ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

20 – Projeto de controladores no espaço Z

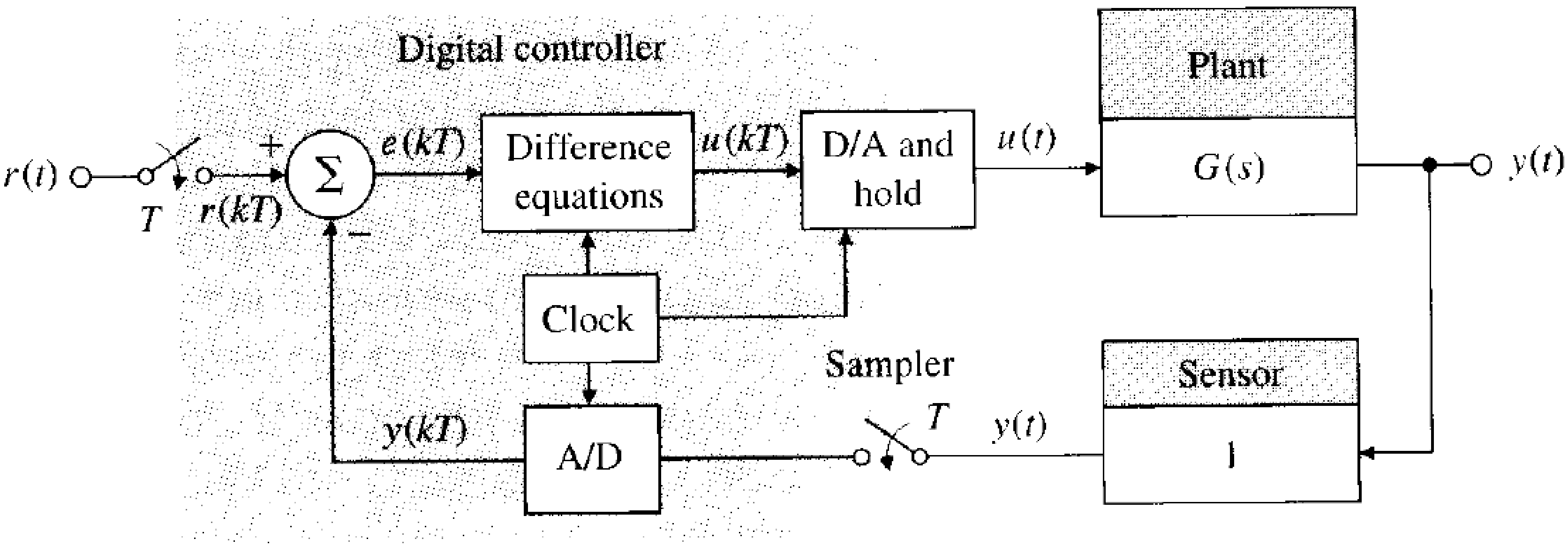
Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

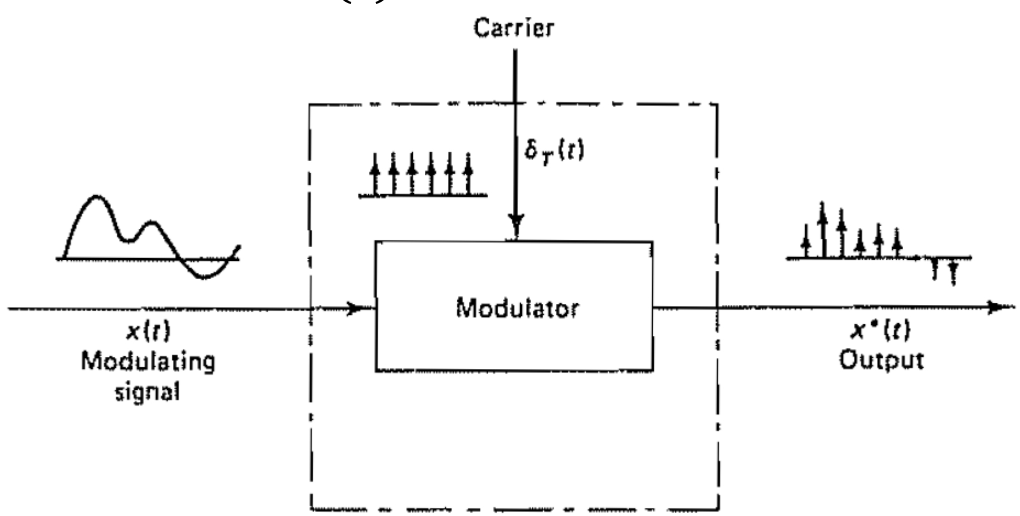
- **Índice:**
  - 1) Função de transferência de pulso;
  - 2) Controladores no espaço Z;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Controle discreto



