Autores

Carlos Augusto Jardim Chiarelli **165685**

Lucas Belucci **172593**

ES728 – Controle Avançado de Sistemas

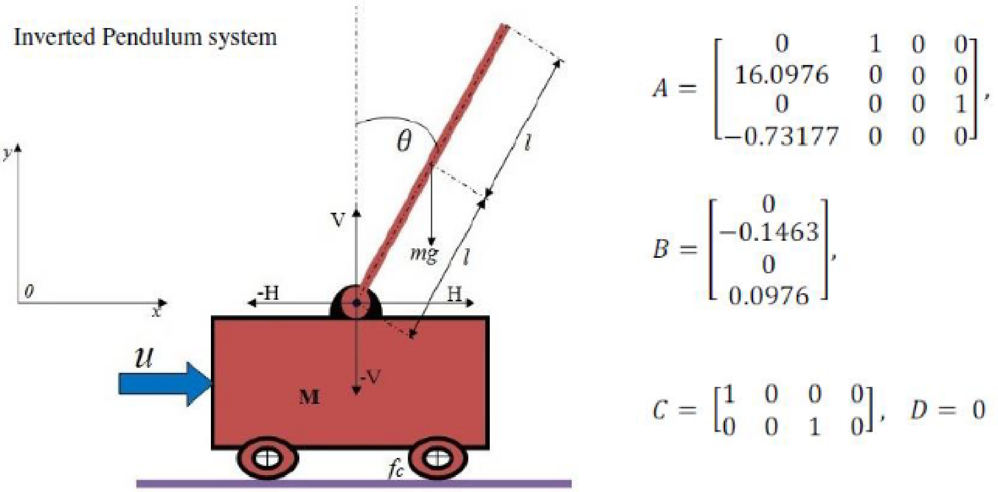
Curso Verão 2021 - Prof. Ely Paiva

Projeto Final – **Controle LQR de um Pêndulo Invertido**

In [1]:

```
from IPython.display import Image
Image('../img/01_final.png')
```

Out[1]:



In [2]:

```
from numpy.linalg import inv, eig, lstsq
from numpy.linalg import matrix_rank as rank
from numpy import array, eye, dot, zeros, poly, ones, pi
from numpy import roots, arange, asarray, concatenate, linspace
from functools import reduce
import matplotlib.pyplot as plt
from control import acker, place, ss, forced_response, lqr, care
from control import obsv, ctrb, minreal, tf, ss2tf, tf2ss, impulse_response
from scipy.signal import square
import pandas as pd
import seaborn as sns


def mul_mat(*args):
    return reduce(dot, args)
```

```python
def plota_resp_sist2(t, yout, ylabels=["x1", "x3"],
                     titulo='Resposta ao degrau', xlabel='Tempo (s)',
                    u=None):

    plt.rcParams["figure.figsize"] = (11,7)

    fig, axes = plt.subplots(2, 1)

    fig.suptitle(titulo+'\n')

    for num, ax in enumerate(axes.flatten()):
        ax.axhline(y=0, color='black', linestyle='--', alpha=.5)
        if u is not None:
            if ylabels[num] == "posição (m)":
                ax.plot(T, u_square, color='skyblue', label='entrada')
                plt.legend()
        ax.plot(T, yout[num], color='b')
        ax.set_ylabel(ylabels[num]+'\n')
        ax.grid(alpha=.5)

    plt.xlabel('\n'+xlabel)

    fig.tight_layout()
    plt.show()


def plota_obs(T, xout):

    aux = xout.T
    n = 4
    e = aux[:, n:]
    x = aux[:, :n]
    x_est = x-e

    theta = x[:,0]
    theta_dot = x[:,1]
    x_pos = x[:,2]
    x_pos_dot = x[:,3]

    theta_est = x_est[:,0]
    theta_dot_est = x_est[:,1]
    x_pos_est = x_est[:,2]
    x_pos_dot_est = x_est[:,3]


    fig, ax = plt.subplots(2, 1)

    ax[0].plot(T,theta,'-y', label='theta')
    ax[0].plot(T,theta_est,':b', label='theta_est')
    ax[0].plot(T,theta_dot,'-g', label='theta_dot')
    ax[0].plot(T,theta_dot_est,':r', label='theta_dot_est')
    ax[0].grid(alpha=.4)
    ax[0].legend(loc="lower right")

    ax[1].plot(T,x_pos,'-y', label='x_pos')
    ax[1].plot(T,x_pos_est,':b', label='x_pos_est')
    ax[1].plot(T,x_pos_dot,'-g', label='x_pos_dot')
    ax[1].plot(T,x_pos_dot_est,':r', label='x_pos_dot_est')
    ax[1].grid(alpha=.4)
    ax[1].legend(loc="lower right")

    plt.xlabel('\nTempo (s)')
    fig.suptitle("Controle com Observador\n('Est' é o estado estimado)")
```

```python
    plt.show()


def inv2(m):
    a, b = m.shape
    if a != b:
        raise ValueError("Only square matrices are invertible.")

    i = eye(a, a)
    return lstsq(m, i)[0]


class Systems():

    def __init__(self, parametros: list):
        """
        :param parametros: Dict no template [{'Q11':1, 'Q33':10, 'R':5}, {'Q1
        """
        self.Qc = None
        self.R = None
        self.params = parametros
        self.sys = {}

    def reset_params(self):
        self.Qc = dot(C.T, C)
        self.R = 1

    def set_param(self, param: dict):
        self.Qc[0,0] = param['Q11']
        self.Qc[2,2] = param['Q33']
        self.R = param['R']

        return f'Q11 {self.Qc[0,0]}, Q33 {self.Qc[2,2]}, R {self.R}'

    def get_new_sys(self):
        """Apenas LQR."""
        K, S, E  = lqr(A, B, self.Qc, self.R)

        Ac = A-dot(B,K)
        Bc = B
        Cc = C
        Dc = D

        sys_ss = ss(Ac,Bc,Cc,Dc2)

        return sys_ss

    def get_new_sys_obs(self):
        """LQR + Obs."""
        K, S, E  = lqr(A, B, self.Qc, self.R)

        # Nbar
        Cn = array([[0, 0, 1, 0]])
        Dn = array([[0]])
        a1_ = concatenate((A, B), axis=1)
        a2_ = concatenate((Cn, Dn), axis=1)
        AA = concatenate((a1_, a2_), axis=0)

        # set point é 0.2
        rss = 0.2
        t = array([[0, 0, 0, 0, rss]]).T
        ux = dot(inv2(AA),t)
        xss = aux[0:4,:]
        uss = aux[4,:]
        Nx = xss/rss
```

```python
        Nu = uss/rss
        Nbar = Nu + dot(K,Nx)
        Nbar = float(Nbar)

        # construindo At
        a11 = A - dot(B,K)
        a12 = dot(B,K)
        a21 = zeros(A.shape)
        a22 = A - dot(L2.T,Cn)
        a1_ = concatenate((a11, a12), axis=1)
        a2_ = concatenate((a21, a22), axis=1)
        Ace = concatenate((a1_, a2_), axis=0)
        # construindo Bt
        b11 = B*Nbar
        b21 = zeros(B.shape)
        Bce = concatenate((b11, b21), axis=0)
        # construindo Ct
        c11 = C
        c12 = zeros(C.shape)
        Cce = concatenate((c11, c12), axis=1)
        # Dt
        Dc2 = 0

        sys_ss = ss(Ace,Bce,Cce,Dc2)

        return sys_ss

    def run(self, obs=True):
        for param in self.params:
            self.reset_params()
            label = self.set_param(param)

            if obs:
                sys = self.get_new_sys_obs()
            else:
                sys = self.get_new_sys()

            self.sys.update({label:sys})

        return self.sys


class Responses():

    def __init__(self, sys: dict):
        """
        :para, sys: Dict que contém os sistemas que serão testas sob as respo
        """
        self.sys = sys
        self.step = {}
        self.ci = {}
        self.wave = {}
        self.t = arange(0, 30, .01)
        self.Dc2 = 0
        self.xo = [0.1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
        self.t_square = arange(0, 180, 0.1)
        self.u_square = square(2 * pi * 1/90 * self.t_square)

    def run(self):
        for label, sys in self.sys.items():
            T, yout, xout = forced_response(sys, self.t, U=0.2)
            self.step.update({label:{'T':T, 'yout0':yout[0], 'yout1':yout[1]}

            T, yout = impulse_response(sys, T=self.t, X0=self.xo)
            self.ci.update({label:{'T':T, 'yout0':yout[0], 'yout1':yout[1]}})
```

```
            T, yout, xout = forced_response(sys, self.t_square, U=self.u_squa
            self.wave.update({label:{'T':T, 'yout0':yout[0], 'yout1':yout[1]}

        return {'step': self.step, 'ci': self.ci, 'wave': self.wave}


class TidyData():

    def __init__(self, resp: dict):
        """
        :param resp: Dict que contém as respostas dos sistemas.
        """
        self.resp = resp
        self.final = {'step': None, 'ci': None, 'wave': None}

    def tidy(self, name_resp: str):
        """:param name_resp: Str que seja ['step', 'ci' ou 'wave']."""
        resp_target = self.resp[name_resp]

        primeiro = True

        for label, values in resp_target.items():

            df_aux = pd.DataFrame(values)
            df_aux['label'] = label

            if primeiro:
                df = df_aux.copy()
                primeiro = False
            else:
                df = pd.concat([df, df_aux])

        self.final[name_resp] = df

    def run(self) -> dict:
        for resposta in ['step', 'ci', 'wave']:
            self.tidy(resposta)

        return self.final


class Visualizacao():

    def __init__(self, resp_df: dict):
        """:param resp_df: Dict com as respostas em pd.DataFrame"""
        sns.set_theme(style="darkgrid")
        sns.set(rc={'figure.figsize':(11.7,8.27), "font.size":16})

        self.resp_df = resp_df
        self.resp = None
        self.pos_leg0 = "upper right"
        self.pos_leg1 = "lower right"
        self.titulo = 'Resposta ao degrau (CI nulas)'

    def set_param(self, type_resp: str):
        """:param type_resp: Str é o tipo de resposta, exe: ['step', 'ci', 'w
        self.resp = type_resp

        if type_resp == 'step':
            self.pos_leg0 = "upper right"
            self.pos_leg1 = "lower right"
            self.titulo = 'Resposta ao degrau (CI nulas)'
        elif type_resp == 'ci':
            self.pos_leg0 = "upper right"
```

```
            self.pos_leg1 = "upper right"
            self.titulo = 'Resposta ao impulso (CI não nulas)'
        else:
            self.pos_leg0 = "upper right"
            self.pos_leg1 = "lower right"
            self.titulo = 'Resposta a uma onda quadrada (CI nulas)'


    def show(self):
        f, axes = plt.subplots(2, 1)

        sns.lineplot(x='T', y='yout0', hue='label', data=self.resp_df[self.re
        sns.lineplot(x='T', y='yout1', hue='label', data=self.resp_df[self.re

        axes[0].legend(loc=self.pos_leg0)
        axes[1].legend(loc=self.pos_leg1)

        axes[0].set_xlabel('')

        axes[0].set_ylabel('θ (rad)'+'\n')
        axes[1].set_ylabel('posição (m)'+'\n')

        f.suptitle(self.titulo+'\n')

        plt.xlabel('\nTempo (s)')
        plt.show()


# plots config
plt.rcParams["figure.figsize"] = (11,7)
plt.rcParams.update({'font.size': 15})

# warnings
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
```

