Vitor Sato Eschholz 157559

# ES728 - Prova 1

## Questão 1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ r5 & r6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

RA : 157559 $\Rightarrow$ $r3 = 7$, $r4 = 5$, $r5 = 5$, $r6 = 9$ $\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

* Com o auxílio do MatLab, verificou-se que (A,B) é controlável e que (A,C) é observável. Assim, prosseguirei com o sistema dessa forma.

a) → Projeto de um controlador por realimentação de estados K para que os pólos da malha fechada sejam $\{-7, -5\}$

① Encontrando a matriz de tranformação $T_c$ que leva à forma controlador

• 1.1 : Matriz de Controlabilidade P

$$P = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$$

• 1.2 : Última linha de $P^{-1}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \longrightarrow p = [0.5 \;\; -0.5]$$

• 1.3 : Matriz $T_c$

$$T_c = inv\left(\begin{bmatrix} p \\ pA \end{bmatrix}\right) = inv\left(\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\right)$$

$$T_c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

② Aplicando a transformação de similaridade com $T_c$

- $A_c = T_c^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 24 & 13 \end{bmatrix}$

- $B_c = T_c^{-1} B = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $C_c = C T = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$C_c = [3 \quad 1]$

③ Verificando estabilidade do sistema em malha aberta

A partir do polinômio característico de malha aberta, dado por $s^2 - 13s - 24$, temos que os pólos do sistema são $-1,64$ e $14,64$. Ou seja, o sistema é instável em malha aberta

④ Encontrando polinômio característico da malha fechada

- $(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 24 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_0 \quad K_1]$

$(A_c - B_c K_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 24 - K_0 & 13 - K_1 \end{bmatrix}$

- Nessa forma, o polinômio característico é $s^2 + (K_1 - 13)s + (K_0 - 24)$

⑤ Encontrando controlador $K_c$

5.1 Polinômio característico desejado

- $(s+7)(s+5) = s^2 + 12s + 35$

5.2 Alocação de pólos

- $s^2 + (K_1 - 13)s + (K_0 - 24) = s^2 + 12s + 35$

$$\begin{cases} K_1 = 25 \\ K_0 = 59 \end{cases}$$

5.3 Controlador $K_c$

$$K_c = [59 \quad 25]$$

⑥ Voltando ao sistema original

$$K = K_c \cdot T^{-1} = [59 \quad 25] \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$K = [17 \quad 8]$$

⑦ Conferindo pólos da malha fechada

- Utilizando o MatLab, podemos encontrar os autovalores da matriz $(A - BK)$.

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [17 \quad 8] = \begin{bmatrix} -13 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

autovalores $= (-7$ e $-5)$ ✓

b) Fórmula de Ackerman:

- $K = e_n \, P^{-1} \, \phi des(A)$ [1]

→ $e_n = [0 \quad 1]$

→ Do exercício anterior, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

→ $\phi des(s) = s^2 + 12s + 35$

$\rightarrow \phi des(A) = A^2 + 12A + 35I$

$$\phi des(A) = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + 35\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi des(A) = \begin{bmatrix} 159 & 300 \\ 125 & 284 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Substituindo em [1], chegamos que

$K = [17 \ 8]$

c) 1 Escolha dos pólos

- Para que o observador não interfira na dinâmica do sistema e consiga estimar os estados rapidamete, queremos que ele possua pólos de 3 à 5 vezes mais rápido que o do sistema em malha fechada. Sendo assim, escolherei os seguinter pólos: $\{-28, -24\}$

2 Encontrando matriz To que leva à forma observador

- 1.1: Matriz de Observabilidade Q

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- 1.2: Última coluna de $Q^{-1}$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.33 & 0.0833 \end{bmatrix} \rightarrow q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0833 \end{bmatrix}$$

- 1.3: Matriz To

$$To = [q \ A*q] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,0833 & 0,75 \end{bmatrix}$$

③ Aplica-se a transformação de similaridade

- $A_0 = T_0^{-1} A T_0$

$\rightarrow T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0833 & 0.75 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow A_0 = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0833 & 0.75 \end{bmatrix}$

$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$

- $B_0 = T_0^{-1} B$

$B_0 = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $C_0 = C\, T_0$

$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0833 & 0.75 \end{bmatrix}$

$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

④ Encontrando polinômio característico da malha fechada

- Com o observador $L$, o sistema fica da seguinte forma:

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) = \underbrace{(A - LC)}_{\text{malha fechada}}\hat{x} + (B - LD)u + Ly$

- $(A_0 - L_0 C_0) = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 1 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(A_0 - L_0 C_0) = \begin{bmatrix} 0 & 24 - l_0 \\ 1 & 13 - l_1 \end{bmatrix}$