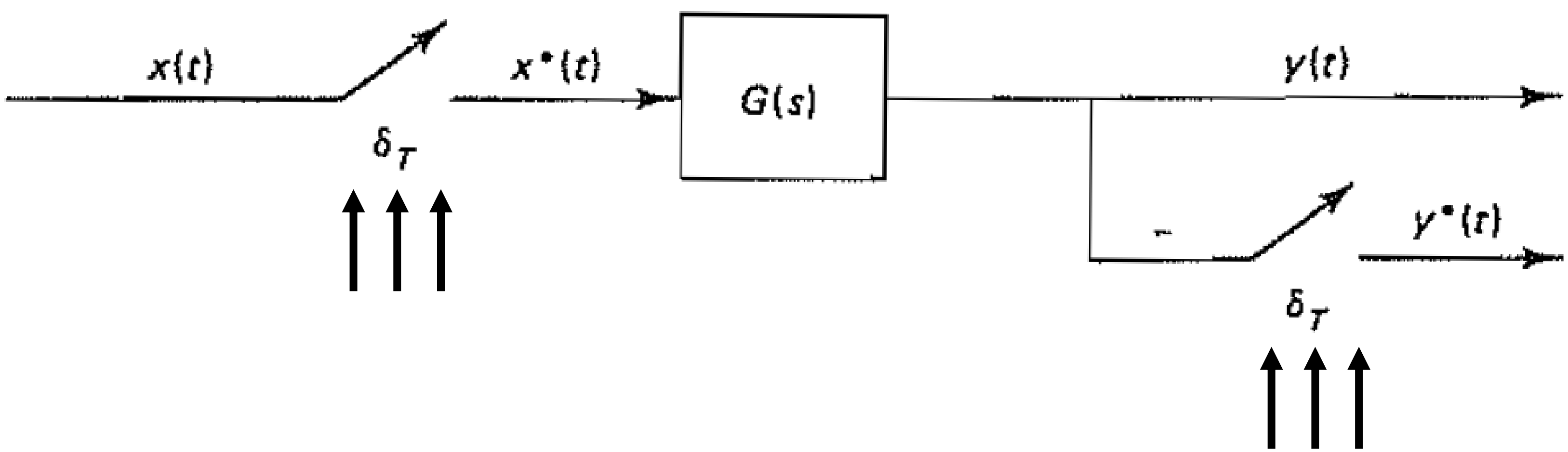
1. Função de transferência de pulso

- **1.1. Função de transferência de pulso:**
  - A **função de transferência** relaciona os sinais de saída $y(t)$ e de entrada $x(t)$ em um sistema contínuo;
  - A **função de transferência de pulso** relaciona a transformada Z de um sinal de saída amostrado $y^*(t)$ por impulsos ao sinal de entrada amostrado $x^*(t)$.



1. Função de transferência de pulso

- **1.1. Função de transferência de pulso:**
  - Seja o sinal contínuo $x(t)$ amostrado por impulsos $x^*(t)$, posteriormente processado por uma TF $G(s)$;
  - A saída $y(t)$ é um sinal contínuo e possui uma contrapartida amostrada (e sincronizada) $y^*(t)$;



1. Função de transferência de pulso

- **1.1. Função de transferência de pulso:**
  - A saída $y(t)$ é dada pela convolução entre $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ e a entrada $x(t)$, logo

$$\boxed{y(kT) = g(kT) * x(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)} \qquad (1)$$

    - Onde $k = 0, \pm 1, \ldots$ e $g(kT - hT) = 0$ para $h > k$;
  - Aplicando a transformada Z:

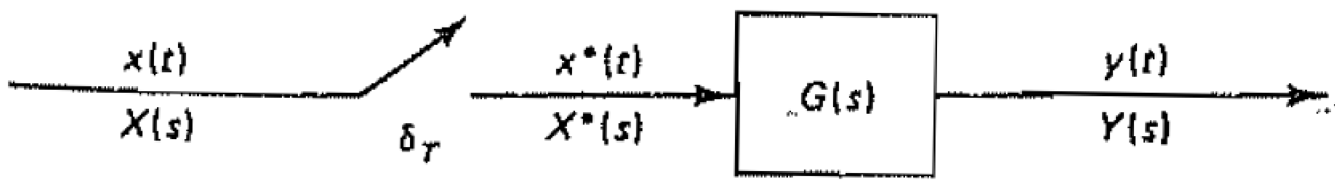
$$\boxed{Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = G(z)X(z)} \qquad (2)$$

    - $G(z)$ é a **função de transferência de pulso** do sistema (verificar a prova em Ogata 1995, cap. 3).

1. Função de transferência de pulso

- **1.1. Função de transferência de pulso:**
  - Se a entrada do sistema é um sinal amostrado $x^*(t)$, então a função de transferência no contínuo se torna

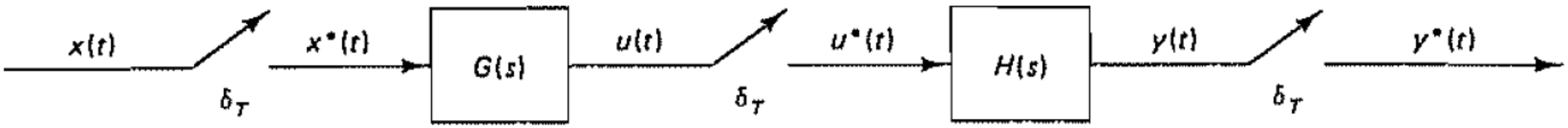
$$\boxed{Y(s) = G(s)X^*(s) \Rightarrow Y^*(s) = G^*(s)X^*(s)} \tag{3}$$



  - **Se a entrada do sistema for um sinal amostrado por impulsos** $x^*(t)$, então $G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$.

1. Função de transferência de pulso

- **1.2. Sistemas concatenados:**
  - **Caso 1) amostragem entre TFs:**



$$\boxed{U(s) = G(s)X^*(s) \Rightarrow U^*(s) = G^*(s)X^*(s)}$$

$$\boxed{Y(s) = H(s)U^*(s) \Rightarrow Y^*(s) = H^*(s)U^*(s)}$$

$$\boxed{Y^*(s) = H^*(s)G^*(s)X^*(s) \Rightarrow Y(z) = H(z)G(z)X(z)}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)G(z)}$$

1. Função de transferência de pulso

- **1.2. Sistemas concatenados:**
  - **Caso 2) sem amostragem entre TFs:**

$$\boxed{Y(s) = H(s)G(s)X^*(s) \Rightarrow Y^*(s) = [H(s)G(s)]^*X^*(s) = [HG(s)]^*X^*(s)}$$

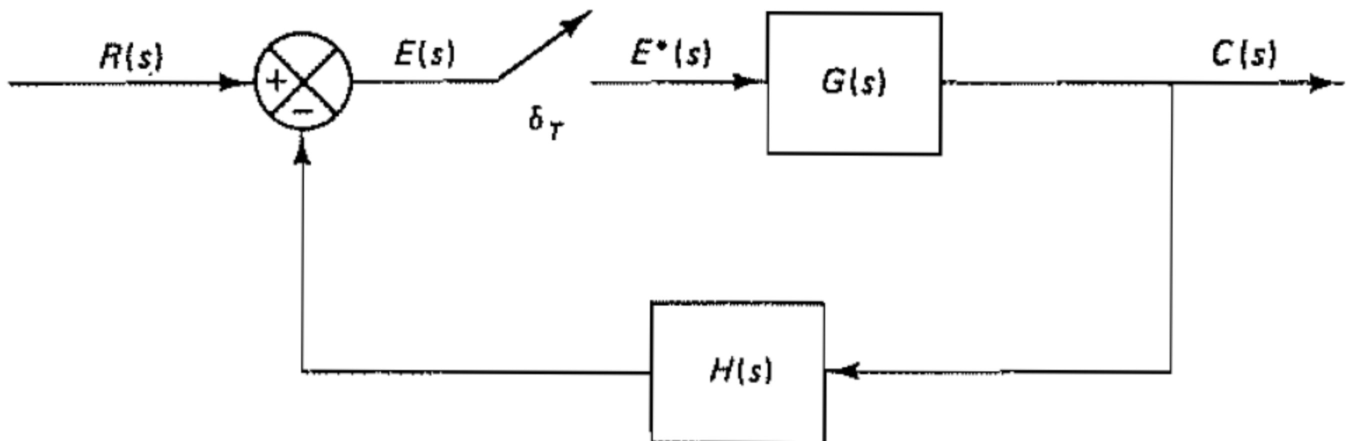
$$\boxed{Y(z) = HG(z)X(z)}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = HG(z) = \mathcal{Z}\{[H(s)G(s)]^*\}}$$

