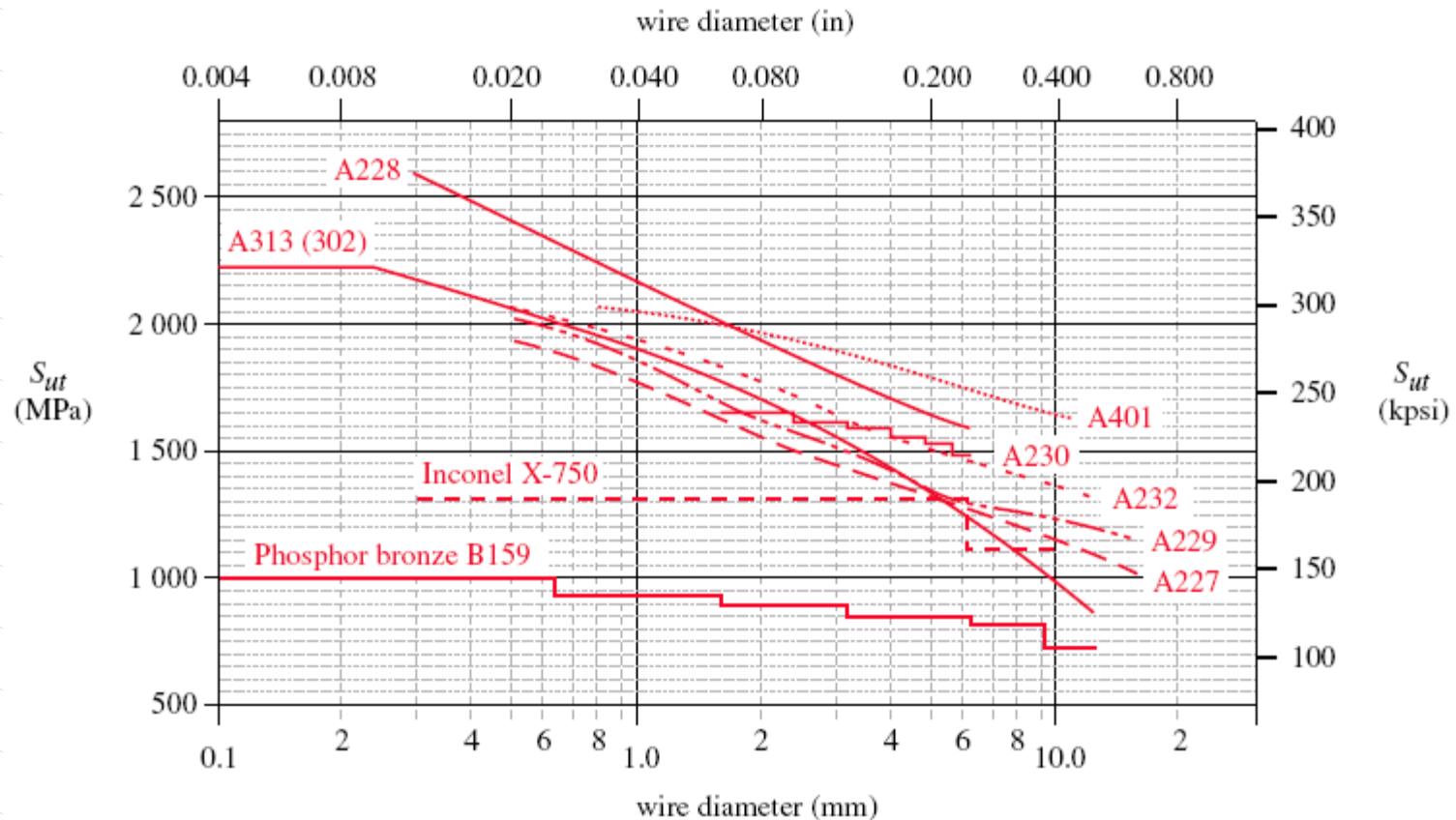


Figura 4 - Resistência Mínima de tração para arames de molas



A resistência à tração para os materiais de arames com diâmetros tabelados, pode ser ajustada com boa precisão através de uma função exponencial na forma:

$$S_{ut} = A \cdot d^b$$

No qual A e b são definidos na Tabela 2 para estes materiais de arames, sobre as faixas especificadas de diâmetros.

Tabela 2 – Coeficientes da equação da resistência à tração.

Table 13-4 Coefficients and Exponents for Equation 13.3

Source: Reference 1

ASTM #	Material	Range		Exponent b	Coefficient A		Correlation Factor
		mm	in		MPa	psi	
A227	Cold drawn	0.5–16	0.020–0.625	–0.182 2	1 753.3	141 040	0.998
A228	Music wire	0.3–6	0.010–0.250	–0.1625	2 153.5	184 649	0.9997
A229	Oil tempered	0.5–16	0.020–0.625	–0.183 3	1 831.2	146 780	0.999
A232	Chrome-v.	0.5–12	0.020–0.500	–0.145 3	1 909.9	173 128	0.998
A401	Chrome-s.	0.8–11	0.031–0.437	–0.093 4	2 059.2	220 779	0.991



A Figura 5 apresenta um gráfico destas funções de resistência em eixos lineares.

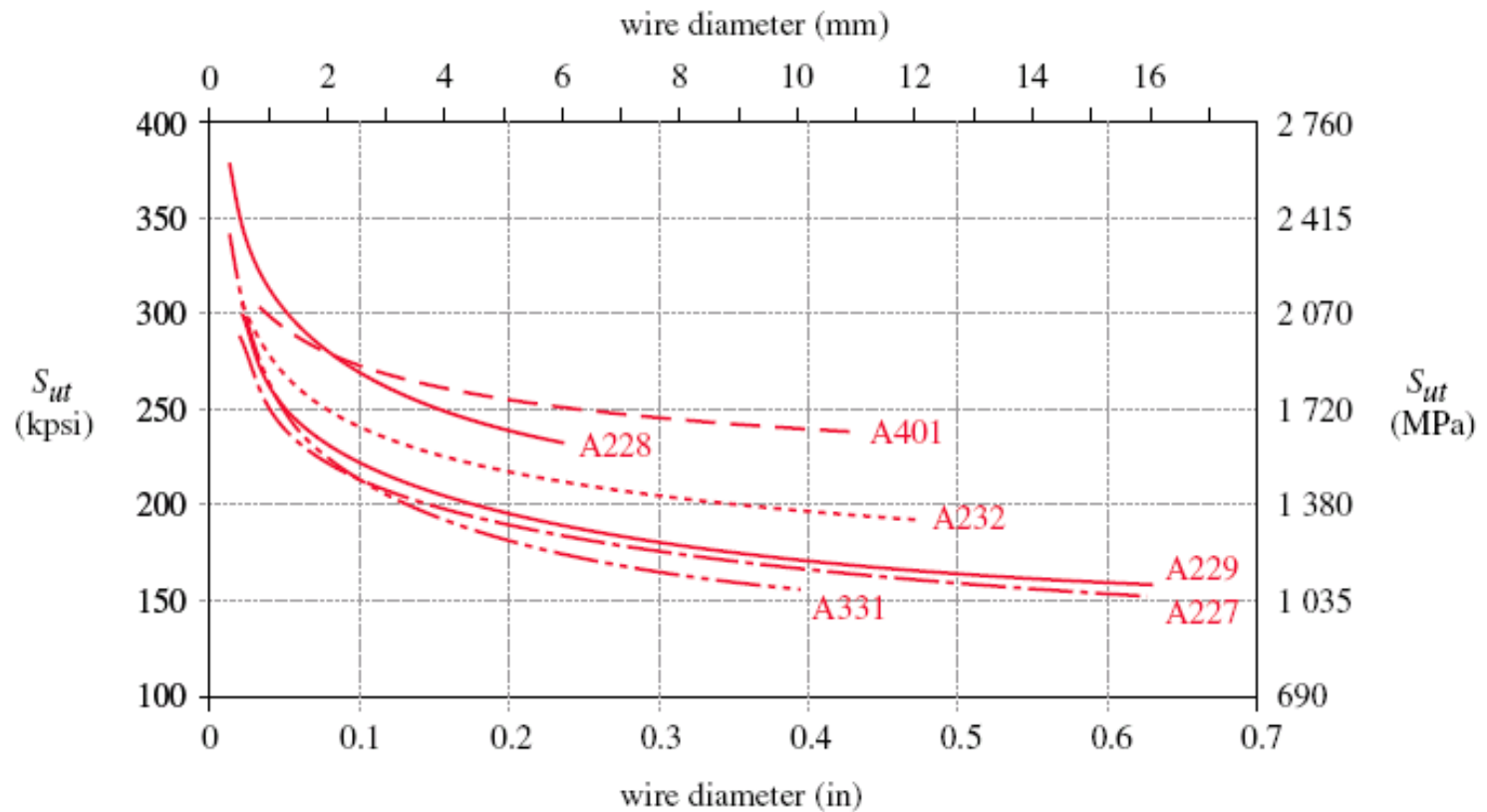


Figura 5 - Resistência a Tração Mínima para Arames de Aço.



RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

Testes práticos determinaram uma estimativa razoável da resistência a torção, para materiais de arames específicos para molas, de 67% de S_{ut} .

$$S_{us} \approx 0,67.S_{ut}$$



MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

A mola helicoidal de compressão mais comum é a de diâmetro de espiras constante, passo constante e arame circular, conforme mostrado na figura 2(a).

Considera-se este tipo como a mola helicoidal de compressão padrão (HCS).

Outras configurações são possíveis, como cônicas, em forma de barril, em forma de ampulheta, e de passo variável, também demonstrado na figura 2.

Todas proporcionam uma força que comprime, ou empurra, o elemento associado.



O diâmetro do arame d , o diâmetro médio da espira D , o comprimento livre L_f e o número de espiras N_f , ou o passo das espiras p , são usados para definir a geometria da mola, com propósitos de cálculo e construção.

O diâmetro externo $D_o = D + d$ e o diâmetro interno $D_i = D - d$

definem a dimensão mínima do furo no qual a mola pode ser encaixada, ou o diâmetro máximo do pino, sobre o qual a mola pode ser montada.

As folgas diametraais mínimas recomendadas entre D_o e um furo, ou entre D_i e um pino, são:

0,10 D para $D < 0,5$ in (13 mm)

ou 0,05 D para $D > 0,5$ in.

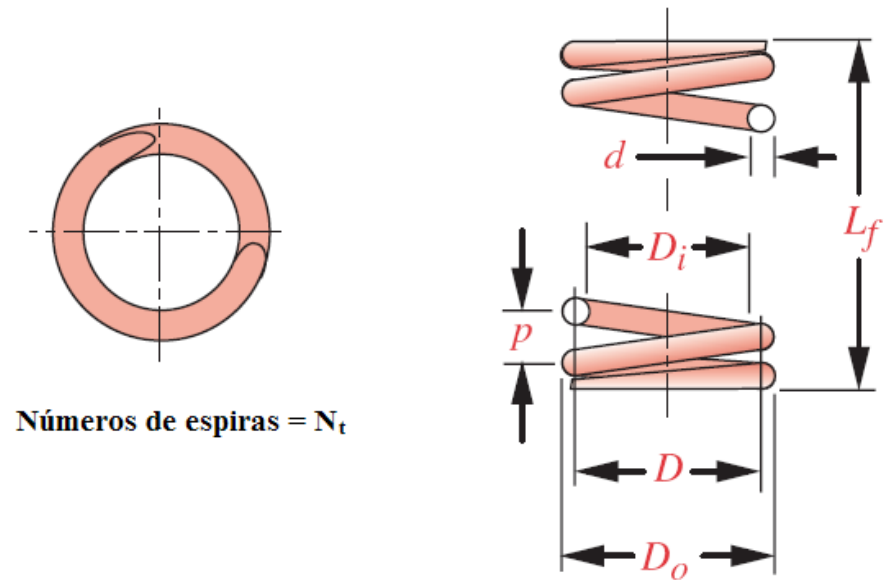


Figura 6 - Parâmetros Dimensionais para Molas Helicoidais de Compressão



Comprimento da Mola

O comprimento livre L_f é o comprimento total da mola sem carga, ou seja, como fabricada.

O comprimento montado L_a é aquele após a instalação, com a deflexão inicial $y_{initial}$ devido à pré-carga de montagem.

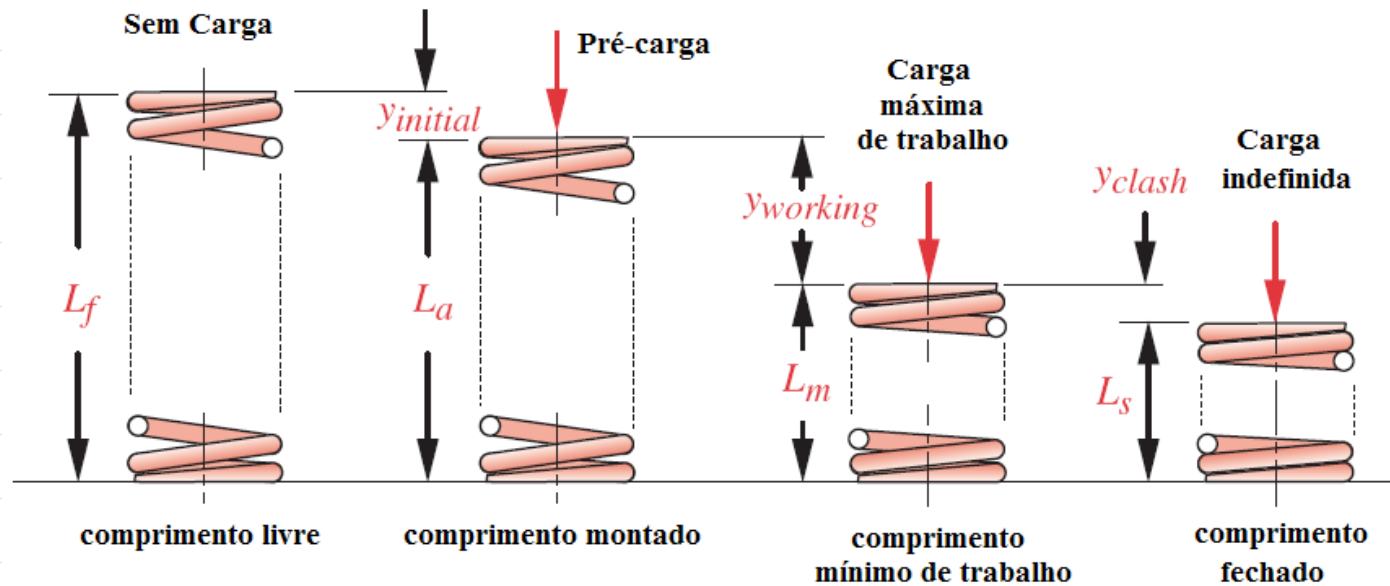


Figura 7 - Comprimentos de uma Mola Helicoidal de Compressão.

A deflexão de trabalho é $y_{working}$ e L_m é a altura da mola comprimida durante o serviço. A altura de fechamento, ou altura sólida L_s , é o seu comprimento quando comprimida de tal modo que as espiras estejam em contato.

A deflexão de contato y_{clash} é a diferença entre a altura da mola em serviço (L_m) e a altura de fechamento (L_s), sendo recomendado de 10 a 15% da deflexão de trabalho, ou seja, $y_{clash} = 0,15 y_{working}$.



Detalhes de Construção das Extremidades

Há quatro tipos de acabamento para as terminações das molas helicoidais de compressão: plana, plana nivelada, quadrada, e quadrada nivelada.

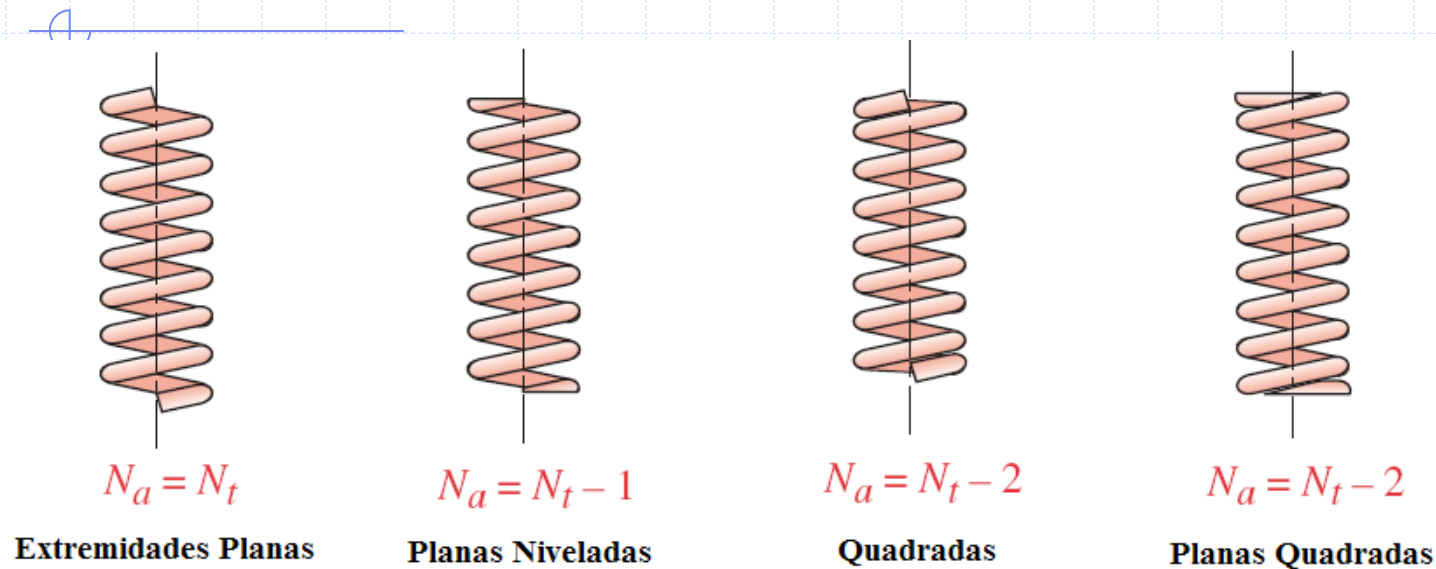


Figura 8 - Acabamento para Molas Helicoidais de Compressão.

Espiras Ativas

O número total de espiras N_t pode ou não contribuir ativamente para a deflexão da mola, dependendo do acabamento da extremidade.

O número de espiras ativas N_a é necessário para os propósitos de cálculo de deflexão e rigidez da mola.



Índice de Mola

O índice de mola C é a razão entre o diâmetro médio da espira D e o diâmetro do arame d :

$$C = D / d$$

A faixa recomendável de C é de 4 a 12. Para $C < 4$, é difícil construir a mola e para $C > 12$, as espiras da mola podem se emaranhar.



Deflexão da Mola

A deflexão de uma mola helicoidal de compressão, de arame circular, é:

$$y = \frac{8.F.D^3.N_a}{d^4.G}$$

F é a carga axial aplicada na mola, D é o diâmetro médio das espiras, d é o diâmetro do arame, N_a é o número de espiras ativas, e G é o módulo de elasticidade transversal do material.

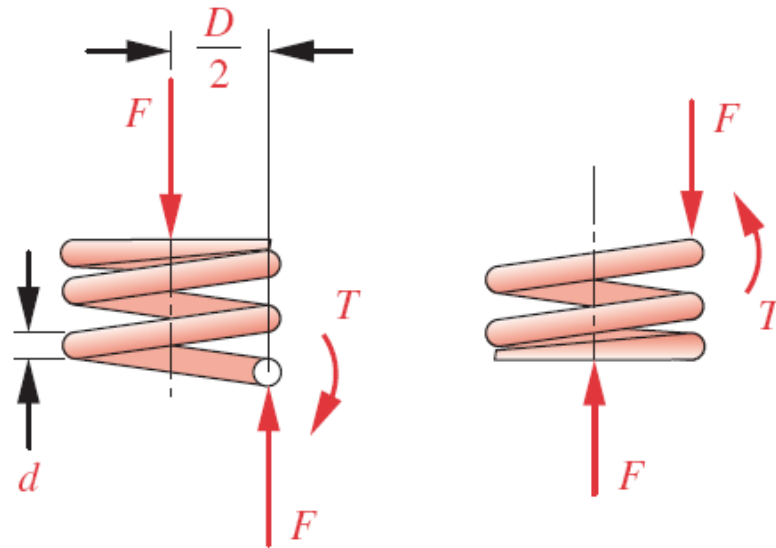


Figura 9 - Diagrama de Forças e Torques nas Espiras.



Deflexão da Mola

A equação para a rigidez da mola é encontrada rearranjando a equação da deflexão:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4 \cdot G}{8 \cdot D^3 \cdot N_a}$$

A rigidez da mola deve ser definida entre 15% e 85% de sua deflexão total, e sua faixa de deflexão de trabalho ($L_a - L_m$), mantida nesta região.

Quando a mola atinge sua altura de fechamento L_s , todas as espiras estão em contato, e a rigidez da mola aproxima-se do módulo de elasticidade do material.

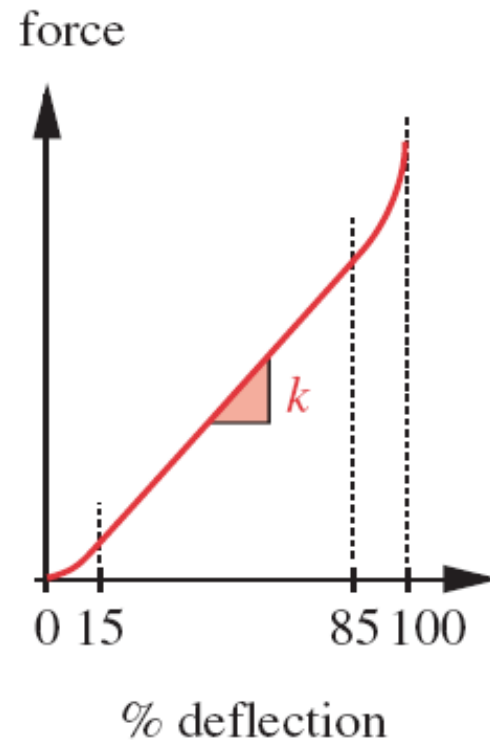
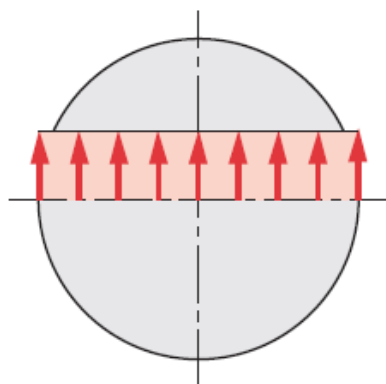
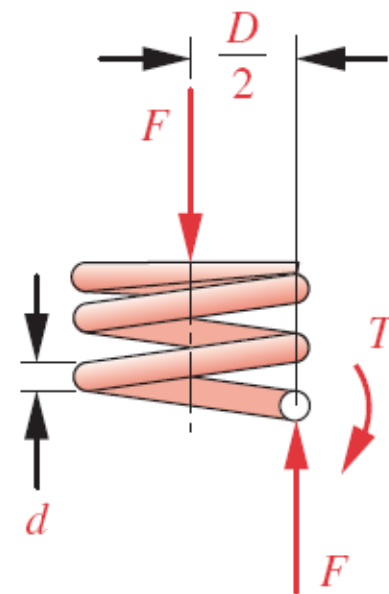


Figura 10 - Curva Força X Deflexão.

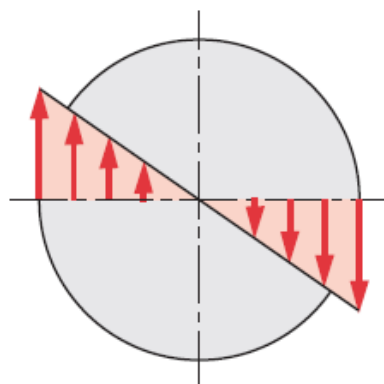


Esforços em Molas Helicoidais de Compressão

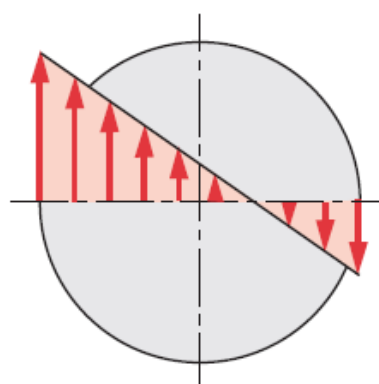
Ambas componentes de cisalhamento têm distribuições através das secções, como mostrado na figura 11 (a) e (b).



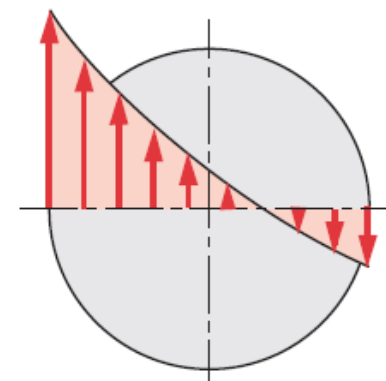
(a) Distribuição de Tensão para Cisalhamento por Esforço Cortante.



(b) Distribuição de Tensão de Cisalhamento por Torção.



(c) Tensão Combinada de Torção e Cisalhamento por Esforço Cortante.

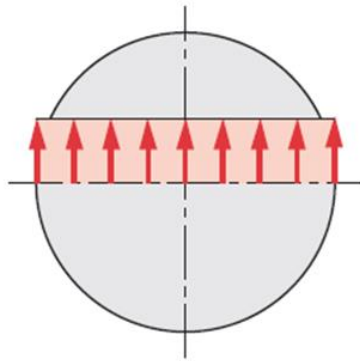


(d) Efeito de Concentração de Tensão no Diâmetro Interno.

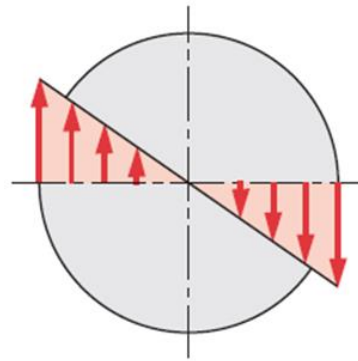
Figura 11 - Distribuição de Tensão na Seção do Arame.



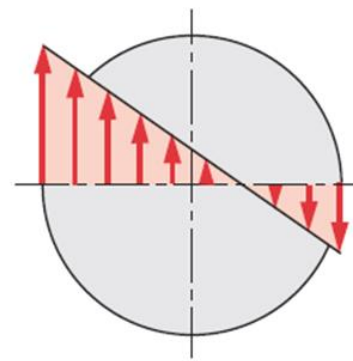
As componentes se adicionam diretamente e a máxima tensão de cisalhamento ocorre na fibra interna da seção transversal do arame, como mostrado na figura 11 (c).



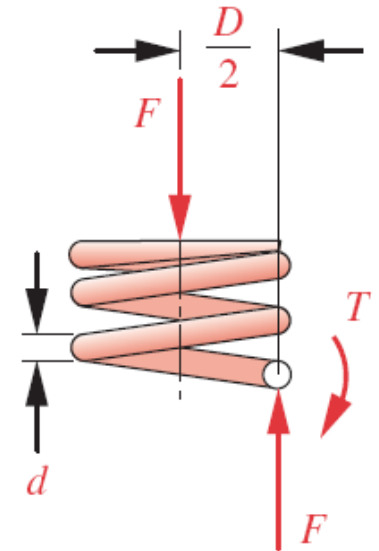
(a) Distribuição de Tensão para Cisalhamento por Esforço Cortante.



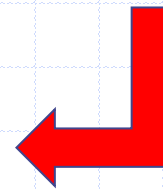
(b) Distribuição de Tensão de Cisalhamento por Torção.



(c) Tensão Combinada de Torção e Cisalhamento por Esforço Cortante.



$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A} = \frac{8.F.D}{\pi.d^3} + \frac{4.F}{\pi.d^2}$$



$$\tau_{\max} = \frac{8.F.D}{\pi.d^3} \left(1 + \frac{0,5}{C} \right) \quad \tau_{\max} = K_s \cdot \frac{8.F.D}{\pi.d^3} \quad \text{onde} \quad K_s = \left(1 + \frac{0,5}{C} \right)$$



Wahl determinou o fator de concentração de tensões para carregamento dinâmico, e definiu um fator K_w que inclui os efeitos do cisalhamento direto da concentração de tensões devido à curvatura.

$$K_w = \frac{4.C - 1}{4.C - 4} + \frac{0,615}{C} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = K_w \cdot \frac{8.F.D}{\pi.d^3}$$

Desde que o fator de Wahl, K_w , inclui ambos os efeitos, pode-se separá-lo em um fator de curvatura K_c e um fator de cisalhamento direto K_s , utilizando:

$$K_w = K_s \cdot K_c$$

SOLICITAÇÃO ESTÁTICA: o escoamento é o critério de falha. Se o material escoar, irá aliviar a concentração local de tensões, devido a curvatura, considerando-se apenas o cisalhamento direto K_s .

SOLICITAÇÃO DINÂMICA: a falha será por fadiga, em tensões abaixo do ponto de escoamento, incorporando os efeitos do cisalhamento direto e da curvatura, portanto, considera-se K_w .

