ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

18 – Transformada Z

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Transformada Z;
  - 2) Transformada Z inversa;
  - 3) Solução de equações a diferenças;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Transformada Z

- **1.1. Equações a diferenças:**
  - A **equação a diferenças** pode ser considerada a contrapartida discreta de uma **equação diferencial ordinária**;
  - Por exemplo, seja a equação a diferenças

$$\boxed{a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = u(k)}$$

    - Onde $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ e T é o período de amostragem;
  - Para resolver $y(k)$, pode-se utilizar os valores para tempos anteriores ou utilizar a transformada Z;
  - **Importante:** a equação à diferenças **não** é a conversão discreta direta de uma EDO contínua! → Verificar numericamente.

1. Transformada Z

- **1.2. Transformada Z:**
  - Seja o sinal contínuo $x(t)$ com $t \geq 0$, a sua **transformada Z** é calculada por

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[x(t)](z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}} \qquad (1)$$

  - z é uma variável complexa;
  - A **transformada Z unilateral** assume que $x(t) = 0$ para $t < 0$;
  - Na prática, o termo z^{-k} indica a posição no tempo ($k = t/T$) no qual o sinal possui amplitude $x(kT)$.

1. Transformada Z

- **1.2. Transformada Z:**
  - Alternativamente, a **transformada Z bilateral** é dada por

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[x(t)](z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}} \quad (2)$$

  - Neste caso, a transformada Z é válida para $-\infty \leq t < \infty$ e $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1. Transformada Z

- **1.3. Convergência:**
  - Na maioria das aplicações em engenharia, a transformada Z unilateral possui uma região no plano complexo na qual a série infinita $X(z)$ converge;
  - Por exemplo, seja um sinal do tipo degrau com amplitude A,

$$\boxed{x(t) = Au(t)}$$

- A transformada Z é

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)z^{-k} = A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{k}}$$

1. Transformada Z

- **1.3. Convergência:**
  - Recapitulando uma série geométrica infinita,

$$\boxed{1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}}$$

$$\boxed{\text{RC: } |a| < 1}$$

  - A série $X(z)$ possui uma região de convergência (RC) definida pelo exterior de um círculo de raio unitário no plano z (z é uma variável complexa)

$$\boxed{X(z) = A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = A\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$$\boxed{\text{RC: } |z| > 1 = R}$$

  - O raio R define a **região de convergência absoluta** de uma série infinita em z^{-1}.

1. Transformada Z

- **1.4. Transformada Z de funções elementares:**
  - **Degrau unitário:**

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{3}$$

  - **Rampa unitária:**

$$x(t) = \begin{cases} t = kT, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{4}$$

  - **Impulso:**

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad X(z) = 1 \tag{5}$$

$$x(t) = \delta(n-k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \qquad X(z) = z^{-k} \tag{6}$$

1. Transformada Z

- **1.4. Transformada Z de funções elementares:**
  - **Exponencial:**

$$\boxed{x(t) = e^{-at}} \qquad \boxed{X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}} \tag{7}$$

  - **Seno:**

$$\boxed{x(t) = \sin \omega T} \qquad \boxed{X(z) = \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}} \tag{8}$$

1. Transformada Z

- **1.5. Propriedades da transformada Z:**

$ax(t)$	$aX(z)$	(Escala)
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	(Linearidade)
$x(t - kT)$	$z^{-k}X(z)$	(Deslocamento temporal)
$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$	
$tx(t)$	$-Tz\frac{d}{dz}X(z)$	
$kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	

1. Transformada Z

- **1.5. Propriedades da transformada Z:**
  - **Convolução:**
    - Seja $X(z) = \mathcal{Z}[x(t = kT)]$ e $Y(z) = \mathcal{Z}[y(t = kT)]$

$$\boxed{X(z)Y(z) = \sum_{k=0}^{n} x(kT)y(nT - kT)} \qquad (9)$$

    - Note que a expressão acima é a representação da integral de convolução na forma de um somatório;
    - Portanto, $\mathcal{Z}[x(t)y(t)] \neq X(z)Y(z)$.

