ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

16 – Projeto de controladores: método da análise em frequência

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Resposta em frequência de planta em malha fechada;
  - 2) Compensador avanço;
  - 3) Compensador atraso;
  - 4) Compensador avanço-atraso;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Resposta em frequência de planta em malha fechada

- **1.1. Resposta em frequência:**
  - Uma planta em **malha aberta** $G(j\omega)$ com ganho K apresenta como característica geral:
    - Se $\omega \ll \omega_c$: $\boxed{|KG(j\omega)| \gg 1}$
    - Se $\omega \gg \omega_c$: $\boxed{|KG(j\omega)| \ll 1}$
    - ω_c: frequência de corte;
    - A resposta de sistemas dinâmicos convencionais é atenuada em altas frequências.

1. Resposta em frequência de planta em malha fechada

- **1.1. Resposta em frequência:**
  - Magnitude da planta em **malha fechada:**

$$\boxed{H(j\omega) = \left|\frac{KG(j\omega)}{1 + KG(j\omega)}\right|} \qquad (1)$$

    - Se $\omega \ll \omega_c$:

$$\boxed{|H(j\omega)| \approx 1}$$

    - Se $\omega \gg \omega_c$:

$$\boxed{|H(j\omega)| \approx |KG|}$$

1. Resposta em frequência de planta em malha fechada

- **1.1. Resposta em frequência:**
  - Acoplando um compensador $D(j\omega)$, a **equação característica** se torna

$$\boxed{1 + KD(j\omega)G(j\omega) = 1 + L(j\omega)} \tag{2}$$

  - Note que o compensador $D(j\omega)$ altera as características de magnitude e fase do sistema em malha aberta $KD(j\omega)G(j\omega)$ e, portanto, as margens de estabilidade do sistema em malha fechada.

2. Compensador avanço

- **2.1. Compensador avanço:**
  - TF do compensador avanço:

$$\boxed{D(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}} \tag{3}$$

    - Onde $\alpha < 1$;
  - Magnitude e fase de $D(s)$:

$$\boxed{M(j\omega) = K_c \alpha \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\omega T)^2}}}$$

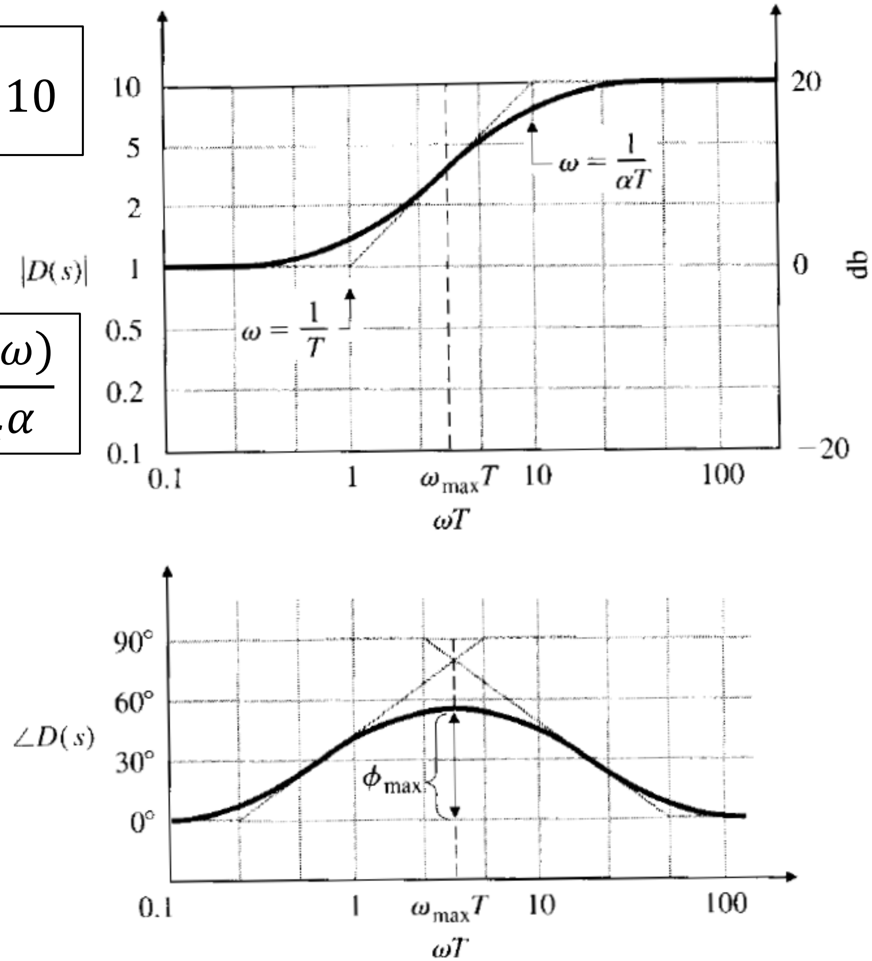
$$\boxed{\phi(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\alpha\omega T)} \tag{4}$$

2. Compensador avanço

- **2.2. Diagrama de Bode:**
  - Baixas frequências $\omega \to 0$:
    - $M(\omega) = K_c\alpha;$
    - $\phi(\omega) = 0;$
  - Altas frequências $\omega \to \infty$:
    - $M(\omega) \to K_c\alpha/\alpha;$
    - $\phi(\omega) = 0;$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} = 10}$$

$$\boxed{\frac{M(\omega)}{K_c\alpha}}$$



2. Compensador avanço

- **2.2. Diagrama de Bode:**
  - A contribuição de fase é máxima ($\phi_{\max}$) em

$$\boxed{\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} \tag{5}$$

    - Onde

$$\boxed{\alpha = \frac{1 - \sin\phi_{\max}}{1 + \sin\phi_{\max}}} \tag{6}$$

    - Assim, deseja-se encontrar o valor de α que garanta a margem de fase desejada e que produza um ruído aceitável em altas frequências (a magnitude em altas frequências é amplificada em função de α, ver o diagrama de Bode).