PRIMEIRA PARTE (vetor de estado conhecido)

Utilizando os vetores fornecidos no enunciado para definir o sistema de equações que representa o sistema. Além disso, conforme o artigo de referência fornecido, teremos que:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

E verificando os polos para a malha aberta:

In [3]:

```
# Modelo de planta utilizado
A = array([[0,        1,   0,   0],
           [16.0976,  0,   0,   0],
```

```
              [0,         0,   0,   1],
              [-0.73177, 0,   0,   0]])

B = array([[0, -0.1463, 0, 0.0976]]).T

C = array([[1, 0, 0, 0],
           [0, 0, 1, 0]])

D = array([[0, 0]]).T
```

In [4]:

```
sys_ss = ss(A,B,C,D)

Deig, v = eig(A)

Deig
```

Out[4]:

```
array([ 0.        ,  0.        ,  4.01218145, -4.01218145])
```

Possui um pólo positivo, logo o sistema é instável como esperado pois soltando o pêndulo sem controle ele irá cair e parar no chão.

In [5]:

```
rank(ctrb(A, B))
```

Out[5]:

```
4
```

Porém o sistema será controlável, uma vez que a matriz de controlabilidade C irá possuir Rank cheio. Dessa maneira é possível determinar a matriz de ganho K para o controle através do state-feedback garantindo que o sistema será estável em malha fechada.

Um dos métodos que permitem a obtenção direta da matriz K é o LQR (Linear Quadratic Regulation) e para isso é necessário definir as matriz de importância da atuação do controlador e de erro, sendo Q e R, respectivamente.

Portanto, assumindo $Q = C' * C$ e $R = 1$.

In [6]:

```
Qc = dot(C.T, C)

Qc
```

Out[6]:

```
array([[1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
```

In [7]:

```
R = 1
K, S, E  = lqr(A, B, Qc, R)
```

Com os valores definidos anteriores a matrix K obtida será:

In [8]:
```
K
```

Out[8]:
```
matrix([[-244.75328676,  -61.22658528,   -1.        ,   -5.18890327]])
```

In [9]:
```
R = 1
P, L, K2 = care(A, B, Qc, R)
```

In [10]:
```
(K==K2).all()
```

Out[10]:
```
True
```

In [11]:
```
L
```

Out[11]:
```
array([-4.0122185 +0.01825039j, -4.0122185 -0.01825039j,
       -0.21328796+0.21319976j, -0.21328796-0.21319976j], dtype=complex64)
```

Definindo o novo sistema em malha fechada com a realimentação e o ganho obtido anteriormente:

In [12]:
```
Ac = A-dot(B,K)
Bc = B
Cc = C
Dc = D

Ac
```

Out[12]:
```
matrix([[  0.        ,   1.        ,   0.        ,   0.        ],
        [-19.70980585,  -8.95744943,  -0.1463    ,  -0.75913655],
        [  0.        ,   0.        ,   0.        ,   1.        ],
        [ 23.15615079,   5.97571472,   0.0976    ,   0.50643696]])
```

In [13]:
```
Bc
```

Out[13]:
```
array([[ 0.    ],
       [-0.1463],
       [ 0.    ],
       [ 0.0976]])
```

In [14]:
```
Dc
```

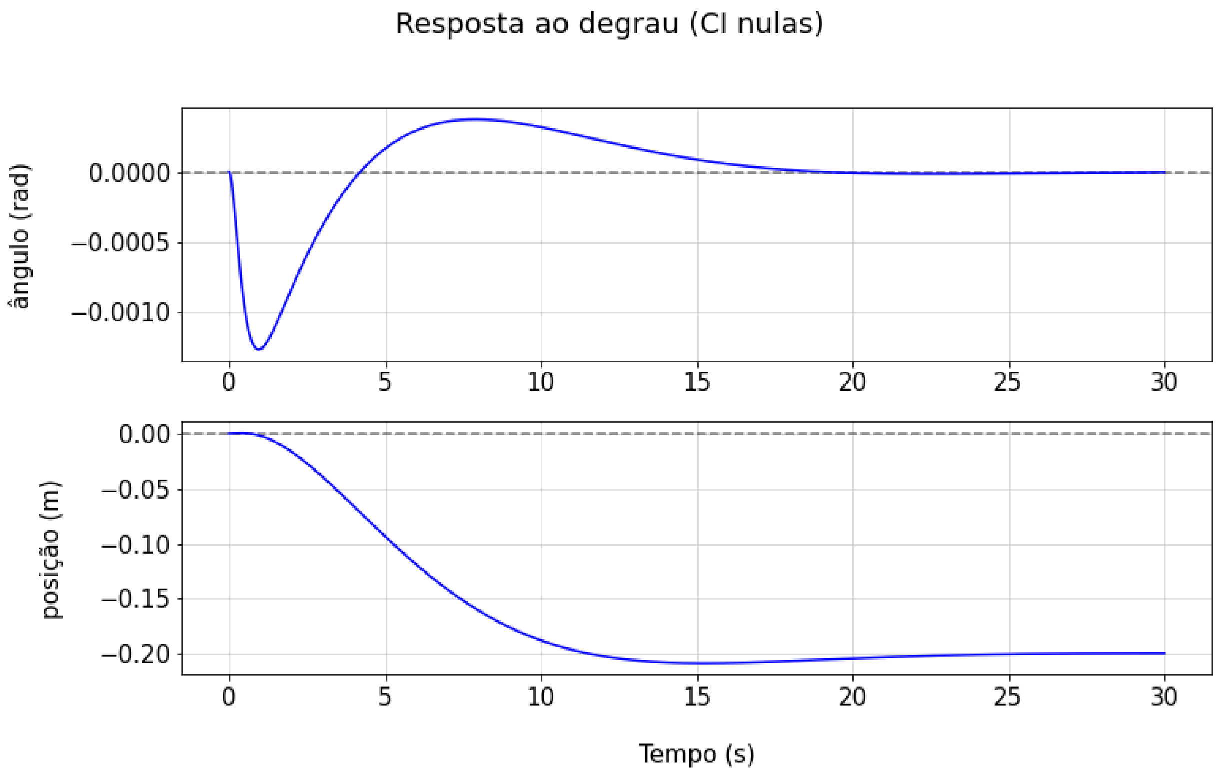
Out[14]:
```
array([[0],
       [0]])
```

In [15]:
```
Dc2 = 0

t = arange(0, 30, .01)
sys_ss = ss(Ac,Bc,Cc,Dc2)
T, yout, xout = forced_response(sys_ss, t, U=0.2)
```

Com isso é possível obter a resposta do sistema ao degrau, assumindo condições iniciais nulas

In [16]:
```
plota_resp_sist2(t, yout,
                 titulo='Resposta ao degrau (CI nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'])
```

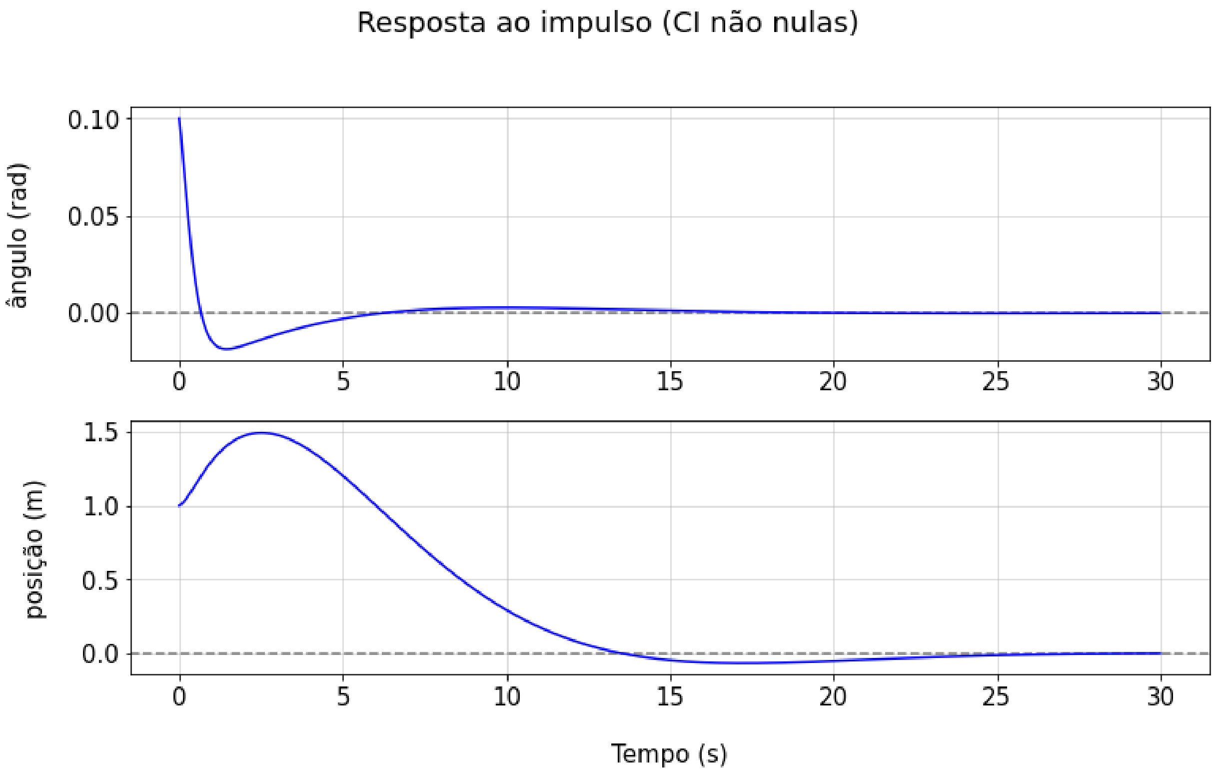


E também a resposta ao degrau com condições iniciais não nulas, sendo elas $x_0 = [0.1, 0, 1, 0]$.

In [17]:
```
xo = [0.1, 0, 1, 0]

T, yout = impulse_response(sys_ss, T=t, X0=xo)

plota_resp_sist2(T, yout,
                 titulo='Resposta ao impulso (CI não nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'])
```



Por fim a resposta ao degrau com condições iniciais nulas, porém com a presença de um distúrbio.

In [18]:
```
t_square = arange(0, 180, 0.1)
u_square = square(2 * pi * 1/90 * t_square)

T, yout, xout = forced_response(sys_ss, t_square, U=u_square)

plota_resp_sist2(T, yout,
                 titulo='Resposta a uma onda quadrada (CI nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'],
                 u=u_square)
```

Acima vemos que a posição segue a entrada com sinal oposto devido a realimentação **K** ser positiva.

Além disso, para a situação em que todos os estados são conhecidos, o controlador projetado se mostra eficiente, já que tanto para a resposta ao degrau sem condições iniciais, quanto para a resposta ao degrau com condições iniciais o valor de θ, que indica a inclinação do pendulo, irá convergir para a posição de equilibrio, ou seja, para o valor zero em que se manterá na vertical.

E para a situação em que ocorre um distúrbio, o equílibrio será rapidamente reestabelecido.

SEGUNDA PARTE (estado parcialmente conhecido, incluir observador)

Conforme é proposto na segunda parte, assumindo $C = [1, 0, 0, 0]$, teremos que não se tem conhecimento sobre todos os estados do sistema, logo para essa situação é necessário projetar um observador que irá permitir a atuação correta do controlador. Para isso, inicialmente é necessário verificar se o sistema será observável.

In [19]:
```
rank(obsv(A, [1, 0, 0, 0]))
```

Out[19]: 2

Assim, para $C = [1, 0, 0, 0]$, teremos que o rank do sistema não será cheio, logo o sistema não é observável !

Agora assumindo $C = [0, 0, 1, 0]$ e verificando o rank do sistema:

In [20]:
```
Q = obsv(A, [0, 0, 1, 0])
rank(Q)
```

Out[20]:
```
4
```

Rank cheio, logo o sistema é observável. Com isso é possível projetar um observador para o sistema, para isso é necessário determinar o inverso da matriz de Observabilidade. Depois, selecionando apenas a ultima coluna de Q^{-1}, determinamos a matriz de transformação linear T e aplicamos as matrizes A, B, C e D inicias para obtermos o sistema representado na forma canônica observador.

In [21]:
```
iQ = inv(Q)
```

In [22]:
```
iQ
```

Out[22]:
```
matrix([[-0.        , -0.        , -1.3665496, -0.        ],
        [-0.        , -0.        , -0.        , -1.3665496],
        [ 1.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ],
        [ 0.        ,  1.        ,  0.        ,  0.        ]])
```

In [23]:
```
iQ[:,3]
```

Out[23]:
```
matrix([[-0.       ],
        [-1.3665496],
        [ 0.       ],
        [ 0.       ]])
```

In [24]:
```
q = iQ[:,3]

QQ = array([q, mul_mat(A,q), mul_mat(A,A,q), mul_mat(A,A,A,q)]).T

T = QQ.copy()

Ao = mul_mat(inv(T), A, T)

Bo = dot(inv(T), B)

Co = dot(C, T)
```

In [25]:
```
Cn = array([[0, 0, 1, 0]])

Dn = array([[0]])
```

In [26]:
```
D2 = array([D])
```

```
a1_ = concatenate((A, B), axis=1)
a2_ = concatenate((Cn, Dn), axis=1)

AA = concatenate((a1_, a2_), axis=0)
```

Com o sistema definido, para garantir que a convergência ocorra no valor correto, acrescentamos um precompensation, e para isso seguimos o roteiro da solução do sistema $N_{bar} = N_u + K * N_x$. Podemos definir as demais variáveis:

$$AA = [A, B, C, 0]$$

$$N_x = \frac{x_{ss}}{r_{ss}}$$

$$N_u = \frac{u_{ss}}{r_{ss}}$$

$$R_{ss} = 0.2$$

In [27]:
```
AA
```

Out[27]:
```
array([[ 0.      ,  1.      ,  0.      ,  0.      ,  0.      ],
       [16.0976 ,  0.      ,  0.      ,  0.      , -0.1463 ],
       [ 0.      ,  0.      ,  0.      ,  1.      ,  0.      ],
       [-0.73177,  0.      ,  0.      ,  0.      ,  0.0976 ],
       [ 0.      ,  0.      ,  1.      ,  0.      ,  0.      ]])
```

In [28]:
```
# set point é 0.2
rss = 0.2
t = array([[0, 0, 0, 0, rss]]).T

t
```

Out[28]:
```
array([[0. ],
       [0. ],
       [0. ],
       [0. ],
       [0.2]])
```

In [29]:
```
#aux = dot(inv(AA),t) # matriz singular (calculo da pseudo-inversa)
aux = dot(inv2(AA),t)

xss = aux[0:4,:]

# valor de controle
uss = aux[4,:]
```

A matriz AA é singular, ou seja, não possui inversa. Logo foi utilizada uma técnica para obter a pseudo-inversa da respectiva matriz.

In [30]:
```
xss
```

Out[30]:
```
array([[0. ],
       [0. ],
       [0.2],
       [0. ]])
```

In [31]:
```
uss
```

Out[31]:
```
array([0.])
```

In [32]:
```
Nx = xss/rss
Nu = uss/rss
Nbar = Nu + dot(K,Nx)

Nbar = float(Nbar)

Nbar
```

Out[32]:
```
-1.0000000000043265
```

In [33]:
```
L2 = array([L])
```

In [34]:
```
L.shape, L2.shape, C.shape, Cn.shape
```

Out[34]:
```
((4,), (1, 4), (2, 4), (1, 4))
```

Conhecendo os valores de ganho do observador L e do controlador K, além do valor do precompensation, é possível determinarmos o novo sistema de malha fechada em que

```
Ace = [(A-B*K);           (B*K);
       zeros(size(A)); (A-L*C)]

Bce = [B*Nbar;
       zeros(size(B))];

Cce = [Cc zeros(size(Cc))];

Dce = [0];
```

In [35]:
```
# construindo At
a11 = A - dot(B,K)
a12 = dot(B,K)
a21 = zeros(A.shape)
a22 = A - dot(L2.T,Cn)
```

```
a1_ = concatenate((a11, a12), axis=1)
a2_ = concatenate((a21, a22), axis=1)

Ace = concatenate((a1_, a2_), axis=0)

# construindo Bt
b11 = B*Nbar
b21 = zeros(B.shape)

Bce = concatenate((b11, b21), axis=0)

# construindo Ct
c11 = C
c12 = zeros(C.shape)

Cce = concatenate((c11, c12), axis=1)
```

In [36]:

```
Ace.shape, Bce.shape, Cce.shape
```

Out[36]:

```
((8, 8), (8, 1), (2, 8))
```

In [37]:

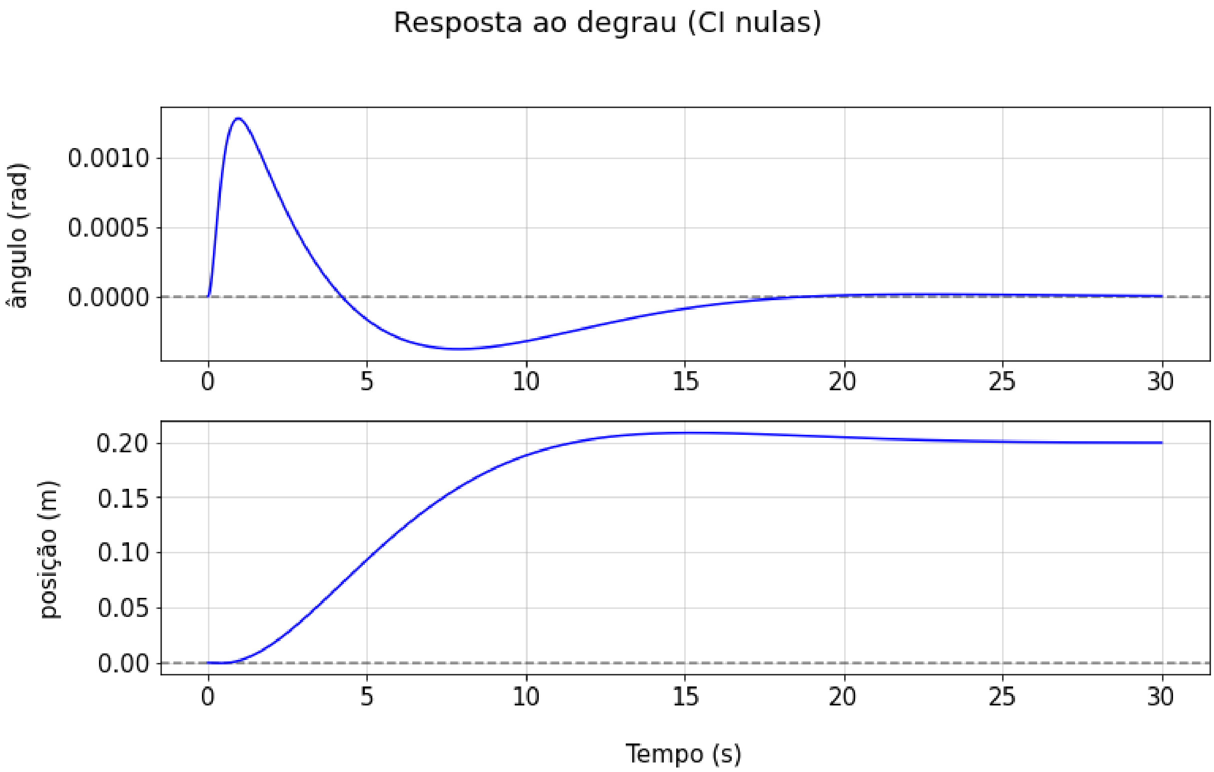
```
Dc2 = 0

t = arange(0, 30, .01)
sys_ss = ss(Ace,Bce,Cce,Dc2)
T, yout, xout = forced_response(sys_ss, t, U=0.2)
```

Assim como na parte 1, para verificarmos a eficiência do controlador iremos verificar o comportamento do sistema para a resposta ao degrau com condições iniciais nulas, com condições iniciais não nulas e com a presença de um distúrbio.

In [38]:

```
plota_resp_sist2(t, yout,
                 titulo='Resposta ao degrau (CI nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'])
```

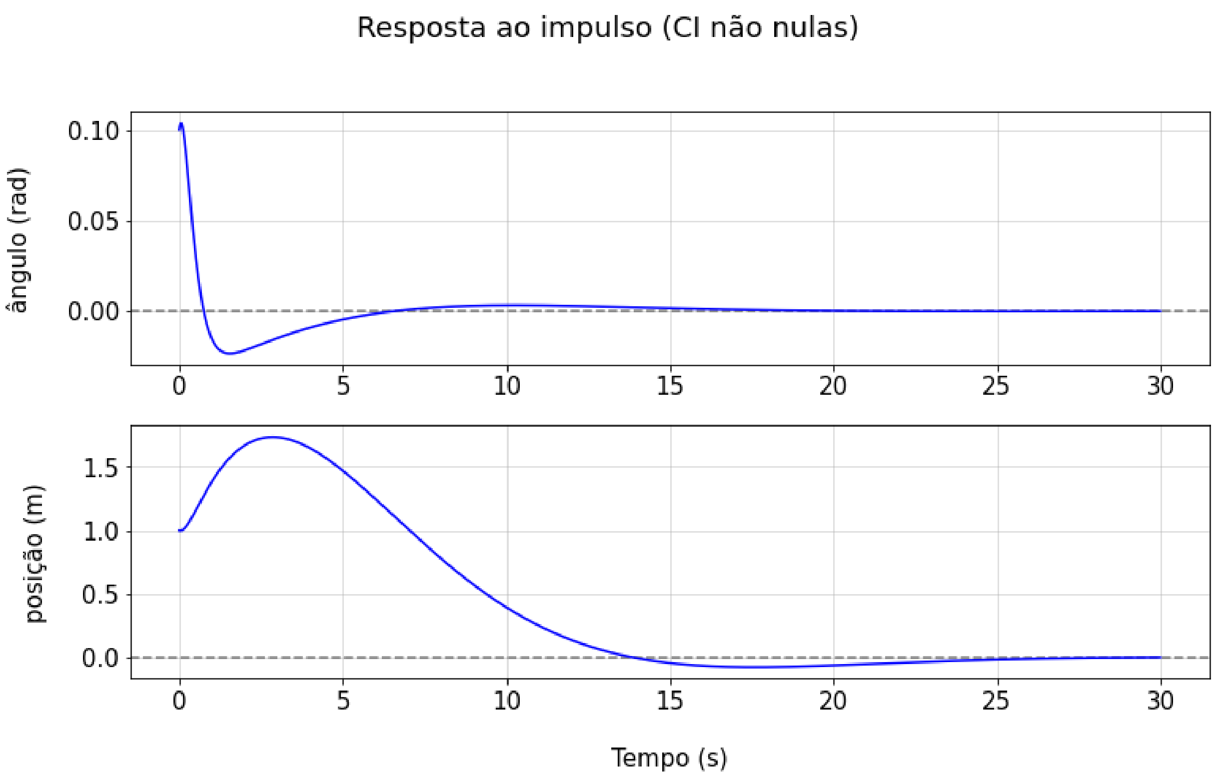


In [39]:

```python
xo = [0.1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]

T, yout = impulse_response(sys_ss, T=t, X0=xo)

plota_resp_sist2(T, yout,
                 titulo='Resposta ao impulso (CI não nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'])
```



In [40]:

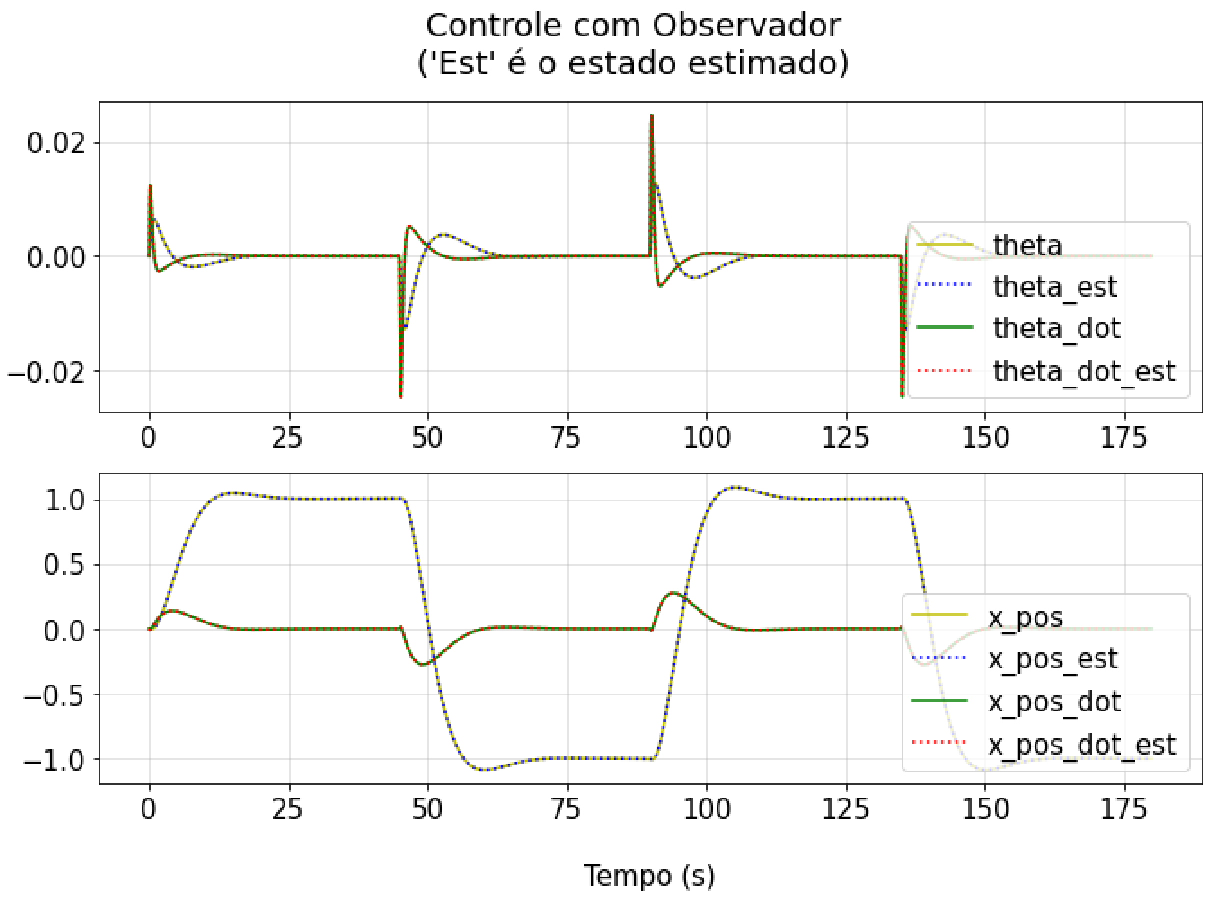
```python
T, yout, xout = forced_response(sys_ss, t_square, U=u_square)

plota_resp_sist2(T, yout,
                 titulo='Resposta a uma onda quadrada (CI nulas)',
```

```
               ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'],
               u=u_square)
```

E assim como era esperado o controlador com a presença do observador obtem valores bem próximos aos obtidos na parte 1, portanto o observador está bem projetado, garantindo o funcionamento correto do controlador. Para facilitar a visualização do comportamento semelhante, os gráficos abaixo indicam o comportamento do sistema para o valor estimado e para o valor real.

In [41]:
```
plota_obs(T, xout)
```



Acima vemos um bom desempenho do estimador já que as linhas tracejadas (estados estimados) se encontram em cima das linhas contínuas (estados reais).

Simulando o limite (θ inicial) de controle

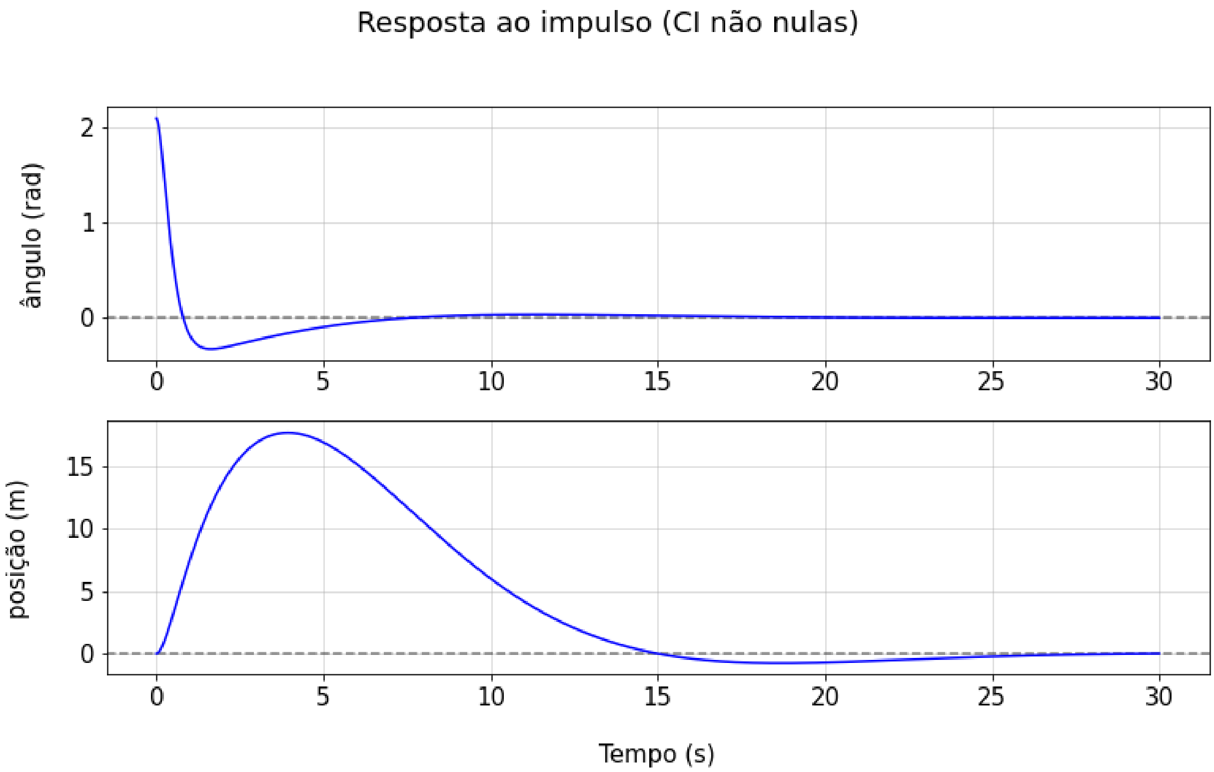
Modelo abordado é linearizado para pequenos ângulos (θs) iniciais, tais como $sin(\theta) = \theta$.

Essa avaliação será feita agora.

In [42]:
```
xo = [2.09, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

T, yout = impulse_response(sys_ss, T=t, X0=xo)

plota_resp_sist2(T, yout,
                 titulo='Resposta ao impulso (CI não nulas)',
                 ylabels=['ângulo (rad)', 'posição (m)'])
```



Porém diferente do esperado o sistema conseguiu controlar o angulo do pendulo mesmo em uma situação extrema em que ele parte de 120°, o motivo disso ser possível é relacionado com o esforço de controle permitido, ou também o valor de R, uma vez que estamos pensando apenas na simulação, sem considerar controladores reais, teremos que o esforço que o controlador pode exercer no sistema como potencialmente ilimitado. Porem na vida real isso não ocorre e portanto, situações iniciais tão desfavoráveis são impossíveis de serem controladas.

Simulação ponderando diferentes R e Q (LQR)

Para verificar o efeito que os pesos do esforço de controle na matriz Q e permissividade da atuação do controlador tem, vamos variar basicamente 3 parâmetros: Q_{11}, Q_{33} e R.

A referência é mostrada abaixo.

In [43]:

```
parametros = [{'Q11':1,   'Q33':10,  'R':5},
              {'Q11':100, 'Q33':1,   'R':1},
              {'Q11':1,   'Q33':1,   'R':10},
              {'Q11':1,   'Q33':100, 'R':100},
              {'Q11':10,  'Q33':1,   'R':10},
              {'Q11':1,   'Q33':100, 'R':1}]
```

In [44]:

```
%%time
```

```
sistemas = Systems(parametros).run()
```

```
CPU times: user 30.1 ms, sys: 69.9 ms, total: 100 ms
Wall time: 25.7 ms
```

In [45]:

```
%%time

respostas = Responses(sistemas).run()
```

```
CPU times: user 2.31 s, sys: 2.51 s, total: 4.81 s
Wall time: 1.28 s
```

In [46]:

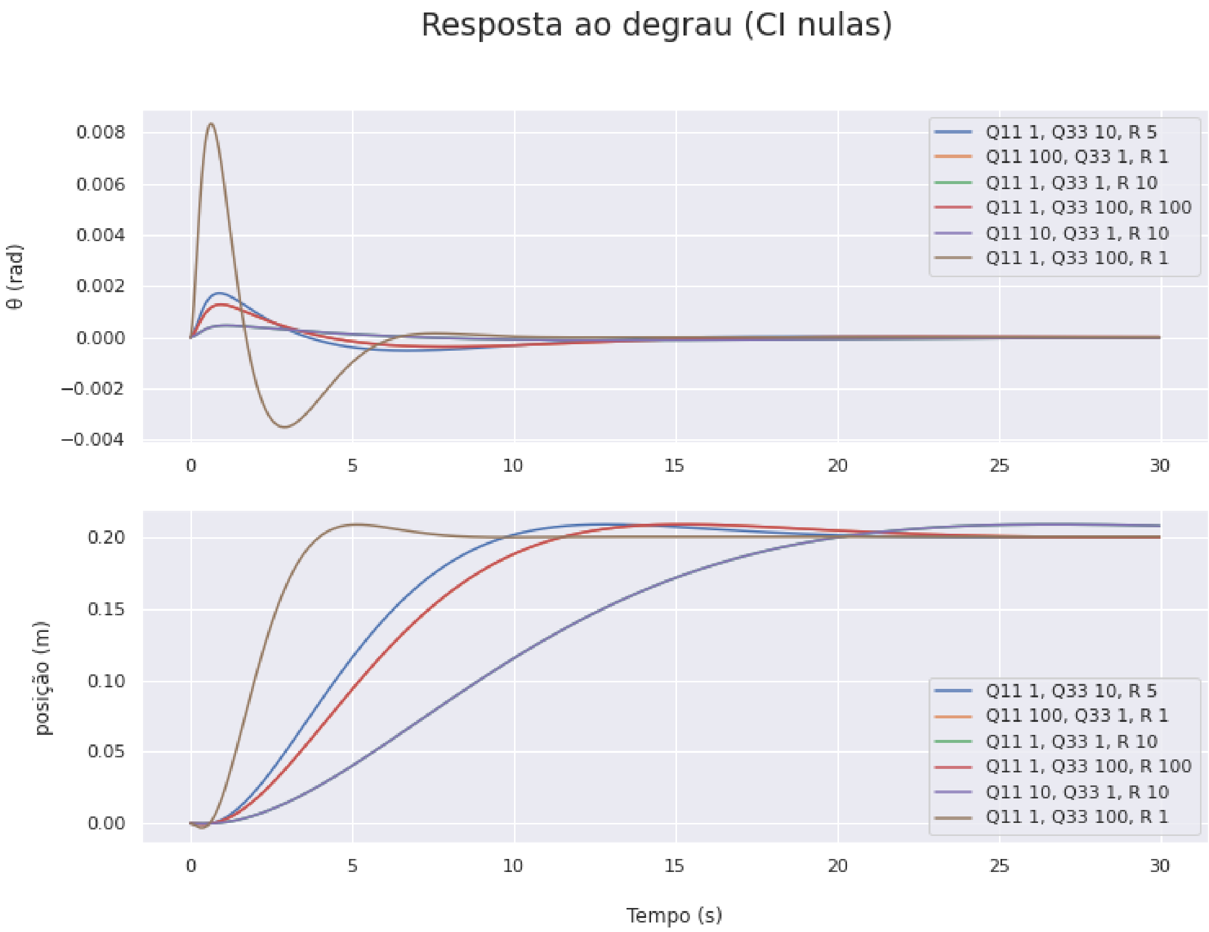
```
resp_df = TidyData(respostas).run()
```

