ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

02 – Modelagem de sistemas

Eric Fujiwara

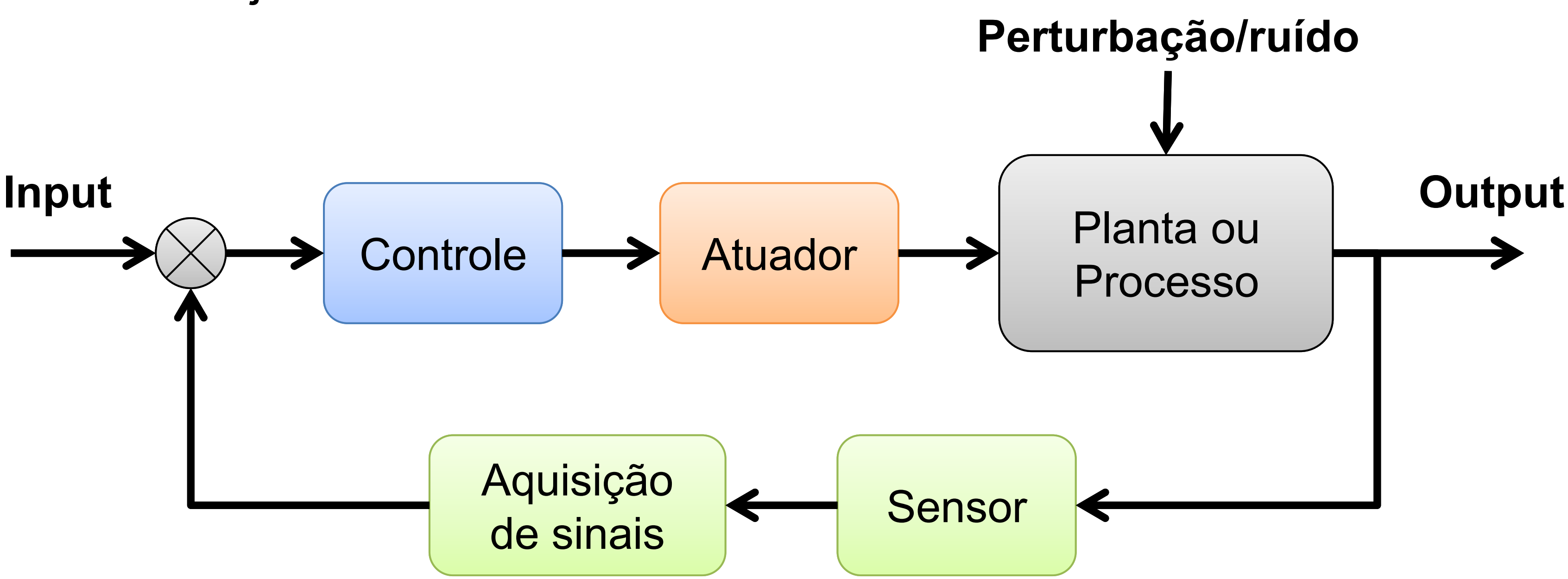
Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Modelagem;
  - 2) Sistemas lineares;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

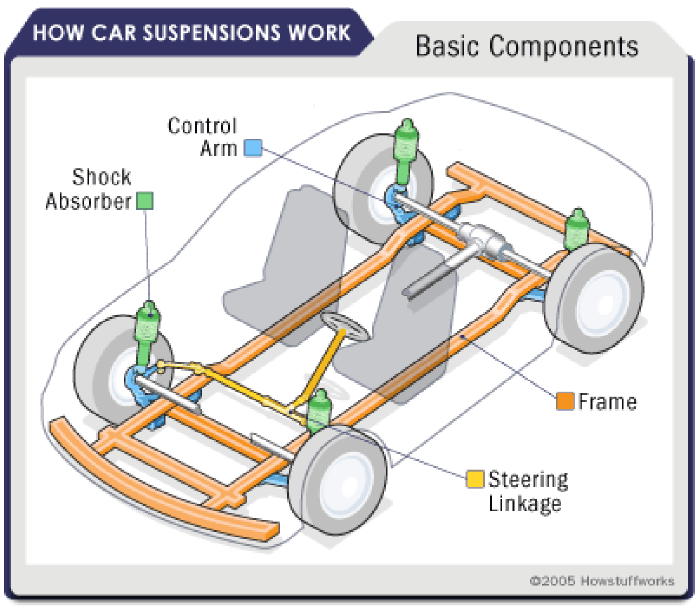
1. Modelagem

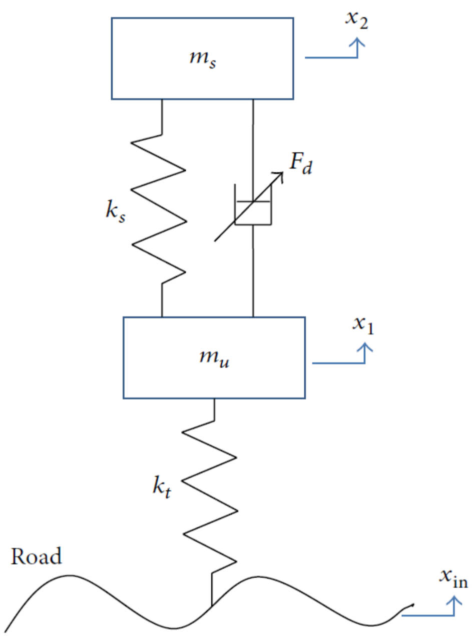
- **1.1. Modelo:**
  - **Sistema mecatrônico:** o objetivo do **controle** é regular o **processo** de modo a obter uma saída correspondente à entrada desejada.



1. Modelagem

- **1.1. Modelo:**
  - O **modelo** é a representação matemática de um **sistema** físico, ou seja, uma função que correlaciona as **saídas** do sistema às suas **entradas**





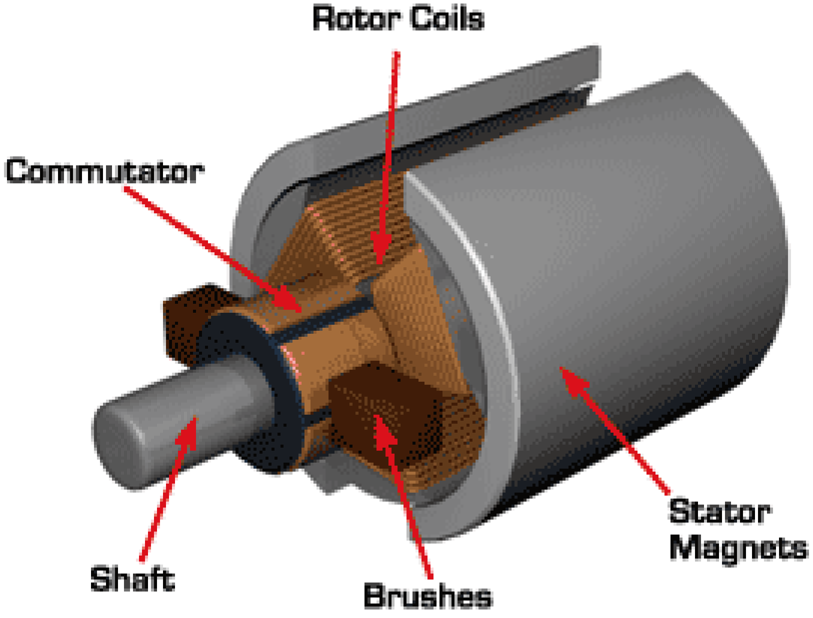
DOI 10.1155/2014/487312

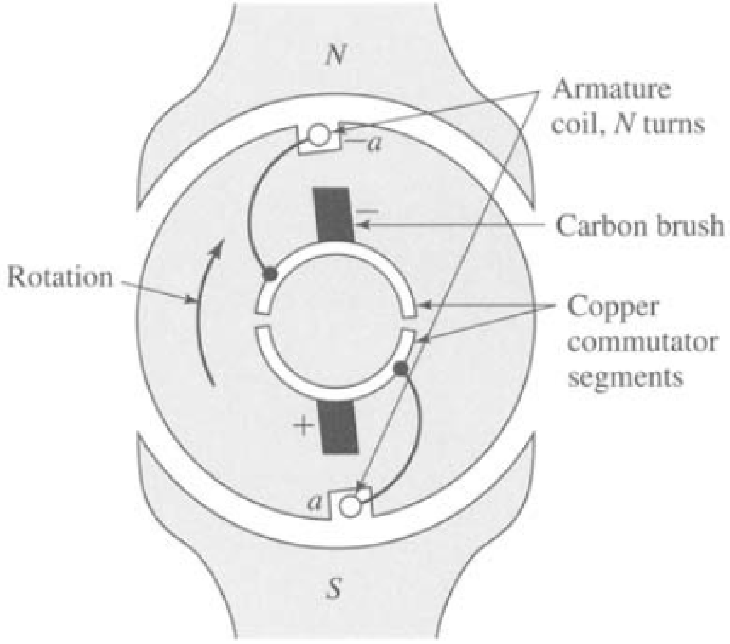
1. Modelagem

- **1.2. Sistemas, subsistemas e elementos:**
  - Na abordagem mecatrônica, **sistemas** complexos pode ser representados por **módulos** (ou subsistemas) interconectados através de suas **entradas** e **saídas**;
  - Cada **subsistema** é composto por **elementos** físicos (resistor, capacitor, inércia, mola, núcleo magnético, etc.)
  - Assim, um **sistema** é representado por **subsistemas** concatenados, por sua vez representados pela composição de **elementos**.

1. Modelagem

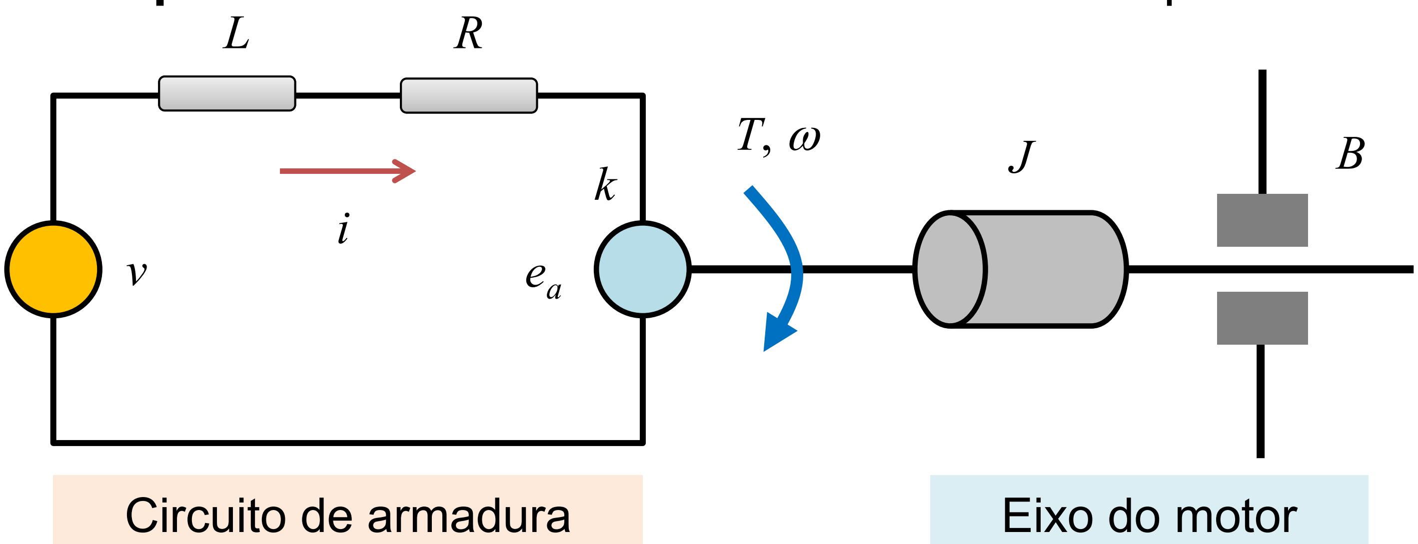
- **1.2. Sistemas, subsistemas e elementos:**
  - **Exemplo:** Motor de corrente contínua com ímãs permanentes.





1. Modelagem

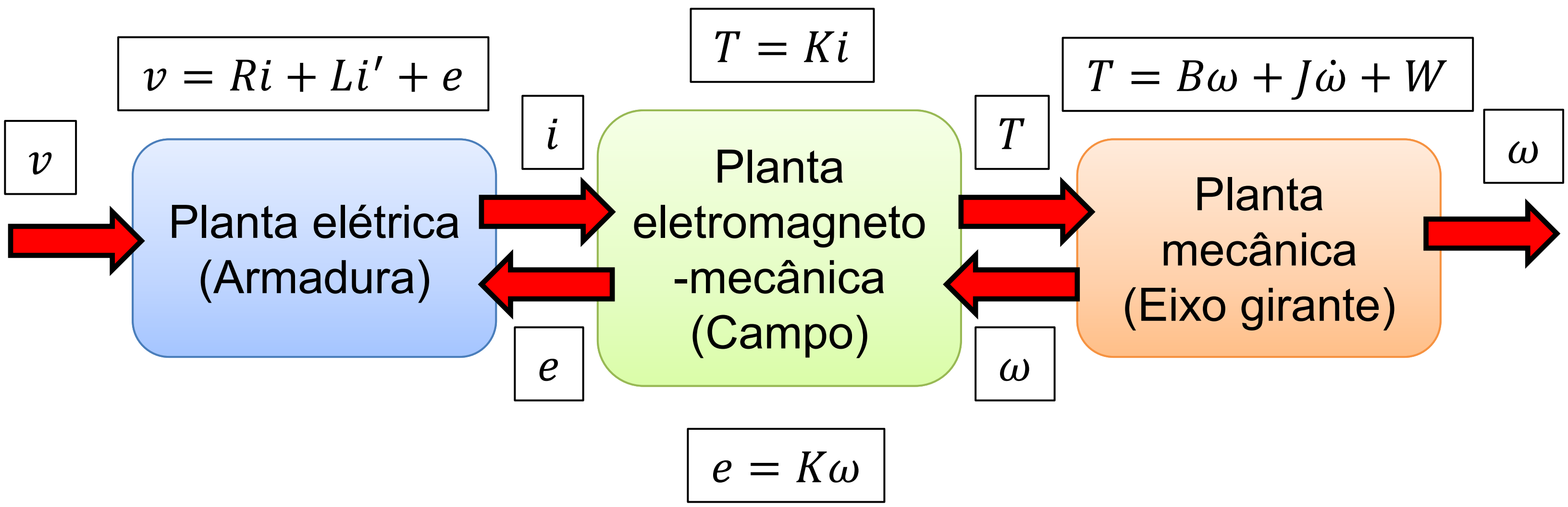
- **1.2. Sistemas, subsistemas e elementos:**
  - **Exemplo:** Motor de corrente contínua com ímãs permanentes.



- Tensão de armadura v → velocidade mecânica ω;
- Corrente de armadura i → torque eletromecânico T.

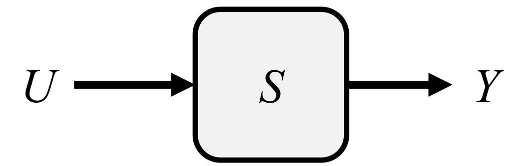
1. Modelagem

- **1.2. Sistemas, subsistemas e elementos:**
  - **Exemplo:** Motor de corrente contínua com ímãs permanentes.



1. Modelagem

- **1.3. Aplicações de um modelo:**



  - **1) Identificação:** obtenção da planta S baseado nos valores de entrada U e da saída medida Y;
  - **2) Análise (simulação):** predição da resposta do sistema Y baseado no modelo S e nos valores das entradas U;
  - **3) Síntese:** dada a entrada U e a saída desejada Y, obter o modelo S que satisfaça essa relação;
  - **4) Controle:** dado o modelo S, desenvolver uma malha de controle de forma que seja obtida a saída desejada Y dada a entrada U.

1. Modelagem

- **1.4. Identificação do modelo:**
  - **1) Método analítico:** com base na concepção do sistema e nas características conhecidas, calcular os coeficientes do sistema para determinar a sua planta;
  - **2) Método experimental:** aplicar uma entrada conhecida ao sistema para medir a sua saída. Com base nas características da saída, é possível determinar os coeficientes do sistema;
  - **Importante:** não existe modelo 100% exato. Quanto menor o erro, mais a resposta do modelo se aproxima do sistema real. Por outro lado, modelos mais simples facilitam o projeto da malha de controle.

2. Sistemas lineares

- **2.1. Sistemas lineares:**
  - Os sistemas estudados nesta disciplina são **lineares com coeficientes invariantes no tempo (LTI)**;
    - **Sistemas lineares** atendem o **princípio da superposição**:

$$\boxed{y = f(x)}$$

$$\boxed{y_1 = f(x_1)} \qquad \boxed{y_2 = f(x_2)}$$

$$\boxed{y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2}$$

    - Em **sistemas invariantes no tempo**, os coeficientes são sempre constantes e não variam ao longo do tempo.

2. Sistemas lineares

- **2.2. Sistemas de ordem n:**
  - Um **sistema LTI de ordem** n pode ser descrito através de uma equação diferencial ordinária (EDO) da forma:

$$\boxed{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)} \qquad (1)$$

  - $y(t)$: saída;
  - $u(t)$: entrada;
  - a_n: coeficientes (parâmetros físicos do sistema) → **constantes**.

2. Sistemas lineares

- **2.2. Sistemas de ordem n:**
  - **Sistema de ordem zero:**

$$\boxed{a_0 y(t) = u(t)} \tag{2}$$

  - **Sistema de primeira ordem:**

$$\boxed{a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)} \tag{3}$$

  - **Sistema de segunda ordem:**

$$\boxed{a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)} \tag{4}$$

2. Sistemas lineares

- **2.3. Solução de sistemas LTI:**
  - O modelo descreve o comportamento dinâmico do sistema;
  - Seja uma entrada $u(t)$, a resposta do sistema $y(t)$ é calculada a partir de $u(t)$ e dos coeficientes do modelo a_n → resolver $y(t)$;
  - **A saída é sempre da mesma forma que a entrada**;
    - Mas os parâmetros do sistema podem distorcer a saída (atenuação, atraso, etc.) em relação à entrada;
  - Lembre-se que, como o sistema é LTI, é possível utilizar o princípio da superposição para avaliar a resposta do modelo.

2. Sistemas lineares

- **2.4. Exemplos de funções de excitação:**
  - **Impulso unitário:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \delta(t) = 1, & t = 0 \end{array}} \qquad (5)$$

  - **Degrau unitário:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = 0, & t < 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{array}} \qquad (6)$$

  - **Rampa unitária:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} r(t) = 0, & t < 0 \\ r(t) = t, & t \geq 0 \end{array}} \qquad (7)$$

  - **Função senoidal:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(t) = 0, & t < 0 \\ f(t) = \sin \omega t\,, & t \geq 0 \end{array}} \qquad (8)$$

    - **Obs:** você pode excitar o sistema com qualquer sinal de entrada.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) O que é um modelo? Qual é a importância de se determinar o modelo do sistema?
  - 2) Quais são os métodos que existem para identificar o modelo do sistema?
  - 3) Quais são as características de um sistema linear e invariante no tempo?
  - 4) Verifique (utilizando algum software) a forma de onda das funções de excitação apresentadas na seção 2.4.

Referências

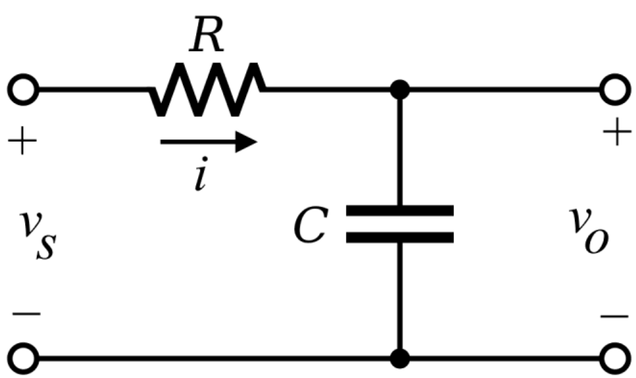
- **Referências:**

  - R. S. Figliola, D. E. Beasley, Theory and Deisign for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - D. C. Karnopp *et al.*, Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems, Wiley, 2012.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercício

- **Ex. 2.1)** Determine o modelo de um filtro passa-baixas passivo para converter uma tensão de entrada v_s em uma tensão de saída v_o. O dispositivo possui resistor R e capacitor C.



Exercício

- **Ex. 2.1)**
  - Lei de Kirchhoff:

$$\boxed{v_s(t) = v_R(t) + v_c(t)}$$

  - Tensão no resistor:

$$\boxed{v_R(t) = Ri(t) = R\dot{q}(t)}$$

  - Tensão no capacitor:

$$\boxed{v_c(t) = v_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}q(t)}$$

$$\boxed{q(t) = Cv_o(t)}$$

Exercício

- **Ex. 2.1)**
  - Substituindo:

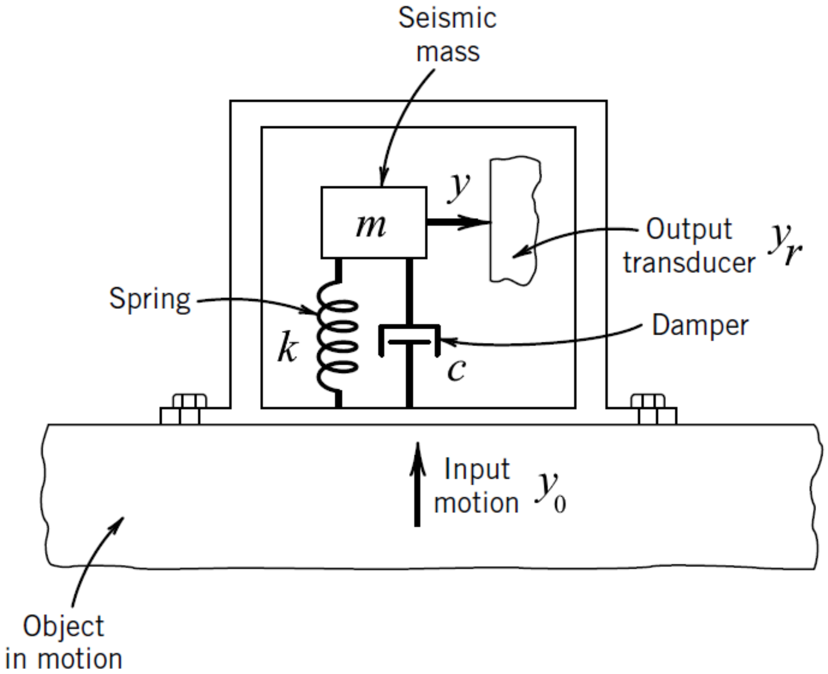
$$\boxed{v_s(t) = Ri(t) + v_o(t)}$$

$$\boxed{RC\dot{v}_o(t) + v_o(t) = v_s(t)}$$

  - O filtro passa-baixas passivo é um sistema LTI de primeira ordem;
  - Seja a tensão de entrada $v_s(t)$, a tensão de saída $v_o(t)$ pode ser obtida resolvendo a equação diferencial ordinária.

Exercício

- **Ex. 2.2)** Obtenha o modelo de um acelerômetro mecânico. A aceleração sofrida pelo transdutor ($\ddot{y}_0$) é medida através do deslocamento relativo y_r da massa sísmica m.



Exercício

- **Ex. 2.2)**
  - O deslocamento relativo medido y_r é dado pela diferença entre a posição da massa sísmica y e o deslocamento sofrido pelo acelerômetro y_0:

$$\boxed{y_r(t) = y(t) - y_0(t)}$$

  - Equilíbrio de forças:

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + c\dot{y}_r(t) + ky_r(t) = 0}$$

$$\boxed{m[\ddot{y}_r(t) + \ddot{y}_0(t)] + c\dot{y}_r(t) + ky_r(t) = 0}$$

$$\boxed{m\ddot{y}_r(t) + c\dot{y}_r(t) + ky_r(t) = -m\ddot{y}_0(t)}$$

Exercício

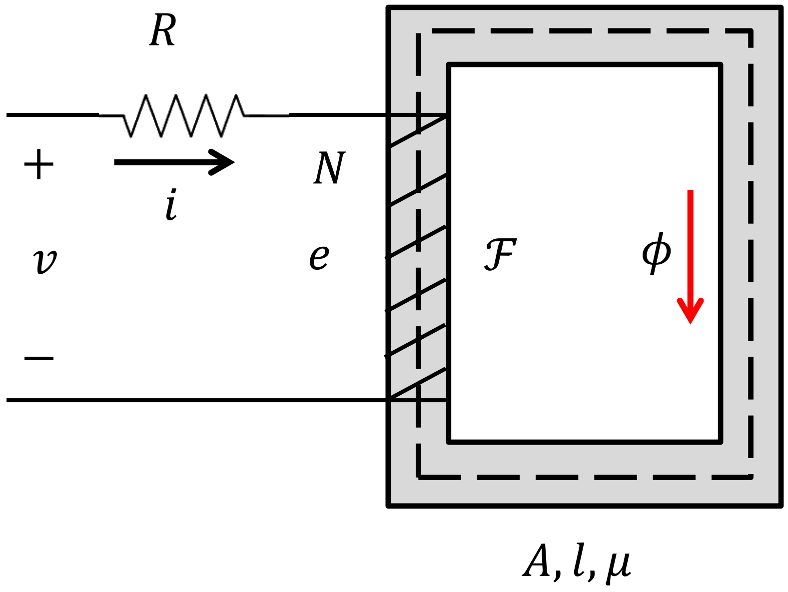
- **Ex. 2.2)**
  - Definindo $u(t) = -m\ddot{y}_0(t)$ como o estímulo de entrada proporcional à aceleração,

$$\boxed{m\ddot{y}_r(t) + c\dot{y}_r(t) + ky_r(t) = u(t)}$$

  - O acelerômetro mecânico é um sistema LTI de segunda ordem;
  - A saída $y_r(t)$ (obtida resolvendo a EDO) é proporcional à entrada $\ddot{y}_0(t)$, ou seja, a velocidade $\dot{y}_0(t)$ e a posição $y_0(t)$ podem ser medidas integrando a saída $y_r(t)$.

Exercício

- **Ex. 2.3)** Obtenha o modelo eletromagnético do solenoide. O enrolamento de N voltas é excitado por uma tensão v (AC), gerando uma corrente i que produz força magnetomotriz $\mathcal{F}$, estabelecendo fluxo ϕ através de um núcleo (comprimento l, área A, e permeabilidade magnética μ).



Exercício

- **Ex. 2.3)**
  - Circuito elétrico (enrolamento):

$$\boxed{v(t) = Ri(t) + e(t)}$$

  - Circuito magnético (núcleo):

$$\boxed{\mathcal{F}(t) = Ni(t) = \frac{l}{\mu A}\phi(t) = \mathcal{R}\phi(t)}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathcal{R}}{N}\phi(t)}$$

    - $\mathcal{R} = l/\mu A$ é a relutância magnética.

Exercício

- **Ex. 2.3)**
  - Tensão induzida (Lei de Faraday de indução):

$$\boxed{e(t) = N\frac{d}{dt}\phi(t)}$$

  - Combinando as equações (sistema de primeira ordem):

$$\boxed{v(t) = Ri(t) + N\dot{\phi}(t)} \qquad \boxed{N\dot{\phi}(t) + \frac{R\mathcal{R}}{N}\phi(t) = v(t)}$$

  - Resolvendo em termos de $i(t)$:

$$\boxed{v(t) = Ri(t) + \frac{N^2}{\mathcal{R}}\frac{d}{dt}i(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t)}$$

    - Onde $L = N^2/\mathcal{R}$ é a indutância.