ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

13 – Resposta em frequência

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Resposta em frequência;
  - 2) Diagrama de Bode;
  - 3) Identificação de sistemas;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Resposta em frequência

- **1.1. Excitação senoidal:**
  - Seja uma planta $G(s)$ com entrada $U(s)$ e saída $Y(s)$;
  - Suponha um **sinal de excitação periódico simples**,

$$\boxed{u(t) = A\sin\omega t} \tag{1}$$

  - A transformada de Laplace deste sinal é

$$\boxed{U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}} \tag{2}$$

  - Obs: sinais periódicos simples ou complexos podem ser expandidos em uma série de Fourier.

1. Resposta em frequência

- **1.1. Excitação senoidal:**
  - A resposta do sistema é dada pela transformada de Laplace inversa de

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}} \tag{3}$$

  - Contudo, uma vez que o regime estacionário é atingido, a resposta do sistema pode ser simplesmente calculada fazendo $s = j\omega$:

$$\boxed{G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega)} \tag{4}$$

    - A saída é um sinal periódico, portanto $G(j\omega)$ é um número complexo.

1. Resposta em frequência

- **1.1. Excitação senoidal:**
  - Dada uma entrada $u(t)$ periódica, um sistema LTI $G(s)$ promove dois efeitos no sinal de saída $y(t)$: variação de magnitude e defasagem;
  - A **magnitude** é dada por:

$$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|}} \tag{5}$$

  - A **diferença de fase** é

$$\boxed{\phi = \angle G(j\omega) = \angle Y(j\omega) - \angle U(j\omega)} \tag{6}$$

1. Resposta em frequência

- **1.1. Excitação senoidal:**
  - Nota-se que a variação de magnitude e fase depende da **frequência** ω do sinal de excitação;
    - ω é um parâmetro da entrada, e não do sistema!
    - Como analogia, pense em um filtro ou AMPOP;
  - É possível representar a **resposta em frequência** de um sistema $G(j\omega)$ em termos dos seus gráficos de magnitude $|G(j\omega)|$ e fase $\phi(j\omega)$ → **Diagrama de Bode**.

1. Resposta em frequência

- **1.2. Sistema de primeira ordem:**
  - Resposta em frequência do **sistema de primeira ordem**:

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1}} \tag{7}$$

  - Magnitude (normalizada):

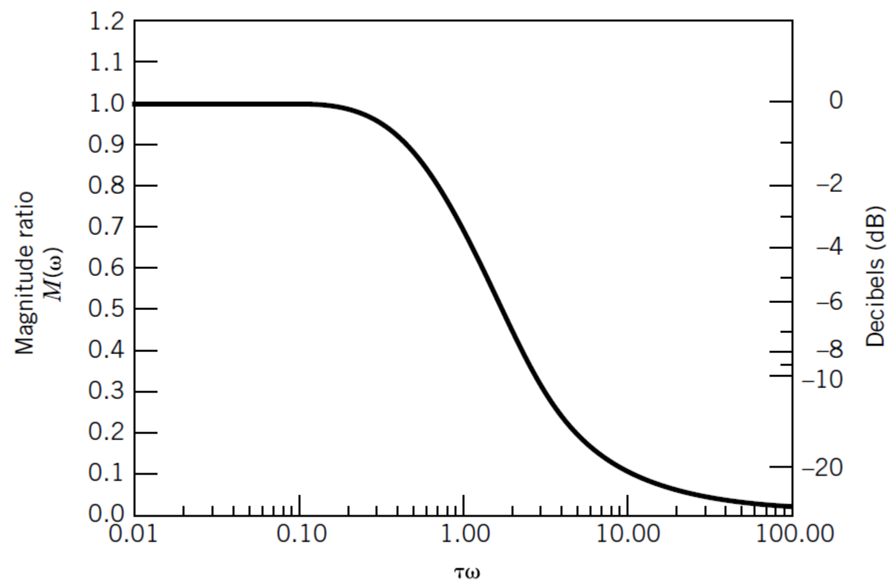
$$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}} \tag{8}$$

  - Fase:

$$\boxed{\phi(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)} \tag{9}$$

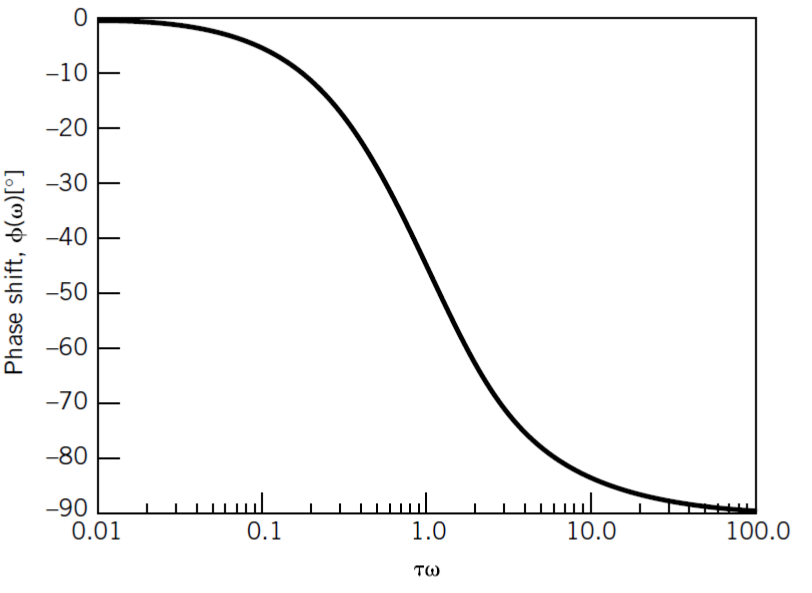
1. Resposta em frequência

- **1.2. Sistema de primeira ordem:**
  - **Diagrama de Bode: magnitude**
    - Em baixas frequências, a saída não é atenuada em relação à entrada;
    - Em altas frequências, a saída tende a ser atenuada, como em um filtro passa-baixa;
    - A frequência de corte depende das características do sistema.



1. Resposta em frequência

- **1.2. Sistema de primeira ordem:**
  - **Diagrama de Bode: fase**
    - Em baixas frequências, a saída está em fase com a entrada;
    - Aumentado a frequência, a saída começa a ser defasada em relação à entrada;
    - A defasagem máxima é de –90°;
    - Em $\omega = 1/\tau$, a defasagem é de –45°.



1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - Resposta em frequência do **sistema de segunda ordem**:

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + {\omega_n}^2}} \tag{10}$$

  - Magnitude (normalizada):

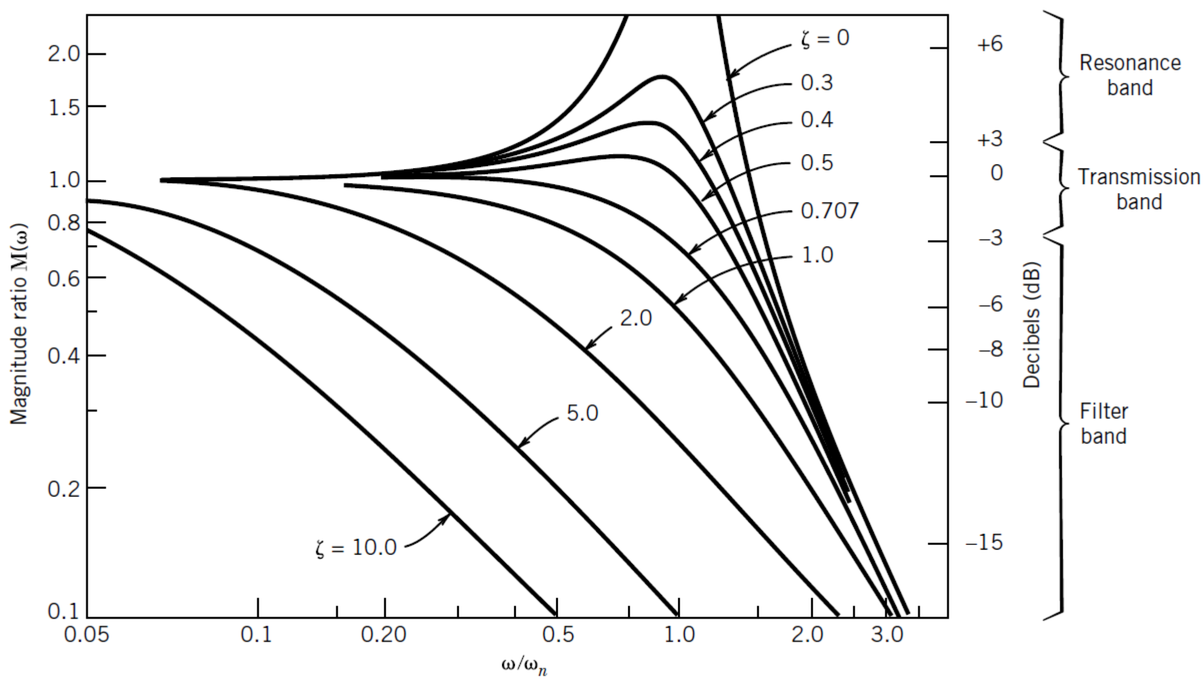
$$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi\,\omega/\omega_n]^2}}} \tag{11}$$

  - Fase:

$$\boxed{\phi(j\omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]} \tag{12}$$

1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - **Diagrama de Bode: magnitude**



1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - **Diagrama de Bode: magnitude**
    - A saída é atenuada com o aumento da frequência;
    - Em sistemas sub-amortecidos com $\xi < 0.707$, é observada uma banda de ressonância que faz a magnitude da saída ser maior do que a entrada, $|G(j\omega)| > 1$;
    - Sistemas com $\xi \geq 0.707$ não apresentam ressonância;
    - A **frequência de ressonância** é aproximada por

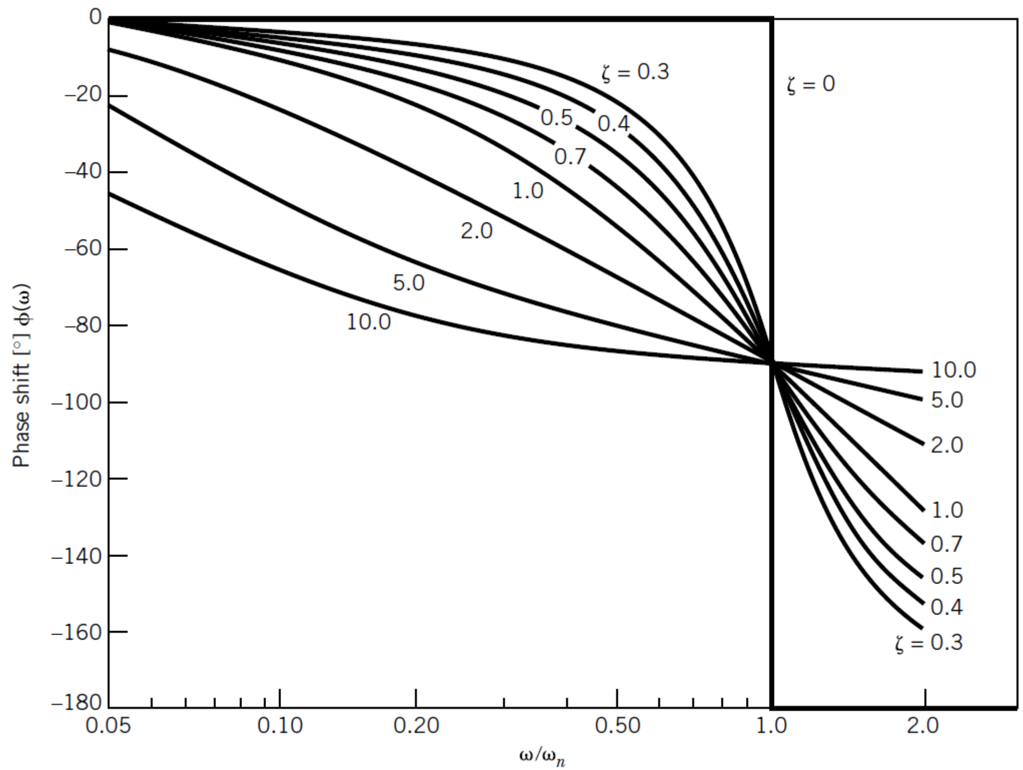
$$\boxed{\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}} \tag{12}$$

1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - **Diagrama de Bode: magnitude**
    - A **frequência de corte** ω_c é a frequência na qual a magnitude é reduzida –3 dB em relação ao valor inicial;
    - A **largura de banda** de um sistema é definida como a faixa de frequências $0 \leq \omega \leq \omega_c$ na qual a saída consegue seguir o sinal de entrada de forma satisfatória em magnitude e fase;
    - Para um sistema de segunda ordem, a **banda de transmissão** é geralmente definida como a faixa de frequências onde a magnitude assume valor $+3 \geq M(\omega) \geq -3$ dB;
    - Abaixo de –3 dB, a atenuação do sinal de saída é considerável e o sistema opera na **banda de filtragem**.

1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - **Diagrama de Bode: fase**



1. Resposta em frequência

- **1.3. Sistema de segunda ordem:**
  - **Diagrama de Bode: fase**
    - A saída tende a ser defasada com o aumento da frequência;
    - No caso crítico de ressonância ($\xi = 0$), ocorre uma inversão abrupta de fase quando a frequência da entrada é igual à frequência natural do sistema;
    - A defasagem máxima é de $-180°$;
    - Em $\omega = \omega_n$, a defasagem é de $-90°$.

2. Diagrama de Bode

- **2.1. Efeito do ganho:**
  - Como o plot de magnitude é apresentado em escala logarítmica, um ganho linear K resulta em uma variação de $20\log_{10} K$ no diagrama de Bode;
    - Uma variação de 50% na magnitude do sinal implica em uma queda de $20\log_{10} 0.5 = -6.02\ \mathrm{dB}$;
    - Note que $20\log_{10}(1/K) = -20\log_{10} K$;

    - **Obs:** Por convenção, utiliza-se $20\log_{10} K$ (magnitude) ao invés de $10\log_{10} K$ (potência).

2. Diagrama de Bode

- **2.2. Fator integral:**
  - A magnitude de um integrador $1/s$ é:

$$\boxed{M = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20\log\frac{1}{\omega} = -20\log\omega} \tag{13}$$

  - A defasagem é:

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1/\omega}{0}\right) = -90°} \tag{14}$$

  - Como a frequência é expressa em escala log, o integrador causa uma queda linear com ganho –20 dB em magnitude e defasagem constante de –90°.