$$\boxed{HG(z) \neq H(z)G(z)}$$

2. Controladores no espaço Z

- **2.1. Realimentação:**
  - Considere a planta em malha fechada:



$$\boxed{E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)}$$

$$\boxed{E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)}$$

$$\boxed{C(s) = G(s)E^*(s)}$$

$$\boxed{C^*(s) = G^*(s)E^*(s)}$$

2. Controladores no espaço Z

- **2.1. Realimentação:**

$$\boxed{C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)} \Rightarrow C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}}$$

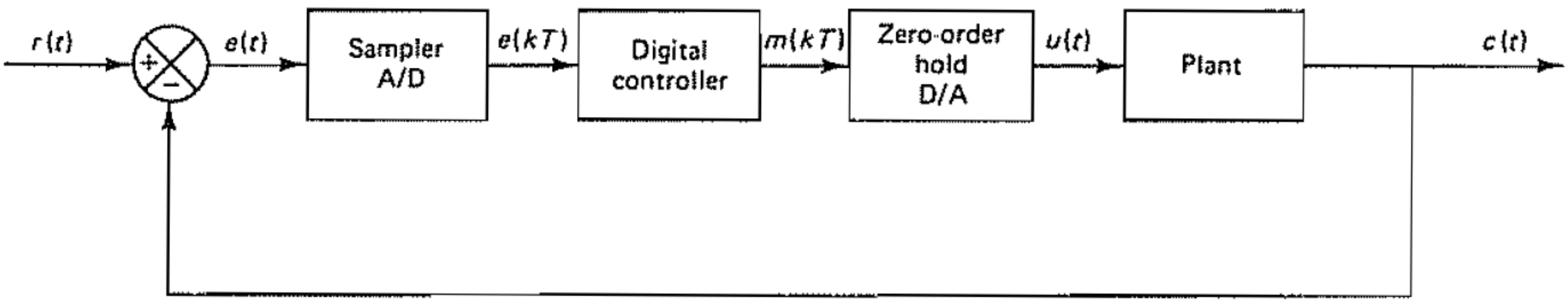
- Função de transferência em malha fechada:

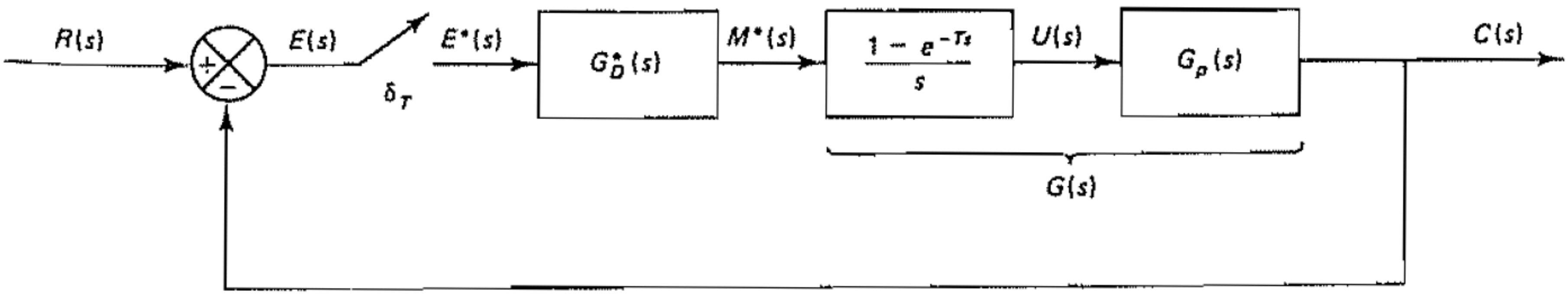
$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}} \tag{4}$$

  - Note que a função de transferência varia com a posição do módulo de amostragem!

2. Controladores no espaço Z

- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**





2. Controladores no espaço Z

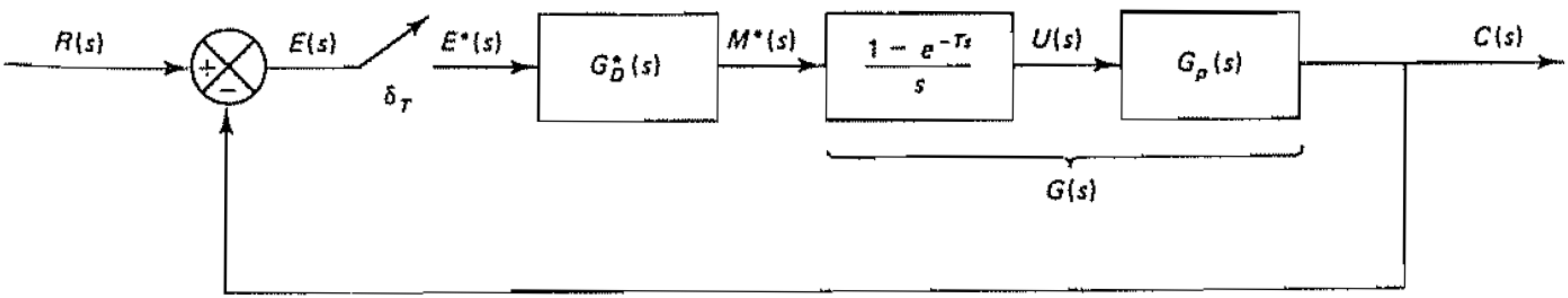
- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**
  - A saída $c(t)$ deve seguir uma referência $r(t)$;
  - O controlador processa o sinal de erro $e(t)$ e produz um esforço de controle $u(t)$ à planta;
  - O controlador digital possui entrada amostrada por impulsos, $\mathcal{Z}[G_D(s)^*] = G_D(z)$;
  - A planta é amostrada por um segurador de ordem zero:

$$\boxed{G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)}$$

2. Controladores no espaço Z

- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**
  - TF do sistema em malha fechada:
    - Amostragem por impulso, realimentação unitária $H(s) = 1$.

