UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 7 – Equações a Diferenças

Prof. Tiago Henrique Machado
tiagomh@fem.unicamp.br
Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Sistemas Discretos

✓ Fundamentos de Sinais e Sistemas Discretos;

✓ Alguns Sinais Discretos Importantes;

✓ Algumas Propriedades Importantes de Sinais e Sistemas Discretos;

✓ Filtros FIR e IIR.

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

O comportamento dinâmico de sistemas contínuos é descrito por equações diferenciais. O comportamento dinâmico de sistemas discretos é descrito por equações a diferenças.

Um sistema discreto linear e invariante no tempo é aquele em que a entrada *x(n)* e a saída *y(n)* satisfazem uma equação a diferenças com coeficientes lineares e constantes do tipo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m), \qquad a_0 \neq 0,$$

ou também:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r).$$

Problema Exemplo 7.1

Resolver e equação $y(n) - ay(n-1) = x(n)$, com $y(n) = 0$ para $n < 0$, e tendo como entrada $x(n) = \delta(n)$ um impulso unitário.

Solução:

Dados: equação a diferenças do sistema.

Resultado desejado: solução da equação.

Hipóteses: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 7.1

Cálculos: este problema pode ser resolvido diretamente, ou seja,

$n = 0 \Rightarrow y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1$

$n = 1 \Rightarrow y(1) = ay(0) + x(1) = a \times 1 + 0 = a$

$n = 2 \Rightarrow y(2) = ay(1) + x(2) = a \times a + 0 = a^2$

...

$\Rightarrow y(n) = a^n.$

Como não existe resposta para $n < 0$, escreve-se a solução como:

$$y(n) = a^n u(n),$$

que representa a resposta ao impulso procurada. Usa-se o degrau unitário, $u(n)$, para assegurar valores nulos para $n < 0$.

Problema Exemplo 7.2

Determinar o modelo para descrever uma colônia de bactérias duplicando a população a cada *12h* (*T = 12h*).

Solução:

Dados: período de ocorrência do fato.

Resultado desejado: equação a diferenças que descreve o problema.

Hipóteses: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 7.2

Cálculos: é possível escrever que,

$y(n) = 2y(n-1), y(0) = c.$

Logo,

$y(1) = 2c, y(2) = 4c, y(3) = 8c, \ldots$

que caracteriza um comportamento explosivo.

Conclusões: a equação a diferenças que caracteriza o problema da duplicação da colônia de bactérias a cada duas horas é dada por: $y(n) = 2y(n-1)$, com $y(0) = c$.

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Solução de Equações a Diferenças</u>:

A solução de equações a diferenças segue um procedimento semelhante ao da solução de equações diferenciais lineares e com coeficientes constantes.

Seja uma equação a diferenças denotada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k),$$

ou também:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \ldots + a_N y(n-N) =$$
$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_M x(n-M).$$

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea

A equação homogênea (entrada nula) é dada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0.$$

Seja uma solução do tipo $y(n) = c\lambda^n$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\lambda^{n-k} = 0,$$

e então:

$$a_0 c\lambda^n + a_1 c\lambda^{n-1} + a_2 c\lambda^{n-2} + \ldots + a_N c\lambda^{n-N} = 0,$$

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea

Desenvolvendo a equação anterior:

$$(a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_N)c\lambda^{n-N} = 0,$$
$$a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_N = 0,$$

que é o polinômio característico, cujas raízes são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea

A solução homogênea $y_h(n)$ será função do tipo das raízes, ou seja:

✓ para raízes distintas a solução homogênea é:

$$y_h(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_N\lambda_N^n,$$

com c_1, c_2, . . ., c_N determinados através das condições iniciais.

✓ para raízes com multiplicidade, por exemplo λ_1 de multiplicidade l, a solução homogênea é do tipo:

$$y_h(n) = (c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n + c_3 n^2\lambda_1^n + \ldots + c_l n^{l-1}\lambda_1^n) + d_2\lambda_2^2 + \ldots + d_N\lambda_N^n.$$

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea

✓ para um par complexo conjugado, por exemplo $\lambda_{1,2} = a \pm bj$, tem-se:

$$\lambda_1 = \rho e^{j\theta}, \quad \lambda_2 = \rho e^{-j\theta},$$

e a solução é do tipo $c\lambda^n$, ou seja,

$$c_1(\rho e^{j\theta})^n + c_2(\rho e^{-j\theta})^n = c_1\rho^n e^{j\theta n} + c_2\rho^n e^{-j\theta n} = C\rho^n sen(\theta n + \varphi).$$

Verifica-se que o comportamento muda em função do valor de ρ como ilustrado nas figuras dos próximos slides.

