UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 10 – Análise em Frequência

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Teste

✓ Teste da Disciplina.

Análise em Frequência

As ferramentas matemáticas principais para análise em frequência são:

- ✓ Transformada de Fourier;
- ✓ Série de Fourier.

A análise de Fourier de um sinal (domínio do tempo) irá fazer a decomposição em componentes senoidais (ou exponenciais complexas) caracterizando a representação deste sinal no domínio da frequência, ou seja, gerando o espectro do sinal.

Análise em Frequência

O espectro do sinal permite identificar o sinal, ou seja, pode ser visto como sua assinatura.

- ✓ Para a análise de um sinal periódico é empregada a série de Fourier.

- ✓ Para um sinal com energia finita emprega-se a transformada de Fourier.

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Seja uma sequência de exponenciais dada por:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi kF_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

onde Ω_0 é a frequência fundamental em rad/s, F_0 é a frequência fundamental em Hz e $T_p = 1/F_0$ é o período fundamental.

A combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas caracteriza a série de Fourier, ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t},$$

onde c_k é chamado de forma de $x(t)$ e F_0 é a frequência fundamental.

Análise em Frequência

Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos:

Nota-se que:

$$e^{j2\pi kF_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

representam os blocos de sinais exponenciais que permitem construir sinais periódicos de diferentes tipos através da escolha de F_0 e c_k.

Isso é garantido pelo fato que estas exponenciais são funções ortogonais e caracterizam uma base para a geração de outras funções.

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Multiplicando-se ambos os lados da equação da série de Fourier por $e^{-j2\pi F_0 l t}$, com l inteiro, e integrando sobre um período, de t_0 até $t_0 + T_p$, tem-se que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi F_0 lt}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi F_0 lt}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}\right)dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (k-l)t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0(k-l)t}}{j2\pi F_0(k-l)}\right]\Bigg|_{t_0}^{t_0+T_p}.$$

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Para $k \neq l$ tem-se que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right] \Bigg|_{t_0}^{t_0+T_p} = 0.$$

Para $k = l$ tem-se que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T_p = c_l T_p.$$

Análise em Frequência

Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos:

Portanto, é possível escrever que:

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{-j2\pi F_0 l t}dt,$$

e como t_0 é arbitrário, pode-se escrever que:

$$c_l = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi l F_0 t}dt.$$

Análise em Frequência

Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos:

- ✓ Uma forma alternativa para obter os coeficientes da série de Fourier é considerar a minimização do erro quadrático entre a função e sua respectiva aproximação pela série.

- ✓ Observa-se que se empregou a integração em um período, e consequentemente, a série de Fourier irá representar apenas este trecho do sinal no caso da função não ser periódica. Se a função é periódica, então a representação dada pela série de Fourier será para todo o intervalo de tempo.

- ✓ O coeficiente $c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)dt$ representa o valor médio do sinal no respectivo período.

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

As condições de *Dirichlet* estabelecem as condições para que a série de Fourier convirja para *x(t)*, ou seja, as condições para que *x(t)* e $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$ sejam iguais para todo *t*. Estas condições são:

- ✓ *x(t)* tem um número finito de descontinuidades em qualquer período;
- ✓ *x(t)* tem um número finito de mínimos e máximos em qualquer período;
- ✓ *x(t)* é absolutamente integrável em qualquer período, ou seja,

$$\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty.$$

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

As condições de *Dirichlet* são condições apenas suficientes, ou seja, existem sinais que possuem sua representação via série de Fourier, mas que não satisfazem estas condições.

Os coeficientes c_k, em geral, são valores complexos. Para sinais periódicos reais, c_k e c_{-k} são complexos conjugados, ou seja,

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}, \qquad c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k},$$

e consequentemente a série de Fourier pode ser representada como:

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k),$$

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

e como *x(t)* é real, então c_0 será real.

Como

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t)\cos\theta_k - sen(2\pi k F_0 t) sen\theta_k,$$

pode-se escrever que:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(2\pi k F_0 t) - b_k sen(2\pi k F_0 t)\right]$$

onde $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k|cos\theta_k$ e $b_k = 2|ck|sen\theta_k$.

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Algumas observações importante:

- ✓ $a_k^2 + b_k^2 = 4|c_k|^2(\cos^2\theta_k + sen^2\theta_k) = 4|c_k|^2.$

- ✓ Esta última forma de apresentar a série de Fourier é conhecida como série trigonométrica de Fourier e só se aplica a sinais reais.

Análise em Frequência

Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos:

- ✓ A representação gráfica dos resultados da série de Fourier caracterizam os espectros de Fourier do sinal.

- ✓ Geralmente os coeficientes da série são números complexos requerendo dois gráficos para a representação: uma para a parte real e outro para a parte imaginária.

- ✓ É usual a representação através dos gráficos do módulo (espectro de amplitude) e da fase (espectro de fase). Nestes gráficos são empregadas frequências negativas, sem significado físico, mas apenas com significado matemático que decorre das exponenciais complexas e seus conjugados.

Análise em Frequência

<u>Densidade Espectral de Potência de Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Seja um sinal periódico com energia infinita e potência média finita. A potência média é definida como:

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)x^*(t)dt.$$

Como $$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi kF_0 t}dt,$$

tem-se que

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi kF_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left(\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}dt\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Análise em Frequência

<u>Densidade Espectral de Potência de Sinais Contínuos e Periódicos</u>:

Portanto,

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

que é conhecida como relação de Parseval.

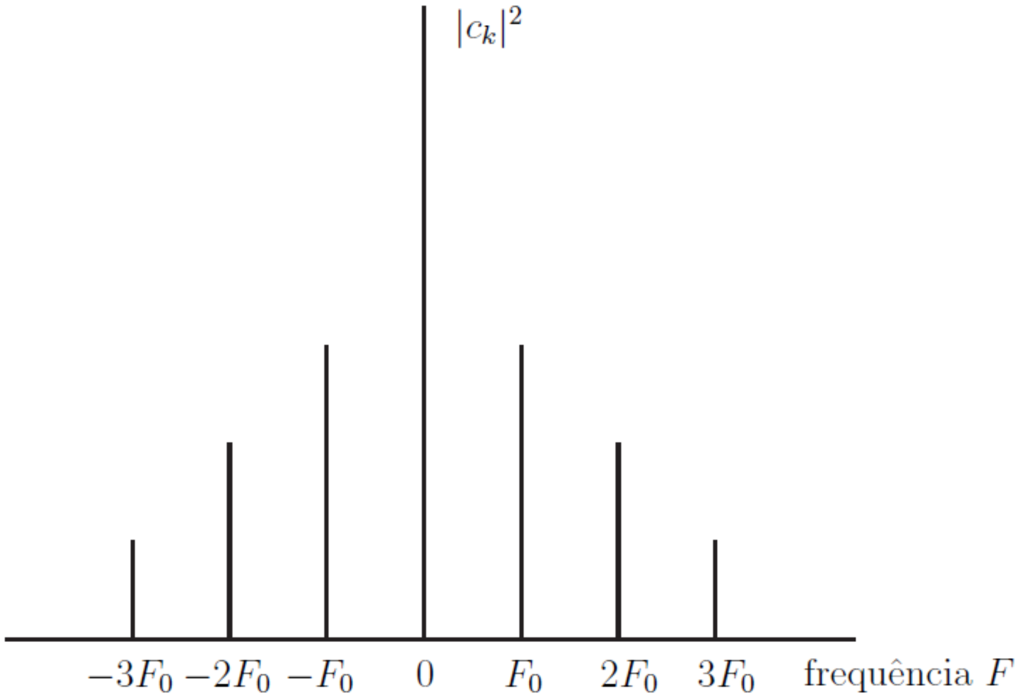
Uma interpretação física para a relação de Parseval é dada a seguir.

Seja $x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$ uma exponencial complexa. Neste caso, todos os coeficientes da série de Fourier serão nulos exceto c_k, e consequentemente $P_x = |c_k|^2$. O termo $|c_k|^2$ representa a potência média da harmônica k.

Análise em Frequência

Densidade Espectral de Potência de Sinais Contínuos e Periódicos:

A potência média total de um sinal periódico será dada pela soma das potências médias de todas as harmônicas, caracterizando a densidade espectral de potência como ilustrado ao lado, onde $|c_k|^2$ é apresentado como uma função de kF_0, $k = 0,\pm 1,\pm 2, \ldots$



Análise em Frequência

Densidade Espectral de Potência de Sinais Contínuos e Periódicos:

A densidade espectral de potência apresenta como a potência de um sinal periódico é distribuída para as várias frequências componentes do sinal.

Algumas considerações são:

- ✓ c_k é um número complexo e então pode ser representado graficamente em termos do módulo $|c_k|$ e da fase θ_k.

- ✓ para um sinal real, $c_{-k} = c^*_k \Rightarrow |c_k|^2 = |c^*_k|^2$, o que leva à simetria do espectro, e neste caso tem-se:

$$P_x = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Para um sinal periódico emprega-se a série de Fourier, que gera um espectro formado por linhas igualmente espaçadas, cujo espaçamento é a frequência fundamental.

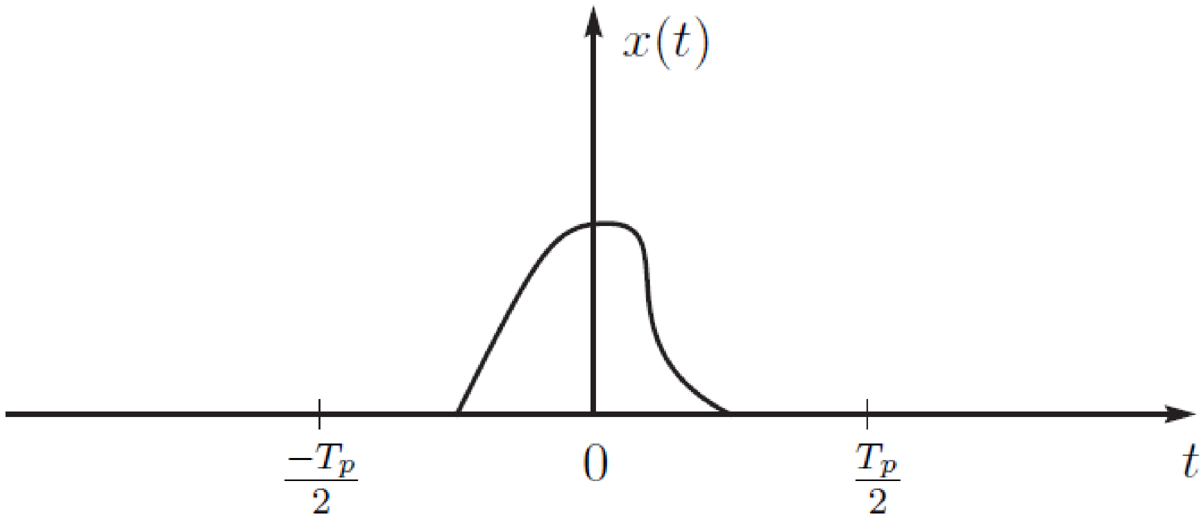
Neste caso, se o período cresce ilimitadamente, então o espaçamento entre as linhas tende a zero.

Se o período é igual a infinito, então o sinal é aperiódico, e obtém-se um espectro contínuo.

Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

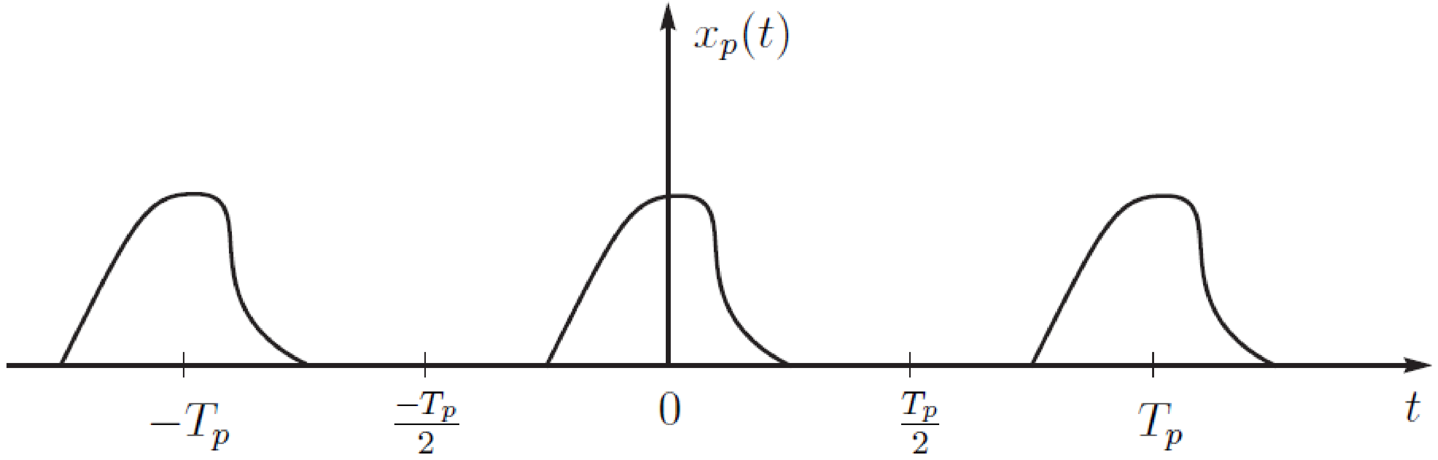
Seja um sinal não periódico *x(t)* com duração finita conforme mostrado abaixo:



Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Seja um sinal periódico $x_p(t)$ com período T_p conforme mostrado abaixo:



Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Quando $T_p \rightarrow \infty$, então $x_p(t) = x(t)$. Assim, é possível obter o espectro de $x(t)$ através do espectro de $x_p(t)$ quando $T_p \rightarrow \infty$.

A série de Fourier para $x_p(t)$ é dada por:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \quad com \quad F_0 = \frac{1}{T_p},$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt.$$

Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Para $-T_p/2 \leq t \leq T_p/2$ então $x_p(t) = x(t)$, e consequentemente,

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}dt,$$

pois $x(t) = 0$ para $|t| > T_p/2$.

Define-se a transformada de Fourier $X(F)$ do sinal $x(t)$ como sendo:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt.$$

Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Através de uma comparação escreve-se que $c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0)$, ou $T_p c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right)$ com $F = kF_0$, ou seja, os coeficientes de Fourier são amostragens de $X(F)$ feitas em múltiplos de F_0 e escalonados por F_0 (ou $1/T_p$).

Portanto,

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2\pi k F_0 t}.$$

Seja $1/T_p = \Delta F = F_0$. Logo,

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k \Delta F t} \Delta F.$$

Análise em Frequência

Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos:

Quando $T_p \rightarrow \infty$, então $x_p(t) \rightarrow x(t)$, $\Delta F = dF$, $k\,\Delta F = F$. Logo,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dF,$$

que representa a transformada inversa de Fourier.

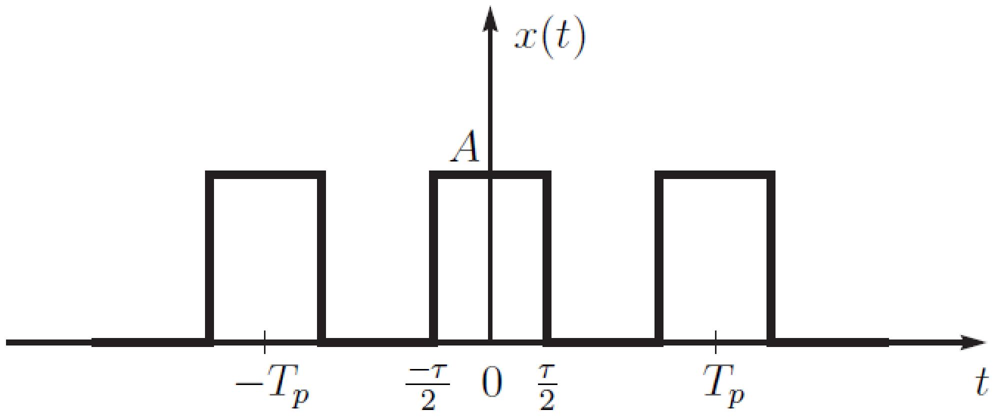
Para a frequência em radianos por segundo, $\Omega = 2\pi F$, escreve-se a transformada de Fourier como:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt,$$

E a transformada inversa como: $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Problema Exemplo 10.1

Determinar a série de Fourier e a densidade espectral de potência de um trem de pulsos retangulares conforme mostrado abaixo.



Solução:

<u>Dados</u>: forma gráfica de um trem de pulso retangulares.

<u>Resultado desejado</u>: série de Fourier e a densidade espectral de potência.

<u>Hipóteses</u>: sinal contínuo periódico.

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: o trem de pulsos é periódico de período fundamental T_p. Observa-se que se trata de um sinal ímpar, $x(t) = x(-t)$. É conveniente escolher o intervalo de integração de $-T_p/2$ até $T_p/2$. A frequência fundamental é dada por $F_0 = 1/T_p$.

Para $k = 0$ tem-se:

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t)dt = \frac{A\tau}{T_p},$$

que representa o valor médio do sinal $x(t)$.

Para $k \neq 0$ tem-se:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j2\pi F_0 kt}dt = \frac{A}{T_p}\left(\frac{e^{-j2\pi F_0 kt}}{-j2\pi F_0 k}\right)\Bigg|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} =$$

Problema Exemplo 10.1

Cálculos:

$$= \frac{A}{\pi F_0 k T_p}\left(\frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{2j}\right) = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{sen(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$c_k = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{sen(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau} = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{sen\phi}{\phi},$$

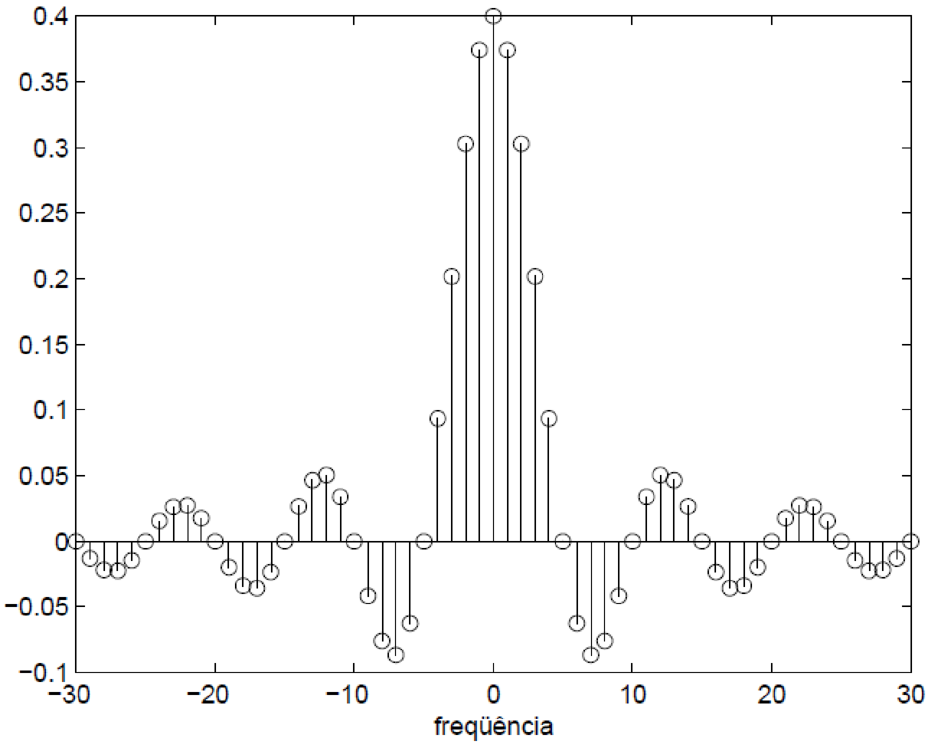
com $\phi = \pi k F_0 \tau$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

A densidade espectral de potência do trem de pulsos é dada por:

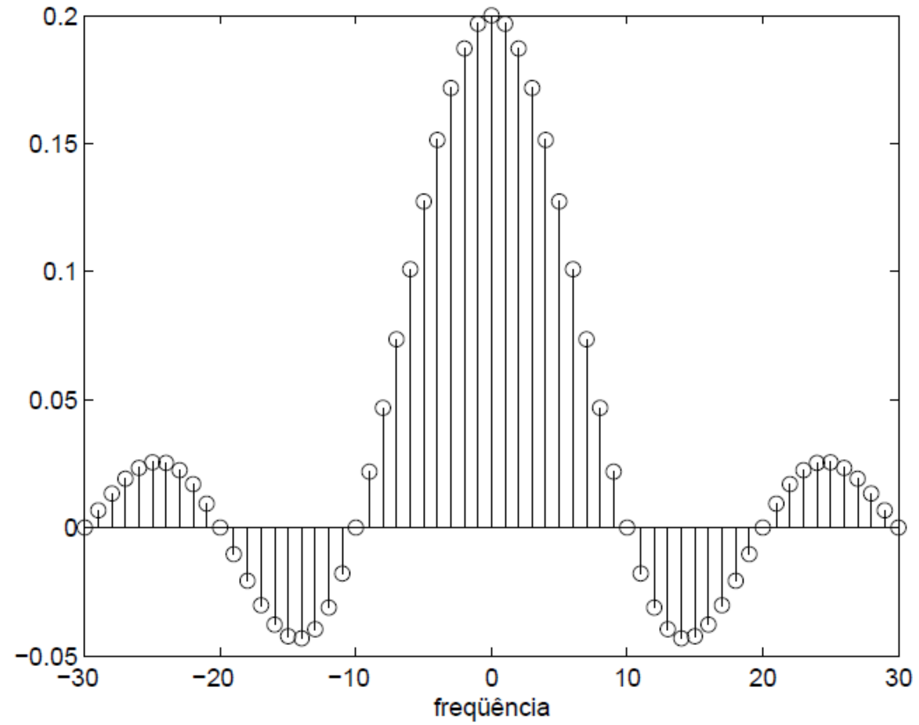
$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{A\tau}{T_p}\right)^2 \quad para \quad k = 0, \\ \left(\frac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left[\frac{sen(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau}\right]^2, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{cases}$$

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: as figuras abaixo apresentam os gráficos dos coeficiente da série de Fourier para dois valores distintos de τ.



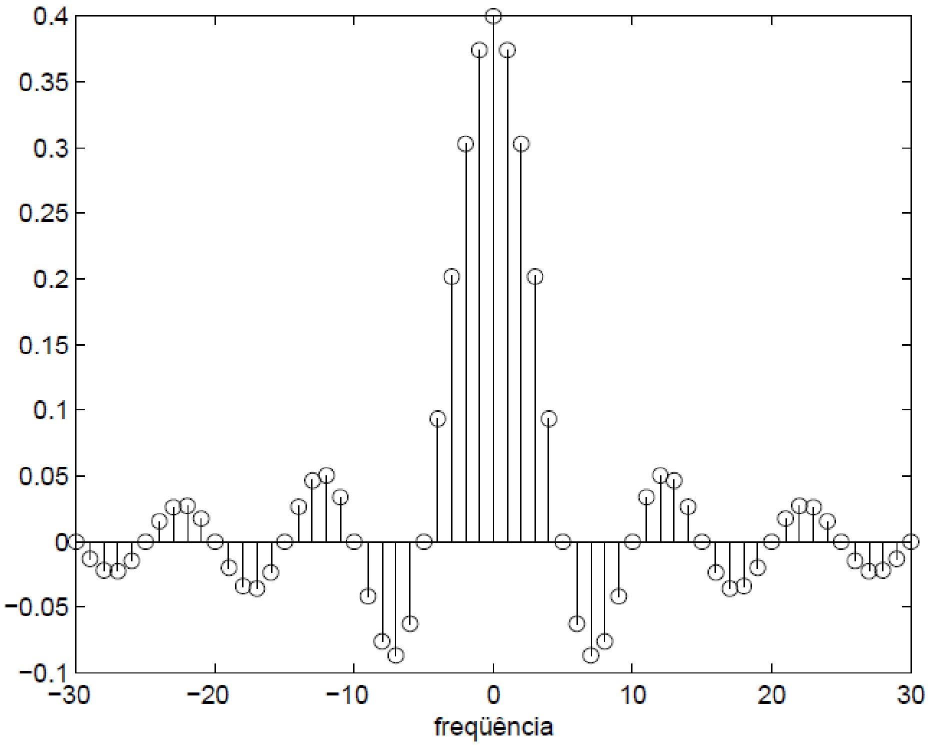
$T_p = 1$, $A = 2$ e $\tau = 0{,}2$



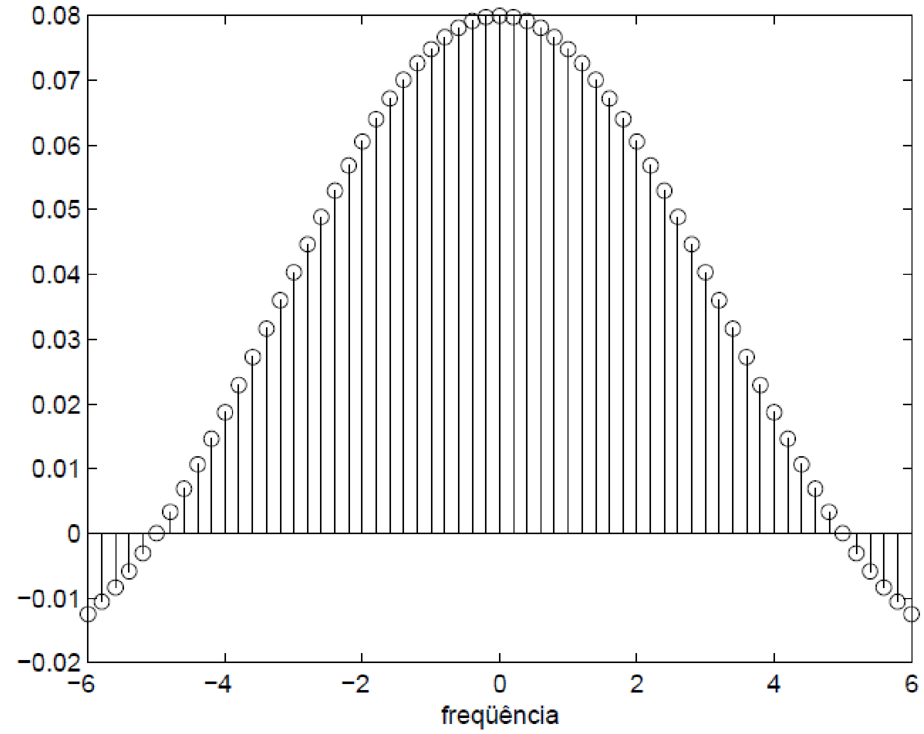
$T_p = 1$, $A = 2$ e $\tau = 0{,}1$

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: as figuras abaixo apresentam os gráficos dos coeficiente da série de Fourier para dois valores distintos de T_p.



$T_p = 1, A = 2$ e $\tau = 0{,}2$



$T_p = 5, A = 2$ e $\tau = 0{,}2$

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: verifica-se que para T_p fixo e se diminuindo τ (menor largura do pulso) ocorre um espalhamento da potência do sinal sobre toda a faixa de frequência.

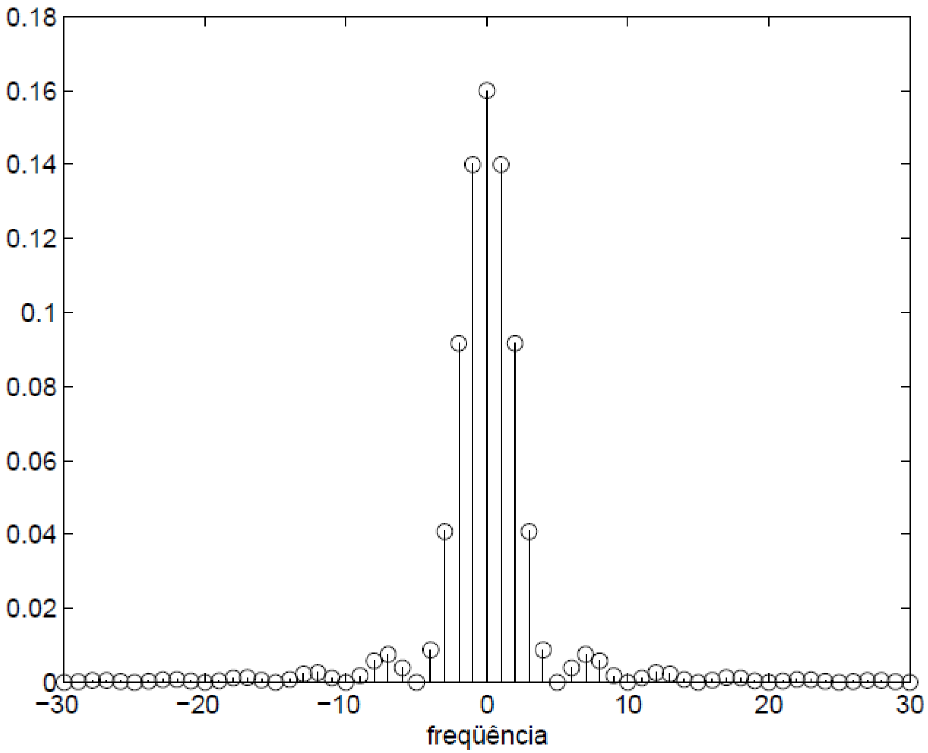
Para τ fixo e aumentado T_p verifica-se uma diminuição do espaçamento entre as linhas espectrais adjacentes. Para T_p muito grande, c_k torna-se pequeno, e quando $T_p \rightarrow \infty$, a potência média tende a zero.

Nota-se que para $k \neq 0$ e $sen(\pi k F_0 \tau) = 0$, então $c_k = 0$. Neste caso, as harmônicas com potência nula ocorrem para frequências tais que $\pi(kF_0)\tau = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2$, ..., ou ainda, $kF_0 = m\tau$.

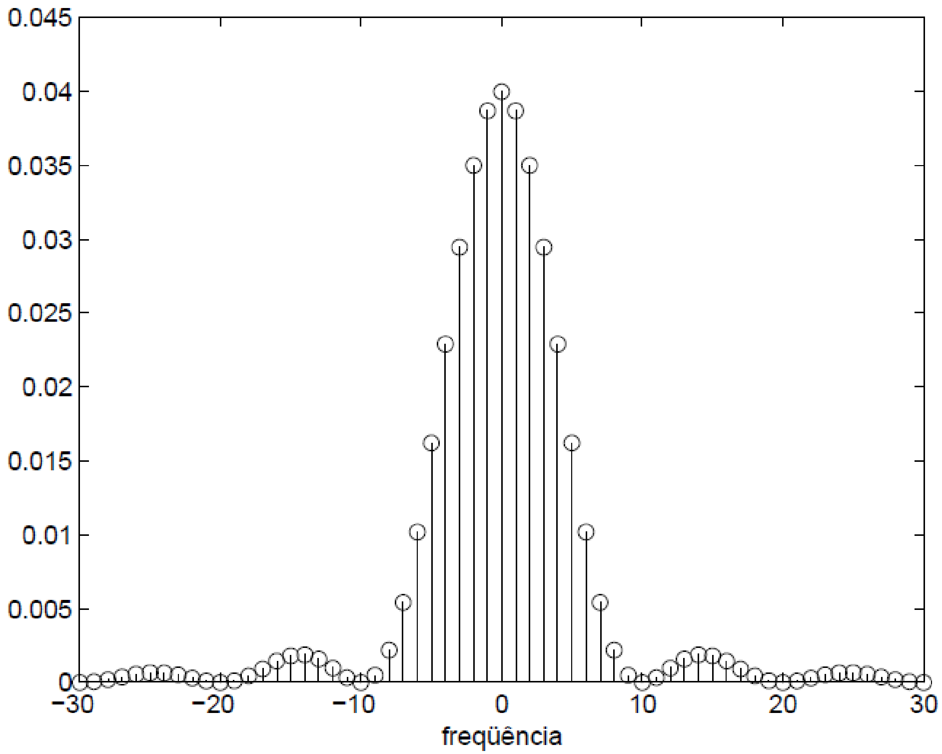
Os gráficos da densidade espectral de potência para os casos anteriores estão apresentadas nas figuras dos slides 34 e 35.

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: as figuras abaixo apresentam os gráficos densidade espectral de potência para dois valores distintos de τ.



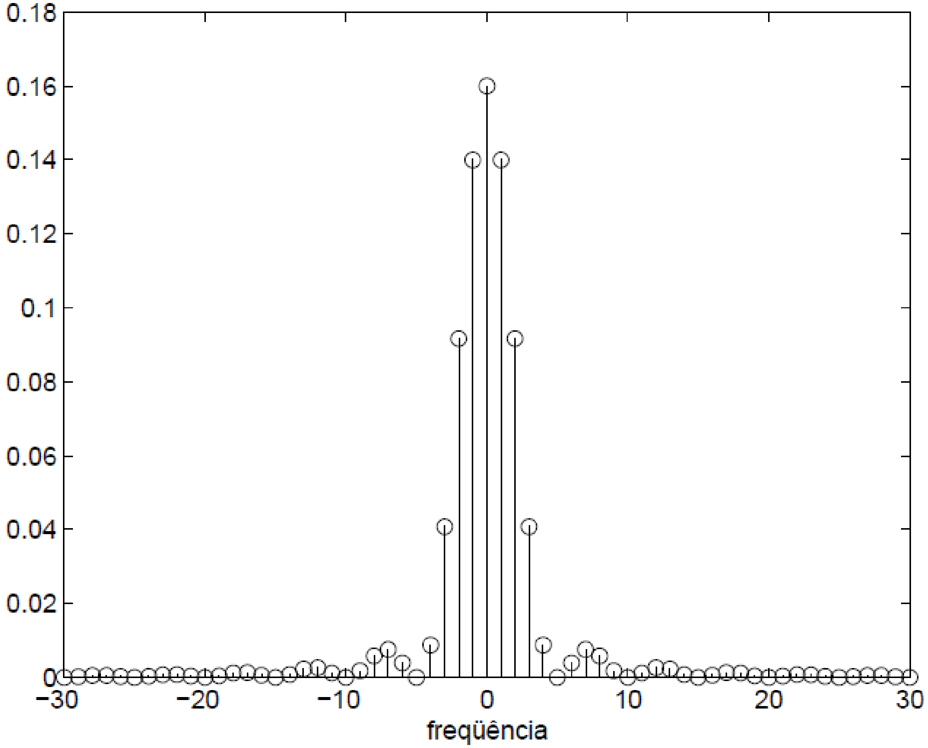
$T_p = 1, A = 2$ e $\tau = 0{,}2$



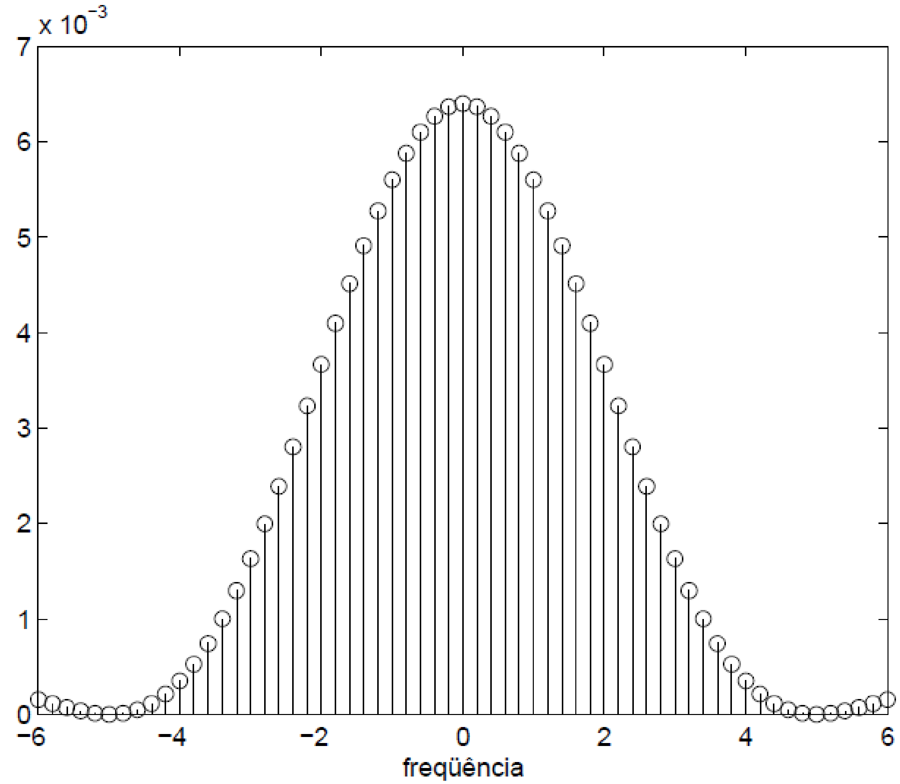
$T_p = 1, A = 2$ e $\tau = 0{,}1$

Problema Exemplo 10.1

Cálculos: as figuras abaixo apresentam os gráficos densidade espectral de potência para dois valores distintos de T_p.



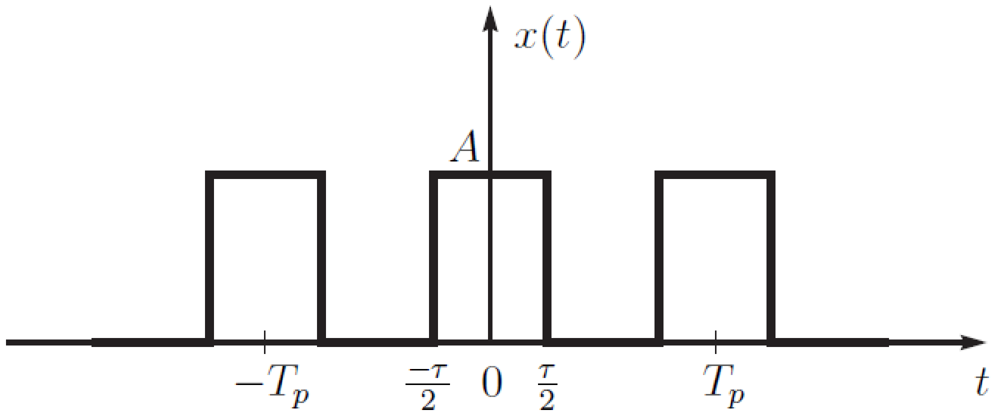
$T_p = 1, A = 2$ e $\tau = 0{,}2$



$T_p = 5, A = 2$ e $\tau = 0{,}2$

Problema Exemplo 10.2

Considere o pulso retangular do exemplo anterior com $T_p = 2$, $A = 2$ e $\tau = 1$. Verificar o efeito da inclusão das harmônicas para a representação deste sinal.



Solução:

Dados: forma gráfica de um trem de pulso retangulares e valores de T_p, A e τ.

Resultado desejado: o efeito da inclusão das harmônicas.

Hipóteses: sinal contínuo periódico.

Problema Exemplo 10.2

Cálculos: a frequência fundamental é $F_0 = 1/T_p = 0,5$.

- ✓ Para $k = 0$ tem-se:

$$c_0 = \frac{A\tau}{T_p} = \frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

- ✓ Para $k = 1$ tem-se:

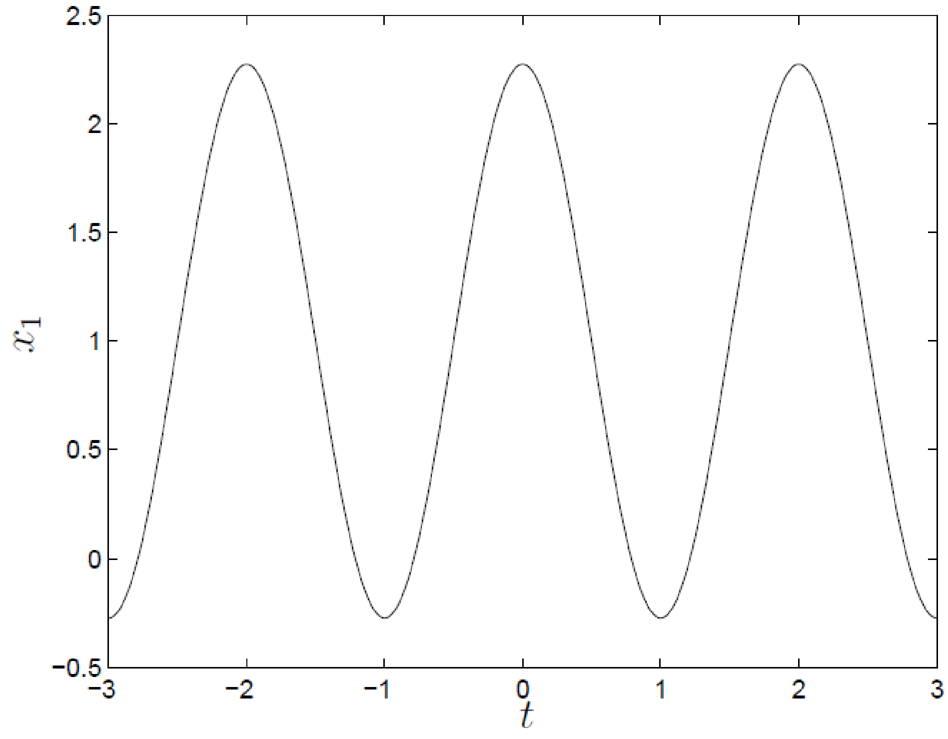
$$c_1 = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{sen(\pi F_0 \tau)}{\pi F_0 \tau} = 1 \times \frac{sen(0.5\pi)}{0.5\pi} = 0.6366,$$

$$a_1 = 2Re(c_1) = 2 \times 0.6366, \quad b_1 = 2Imag(c_1) = 0,$$

Problema Exemplo 10.2

Cálculos: e a primeira harmônica (*k* = *1*) será dada por:

$$x_1(t) = c_0 + a_1 cos(2\pi \times 1F_0 t) - b_1 sin(2\pi \times 1F_0 t),$$



Problema Exemplo 10.2

Cálculos:

- ✓ Para $k = 2$ tem-se:

$$c_2 = 0,$$

$$a_1 = 2Re(c_2) = 0, \quad b_2 = 2Imag(c_2) = 0,$$

$$x_2(t) = x_1(t) + 0.$$

- ✓ Para $k = 3$ tem-se:

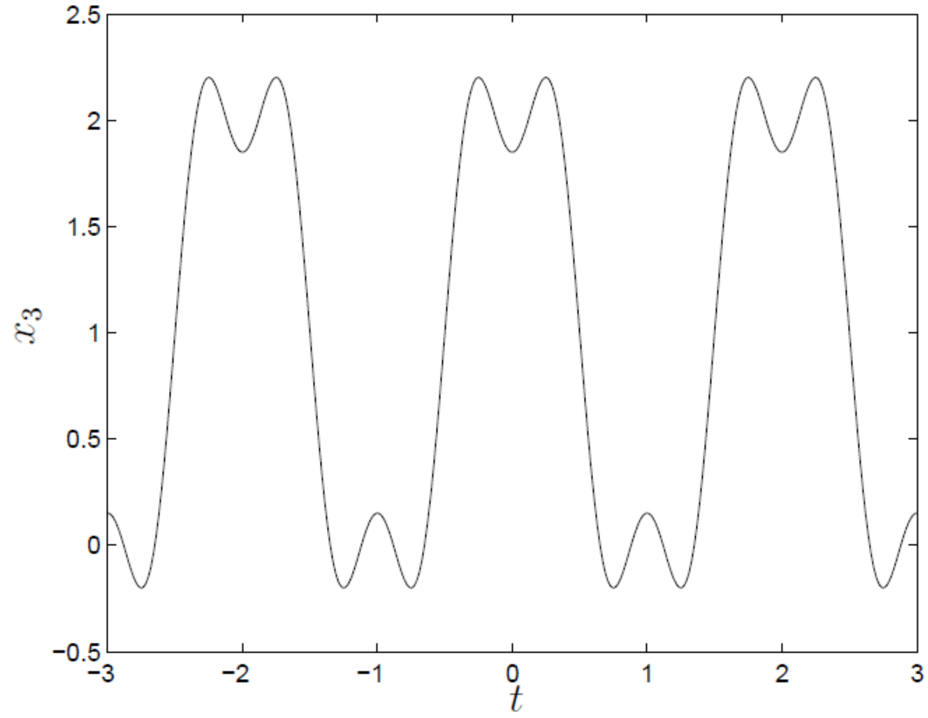
$$c_3 = -0.2122,$$

$$a_3 = 2Re(c_3) = 2 \times -0.2122, \quad b_3 = 2Imag(c_3) = 0,$$

$$x_3(t) = x_2(t) + a_3 cos(2\pi \times 3F_0 t) - b_3 sin(2\pi \times 3F_0 t),$$

Problema Exemplo 10.2

Cálculos:



- ✓ Para *k* = *4* tem-se:

$$c_4 = 0,$$

$$a_4 = 2Re(c_4) = 0, \quad b_4 = 2Imag(c_4) = 0,$$

$$x_4(t) = x_3(t) + 0.$$

Problema Exemplo 10.2

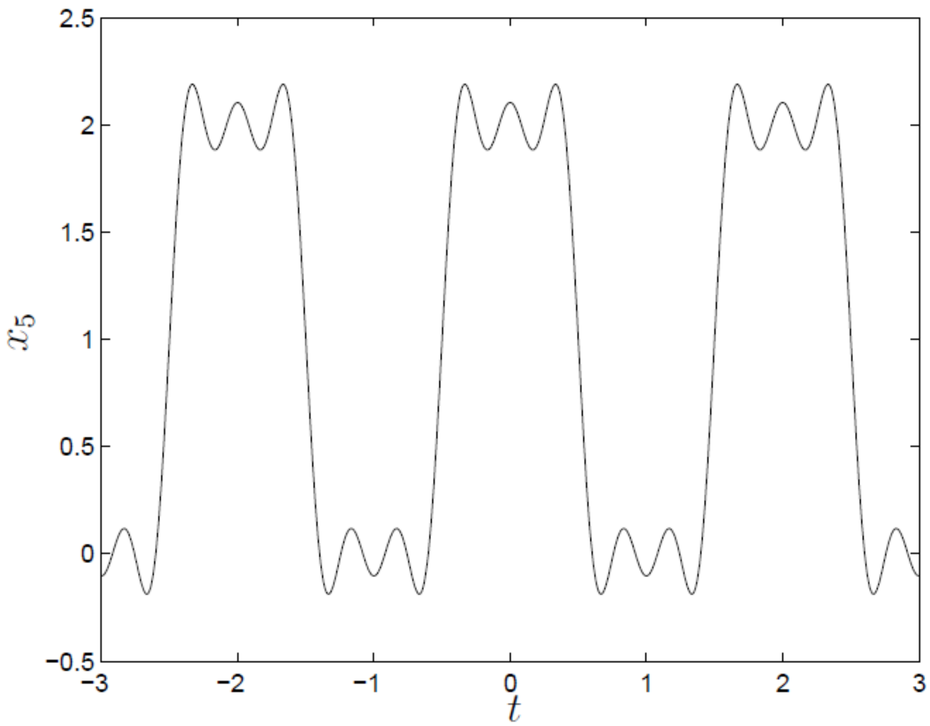
Cálculos:

✓ Para *k* = *5* tem-se:

$$c_5 = 0.1273,$$

$$a_5 = 2Re(c_5) = 2 \times 0.1273, \quad b_5 = 2Imag(c_5) = 0,$$

$$x_5(t) = x_4(t) + a_5 cos(2\pi \times 5F_0 t) - b_5 sin(2\pi \times 5F_0 t)$$



Nota-se que a representação vai se aproximando da onda retangular original do sinal com o aumento das harmônicas!

Encerramento

Final da aula 10.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – 4.2.

Apostila ES879 disponibilizada – LISTA 5 – 1, 2, 3 e 4.

Próxima aula:

Análise em Frequência.

19/09/2019