- Nessa forma, o polinômio característico é $s^2 + (l_1 - 13)s + l_0 - 24$

⑤ Encontrando o observador $L_0$

5.1 Polinômio característico desejado

- $(s+28)(s+24) = s^2 + 52s + 672$

5.2 Alocação de pólos

- $s^2 + (l_1 - 13)s + l_0 - 24 = s^2 + 52s + 672$

$$\begin{cases} l_1 = 65 \\ l_0 = 696 \end{cases}$$

5.3 Observador $L_0$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 696 \\ 65 \end{bmatrix}$$

⑥ Voltando ao sistema original

$$L = T_0 L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0833 & 0.75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 696 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 65 \\ 106,75 \end{bmatrix}$$

⑦ Conferindo pólos da malha fechada do observador

- Utilizando o MatLab, verifica-se os autovalores de $(A - LC)$

$$(A - LC) = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 65 \\ 106,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61 & 12 \\ -101.75 & 9 \end{bmatrix}$$

- autovalores = $(-28$ e $-24)$ ✓

d) - Para usar a fórmula de Ackerman para o observador, utiliza-se a forma dual, em que:

$$\begin{cases} \text{"A"} = A^T \\ \text{"B"} = C^T \end{cases}$$

• Então, reescrevendo [1], temos que

$$L^T = e_n \text{ "}P^{-1}\text{" } \phi des(\text{"}A\text{"}) = e_n \cdot \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} \phi des(A^T) \quad [2]$$

• $$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

• $$\phi des(A^T) = (A^T)^2 + 52(A^T) + 672I$$

$$\phi des(A^T) = \begin{bmatrix} 956 & 325 \\ 780 & 1281 \end{bmatrix}.$$

• Substituindo em [2] chegamos que

$$L = \begin{bmatrix} 65 \\ 106{,}75 \end{bmatrix}$$

e) Na questão A, consideramos $u = -Kx$, o que pode levar a um erro de regime. Para consertá-lo, podemos escalonar a referência da entrada, de forma a obter:

$$u = \bar{N}r - Kx$$

Aplicando o teorema do valor final, temos:

• $$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

• $$sY(s) \approx sR(s) \Rightarrow \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{s=0} = 1$$

• Para a malha fechada do nosso sistema, nós temos a seguinte FT

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - (A - BK))^{-1} B = \frac{s - 3}{s^2 + 12s + 35}$$

MatLab

• Com um degrau de 2 aplicado na entrada, teremos

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{s=0} = \frac{-3}{35} \neq 1$$

• Se fizermos $\boxed{\bar{N} = -\frac{35}{3} = -11,67}$, teremos um ganho extra na malha fechada

e $$\frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI-(A-BK))^{-1} B\bar{N} = \frac{-11,67(s-3)}{s^2+12s+35}$$

• Assim, $y(t) \to 2$ quando $t \to \infty$

f)

1. Como temos um sistema com duas variáveis de estado, os tamanhos são

$A_c \Rightarrow 4\times4$ $\quad C_c \Rightarrow 1\times4$

$B_c \Rightarrow 4\times1$ $\quad D_c \Rightarrow 1\times1$ (escalar)

2. O controlador continua possuindo apenas uma entrada, ela apenas foi substituída pela estimativa do observador.

O observador possui duas entradas, o erro entre $y$ e $\hat{y}$ e a entrada original do sistema.

3. As variáveis de estado $x_3$ e $x_4$ representam o erro entre a saída $y$ e a saída estimada $\hat{y}$, que é utilizado como entrada para o observador

4. Os autovalores da matriz global seriam dados por:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\right) - \lambda I = \begin{vmatrix} A-BK-\lambda I & -BK \\ 0 & A-LC-\lambda I \end{vmatrix} = |A-BK-\lambda I||A-LC-\lambda I|$$

Ou seja, parte dos autovalores são determinados apenas por K e parte apenas por L, não havendo dependência entre eles.

g) Sim, pois $C=[1\ 1]$ nos daria uma informação da relação entre dois estados internos do sistema e não o comportamento de cada um deles. Para eliminar a necessidade de um observador de estados, C precisaria ter duas linhas, contendo informação de ambos os estados internos.

## Questão 2

Como a matriz A não é simétrica, avaliamos os autovalores da matriz $\frac{(A+A^T)}{2}$ que são $(-4, -2{,}62, 1{,}62)$. Como nem todos são negativos, não podemos afirmar que A é definida negativa.

## Questão 3

O sistema considerado não é controlável, pois apesar de ter apenas um bloco de Jordan associado à cada autovalor distinto, a linha 3 da matriz B é zero. Como ela é a última linha do bloco de Jordan associada à $-1$, ela não poderia ser zero para o sistema ser controlável.