ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

11 – Análise do lugar das raízes

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Análise de uma planta em malha fechada;
  - 2) Diagrama de lugar das raízes;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Análise de uma planta em malha fechada

- **1.1. Planta em malha fechada:**
  - Seja uma planta $G(s)$ com entrada $R(s)$ e saída $C(s)$ em malha fechada com realimentação unitária. A TF do sistema é dada por:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}} \qquad (1)$$

  - O denominador possui polinômio característico

$$\boxed{1 + G(s) = 0 \Rightarrow G(s) = -1} \qquad (2)$$

1. Análise de uma planta em malha fechada

- **1.1. Planta em malha fechada:**
  - $G(s)$ pode ser escrito como um número complexo com magnitude $|G(s)|$ e fase $\angle G(s)$:

$$\boxed{G(s) = |G(s)|\angle G(s) = -1}$$

  - Portanto, os polos da planta em malha fechada devem satisfazer:

$$\boxed{|G(s)| = 1}$$

$$\boxed{\angle G(s) = \pm 180°(2k + 1)} \quad (3)$$

    – Onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Análise de uma planta em malha fechada

- **1.2. Lugar das raízes:**
  - Considere agora uma planta em **malha aberta** com zeros $s = z$ e polos $s = p$, multiplicada por um ganho K:

$$\boxed{KG(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\cdots}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots}} \tag{4}$$

    - Lembrando que $s = \sigma + j\omega$;
  - Pela regra da convolução, (4) pode ser reescrito como

$$\boxed{KG(s) = K(s - z_1)(s - z_2)\frac{1}{(s - p_1)}\frac{1}{(s - p_2)}\cdots = KB_1(s)B_2(s)A_1(s)A_2(s)\cdots}$$

1. Análise de uma planta em malha fechada

- **1.2. Lugar das raízes:**
  - Como $KG(s)$ também é um número complexo,

$$\boxed{KG(s) = |KG(s)|\angle KG(s)}$$

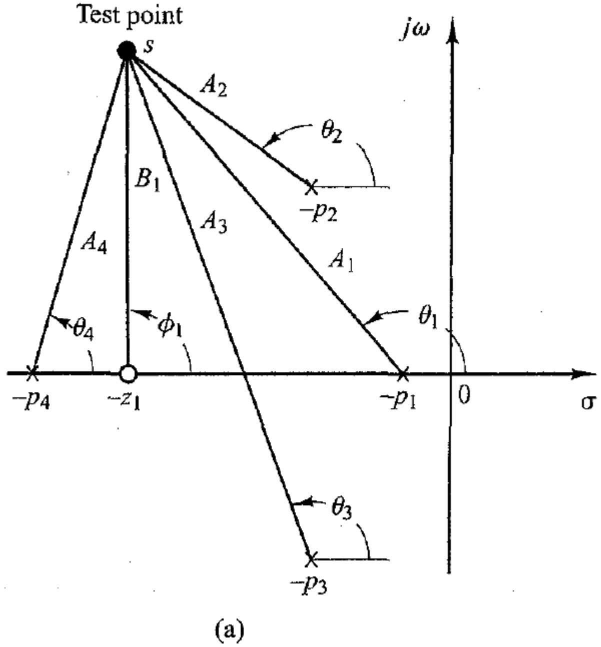
  - Pelo cálculo dos fasores:

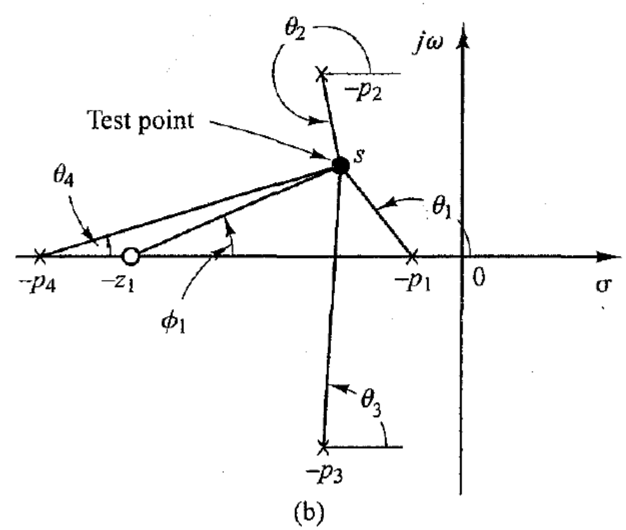
$$\boxed{|KG(s)| = K|B_1||A_1|\cdots = KB_1A_1\cdots}$$
$$\boxed{\angle KG(s) = \angle B_1 + \angle A_1 + \cdots = \phi_1 + \theta_1 + \cdots} \tag{5}$$

  - A e B são as magnitudes dos polos e zeros, respectivamente;
  - ϕ e θ são os ângulos de fase dos polos e zeros, respectivamente.

1. Análise de uma planta em malha fechada

- **1.2. Lugar das raízes:**
  - Sejam os polos e zeros em **malha aberta** no plano complexo. Os valores de $s = \sigma + j\omega$ que satisfazem as condições de magnitude e fase em **malha fechada** (3) definem o **diagrama de lugar das raízes (root locus)** possível para o sistema.





2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.1. Diagrama de lugar das raízes:**
  - O **root locus** permite avaliar a localização dos polos e zeros da planta em **malha aberta** $KG(s)$ no plano complexo;
  - **Variando o ganho** K, é possível visualizar os valores de $s = \sigma + j\omega$ possíveis (branches) que **satisfaçam as condições de magnitude e fase** (polinômio característico):

$$\boxed{KG(s) = -1} \qquad \boxed{|KG(s)| = 1} \qquad \boxed{\angle KG(s) = \pm 180°(2k+1)}$$

  - A partir da **análise da planta em malha aberta**, é possível determinar a **estabilidade do sistema em malha fechada**.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - Conhecer a metodologia de construção do diagrama é importante para saber interpretar o root locus;
  - Entretanto, neste curso será dada uma abordagem qualitativa, enquanto que a construção efetiva do diagrama será efetuada via software;
  - Um passo-a-passo detalhado sobre o root locus pode ser encontrado nas referências bibliográficas.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **1) Localização dos polos e zeros no plano complexo:**
    - Os polos e zeros são obtidos fatorando a planta na forma

$$\boxed{KG(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots}}$$

    - Tradicionalmente, polos são indicados com $\times$ e zeros são indicados com $\circ$;
    - Polos complexos ocorrem em pares conjugados, simétricos em relação ao eixo real.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **2) Branches partem dos polos:**
    - Branches são linhas que ligam pontos no root locus, indicando os valores possíveis de $s = \sigma + j\omega$ dado o ganho $K \geq 0$;
    - Seja a condição de magnitude:

$$\boxed{|KG(s)| = K|(s - z_m)| \left|\frac{1}{(s - p_n)}\right| \cdots = 1}$$

    - Se $K = 0$, então $s = p_n$;
    - Portanto, os **branches sempre partem dos polos do sistema**.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **3) Branches vão em direção aos zeros ou ao infinito:**
    - Seja a condição de magnitude:

$$\boxed{|KG(s)| = K|(s - z_m)|\left|\frac{1}{(s - p_n)}\right| \cdots = 1}$$

    - Se $K \rightarrow \infty$, então $s = z_m$ ou $s \rightarrow \infty$;
    - Portanto, aumentando o ganho, **os branches tendem a caminhar em direção aos zeros do sistema ou ao infinito**.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **4) Polos no eixo real:**
    - Pela condição de fase, pode-se concluir que os branches que caminham no eixo real ($s = \sigma$) partem de um polo em direção de outro polo ou zero, uma vez que as fases θ_n de polos complexo conjugados se cancelam:

$$\boxed{\angle KG(s) = \phi_1 + \theta_1 + \cdots = \pm 180°(2k+1)}$$

    - Note que o fato das raízes caminharem de um polo em direção a outro polo não implica em conectar dois polos com um branch → na verdade, eles se encontram um ponto intermediário e partem em direção ao infinito.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **5) Ponto de breakaway:**
    - Para polos situados no eixo real, os branches caminham em direção a outros polos aumentando o ganho K;
    - Contudo, sabe-se que os branches vão a zero ou ao infinito para $K \to \infty$;
    - Assim, **existe um ponto no eixo real (ponto de breakaway) onde os branches concorrentes se encontram**. Aumentando K acima deste valor, os branches tendem a $\pm j\infty$.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **6) Assíntotas:**
    - Branches que partem em direção ao infinito seguem assíntotas que dependem das condições de magnitude e fase impostas pelos polos e zeros do sistema;
    - O ângulo de inclinação das assíntotas é dado por:

$$\boxed{\varphi = \frac{\pm 180°(2k+1)}{n-m}} \tag{6}$$

– n e m são o número de polos e zeros de $KG(s)$, respectivamente, e $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **7) Ângulo de partida de polos complexos e ângulo de chegada a zeros complexos:**
    - Branches que partem de polos complexos ou que chegam a zero complexos possuem os seguintes ângulos de partida/chegada:

Angle of departure from a complex pole = 180°
− (sum of the angles of vectors to a complex pole in question from other poles)
+ (sum of the angles of vectors to a complex pole in question from zeros)

Angle of arrival at a complex zero = 180°
− (sum of the angles of vectors to a complex zero in question from other zeros)
+ (sum of the angles of vectors to a complex zero in question from poles)

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **8) Cruzamento com o eixo imaginário:**
    - Os branches podem cruzar o eixo imaginário em $s = j\omega$;
    - Nesta condição, **o sistema está no limite da estabilidade, ou seja, o ganho é crítico** $K = K_{cr}$;
    - A determinação de K e ω é feita pelo critério de Routh, ou simplesmente testando $s = j\omega$ na equação característica.

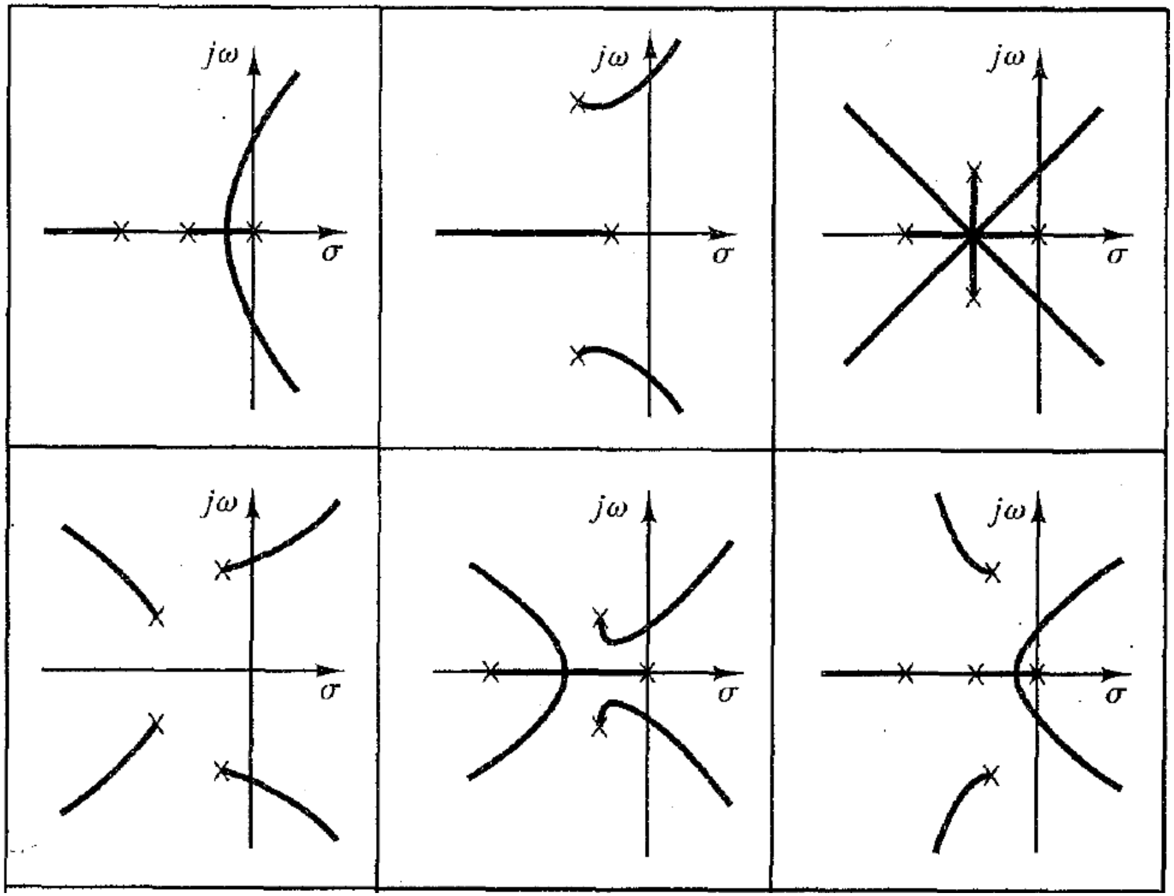
    - **Obs:** note que é muito mais fácil avaliar a estabilidade do sistema pelo root locus ao invés de calcular o critério de Routh → pode ser utilizado para determinar K_{cr} e sintonizar os parâmetros do PID pelo método ZN.

2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.2. Construção do digrama de lugar das raízes:**
  - **9) Polos em malha fechada:**
    - Se K satisfaz as condições de magnitude e fase, **qualquer valor de $s = \sigma + j\omega$ sobre um branch será um polo do sistema em malha fechada**;
    - Portanto, é possível avaliar os polos (e a estabilidade) da planta em malha fechada a partir do root locus da planta em malha aberta, além de verificar a sua sensibilidade ao ganho em malha aberta K.

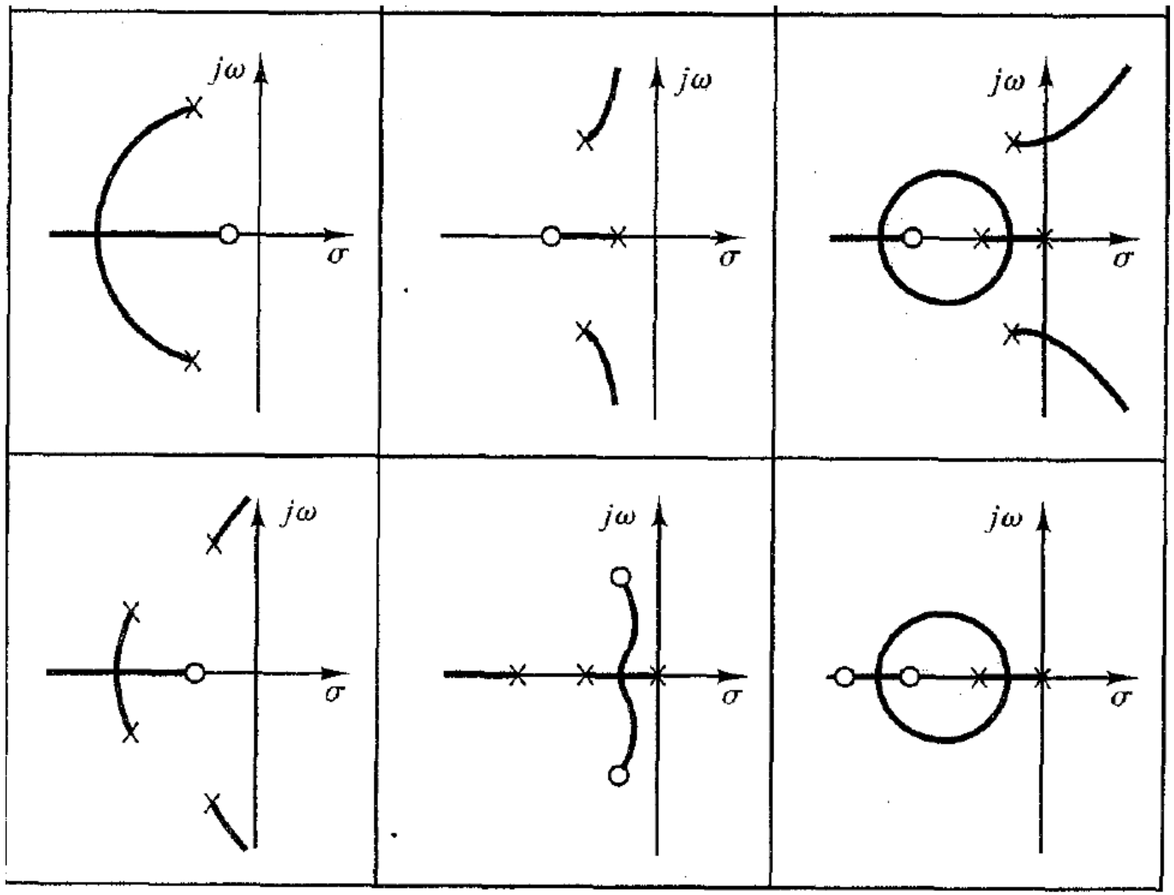
2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.3. Exemplos típicos de diagramas de lugar das raízes de $G(s)$:**



2. Diagrama de lugar das raízes

- **2.3. Exemplos típicos de diagramas de lugar das raízes de $G(s)$:**



Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Explique o que é o diagrama de lugar das raízes e quais são as informações de entrada e de saída obtidas com tal análise;
  - 2) Por que os branches partem dos polos e caminham em direção aos zeros ou ao infinito com o aumento do ganho?
  - 3) O root locus serve para analisar o ganho da planta em malha aberta ou em malha fechada?
  - 4) Uma planta estável em malha aberta também será estável em malha fechada?
  - 5) Uma planta instável em malha aberta poderá ser estável em malha fechada?

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 11.1)** Sejam as funções de transferência em malha aberta $G(s)$ apresentadas a seguir:
    - a) Plote o diagrama do root locus;
    - b) Determine os polos e zeros de $G(s)$;
    - c) Verifique a estabilidade de $G(s)$;
    - d) Discuta e estabilidade do sistema em malha fechada $H(s)$;
    - e) Determine o ganho crítico K_{cr}, se aplicável.

Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 6}}$$

Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

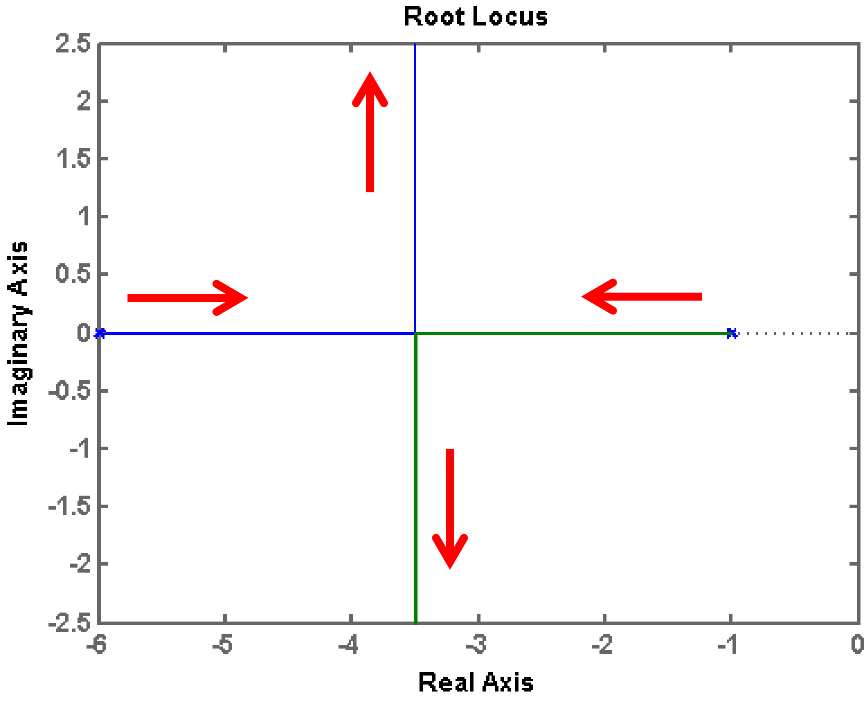
$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 6}}$$

  - Polos de $G(s)$:
    - $s = -6$, $s = -1$;
    - Os dois polos estão no SPE → sistema estável;

Exercícios

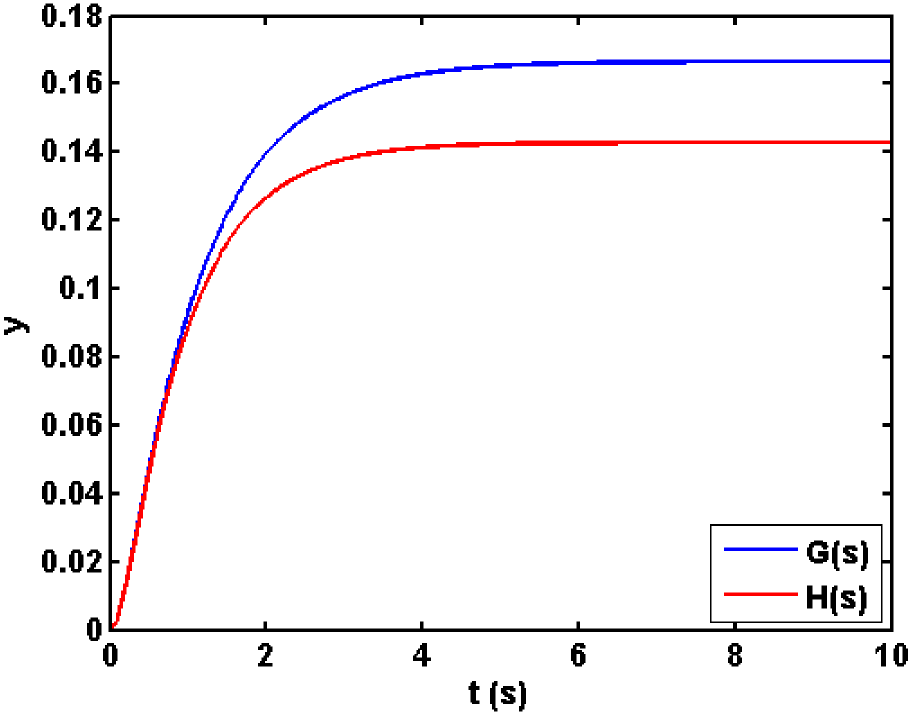
- **Ex. 11.1)**
  - Diagrama de lugar das raízes:
    - Note os dois polos de $G(s)$;
    - Os branches se encontram em $s = -3.5$ $(K = 6.25)$ e depois tendem ao infinito;
    - O sistema é estável para qualquer valor de ganho.

```
rlocus(Gs)
```



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Resposta ao degrau:
    - $K = 1$;
    - Aumentando o ganho, é possível reduzir o erro estacionário, mas o sistema sempre será estável;
    - O que acontece se o ganho for ajustado em $K > 6.25$?



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 0.29}}$$

Exercícios

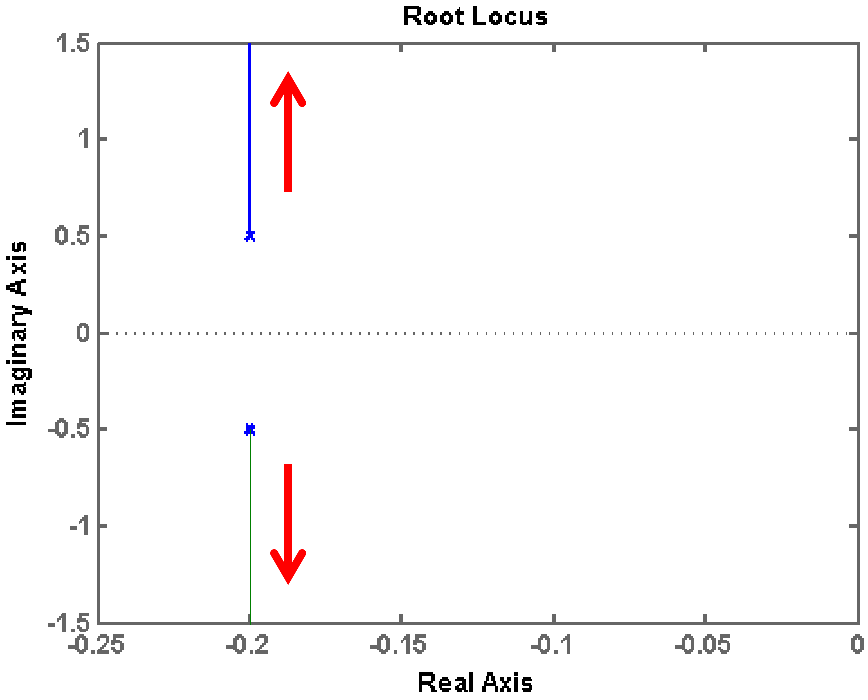
- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 0.29}}$$

  - Polos de $G(s)$:
    - $s = -0.2 \pm j0.5$;
    - Polos complexo conjugados → sistema sub-amortecido;
    - Os dois polos estão no SPE → sistema estável;

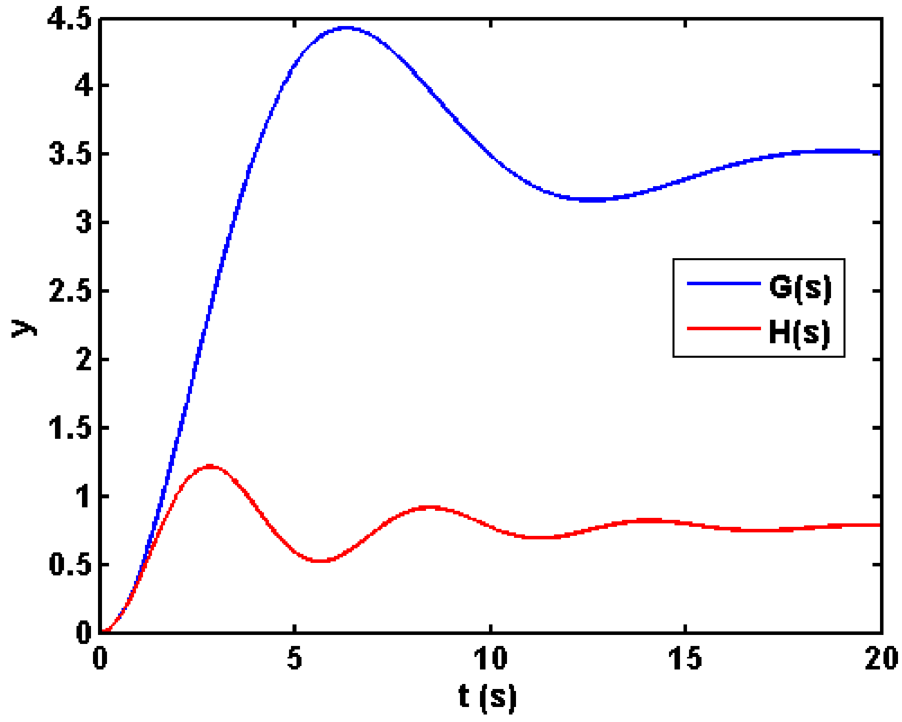
Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Diagrama de lugar das raízes:
    - Os branches tendem ao infinito com o aumento do ganho (não se cruzam porque os polos não estão no eixo real);
    - O sistema é estável para qualquer valor de ganho.



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Resposta ao degrau:
    - $K = 1$;
    - Aumentando o ganho, é possível reduzir o erro estacionário, mas o sistema sempre será estável.



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^3 + 4.5s^2 + 15s + 25}}$$

Exercícios

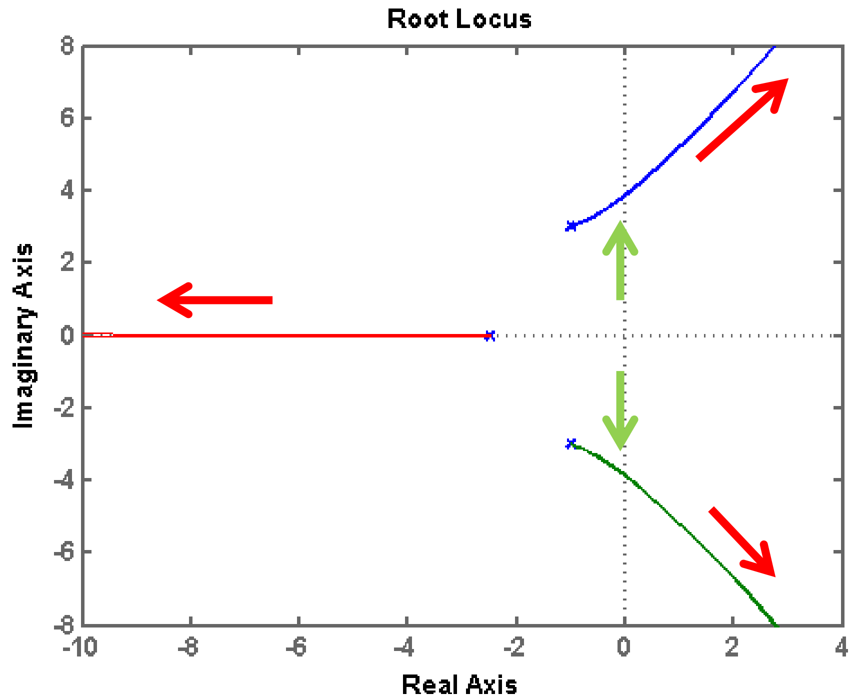
- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^3 + 4.5s^2 + 15s + 25}}$$

  - Polos de $G(s)$:
    - $s = -2.5$, $s = -1 \pm j3$;
    - O sistema possui um polo real e um par de polos complexo conjugados;
    - Todos os polos estão no SPE → sistema estável.

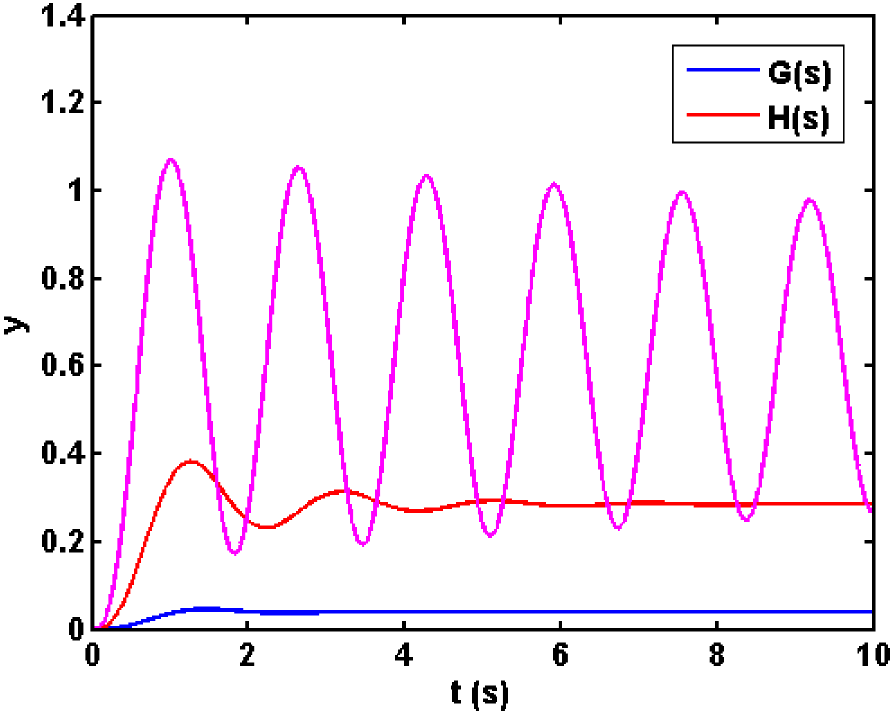
Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Diagrama de lugar das raízes:
    - Os branches tendem ao infinito com o aumento do ganho;
    - Os branches cruzam o eixo imaginário em $K = K_{cr} = 40.5$;
    - Para qualquer ganho acima de K_{cr}, o sistema se torna instável.



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Resposta ao degrau:
    - $K = 10$ e $K = K_{cr}$.



Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+29}}$$

Exercícios

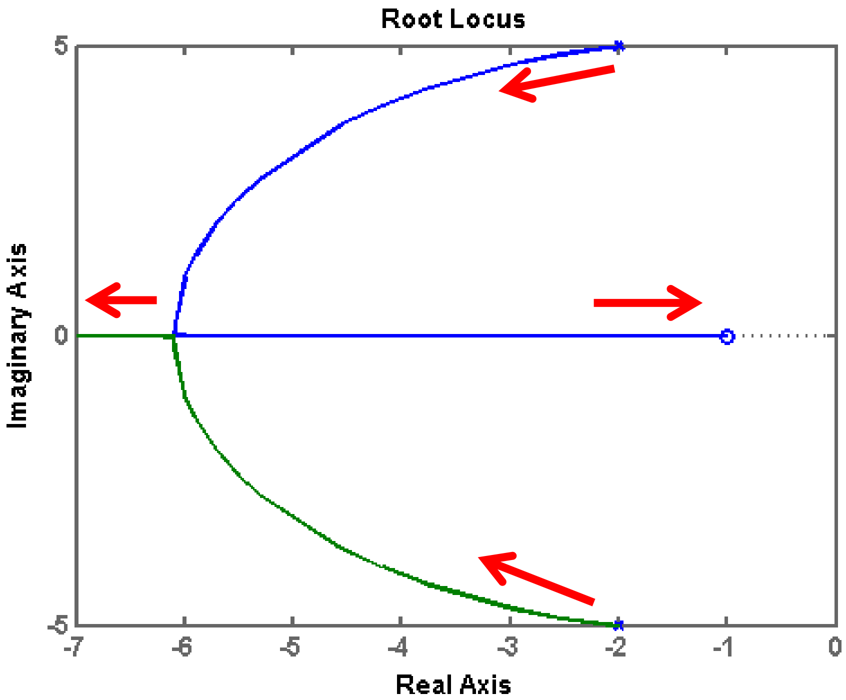
- **Ex. 11.1)**
  - Função de transferência – malha aberta:

$$\boxed{G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+29}}$$

  - Polos de $G(s)$: $s = -2 \pm 5j$;
  - Zeros de $G(s)$: $s = -1$;
    - O sistema possui um zero real e um par de polos complexo conjugados;
    - Todos os polos estão no SPE → sistema estável.

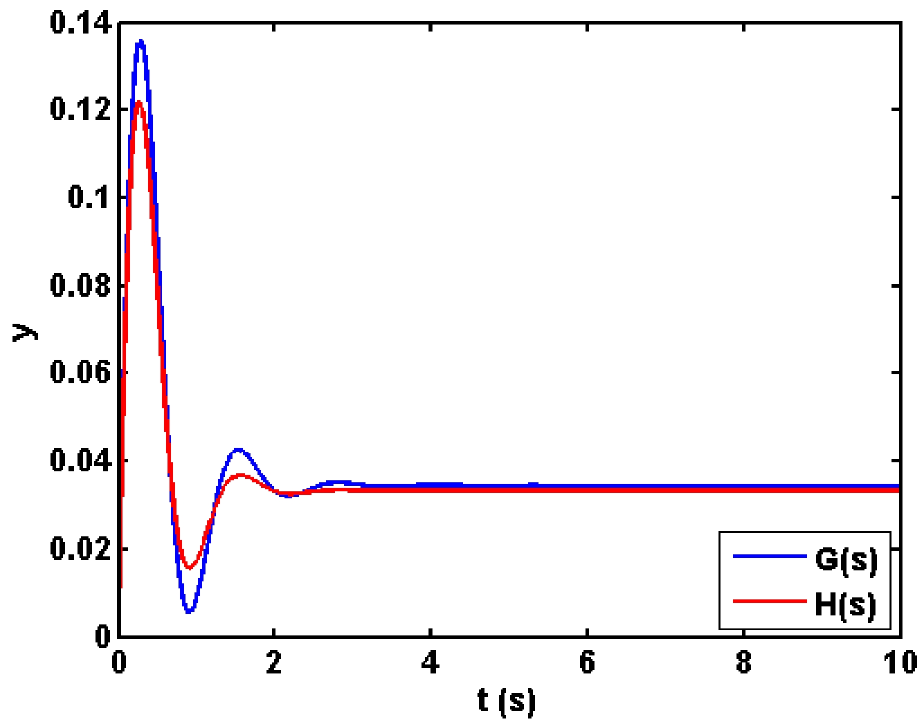
Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Diagrama de lugar das raízes:
    - Um dos branches tende ao infinito enquanto o outro branch tende ao zero;
    - O sistema é sempre estável com o aumento do ganho.



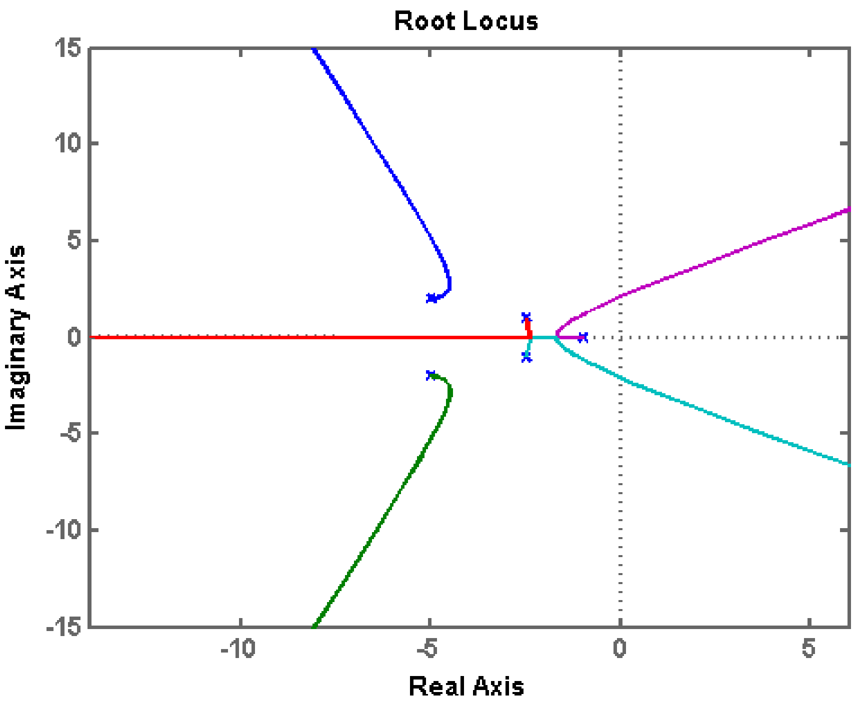
Exercícios

- **Ex. 11.1)**
  - Resposta ao degrau:
    - $K = 1$;
    - Como todos os polos e zeros estão no SPE, o sistema é de **fase mínima** (causal e estável);
    - Sistemas com pelo menos um polo ou zero no SPD são sistemas de **fase não-mínima**.



Exercícios

- **Ex. 11.2)** Sejam o diagrama do lugar das raízes abaixo:
  - a) Determine a função de transferência $G(s)$;
  - b) Projete um controlador PID pelo método ZN e verifique a resposta da planta controlada em malha fechada.



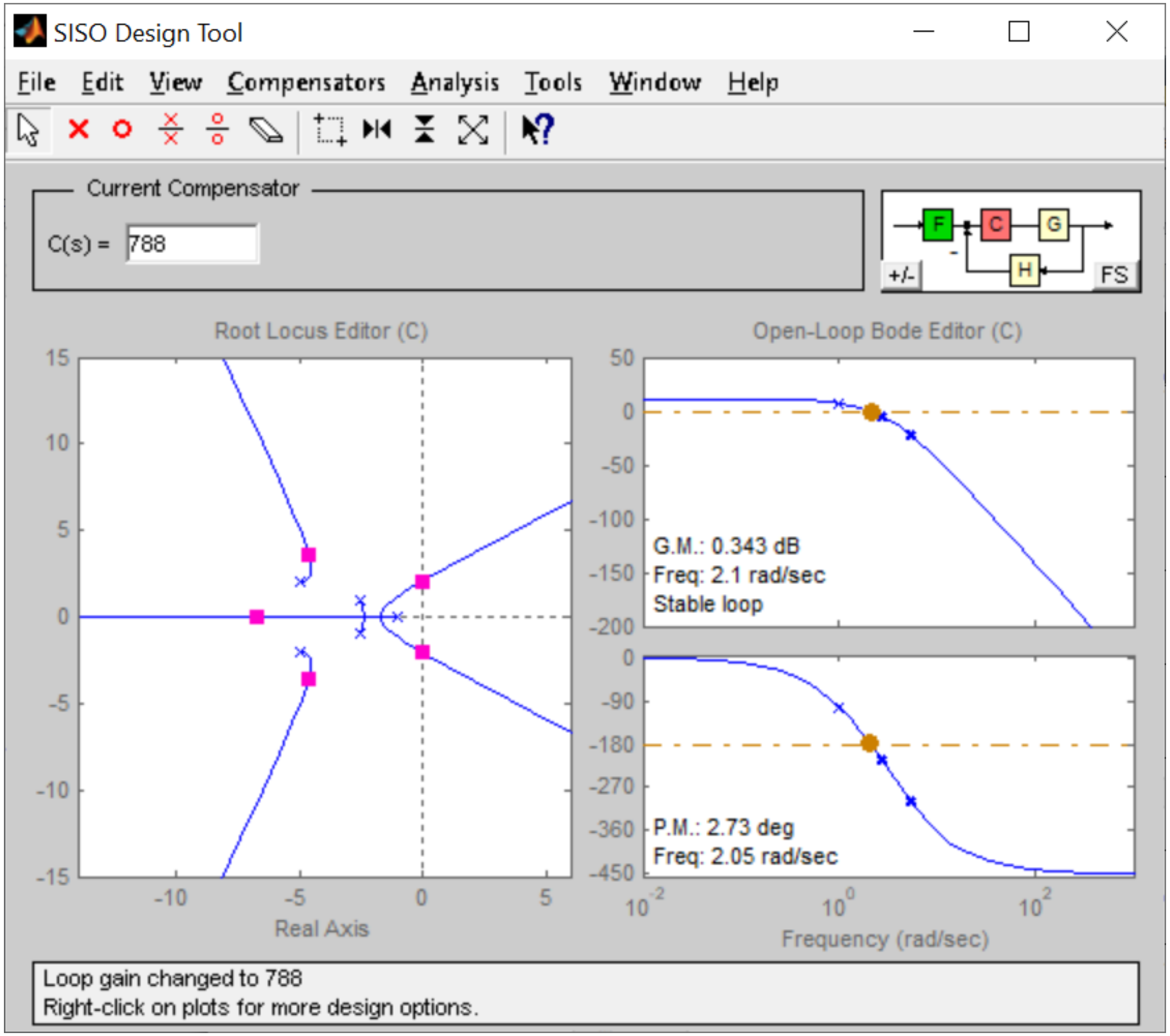
Exercícios

- **Ex. 11.2)**
  - Pela análise do root locus, pode-se concluir que $G(s)$ possui 5 polos no SPE:
    - $s_1 = -1;$
    - $s_{2,3} = -2.5 \pm j;$
    - $s_{4,5} = -5 \pm j2;$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^5 + 16s^4 + 101.3s^3 + 303.8s^2 + 427.8s + 710.3}}$$

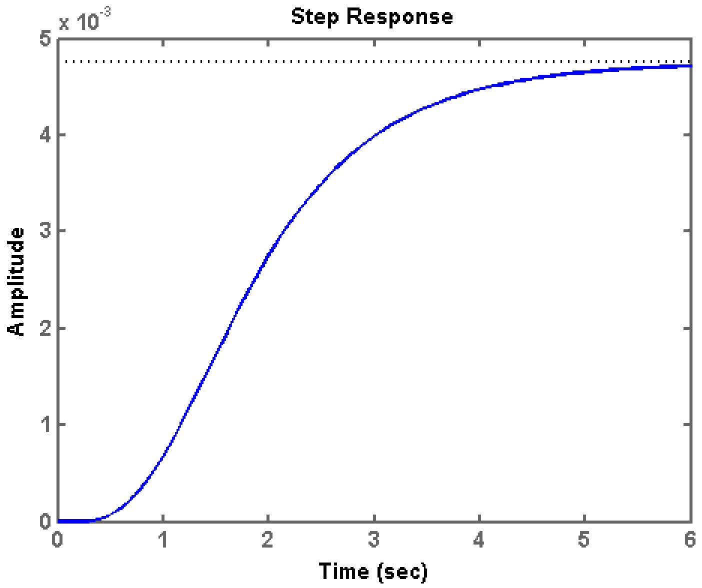
Exercícios

- **Ex. 11.2)**
  - Ganho crítico: $K_{cr} = 788$ (utilize a função `sisotool`);
  - Período crítico: $P_{cr} = 3.026$ s.

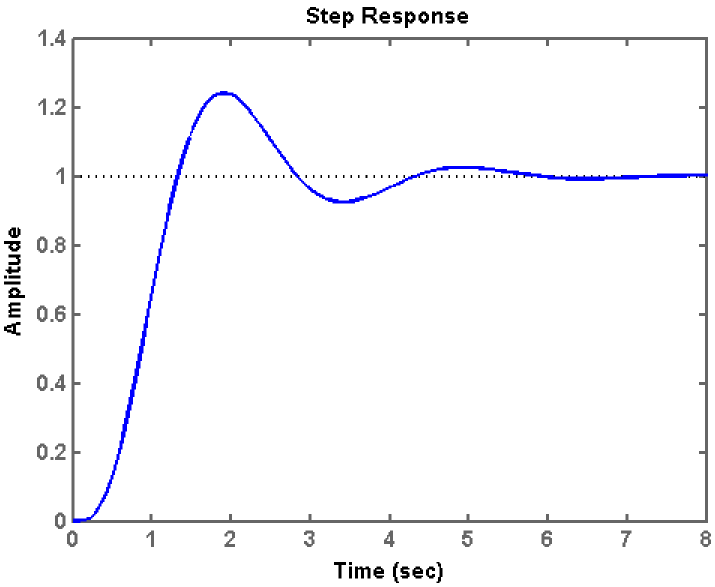


Exercícios

- **Ex. 11.2)**
  - Resposta ao degrau:



Malha aberta



Malha fechada com controle PID

Exercícios

- **Ex. 11.3)** Verifique o diagrama de lugar das raízes dos sistemas com **multiplicidade de polos ou zeros** apresentados abaixo.

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)(s+4)}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2}}$$

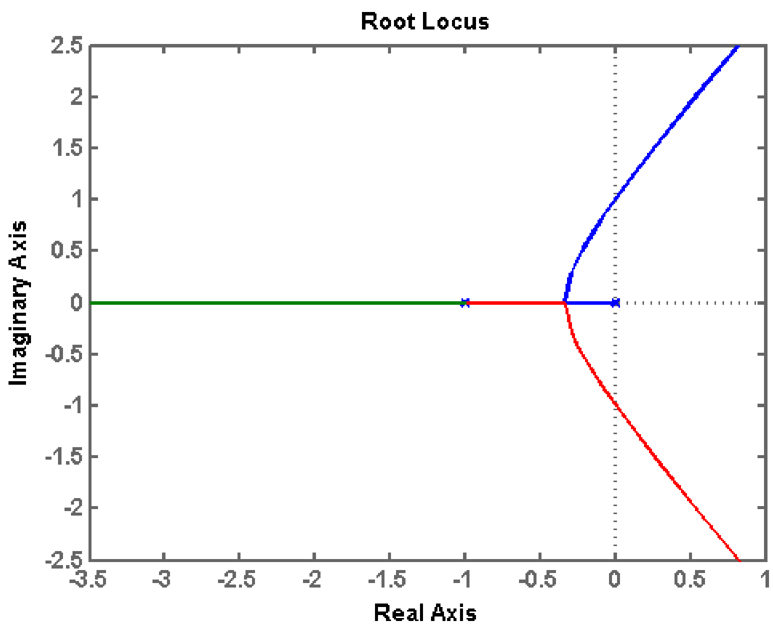
$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^3}}$$

Exercícios

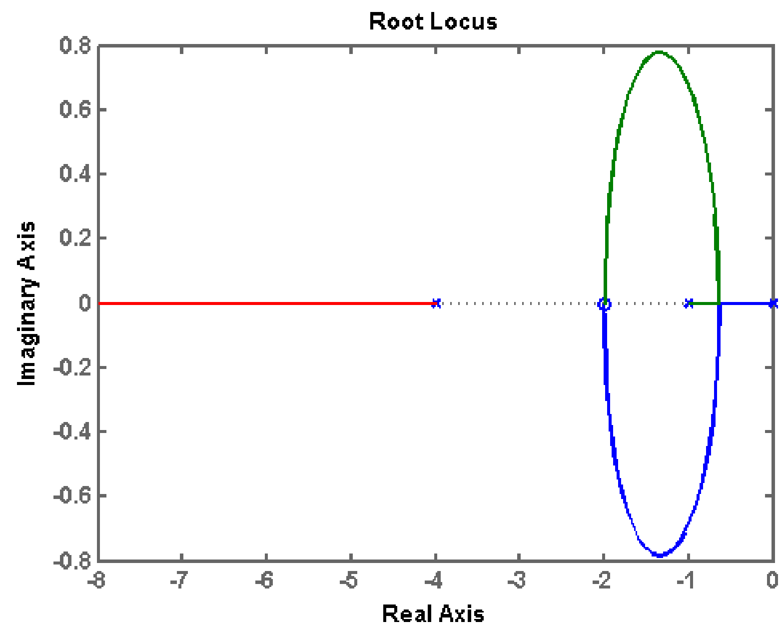
- **Ex. 11.3)**
  - Em caso de multiplicidades, os polos e zeros podem ser interpretados como polos e zeros independentes;
  - Por exemplo:
    - Dois branches independentes saem de um polo duplo, sendo que eles podem ir em direção a um polo ou ao infinito;
    - Dois branches independentes chegam em um zero duplo quando o ganho tende ao infinito;
    - As assíntotas seguidas em cada caso dependem das condições de fase de $KG(s) = -1$.

Exercícios

- **Ex. 11.3)**



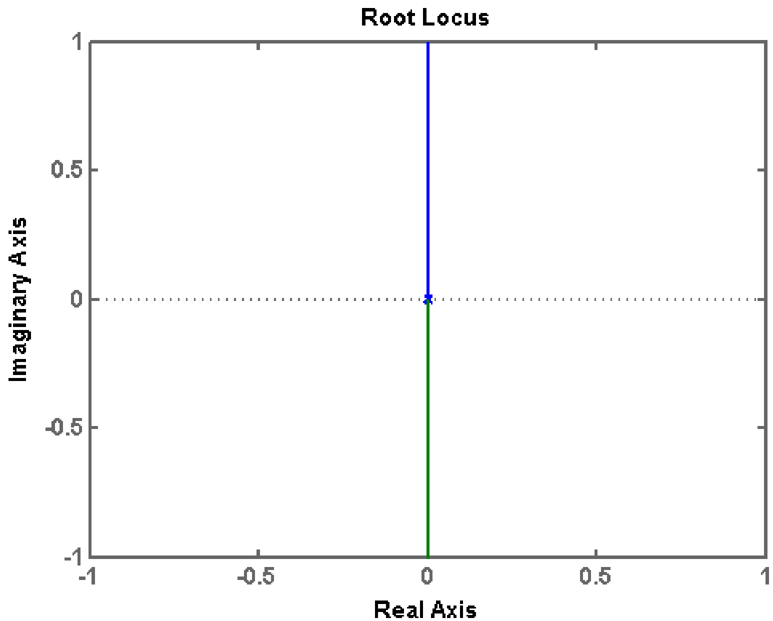
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}$$



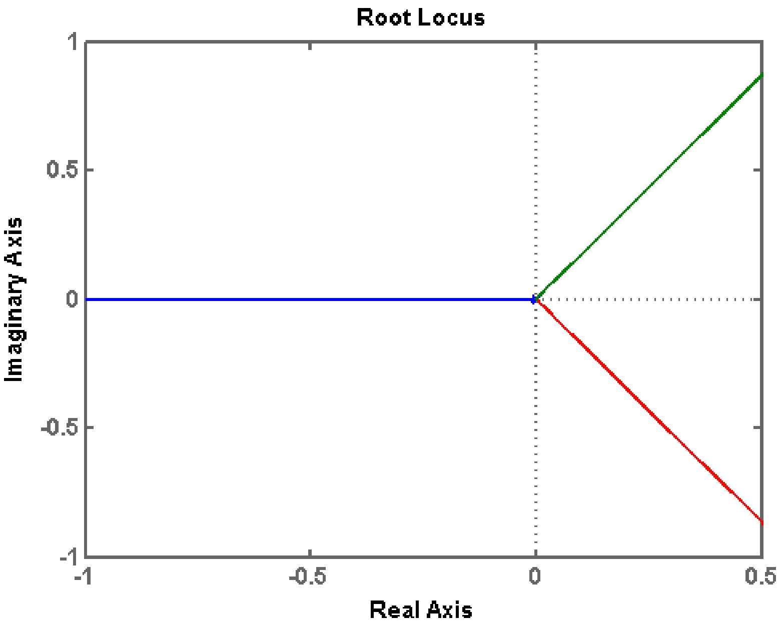
$$G(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)(s+4)}$$

Exercícios

- **Ex. 11.3)**



$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$



$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$