2. Diagrama de Bode

- **2.3. Fator derivativo:**
  - A magnitude de um derivador s é:

$$\boxed{M = 20\log|j\omega| = 20\log\omega} \tag{15}$$

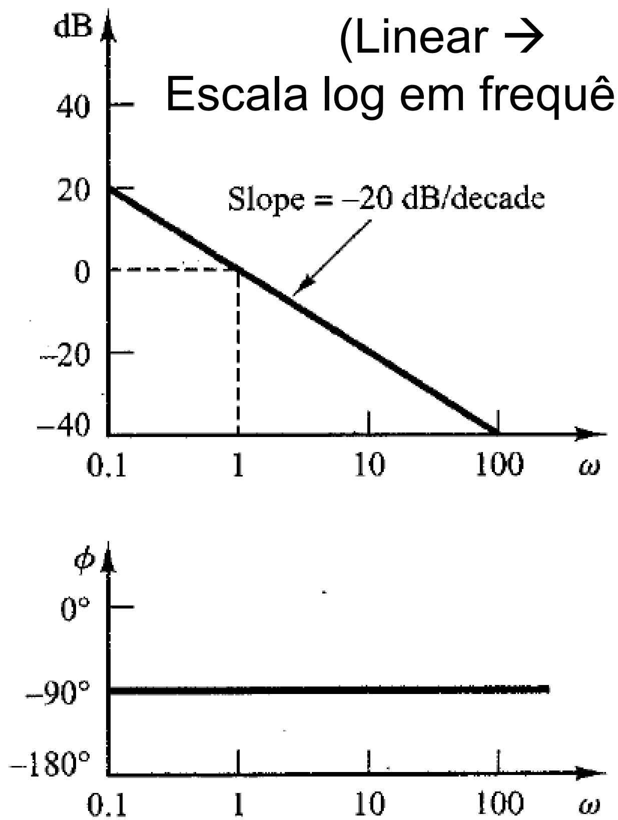
  - A defasagem é:

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}(j\omega) = \tan^{-1}(\omega/0) = +90^\circ} \tag{16}$$

  - Como a frequência é expressa em escala log, o derivador causa uma amplificação linear com ganho +20 dB em magnitude e defasagem constante de +90°.

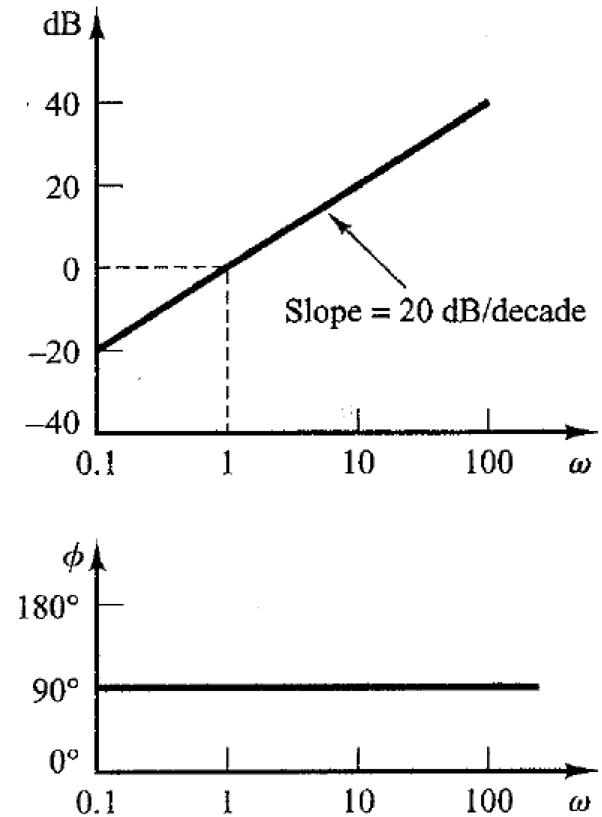
2. Diagrama de Bode

(Linear → Escala log em frequência)



Bode diagram of
$G(j\omega) = 1/j\omega$

Integrador



Bode diagram of
$G(j\omega) = j\omega$

Derivador

2. Diagrama de Bode

- **2.4. Fator de primeira ordem:**
  - Conforme visto anteriormente, uma planta de primeira ordem causa atenuação proporcional à frequência e defasagem máxima de –90°;
  - A frequência de cruzamento das assíntotas em magnitude é $\omega = 1/\tau$;
    - Magnitude:

$$\boxed{M(\omega = 1/\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + (1)^2}} = 0.707 = -3.01\ \mathrm{dB}} \tag{17}$$

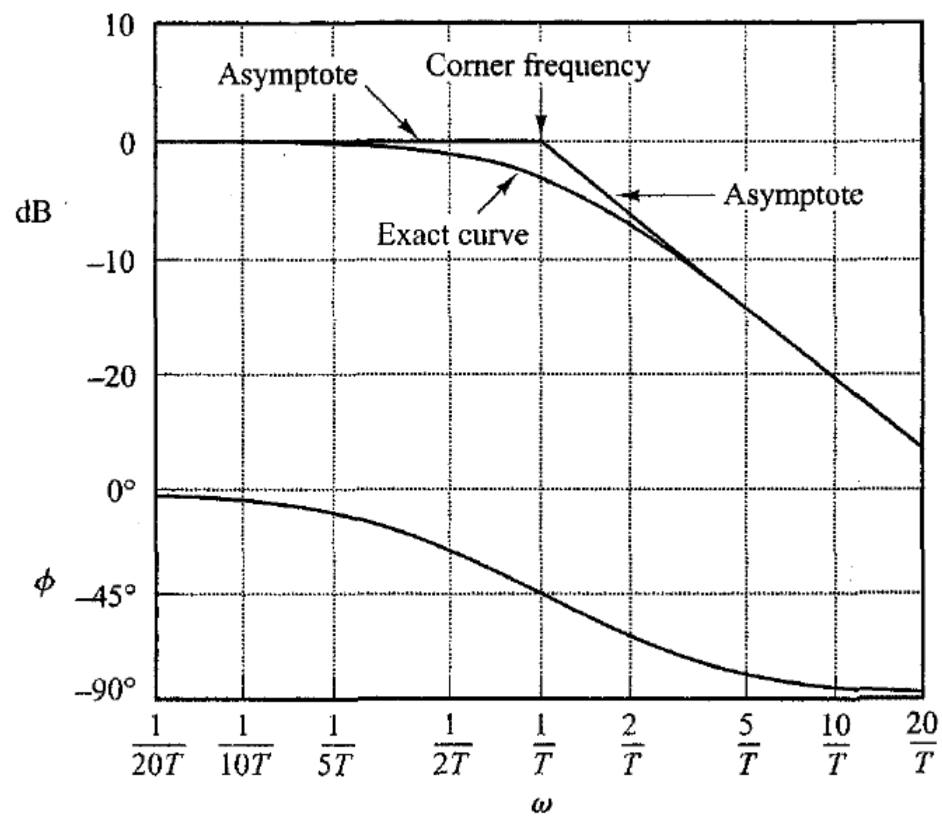
    - Fase:

$$\boxed{\phi(\omega = 1/\tau) = -\tan^{-1}(1) = -45°} \tag{18}$$

2. Diagrama de Bode

- **2.4. Fator de primeira ordem:**
  - Diagrama de Bode:

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}}$$



2. Diagrama de Bode

- **2.4. Fator de segunda ordem:**
  - A planta de segunda ordem causa atenuação proporcional à frequência que depende do fator de amortecimento, além de defasagem máxima de −180°;
  - As assíntotas ocorrem próximo à frequência de ressonância ($\omega_R \approx \omega_n$ para ξ pequeno);
    - Magnitude:

$$\boxed{M(\omega = \omega_n) = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega_n/\omega_n)^2]^2 + [2\xi\,\omega_n/\omega_n]^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\xi}}} \qquad (19)$$

    - Fase:

$$\boxed{\phi(\omega = \omega_n) = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\,\omega_n/\omega_n}{1-(\omega_n/\omega_n)^2}\right] = -90°} \qquad (20)$$

2. Diagrama de Bode

- **2.5. Sistemas acoplados:**
  - Sejam duas TF acopladas (convolução):

$$\boxed{G(\omega) = A(\omega)B(\omega)}$$

  - Magnitude e fase:

$$\boxed{|G(\omega)| = |A(\omega)B(\omega)| = |A(\omega)||B(\omega)|} \qquad (21)$$

$$\boxed{20\log|G(\omega)| = 20\log|A(\omega)B(\omega)| = 20\log|A(\omega)| + 20\log|B(\omega)|}$$

$$\boxed{\angle G(\omega) = \angle A(\omega)B(\omega) = \angle A(\omega) + \angle B(\omega)} \qquad (22)$$

  - Assim, o diagrama de Bode de $G(\omega)$ pode ser expresso como uma composição dos diagramas de bode de $A(\omega)$ e $B(\omega)$.

