ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

19 – Amostragem

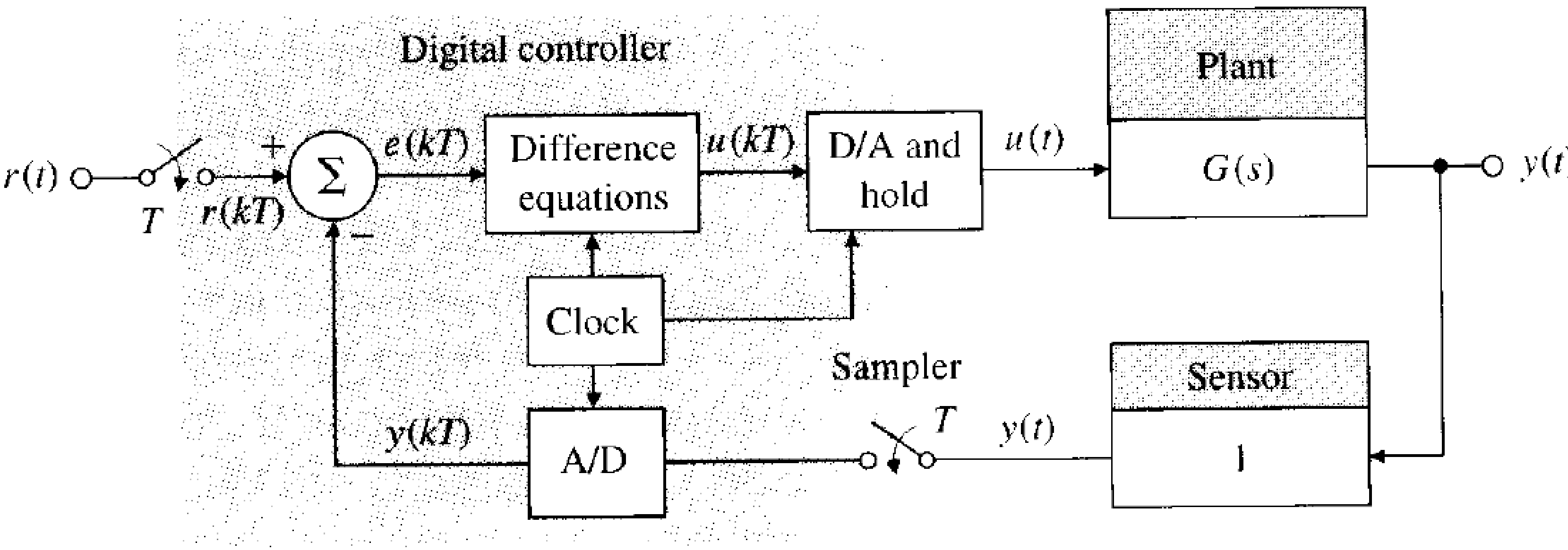
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

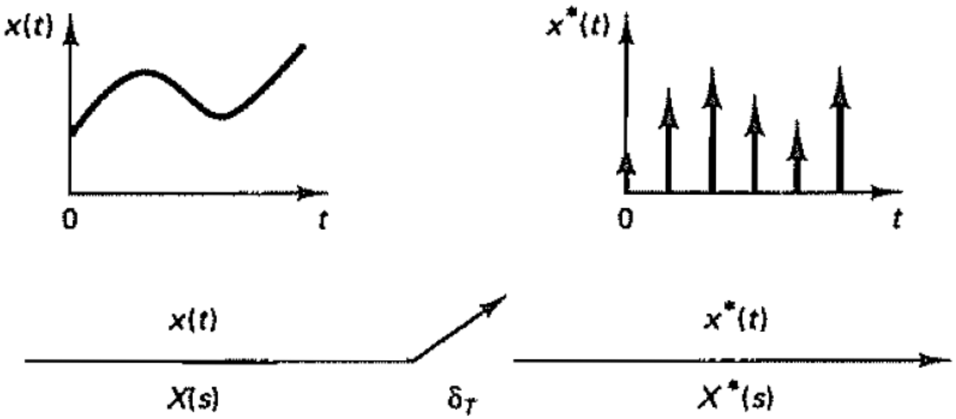
- **Índice:**
  - 1) Amostragem por impulsos;
  - 2) Método da convolução;
  - 3) Transformação bilinear;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Controle discreto



1. Amostragem por impulsos

- **1.1. Amostragem por impulsos:**
  - O processo de amostragem consiste em converter um sinal contínuo $x(t)$ em um sinal discreto $x(kT) \approx x(k)$ utizando um período de amostragem T;
  - Note que um sinal discreto $x(k)$ pode ser representado por um **trem de impulsos** deslocados no tempo e modulados com diferentes amplitudes.



1. Amostragem por impulsos

- **1.1. Amostragem por impulsos:**
  - **Sinal amostrado por impulsos**:

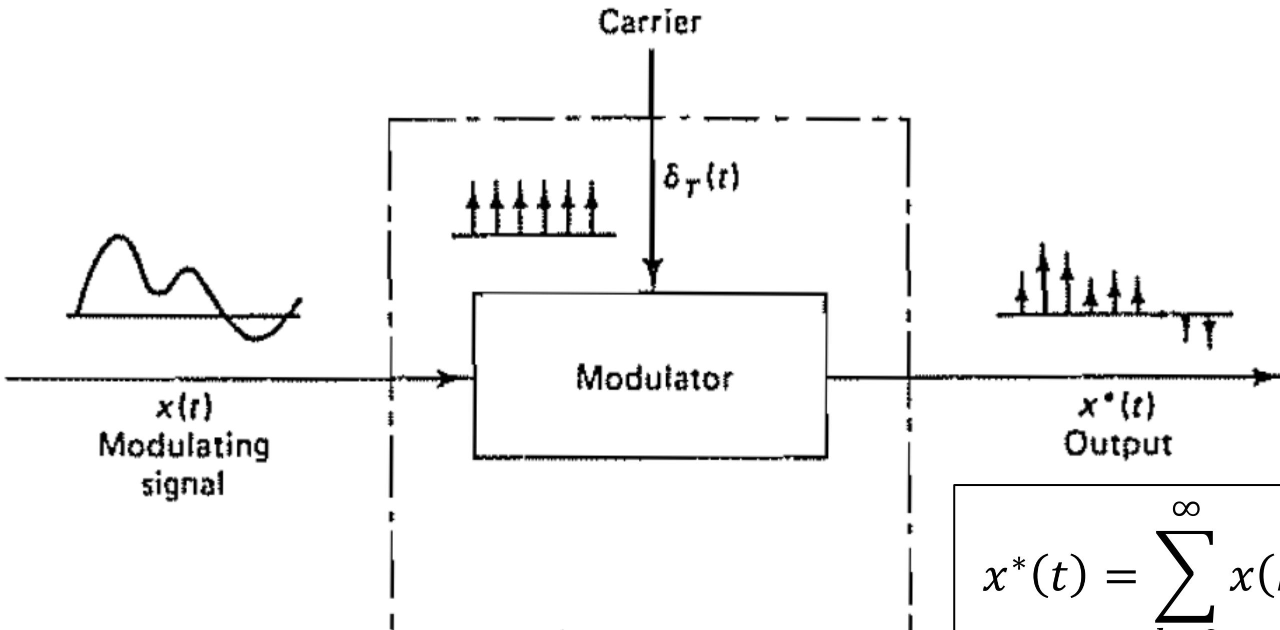
$$\boxed{x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)} \qquad (1)$$

    - Os impulsos são disparados com período T;
  - **Trem de impulsos:**

$$\boxed{\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)} \qquad (2)$$

1. Amostragem por impulsos

- **1.1. Amostragem por impulsos:**
  - Modulador de sinais utilizando um trem de impulsos como portadora:



$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

1. Amostragem por impulsos

- **1.1. Amostragem por impulsos:**
  - Calculando a transformada de Laplace de $x^*(t)$:

$$\boxed{X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}} \tag{3}$$

  - Conversão do espaço s para z:

$$\boxed{z = e^{Ts}} \qquad \boxed{s = \frac{1}{T}\ln z} \tag{4}$$

$$\boxed{X^*(s)\Big|_{s=\ln z/T} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z)} \tag{5}$$

1. Amostragem por impulsos

- **1.2. Seguradores:**
  - Um circuito **sample-and-hold** (SH) armazena o valor (ou a média) do sinal a cada intervalo amostrado $kT \leq t < (k+1)T$;
  - O SH gera uma **representação contínua do sinal amostrado** através de **interpolação polinomial de dados**:
    - Segurador de ordem zero: escada;
    - Segurador de ordem 1: rampa;
    - Segurador de ordem 2: parábola;
  - Ou seja, o segurador produz um sinal contínuo a partir de um sinal modulado por impulsos.

1. Amostragem por impulsos

- **1.2. Seguradores:**
  - Um segurador possui equação característica

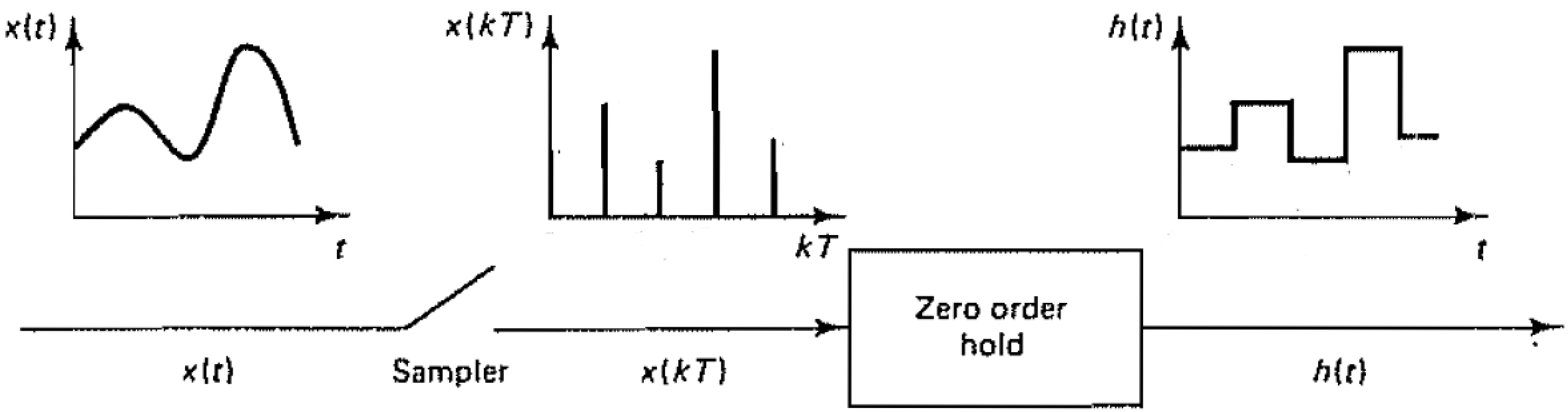
$$\boxed{h(kT+\tau) = a_n\tau^n + \cdots + a_1\tau + x(kT)} \tag{6}$$

    - Onde $0 \leq \tau < T$ e $h(kT) = x(kT)$;
    - O índice n define a ordem do segurador.

1. Amostragem por impulsos

- **1.3. Segurador de ordem zero:**
  - O nível de saída é constante em um sinal do tipo escada, portanto, para o segurador de ordem zero (ZOH),

$$\boxed{h(kT+\tau) = x(kT)} \qquad (7)$$



1. Amostragem por impulsos

- **1.3. Segurador de ordem zero:**
  - O ZOH pode ser representado por uma somatória de degraus unitários $u(t)$ com amplitude $x(kT)$ que “ligam” ou “desligam” dependendo do valor no tempo,

$$\boxed{h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\{u(t-kT) - u[t-(k-1)T]\}} \qquad (8)$$

  - Transformada de Laplace de $h(t)$:

$$\boxed{H(s) = \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} X^*(s)} \qquad (9)$$

    - Observe o deslocamento temporal de $u(t)$ Em (8).

1. Amostragem por impulsos

- **1.3. Segurador de ordem zero:**
  - **Função de transferência do ZOH**:

$$\boxed{G_{h0}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}} \qquad (10)$$

- $H(s)$ é a saída do segurador de ordem zero (sinal “segurado”) e $X^*(s)$ é o sinal amostrado por trem de impulsos, ambos no domínio de Laplace.

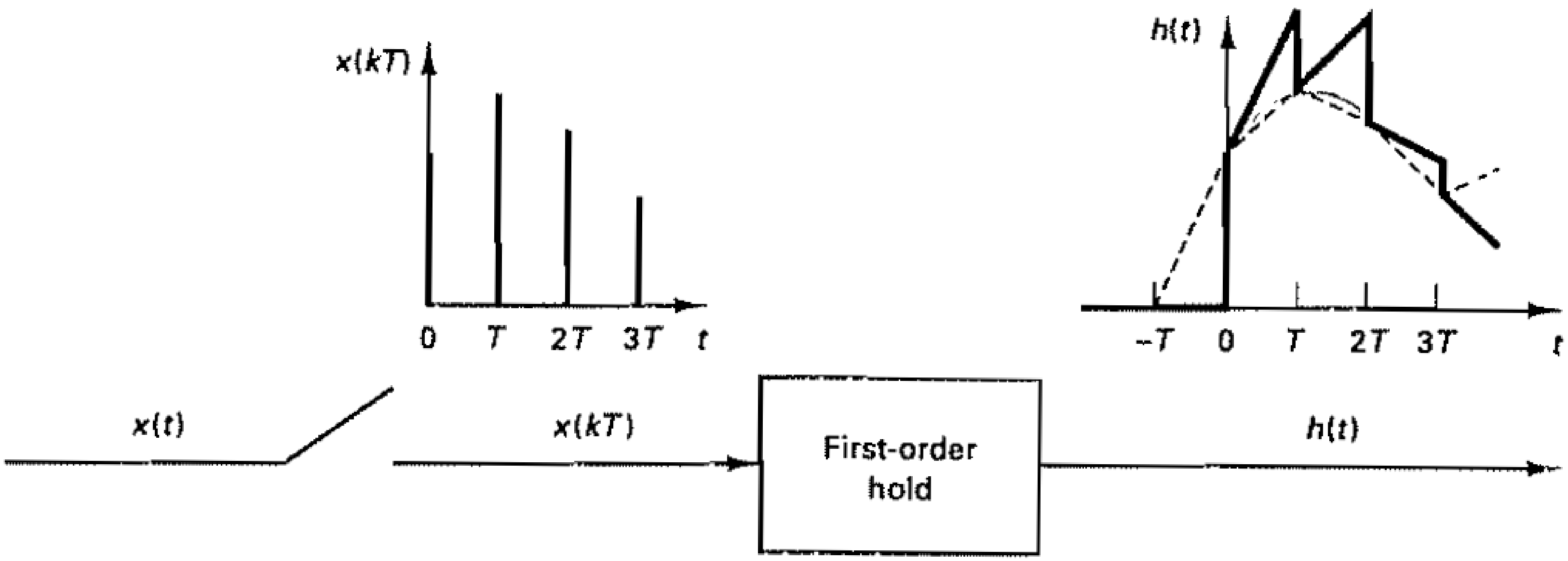
$$\begin{array}{c} \boxed{x(t)} \\ \boxed{x(kT)} \end{array} \rightarrow \boxed{x^*(t)} \rightarrow \boxed{X^*(s)} \rightarrow \boxed{G_h(s)} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow \boxed{h(t)}$$

$$\boxed{X^*(s)} \leftrightarrow \boxed{X(z)}$$

1. Amostragem por impulsos

- **1.4. Segurador de primeira ordem:**
  - A saída é aproximada por interpolação linear,

$$\boxed{h(kT+\tau) = a_1\tau + x(kT)} \qquad (11)$$



1. Amostragem por impulsos

- **1.4. Segurador de primeira ordem:**
  - O segurador de primeira ordem pode ser aproximado por

$$\boxed{h(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)u(t) - \frac{t-T}{T}u(t-T) - u(t-T)} \tag{12}$$

  - Transformada de Laplace:

$$\boxed{H(s) = (1 - e^{-Ts})\frac{Ts+1}{Ts^2}} \tag{13}$$

  - **Função de transferência:**

$$\boxed{G_{h1}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts+1}{T}} \tag{14}$$

2. Método da convolução

- **2.1. Função de transferência:**
  - Seja o sinal $x^*(t)$ amostrado por um trem de impulsos:

$$\boxed{x^*(t) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)}$$

  - Calculando a transformada de Laplace e utilizando a propriedade da **integral de convolução**:

$$\boxed{X^*(s) = \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp} \qquad (15)$$

    - c é uma constante que define um contorno fechado e p é uma variável de integração.

2. Método da convolução

- **2.1. Função de transferência:**
  - A integral (15) pode ser resolvida usando o teorema dos resíduos, considerando a região de integração como um semicírculo de raio infinito no semi-plano esquerdo ou direito;
  - O objetivo é determinar **a função de transferência de um sistema amostrado** $X^*(s)$ a partir da **função de transferência do sistema no domínio contínuo** $X(s)$.

2. Método da convolução

- **2.1. Função de transferência:**
  - **Segurador de ordem zero:**
    - Função de transferência:

$$\boxed{X(s) = (1 - e^{-Ts})\frac{G(s)}{s}}$$

    - Transformada Z:

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[X(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]} \qquad (16)$$

2. Método da convolução

- **2.1. Função de transferência:**
  - **Segurador de primeira ordem:**
    - Função de transferência:

$$\boxed{X(s) = (1 - e^{-Ts})^2 \frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)}$$

    - Transformada Z:

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[X(s)] = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z}\left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)\right]} \tag{17}$$

2. Método da convolução

- **2.2. Resposta em frequência:**
  - **Segurador de ordem zero:**

$$\boxed{G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}}$$

  - Magnitude e fase:

$$\boxed{|G_{h0}(j\omega)| = T\left|\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right|} \qquad \boxed{\Phi_{h0}(j\omega) = \angle \sin\frac{\omega T}{2} - \frac{\omega T}{2}} \qquad (18)$$

3. Transformção bilinear

- **3.1. Transformação bilinear (método de Tustin):**
  - Uma integração numérica $U(s) = (1/s)E(s)$ pode ser resolvida computacionalmente como uma integração trapezoidal:

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)]} \qquad (19)$$

   - Substituindo (19) em $U(s) = \left(\frac{1}{s}\right)E(s)$,

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)} \qquad (20)$$

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) A identificação e o controle de um sistema são baseados na sua resposta contínua ou discreta?
  - 2) Qual é a relação entre a saída amostrada do sistema e a sua transformada Z?
  - 3) Por que é necessário utilizar um segurador para processar a saída do sistema amostrado?
  - 4) Como o segurador é implementado na vida real (hardware e software)?

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995.
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, Signals and Systems, Pearson, 1996.
  - J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1996.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 19.1)** Uma cabeça de impressão (massa $m = 0.5$ kg e amortecimento $b = 2$ N.s/m) se desloca ao longo de uma guia com velocidade $v(t)$. Considere que o sistema é excitado por um degrau unitário $u(t)$.
  - a) Utilizando um período de amostragem $T = 0.1$ s, obtenha a resposta do sistema amostrada por trem de impulsos;
  - b) Calcule a resposta do sistema amostrado utilizando um segurador de ordem zero.

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Modelo:

$$\boxed{m\dot{v}(t) + bv(t) = u(t)}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s + b/m}}$$

  - Resposta ao degrau $U(s) = 1/s$:

$$\boxed{v(t) = \mathcal{L}[G(s)U(s)] = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Resposta amostrada:

$$\boxed{v^*(t) = v(kT) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}kT}\right]}$$

  - Transformada de Laplace:

$$\boxed{V^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v(kT)e^{-kTs} = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}kT}\right]e^{-kTs}}$$

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Transformada Z (utilizando a conversão $s = \frac{1}{T}\ln z$ em v^*):

$$\boxed{V(z) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}kT}\right]z^{-k}}$$

  - Note que:

$$\boxed{V(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s}}$$

$$\boxed{V(z) = \mathcal{Z}[V(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Segurador de ordem zero:

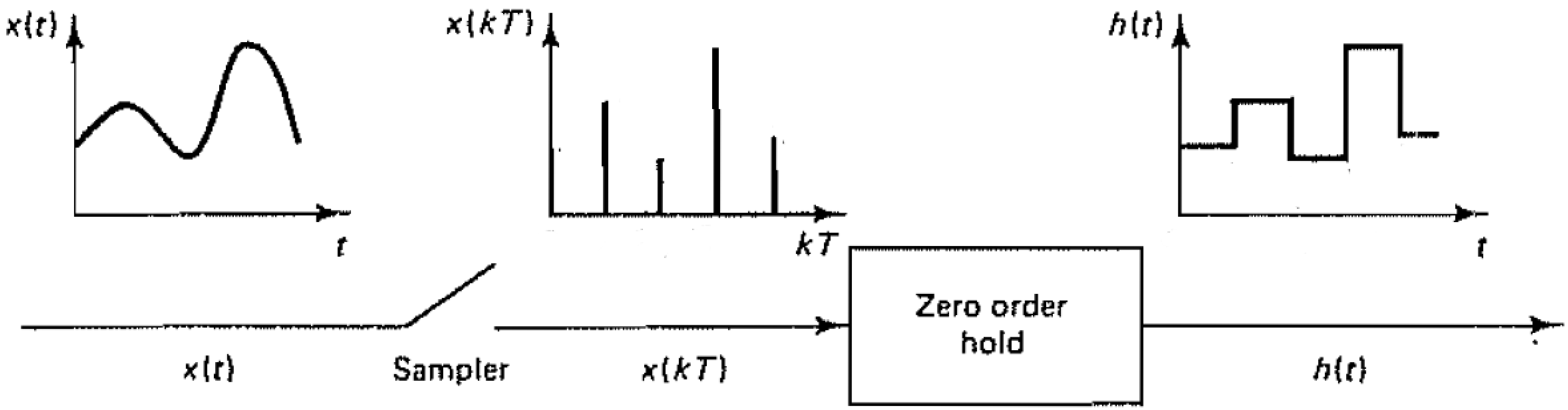
$$\boxed{H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

$$\boxed{H(z) = (1 - z^{-1})\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}kT}\right]z^{-k} = \frac{1}{b}\left[1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - (e^{-Tb/m}z^{-1})}\right]}$$

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Resposta do sistema:

$$\boxed{h(t) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \frac{0.1648}{z - 0.6703z}}$$



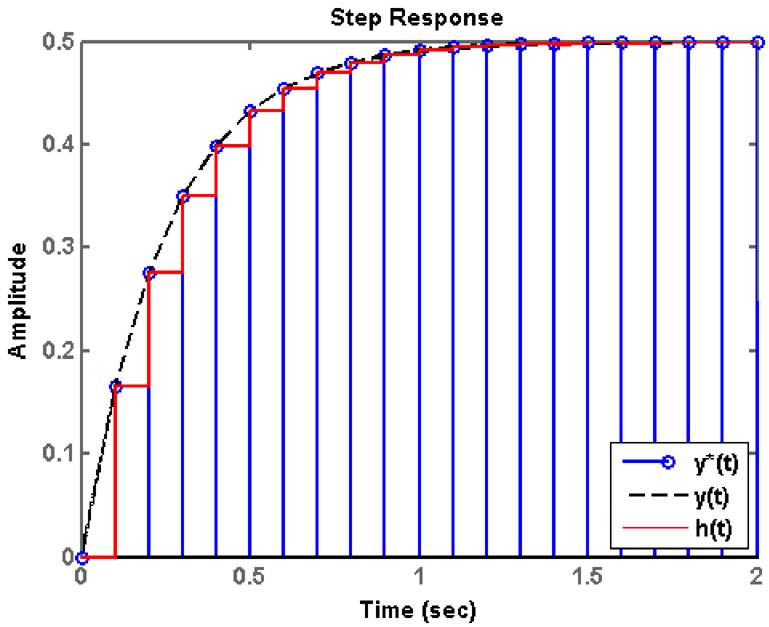
Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Implementação no MATLAB:

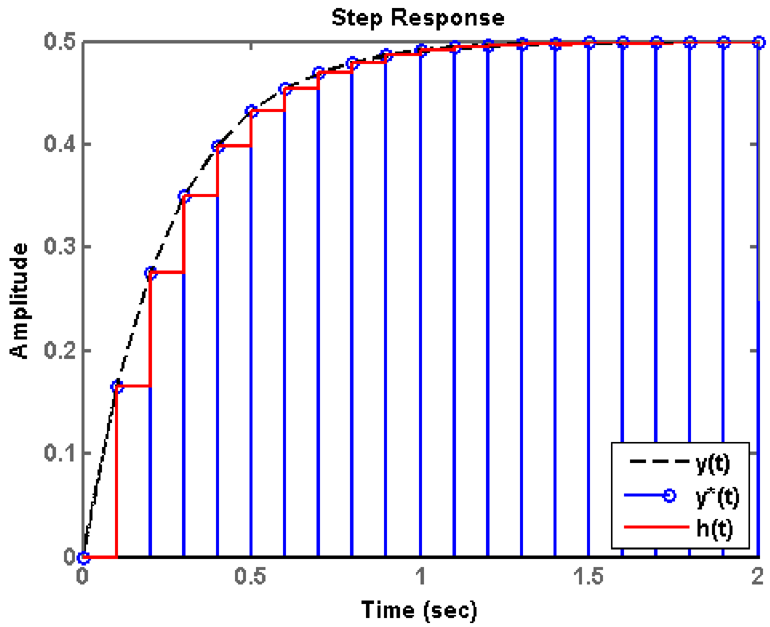
```
%Parametros do sistema
m = 0.5; b = 2; T = 0.1;
%Funcao de transferencia
s = tf('s'); Gs = (1/m)*1/(s+b/m);
%Resposta amostrada
[ys,t,u] = step(Gs,[0:T:2]');

%Segurador de ordem zero
z = tf('z',T);
Hz1 = 1/b*(1 - (1-inv(z))/(1-(exp(1)^(-b/m*T)*inv(z))));

%Implementacao com a funcao c2d
Hz2 = c2d(Gs,T,'zoh');
```

Exercícios

- **Ex. 19.1)**
  - Implementação no MATLAB:



Calculado



MATLAB (c2d)

Exercícios

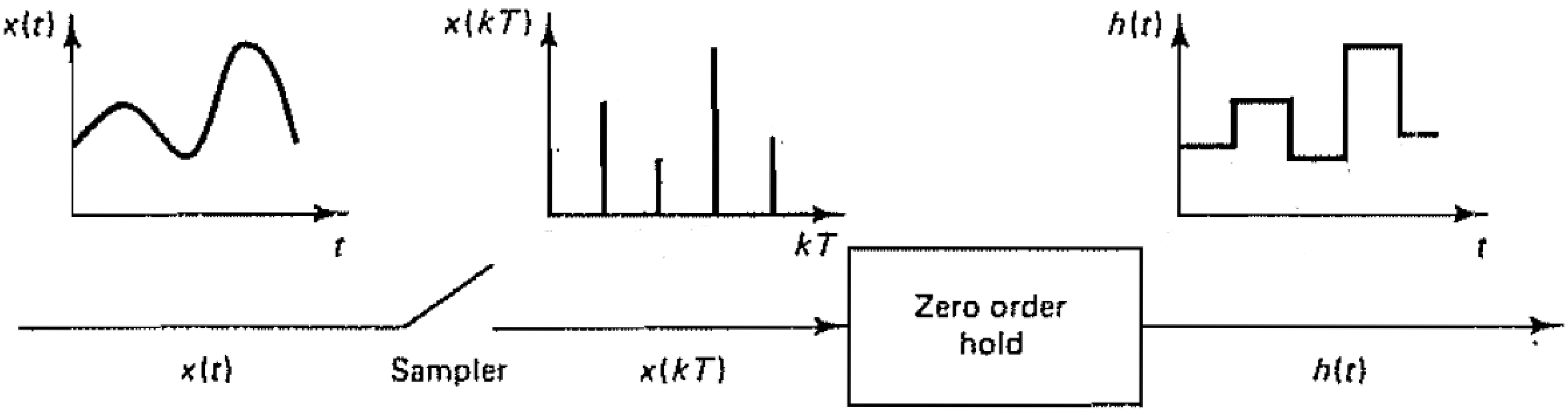
- **Ex. 19.2)** Considere um sistema de segunda ordem com $\omega_n = 10$ rad/s e $\xi = 0.2$.
  - a) Obtenha a resposta do sistema amostrado (10 Hz) utilizando um segurador de ordem zero.
  - b) Repita o procedimento para o segurador de ordem 1 e para a transformação bilinear. Compare os resultados.

  - Obs: calcular através do MATLAB.

Exercícios

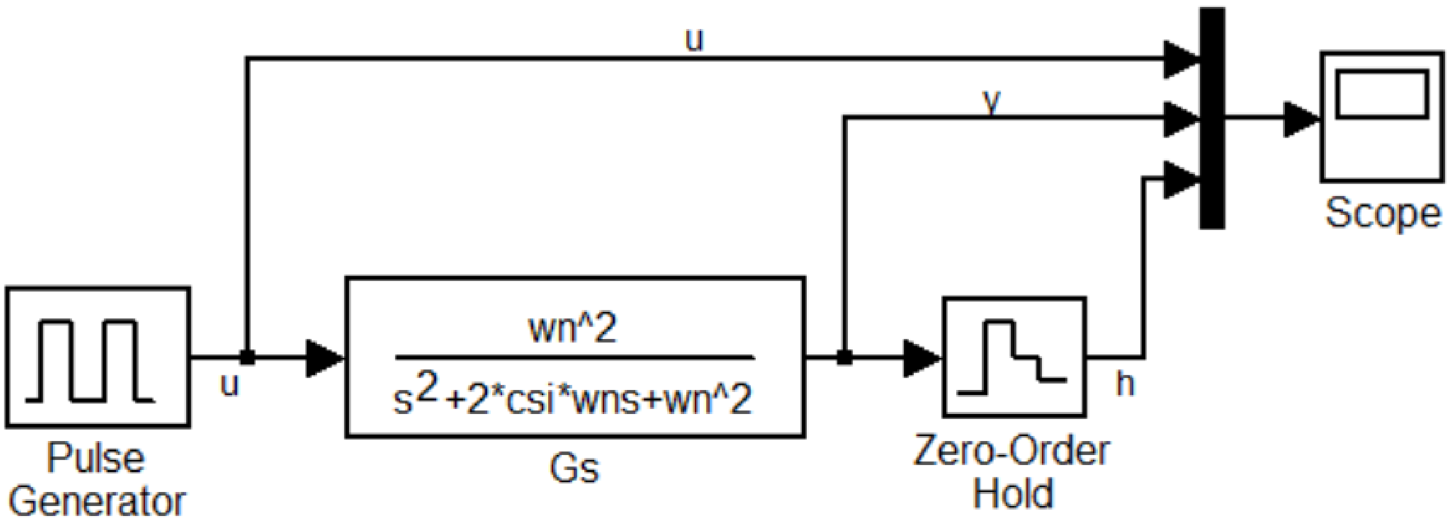
- **Ex. 19.2)**
  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}}$$



Exercícios

- **Ex. 19.2)**
  - Implementação no Simulink:



Exercícios

- **Ex. 19.2)**
  - Resposta ao degrau (ZOH):