1. Transformada Z

- **1.5. Propriedades da transformada Z:**
  - **Teorema do valor inicial:**

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)} \tag{10}$$

    - Válido se o limite existir;

  - **Teorema do valor final:**

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1}[(1 - z^{-1})X(z)]} \tag{11}$$

    - Válido se todos os polos de $X(z)$ estiverem dentro do círculo de raio unitário.

2. Transformada Z inversa

- **2.1. Transformada Z inversa:**
  - A transformada Z inversa é definida por

$$\boxed{x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz} \qquad (12)$$

- Onde C é um contorno fechado que inclui a origem do plano complexo e está dentro da região de convergência de $X(z)$;
- A solução de (12) pode ser obtida pelo teorema dos resíduos ou pela fatoração de $X(z)$ em termos das variáveis z e z^{-1}.

2. Transformada Z inversa

- **2.2. Método de fatoração:**
  - A transformada Z pode ser descrita em termos de polos e zeros,

$$\boxed{X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{b_0 (z - z_1) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1) \cdots (z - p_n)}} \qquad (13)$$

    - Onde $n > m$, e z_m e p_n são os zeros e polos de $X(z)$;
  - Assim, $X(z)$ pode ser descrito como uma fatoração da forma

$$\boxed{X(z) = b_0 Z_1(z) \cdots Z_m(z) P_1(z) \cdots P_n(z)}$$

    - Logo, $x(k)$ pode ser calculado com o teorema de convolução.

2. Transformada Z inversa

- **2.3. Método da divisão:**
  - Expansão da transformada Z em uma série geométrica

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots x(k)z^{-k} + \cdots} \qquad (14)$$

    - Onde $n > m$, e z_m e p_n são os zeros e polos de $X(z)$;
  - Uma transformada Z pode ser reescrita na forma (14) fazendo a divisão de polinômios $X(z) = B(z)/A(z)$. Assim, conhecendo os coeficientes $x(0), x(1)$, ... é possível reconstruir o sinal discreto $x(k)$.

2. Transformada Z inversa

- **2.4. Método da integral:**
  - A solução da integral da transformada Z inversa pode ser resolvida através do teorema dos resíduos:

$$\boxed{x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)](k) = \sum_i K_i} \tag{15}$$

  - Onde o resíduo K_i é dado por

$$\boxed{K_i = \lim_{z \to z_i} (z - z_i) X(z) z^{k-1}} \tag{16}$$

    – z_i é o i-ésimo polo de $X(z)$.

3. Solução de equações a diferenças

- **3.1. Equações a diferenças:**
  - Seja uma equação a diferenças

$$\boxed{x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1)}$$

  - Aplicando a transformada Z:

$$\boxed{X(z)[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}] = U(z)[b_0 + b_1 z^{-1}]}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

  - Conhecendo a TF $G(z)$, é possível obter a resposta do sistema discreto $X(z)$ ou $x(k)$ a um sinal de excitação $u(k)$ ou $U(z)$.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Qual é a utilidade da transformada Z? Quais são as semelhanças e diferenças (qualitativas) entre a transformada Z e a transformada de Laplace?
  - 2) Calcule a transformada Z das funções apresentadas na seção 1.4.
    - Dica: consulte um material de apoio para verificar a sua resposta;
  - 3) A equação a diferenças $a_1 y(n-1) + a_0 y(n) = u(n)$ é a forma discretizada da EDO $a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)$? Justifique a sua resposta.

Referências

- **Referências:**

  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995.
  - A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, Signals and Systems, Pearson, 1996.
  - J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1996.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 18.1)** Seja o sinal discreto abaixo, onde $u(k)$ é uma função degrau unitário e k é um número inteiro.

$$\boxed{x(k) = \alpha^k u(k)}$$

  - a) Verifique a forma de onda de $x(k)$ para $\alpha = 0.5$, 1, e 2;
  - b) Calcule a transformada Z de $x(k)$ e determine a região de convergência;
  - c) Calcule a transformada Z inversa de $X(z)$.