2. Diagrama de Bode

- **2.6. Erro estacionário de posição:**
  - Considere um sistema de ordem N com TF em malha aberta da forma

$$\boxed{G(s) = \frac{K(T_a s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)\cdots\left(T_p s + 1\right)}} \tag{23}$$

  - Em um **sistema do tipo 0** (sem polos na origem), a **constante de erro de posição** é

$$\boxed{K_p = \lim_{\omega\to 0} G(\omega) = K} \tag{24}$$

    - A assíntota a baixas frequências em magnitude $|G(\omega)|$ é uma linha horizontal em $20\log K_p$ → Determinação do erro estacionário em malha fechada a partir do diagrama de Bode em malha aberta.

2. Diagrama de Bode

- **2.6. Erro estacionário de velocidade:**
  - Em um **sistema do tipo 1** (polo simples na origem), a **constante de erro de velocidade** é

$$\boxed{K_v = \lim_{\omega \to 0} j\omega G(\omega) = K} \qquad (25)$$

  - Em baixas frequências ($\omega \ll 1$), (23) pode ser simplificada a

$$\boxed{G(\omega) = \frac{K_v}{j\omega}} \qquad \boxed{|G(\omega)| = \frac{K_v}{\omega}}$$

    - Para $\omega = 1$, $|G(\omega)| = K_v = 20 \log K_v$ → Determinar o erro estacionário de velocidade em malha fechada a partir do diagrama de Bode em malha aberta.

3. Identificação de sistemas

- **3.1. Sistemas de primeira ordem:**
  - Redução da magnitude com uma assíntota em $\omega = 1/\tau$;
  - Queda de –3 dB em magnitude e defasagem de –45° em $\omega = 1/\tau$;
  - Fase inicial de 0, defasagem máxima de –90°;
  - Pelo cruzamento de fase em –45°, é possível obter τ.

3. Identificação de sistemas

- **3.2. Sistemas de segunda ordem:**
  - Redução da magnitude com aumento da frequência;
  - Ressonância em $\omega = \omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$ para $\xi < 0.707$;
  - Defasagem de –90° em $\omega \approx \omega_n$;
  - Fase inicial de 0, defasagem máxima de –180°;

  - Obter ω_n pelo cruzamento de fase em –90°;
  - Calcular ξ pela frequência de ressonância ou pelo valor de magnitude a uma frequência conhecida (11).

3. Identificação de sistemas

- **3.3. Polos:**
  - Polos simples $1/(s+p)$ causam redução de magnitude e defasagem máxima de –90° (Ex: integrador e planta de primeira ordem);
  - O cruzamento de fase em –45° ocorre em $\omega = p$;
  - A atenuação em $\omega = p$ é $-20\log\sqrt{2}p$.

3. Identificação de sistemas

- **3.4. Zeros:**
  - Zeros simples $(s + z)$ causam aumento de magnitude e defasagem máxima de +90° (Ex: derivador);
  - Quando $\omega = z$, a defasagem é de $\phi = \tan^{-1}(1) = +45°$;
  - A amplificação em $\omega = z$ é $+20\log\sqrt{2}z$.

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Por que a resposta de um sistema varia com a frequência do sinal de entrada? Dê exemplos de sistemas reais onde isto ocorre;
  - 2) Explique o diagrama de Bode. Como você faria para levantar os diagramas de magnitude e fase **experimentalmente?**
  - 3) Verifique e discuta o efeito dos polos e zeros da planta nos diagramas de magnitude e fase.

Referências

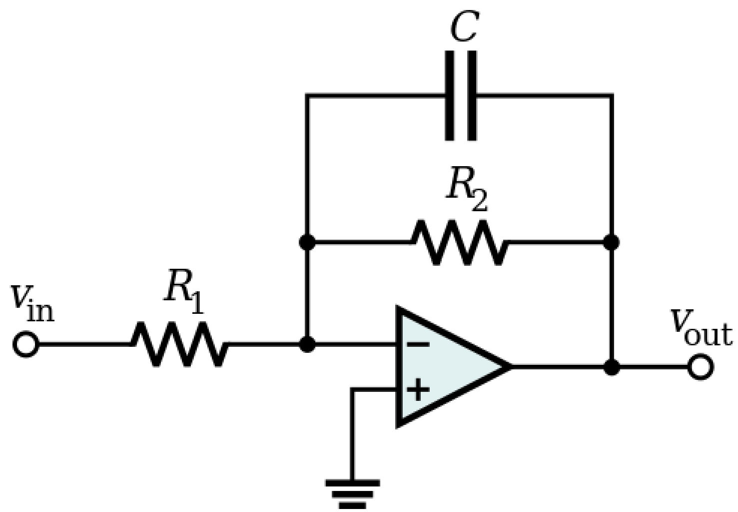
- **Referências:**

  - R. S. Figliola, D. E. Beasley, Theory and Deisign for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. F. Franklin *et al.*, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2002.
  - K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2002.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 13.1)** Filtro passa-baixas (assuma ganho sem inversão):
  - a) Determine a função de transferência e analise o diagrama de Bode do filtro $G_1(s)$, onde $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$ e $C = 100$ μF;
  - b) Obtenha a resposta do sistema a uma entrada $u(t) = 50 \sin(2\pi 10 t) + 100 \sin(2\pi 100 t)$;
  - c) Acople um segundo estágio $G_2(s)$ na saída do primeiro filtro e obtenha a função de transferência e o diagrama de Bode. Utilize $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$ e $C = 1$ μF.



Exercícios

- **Ex. 13.1)**
  - Função de transferência (sem inversão):

$$\boxed{G(s) = \frac{R_2/R_1}{1 + sR_2C}}$$

  - Frequência de corte: magnitude atinge –3 dB

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{R_2C}}$$

  - Note que o filtro passa-baixa é uma planta de primeira ordem.

