UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 4 – Filtros Analógicos

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Processamento Analógico e Digital de Sinais

✓ Elementos Básicos de Sistemas de Processamento de Sinais;

✓ Vantagens do Processamento Digital de Sinais;

✓ Números Binários Inteiros e Fracionários;

✓ O Processo de Quantização.

Filtros Analógicos

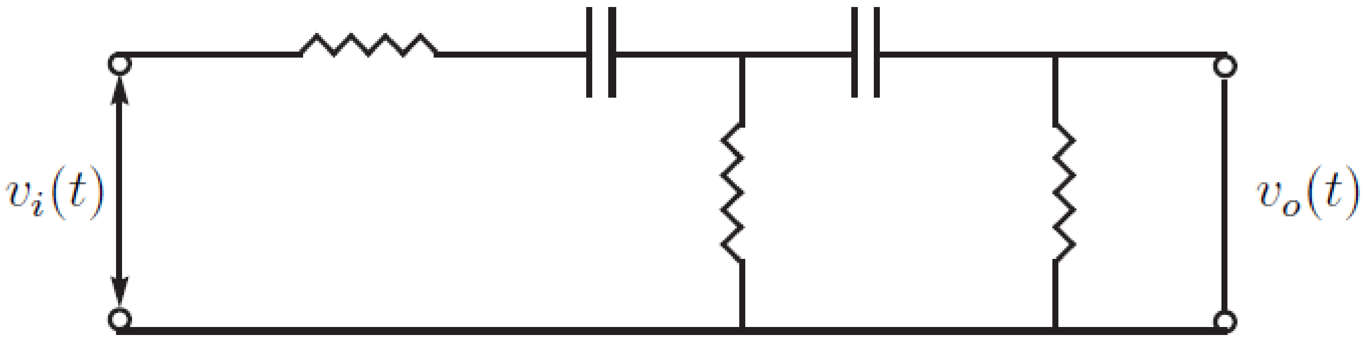
Um filtro analógico pode ser definido como uma rede seletiva na frequência, que atua sobre a amplitude e/ou a fase do sinal de entrada, dentro de um dado intervalo de frequências, não influenciando sinais cujas frequências se encontrem fora desse intervalo.

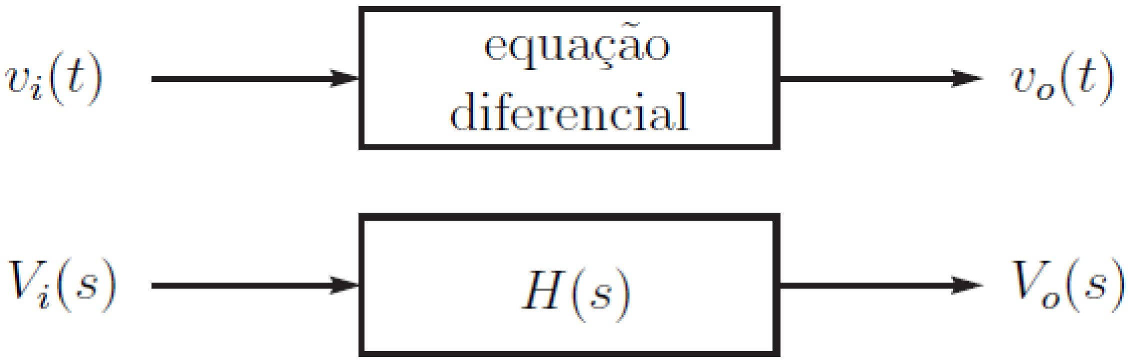
Na banda de frequências que passa pelo filtro sem sofrer alterações é designada por **Banda de Passagem**.

Na banda de frequências que é influenciada pelo filtro tem a designação de **Banda de Atenuação**.

Filtros Analógicos

Seja o filtro analógico:





(função de transferência)

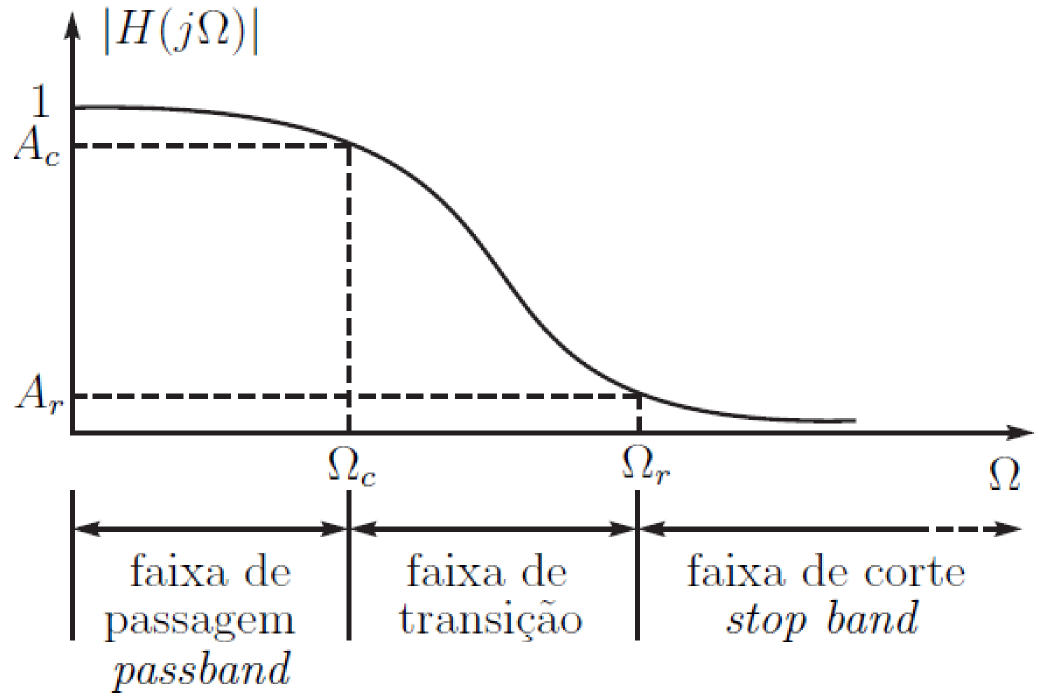
Filtros Analógicos

Para o filtro anterior sabe-se que a relação entre $v_i(t)$ e $v_o(t)$ é dada por uma equação diferencial. Em termos de transformada de Laplace tem-se que:

$$V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)], \qquad V_o(s) = \mathcal{L}[v_o(t)],$$

e a relação entre entrada e saída é dada pela função de transferência *H(s)*.

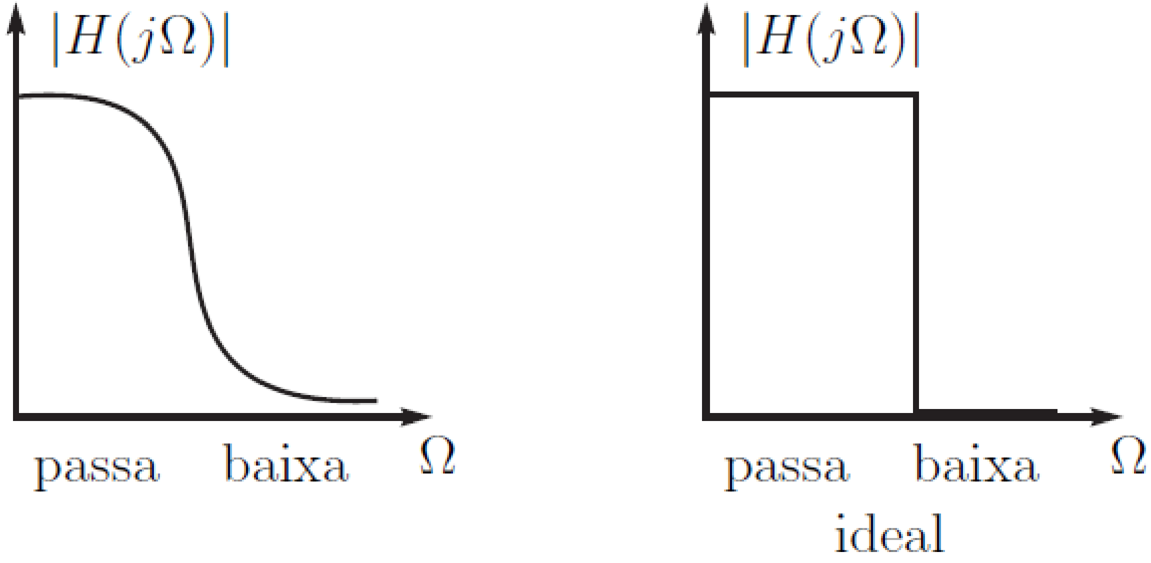
A resposta em frequência típica de um filtro passa-baixa é mostrada na figura ao lado.



Filtros Analógicos

Os tipos básicos de resposta em frequência são ilustrados na sequência.

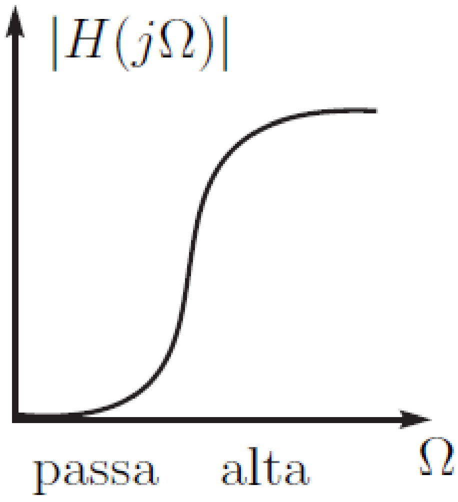
<u>Filtro Passa-Baixa</u>:

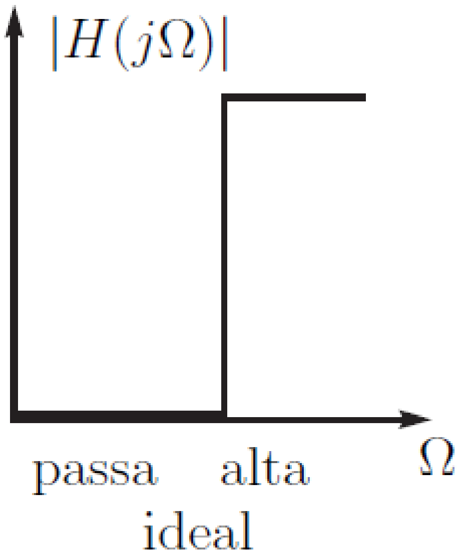


Filtros Analógicos

Os tipos básicos de resposta em frequência são ilustrados na sequência.

<u>Filtro Passa-Alta</u>:

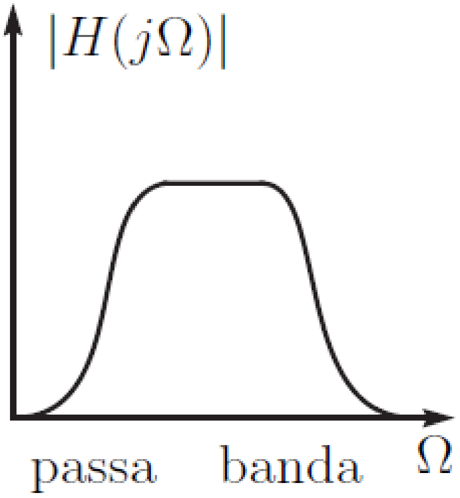


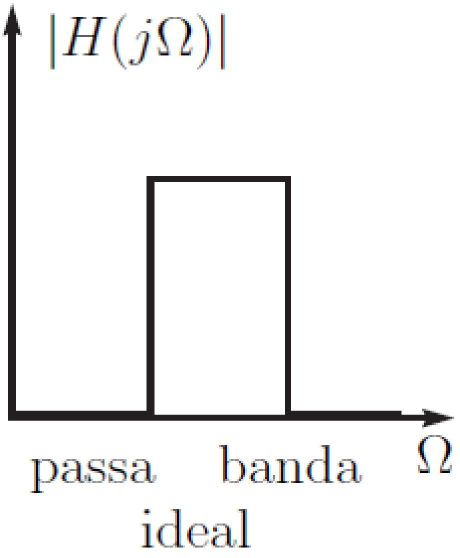


Filtros Analógicos

Os tipos básicos de resposta em frequência são ilustrados na sequência.

<u>Filtro Passa-Banda</u>:

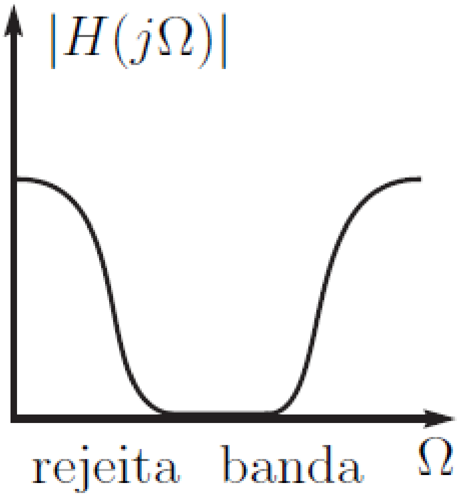


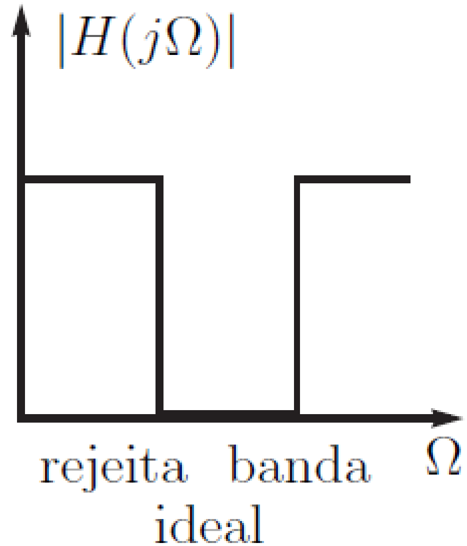


Filtros Analógicos

Os tipos básicos de resposta em frequência são ilustrados na sequência.

<u>Filtro Rejeita-Banda</u>:





Filtros Analógicos

<u>Filtro Butterworth</u>:

O filtro Butterworth de ordem *n* é descrito por pela seguinte equação:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}.$$

Algumas propriedades deste filtro são:

$$|H_n(j\Omega)|^2|_{\Omega=0} = 1, \qquad \forall n,$$

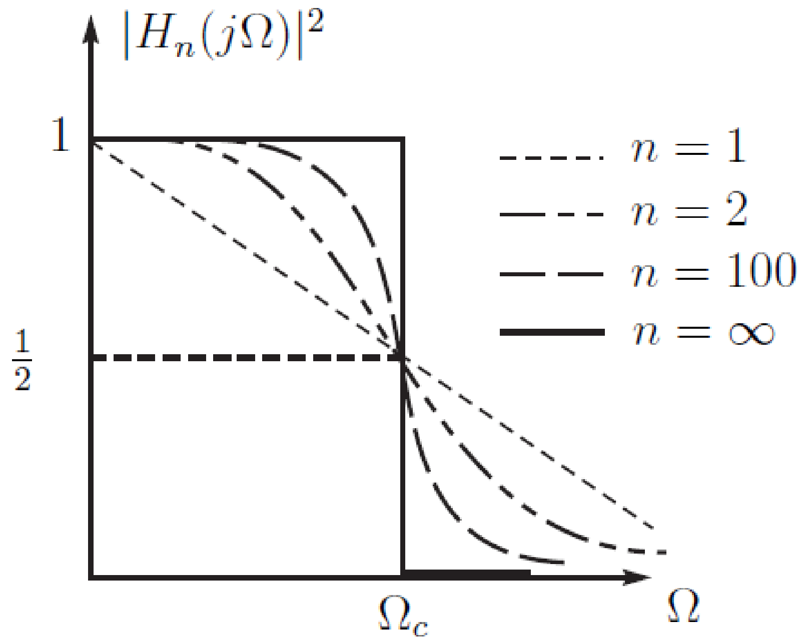
$$|H_n(j\Omega)|^2|_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2}, \qquad n\ finito,$$

$$|H_n(j\Omega)||_{\Omega=\Omega_c} = 0.707, \qquad 20\log|H_n(j\Omega)||_{\Omega=\Omega_c} = -3.0103.$$

Filtros Analógicos

Filtro Butterworth:

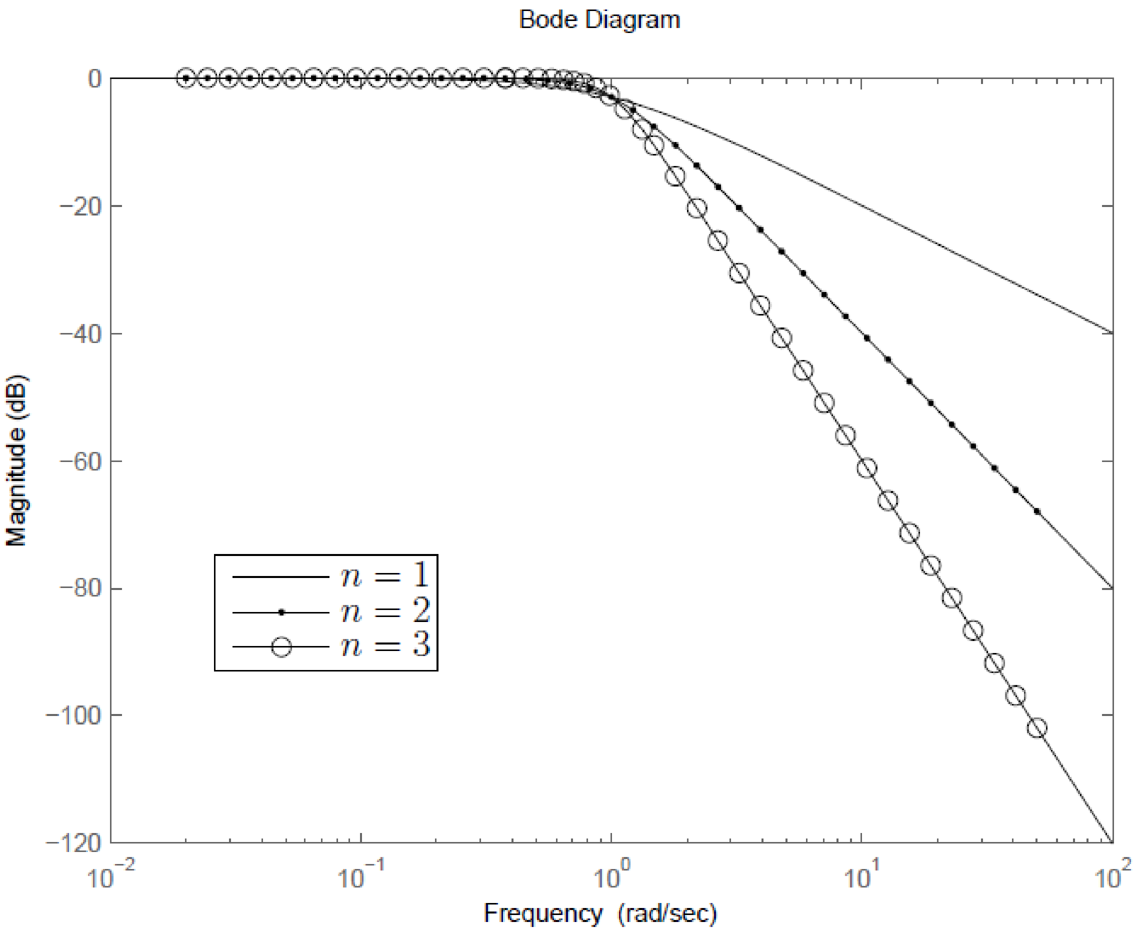
Quando n aumenta, $|H_n(j\Omega)|^2$ se aproxima do passa baixa ideal conforme ilustrado na figura abaixo.



Filtros Analógicos

<u>Filtro Butterworth</u>:

A figura ao lado apresenta as curvas de resposta em frequência para os filtros Butterworth de ordem 1, 2 e 3.



Filtros Analógicos

Filtro Butterworth:

Em termos de amplitude em *dB* tem-se que:

$$G_n(\Omega) = 20\log|H_n(j\Omega)| = 10\log|H_n(j\Omega)|^2 = 10\log\left[\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2n}}\right] = -10\log\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}\right],$$

e verifica-se que:

- ✓ Para $\Omega << \Omega_c$ então $G_n(\Omega) \approx -10\log[1+0] = 0$;
- ✓ Para $\Omega >> \Omega_c$ então $G_n(\Omega) \approx -10 log\left[\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}\right] = -20n\ log\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)$, que representa uma inclinação de *-20n*;
- ✓ Para $\Omega = \Omega_c$ então $G_n(\Omega) = -10\log[1+1] = -3.01$.

Filtros Analógicos

<u>Filtro Butterworth</u>:

Seja um filtro normalizado com $\Omega_c = 1$, logo:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = H_n(j\Omega)H_n(-j\Omega) = \frac{1}{1+\Omega^{2n}}.$$

Lembrando que $s = j\Omega$, escreve-se diretamente a equação característica:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^{2n} = -1(j)^{2n},$$

e se verifica que os polos estarão sobre um círculo de raio unitário.

Filtros Analógicos

<u>Filtro Butterworth</u>:

Para assegurar que se tenha um filtro estável, deve-se escolher os polos que estejam no semi-plano esquerdo (*SPE*). Logo, a função de transferência do filtro pode ser escrita como:

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{1}{B_n(s)},$$

onde *$B_n(s)$* são os poliômios de Butterworth dados por:

n	$B(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0.76536s+1)(s^2+1.84776s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$

Problema Exemplo 4.1

Achar a função de transferência de um filtro Butterworth normalizado de ordem 1 e outro de ordem 2.

Solução:

Dados: ordem de dois filtros Butterworth.

Resultado desejado: função de transferência dos dois filtros Butterworth.

Hipóteses: filtros normalizados.

Problema Exemplo 4.1

Cálculos: para $n = 1$, tem-se:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 = -j^2 \quad \rightarrow \quad s = \pm 1$$

Assim, o polo estável é $s_k = -1$ e a função de transferência é:

$$H_1(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{1}{s + 1}$$

para $n = 2$, tem-se:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^4 = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 = -j^4 \quad \rightarrow \quad s^4 = -1x1$$

Que representa a equação característica: $s^4 + 1 = 0$,

Problema Exemplo 4.1

Cálculos: cuja solução é:

$$s_{1,2} = 0{,}707 \pm 0{,}707j \quad e \quad s_{3,4} = -0{,}707 \pm 0{,}707j$$

Assim, os polos estáveis são $s_{3,4} = -0{,}707 \pm 0{,}707j$ e a função de transferência é:

$$H_2(s) = \frac{1}{(s - s_3)(s - s_4)} = \frac{1}{[s - (-0.707 + 0.707j)][s - (-0.707 - 0.707j)]},$$

ou ainda: $H_2(s) = \dfrac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$.

Conclusões: a função de transferência para $n = 1$ é $H_1(s) = \dfrac{1}{s + 1}$ e para $n = 2$ é $H_2(s) = \dfrac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$.

Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

O eixo de frequências pode ser ajustado ou reescalonado usando transformações para obter funções de transferência de filtros com os requisitos de interesse. As principais transformações são descritas a seguir.

***Transformação passa-baixa para passa-baixa*:**

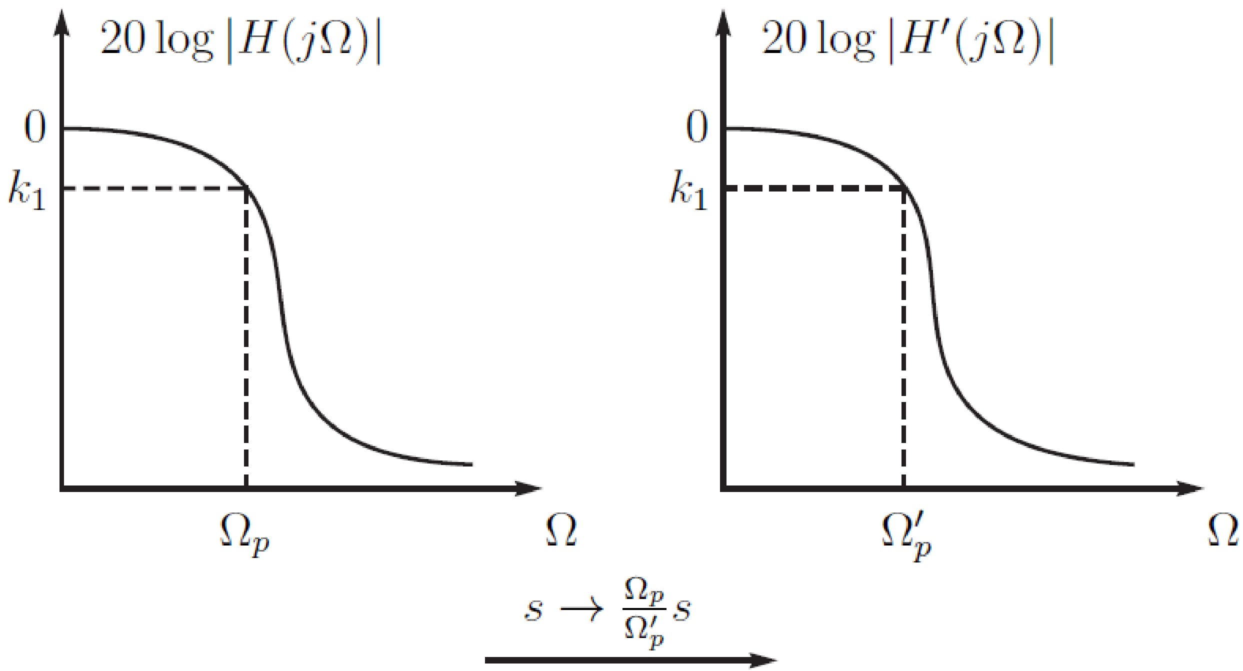
A transformação do filtro *H(s)* passa-baixa para o filtro *H'(s)* passa-baixa é dada por:

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s .$$

Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

Transformação passa-baixa para passa-baixa:



Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

***Transformação passa-baixa para passa-baixa*:**

Note que:

$$H'(s) = H(s)\big|_{s \to \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s} = H\left(\frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s\right).$$

A função de resposta em frequência é obtida quando $s = j\Omega$, ou seja,

$$|H'(j\Omega)| = \left|H\left(\frac{\Omega_p}{\Omega'_p} j\Omega\right)\right|,$$

Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

***Transformação passa-baixa para passa-baixa*:**

E para $\Omega = \Omega'_p$:

$$\left|H'(j\Omega'_p)\right| = \left|H\left(j\Omega_p\right)\right|,$$

ou seja, a resposta em frequência de $H'(\Omega'_p)$ é igual á de $H(\Omega_p)$. Isso significa que a transformação não afeta a amplitude na frequência considerada de interesse da transformação.

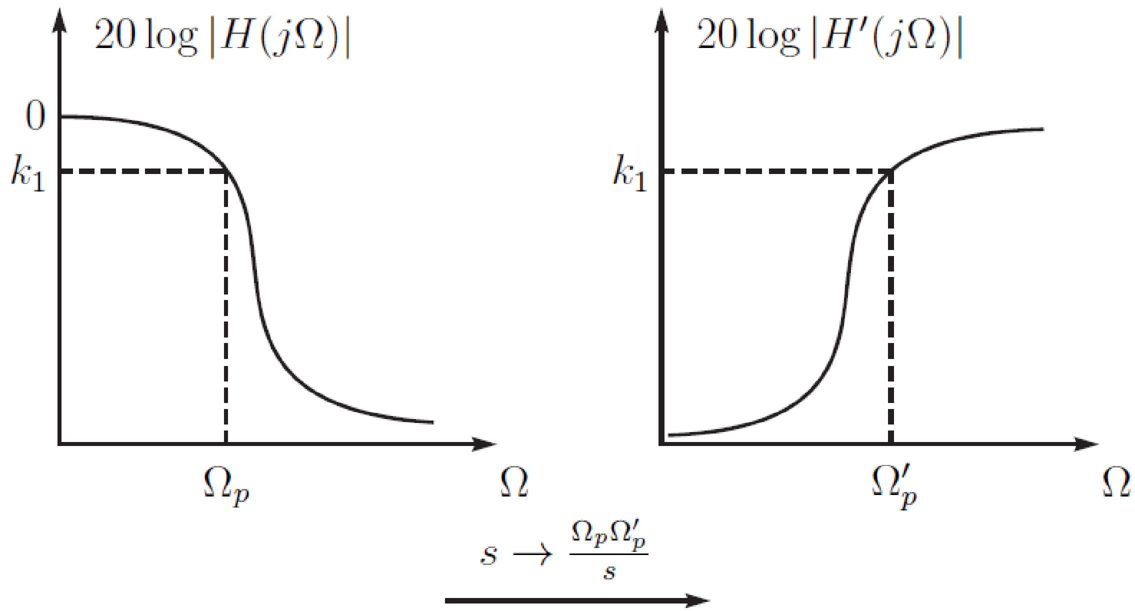
Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

Transformação passa-baixa para passa-alta:

A transformação do filtro *H(s)* passa-baixa para o filtro *H'(s)* passa-alta de acordo com a figura ao lado é dada por:

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}.$$



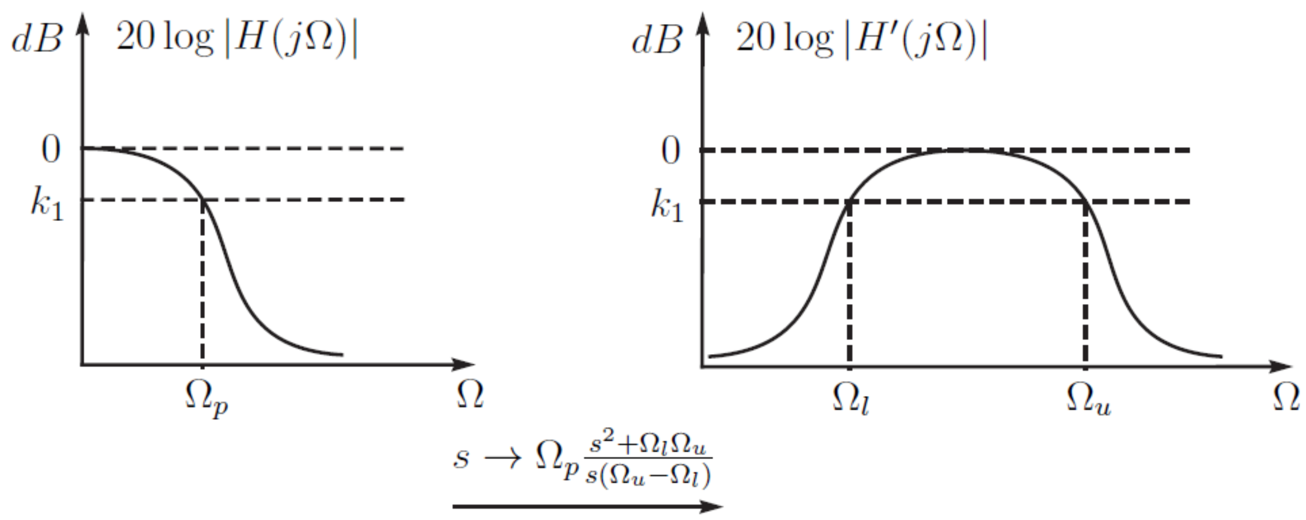
Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

Transformação passa-baixa para passa-banda:

A transformação do filtro *H(s)* passa-baixa para o filtro *H′(s)* passa-banda de acordo com a figura abaixo é dada por:

$$s \rightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}.$$



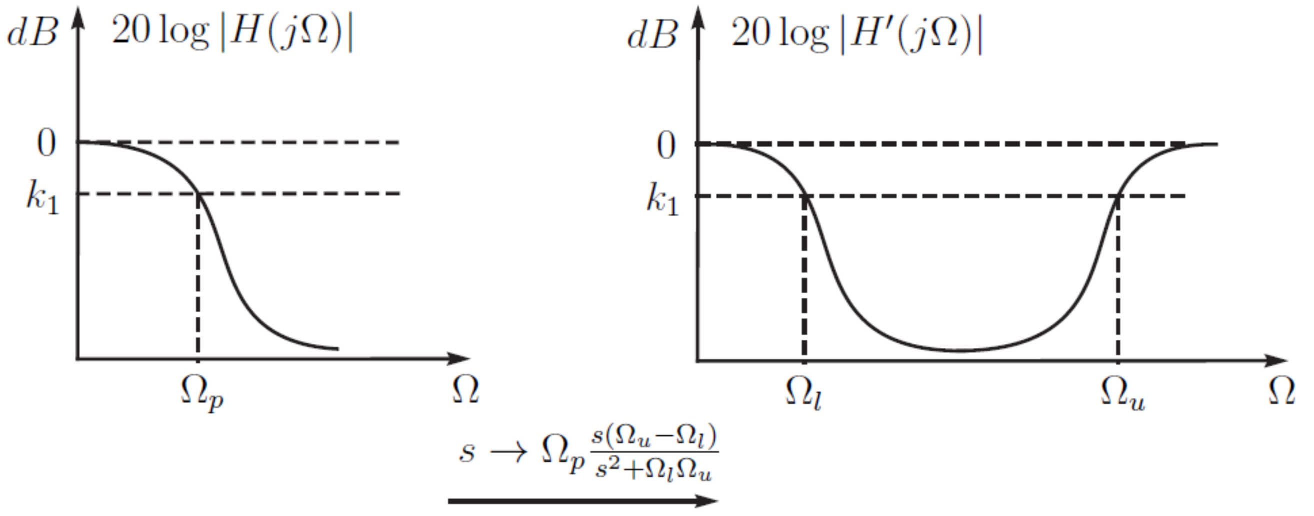
Filtros Analógicos

<u>Transformação Analógico-Analógico</u>:

***<u>Transformação passa-baixa para rejeita-banda</u>*:**

A transformação do filtro *H(s)* passa-baixa para o filtro *H'(s)* rejeita-banda de acordo com a figura abaixo é dada por:

$$s \rightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}.$$

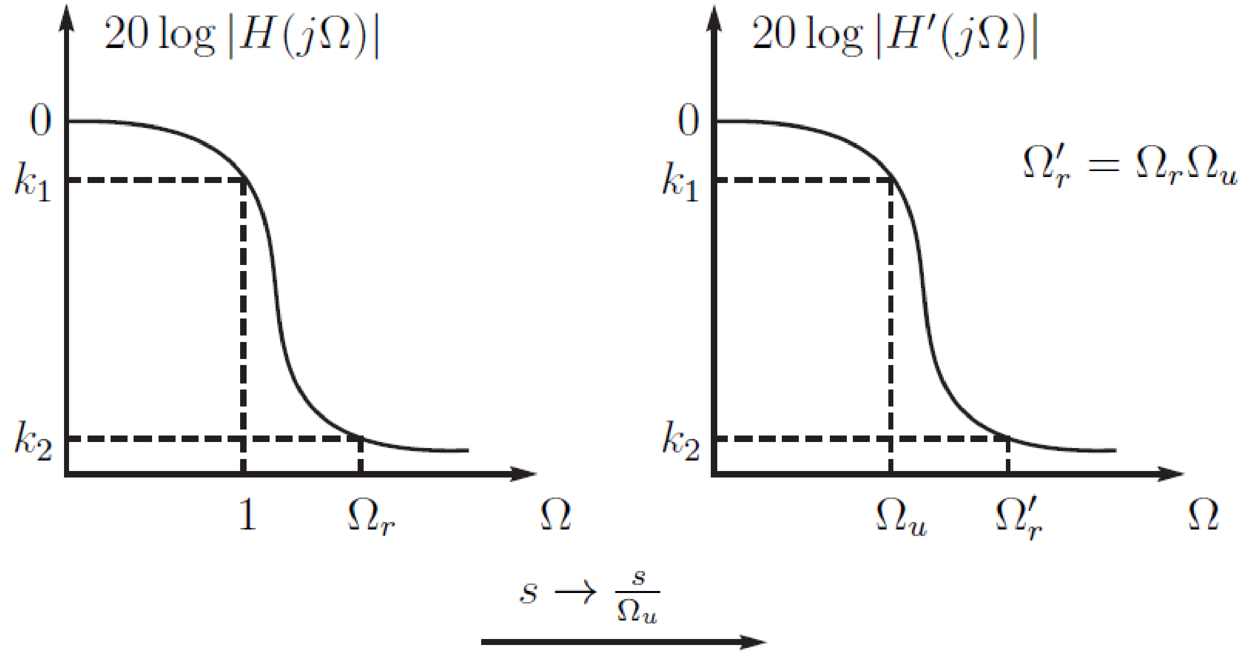


Filtros Analógicos

<u>Transformação Analógico-Analógico</u>:

***<u>Exemplo 1</u>*:**

A figura abaixo ilustra a transformação de passa-baixa normalizado para um passa-baixa não normalizado.

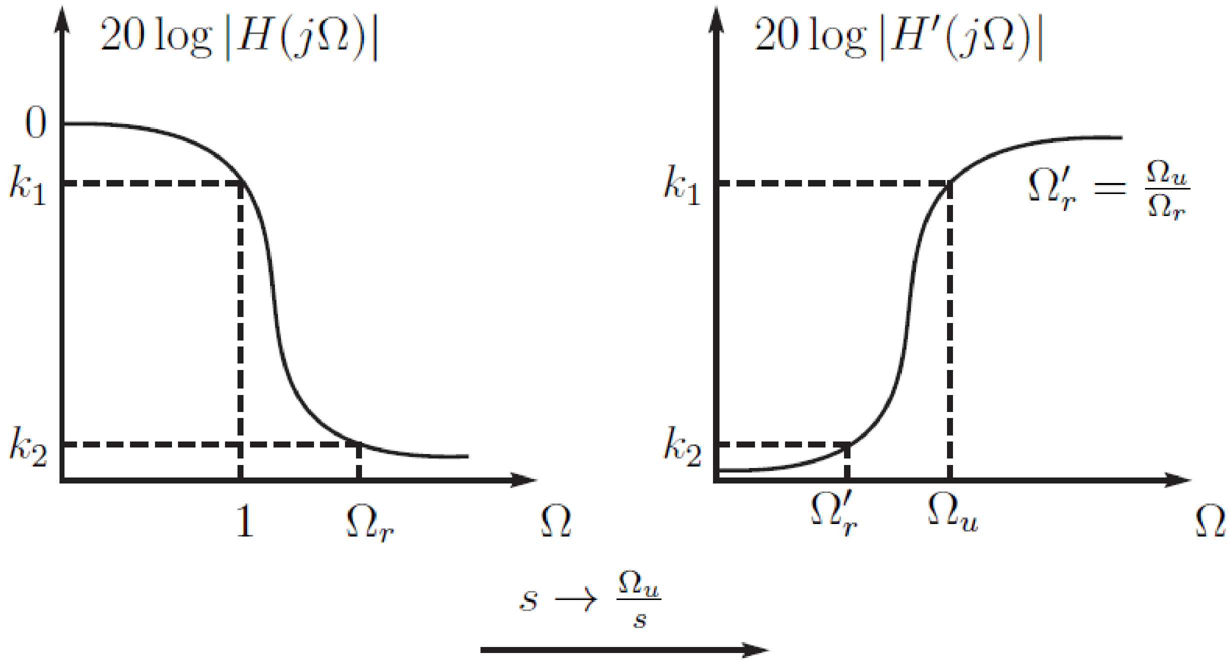


Filtros Analógicos

Transformação Analógico-Analógico:

***Exemplo 2*:**

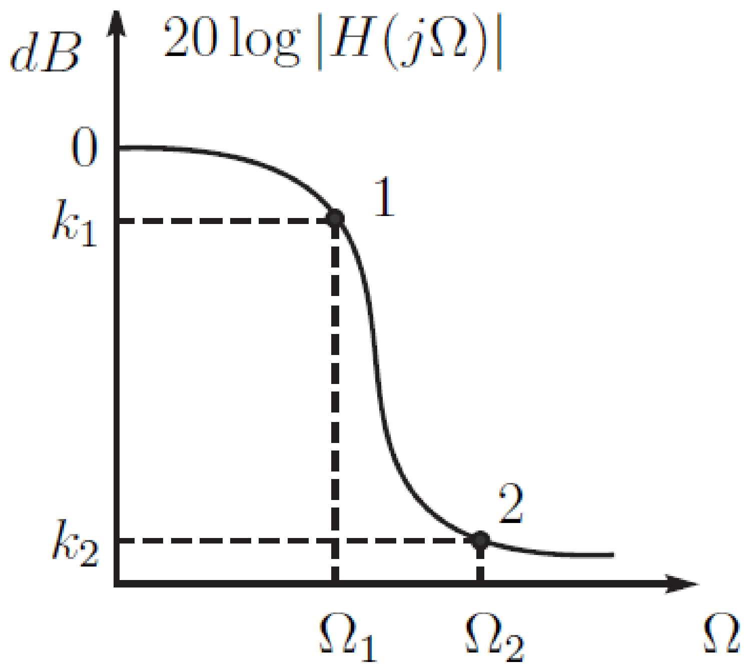
A figura abaixo ilustra a transformação de passa-baixa normalizado para um passa-alta não normalizado.



Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Baixa</u>:

Os parâmetros de projeto de um filtro Butterworth passa-baixa são Ω_1, Ω_2, k_1 e k_2 conforme ilustrado abaixo.



Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Baixa</u>:

As condições usuais de projeto são:

- ✓ $0 \geq 20 \log |H(j\Omega)| \geq k_1$ para $\Omega \leq \Omega_1$,
- ✓ $20 \log |H(j\Omega)| \leq k_2$ para $\Omega \geq \Omega_2$.

A equação do filtro Butterworth é:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}.$$

Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Baixa</u>:

Para os pontos *1* e *2* do gráfico é possível escrever que:

$$10\log|H(j\Omega_1)|^2 = k_1 \Rightarrow 10\log\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}}\right] = k_1, \qquad (1)$$

$$10\log|H(j\Omega_2)|^2 = k_2 \Rightarrow 10\log\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n}}\right] = k_2, \qquad (2)$$

que caracterizam duas equações e duas incógnitas (Ω_c e n). De (*1*) pode-se escrever que:

$$\log\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}}\right] = \frac{k_1}{10},$$

Filtros Analógicos

Projeto de Filtros Butterworth Passa-Baixa:

Desenvolvendo a equação anterior:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}} = 10^{\frac{k_1}{10}} \Rightarrow 1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}},$$

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}} - 1 \qquad (3)$$

Analogamente, de (*2*) tem-se que:

$$\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_2}{10}} - 1. \qquad (4)$$

Filtros Analógicos

Projeto de Filtros Butterworth Passa-Baixa:

Dividindo (*3*) por (*4*) obtém-se:

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)^{2n} = \frac{10^{\frac{-k_1}{10}} - 1}{10^{\frac{-k_2}{10}} - 1},$$

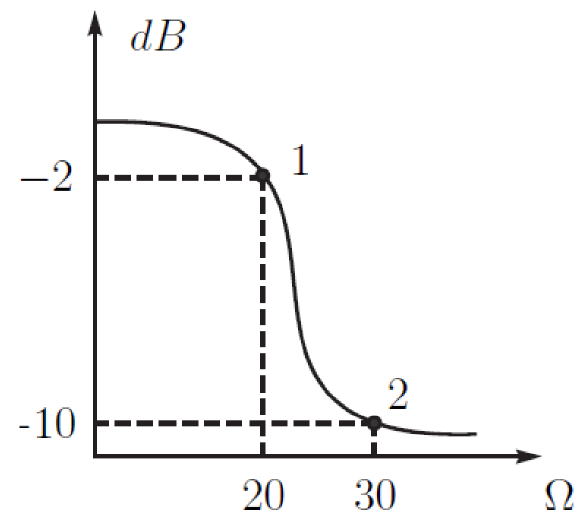
E isolando *n* chega-se em:

$$n = \frac{\log\left[\frac{\left(10^{\frac{-k_1}{10}} - 1\right)}{\left(10^{\frac{-k_2}{10}} - 1\right)}\right]}{2\log\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)}.$$

Como *n* deve ser inteiro, adota-se o próximo maior inteiro. Com *n* determinado, utiliza-se (*3*) ou (*4*) para determinar Ω_c. A escolha entre (*3*) ou (*4*) será função de qual par (Ω_1, k_1) ou (Ω_2, k_2) se deseja satisfazer de forma exata.

Problema Exemplo 4.2

Projetar um filtro Butterworth passa-baixa que possua uma frequência de corte de *20rad/s* a *−2dB* e pelo menos *−10dB* de atenuação a *30rad/s*. Os requisitos do filtro estão mostrados ao lado.



Solução:

Dados: requisitos para o projeto de um filtro Butterworth passa-baixa.

Resultado desejado: função de transferência do filtro requerido.

Hipóteses: filtro normalizado.

Problema Exemplo 4.2

Cálculos: a ordem do filtro é determinada por:

$$n = \frac{\log\left[\frac{\left(10^{-\frac{(-2)}{10}}-1\right)}{\left(10^{-\frac{(-10)}{10}}-1\right)}\right]}{2\log\left(\frac{20}{30}\right)} = 3.37 \Rightarrow n = 4.$$

Considerando que se deseja satisfazer de forma exata o ponto *1*, tem-se que:

$$\left(\frac{20}{\Omega_c}\right)^{2\times 4} = 10^{\frac{-(-2)}{10}} - 1 \Rightarrow \left(\frac{20}{\Omega_c}\right)^{8} = 10^{0.2} - 1 \Rightarrow \frac{20}{\Omega_c} = (10^{0.2}-1)^{\frac{1}{8}},$$

$$\Omega_c = \frac{20}{[(10^{0.2}-1)^{\frac{1}{8}}]} = 21.3868$$

O filtro Butterworth normalizado para $\Omega_c = 1$ e $n = 4$ é:

$$H_4(s) = \frac{1}{(s^2+0.76536s+1)(s^2+1.84776s+1)}.$$

Problema Exemplo 4.2

Cálculos: aplicando uma transformação de passa-baixa para passa-baixa tem-se que $s \rightarrow s/\Omega_c$ com $\Omega_c = 21.3868$, ou seja,

$$H(s) = H_4(s)|_{s \rightarrow \frac{s}{21.3868}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{21.3868}\right)^2 + 0.76536\left(\frac{s}{21.3868}\right) + 1\right]\left[\left(\frac{s}{21.3868}\right)^2 + 1.84776\left(\frac{s}{21.3868}\right) + 1\right]} =$$

$$= \frac{0.209210 \times 10^6}{(s^2 + 16.3686s + 457.394)(s^2 + 39.5176s + 457.394)}.$$

Conclusões: a função de transferência do filtro Butterworth para os requisitos especificados é: $H(s) = \frac{0.209210 \times 10^6}{(s^2 + 16.3686s + 457.394)(s^2 + 39.5176s + 457.394)}.$

Encerramento

Final da aula 4.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – Refazer o exemplo resolvido 8.3.6 (página 682) usando a metodologia apresentada na aula.

Próxima aula:

Filtros Analógicos.

15/08/2019