Exercícios

- **Ex. 18.1)**
  - Forma de onda de $x(k)$:

$$\boxed{x(k) = \alpha^k u(k) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots}$$

  - Para $\alpha = 0.5$:

$$\boxed{x(k) = 1 + 0.5 + 0.25 + \cdots}$$

  - Para $\alpha = 1$:

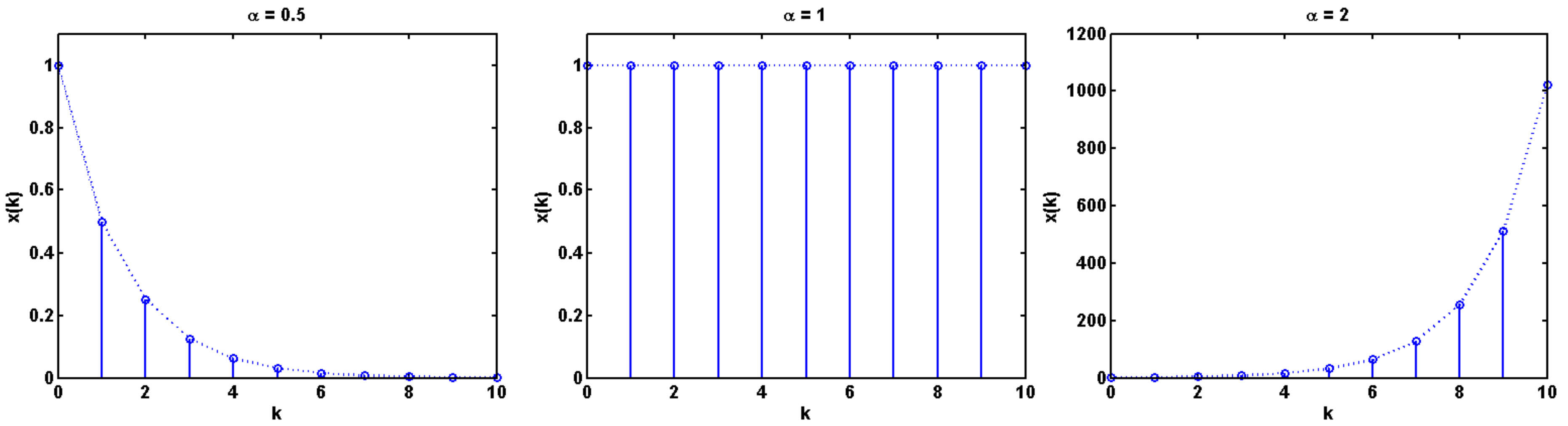
$$\boxed{x(k) = 1 + 1 + 1 + \cdots}$$

  - Para $\alpha = 2$:

$$\boxed{x(k) = 1 + 2 + 4 + \cdots}$$

Exercícios

- **Ex. 18.1)**
  - Forma de onda de $x(k)$:



Série converge

Série diverge

Exercícios

- **Ex. 18.1)**
  - Transformada Z de $x(k)$:

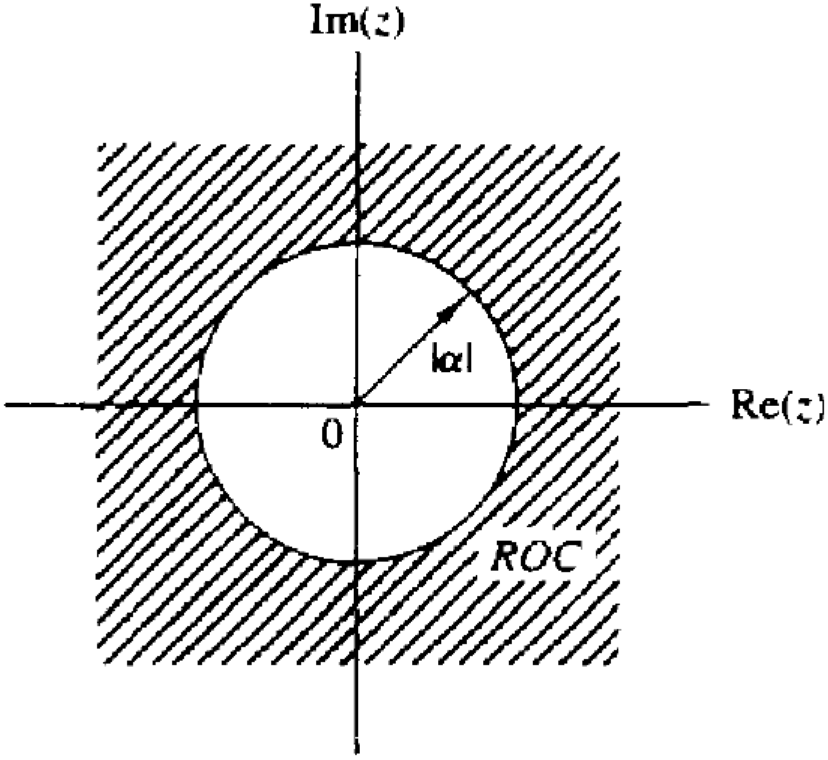
$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{z}}}$$

  - Neste caso, a transformada Z inversa é trivial: basta comparar a resposta com uma série geométrica infinita.

Exercícios

- **Ex. 18.1)**
  - Transformada Z de $x(k)$:
    - Região de convergência:

$$\boxed{\left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|}$$



Exercícios

- **Ex. 18.2)** Calcule a resposta ao degrau unitário para o sistema abaixo, expresso por uma equação a diferenças. Assuma valores iniciais nulos para $y(k)$.

$$\boxed{0.81y(k-2) - 0.9y(k-1) + y(k) = u(k)}$$

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Transformada Z:

$$\boxed{0.81y(k-2) - 0.9y(k-1) + y(k) = u(k)}$$

$$\boxed{Y(z)[0.81z^{-2} - 0.9z^{-1} + 1] = U(z)}$$

  - Função de transferência:

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{0.81z^{-2} - 0.9z^{-1} + 1}}$$

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Função de transferência:
    - Fatoração (utilize a função `roots` do MATLAB):

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z^{-1} - 0.56 - 0.96j)(z^{-1} - 0.56 + 0.96j)}}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{(z^{-1} - p_1)(z^{-1} - p_2)}}$$

    - Degrau unitário:

$$\boxed{U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}}$$

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Resposta ao degrau:

$$\boxed{Y(z) = G(z)U(z)}$$

$$\boxed{Y(z) = \left(\frac{1}{z^{-1} - p_1}\right)\left(\frac{1}{z^{-1} - p_2}\right)\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)}$$

  - Dica: utilize a função `residue` para fatorar $Y(z)$.

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Resposta ao degrau:

$$\boxed{Y(z) = \frac{0.45 - 0.21j}{z^{-1} - 0.56 - 0.96j} + \frac{0.45 + 0.21j}{z^{-1} - 0.56 + 0.96j} - \frac{0.90}{z^{-1} - 1}}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{-0.04 + 0.44j}{1 - (0.45 - 0.78j)z^{-1}} + \frac{-0.04 - 0.44j}{1 - (0.45 + 0.78j)z^{-1}} + \frac{0.90}{1 - z^{-1}}}$$

  - Portanto,

$$\boxed{y(k) = \left[(-0.04 + 0.44j)(0.9)^k e^{-j1.05k} + (-0.04 - 0.44j)(0.9)^k e^{j1.05k} + 0.9\right]u(k)}$$