Exercícios

- **Ex. 13.1)**
  - Função de transferência:
    - Filtro 1: $C = 100$ μF;

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{1 + 0.01j\omega}}$$

$$\boxed{\omega_c = 100 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{f_c = 15.92 \text{ Hz}}$$

    - Filtro 2: $C = 1$ μF;

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{1 + 0.0001j\omega}}$$

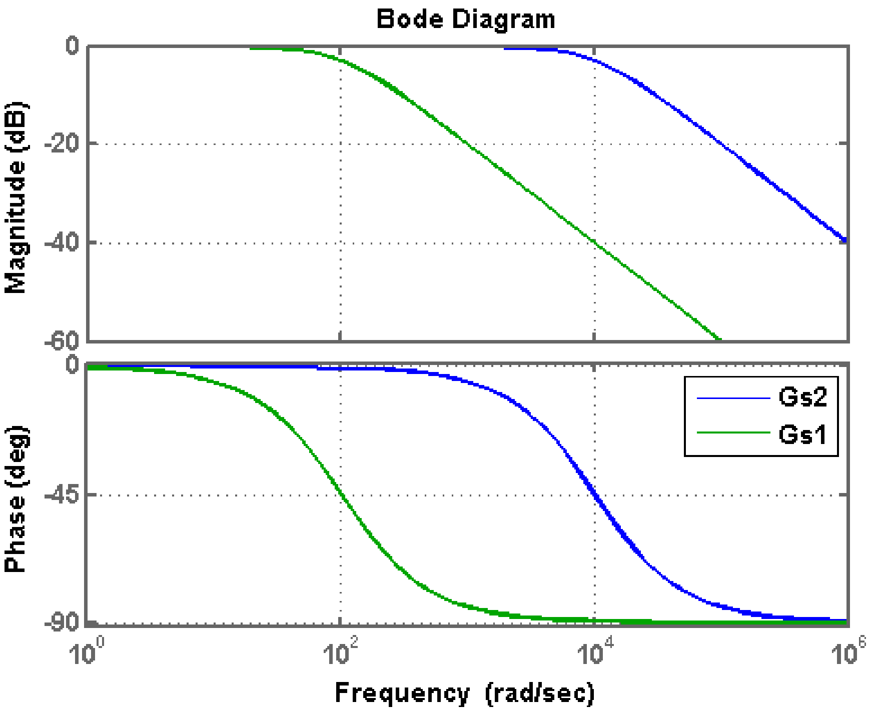
$$\boxed{\omega_c = 10000 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{f_c = 1.59 \text{ kHz}}$$

Exercícios

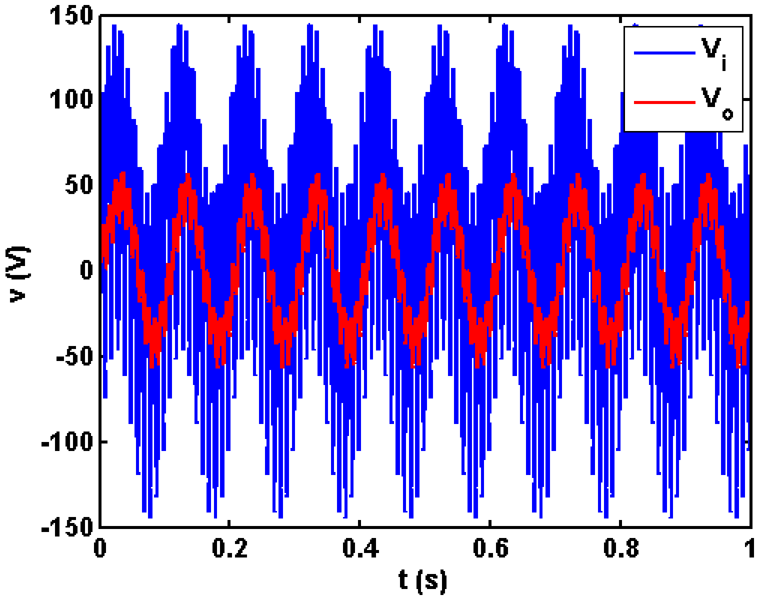
- **Ex. 13.1)**
  - Diagrama de Bode:
    - Frequências de corte de 100 rad/s (G_1) e 10000 rad/s (G_2) → polo simples em ω_c;
    - Fase varia de 0 a –90°;
    - Constante de erro de posição $K_p = 10^0 = 1$, erro em malha fechada de $e_{ss} = 0.5$.

```
bode(Gs)
```

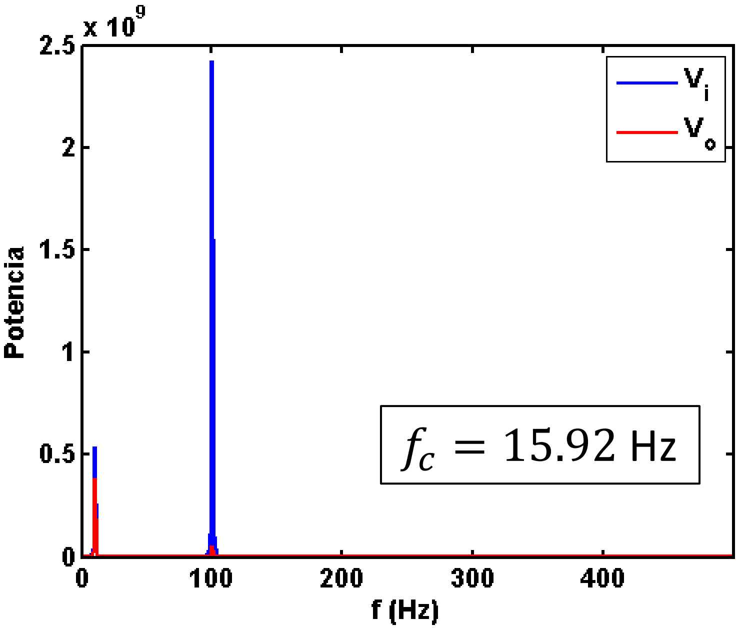


Exercícios

- **Ex. 13.1)**
  - Resposta de $G_1(s)$ a $u(t) = 50\sin(2\pi 10 t) + 100\sin(2\pi 100 t)$;



Resposta no tempo.



Espectro de potência.

Exercícios

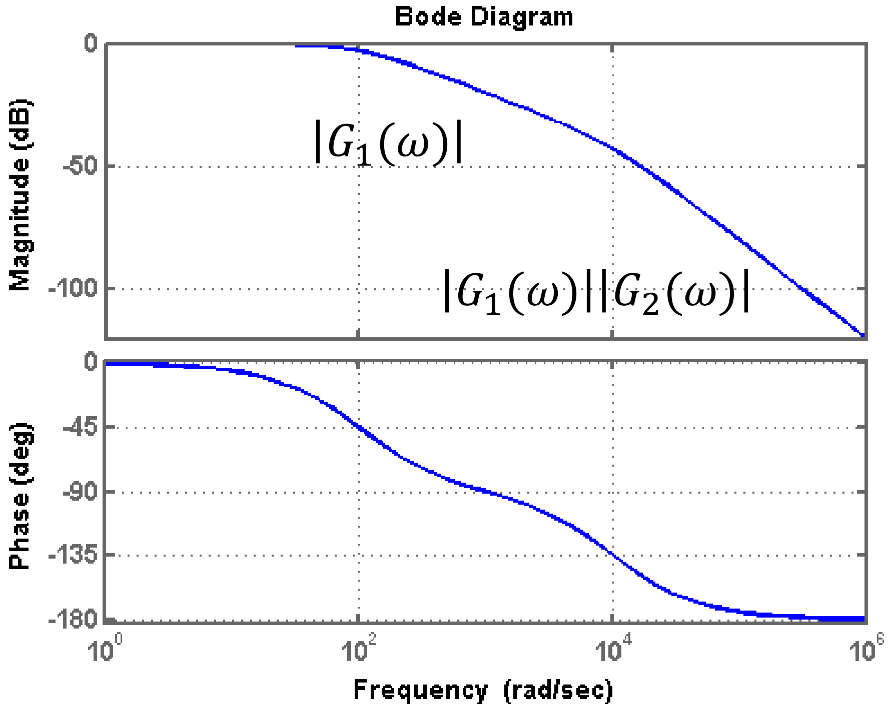
- **Ex. 13.1)**
  - Função de transferência: filtros concatenados

