UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 6 – Sistemas Discretos

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Filtros Analógicos

- ✓ Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda;

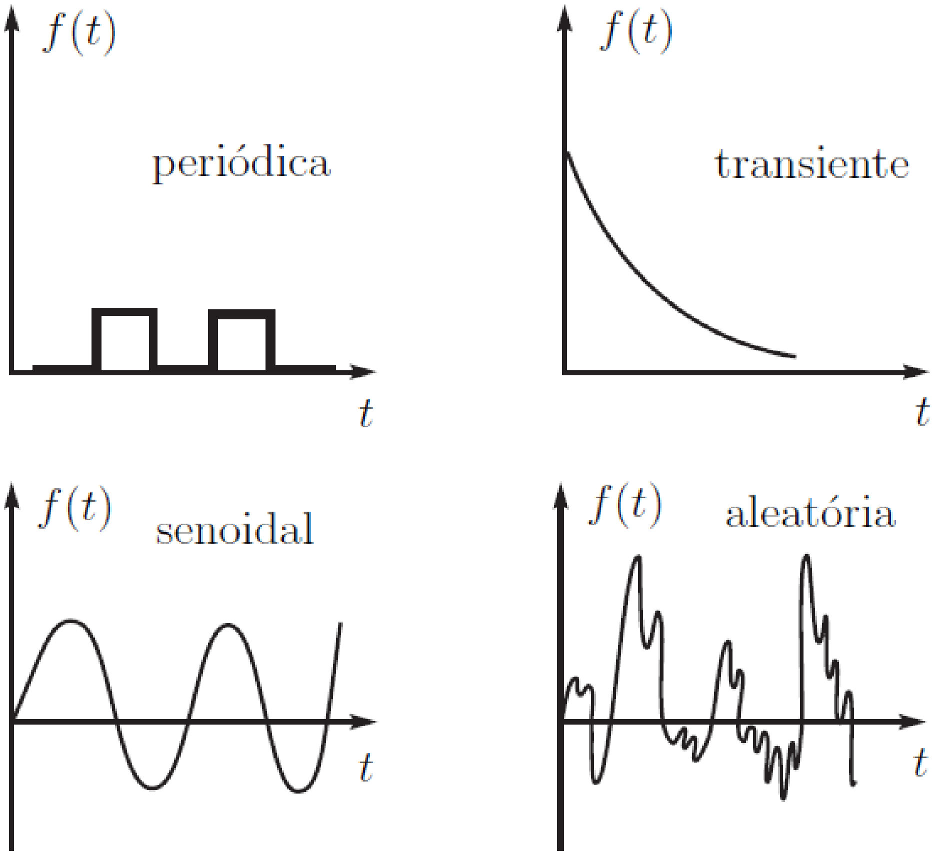
- ✓ Filtros Chebyshev: característica em frequência, tipos *1* e *2* e polinômios de Chebyshev;

- ✓ Escolha da Ordem do Filtro Chebyshev;

- ✓ Projeto de Filtros Chebyshev do Tipo *1* à partir das especificações.

Fundamentos de Sistemas Discretos

Um sinal contínuo é uma função do tempo (um valor real para cada valor de tempo), como mostrado abaixo.



Fundamentos de Sistemas Discretos

Um sistema contínuo relaciona uma entrada contínua a uma saída contínua, conforme ilustrado abaixo.

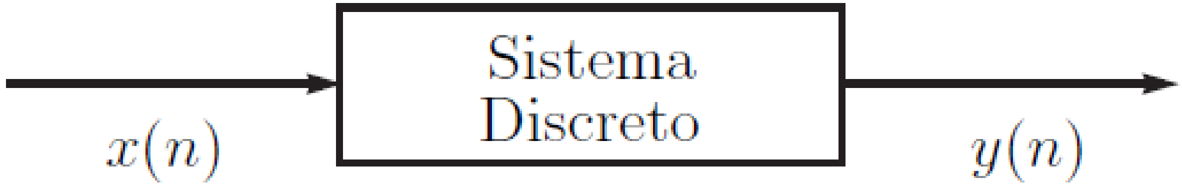
Fundamentos de Sistemas Discretos

Um sinal discreto é uma sequência, ou uma função, definida para números inteiros, ou seja,

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n),$$

e quando $x_I(n) = 0$, então $x(n)$ é uma sequência real.