$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}} \tag{5}$$



2. Controladores no espaço Z

- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**
  - Controlador PID:

$$\boxed{m(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{d}{dt}e(t)\right]} \qquad (6)$$

  - Aproximação trapezoidal:

$$\boxed{f(hT) = \frac{e[(h-1)T] + e(hT)}{2}} \qquad (7)$$

$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}[f(hT)] = \frac{1+z^{-1}}{2}E(z)} \qquad (8)$$

2. Controladores no espaço Z

- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**
  - Transformada Z:

$$\boxed{M(z) = K\left[\left(1 - \frac{T}{2T_i}\right) + \frac{T}{T_i}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1})\right]E(z)} \qquad (7)$$

$$\boxed{M(z) = \left[K_P + K_I\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) + K_D(1 - z^{-1})\right]E(z)}$$

- Ganho proporcional: $K_P = K\left(1 - \frac{T}{2T_i}\right)$;
- Ganho integral: $K_I = K\frac{T}{T_i}$;
- Ganho derivativo: $K_D = K\frac{T_d}{T}$.

2. Controladores no espaço Z

- **2.2. Implementação de um controlador discreto:**
  - A **função de transferência do controlador PID digital** é

$$\boxed{G_D(z) = K_P + K_I\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) + K_D(1 - z^{-1})} \qquad (8)$$

    - Note que o **período de amostragem** T influencia drasticamente na resposta do controlador e deve ser escolhido de acordo com o processo;
    - A equação (8) pode ser reescrita na forma

$$\boxed{G_D(z) = \frac{(K_P + K_I + K_D) - (K_P + 2K_D)z^{-1} + K_D z^{-2}}{1 - z^{-1}}} \qquad (9)$$

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Explique a implementação de um controlador digital. Defina a interface entre os domínios contínuo e discreto nos diagramas do slide 12;
  - 2) Suponha que um controlador PID foi projetado no domínio contínuo. Como é feita a implementação deste controlador em hardware digital?
  - 3) Por que o período de amostragem influencia no desempenho do controlador? A estabilidade do sistema em malha fechada (com controlador) também depende deste parâmetro?

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995.
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, Signals and Systems, Pearson, 1996.
  - J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1996.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 20.1)** Um sistema contínuo $G(s)$ é caracterizado pela função de transferência

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+1)}}$$

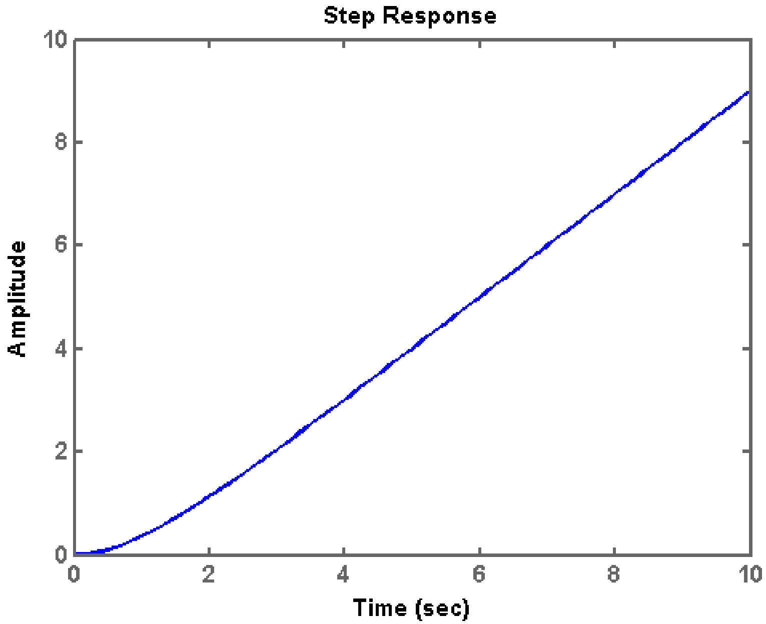
  - a) Projete um **controlador contínuo** que proporcione tempo de subida < 1 s e erro estacionário ao degrau nulo;
  - b) Realize a implementação deste controlador na **forma discreta** utilizando um segurador de ordem zero. Ajuste o período de amostragem em 1, 0,1 e 0,01 s e verifique a resposta do sistema.

Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema contínuo: resposta ao degrau em malha aberta;

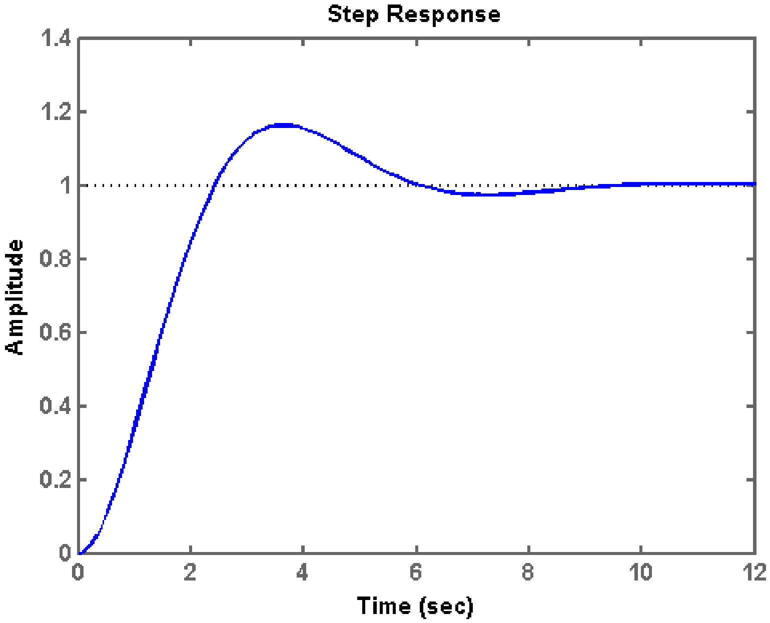
$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+1)}}$$