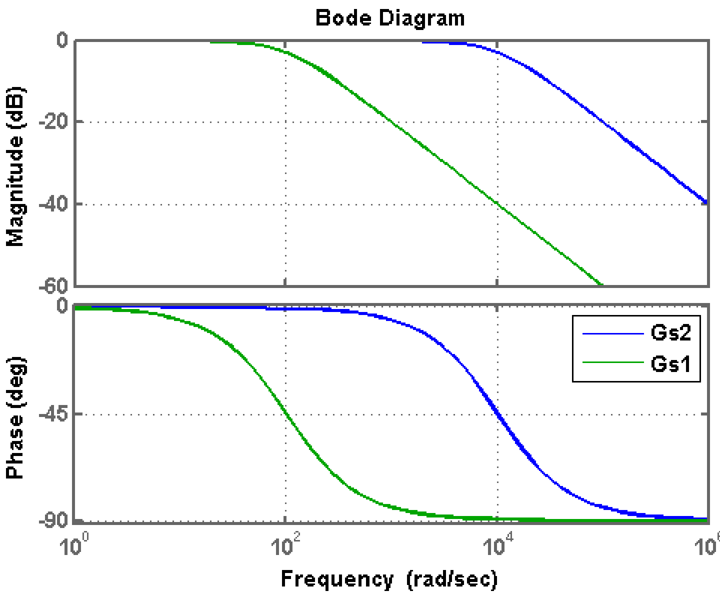
$$\boxed{G(s) = G_2(s)G_1(s) = \frac{1}{10^{-6}s^2 + 0.0101s + 1}}$$

  - Sistema de segunda ordem com polos $s = 10000$ e $s = 100$;
  - Durante a banda de transmissão de $G_2(s)$, a resposta de $G(s)$ é dada majoritariamente por $G_1(s)$ uma vez que a atenuação e a defasagem de $G_2(s)$ são mínimas;
  - Acima da frequência de corte de $G_2(s)$, a defasagem aumenta com a frequência até $\phi = -90° - 90° = -180°$, enquanto que a magnitude é atenuada a um fator $|G(\omega)| = |G_1(\omega)||G_2(\omega)|$ (note a mudança na assíntota).

Exercícios

- **Ex. 13.1)**
  - Diagrama de Bode: filtros concatenados





Exercícios

- **Ex. 13.2)** Seja um sistema do tipo massa-mola-amortecedor com $m = 10$ kg, $k = 5$ N/m e $c = (10,\ 2, 0.1)$ N.s/m. Para cada sistema:
  - a) Obtenha a função de transferência e analise as suas características;
  - b) Plote o diagrama de Bode;
  - c) Mostre a resposta a uma entrada $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ com $\omega_0 = (0.1, 0.707, 10)$ rad/s.

Exercícios

- **Ex. 13.2)**
  - Função de transferência (não-normalizada):

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$

    - Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{k/m} = 0.707$ rad/s;
    - Fator de amortecimento: $\xi = c/2\sqrt{km}$;
    - Ganho: $K = 1/k = 0.2$;
    - Frequência de ressonância: $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$;
    - Polos: $s = -\sigma \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$.

Exercícios

- **Ex. 13.2)**
  - Função de transferência:
    - $c = 10$:

$$\boxed{G_1(s) = \frac{1}{10s^2 + 10s + 5}} \quad \boxed{\xi_1 = 0.707} \quad \boxed{s = -0.2 \pm j0.68} \quad \boxed{\omega_{R1} = \text{NA}}$$

    - $c = 2$:

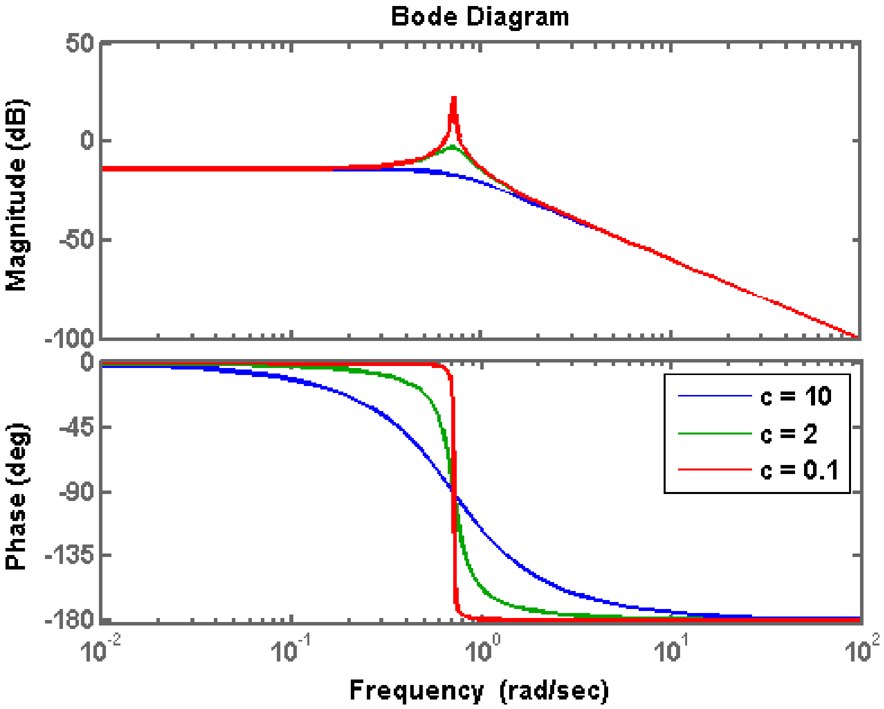
$$\boxed{G_2(s) = \frac{1}{10s^2 + 2s + 5}} \quad \boxed{\xi_2 = 0.141} \quad \boxed{s = -0.1 \pm j0.7} \quad \boxed{\omega_{R2} = 0.69 \text{ rad/s}}$$

    - $c = 0.1$:

$$\boxed{G_3(s) = \frac{1}{10s^2 + 0.1s + 5}} \quad \boxed{\xi_3 = 0.007} \quad \boxed{s = -0.005 \pm j0.7} \quad \boxed{\omega_{R3} = 0.71 \text{ rad/s}}$$