2. Compensador avanço

- **2.3. Projeto do compensador avanço:**
  - 1) Utilizando as especificações de erro estacionário e a planta sem compensador, calcular o ganho K;
  - 2) Calcular a margem de fase do sistema sem compensador $KG(s)$;
  - 3) Determinar a margem de fase necessária $\phi_{\max}$ (garantir uma margem extra de 5° a 10°);
  - 4) Calcular o valor α que garanta a margem de fase especificada. A nova frequência de cruzamento ω_c é obtida para $\omega = (T\sqrt{\alpha})^{-1}$, ou seja, na magnitude $\pm 1/\sqrt{\alpha}$.

2. Compensador avanço

- **2.3. Projeto do compensador avanço:**
  - 5) Utilizando $\omega_{\max} = \omega_c$, calcular T;
  - 6) Calcular o polo e o zero do compensador;
  - 7) Calcular a constante $K_c = K/\alpha$;
  - 8) Verificar a resposta do sistema $KD(s)G(s)$ em malha fechada e refinar o projeto.

3. Compensador atraso

- **3.1. Compensador atraso:**
  - TF do compensador atraso:

$$\boxed{D(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta T s + 1}} \tag{7}$$

    - Onde $\beta > 1$;
  - Magnitude e fase de $D(s)$:

$$\boxed{M(j\omega) = K_c \beta \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\beta \omega T)^2}}}$$

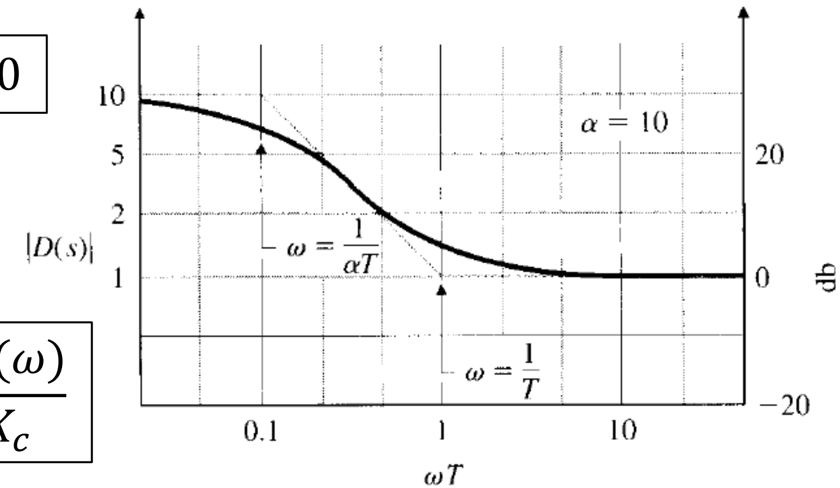
$$\boxed{\phi(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\beta \omega T)} \tag{8}$$

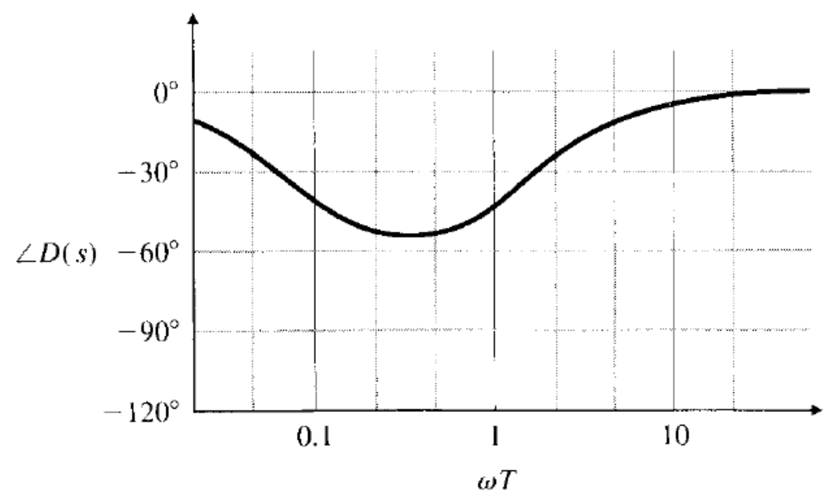
3. Compensador atraso

- **3.2. Diagrama de Bode:**
  - Baixas frequências $\omega \to 0$:
    - $M(\omega) = K_c\beta$;
    - $\phi(\omega) = 0$;
  - Altas frequências $\omega \to \infty$:
    - $M(\omega) \to K_c$;
    - $\phi(\omega) = 0$;

$\boxed{\beta = 10}$

$\boxed{\dfrac{M(\omega)}{K_c}}$





3. Compensador atraso

- **3.2. Diagrama de Bode:**
  - Como $\beta > 1$, o polo do compensador é puxado para baixas frequências, amplificando o ganho para esta faixa espectral;
  - Com o polo e o zero perto da origem (através da escolha de β), a resposta estacionária do sistema é aprimorada enquanto que a resposta transiente não é afetada drasticamente.

3. Compensador atraso

- **3.3. Projeto do compensador atraso:**
  - 1) Utilizando as especificações de erro estacionário e a planta sem compensador, calcular o ganho K;
  - 2) Plotar o diagrama de Bode de $KG(s)$. Se os requisitos de margem de ganho e fase não forem satisfeitos, encontrar a frequência onde a fase seja $-180° + PM + 10°$;
  - 3) Utilizar a frequência correspondente como a nova frequência de cruzamento ω_c;
  - 4) Escolher a frequência do polo $\omega = 1/T$ uma década (10 em escala linear) abaixo de ω_c. Obter o valor de T;

3. Compensador atraso

- **3.3. Projeto do compensador atraso:**
  - 5) Calcular a atenuação $(-20\log\beta)$ necessária para que a magnitude seja 0 dB na frequência de corte. Calcular β;
  - 6) Determinar a constante $K_c = K/\beta$;
  - 7) Verificar a resposta do sistema $KD(s)G(s)$ em malha fechada e refinar o projeto.

4. Compensador avanço-atraso

- **4.1. Compensador avanço-atraso:**
  - Função de transferência:

$$\boxed{D(s) = K_c\left(\frac{s+1/T_1}{s+\gamma/T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+1/\beta T_2}\right)} \quad (9)$$

    - Onde $\gamma > 1$ (avanço) e $\beta > 1$ (atraso);
    - Pode-se escolher $\gamma = \beta$;
  - A contribuição de fase do avanço (T_1) altera a resposta em frequência aumentando a margem de fase em ω_c;
  - O fase do atraso (T_2) permite aumentar o ganho em baixas frequências e melhorar o desempenho do sistema em regime estacionário.

4. Compensador avanço-atraso

- **4.2. Projeto do compensador avanço-atraso:**
  - 1) Utilizando as especificações de erro estacionário e a planta sem compensador, calcular o ganho K;
  - 2) Plotar o diagrama de Bode de $KG(s)$;
  - 3) Definir a nova frequência de corte ω como uma década abaixo da frequência de cruzamento de ganho;
  - 4) Utilizando $\omega = 1/T_2$, calcular T_2;
  - 5) Utilizando $\phi_{\max}$ (com tolerância de 5 a 10°), calcular β pela fórmula do compensador avanço;

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \sin\phi_{\max}}{1 + \sin\phi_{\max}}}$$

4. Compensador avanço-atraso

- **4.2. Projeto do compensador avanço-atraso:**
  - 6) Utilizando o valor de α e da nova frequência de cruzamento, determinar o valor de T_1;

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{T_1\sqrt{\alpha}}}$$

  - 7) Fechar a malha e verificar o desempenho do sistema.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Compare o diagrama de Bode de um compensador avanço com um controlador PD;
  - 2) Compare o diagrama de Bode de um compensador atraso com um controlador PI;
  - 3) Compare o diagrama de Bode de um compensador avanço-atraso com um controlador PID;
  - 4) Qual é o efeito de ajustar as margens de ganho e de fase na resposta dinâmica do sistema em malha fechada?

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 16.1)** Seja a função de transferência em malha aberta $G(s)$, projete o compensador avanço que proporcione um erro de velocidade de 0,05 s, margem de fase (mínima) de 50° e margem de ganho (mínima) de 10 dB.

$$\boxed{G(s) = \frac{4}{s(s+2)}}$$

Exercícios

- **Ex. 16.1)**
  - Compensador avanço:

$$\boxed{D(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}}$$

  - Erro estacionário à rampa:
    - Constante de erro de velocidade:

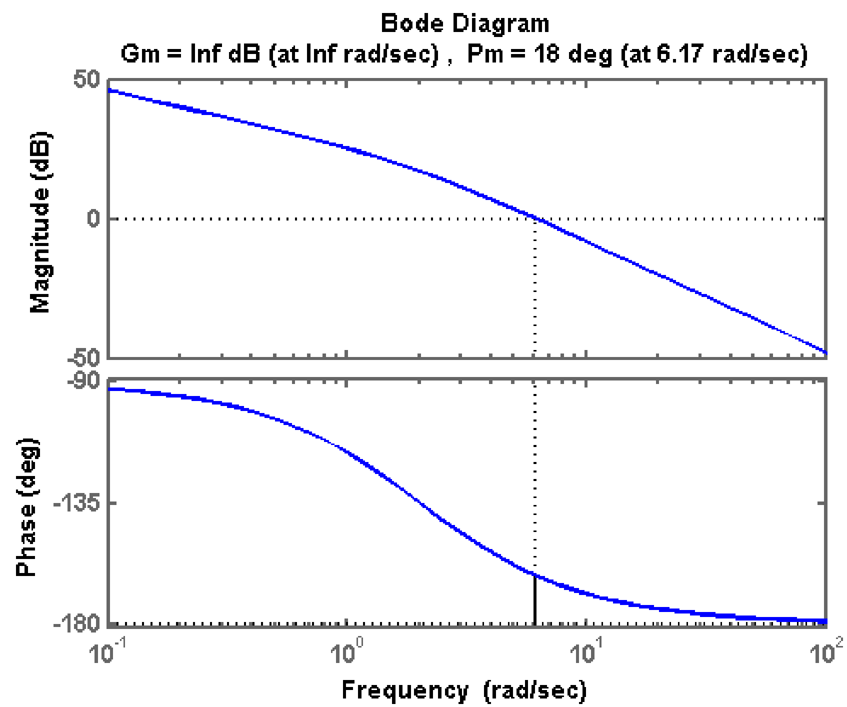
$$\boxed{K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.05} = 20}$$

$$\boxed{K_v = \lim_{s \to 0} sKG(s) = 2K \Rightarrow K = K_c \alpha = 10}$$

Exercícios

- **Ex. 16.1)**
  - Margens de estabilidade de $KG(s)$:
    - $GM = \infty$;
    - $PM = 18°$;
    - Margem de fase desejada: 50°+5°= 55°;
    - Incremento de fase necessário:

$$\boxed{\phi_m = 55° - 18° = 37°}$$



Exercícios

- **Ex. 16.1)**
  - Cálculo de $\alpha < 1$:

$$\boxed{\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} = 0.249}$$

  - Frequência de cruzamento de ganho:

$$\boxed{\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right| = |2.00| = |6.05|\ \text{dB}}$$

    - Do diagrama de Bode, o cruzamento em –6.05 dB ocorre em $\omega_c = 8.85$ rad/s, portanto,

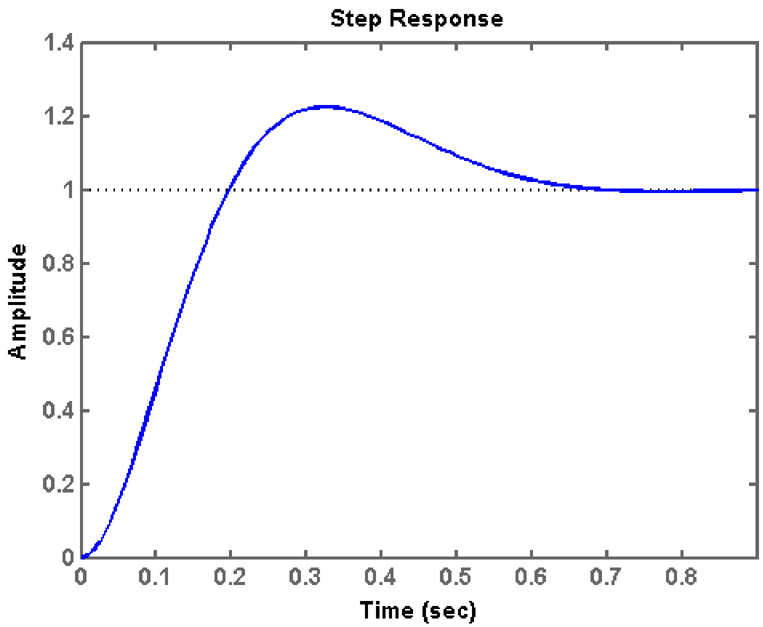
$$\boxed{T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0.23}$$

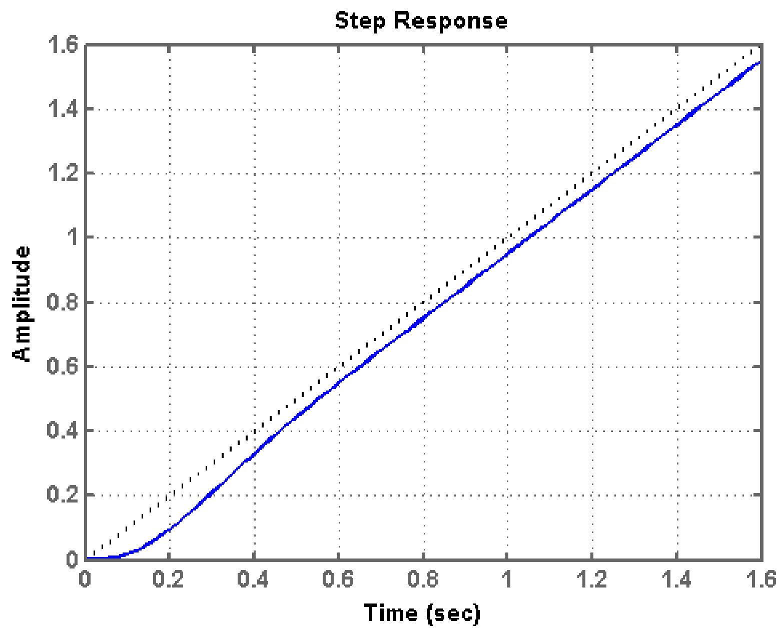
Exercícios

- **Ex. 16.1)**
  - Compensador:

$$D(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = 10\frac{0.2266s+1}{0.05634s+1}$$

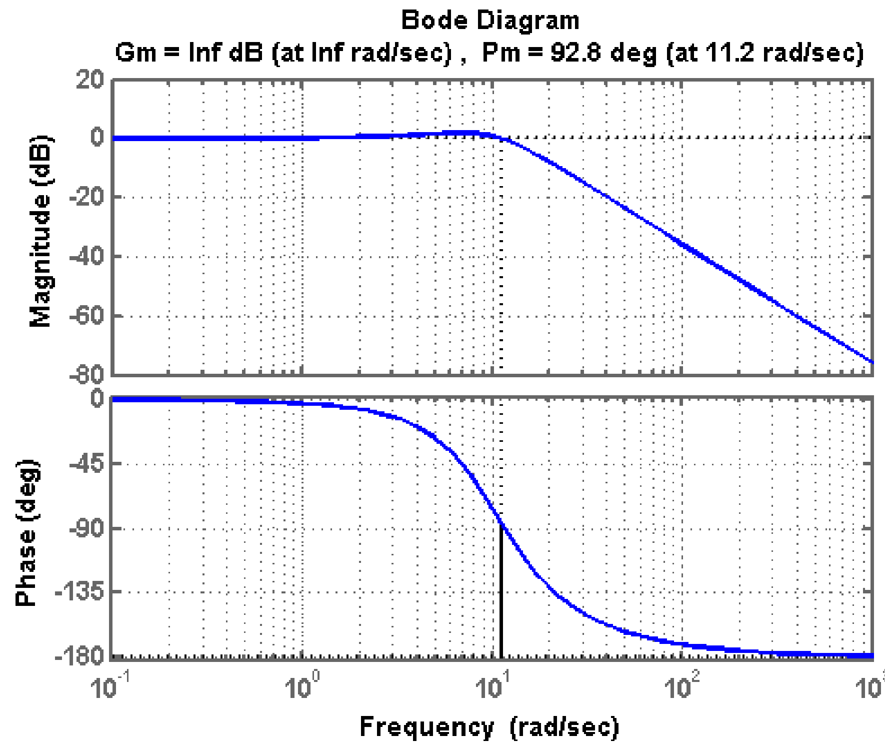
  - Resposta ao degrau e à rampa (verifique o erro estacionário):





Exercícios

- **Ex. 16.1)**
  - Margens de estabilidade (planta com controlador):
    - $GM = \infty > 10$ dB;
    - $PM = 92.8° > 50°$.