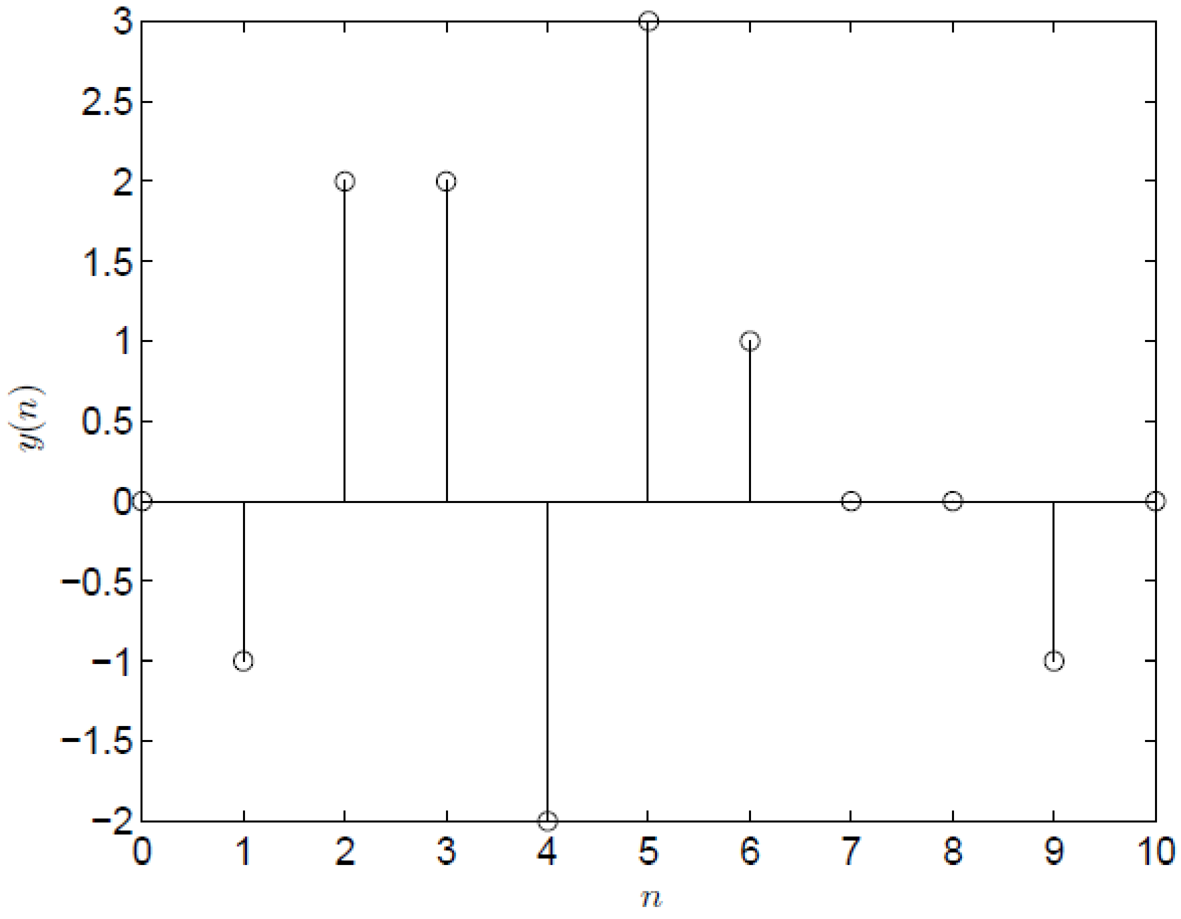
Um sistema discreto é um mapeamento do conjunto discreto de entradas para o conjunto discreto de saída, conforme ilustrado abaixo.



Fundamentos de Sistemas Discretos

Um sinal digital é um sinal discreto cujos valores pertencem a um conjunto finito.

Por exemplo, um sinal digital para valores de $\{-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3\}$ é ilustrado ao lado. Já um sistema digital é aquele que relaciona um sinal digital de entrada a um sinal digital de saída.



Fundamentos de Sistemas Discretos

Sinais Discretos Importantes:

Uma sequência real é denotada como:

$$\{x(n), n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty\}.$$

Se um sinal contínuo *x(t)* é amostrado a cada *T* segundos, uma sequência *{x(nT)}* resulta. Para simplificar a notação será usada apenas a simbologia *x(n)*, i.e.,

$$\{x(nT)\} \rightarrow x(n).$$

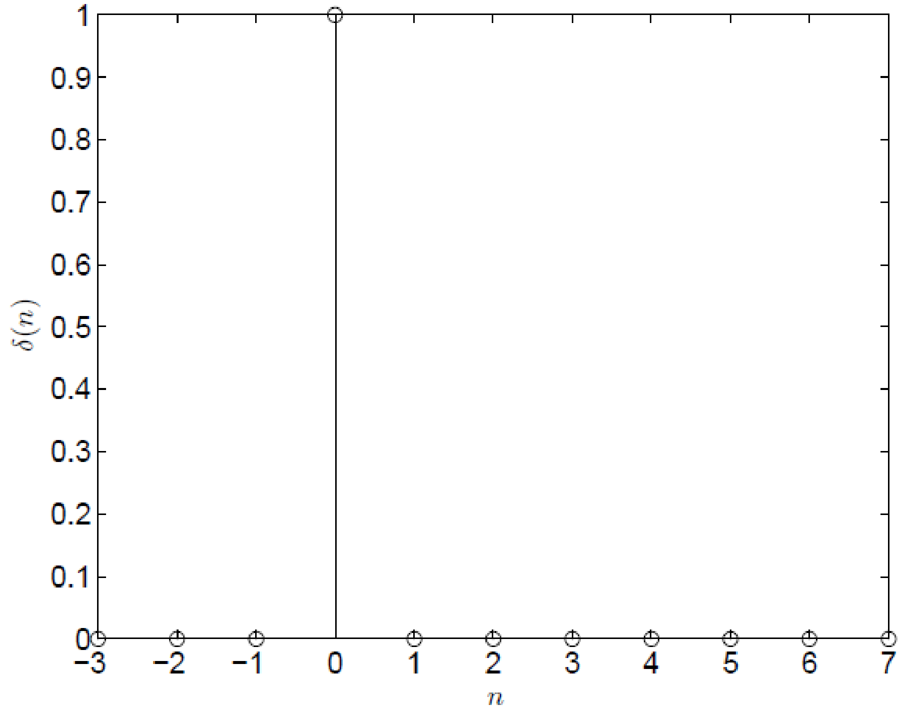
Fundamentos de Sistemas Discretos

Sinais Discretos Importantes:

Alguns sinais discretos importantes são listados a seguir.

1. O impulso unitário discreto é definido como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & se \quad n = 0, \\ 0 & se \quad n \neq 0. \end{cases}$$

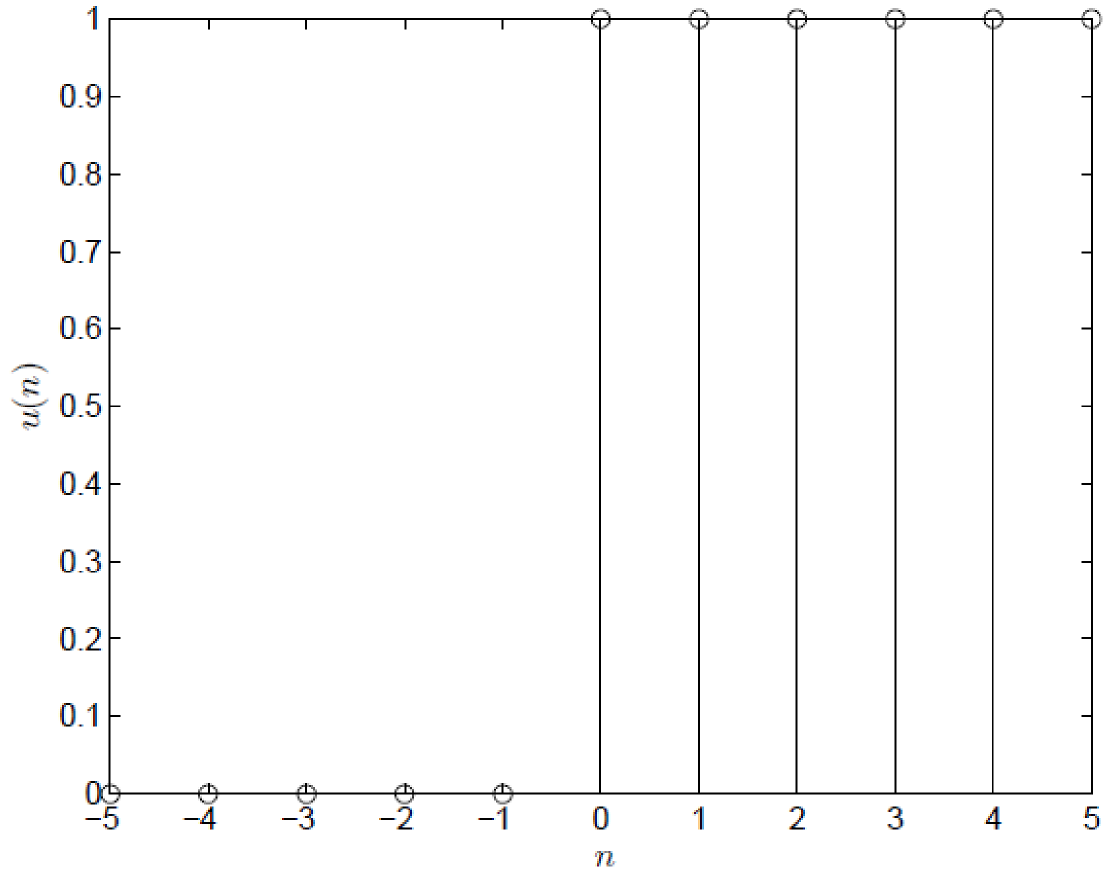


Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Sinais Discretos Importantes</u>:

2. O degrau unitário discreto é definido como:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & se \quad n \geq 0, \\ 0 & se \quad n < 0, \end{cases}$$



Fundamentos de Sistemas Discretos

Sinais Discretos Importantes:

3. Uma sequência exponencial real é dada por:

$$x(n) = a^n.$$

4. Uma sequência senoidal é dada por:

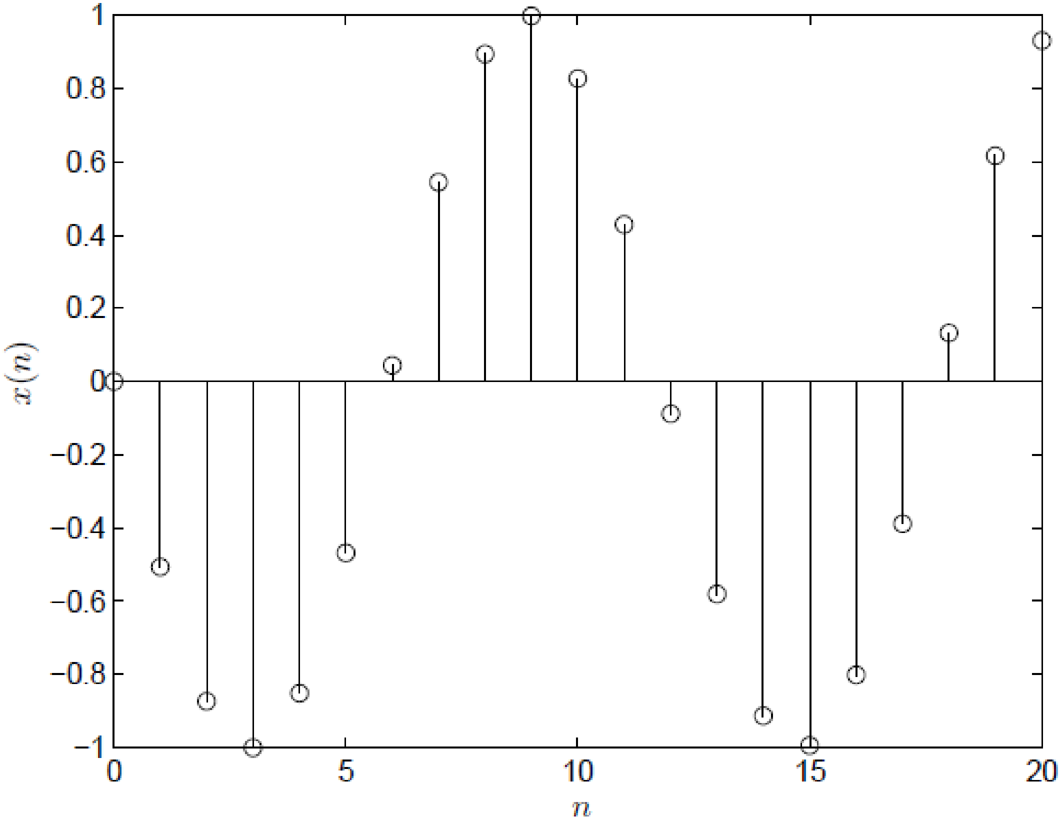
$$x(n) = Asen(\omega_0 n).$$

Um sinal discreto periódico é aquele em que $x(n) = x(n + P)$ com P inteiro. O menor valor de P que satisfaz a condição de periodicidade é o período do sinal. A sequência senoidal é periódica se $\omega_0/2\pi$ é racional (razão de dois inteiros). Se $\omega_0/2\pi$ não é racional, então a sequência não é periódica.

Fundamentos de Sistemas Discretos

Sinais Discretos Importantes:

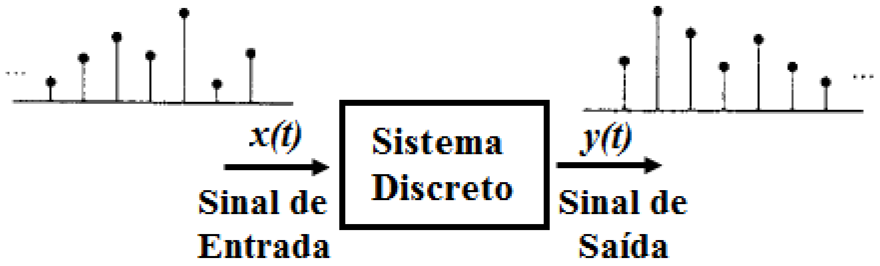
A figura abaixo mostra uma senóide discreta.



Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Sistemas Discretos</u>:

Um sistema discreto é um dispositivo ou um algoritmo que realiza uma operação em um sinal discreto, chamado de sinal de entrada (*input*), de acordo com alguma regra bem estabelecida, para produzir um outro sinal discreto chamado de sinal de saída ou resposta (*output* ou *response*) do sistema.



$$y(n) \equiv \mathrm{T}[x(n)]$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

1. Energia → A energia de uma sequência é definida como:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2,$$

onde $x^*(n)$ é o complexo conjugado de $x(n)$.

Se a energia do sinal é finita, o sinal é chamado de sinal de energia (*energy signal*). Se $x(n) = x^*(n)$, ou seja, $x(n)$ é uma sequência real, então:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n).$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

2. Potência Média → A potência média de um sinal é definida como:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2.$$

Seja a energia do sinal no intervalo de $-N \leq n \leq N$ dada por:

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2.$$

Neste caso, a energia é dada por:

$$E = \lim_{N\to\infty} E_N,$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

e a potência média será dada por:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} E_N.$$

Se a energia é finita, então a potência média será nula. Se a energia é infinita, então a potência pode ser finita ou infinita. Se a potência média é finita e não nula, o sinal é chamado de sinal de potência (*power signal*).

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

3. Sinal par → Um sinal é par, ou simétrico, se $x(-n) = x(n)$.

4. Sinal ímpar → Um sinal é ímpar, ou antissimétrico, se $x(-n) = -x(n)$. Nota-se que neste caso, $x(0) = 0$.

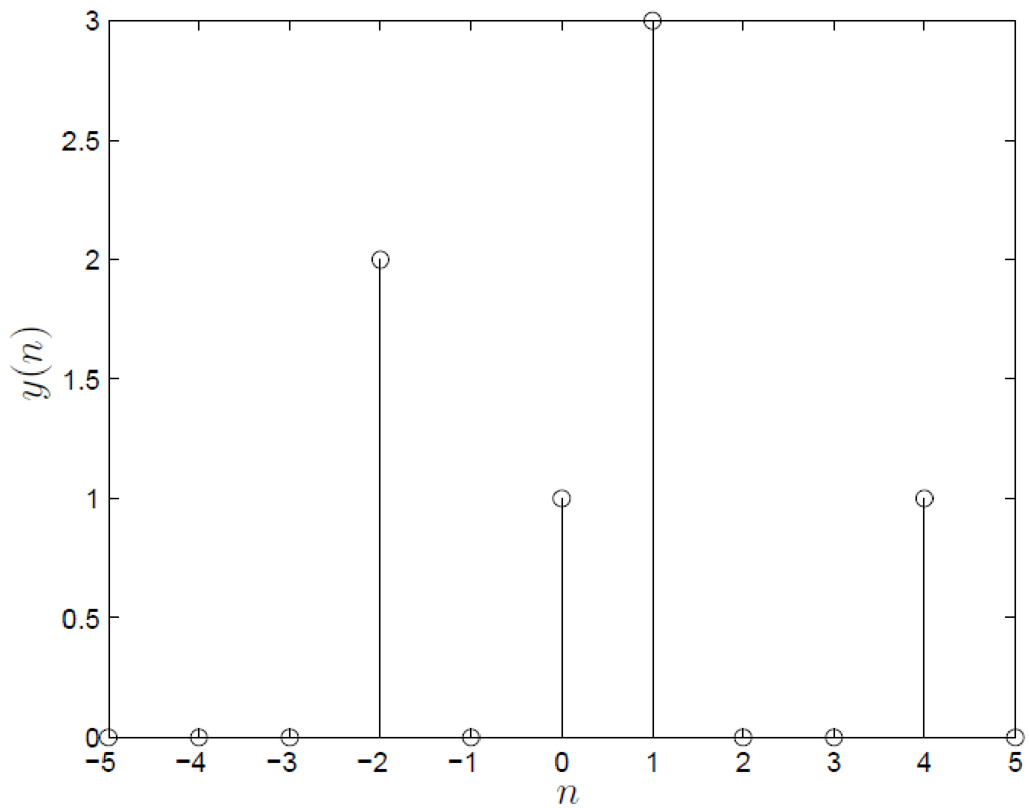
5. Sinal em função de impulsos → Um sinal discreto pode ser escrito como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

$$y(n) = y(-2)\delta(n+2) + y(0)\delta(n) + y(1)\delta(n-1) + y(4)\delta(n-4)$$



Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

6. Linearidade → Um sistema discreto pode ser caracterizado por uma transformação (ou operador) *T* que relaciona a saída *y(n)* à entrada *x(n)*, ou seja,

$$y(n) = T[x(n)].$$

Um sistema discreto é linear quando se aplica o princípio da superposição, ou seja,

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)].$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

7. Invariância no tempo → Um sistema discreto é invariante no tempo quando seus coeficientes não variam com o tempo, ou seja, se *y(n) = T[x(n)]* então,

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0).$$

8. Resposta de sistemas lineares em termos da resposta impulsiva → Seja a resposta do sistema *T(·)* ao um impulso aplicado no tempo *k* dada por:

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)].$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

A resposta do sistema a uma entrada *x(n)* será dada por:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n).$$

Portanto, a resposta de um sistema discreto linear pode ser escrita como uma soma ponderada de $h_k(n)$ pela entrada $x(\cdot)$.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

9. Convolução → Se *x(n)* é a entrada de um sistema linear e invariante caracterizado por *T[·]*, então a saída *y(n)* é dada por:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k),$$

onde *h(n)* = *T[δ(n)]* é a resposta ao impulso.

Esta soma é conhecida como soma de convolução e é denotada por:

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n).$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

Algumas propriedades da convolução são:

(a) $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$;

(b) $x(n) * (y(n) * z(n)) = (x(n) * y(n)) * z(n)$;

(c) $x(n) * (y(n) + z(n)) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$;

(d) $x(n) * \delta(n) = \delta(n) * x(n) = x(n)$;

(e) $x(n) * \delta(n - k) = x(n - k)$.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

10. Estabilidade BIBO (*bounded-input, bounded-output*) → A sequência *x(n)* é limitada se existe um *M* finito tal que:

$$|x(n)| < M, \quad para\ todo\ n.$$

Um sistema discreto é BIBO estável se toda sequência limitada de entrada *x(n)* produz uma saída também limitada. Um sistema linear e invariante com resposta *h(n)* ao impulso é BIBO estável se e somente se:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$ é finito (soma absoluta finita).

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

Prova: suponha que a entrada *x(n)* é limitado, ou seja |*x(n)*| < *M*. A saída do sistema é dada por:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Logo,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)x(n-k)|,$$

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} M|h(k)| = MS,$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

Algumas Propriedades:

e portanto,

$$|y(n)| < MS,$$

ou seja, o sistema é BIBO estável já que toda entrada limitada produz uma saída limitada quando S é finito.

Em resumo, sistema BIBO estável $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < S$ (finito), ou ainda, a soma em módulo da resposta ao impulso é finita.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

11. Causalidade → Um sistema discreto é causal se a saída para $n = n_0$ depende apenas da entrada para $n \leq n_0$. Um sistema causal também pode ser chamado de realizável ou não antecipatório.

Uma sequência discreta é causal se tem valores nulos para $n < 0$.

Um sistema linear e invariante (LTI) é causal se a resposta ao impulso $h(n)$ é nula para $n < 0$.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Algumas Propriedades</u>:

Prova: a resposta do sistema é dada por: $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Se $h(n) = 0$ para $n < 0$ então $h(n - k) = 0$ para $n - k < 0$ ou $k > n$. Pode-se escrever que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k),$$

de onde se verifica que a resposta $y(n)$ só depende de valores passados ou do valor presente da entrada.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Filtros FIR e IIR</u>:

Um filtro FIR (*finite impulse response*) é um sistema linear e invariante que possui uma resposta finita ao impulso, ou seja,

$$h(n) = \begin{cases} valores\ não\ nulos\ para\ n_1 \leq n \leq n_2, \\ 0\ para\ os\ demais, \end{cases}$$

onde *h(n)* é a resposta ao impulso.

Um filtro IIR (*infinite impulse response*) é um sistema em que a resposta ao impulso unitário é de duração infinita.

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Filtros FIR e IIR</u>:

Um sistema causal linear e invariante caracterizado por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r),$$

será FIR se $a_0 \neq 0$ e $a_k = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, N$. Caso contrário poderá ser IIR ou FIR.

Prova: Seja $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Logo,

$$a_0 y(n-0) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r), \qquad y(n) = \sum_{r=0}^{M} \underbrace{\left(\frac{b_r}{a_0}\right)}_{h(r)} x(n-r),$$

Fundamentos de Sistemas Discretos

<u>Filtros FIR e IIR</u>:

O resultado anterior representa uma convolução.

Portanto,

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio, \end{cases}$$

que é de duração finita.

Problema Exemplo 6.1

Em cada um dos itens abaixo, verifique o que se pede:

a) determine se os sistemas descritos pelas relações entrada e saída são lineares:

a.1 $\rightarrow$ $y(n) = nx(n)$ e a.2 $\rightarrow$ $y(n) = x^2(n)$

b) determine se os sistemas descritos pelas relações entrada e saída são causais:

b.1 $\rightarrow$ $y(n) = x(n) - x(n-1)$ e b.2 $\rightarrow$ $y(n) = x(2n)$

c) determine se o sistema descrito pela relação entrada e saída é estável:

$$y(n) = y^2(n-1) + x(n)$$

Solução:

Dados: relações entrada e saída de vários sistemas.

Resultado desejado: classificar cada um dos sistemas conforme solicitado.

Hipóteses: sistemas discretos.

Problema Exemplo 6.1

Cálculos: para o item a.1:

Seja duas sequências de entrada $x_1(n)$ e $x_2(n)$, as respectivas saídas serão:

$$y_1(n) = nx_1(n) \qquad \text{e} \qquad y_2(n) = nx_2(n)$$

Uma combinação linear das duas sequências de entrada gera uma saída:

$$y_3(n) = T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

Por outro lado, uma combinação linear das duas saídas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ gera:

$$y_4(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

Como $y_3(n)$ e $y_4(n)$ são idênticos, o sistema é linear.

Problema Exemplo 6.1

<u>Cálculos</u>: para o item a.2:

Seja duas sequências de entrada $x_1(n)$ e $x_2(n)$, as respectivas saídas serão:

$$y_1(n) = x^2{}_1(n) \qquad \text{e} \qquad y_2(n) = x^2{}_2(n)$$

Uma combinação linear das duas sequências de entrada gera uma saída:

$$y_3(n) = T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2$$

Por outro lado, uma combinação linear das duas saídas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ gera:

$$y_4(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x^2{}_1(n) + a_2x^2{}_2(n)$$

Claramente $y_3(n)$ e $y_4(n)$ são diferentes, logo, o sistema não é linear.

Problema Exemplo 6.1

Cálculos: para o item b.1:

Claramente pode-se perceber que as saídas do sistema só dependem de entradas presentes e passadas, logo, o sistema é causal.

para o item b.2:

Claramente pode-se perceber que as saídas do sistema dependem de entradas futuras, logo, o sistema é não-causal.

Problema Exemplo 6.1

<u>Cálculos</u>: para o item c:

Seja uma sequência de entrada $x(n)$ dada por:

$$x(n) = C\delta(n)$$

onde C é constante. Assumindo $y(-1) = 0$, a saída do sistema será:

$$y(0) = C \qquad y(1) = C^2 \qquad y(2) = C^4 \qquad \ldots \qquad y(n) = C^{2n}$$

Claramente a saída é não-limitada quando $1 < |C| < \infty$. Portanto, o sistema é BIBO instável, uma vez que uma sequência de entrada limitada gera uma sequência de saída ilimitada.

Problema Exemplo 6.2

Os seguintes pares de entrada-saída foram observados durante a operação de um sistema invariante no tempo:

$$x_1(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 0] \quad \leftrightarrow \quad y_1(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 1, 2]$$

$$x_2(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 0, 1] \quad \leftrightarrow \quad y_2(n) = [\underset{\uparrow}{0}, 1, 2]$$

$$x_3(n) = [\underset{\uparrow}{0}, 0, 1] \quad \leftrightarrow \quad y_3(n) = [1, \underset{\uparrow}{0}, 1]$$

Com estas informações, pode-se tirar conclusões sobre a linearidade do sistema?

Solução:

<u>Dados</u>: relações entre entradas e saídas de um sistema.

<u>Resultado desejado</u>: verificar se o sistema é linear.

<u>Hipóteses</u>: sistema discreto invariante no tempo.

Problema Exemplo 6.2

Cálculos: através do terceiro par, pode-se observar que:

$$x_3(n) = \delta(n\text{-}2)$$

E como o sistema é invariante no tempo, tem-se que:

$$y_3(n) = h(n\text{-}2)$$

Logo:

$$y_3(n+2) = h(n) = [1, 0, 1, \underset{\uparrow}{0}]$$

Desta forma, a resposta do sistema a entrada $x_2(n)$, se o sistema for linear, deve ser:

$$y_2(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(n_0-k)$$

Problema Exemplo 6.2

Cálculos: assim, como $x_2(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 0, 1]$, tem-se:

$$y_2(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(-k)$$

onde , $h(-k) = [\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 1]$. Logo:

$$y_2(0) = 0$$

Da mesma forma:

$$y_2(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(1-k)$$

onde , $h(1\text{-}k) = [\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 0, 1]$. Logo:

$$y_2(1) = 1$$

Problema Exemplo 6.2

Cálculos: $y_2(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(2-k)$

onde , $h(2\text{-}k) = [\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 1, 0, 1]$. Logo:

$y_2(2) = 0$

E ainda $y_2(3) = 0$, $y_2(4) = 0$ .....

$$y_2(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(-1-k)$$

onde , $h(-1\text{-}k) = [\underset{\uparrow}{1}, 0, 1]$. Logo:

$y_2(-1) = 2$

Problema Exemplo 6.2

Cálculos: $y_2(-2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(-2-k)$

onde , $h(-2-k) = [1, \underset{\uparrow}{0}, 1]$. Logo:

$y_2(-2) = 0$

Da mesma forma:

$$y_2(-3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(-3-k)$$

onde , $h(-3-k) = [1, 0, \underset{\uparrow}{1}]$. Logo:

$y_2(-3) = 1$

Problema Exemplo 6.2

Cálculos: $y_2(-4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(-4-k)$

onde , $h(-4-k) = [1, 0, 1\ \underset{\uparrow}{0}]$. Logo:

$y_2(-4) = 0$

E ainda $y_2(-5) = 0$, $y_2(-6) = 0$ .....

Assim:

$y_2(n) = [1, 0, 2, \underset{\uparrow}{0}, 1]$

Como esse valor difere do fornecido, $y_2(n) = [0, 1, 2]$, o sistema é não linear.

Conclusões: o sistema não é linear.

Encerramento

Final da aula 6.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – 2.10 e 2.11.

Apostila ES879 disponibilizada – LISTA 1 – 1.

Próxima aula:

Equações a Diferenças.

22/08/2019