- A planta possui polos em $s = 0$ e $s = -1$ e é instável em malha aberta;



Exercícios

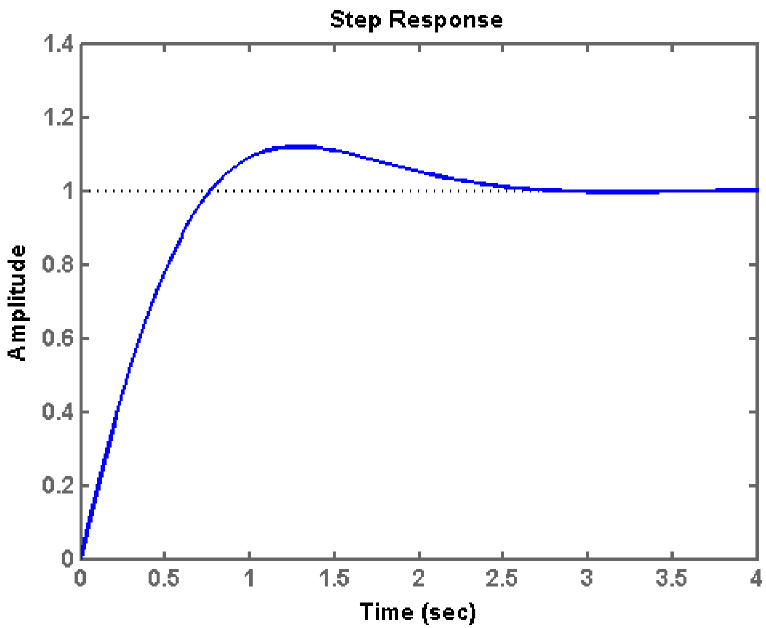
- **Ex. 20.1)**
  - Sistema contínuo: resposta ao degrau em malha fechada com ganho unitário;
    - O erro estacionário ao degrau é nulo ($K_p \to \infty$);
    - O sistema apresenta tempo de subida $t_r = 2.4$ s e sobressinal de 0,16.



Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema contínuo: projeto do controlador PID
    - Ajuste empírico:

$$\boxed{K(s) = 5 + \frac{0.1}{s} + 2s}$$

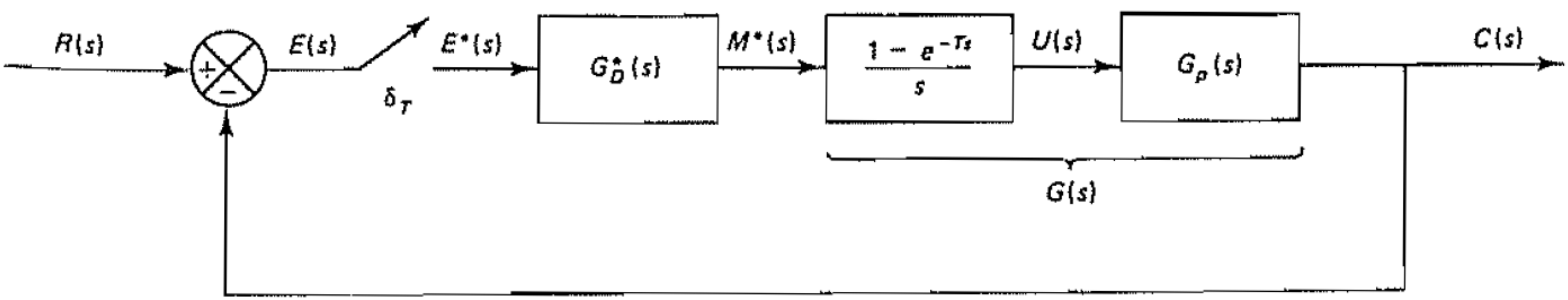


    - Erro estacionário nulo, tempo de subida $t_r = 0.7$ s e sobressinal de 0,12;
    - Os requisitos de projeto foram atendidos.

Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: implementação do controlador digital.

$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}}$$

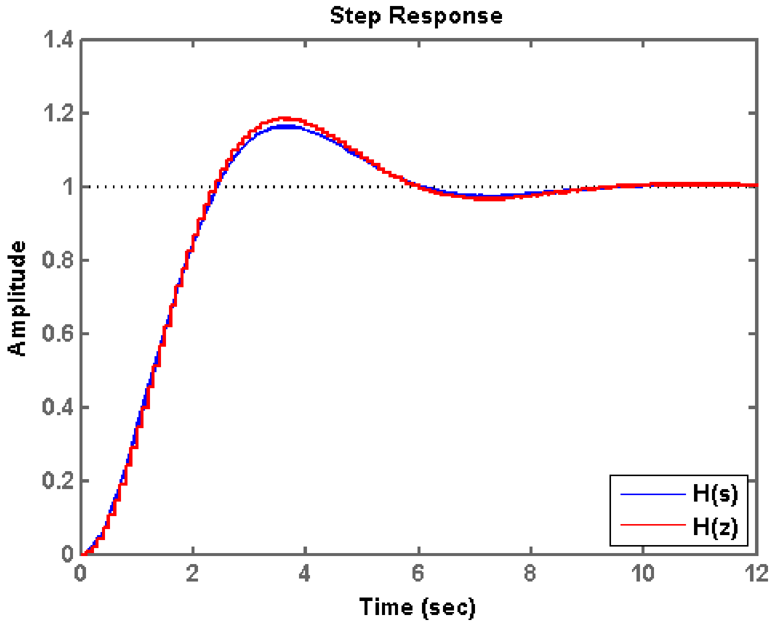


Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: resposta ao degrau em malha fechada com ganho unitário;
    - Conversão com ZOH, amostragem de $T = 0.1$ s;

$$\boxed{G(z) = \frac{0.005z + 0.005}{z^2 - 1.9z + 0.9}}$$

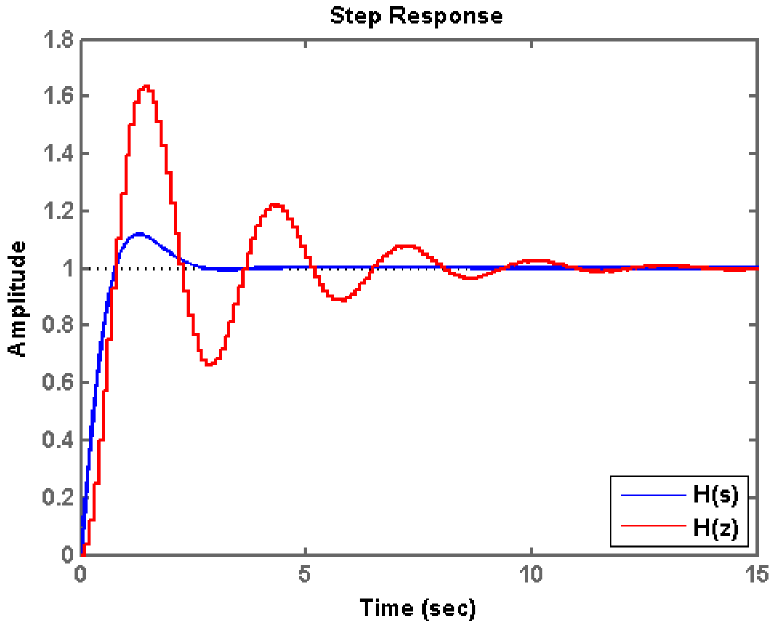
    - As características da planta são compatíveis com o modelo contínuo.



Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: controle PID
    - Usando os mesmos ganhos do projeto contínuo:

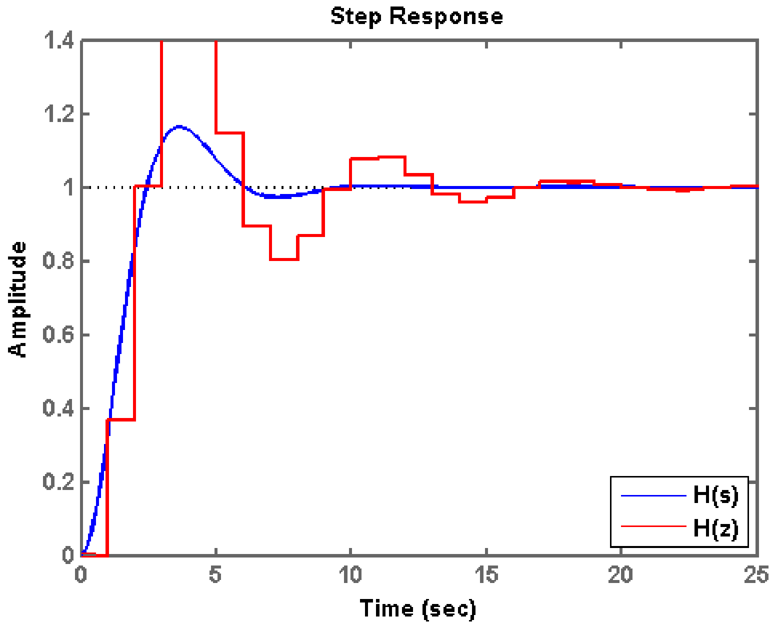
$$\boxed{G_D(z) = 5 + 0.1\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) + 2(1 - z^{-1})}$$



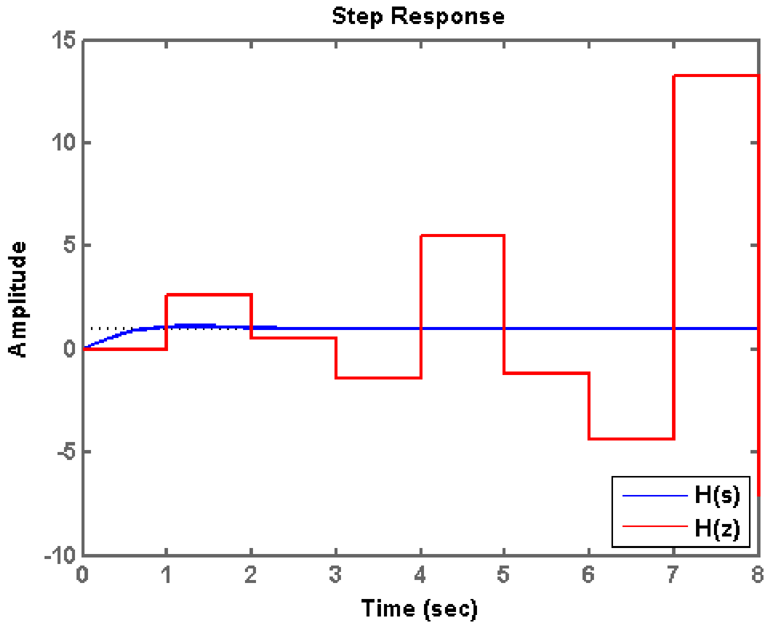
    - Devido à amostragem, as características dinâmicas do controlador são alteradas.

Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: controle PID
    - Resposta ao degrau para $T = 1$ s.



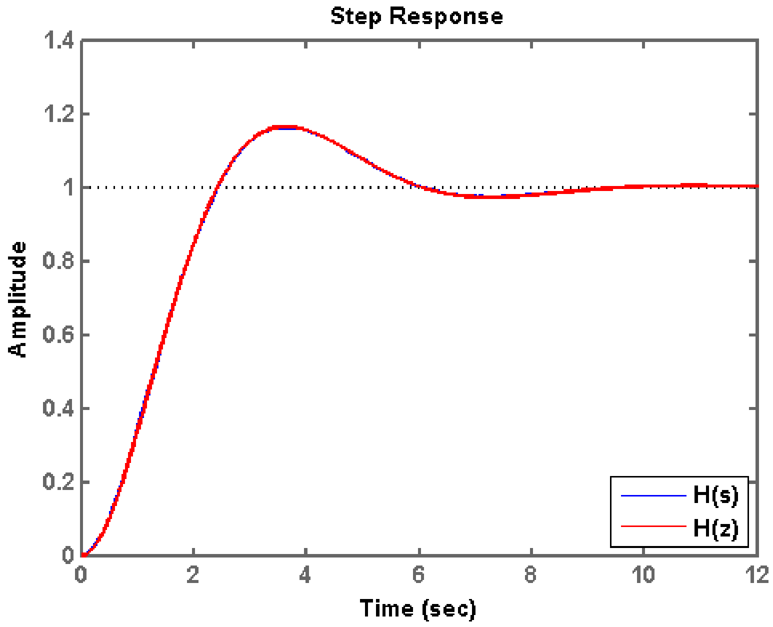
Ganho unitário



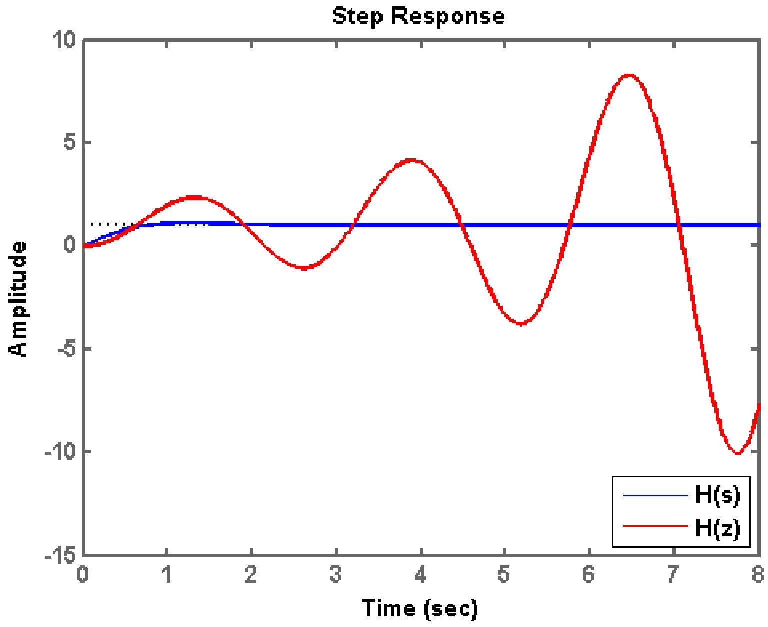
PID

Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: controle PID
    - Resposta ao degrau para $T = 0.01$ s.



Ganho unitário

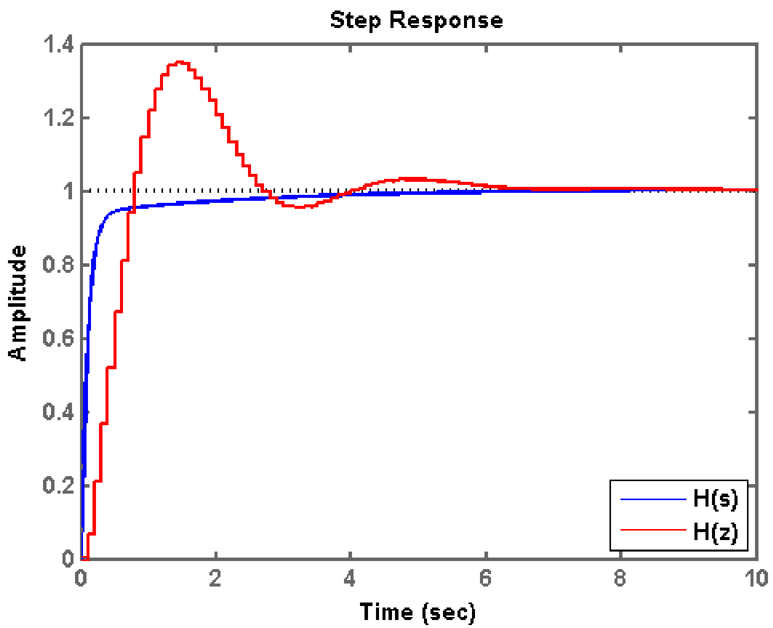


PID

Exercícios

- **Ex. 20.1)**
  - Sistema discreto: controle PID
    - Refazendo o projeto diretamente no discreto ($T = 0.01$ s):

$$G_D(z) = 4 + 0.1\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) + 10(1 - z^{-1})$$



    - Os requisitos de tempo de subida e erro estacionário foram atingidos e o sobressinal é aceitável (mas o tempo de estabilização pode ser aprimorado...).

Exercícios

- **Ex. 20.2)** Considere um atuador linear representado de forma simplificada por um motor DC com armadura $R = 5\ \Omega$ e $L = 2$ mH, responsável por mover uma massa $m = 2$ kg com amortecimento $b = 0.1$ N.s/m. A constante elétrica do motor é $k = 1$ V.s/m. Assuma a planta do atuador como

$$\boxed{G(s) = \frac{x(s)}{V(s)}}$$

onde $V(t)$ é a tensão de armadura e $x(t)$ é a posição linear.

  - Projete um controlador discreto (ZOH, $T = 1$ ms) que proporcione tempo de subida $t_r < 0.5$ s, tempo de estabilização $t_s < 2$ s e erro estacionário nulo ao degrau.

Exercícios

- **Ex. 20.2)**
  - Função de transferência contínua:

$$\boxed{G(s) = \frac{x(s)}{V(s)} = \frac{k}{s[(sL + R)(sm + b) + k^2]}}$$

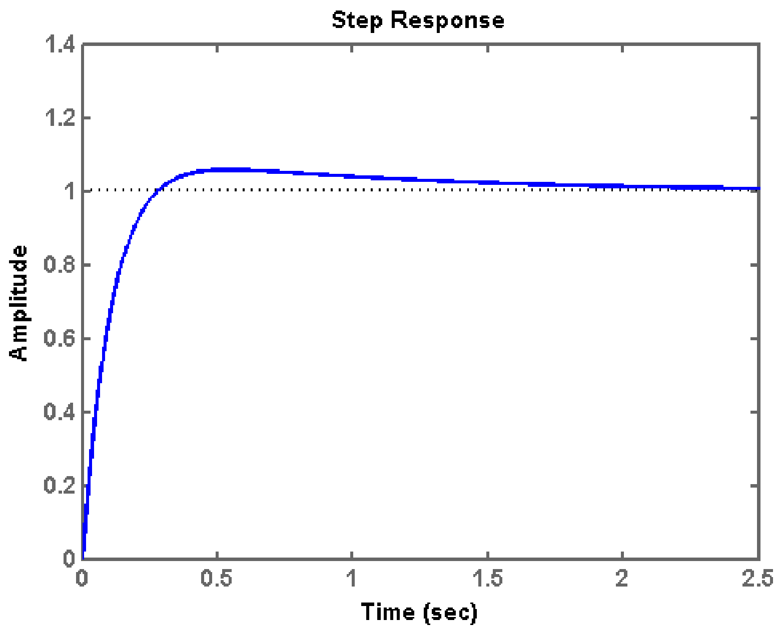
$$\boxed{G(s) = \frac{1}{0.004s^3 + 10s^2 + 1.5s}}$$

  - Amostragem com segurador de ordem zero:

$$\boxed{G(z) = \frac{2.5 \times 10^{-8} z^2 + 6 \times 10^{-8} z + 7.3 \times 10^{-9}}{z^3 - 2.1z^2 + 1.2z - 0.1}}$$

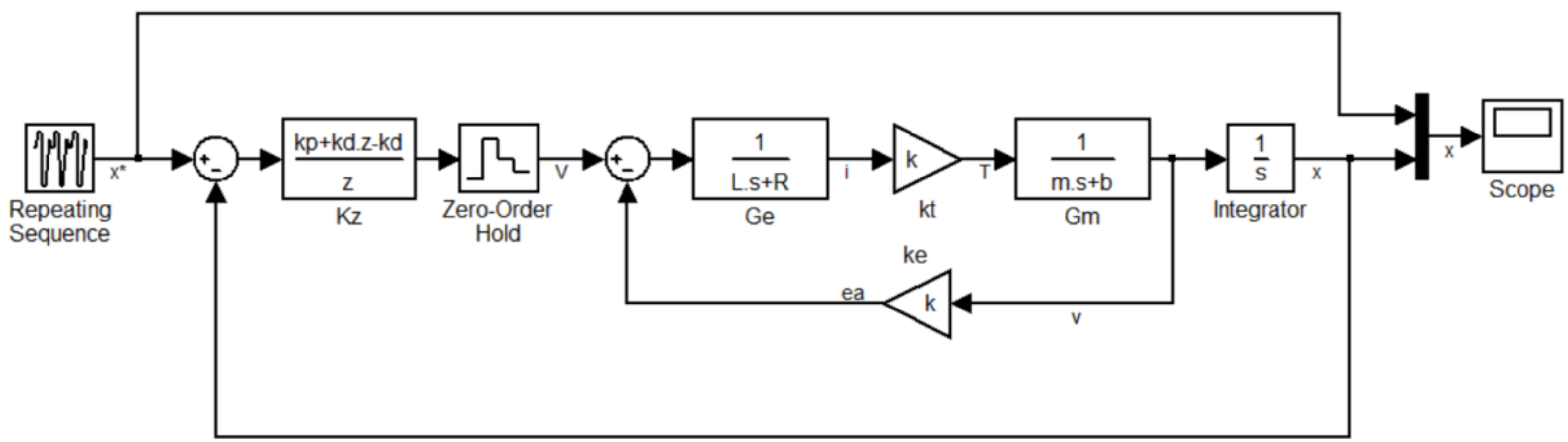
Exercícios

- **Ex. 20.2)**
  - Projeto do controlador discreto (PD): $\boxed{K(z) = 100 + 10^5(1 - z^{-1})}$
  - Resposta ao degrau (controlador+planta):
    - Os requisitos de projeto foram atendidos.



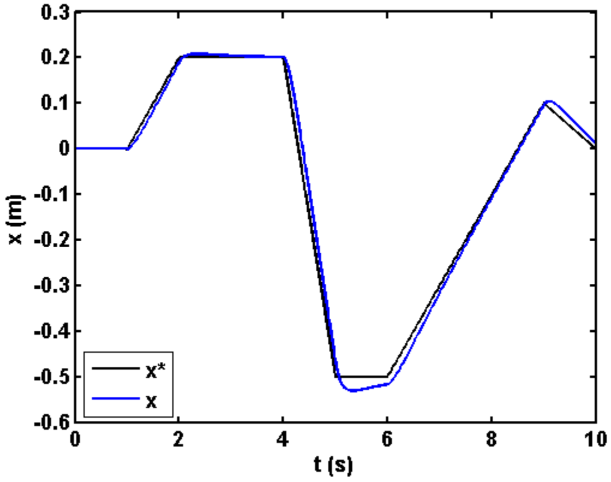
Exercícios

- **Ex. 20.2)**
  - Implementação no Simulink:

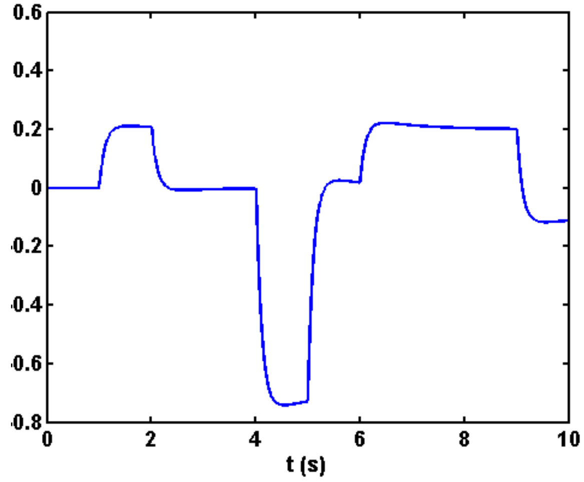


Exercícios

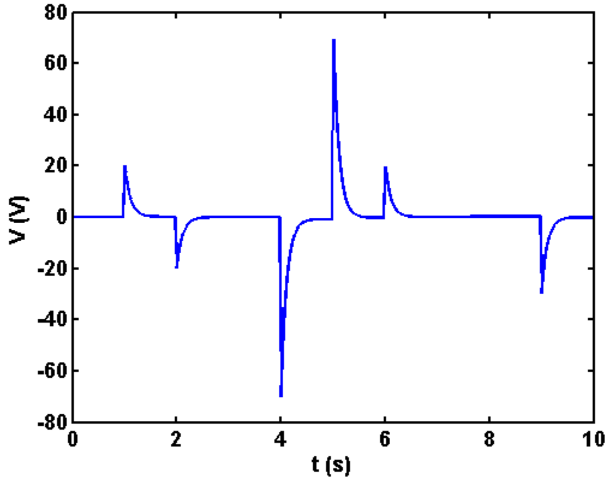
- **Ex. 20.2)**
  - Implementação no Simulink:
    - Resposta a uma entrada arbitrária



Posição



Velocidade



Tensão de armadura
(esforço de controle)