ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

03 – Função de transferência

Eric Fujiwara

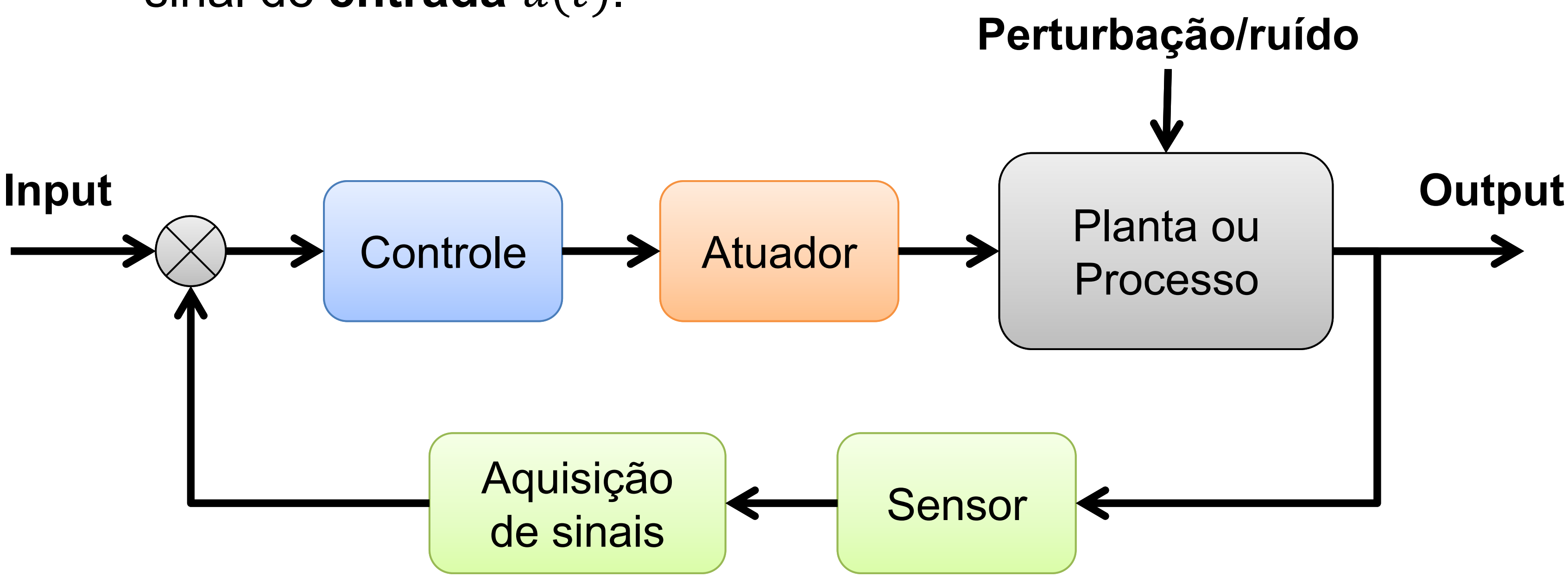
Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Transformada de Laplace;
  - 2) Função de transferência;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Transformada de Laplace

- **1.1. Transformada de Laplace:**
  - Uma vez identificado o **modelo** da planta ou processo, a próxima etapa é avaliar a **saída** $y(t)$ do sistema em resposta o sinal de **entrada** $u(t)$.



1. Transformada de Laplace

- **1.1. Transformada de Laplace:**
  - Dada a entrada $u(t)$, queremos determinar a resposta do sistema $y(t)$, ou seja, resolver a EDO;
  - Uma forma calcular a resposta é através da **transformada de Laplace**:

$$\boxed{Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt} \qquad (1)$$

  - Onde $s = \sigma + j\omega$ é a variável de Laplace.

1. Transformada de Laplace

- **1.2. Transformada de Laplace inversa:**

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma-j\infty} Y(s)e^{st}ds} \qquad (2)$$

- A solução de (2) é obtida pelo **teorema dos resíduos**:

$$\boxed{y(t) = 2\pi j \sum_{n} z_n} \qquad (3)$$

$$\boxed{z_n = \frac{1}{2\pi j}\lim_{s\to s_n}(s - s_n)Y(s)e^{-st}} \qquad (4)$$

- s_n é o polo referente ao n-ésimo resíduo.

1. Transformada de Laplace

- **1.3. Transformada de Laplace de funções básicas:**
  - Para condições iniciais nulas $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ e $t \geq 0$;

- **Sistema de ordem zero:**

$$\boxed{f(t) = a_0 y(t)} \qquad \boxed{F(s) = a_0 Y(s)} \tag{5}$$

- **Sistema de primeira ordem:**

$$\boxed{f(t) = a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t)} \qquad \boxed{F(s) = (a_1 s + a_0) Y(s)} \tag{6}$$

- **Sistema de segunda ordem:**

$$\boxed{f(t) = a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t)} \qquad \boxed{F(s) = (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s)} \tag{7}$$

1. Transformada de Laplace

- **1.3. Transformada de Laplace de funções básicas:**
  - **Impulso unitário:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(t) = 0, & t \neq 0 \\ f(t) = 1, & t = 0 \end{array}} \qquad \boxed{F(s) = 1} \tag{8}$$

  - **Degrau unitário:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(t) = 0, & t < 0 \\ f(t) = 1, & t > 0 \end{array}} \qquad \boxed{F(s) = \frac{1}{s}} \tag{9}$$

1. Transformada de Laplace

- **1.3. Transformada de Laplace de funções básicas:**
  - **Rampa unitária:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(t) = 0, & t < 0 \\ f(t) = t, & t \geq 0 \end{array}} \qquad \boxed{F(s) = \frac{1}{s^2}} \qquad (10)$$

  - **Função senoidal:**

$$\boxed{f(t) = \sin \omega t} \qquad \boxed{F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} \qquad (11)$$

$$\boxed{f(t) = \cos \omega t} \qquad \boxed{F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}} \qquad (12)$$

$$\boxed{f(t) = e^{\omega t}} \qquad \boxed{F(s) = \frac{1}{s - \omega}} \qquad (13)$$

1. Transformada de Laplace

- **1.4. Propriedades da transformada de Laplace:**

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$	(Linearidade)
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$	(Linearidade)
3	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$	(Derivada)
4	$\mathcal{L}_\pm\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$	(Derivada)
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$	(Integral)
9	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s) \quad \text{if } \int_0^\infty f(t)\,dt \text{ exists}$	(Teorema do valor final)
10	$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+a)$	(Shift em *s*)

1. Transformada de Laplace

- **1.4. Propriedades da transformada de Laplace:**

12	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$	(Derivada)
15	$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{t}f(t)\right] = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,ds \quad \text{if } \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t) \text{ exists}$	(Integral)
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$	(Scaling)
17	$\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$	(Convolução)
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$	(Convolução)

1. Transformada de Laplace

- **1.4. Propriedades da transformada de Laplace:**
  - **Convolução:**
    - Seja a integral de convolução,

$$\boxed{f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau}$$

    - A transformada de Laplace é

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)} \qquad (14)$$

    - Portanto,

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)g(t)] \neq F(s)G(s)}$$

1. Transformada de Laplace

- **1.4. Propriedades da transformada de Laplace:**
  - **Teorema do valor final:**
    - Se $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe (a função possui valor estacionário), então

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)} \tag{15}$$

    - Vale somente se todos os polos de $F(s)$ estiverem no semi-plano esquerdo no plano s;
  - **Teorema do valor inicial:**
    - Se $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ existe, então

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)} \tag{16}$$

2. Função de transferência

- **2.1. Função de transferência:**
  - Seja um sistema da forma:

$$\boxed{a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)}$$

  - Calculando a transformada de Laplace,

$$\boxed{(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)U(s)}$$

  - Rearranjando:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

2. Função de transferência

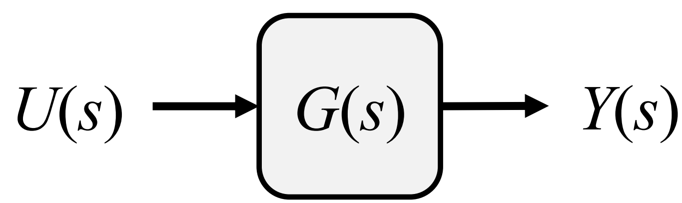
- **2.1. Função de transferência:**
  - A **função de transferência** do sistema $G(s)$ que relaciona a **saída** $Y(s)$ à **entrada** $U(s)$ é dada por

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}} \qquad (17)$$

  - Note que, conhecendo o modelo $G(s)$ e a entrada $U(s)$, é possível obter a saída do sistema:

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s)}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]}$$



2. Função de transferência

- **2.2. Características da função de transferência:**
  - 1) A TF representa o modelo matemático do sistema que relaciona a saída à uma entrada;
  - 2) A **TF é uma propriedade do sistema** e não depende do sinal de entrada;
  - 3) A TF não precisa ter significado físico (embora geralmente seja igual ao modelo físico);
  - 4) Uma vez conhecida a TF, é possível simular a resposta do sistema a qualquer sinal de entrada;
  - 5) A TF pode ser determinada experimentalmente, conhecendo a entrada $u(t)$ e medindo a saída $y(t)$.

2. Função de transferência

- **2.3. Polos e zeros:**
  - Uma TF da forma:

$$\boxed{G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}} \tag{18}$$

    - Pode ser fatorada em um produto de **zeros** z_i e **polos** p_i;

$$\boxed{G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}} \tag{19}$$

    - Portanto, $G(s = z_i) = 0$ e $G(s = p_i) = \infty$;
  - A análise dos polos e zeros fornece informações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Revise a transformada de Laplace: escolha algumas funções $y(t)$ e calcule as transformadas de Laplace direta e inversa;
  - 2) Revise as propriedades básicas da transformada de Laplace (MA311 e MA044);
  - 3) O que é uma função de transferência? Para que serve?
  - 4) Por que é mais conveniente definir a TF no domínio de Laplace ao invés de fazer isso no tempo?
  - 5) A TF de um circuito RLC é função da impedância do circuito e da frequência de linha. Verdadeiro ou falso?

Referências

- **Referências:**
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

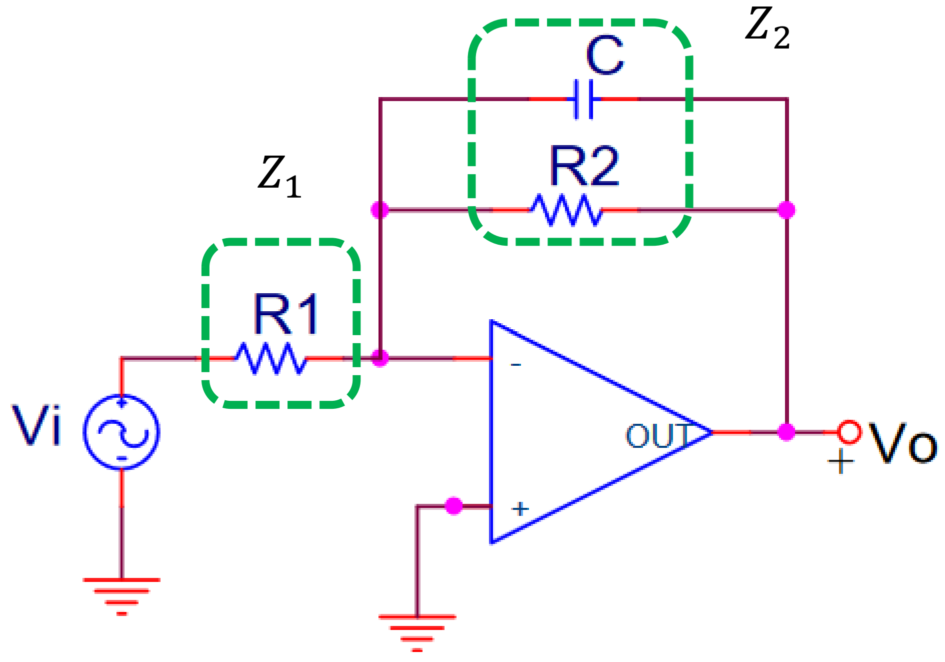
Exercício

- **Ex. 3.1)** Calcule a função de transferência $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$ do filtro passa-baixas ativo. Em seguida, assumindo $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ e $C = 1$ mF, obtenha a resposta do filtro para sinais senoidais $v = \sin(2\pi f t)$ com diferentes frequências f.
  - Ganho:

$$\boxed{K = \frac{R_2}{R_1}}$$

  - Frequência de corte:

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}}$$



Exercício

- **Ex. 3.1)**
  - Considerando o terra virtual na entrada inversora do AMPOP,

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

    - Onde,

$$\boxed{Z_1 = R_1} \qquad \boxed{\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + sC \Rightarrow Z_2 = \frac{R_2}{1 + sR_2C}}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{1 + sR_2C}\right)}$$

Exercício

- **Ex. 3.1)**
  - Substituindo os valores

$$\boxed{f_c = \frac{100}{2\pi} = 15.9 \text{ Hz}}$$

$$\boxed{G(s) = -\frac{1}{1 + 0.01s}} \quad \boxed{K = 1} \quad \boxed{\omega_c = 100 \text{ rad/s}}$$

  - A resposta do sistema é dada por

$$\boxed{V_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)V_i(s)]}$$

    - Onde

$$\boxed{V_i(s) = \mathcal{L}[\sin(2\pi f t)](s)}$$

Exercício

- **Ex. 3.1)**
  - Implementação no MATLAB: arquivo .m

```
clear all         %Limpa variaveis no workspace
close all         %Fecha todas as janelas
clc               %Limpa prompt

%Definicao dos parametros do filtro
R1 = 10;
R2 = 10;
C = 1e-3;

wc = 1/(R2*C)     %Frequencia de corte (rad/s)
fc = wc/(2*pi)    %Frequencia de corte (Hz)

%Funcao de transferencia
s = tf('s');      %Define variavel de TF
Gs = -R2/R1*(1/(1+s*R2*C))        %TF
```

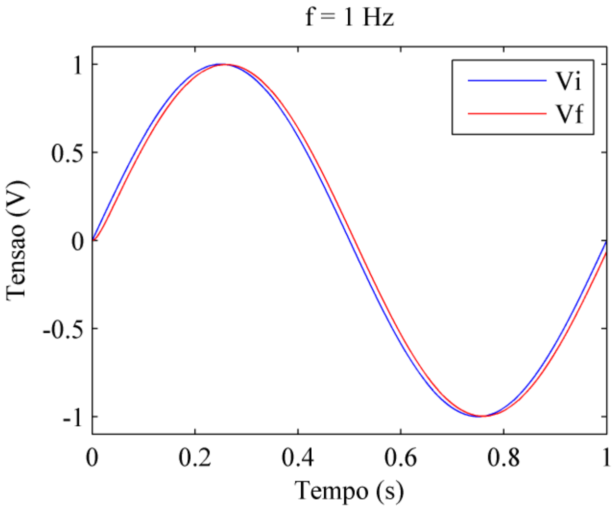
Exercício

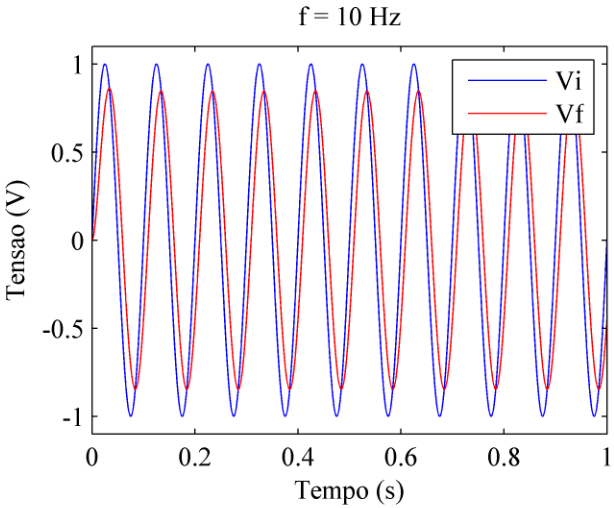
- **Ex. 3.1)**

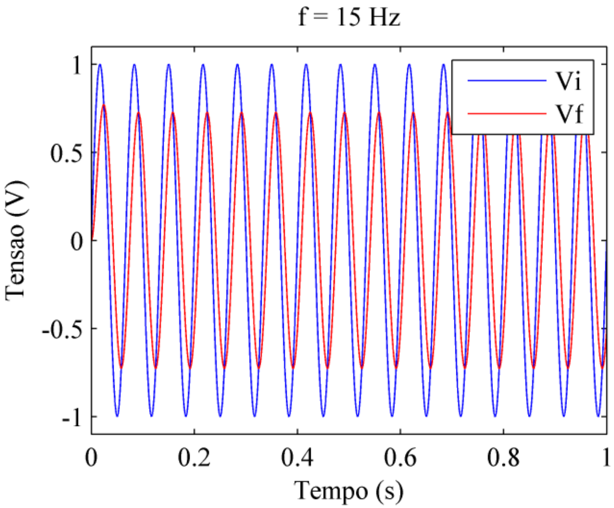
```
%Tensao de entrada
dt = 1e-4;          %Incremento de tempo (s)
t = [0:dt:1]';       %Vetor de tempo (0 a 1 s)
f = 1;              %Frequencia de entrada (Hz)
Vi = sin(2*pi*f*t);      %Tensao de entrada (V)

%Simulacao
Vf = lsim(Gs,Vi,t);     %Simula tensao de saida (V)

%Plota Vi e Vf em funcao de t
figure
hold on
plot(t,Vi,'-b')
plot(t,Vf,'-r')
hold off
```

Exercício

- **Ex. 3.1)**
  - $f < f_c$: transmissão
    - Obs: a tensão de saída foi invertida para fins de visualização.

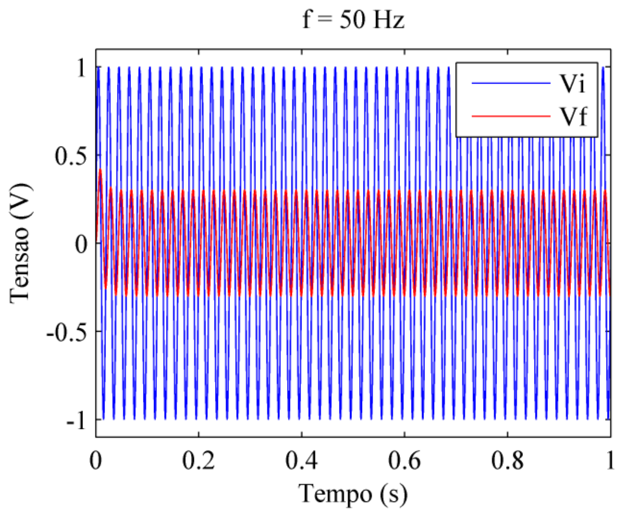


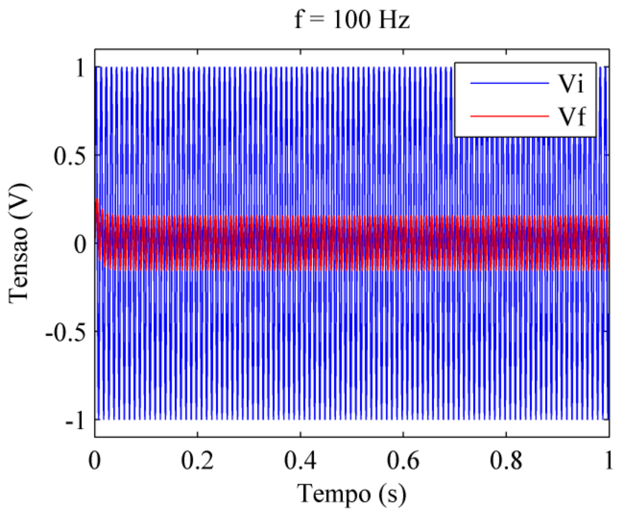




Exercício

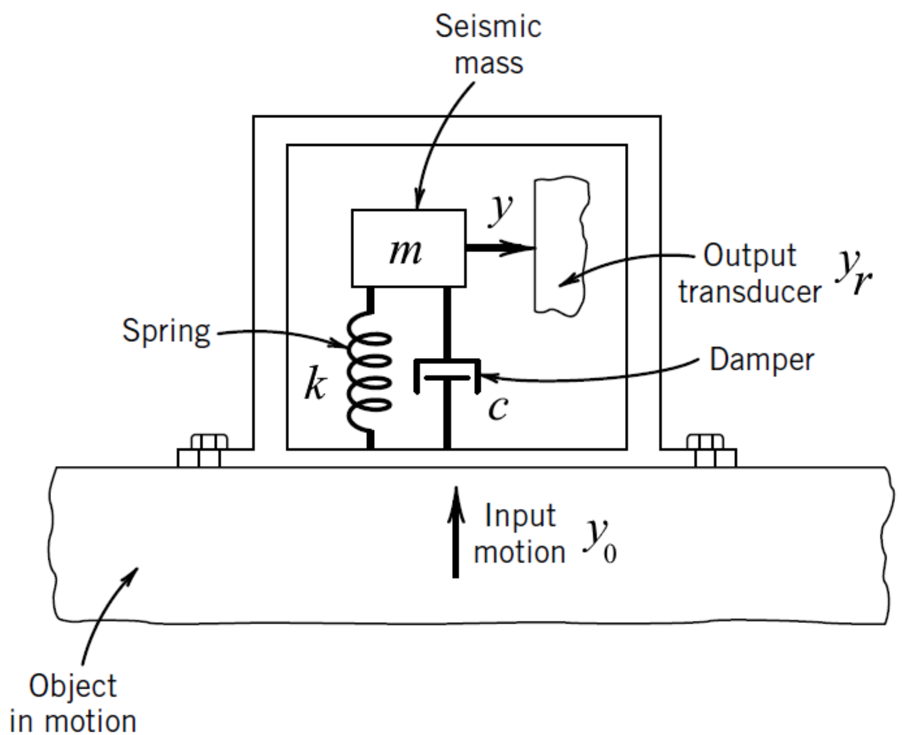
- **Ex. 3.1)**
  - $f > f_c$: corte → Filtro passa-baixas permite passagem de sinais com frequências abaixo da frequência de corte.





Exercício

- **Ex. 3.2)** Calcule a função de transferência $G(s) = Y_r(s)/U(s)$ do acelerômetro mecânico.
  Utilizando $m = 0.1$ kg,
  $c = 0.1$ N.s/m e $k = 0.2$ N/m,
  obtenha a resposta do sistema a um impulso de 10 cm/s².



Exercício

- **Ex. 3.2)**
  - Modelo matemático:

$$\boxed{m\ddot{y}_r(t) + c\dot{y}_r(t) + ky_r(t) = u(t)}$$

  - Transformada de Laplace:

$$\boxed{Y_r(s)(ms^2 + cs + k) = U(s)}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{1}{(ms^2 + cs + k)}}$$

Exercício

- **Ex. 3.2)**
  - Função impulso:

$$\boxed{U(s) = 0.01}$$

  - Resposta ao impulso:

$$\boxed{Y_r(s) = G(s)U(s) \ = \frac{0.01}{0.1s^2 + 0.1s + 0.2}}$$

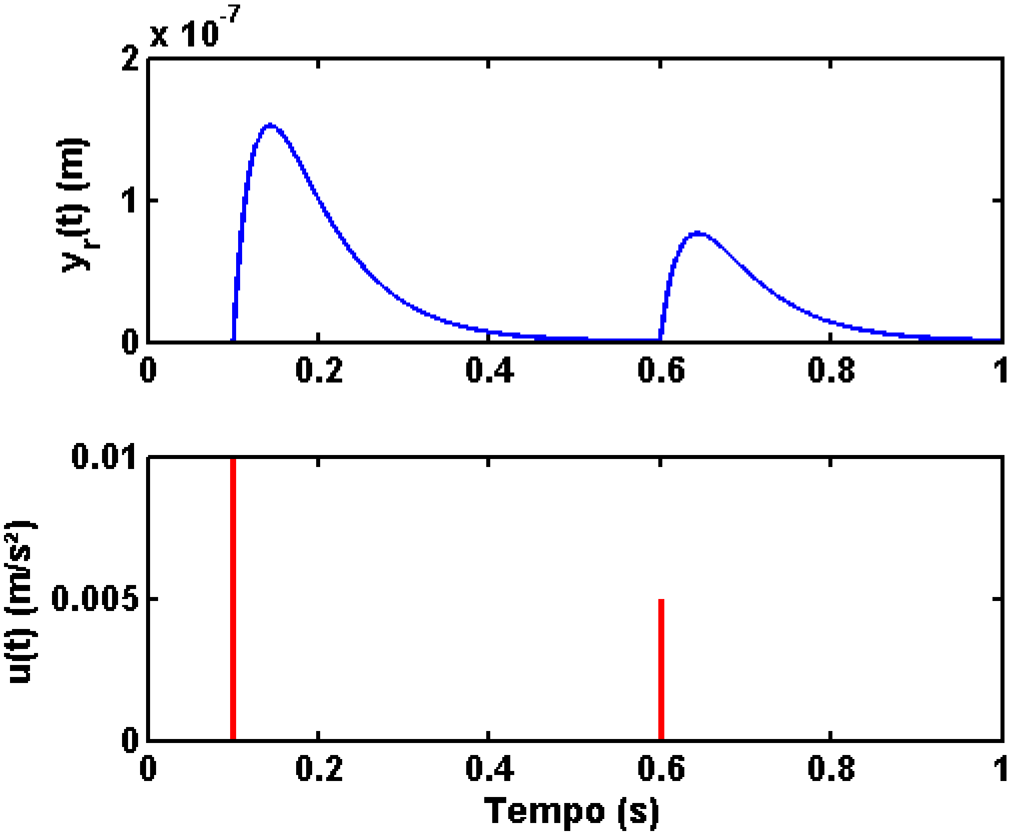
Exercício

- **Ex. 3.2)**

```
%Parametros do sistema
m = 0.1;
c = 5;
k = 50;

%Funcao de transferencia
N = [1];          %Numerador
D = [m c k];      %Denominador
Gs = tf(N,D)      %Funcao de transferencia

%Simulacao
yr = lsim(Gs,u,t);
```

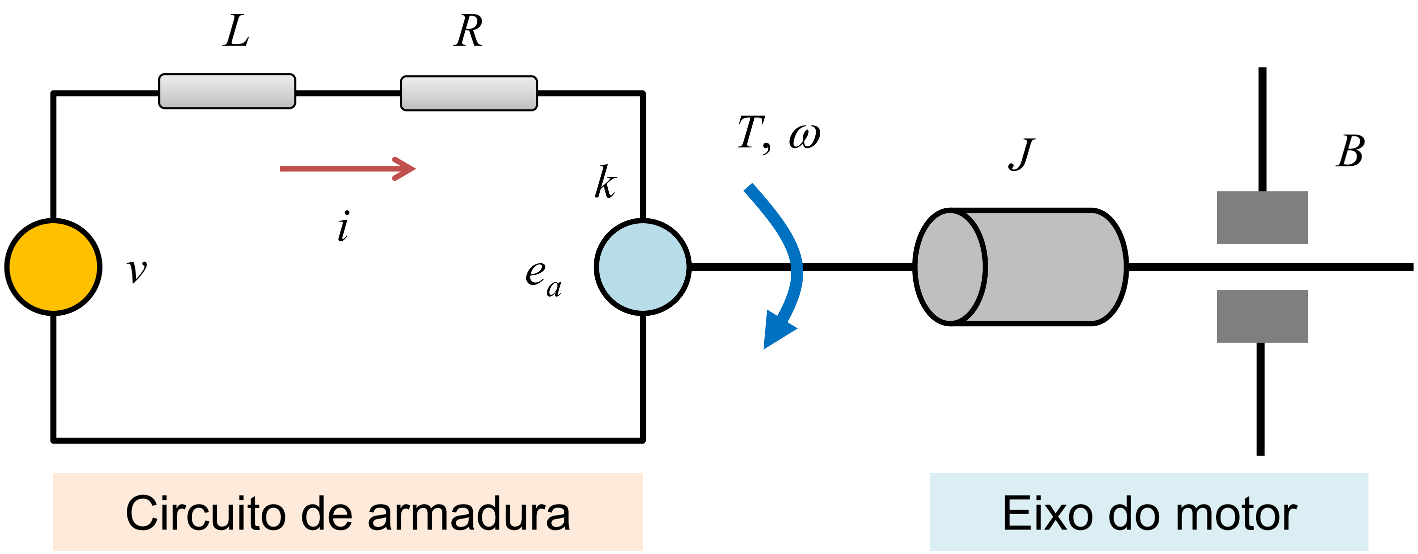
Exercício

- **Ex. 3.2)**
  - Resposta ao impulso: $u(0.1) = 0.01$ m/s² e $u(0.6) = 0.005$ m/s²;
  - A entrada de aceleração é convertida em deslocamento linear pelo acelerômetro.



Exercício

- **Ex. 3.3)** Obtenha a função de transferência do motor de corrente contínua: $G(s) = \omega(s)/V(s)$



Exercício

- **Ex. 3.2)**
  - Circuito elétrico:

$$\boxed{v(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + e_a(t)}$$

$$\boxed{V(s) = [sL + R]I(s) + E_a(s)}$$

  - Sistema mecânico:

$$\boxed{T(t) = B\omega(t) + J\dot{\omega}(t)}$$

$$\boxed{T(s) = [sJ + B]\omega(s)}$$

  - Lei de Faraday de indução:

$$\boxed{e_a(t) = k\omega(t)}$$

$$\boxed{E_a(s) = k\omega(s)}$$

  - Lei de força de Lorentz:

$$\boxed{T(t) = ki(t)}$$

$$\boxed{T(s) = kI(s)}$$

Exercício

- **Ex. 3.2)**
  - Substituindo:

$$\boxed{V(s) = (sL + R)\frac{T(s)}{k} + k\omega(s)}$$

$$\boxed{V(s) = \frac{(sL + R)(sJ + B)}{k}\omega(s) + k\omega(s)}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{k}{(sL + R)(sJ + B) + k^2}}$$

    - Aplicando uma tensão de armadura $v(t)$, o motor gira com velocidade $\omega(t)$.