In [47]:

```
viz = Visualizacao(resp_df)
```

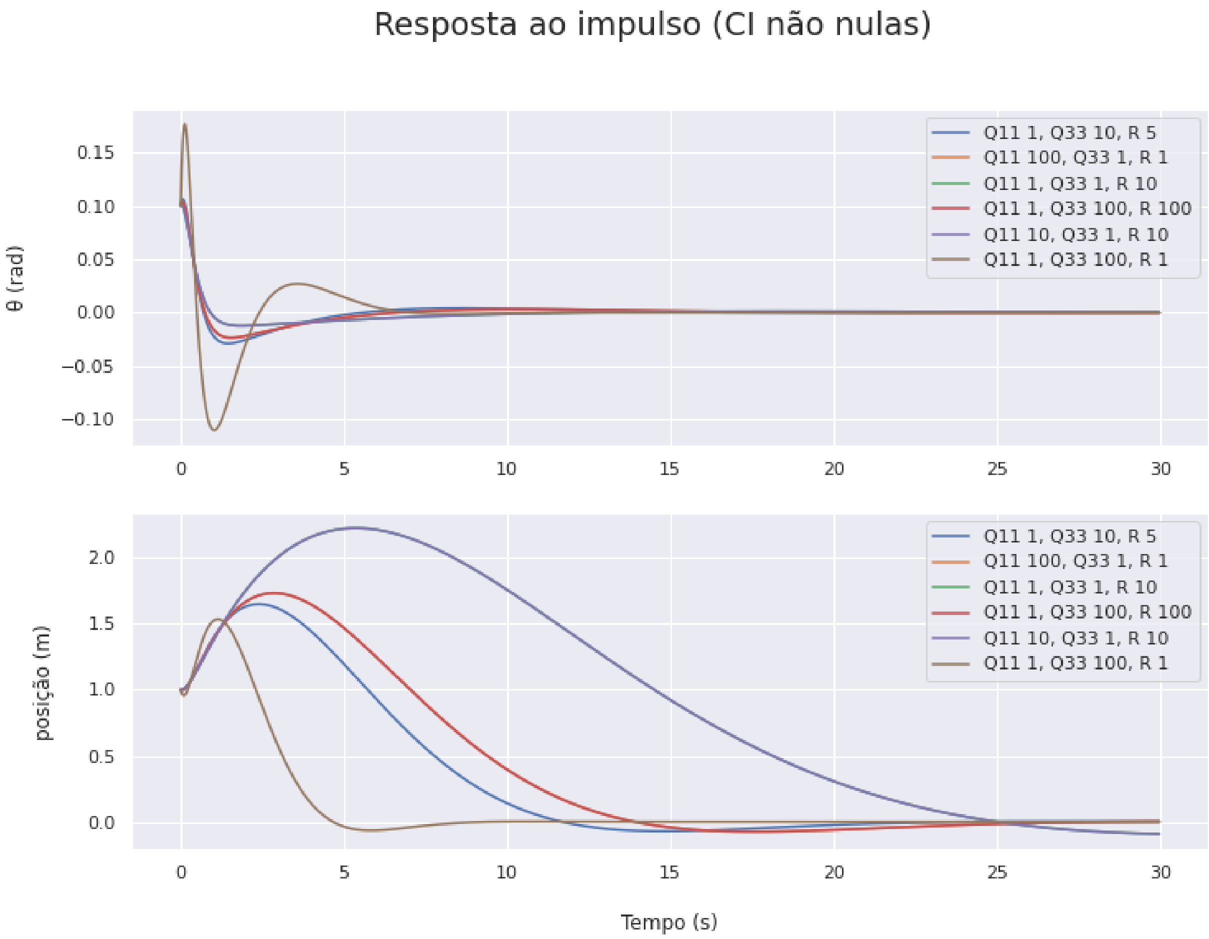
In [48]:

```
viz.set_param('step')
viz.show()
```



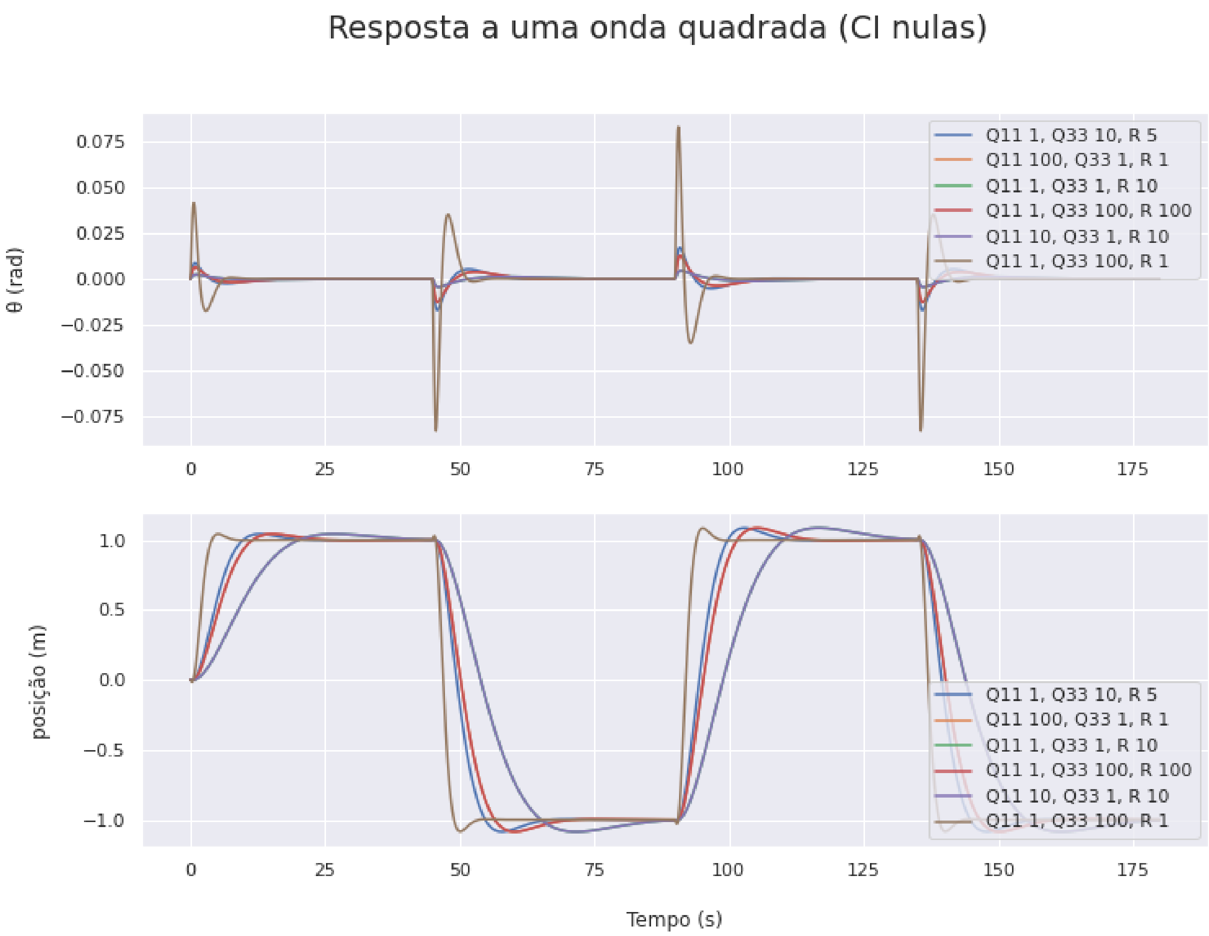
In [49]:

```
viz.set_param('ci')
viz.show()
```



In [50]:

```
viz.set_param('wave')
viz.show()
```



Podemos concluir então que para situações em que o valor de Q_{11} são aumentados, como o estado 1 corresponde ao angulo do pêndulo, o controlador irá atuar de maneira proporcional para garantir que seja atingido o estado de equilíbrio o mais rápido possível, em prejuízo as outras caractéristicas do sistema, além dos outros estados, ou até mesmo o controlador. Da mesma maneira irá ocorrer quando alterarmos o valor presente em Q_{33}, que corresponde a posição do carrinho.

Portanto, temos que ao alterar o peso do controlador de algum estado garantimos que seja atingido o valor final desejado para aquele estado, porém ao custo do tempo de estabilização do sistema, presença de overshoot, esforço de controle irreal, entre outros fatores. Fazendo com que alterações consideráveis só são recomendadas para casos específicos em que o principal objetivo do projeto seja o controle de um estado em especial, caso contrário, o recomendado será a utilização de pesos iguais, ou pelo menos de mesma proporção para todos os estados.