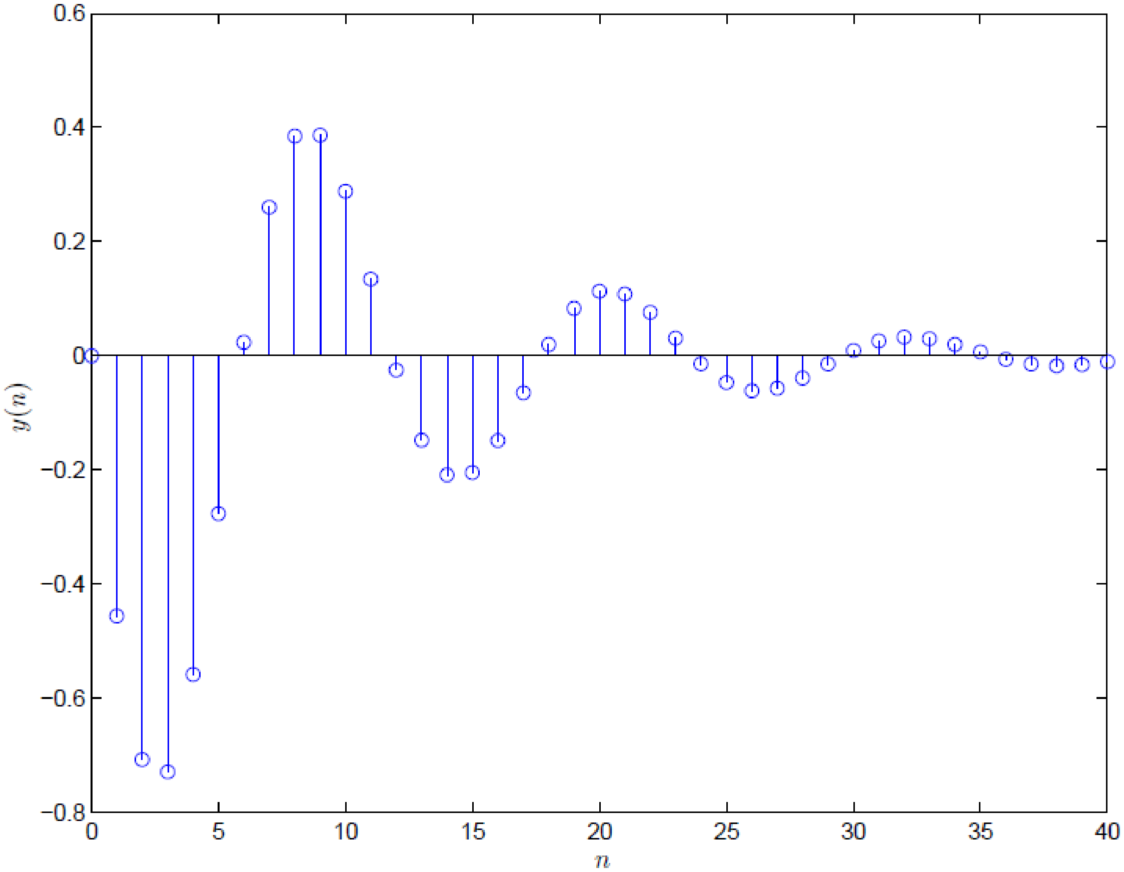
Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea

Solução

$C\rho^n sen(\theta n + \phi)$

para $\rho < 1$.



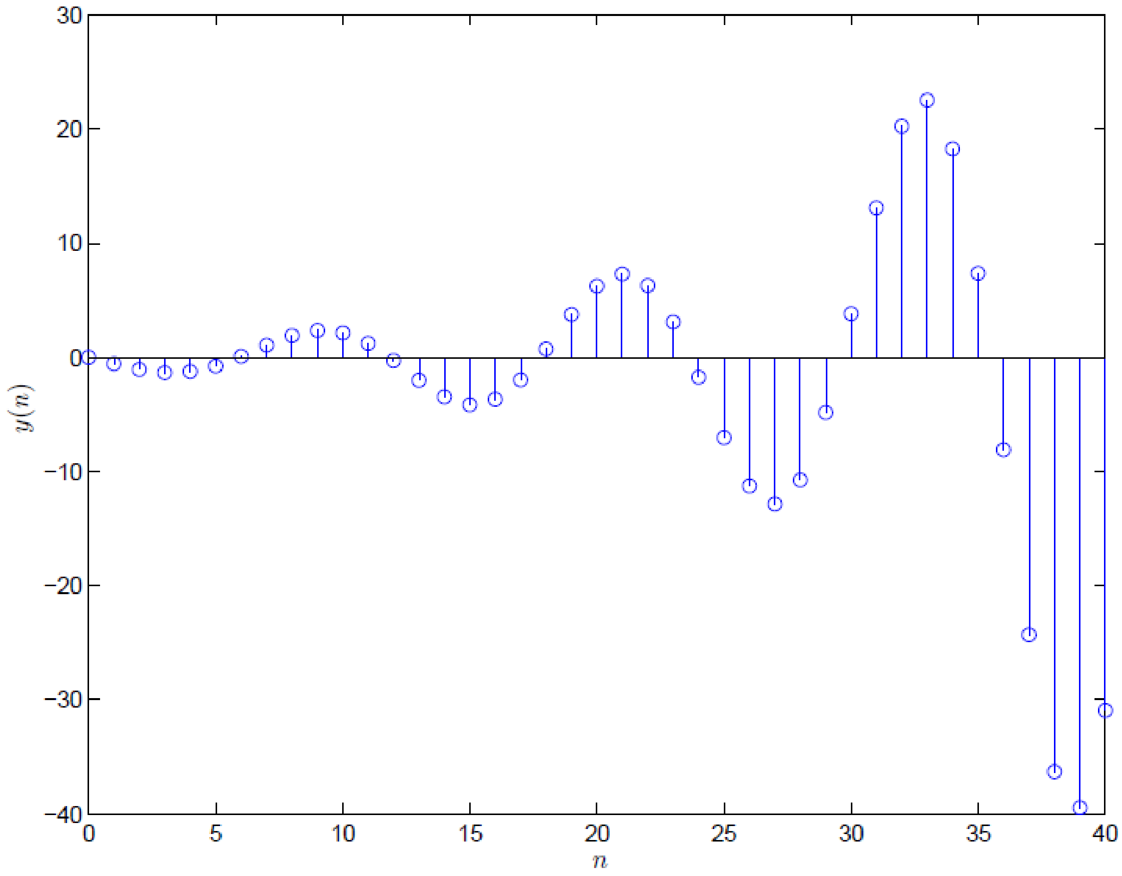
Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Solução de Equações a Diferenças: Solução Homogênea</u>

Solução

$C\rho^n sen(\theta n + \phi)$

para $\rho > 1$.



Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Particular

A solução particular da equação a diferenças depende da forma da entrada, ou seja, é do mesmo tipo da entrada. Alguns exemplos são ilustrados na tabela abaixo.

entrada $x(n)$	solução particular $y_p(n)$
A (constante)	K (constante)
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M)$
$\left\{ \begin{array}{c} Acos(w_0 n) \\ Asen(w_0 n) \end{array} \right\}$	$K_1 cos(w_0 n) + K_2 sen(w_0 n)$

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

Solução de Equações a Diferenças: Solução Completa

A solução completa da equação a diferenças será a soma da solução particular com a solução homogênea, isto é,

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n).$$

A soma resultante $y(n)$ contém os parâmetros constantes $\{c_i\}$ incorporados na componente homogênea da solução $y_h(n)$. Estas constantes podem ser determinadas para satisfazer as condições iniciais.

Equações a Diferenças com Coeficientes Constantes

<u>Solução de Equações a Diferenças</u>:

Existem também outras duas formas comuns de se chamar as respostas de equações a diferenças para dois casos específicos:

- ✓ Resposta *zero-input* → é a característica do próprio sistema, também conhecida como resposta natural ou livre do sistema, ou seja, a reposta do sistema sem nenhuma entrada e com condições iniciais $y(-1)$, $y(-2)$, ...

- ✓ Resposta *zero-state* → é a reposta para o sistema inicialmente relaxado no instante $n = 0$, ou seja, é a resposta do sistema com condições iniciais nulas.

Problema Exemplo 7.3

Toma-se emprestado em $n = 0$ o capital C_0. Este capital deve ser pago em N prestações mensais iguais e ser remunerado com uma taxa i de juros mensais. Calcular o valor da prestação mensal como função de N, i e C_0.

Solução:

Dados: capital emprestado, número de prestações e taxa de juros mensais.

Resultado desejado: prestação mensal.

Hipóteses: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 7.3

Cálculos: sejam $d(n)$ a dívida no momento n e P o valor da prestação. Pode-se escrever que:

$$d(n) = (1+i)d(n-1) - P \Rightarrow d(n) - (1+i)d(n-1) = -P,$$

com $d(0) = C_0$, ou seja, a dívida em $n = 0$ é o capital C_0.

A solução homogênea é dada por $d_h(n) = c\lambda^n$ que substituída na equação a diferenças leva a:

$$c\lambda^n - (1+i)c\lambda^{n-1} = 0 \Rightarrow c\lambda^{n-1}[\lambda - (1+i)] = 0,$$

Problema Exemplo 7.3

<u>Cálculos</u>: ou seja:

$$\lambda - (1 + i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 + i.$$

Portanto, a solução homogênea é:

$$d_h(n) = c\lambda^n = c(1 + i)^n.$$

A solução particular é dada por:

$$d_p(n) = A,$$

Problema Exemplo 7.3

Cálculos: que substituída na equação a diferenças leva a::

$$A - (1 + i)A = -P \Rightarrow A = \frac{P}{i}.$$

A solução completa é dada por:

$$d(n) = d_h(n) + d_p(n) = c(1 + i)^n + \frac{P}{i}.$$

Aplicando a condição inicial tem-se que:

$$d(0) = c(1 + i)^0 + \frac{P}{i} = C_0 \Rightarrow c = C_0 - \frac{P}{i},$$

Problema Exemplo 7.3

Cálculos: e consequentemente,

$$d(n) = \left(C_0 - \frac{P}{i}\right)(1+i)^n + \frac{P}{i}.$$

Para pagar a dívida tem-se que *d(n) = 0*. Logo, o valor da prestação será dado por:

$$\left(C_0 - \frac{P}{i}\right)(1+i)^n + \frac{P}{i} = 0 \quad \Rightarrow P = \frac{iC_0}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}.$$

Conclusões: o valor da prestação será dado por $P = \frac{iC_0}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$.

Problema Exemplo 7.4

Determine a resposta $y(n)$, $n \geq 0$, para o sistema descrito pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

quando a sequência de entrada é dada por:

$$x(n) = 4^n u(n)$$

Solução:

Dados: equação a diferenças e entrada do sistema.

Resultado desejado: resposta do sistema.

Hipóteses: sistema discreto linear e invariante no tempo.

Problema Exemplo 7.4

Cálculos: primeiramente encontra-se a solução da equação homogênea associada:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$$

Assumindo uma solução exponencial do tipo:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Substituindo na equação homogênea associada chega-se em:

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2} (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

E as raízes da equação característica são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$. Assim, a forma geral da solução homogênea é:

$$y_h(n) = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = C_1(-1)^n + C_2(4)^n$$

Problema Exemplo 7.4

Cálculos: para a solução particular, assume uma sequência exponencial da mesma forma que a sequência de entrada, ou seja:

$$y_p(n) = K(4)^n u(n)$$

Pode-se observar que a solução já está contida na solução homogênea , desta forma, esta solução é redundante. Portanto, deve-se escolher uma solução particular que seja linearmente independente da dos termos contidos na solução homogênea. Na verdade, esta situação é tratada da mesma maneira que foi falado sobre múltiplas raízes na equação característica. Assim, assume-se que:

$$y_p(n) = Kn(4)^n u(n)$$

Substituindo na equação a diferenças chega-se em:

Problema Exemplo 7.4

Cálculos:

$$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$$

Para determinar K, avalia-se a equação anterior para $n \geq 2$, onde nenhum dos degraus unitários desaparece. Para facilitar os cálculos, escolhe-se $n = 2$, de onde obtém-se:

$$K = 6/5$$

Assim, a solução particular é dada por:

$$y_p(n) = (6/5)n(4)^n u(n)$$

Logo, a solução total é:

$$y(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n + (6/5)n(4)^n, \qquad n \geq 0$$

Problema Exemplo 7.4

Cálculos: para obter as constantes C_1 e C_2, considera-se que $y(-1) = y(-2) = 0$, assim, escreve-se da equação a diferenças:

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + 1 = 1$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + 6 = 9$$

Por outro lado, usando a solução encontrada, pode-se também escrever:

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2 + (24/5)$$

Logo, resolvendo as 4 equações simultaneamente:

$$C_1 = -1/25 \quad \text{e} \quad C_2 = 26/25$$

Problema Exemplo 7.4

Cálculos: e a solução total com condições iniciais nulas é:

$$y(n) = (-1/25)(-1)^n + (26/25)(4)^n + (6/5)n(4)^n, \qquad n \geq 0$$

Conclusões: a solução da equação a diferenças apresenta para condições iniciais nulas é dada por: $y(n) = (-1/25)(-1)^n + (26/25)(4)^n + (6/5)n(4)^n, \qquad n \geq 0.$

Encerramento

Final da aula 7.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – 2.25, 2.31 e 2.36.

Apostila ES879 disponibilizada – LISTA 1 – 2, 3 e 4.

Próxima aula:

Equações a Diferenças.

27/08/2019