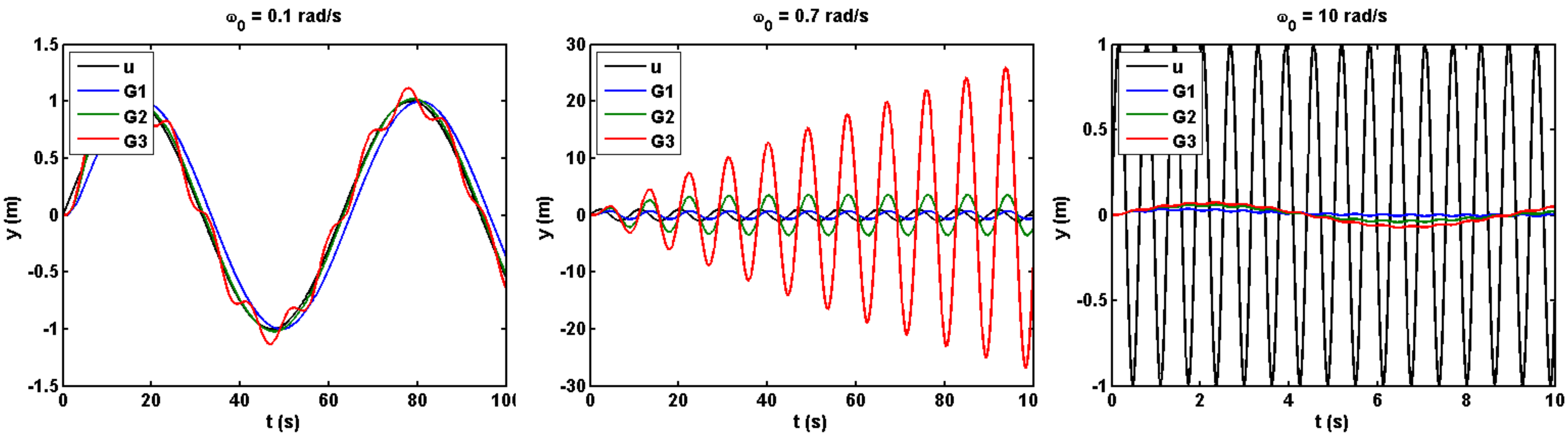
Exercícios

- **Ex. 13.2)**
  - Diagrama de Bode:
    - Magnitude começa em $20 \log 0.2 = -14$ dB;
    - Pico de ressonância e defasagem abrupta em $\omega = \omega_n$;
    - Fase varia de 0 a $-180°$ com transição de $-90°$ na frequência de corte.



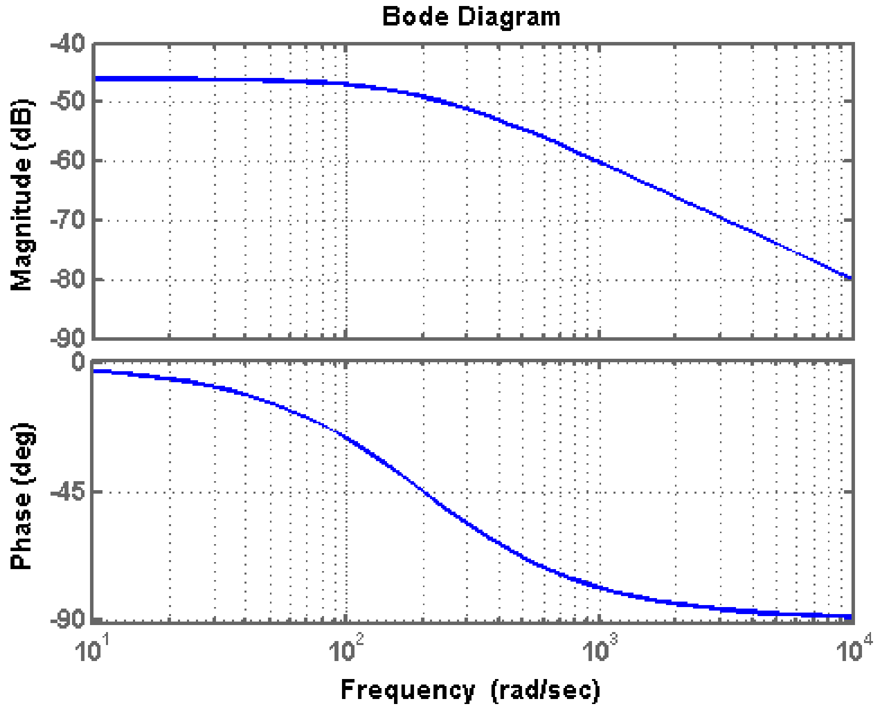
Exercícios

- **Ex. 13.2)**
  - Resposta no tempo (saída normalizada):



Exercícios

- **Ex. 13.3)** Identifique a planta para os diagramas de Bode apresentados a seguir.
  - a)



Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - a)
    - A fase vai de 0 a –90° e a magnitude é atenuada com uma única mudança de assíntota, portanto, o sistema é uma planta de primeira ordem da forma

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}}$$

    - O ganho é calculado para baixas frequências:
      - $20 \log K = -46$ dB → $K = 0.005$;
    - A fase atinge $\phi = -45°$ em $\omega = 200$ rad/s, assim:
      - $\omega T = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{200} = 0.005$

Exercícios

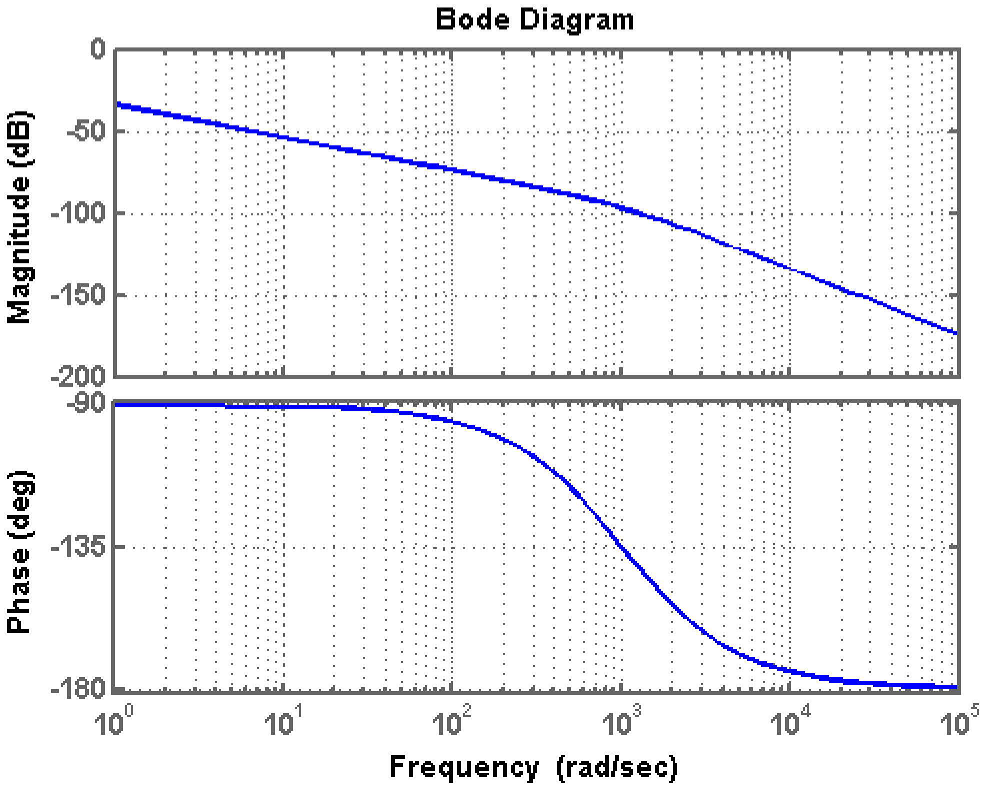
- **Ex. 13.3)**
  - a)
    - A função de transferência do sistema é

$$\boxed{G(s) = \frac{0.005}{1 + j\omega 0.005} = \frac{1}{200 + s}}$$

    - A constante de tempo é $T = 0.005$;
    - O sistema possui um polo em $s = -200$, portanto é estável;
    - A constante de erro estático de posição é $K_p = 0.005$.

Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - b)



Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - b)
    - A fase começa em –90°, portanto o sistema possui um polo na origem;
    - Em seguida, o sistema defasa –90° com o aumento da frequência, indicando uma planta de primeira ordem;
    - A magnitude não começa em zero, indicando um ganho:
      - $20 \log K = -34$ dB → $K = 0.02$;
    - A fase cruza $-90° - 45° = -135°$ em $\omega = 1000$ rad/s:
      - $1000T = 1 \Rightarrow T = 0.001$ s

Exercícios

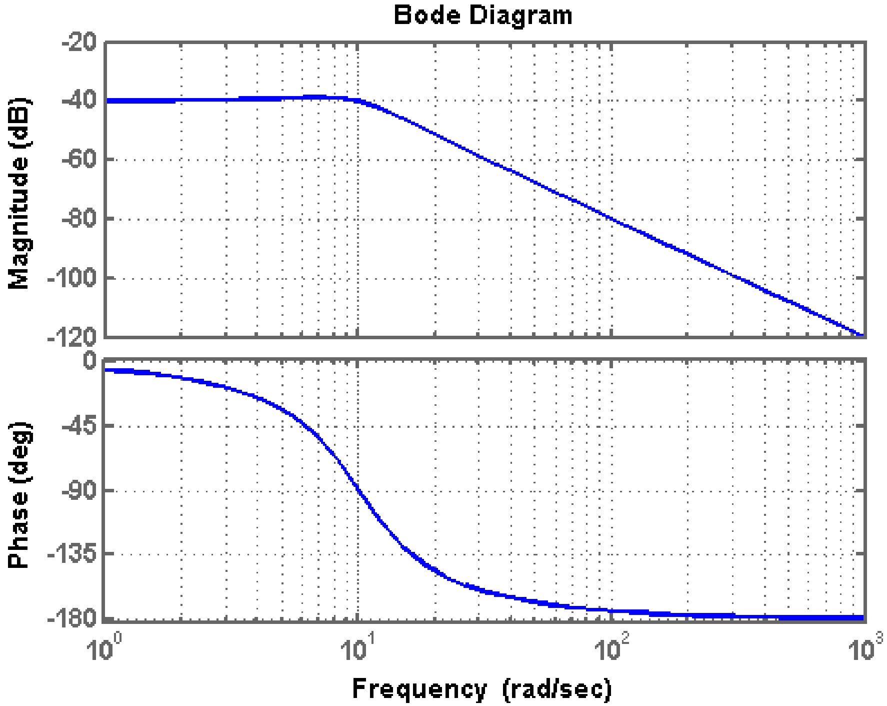
- **Ex. 13.3)**
  - b)
    - Função de transferência:

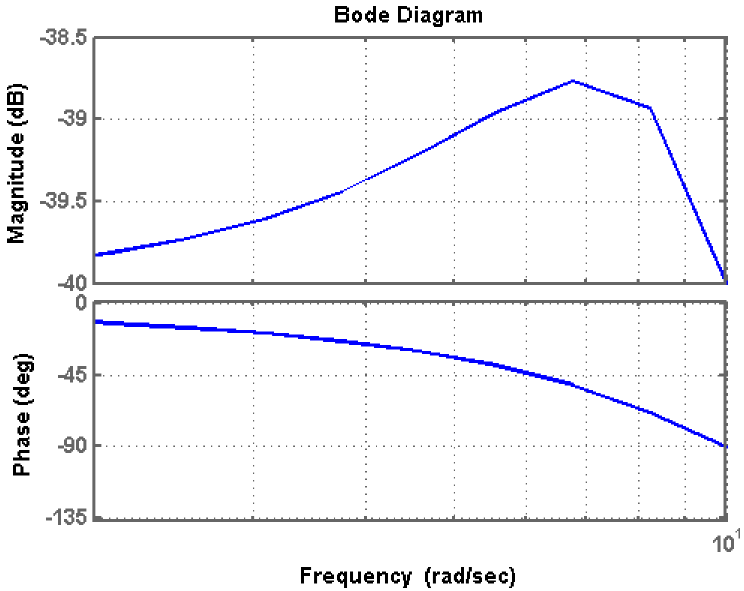
$$\boxed{G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{0.02}{s(0.001s+1)}}$$

    - A planta possui um polo em $s = 0$ e um polo em $s = -1000$;
    - A constante de erro estacionário de velocidade é $K_v = 0.02$.

Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - c)





Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - c)
    - A fase varia de 0 a –180° enquanto que a magnitude decresce com uma única inflexão, portanto o sistema é uma planta de segunda ordem;
    - Ganho em baixas frequências:
      - $20 \log K = -40$ dB → $K = 0.01$;
    - A fase atinge –90° em $\omega = 10$ rad/s:
      - $\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \omega_n = 10$ rad/s;
    - Frequência de ressonância: $\omega_R \cong 7$ rad/s
      - $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \xi = 0.51$

Exercícios

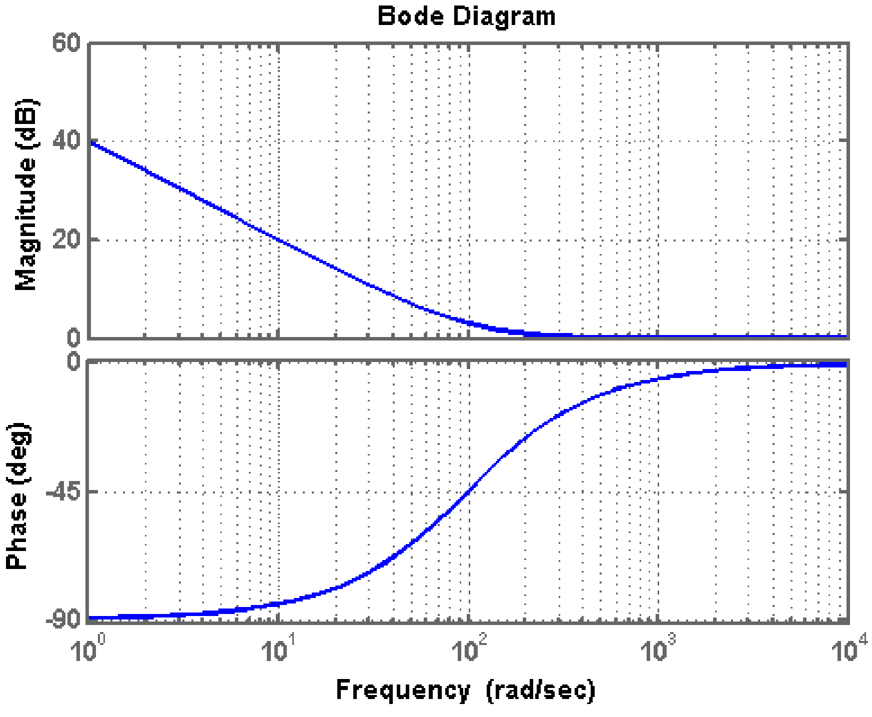
- **Ex. 13.3)**
  - c)
    - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + 10.1s + 100}}$$

    - Polos: $s = -5.05 \pm j8.63$;
    - Sistema estável e subamortecido.

Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - d)



Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - d)
    - A fase começa em $-90°$, indicando um polo na origem;
    - A fase aumenta até $-90° + 90° = 0°$, portanto o sistema possui um zero;
    - A função de transferência é do tipo

$$\boxed{G(s) = K\frac{Ts+1}{s}}$$

$$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}\sqrt{(T\omega)^2+1}}$$

$$\boxed{\phi(j\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{T\omega}\right)}$$

Exercícios

- **Ex. 13.3)**
  - d)
    - Ganho a altas frequências:

$$\boxed{\lim_{\omega \to \infty} M(\omega) = \frac{K}{\omega}\sqrt{(T\omega)^2} = KT = 10^{0/20} \Rightarrow KT = 1}$$

    - Ganho em $\omega = 1$ rad/s:

$$\boxed{M(\omega = 1) = K\sqrt{T^2 + 1} = 10^{40/20} = 100 \Rightarrow T = 0.01 \Rightarrow K = 100}$$

    - Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = 100\,\frac{0.01s + 1}{s}}$$