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Resposta ao degrau:
    - Rearranjando os termos,

$$\boxed{y(k) = [0.88(0.9)^k \cos(1.66 - 1.05k) + 0.9]u(k)}$$

    - Obs: solução do livro (Proakis e Manolakis, 1996)

$$y_{zs}(n) = \left[1.099 + 1.088(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5.2^\circ\right)\right]u(n)$$

Exercícios

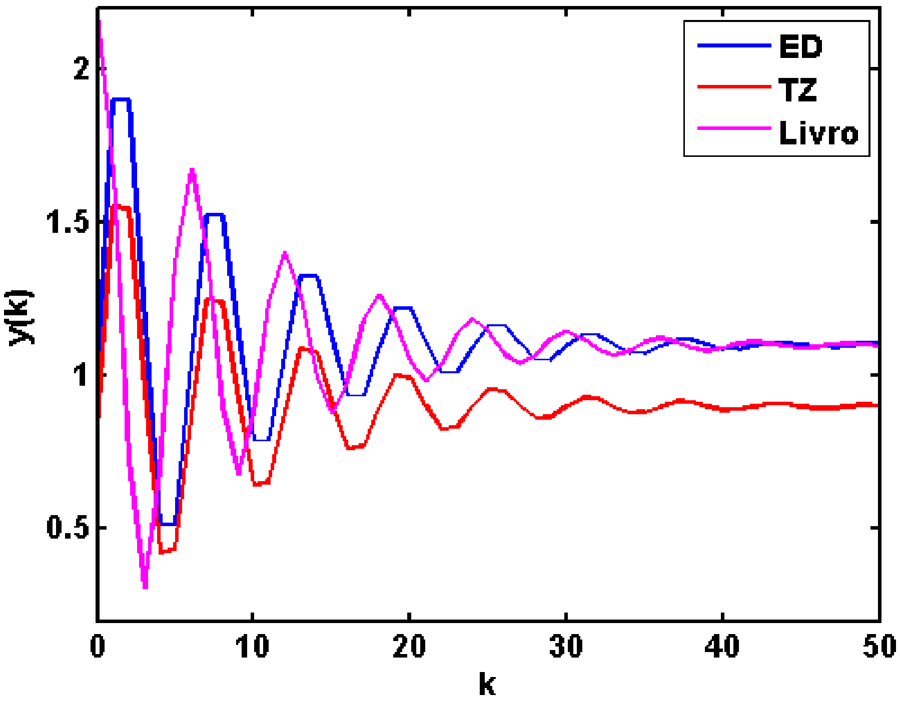
- **Ex. 18.2)**
  - Método 2: note que

$$\boxed{y(k) = -0.81y(n-2) + 0.9y(n-1) + u(k)}$$

  - Como as condições iniciais são nulas, $y(-2) = y(-1) = 0$, então basta implementar a equação acima no MATLAB.

Exercícios

- **Ex. 18.2)**
  - Comparação entre os resultados:
    - ED: solução direta pela equação à diferenças;
    - TZ: solução calculada pela transformada Z inversa → corrigir o termo DC para 1.1!
    - Livro: referência.



Exercícios

- **Ex. 18.3)** Calcule a resposta ao degrau unitário para o sistema abaixo, expresso por uma equação a diferenças. Assuma valores iniciais nulos para $y(k)$.

$$\boxed{0.5y(k-1) + y(k) = u(k)}$$

Exercícios

- **Ex. 18.3)**
  - Função de transferência:

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z + 0.5}}$$

  - Resposta ao degrau:

$$\boxed{Y(z) = G(z)U(z) = \left(\frac{z}{z + 0.5}\right)\left(\frac{z}{z - 1}\right)}$$

    - Pelo teorema dos resíduos:

$$\boxed{y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{1.5}\left[1 - (-0.5)^{k+1}\right]}$$

Exercícios

- **Ex. 18.3)**
  - Resposta ao degrau: solução direta vs transformada Z inversa: