ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

07 – Análise de estabilidade

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Estabilidade;
  - 2) Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Estabilidade

- **1.1. Estabilidade:**
  - Um sistema LTI é considerável **estável** se ele for capaz de retornar ao estado de equilíbrio depois de ser excitado por uma perturbação;
    - **Sistema estável:** a resposta converge para um valor final;
    - **Sistema criticamente estável:** a resposta oscila infinitamente dentro de uma banda de equilíbrio;
    - **Sistema instável:** a resposta diverge para fora da banda de equilíbrio.

1. Estabilidade

- **1.2. Exemplo 1:**
  - Seja uma planta de primeira ordem com polo real $s = p_1$:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{(s - p_1)}}$$

  - A resposta ao impulso é dada por:

$$\boxed{y(t) = e^{p_1 t}}$$

    - Se $p_1 < 0$, $y(t \to \infty)$ converge a 0 → $G(s)$ é estável;
    - Se $p_1 > 0$, $y(t \to \infty)$ diverge → $G(s)$ é instável.

1. Estabilidade

- **1.3. Exemplo 2:**
  - Seja uma planta de segunda ordem com polos em $s = (p_1, p_2) = -\sigma \pm j\omega_d$:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}}$$

  - A resposta ao impulso é da forma:

$$\boxed{y(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}}$$

    - Se $\mathrm{Re}\{p_1\} < 0$, $y(t \to \infty)$ converge a 0 → $G(s)$ é estável;
    - Se $\mathrm{Re}\{p_1\} > 0$, $y(t \to \infty)$ diverge → $G(s)$ é instável;
  - Este raciocínio pode ser estendido a um sistema de ordem n.

1. Estabilidade

- **1.4. Definição de estabilidade:**
  - Um **sistema linear e invariante no tempo** é considerado **estável** se todos os polos tiverem partes reais negativas, ou seja, **todos os polos se situam no semi-plano esquerdo (SPE) do plano** s;
  - Caso contrário, se **qualquer polo estiver localizado no semi-plano direito (SPD)** (parte real positiva), sistema é **instável**.

1. Estabilidade

- **1.4. Definição de estabilidade:**
  - O cruzamento do eixo imaginário $j\omega$ ($\sigma = 0$) define o limiar entre o sistema ser assintoticamente estável (SPE) ou instável (SPD);
  - Polos complexo conjugados geram resposta oscilatória, que pode ser estável (SPE) ou instável (SPD);
  - Sistemas com polos múltiplos também podem ser analisados em termos da localização no plano de Laplace (estabilidade interna);
  - Um sistema com um par de polos complexo conjugados na origem ($s = \pm j\omega$) é instável (verificar!).

2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **2.1. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz:**
  - Seja um sistema de ordem n da forma

$$\boxed{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}} \qquad (1)$$

    - Onde $n \geq m$;

  - Uma condição necessária (mas não suficiente) para garantir a estabilidade do sistema é que **todos os coeficientes do polinômio característico (denominador) de (1) sejam positivos**, $a_n > 0$.

2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **2.2. Metodologia para aplicação do critério de R-H:**
  - 1) Seja o polinômio característico da TF ($a_n \neq 0$):

$$\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (2)$$

  - 2) Se (2) tiver **algum coeficiente** a_n **nulo ou negativo** na presença de pelo menos 1 coeficiente positivo, então o sistema é **absolutamente instável** (existem raízes com partes reais positivas – SPD).

2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **2.2. Metodologia para aplicação do critério de R-H:**
  - 3) Se todos os coeficientes forem positivos, construir o esquema de Routh:

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **2.2. Metodologia para aplicação do critério de R-H:**
  - 4) Análise do esquema de Routh:
    - Se todos os elementos da primeira coluna forem **positivos**, então o sistema é **estável** (todas as raízes estão no SPE);
    - Se existirem elementos negativos na primeira coluna, então o número de raízes no SPD será igual ao número de mudanças de sinal ($+$ > $-$ ou $-$ > $+$).

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots$
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **2.2. Metodologia para aplicação do critério de R-H:**
  - 5) Casos especiais:
    - Se algum coeficiente da primeira coluna for igual a zero, substituir por um número infinitesimal ϵ para fins de análise de sinal;
    - Se todos os coeficientes de uma linha forem iguais a zero, significa que existem polos simetricamente opostos no SPE e SPD.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Qual é a diferença entre um sistema estável e instável?
  - 2) Explique se os sistemas abaixo são estáveis ou instáveis:
    - a) 1 polo negativo;
    - b) 2 polos negativos e 1 positivo;
    - c) 1 par de polos complexo conjugados com parte real negativo;
    - d) 1 par de polos complexo conjugados com parte real negativo e 1 polo real positivo;
    - e) 1 polo negativo e 1 polo nulo;
    - f) 1 par de polos complexo conjugados na origem;

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex 7.1)** Seja a planta representada pela função de transferência

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}}$$

  - Verifique a estabilidade deste sistema pelo critério de Routh-Hurwitz.

Exercícios

- **Ex 7.1)**
  - Polinômio característico:

$$\boxed{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0}$$

$$\boxed{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0}$$

  - As raízes do polinômio são obtidas com a função `roots`:

```
 0.2878 + 1.4161i
 0.2878 - 1.4161i
-1.2878 + 0.8579i
-1.2878 - 0.8579i
```

    - Note que existe um par de polos com parte real positiva (SPD).

Exercícios

- **Ex 7.1)**
  - Critério de R-H:

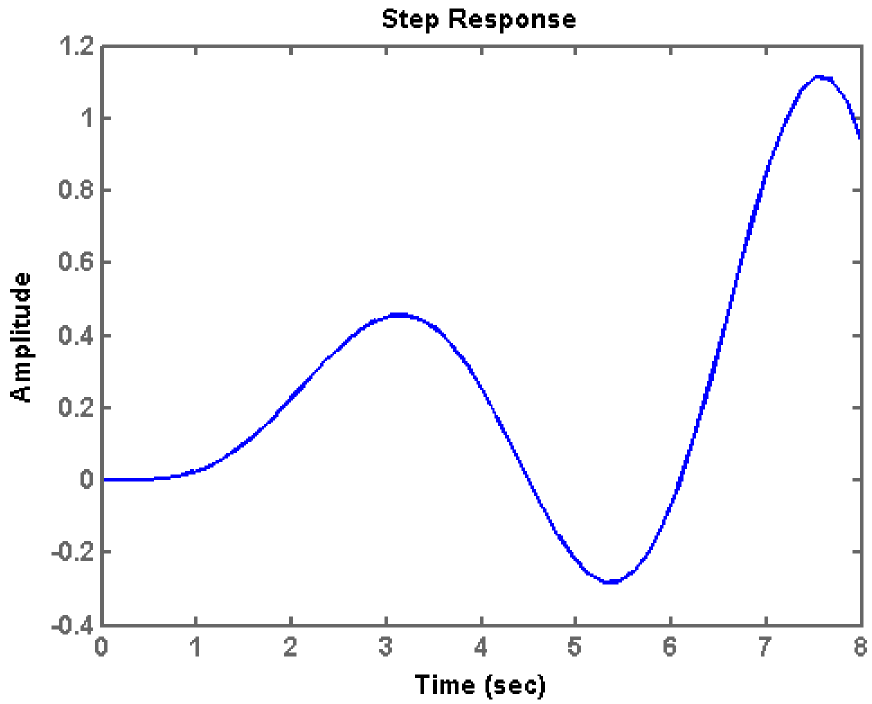
$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
 & & & \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -6 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\
 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -3 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

The second row is divided by 2.

  - Existem 2 trocas de sinais (+⇒>−> +), indicando 2 raízes no SPD;
  - Portanto, o sistema é instável.

Exercícios

- **Ex 7.1)**
  - Resposta ao degrau: note que, de fato, o sistema é instável.



Exercícios

- **Ex 7.2)** Seja a planta representada pela função de transferência

$$\boxed{H(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}}$$

  - Onde K é um ganho escalar e

$$\boxed{G(s) = \frac{s + 1}{s(s - 1)(s + 6)}}$$

- a) Para $K = 1$, verifique se o sistema é estável pelo critério de Routh-Hurwitz;
- b) Caso negativo, determine o ganho K necessário para que o sistema seja estável.

Exercícios

- **Ex 7.2)**
  - Para $K = 1$, o polinômio característico é

$$\boxed{s^3 + 5s^2 - 5s + 1 = 0}$$

$$\boxed{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0}$$

  - O sistema possui 2 polos no SPD, portanto, é instável.

```
-5.8794
 0.5921
 0.2873
```

Exercícios

- **Ex 7.2)**
  - Polinômio característico em termos de K:

$$\boxed{s^3 + 5s^2 - (K-6)s + K = 0}$$

  - Critério de R-H: para que o sistema não tenha polos no SPD, não deve haver mudanças de sinal na primeira coluna.

$$\begin{array}{rll} s^3: & 1 & K-6 \\ s^2: & 5 & K \\ s: & (4K-30)/5 & \\ s^0: & K & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{4K-30}{5} > 0 \Rightarrow K > 7.5}$$

$$\boxed{K > 0}$$

Exercícios

- **Ex 7.2)**
  - Resposta ao degrau para diferentes valores de K:
    - O sistema é criticamente estável para $K = 7.5$.