ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

06 – Análise no tempo: sistema de segunda ordem

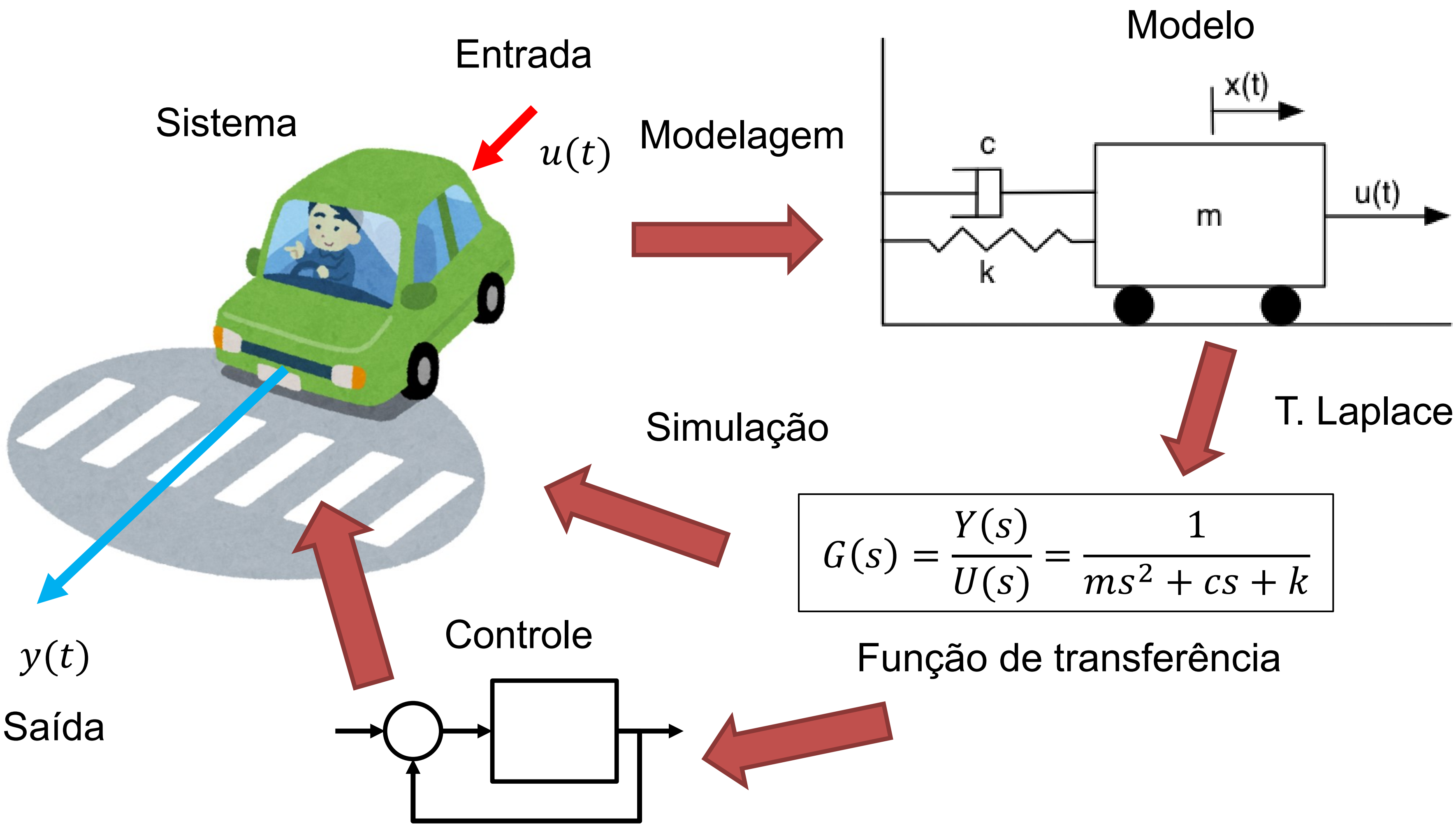
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Sistema de segunda ordem;
  - 2) Resposta ao degrau;
  - 3) Resposta ao impulso;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Modelagem e controle



1. Sistema de segunda ordem

- **1.1. Sistema de segunda ordem:**
  - Um **sistema de segunda ordem** é caracterizado por

$$\boxed{a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)} \qquad (1)$$

$$\boxed{\frac{1}{{\omega_n}^2}\ddot{y}(t) + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)} \qquad (2)$$

  - $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ é a **frequência natural** (rad/s) → Frequência na qual o sistema tende a oscilar;
  - $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ é o **fator de amortecimento** → Indica se o sistema é sub-amortecido, criticamente amortecido, ou superamortecido.

1. Sistema de segunda ordem

- **1.2. Função de transferência:**
  - Transformada de Laplace:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + {\omega_n}^2 y(t) = {\omega_n}^2 u(t)} \quad (3)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}} \quad (4)$$

  - Analisando (4), nota-se $G(s)$ possui um **par de polos** $p_{1,2}$ que podem ser reais e diferentes, iguais, ou complexo conjugados:

$$\boxed{p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5)$$

1. Sistema de segunda ordem

- **1.3. Solução homogênea:**
  - A solução homogênea do sistema de segunda ordem determina o seu comportamento no regime transiente;
  - Seja $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a **frequência natural amortecida** (rad/s). Dependendo do valor de ξ, o sistema pode ser:
    - **1) Sub-amortecido**: $0 \leq \xi < 1$; $\boxed{p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d}$
    - **2) Criticamente amortecido**: $\xi = 1$; $\boxed{p_{1,2} = -\omega_n}$
    - **3) Superamortecido**: $\xi > 1$. $\boxed{p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_d}$

2. Resposta ao degrau

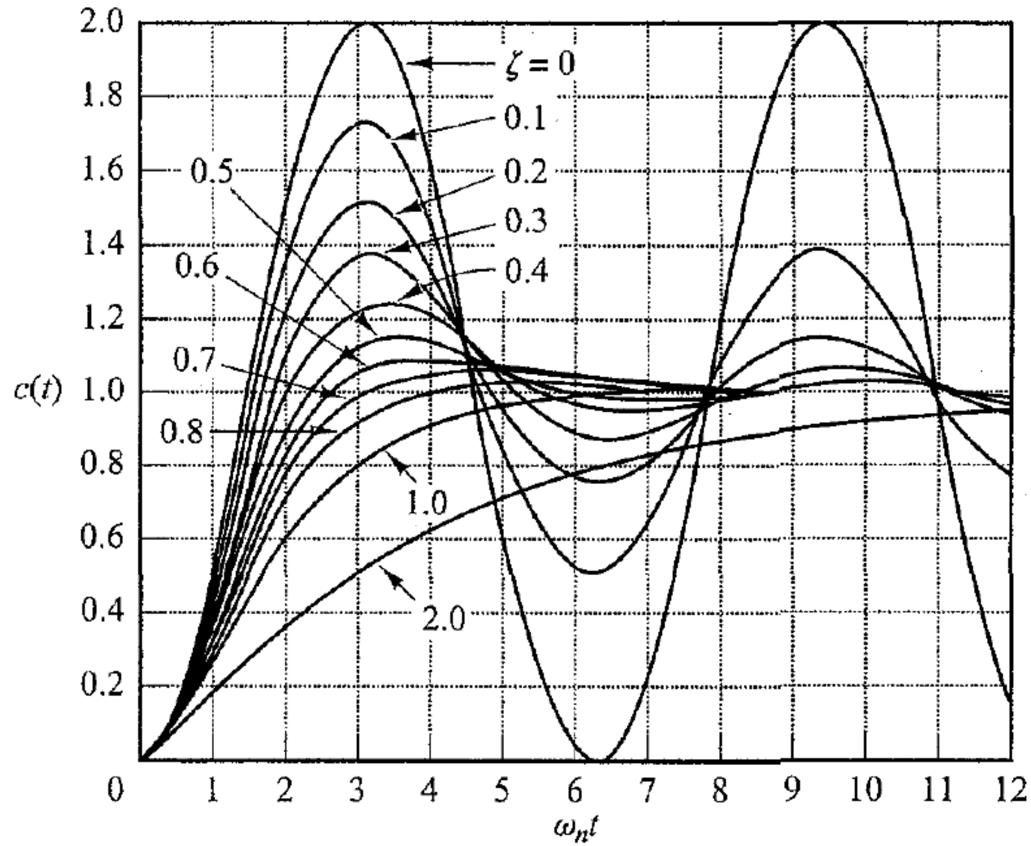
- **2.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - Seja o sistema de segunda ordem excitado por uma entrada do tipo **degrau unitário**:

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s) = \frac{{\omega_n}^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}\frac{1}{s}} \qquad (6)$$

    - (A solução analítica pode ser encontrada no livro texto);
  - Observando o comportamento de $y(t)$, nota-se que:
    - A **resposta transiente** é oscilatória para $\xi < 1$ e amortecida para $\xi \geq 1$;
    - A **resposta estacionária** satura em $y_{ss} = 1$ (verificar pelo teorema do valor final).

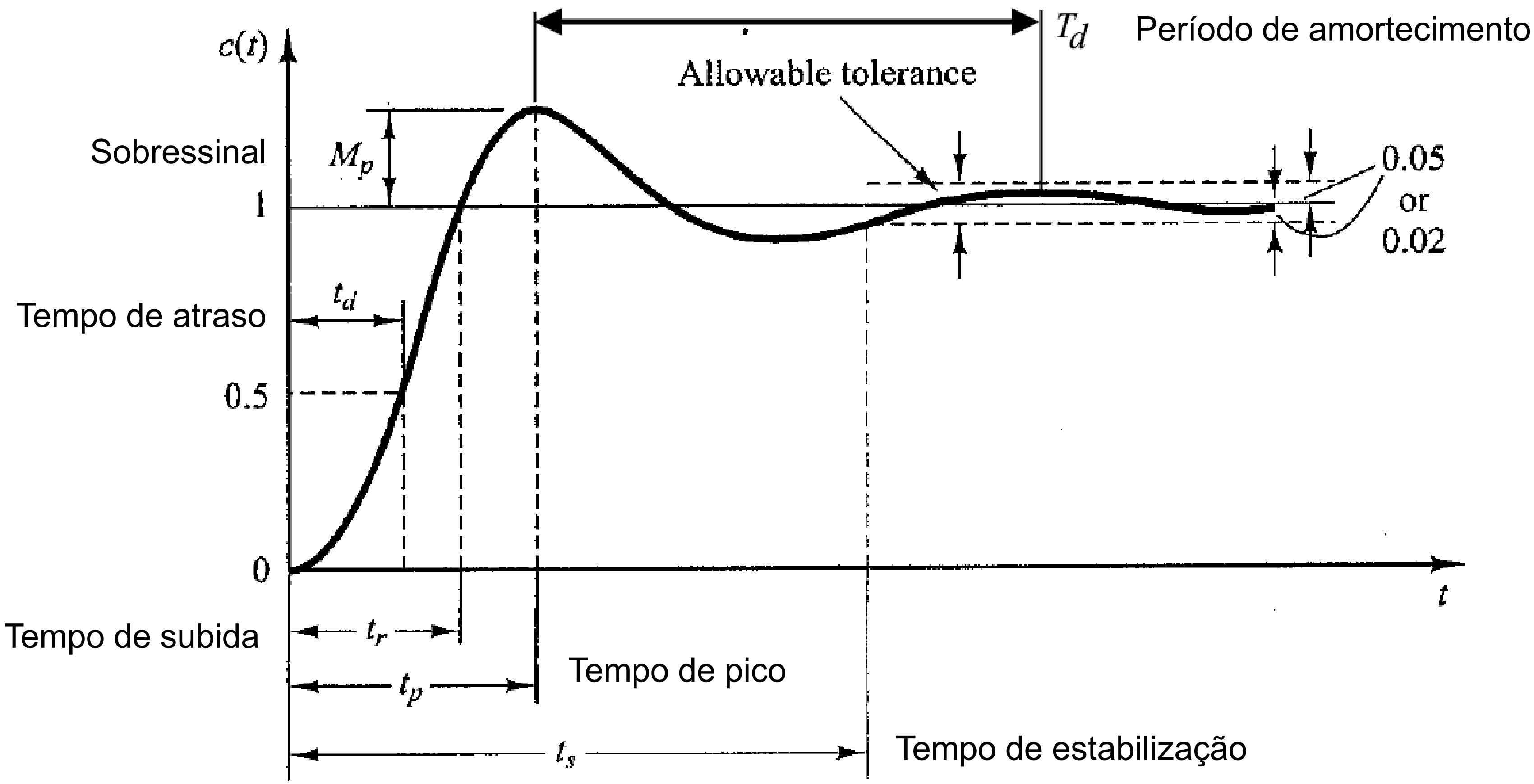
2. Resposta ao degrau

- **2.1. Resposta ao degrau unitário:**
  - O **fator de amortecimento** influencia no comportamento oscilatório/ amortecido da resposta;
  - A **frequência natural** modula o período das oscilações.



2. Resposta ao degrau

- **2.2. Características da resposta ao degrau:**



2. Resposta ao degrau

- **2.2. Características da resposta ao degrau:**
  - **Tempo de atraso** (t_d): tempo que o sistema demora para atingir 50% do valor final;
  - **Tempo de subida** (t_r): tempo que o sistema demora para sair de um limite mínimo e atingir um máximo referente ao valor final:
    - Sistema sub-amortecido: de 0 a 100% do valor final;
    - Sistema superamortecido: de 10 a 90% do valor final;
  - **Tempo de pico** (t_p): tempo que o sistema demora para atingir o primeiro pico de sobressinal (para sistema sub-amortecido);
  - **Constante de tempo:**

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\xi \omega_n}} \tag{7}$$

2. Resposta ao degrau

- **2.2. Características da resposta ao degrau:**
  - **Percentual de sobressinal (overshoot)** (M_p): diferença entre o pico máximo de oscilação e o valor final do sistema:

$$\boxed{M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%} \tag{8}$$

  - **Tempo de estabilização** (t_s): tempo necessário para que a resposta do sistema oscile dentro de uma faixa de valores relativa ao valor final (de 2 a 5%);
  - **Período de amortecimento** (T_d): intervalo de tempo entre os dois primeiros picos de oscilação ($T_d = 2\pi/\omega_d$).

2. Resposta ao degrau

- **2.3. Tempo de subida:**
  - Seja $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a frequência natural amortecida, o tempo de subida é calculado em função de ξ e ω_n:

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right)}{\omega_d}} \qquad (9)$$

    - Quanto maior ω_d (ou ω_n), maior o tempo de subida t_r → o sistema demora mais para chegar ao valor final.

2. Resposta ao degrau

- **2.4. Tempo de pico:**
  - O tempo de pico é relacionado ao primeiro pico de sobressinal e pode ser obtido pela derivada da resposta ao degrau. Deste modo:

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}} \qquad (9)$$

2. Resposta ao degrau

- **2.5. Percentual de sobressinal (pss):**
  - Sejam y_{p1} e y_{p2} os valores saída para os dois primeiros picos de resposta do sistema e y_∞ o valor final;
  - Sejam $y_1 = y_{p1} - y_\infty$ e $y_2 = y_{p2} - y_\infty$;
  - O fator de amortecimento pode ser calculado por:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2\pi}{\ln(y_1/y_2)}\right]^2}}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{\ln(100/M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(100/M_p)\right]^2}}} \qquad (10)$$

$$\boxed{M_p = 100 \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

2. Resposta ao degrau

- **2.6. Tempo de estabilização:**
  - Seja $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ a constante de tempo do sistema de segunda ordem, o tempo de estabilização é calculado dependendo da tolerância da "banda de histerese":
    - Tolerância de $\pm$2% do valor final:

$$\boxed{t_{s,2\%} = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n}} \qquad (11)$$

    - Tolerância de $\pm$ 5% do valor final:

$$\boxed{t_{s,5\%} = 3\tau = \frac{3}{\xi\omega_n}} \qquad (12)$$

2. Resposta ao degrau

- **2.7. Identificação de um sistema de segunda ordem sub-amortecido pela resposta ao degrau:**
  - 1) Medir T_d pelos dois primeiros picos de oscilação, calcular ω_d;
  - 2) Medir M_p e calcular ξ (veja se o valor é coerente com o comportamento do sistema!):

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2\pi}{\ln(y_1/y_2)}\right]^2}}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{\ln(100/M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(100/M_p)\right]^2}}}$$

  - 3) Calcular ω_n:

$$\boxed{\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

3. Resposta ao impulso

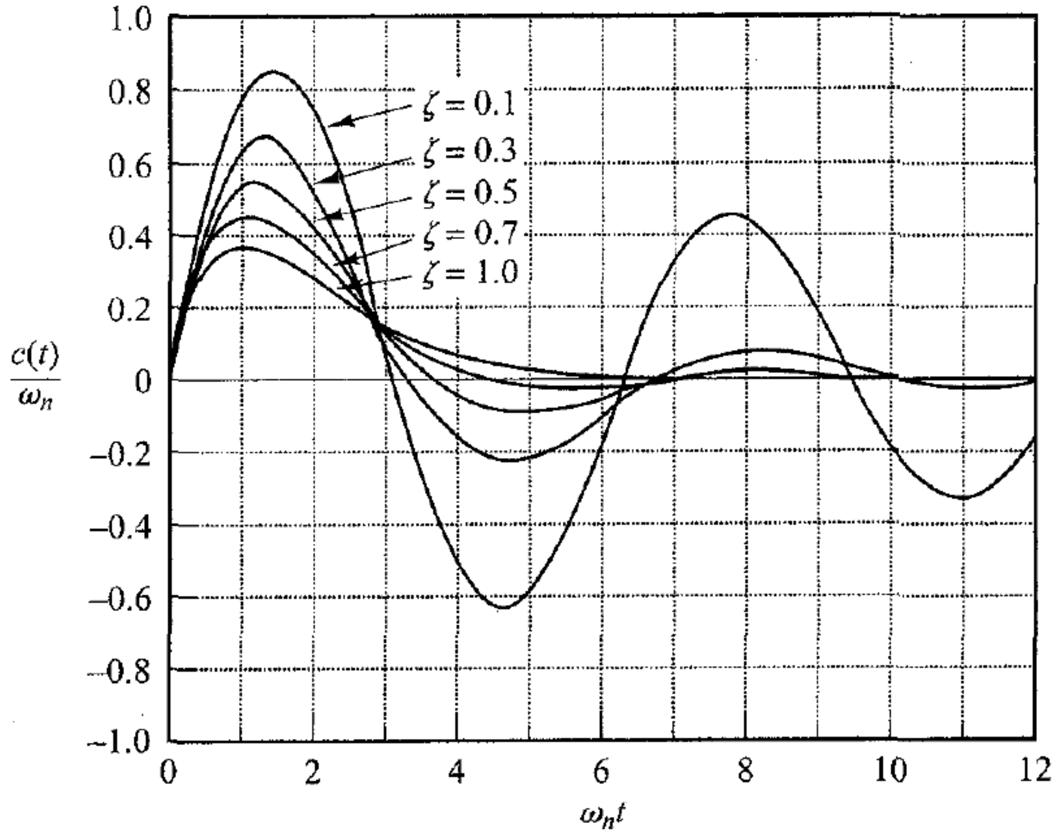
- **3.1. Resposta ao impulso unitário:**
  - A resposta ao impulso unitário é a transformada de Laplace inversa da própria planta:

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s) = \frac{{\omega_n}^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}} \tag{13}$$

  - O sistema possui um par de polos $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. O fator de amortecimento determina o comportamento oscilatório da resposta (sub-amortecido, criticamente amortecido, ou superamortecido).

3. Resposta ao impulso

- **3.1. Resposta ao impulso unitário:**



Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Qual é o significado físico da frequência natural, fator de amortecimento, e frequência natural amortecida?
  - 2) Por que polos reais e complexos tornam o sistema superamortecido e sub-amortecido, respectivamente?
  - 3) Suponha um braço robótico modelado como um sistema de segunda ordem. Você deseja mover a garra do robô da posição $\mathbf{p}_1$ até a posição $\mathbf{p}_2$ em um tempo Δt. Qual é o efeito do tempo de subida, percentual de sobressinal, e do tempo de estabilização no comportamento do manipulador?

Referências

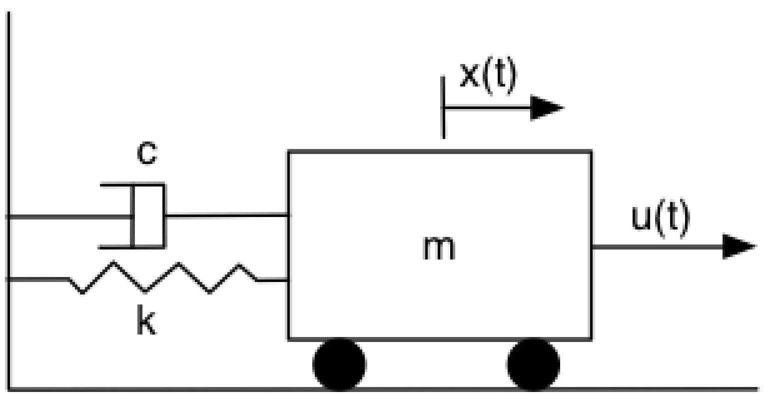
- **Referências:**

  - R. S. Figliola, D. E. Beasley, Theory and Deisign for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

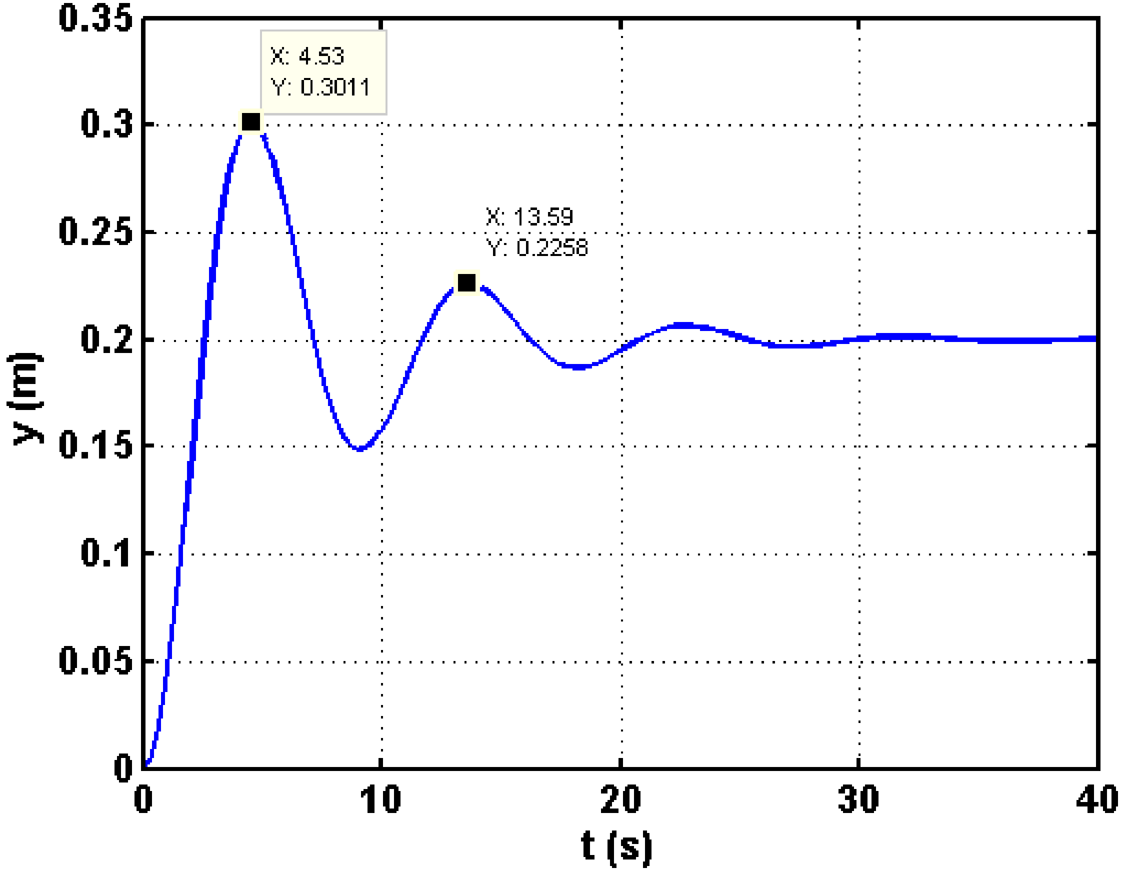
Exercícios

- **Ex 6.1)** Seja a resposta ao degrau de um sistema massa-mola-amortecedor (m, k, c), apresentada no slide seguinte. Caracterize o sistema e obtenha a sua função de transferência.
  - Obs: o modelo mck (ou sua contrapartida elétrica RLC) é muito utilizado para simplificar a representação de sistemas dinâmicos de ordem superior.



Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Resposta ao degrau;
  - O sistema é sub-amortecido;
  - A saída segue um degrau, mas não estabiliza em 1 (por que?).



Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Medindo os dois primeiros picos de resposta:
    - $t_{p1} = 4.53$ s, $y_{p1} = y(t_{p1}) = 0.3011$ m;
    - $t_{p2} = 13.59$ s, $y_{p2} = y(t_{p2}) = 0.2258$ m;
  - Frequência natural amortecida:
    - $T_d = t_2 - t_1 = 9.06$ s;
    - $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 0.694$ rad/s.

Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Percentual de sobressinal:
    - Estabilização: $y(\infty) = 0.2$ m;
    - Pico 1: $y_1 = y_{p1} - y_\infty = 0.101$ s;
    - Pico 2: $y_2 = y_{p2} - y_\infty = 0.026$ s;

$$\boxed{M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = 50.55\%}$$

Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Fator de amortecimento:
    - Sistema sub-amortecido.

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2\pi}{\ln(y_1/y_2)}\right]^2}} = 0.2124}$$

  - Frequência natural:

$$\boxed{\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.694 \text{ rad/s}}$$

Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Função de transferência:
    - Saída unitária:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2} = \frac{0.5}{s^2 + 0.3 + 0.5}}$$

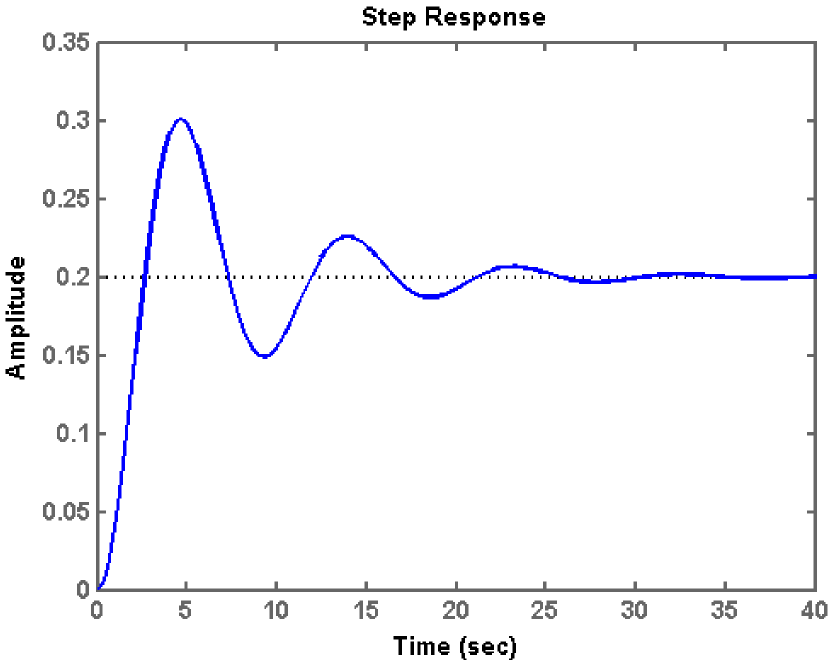
    - Como a saída do sistema não é unitária, corrigir com um ganho $K = \frac{0.2}{1} = 0.2$:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1}{s^2 + 0.3 + 0.5}}$$

Exercícios

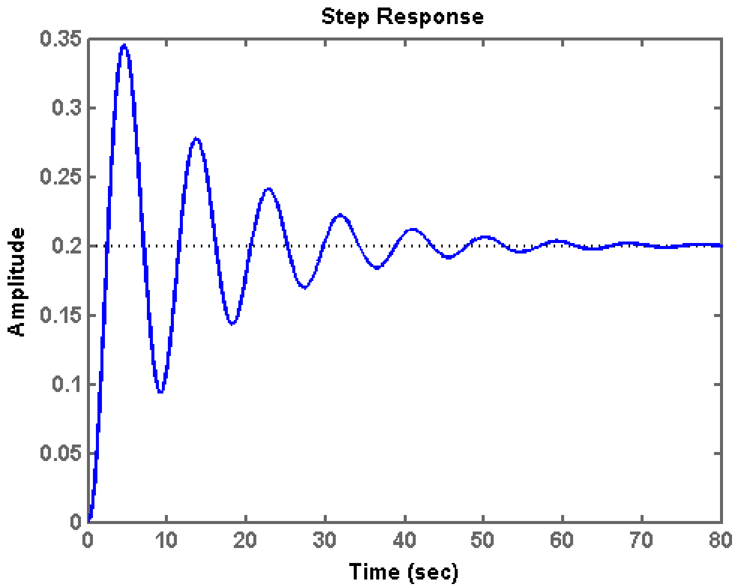
- **Ex 6.1)**
  - Verificação do sistema:

```
csi = 0.2124
wn = 0.694
K = 0.2

s = tf('s');
Gs =
K*wn^2/(s^2+2*csi*wn*s+wn^2)

step(Gs)
```

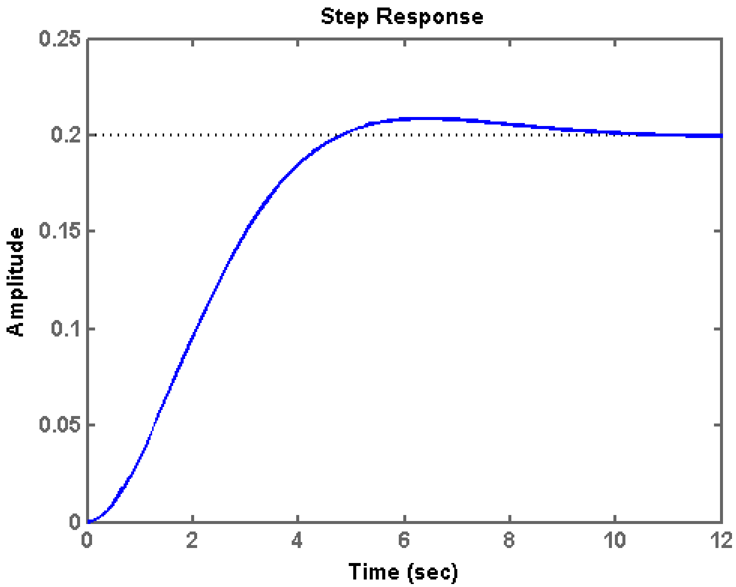


Exercícios

- **Ex 6.1)**
  - Efeito de ξ:



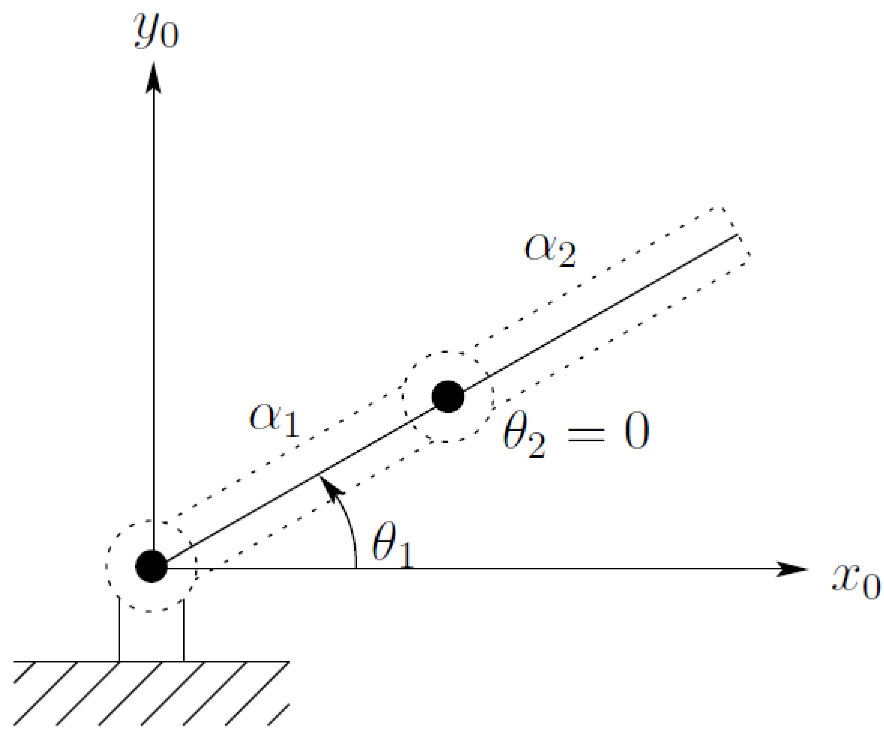
$\xi = 0.1$



$\xi = 0.707$

Exercícios

- **Ex 6.2)** Seja um manipulador robótico modelado por uma junta rotacional (inércia J, amortecimento B e constante elástica K). O torque T do motor move a junta com velocidade $\omega = \dot{\theta}$. Obtenha a resposta ao degrau unitário e caracterize o sistema. Em seguida, avalie a resposta do robô para realizar um deslocamento $\theta(t) = 0 \rightarrow 70° \rightarrow 25°$.
  - Parâmetros do sistema (SI):
    - $J = 0.2$;
    - $B = 0.15$;
    - $K = 0.1$.



Exercícios

- **Ex 6.2)**
  - Modelo mecânico:

$$\boxed{T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t)}$$

  - Frequência natural, fator de amortecimento, e frequência natural amortecida:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} = 0.707 \text{ rad/s}} \qquad \boxed{\xi = \frac{B}{2\sqrt{KJ}} = 0.53} \qquad \boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.6 \text{ rad/s}}$$

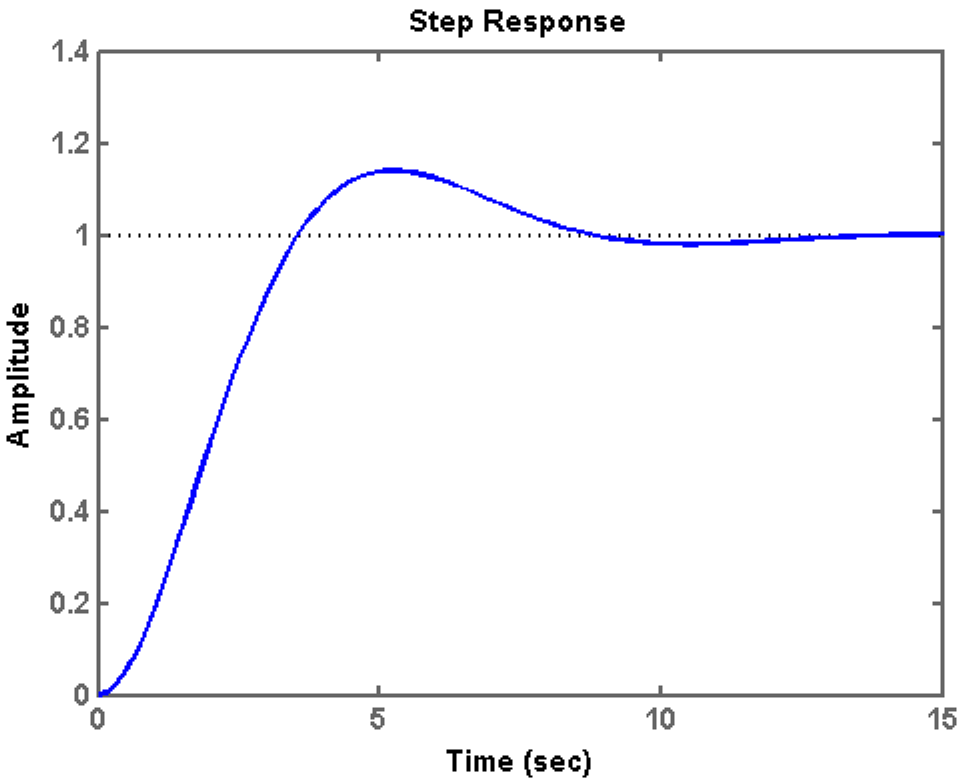
Exercícios

- **Ex 6.2)**
  - Função de transferência (normalizada)

$$\boxed{G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2} = \frac{0.5}{s^2 + 0.75s + 0.5}}$$

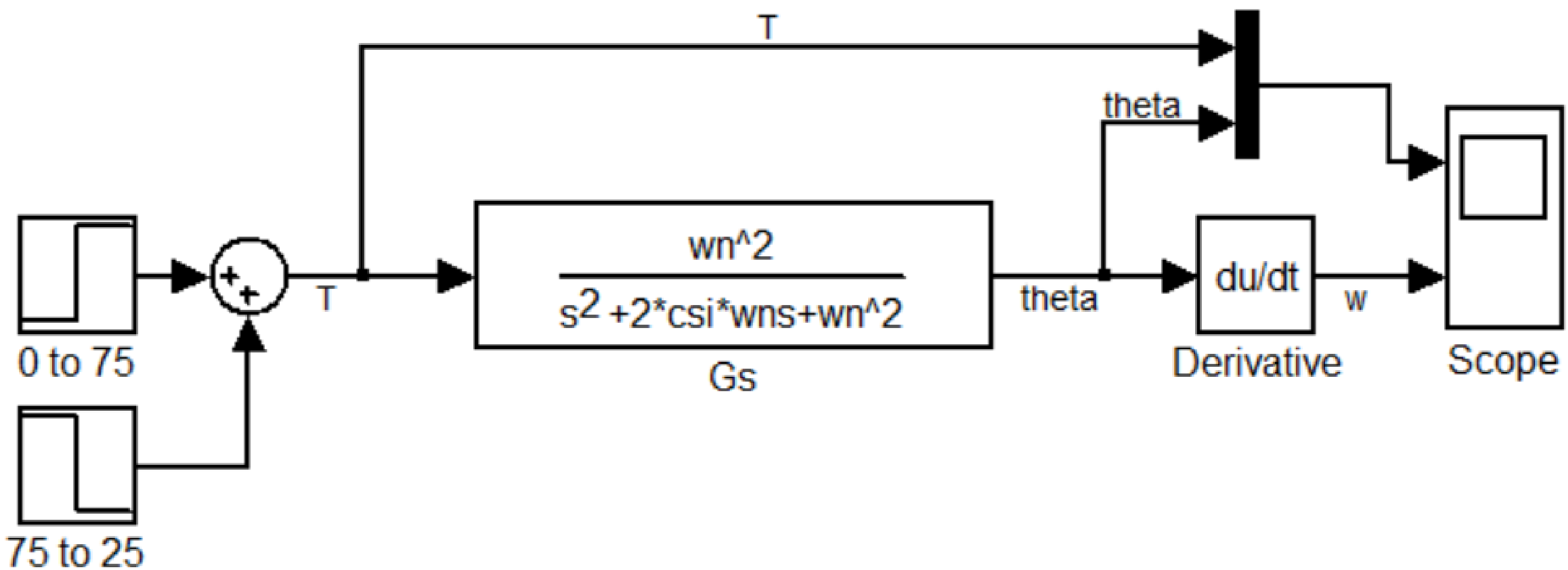
Exercícios

- **Ex 6.2)**
  - Resposta ao degrau:
    - Sobressinal:
      - $M_p = 14\%$;
    - Tempo de subida:
      - $t_r = 3.53$ s;
    - Tempo de estabilização:
      - $t_s = 10.5$ s.



Exercícios

- **Ex 6.2)**
  - Implementação no Simulink: seja a entrada de torque proporcional à posição angular.



Exercícios

- **Ex 6.2)**
  - Resposta do sistema:
    - Pico excede o valor final em ~4,5°;
    - O sistema é muito lento!