UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 8 – Equações a Diferenças

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Equações a Diferenças

- ✓ Definição de Equação a Diferenças;
- ✓ Solução Homogênea de Equações a Diferenças;
- ✓ Solução Particular de Equações a Diferenças;
- ✓ Solução Total de Equações a Diferenças.

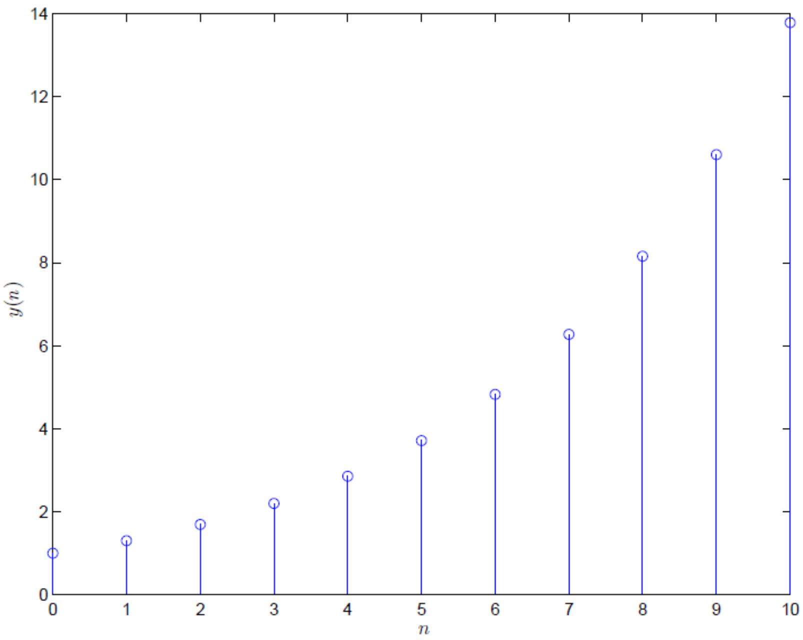
Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Comportamento da Solução Homogênea:

Para raízes distintas a solução homogênea é composta de termos do tipo $c\lambda^n$, e em função de λ os seguintes casos são possíveis:

✓ Para λ real tem-se os seguintes casos:

1. $\lambda > 1$, situação instável.

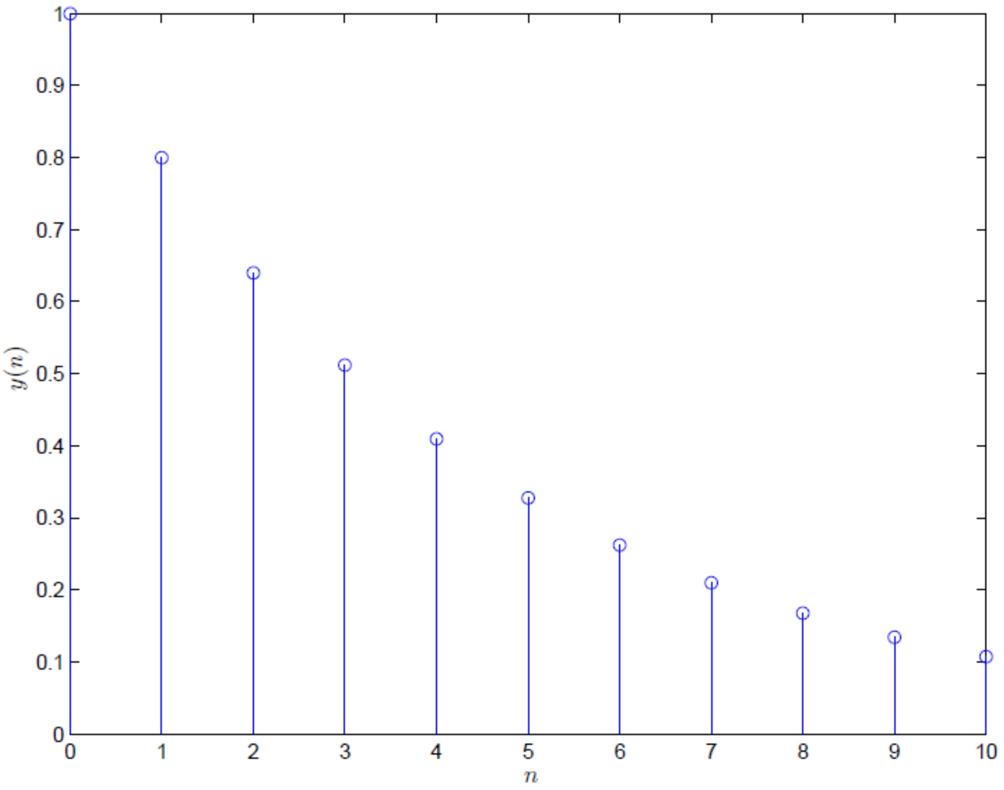


Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Comportamento da Solução Homogênea</u>:

✓ Para λ real tem-se os seguintes casos:

2. $0 < \lambda < 1$, situação estável

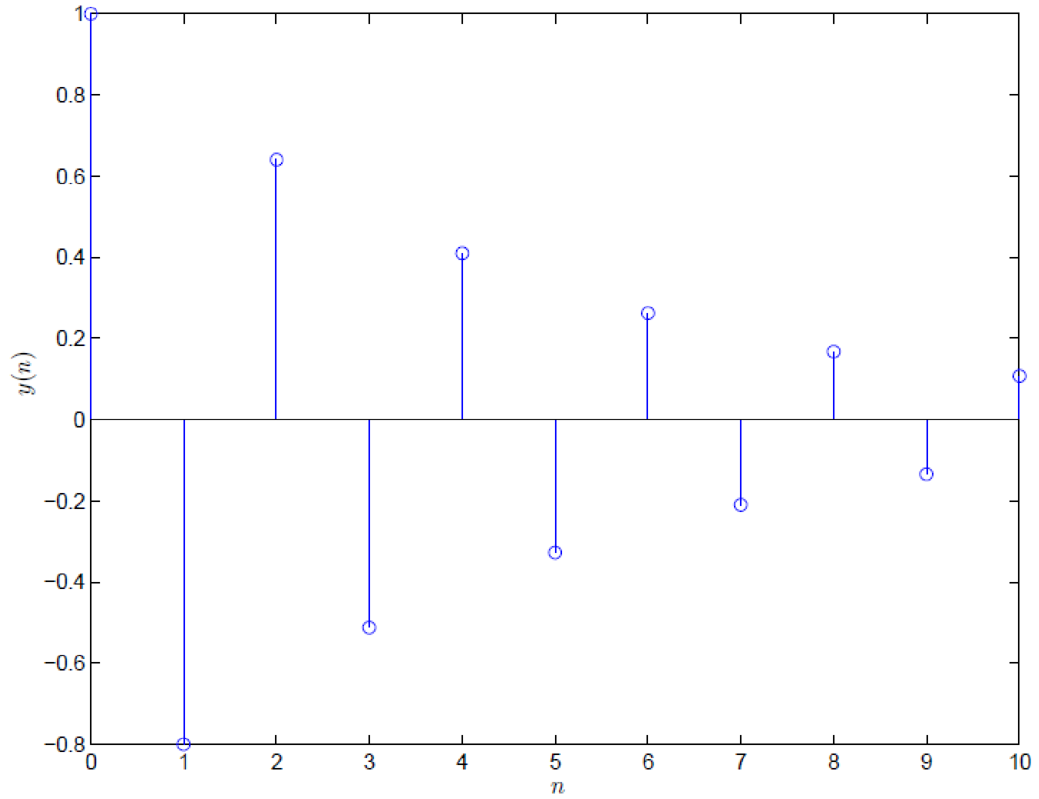


Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Comportamento da Solução Homogênea</u>:

✓ Para λ real tem-se os seguintes casos:

3. $-1 < \lambda < 0$, situação estável oscilante



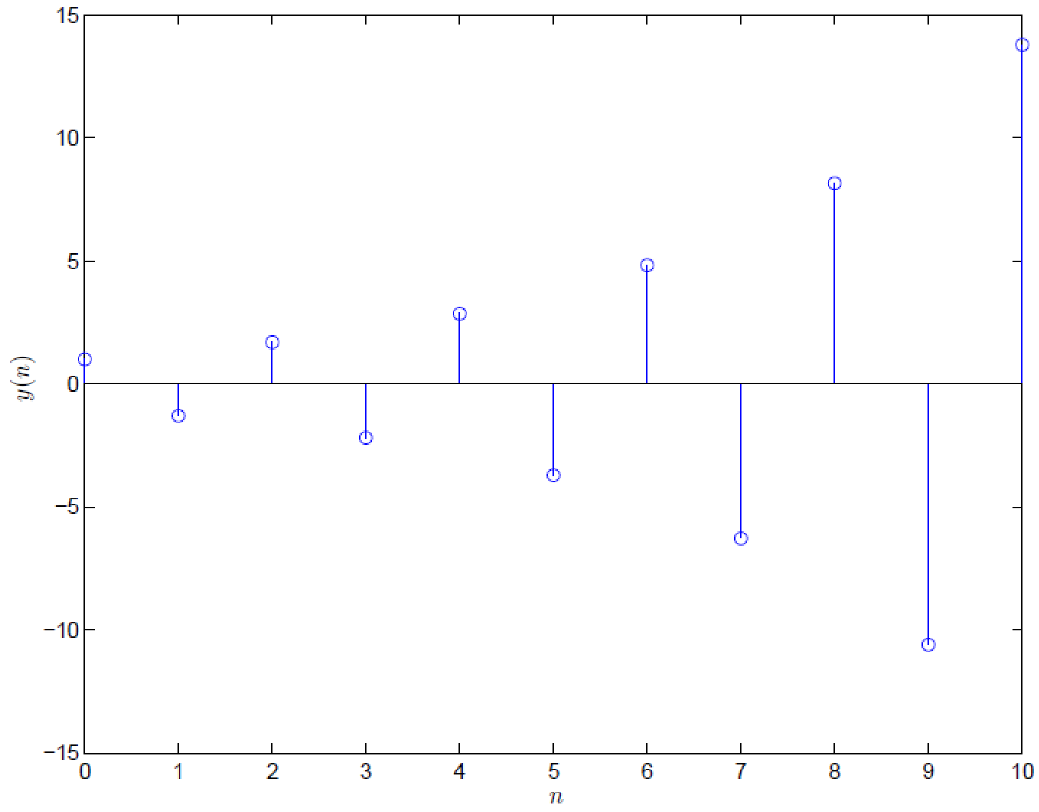
Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Comportamento da Solução Homogênea:

✓ Para λ real tem-se os seguintes casos:

4. $\lambda < -1$, situação instável

oscilante



Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Comportamento da Solução Homogênea</u>:

✓ Para λ complexo (pares conjugados) tem-se a solução na forma:

$$C\rho^n sen(n\theta + \varphi)$$

Verifica-se que:

1. Para $0 < \rho < 1$, situação estável

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Comportamento da Solução Homogênea</u>:

✓ Para λ complexo (pares conjugados) tem-se a solução na forma:

$$C\rho^n sen(n\theta + \varphi)$$

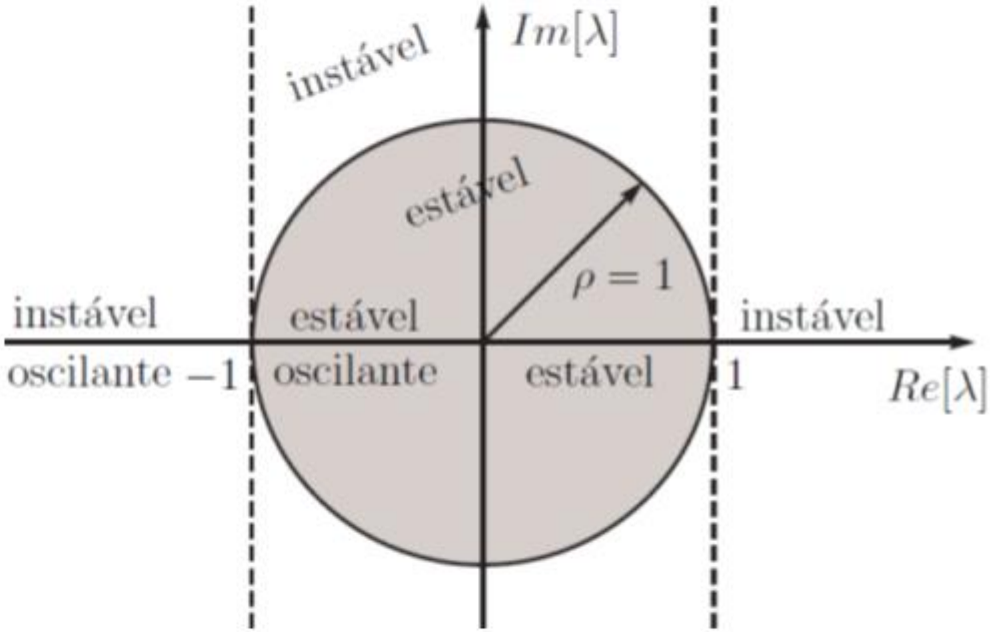
Verifica-se que:

2. Para $\rho > 1$, situação instável

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Comportamento da Solução Homogênea:

Com base na análise realizada anteriormente nota-se que a estabilidade é assegurada se as raízes estiverem dentro de um círculo unitário conforme ilustrado abaixo.



- ✓ **Salienta-se que mesmo no caso de raízes múltiplas, o termo exponencial predomina e a estabilidade ocorre para raízes dentro do círculo unitário.**

Problema Exemplo 8.1

Determine a faixa de valores do parâmetro a para as quais o sistema linear e invariante no tempo com resposta ao impulso dada por:

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq o, n\, par \\ 0, & para\ outros\ valores \end{cases}$$

é estável.

Solução:

<u>Dados</u>: resposta ao impulso do sistema.

<u>Resultado desejado</u>: valores de a para o sistema ser estável.

<u>Hipóteses</u>: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 8.1

Cálculos: como visto na aula 6, um sistema é BIBO estável se a soma em módulo da resposta ao impulso unitário é finita, ou seja:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Assim, para a resposta ao impulso fornecida:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0,par}^{\infty} |a|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n}$$

O último termo da equação acima é a soma de uma Progressão Geométrica Infinita (PG infinita), cuja resposta é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Problema Exemplo 8.1

Cálculos: inspecionando a igualdade:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Para que S seja finito e, consequentemente, o sistema seja BIBO estável, tem-se que:

$$|a| < 1$$

Conclusões: o sistema será estável para valores de a tais que $|a| < 1$.

Problema Exemplo 8.2

Para cada um dos sistemas descritos pelas equações a diferenças apresentadas abaixo, defina se o sistema é estável ou instável.

a. $y(n) + 2y(n\text{-}1) = 2x(n)$

b. $y(n) + 4y(n\text{-}1) – y(n\text{-}2) = x(n) + 3x(n\text{-}1)$

c. $y(n) – 0,5y(n\text{-}1) +0,9y(n\text{-}2) = x(n) – 2x(n\text{-}2)$

Solução:

<u>Dados</u>: equação a diferenças de cada sistema.

<u>Resultado desejado</u>: definir se o sistema sé estável.

<u>Hipóteses</u>: sistemas discretos lineares e invariantes no tempo.

Problema Exemplo 8.2

Cálculos: para cada um dos casos, analisa-se a solução da equação homogênea associada. Para o item a tem-se:

$$y(n) + 2y(n-1) = 0$$

Assumindo uma solução exponencial do tipo:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Substituindo na equação homogênea associada chega-se em:

$$\lambda^n + 2\lambda^{n-1} = 0$$

$$\lambda^{n-1}(\lambda + 2) = 0$$

E a raiz da equação característica é $\lambda = -2$. Assim, como $\lambda < -1$, o sistema é instável oscilante.

Problema Exemplo 8.2

Cálculos: para o item b tem-se:

$$y(n) + 4y(n-1) – y(n-2) = 0$$

Assumindo uma solução exponencial do tipo:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Substituindo na equação homogênea associada chega-se em:

$$\lambda^n + 4\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2} (\lambda^2 + 4\lambda - 1) = 0$$

E as raízes da equação característica são $\lambda_1 = -4,236$ e $\lambda_2 = 0,236$. Assim, como um dos valores é $\lambda_1 < -1$, o sistema é instável oscilante.

Problema Exemplo 8.2

Cálculos: para o item c tem-se:

$$y(n) - 0{,}5y(n-1) + 0{,}9y(n-2) = 0$$

Assumindo uma solução exponencial do tipo:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Substituindo na equação homogênea associada chega-se em:

$$\lambda^n - 0{,}5\lambda^{n-1} + 0{,}9\lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 0{,}9) = 0$$

E as raízes da equação característica são $\lambda_1 = 0{,}25 + 0{,}915j$ e $\lambda_2 = 0{,}25 - 0{,}915j$.

Problema Exemplo 8.2

Cálculos: assim, a norma de cada uma das raízes é:

$$\rho_1 = 0{,}9487 \quad \text{e} \quad \rho_2 = 0{,}9487$$

Como $0 < \rho < 1$, o sistema é estável.

Conclusões: o sistema descrito pela equação a diferenças apresenta no item a. é instável oscilante, o do item b. é instável oscilante e o do item c. é estável.

Problema Exemplo 8.3

Determine a solução total $y(n)$, $n \geq 0$, usando as respostas *zero-state* e *zero-input*, para a seguinte equação a diferenças:

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

onde $x(n)$ é o degrau unitário.

Solução:

Dados: equação a diferenças de determinado sistema.

Resultado desejado: resposta total da equação a diferenças apresentada.

Hipóteses: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 8.3

Cálculos: primeiramente encontra-se a solução da equação homogênea associada:

$$y(n) \,–\!+ a_1 y(n\text{-}1) = 0$$

Assumindo uma solução exponencial do tipo:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Substituindo na equação homogênea associada chega-se em:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} = 0$$

$$\lambda^{n-1} (\lambda + a_1) = 0$$

E a raiz da equação característica é $\lambda = -a_1$. Assim, a forma geral da solução homogênea é:

$$y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n$$

Problema Exemplo 8.3

Cálculos: para a solução particular, assume uma sequência constante da mesma forma que a sequência de entrada, ou seja:

$$y_p(n) = Ku(n)$$

Substituindo na equação a diferenças chega-se em:

$$Ku(n) + a_1Ku(n\text{-}1) = u(n)$$

Para determinar K, avalia-se a equação anterior para $n \geq 1$, onde nenhum dos degraus unitários desaparece. Para facilitar os cálculos, escolhe-se $n = 1$, de onde obtém-se:

$$K + a_1K = 1 \quad \rightarrow \quad K = 1/(1+a_1)$$

E a solução particular é: $y_p(n) = [1/(1+a_1)]u(n)$

Problema Exemplo 8.3

Cálculos: logo, a solução total é:

$$y(n) = C(-a_1)^n + 1/(1+a_1), \qquad n \geq 0$$

Para obter a solução de *zero-state*, assume-se que $y(-1) = 0$. Assim, levando na equação a diferenças chega-se em:

$$y(0) + a_1 y(-1) = 1$$

$$y(0) = 1$$

Avaliando a solução encontrada anteriormente em $n = 0$, tem-se:

$$y(0) = C + 1/(1+a_1) \quad \rightarrow \quad C = a_1/(1+a_1)$$

Assim, a solução *zero-state* é: $y_{zs}(n) = [1-(-a_1)^{n+1}]/[1+a_1], \qquad n \geq 0$

Problema Exemplo 8.3

Cálculos: se avaliarmos o parâmetro C na equação a diferenças e na solução homogênea da equação a diferenças encontrada anteriormente para a condição de $y(-1) \neq 0$, tem-se a solução *zero-input*:

$$y(0) + a_1 y(-1) = 0 \quad \rightarrow y(0) = -a_1 y(-1)$$

$$y(0) = C$$

$$C = -a_1 y(-1)$$

Desta forma, a solução *zero-input* é dada por:

$$y_{zi}(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1), \qquad n \geq 0$$

A solução total pode ser escrita como: $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

Problema Exemplo 8.3

Cálculos: assim, a solução total é:

$$y(n) = (-a_1)^{n+1}y(-1) + [1-(-a_1)^{n+1}]/[1+a_1], \qquad n \geq 0$$

Compare as soluções da equação a diferenças obtida a partir das respostas homogênea e particular com a solução obtida a partir das resposta *zero-state* e *zero-input*, veja que elas são equivalentes.

Conclusões: a resposta total da equação a diferenças usando as respostas *zero-state* e *zero-input* é: $y(n) = (-a_1)^{n+1}y(-1) + [1-(-a_1)^{n+1}]/[1+a_1], \qquad n \geq 0.$

Encerramento

Final da aula 8.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – 2.37 e 2.38.

Apostila ES879 disponibilizada – LISTA 2 – 3, 4, 5 e 8.

Próxima aula:

Exercícios.

29/08/2019