Exercícios

- **Ex. 16.2)** Seja a função de transferência em malha aberta $G(s)$, projete o compensador atraso que proporcione um erro de velocidade de 0,2 s, margem de fase (mínima) de 40° e margem de ganho (mínima) de 10 dB.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}}$$

Exercícios

- **Ex. 16.2)**
  - Compensador atraso:

$$\boxed{D(s) = K_c\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}}$$

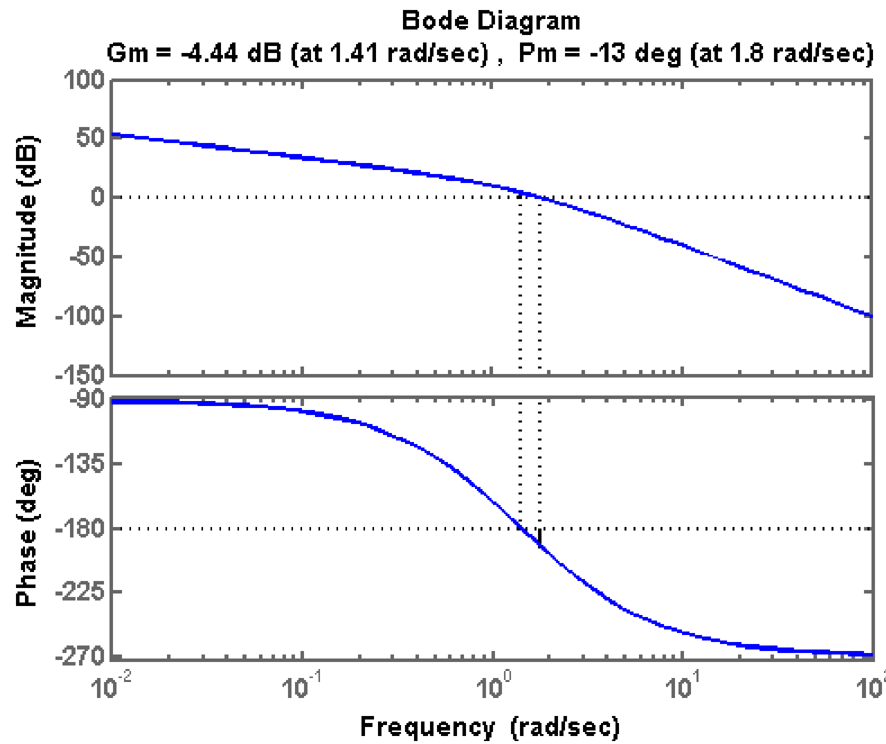
  - Erro estacionário à rampa:
    - Constante de erro de velocidade:

$$\boxed{K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.2} = 5}$$

$$\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} sKG(s) = K \Rightarrow K = K_c\beta = 5}$$

Exercícios

- **Ex. 16.2)**
  - Margens de estabilidade:
    - $GM = -4.44$ dB < 10 dB;
    - $PM = -13° < 40°$;
    - As margens não atendem às especificações;
    - Margens negativas → sistema instável;
    - Para
      $\phi = -180° + PM + 10°$
      $\phi = -130°$ →
      $\omega = \omega_c = 0.488$ rad/s.



Exercícios

- **Ex. 16.2)**
  - Margens de estabilidade:
    - Escolhendo $\omega = 0.05$ rad/s (uma década abaixo de ω_c),

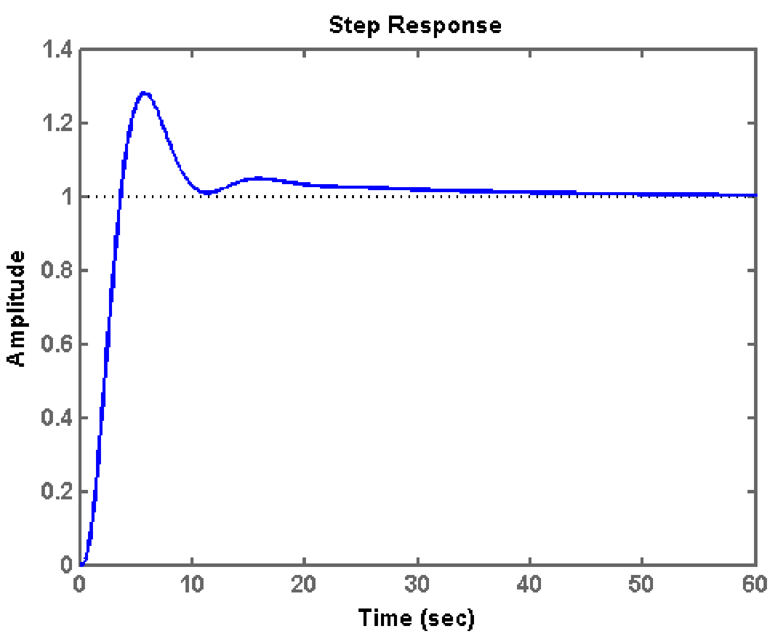
$$\boxed{T = \frac{1}{\omega} = 20}$$

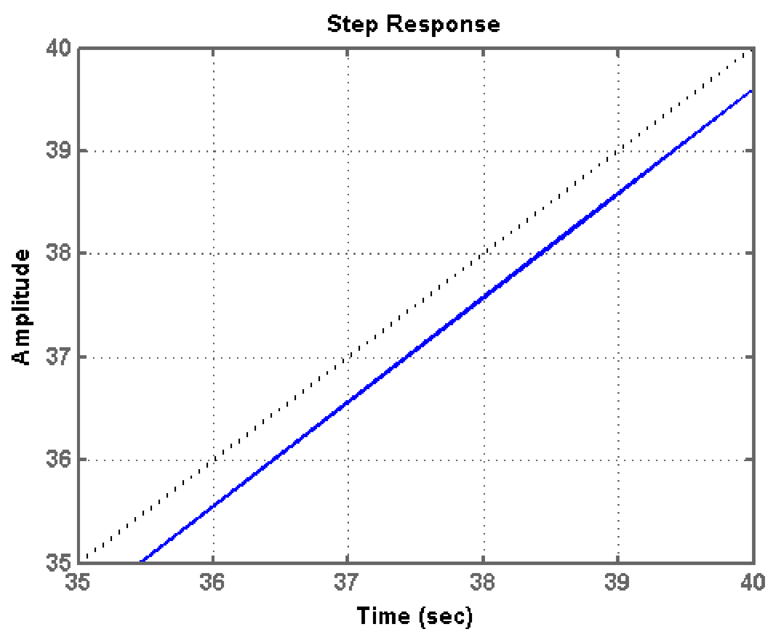
    - Para que a atenuação seja 0 dB em $\omega_c = 0.5$ rad/s, é necessário um ganho de -19 dB (veja no diagrama de Bode). Assim, calculando $\beta > 1$:

$$\boxed{-19 = -20\log\beta \Rightarrow \beta = 8.9}$$

Exercícios

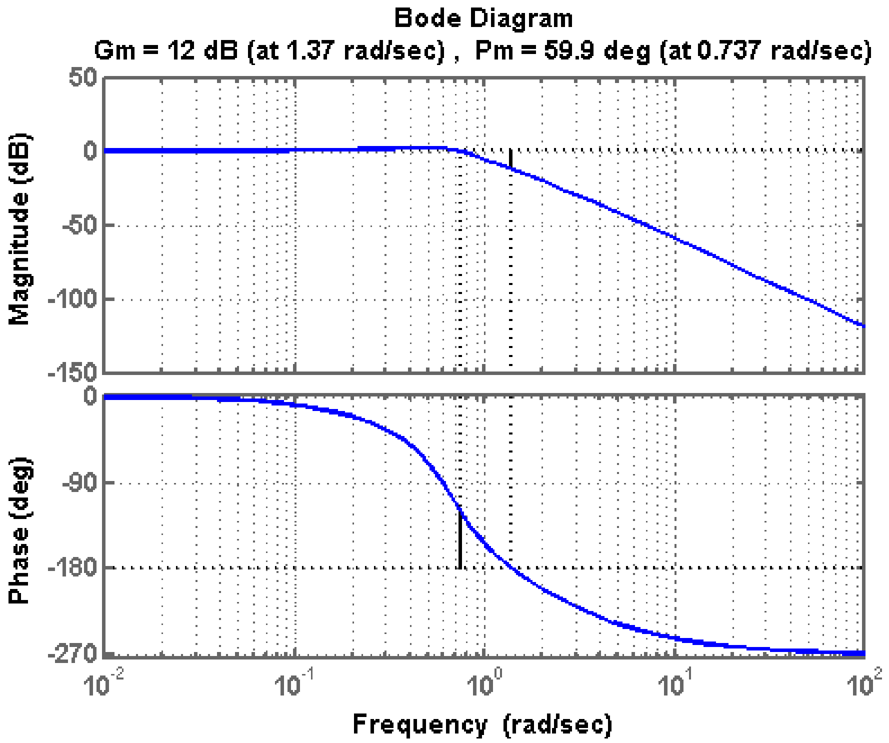
- **Ex. 16.2)**
  - Compensador atraso: $$\boxed{D(s) = 5\frac{20s+1}{178s+1}}$$
  - Resposta ao degrau e à rampa, sistema em malha fechada:





Exercícios

- **Ex. 16.2)**
  - Margens de estabilidade:
    - $GM = 12$ dB > 10 dB;
    - $PM = 60° > 40°$;
    - As margens atendem às especificações;



Exercícios

- **Ex. 16.3)** Seja a função de transferência em malha aberta $G(s)$, projete o compensador avanço-atraso que proporcione um erro de velocidade de 0,1 s, margem de fase (mínima) de 50° e margem de ganho (mínima) de 10 dB.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}}$$

Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Compensador avanço-atraso ($\gamma = \beta > 1$):

$$\boxed{D(s) = K_c\left(\frac{s + 1/T_1}{s + \beta/T_1}\right)\left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2}\right)}$$

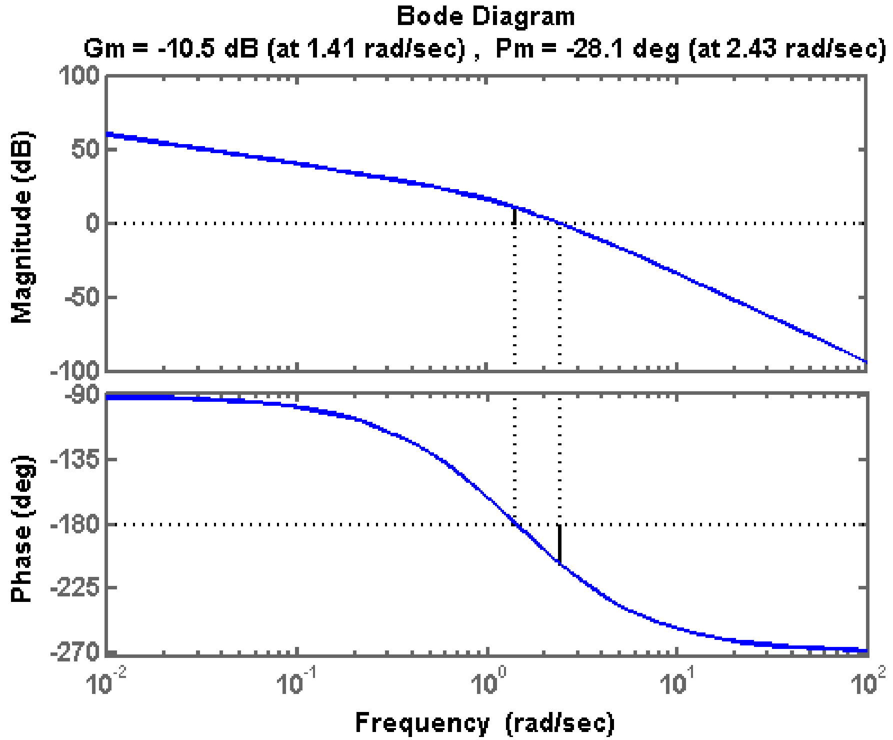
  - Erro estacionário à rampa:
    - Constante de erro de velocidade:

$$\boxed{K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.1} = 10}$$

$$\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} sKG(s) = \frac{K}{2} \Rightarrow K = K_c = 20}$$

Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - $GM = -10.5$ dB < 10 dB;
    - $PM = -28° < 50°$;
    - As margens não atendem às especificações;
    - Frequência de cruzamento de ganho: $\omega_G = 1.41$ rad/s
    - Frequência de corte: $\omega = 0.14$ rad/s.



Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - Cálculo de T_2:

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{\omega} = 7.14}$$

    - Cálculo de β:
      - Requisito de margem de fase: $\phi_m = 50 + 10 = 60°$

$$\boxed{\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} = 0.07}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\alpha} = 13.93}$$

Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - Cálculo de T_1:

$$\boxed{\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right| = |3.73| = |11.43|\ \text{dB}}$$

– A magnitude é 11,43 dB em $\omega = 1.37$ rad/s;

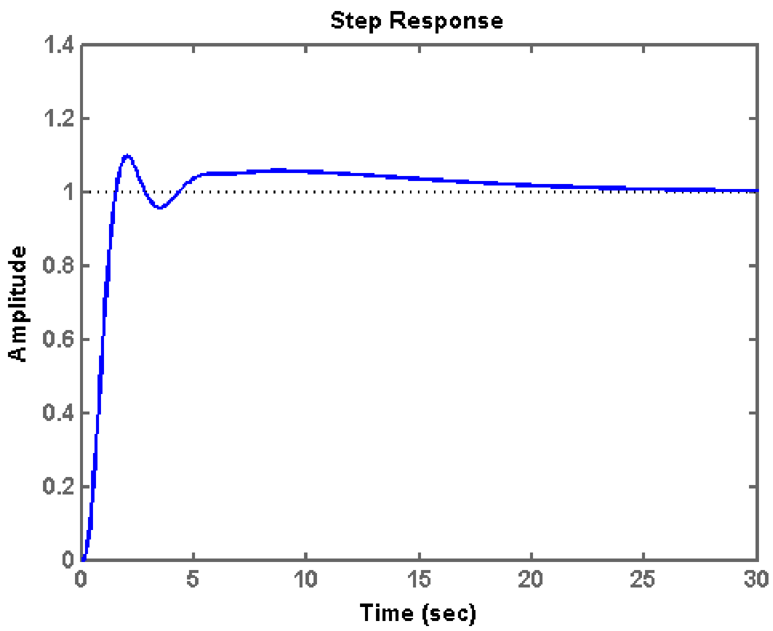
$$\boxed{T_1 = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = 2.72}$$

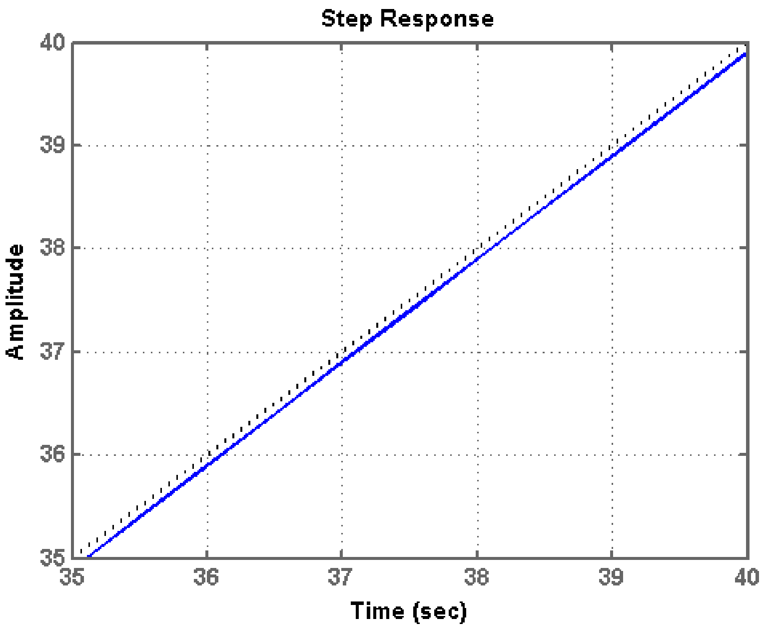
Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Compensador avanço-atraso:

$$D(s) = 20\left(\frac{s+0.37}{s+5.10}\right)\left(\frac{s+0.14}{s+0.01}\right)$$

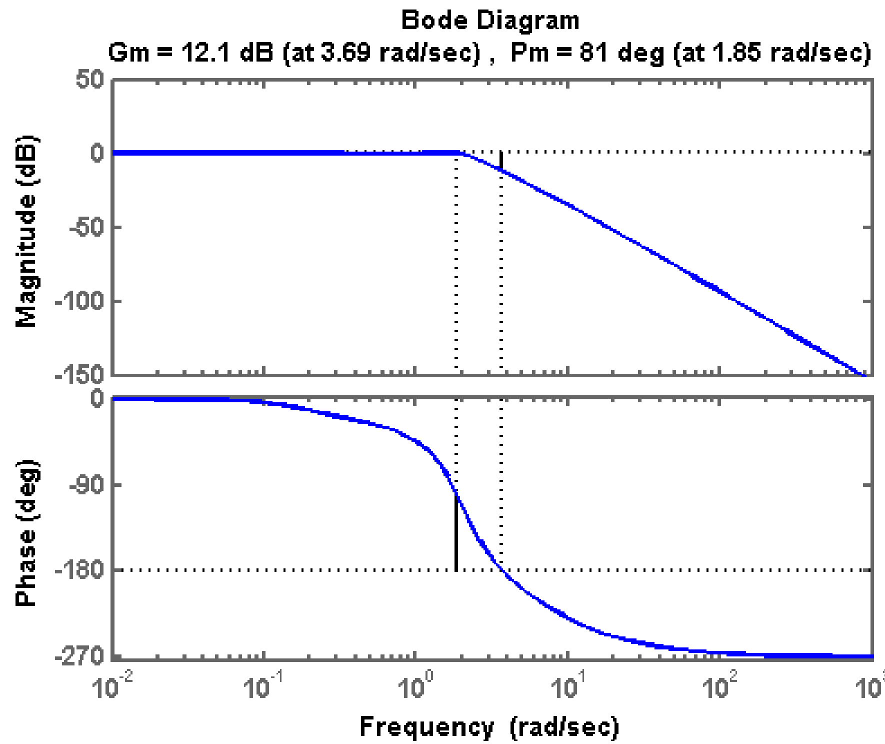
  - Resposta ao degrau e à rampa:





Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - $GM = 12.1$ dB > 10 dB;
    - $PM = 81° > 50°$.



Exercícios

- **Ex. 16.4)** Suponha um drone com massa $m = 1$ e sujeito a um arrasto $b = 0.2$. Ignorando o efeito da gravidade, a função de transferência do sistema é $G(s) = Y(s)/F(s)$, onde $y(t)$ é a altitude e $F(t)$ é a força de propulsão. Projete o compensador que proporcione um erro de velocidade de 0,1 s, margem de fase (mínima) de 50° e margem de ganho (mínima) de 10 dB.

Exercícios

- **Ex. 16.4)**
  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms+b)} = \frac{1}{s^2 + 0.2s}}$$

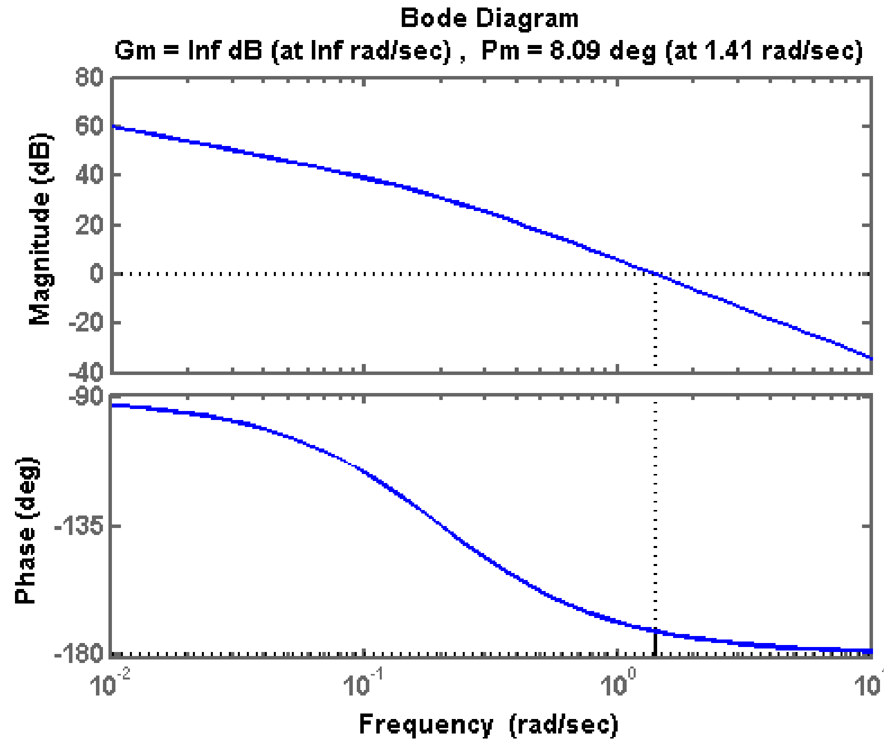
  - Erro estacionário à rampa:
    - Constante de erro de velocidade:

$$\boxed{K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.1} = 10}$$

$$\boxed{K_v = \lim_{s \to 0} sKG(s) = \frac{K}{0.2} \Rightarrow K = K_c = 2}$$

Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - $GM = \infty$ > 10 dB;
    - $PM = 8.1° < 50°$;
    - Será projetado um compensador avanço.



Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Margens de estabilidade:
    - Margem de fase desejada: 50+10 = 60°;
    - Incremento de fase necessário: $\phi_m = 60 - 8.1 = 51.9$°;
    - $\alpha = 0.1192$;
    - $20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 9.23$ dB → $\omega_c \approx 2.5$ rad/s;
    - $T = 1.1584$;

$$\boxed{D(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = 2\left(\frac{1.16s + 1}{0.14s + 1}\right)}$$

Exercícios

- **Ex. 16.3)**
  - Resposta em malha fechada: