

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

09 – Erro estacionário

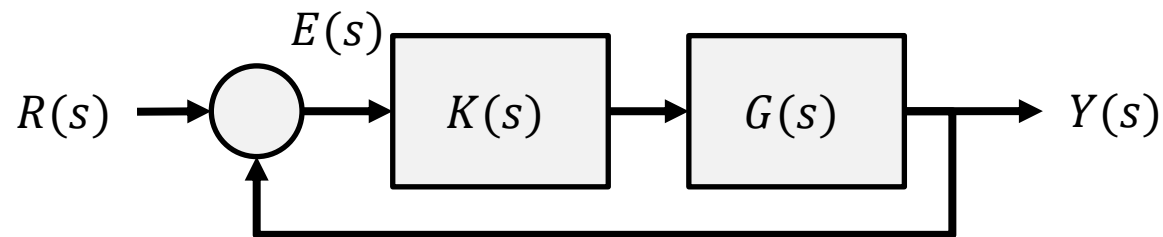
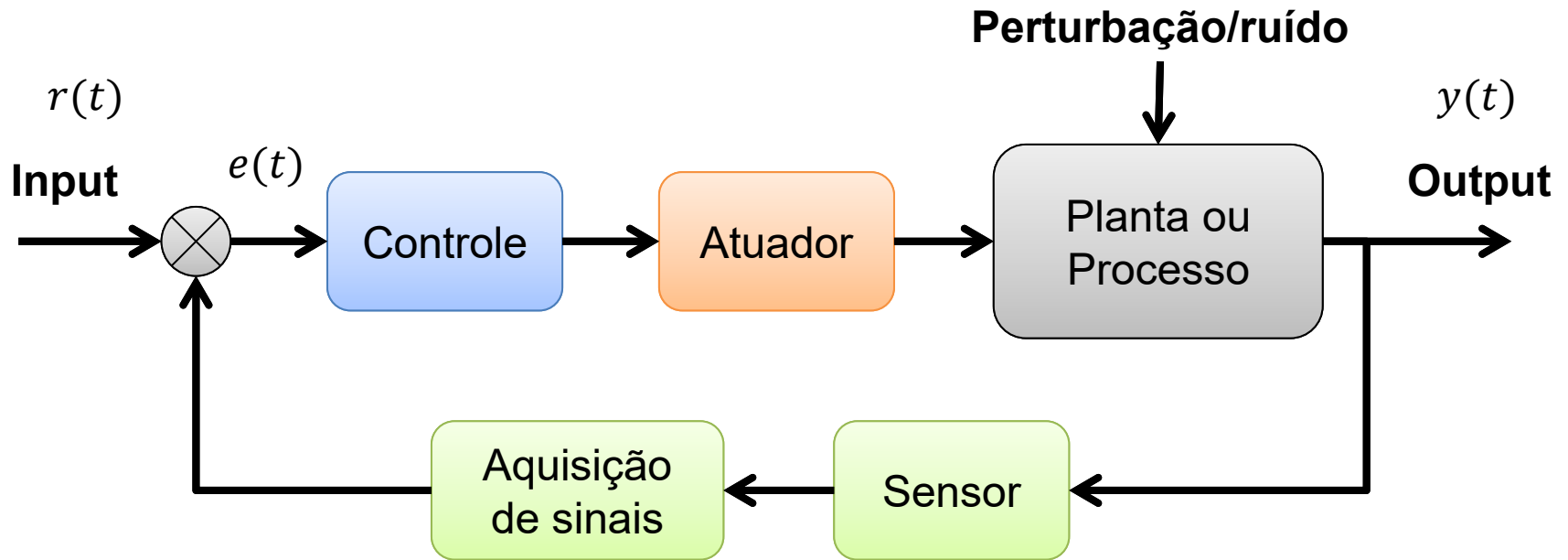
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
 - 1) Erro estacionário;
 - 2) Constante de erro estático;
 - Questionário;
 - Referências;
 - Exercícios.

Sistema mecatrônico



1. Erro estacionário

▪ 1.1. Erro na resposta do sistema:

- **Erro** é a diferença entre os valores esperado $r(t)$ e obtido $y(t)$,
 $e(t) = r(t) - y(t)$;
- Os erros podem ser gerados por imperfeições no modelo, variação nos componentes devido a efeitos temporais ou ambientais, ou pela incapacidade do sistema em seguir a entrada especificada;
- Conforme visto anteriormente, o objetivo do **controlador** em um sistema mecatrônico é **minimizar o erro** e forçar a saída a se comportar de acordo com o especificado.

1. Erro estacionário

▪ 1.2. Classificação de sistemas de controle:

- Seja a planta em **malha aberta** de um sistema:

$$G(s) = \frac{K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} \quad (1)$$

- K é um ganho em malha aberta;
- $1/s^N$ é um polo na origem de multiplicidade N :
 - $N = 0$: sistema do tipo 0;
 - $N = 1$: sistema do tipo 1;
 - $N = 2$: sistema do tipo 2;
 - Etc.

1. Erro estacionário

▪ 1.3. Erro estacionário:

- Seja a TF de um sistema em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

- Calculando o erro:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) \left[1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} \right]$$

$$E(s) = R(s) \left[\frac{1}{1 + G(s)} \right]$$

(2)

1. Erro estacionário

▪ 1.3. Erro estacionário:

- O erro da resposta estacionária e_{ss} pode ser calculado pelo **teorema do valor final**:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (3)$$

- O **erro estacionário** pode ser avaliado para diferentes sinais de entrada (degrau, rampa, etc.);
 - Utilizando a analogia mecânica, se o degrau é a posição, então a rampa é a velocidade, e a parábola é a aceleração.

2. Constante de erro estático

▪ 2.1. Constante de erro estático de posição:

- Erro estático para uma **entrada degrau unitário** $R(s) = 1/s$:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (4)$$

- **Constante de erro de posição:**

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad (5)$$

2. Constante de erro estático

▪ 2.1. Constante de erro estático de posição:

- Recapitulando a TF da planta em malha aberta,

$$G(s) = \frac{K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots}$$

- Sistema tipo zero ($N = 0$): $K_p = G(0) = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K}$;
- Sistema tipo $N \geq 1$: $K_p = \infty \rightarrow e_{ss} = 0$;
- Um sistema sem polo na origem (tipo zero) sempre terá um erro estacionário não-nulo;
- É possível analisar o erro em **malha fechada** a partir da planta em **malha aberta**.

2. Constante de erro estático

- **2.2. Constante de erro estático de velocidade:**
 - Erro estático para uma **rampa unitária** $R(s) = 1/s^2$:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{K_v} \quad (6)$$

- **Constante de erro de velocidade:**

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (7)$$

2. Constante de erro estático

▪ 2.2. Constante de erro estático de velocidade:

- Sistema tipo 0:

$$K_v = 0$$

$$e_{ss} = \infty$$

- Sistema tipo 1:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

- Sistema tipo $N \geq 2$:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s^{N-1}} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

- O erro estático de velocidade é infinito para sistema de ordem 0.

2. Constante de erro estático

- **2.3. Constante de erro estático de aceleração:**
 - Erro estático para uma **parábola unitária** $R(s) = 1/s^3$:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a} \quad (8)$$

- **Constante de erro de aceleração:**

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (9)$$

2. Constante de erro estático

▪ 2.3. Constante de erro estático de aceleração:

- Sistema tipo $N \leq 1$:

$$K_a = 0$$

$$e_{ss} = \infty$$

- Sistema tipo 2:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

- Sistema tipo $N \geq 3$:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s^{N-1}} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

- O erro estático de aceleração é infinito para sistema de ordem 0.

2. Constante de erro estático

- 2.4. Resumo: erro estacionário em função de K

Table 5-1 Steady-State Error in Terms of Gain K

	Step Input $r(t) = 1$	Ramp Input $r(t) = t$	Acceleration Input $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Type 0 system	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Type 1 system	0	$\frac{1}{K}$	∞
Type 2 system	0	0	$\frac{1}{K}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

2. Constante de erro estático

- **2.4. Resumo: erro estacionário em função de K**
 - As constantes de erro estático indicam a habilidade do sistema em **malha fechada** para reduzir ou eliminar o erro estacionário;
 - Tecnicamente, é possível incluir integradores para reduzir o erro à rampa em um sistema do tipo zero, mas isso traz algumas implicações de estabilidade que devem ser compensadas.

Questionário

- **Questionário:**

- 1) Fisicamente, o que é erro estacionário?
- 2) O erro estacionário da planta em malha aberta é igual ao erro da planta em malha fechada?
- 3) O que é mais importante na resposta de um sistema mecatrônico: as características transientes ou estacionárias?

Referências

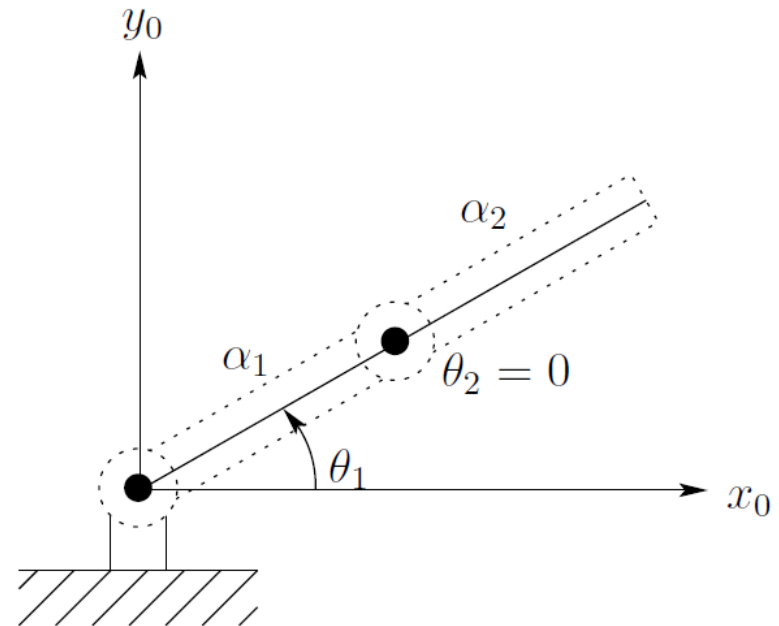
▪ Referências:

- G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
- K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 9.1)** Seja o manipulador robótico de 1 grau de liberdade (junta rotacional). Calcule o erro estacionário ao degrau e à rampa unitária para o sistema em malha aberta e malha fechada.
 - Parâmetros do sistema (SI):
 - $J = 0.2$;
 - $B = 0.15$;
 - $K = 0.1$.



Exercícios

▪ Ex. 9.1)

- Função de transferência – malha aberta:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.5}{s^2 + 0.75s + 0.5}$$

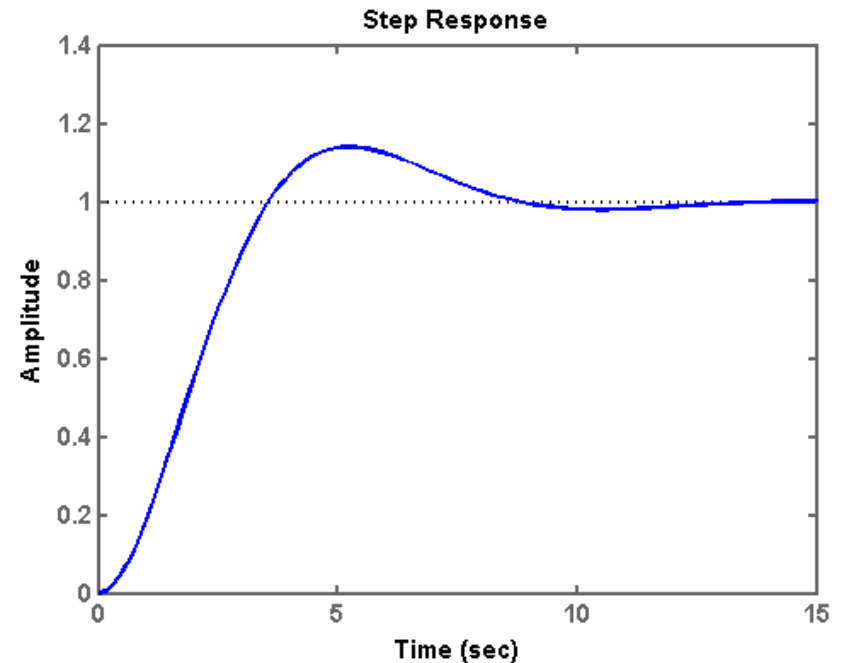
- Função de transferência – malha fechada, realimentação unitária:

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{0.5}{s^2 + 0.75s + 1} = \frac{0.5}{(s + 0.38 - 0.93j)(s + 0.38 + 0.93j)}$$

- Sistema tipo zero.

Exercícios

- **Ex. 9.1)**
 - Sistema em **malha aberta**:
 - Erro estacionário ao degrau:
- $$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = 1 - 1 = 0$$
- Pela resposta ao degrau, nota-se que o sistema atinge o valor final para a entrada unitária.



Exercícios

▪ Ex. 9.1)

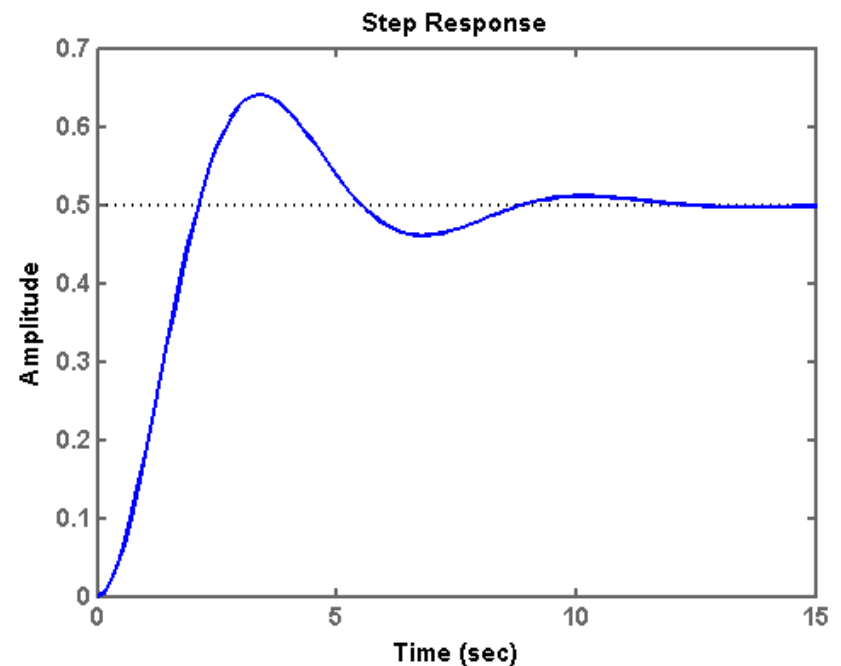
• Sistema em **malha fechada**:

- Erro estacionário ao degrau:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

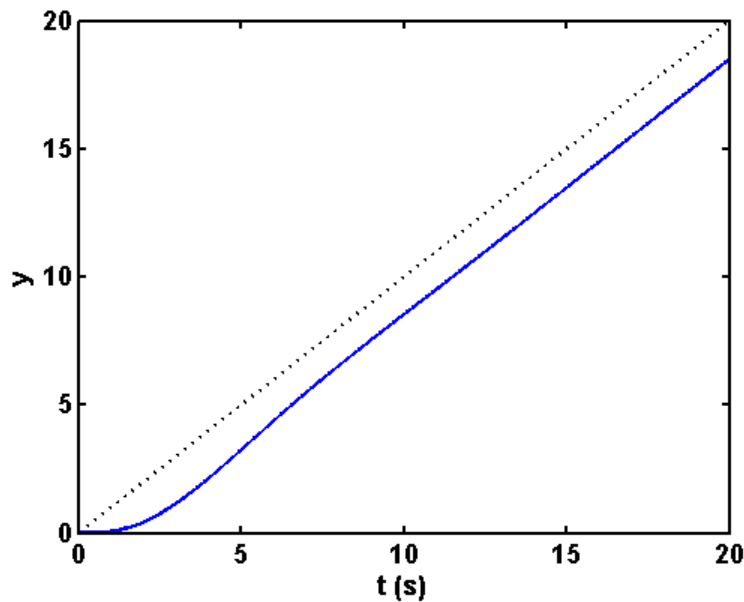
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.5$$

- Um resultado análogo é obtido pelo teorema do valor final em $H(s)$.

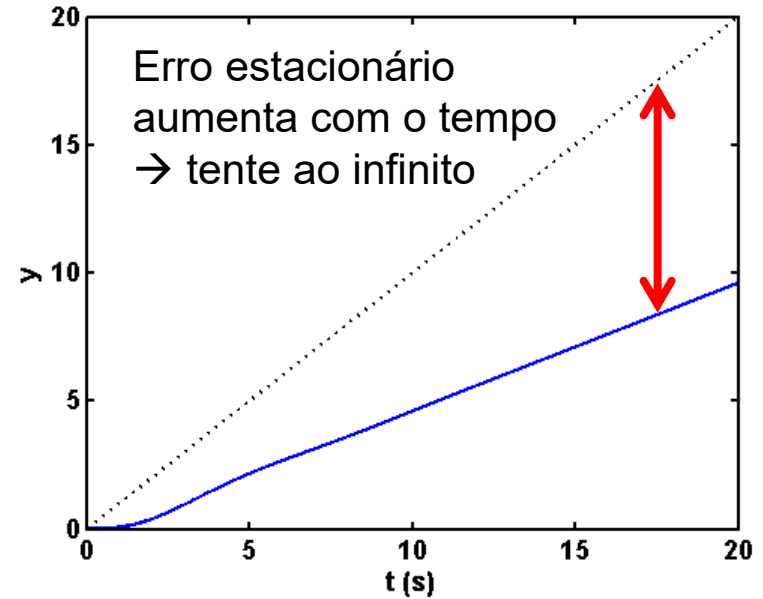


Exercícios

- **Ex. 9.1)**
 - Resposta à rampa: erro estacionário infinito.



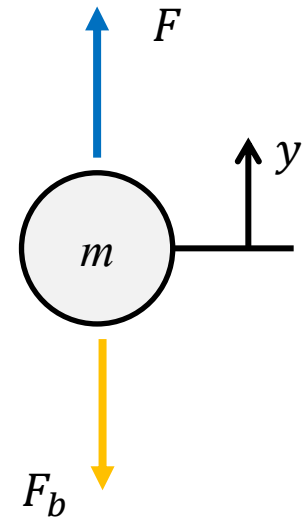
$G(s)$



$H(s)$

Exercícios

- **Ex. 9.2)** Seja o modelo simplificado do drone. Calcule o erro estacionário ao degrau e à rampa unitária para o sistema em malha aberta e malha fechada.
 - Parâmetros do sistema (SI):
 - $m = 0.8$;
 - $b = 0.4$.



Exercícios

▪ Ex. 9.2)

- Função de transferência – malha aberta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms + b)} = \frac{1}{s(0.8s + 0.4)}$$

- Sistema tipo 1.
- Função de transferência – malha fechada:

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{0.8s^2 + 0.4s + 1}$$

Exercícios

▪ Ex. 9.2)

- Resposta ao degrau:
 - Erro estacionário – malha aberta:

$$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = -\infty$$

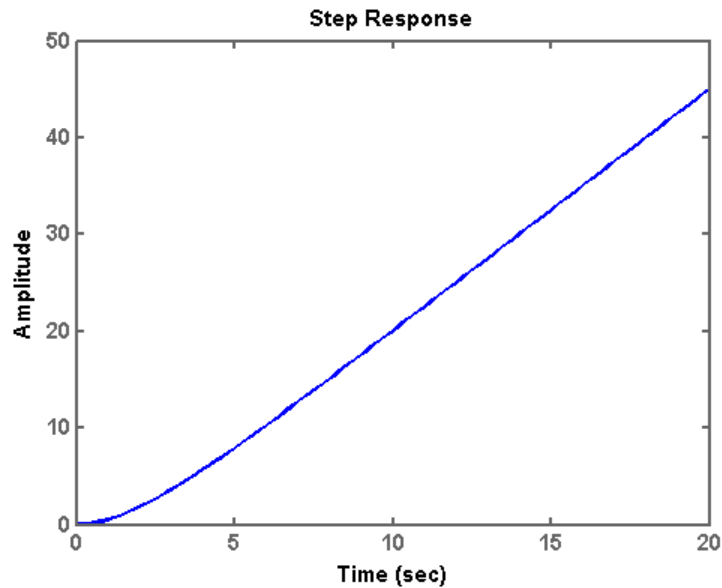
- Erro estacionário – malha fechada:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

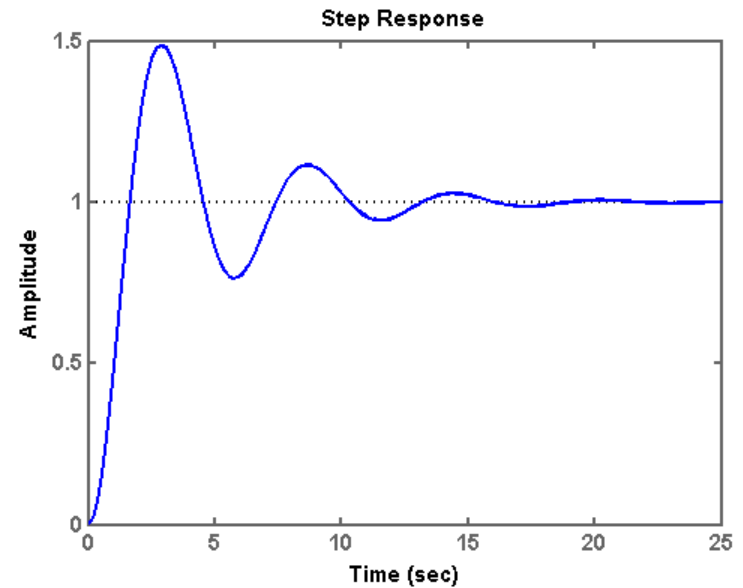
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

Exercícios

- Ex. 9.2)
 - Resposta ao degrau:



$G(s)$



$H(s)$

Exercícios

▪ Ex. 9.2)

- Resposta à rampa:
 - Erro estacionário – malha aberta:

$$e_{ss} = \infty$$

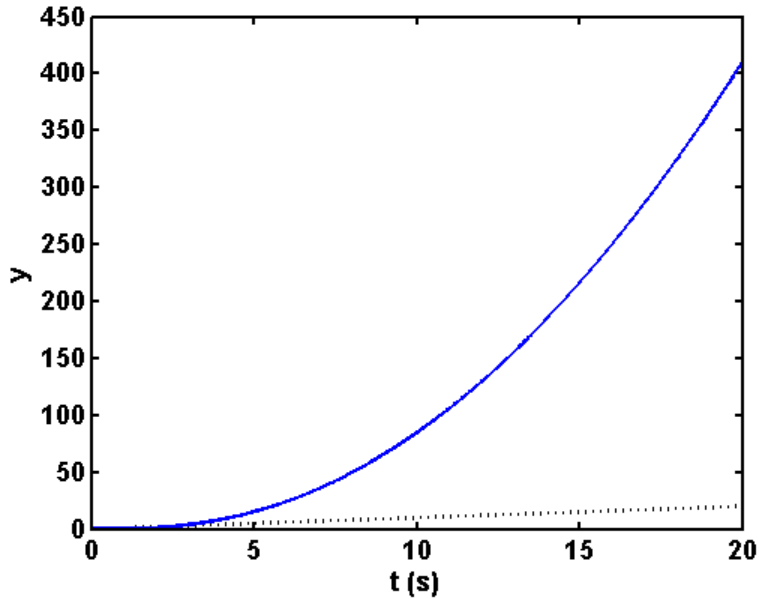
- Erro estacionário – malha fechada:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 2.5$$

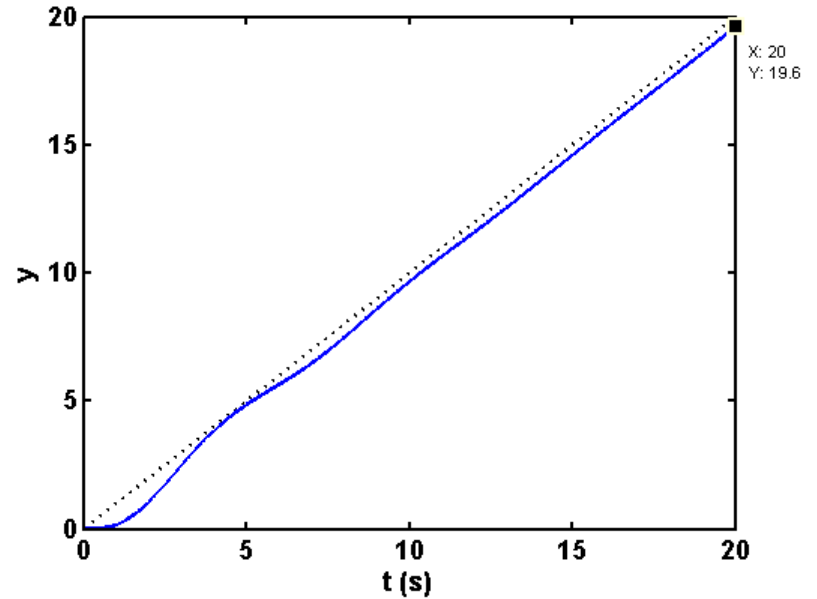
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.4$$

Exercícios

- Ex. 9.2)
 - Resposta à rampa:



$G(s)$



$H(s)$