UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 5 – Filtros Analógicos

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

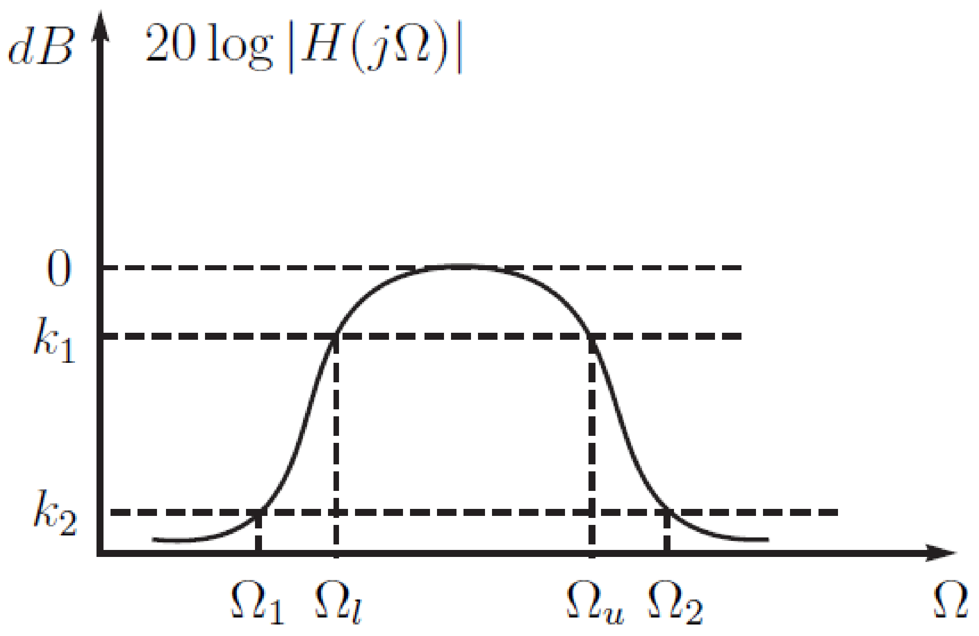
Filtros Analógicos

- ✓ Definições, Faixa de Passagem, Faixa de Transição e Faixa de Corte;
- ✓ Filtros Passa-Baixa, Passa-Alta, Passa-Banda e Rejeita-Banda;
- ✓ Filtros Butterworth: definição, ordem do filtro, frequências de corte e funções de transferência;
- ✓ Transformações Analógico-Analógico;
- ✓ Projeto de Filtro Butterworth Passa-Baixa.

Filtros Analógicos

Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda:

Os parâmetros de projeto de um filtro Butterworth passa-banda são Ω_1, Ω_2, Ω_l, Ω_u, k_1 e k_2 conforme ilustrado abaixo.



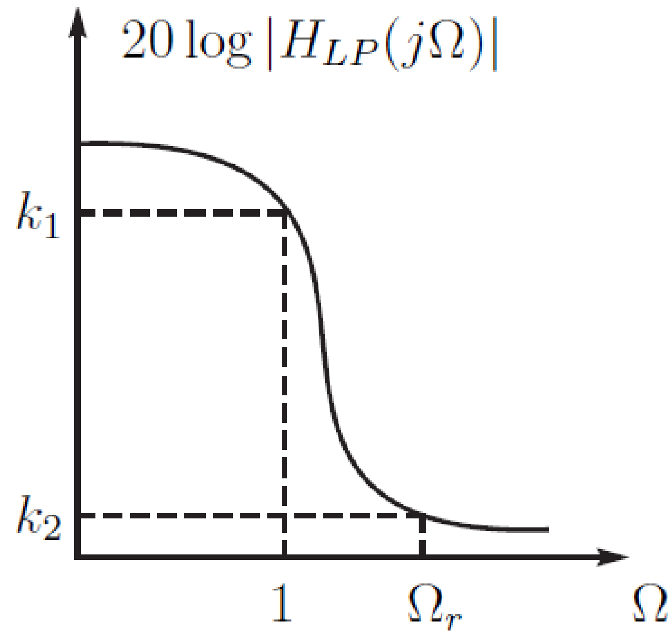
Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda</u>:

As condições usuais de projeto são:

- ✓ $20 \log |H(j\Omega)| \leq k_2$ para $\Omega \leq \Omega_1$ e $\Omega \geq \Omega_2$,
- ✓ $20 \log |H(j\Omega)| \geq k_1$ para $\Omega_l \leq \Omega \leq \Omega_u$.

Seja $H_{LP}(s)$ um filtro passa-baixa normalizado com frequência crítica Ω_r como ilustrado ao lado.



Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda</u>:

A transformação de passa-baixa (*LP*) para passa-banda (*BP*) é dada por:

$$s \rightarrow \frac{(s^2 + \Omega_l \Omega_u)}{s(\Omega_u - \Omega_l)},$$

e consequentemente, $H_{BP}(s) = H_{LP}(s)\Big|_{s \rightarrow \frac{(s^2+\Omega_l\Omega_u)}{s(\Omega_u-\Omega_l)}}$

Para satisfazer o requisito de k_2 para Ω_1 pode-se escrever que:

$$j\Omega_r = \frac{[(j\Omega_1)^2 + \Omega_l \Omega_u]}{[j\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} \Rightarrow \Omega_r = \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} = A.$$

Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda</u>:

De forma análoga para Ω_2 tem-se:

$$\Omega_r = \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]} = B.$$

Os valores de A e B não serão necessariamente iguais. Escolhe-se, portanto, o valor mais restritivo, ou seja,

$$\Omega_r = \min\{|A|, |B|\}.$$

Filtros Analógicos

<u>Projeto de Filtros Butterworth Passa-Banda</u>:

Resumidamente, o projeto do filtro Butterworth passa-banda consiste de duas fases diretas:

- ✓ Projeto de um filtro passa-baixa com Ω_r adequado, e
- ✓ Transformação usando os valores de Ω_u e Ω_l desejados.

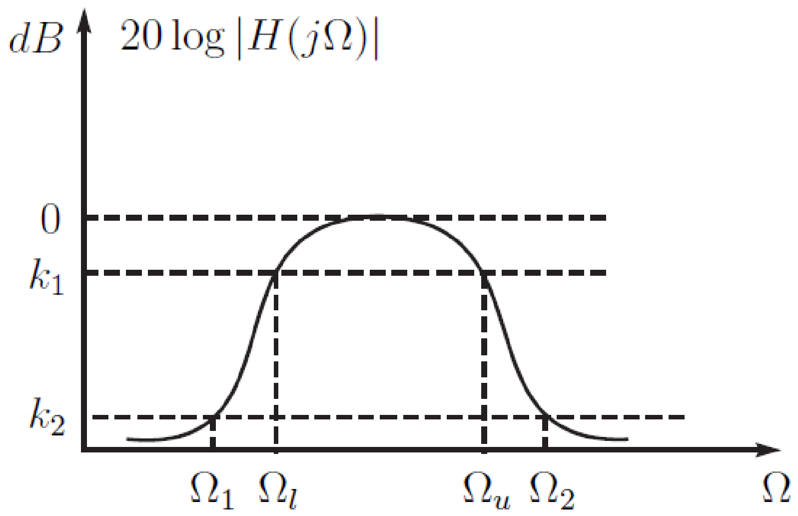
Problema Exemplo 5.1

Projetar um filtro Butterworth passa-banda que possua os seguintes requisitos:

✓ *-3.0103dB* de atenuação nas frequências de corte de *50Hz* e *20kHz*;

✓ *-20dB* de atenuação rejeita-banda para *20Hz* e *45kHz*.

Os requisitos do filtro estão mostrados ao lado.



Solução:

Dados: requisitos para o projeto de um filtro Butterworth passa-banda.

Resultado desejado: função de transferência do filtro requerido.

Hipóteses: filtro normalizado.

Problema Exemplo 5.1

Cálculos: os parâmetros de interesse são:

- ✓ $\Omega_1 = 2\pi \times 20 = 125.663 rad/s.$
- ✓ $\Omega_2 = 2\pi \times 45 \times 10^3 = 2.82743 \times 10^5 rad/s.$
- ✓ $\Omega_l = 2\pi \times 50 = 314.159 rad/s.$
- ✓ $\Omega_u = 2\pi \times 20 \times 10^3 = 1.25663 \times 10^5 rad/s.$

Para um filtro passa-baixa normalizado, tem-se:

- ✓ $0 \geq 20 \log |H_{LP}(1j)| \geq -3.0103 dB.$
- ✓ $20 \log |H_{LP}(j\Omega_{r)}| \leq -20 dB.$

Problema Exemplo 5.1

Cálculos: calculando os valores de *A* e *B* tem-se:

$$|A| = \left|\frac{(\Omega_1^2 - \Omega_l\Omega_u)}{[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]}\right| = 2.5053, \quad |B| = \left|\frac{(\Omega_2^2 - \Omega_l\Omega_u)}{[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]}\right| = 2.2545,$$

e portanto, $\Omega_r = 2.2545$.

O filtro passa-baixa normalizado de ordem *n* pode ser determinado considerando $\Omega_2 = 2.2545$ e $\Omega_1 = 1$, ou seja,

$$n = \frac{\log\left[\frac{(10^{\frac{-(-3,0102)}{10}} - 1)}{(10^{\frac{-(-20)}{10}} - 1)}\right]}{2\log(\frac{1}{2.2545})} = 2.829 \Rightarrow n = 3.$$

Problema Exemplo 5.1

Cálculos: e portanto:

$$H_{LP} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1},$$

obtido através da tabela do filtro normalizado.

Fazendo a transformação de passa-baixa (*LP*) para passa-banda (*BP*) tem-se:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} =$$

$$= \frac{s^2 + 314.159 \times 1.25663 \times 10^5}{s(1.25663 \times 10^5 - 314.159)} = \frac{s^2 + 3.94784 \times 10^7}{s(1.25349 \times 10^5)},$$

Problema Exemplo 5.1

Cálculos: e consequentemente a função de transferência do filtro desejado é:

$$H_{BP}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2+3.94784\times10^7}{1.25349\times10^5 s}\right)^3 + 2\left(\frac{s^2+3.94784\times10^7}{1.25349\times10^5 s}\right)^2 + 2\left(\frac{s^2+3.94784\times10^7}{1.25349\times10^5 s}\right) + 1},$$

ou ainda:

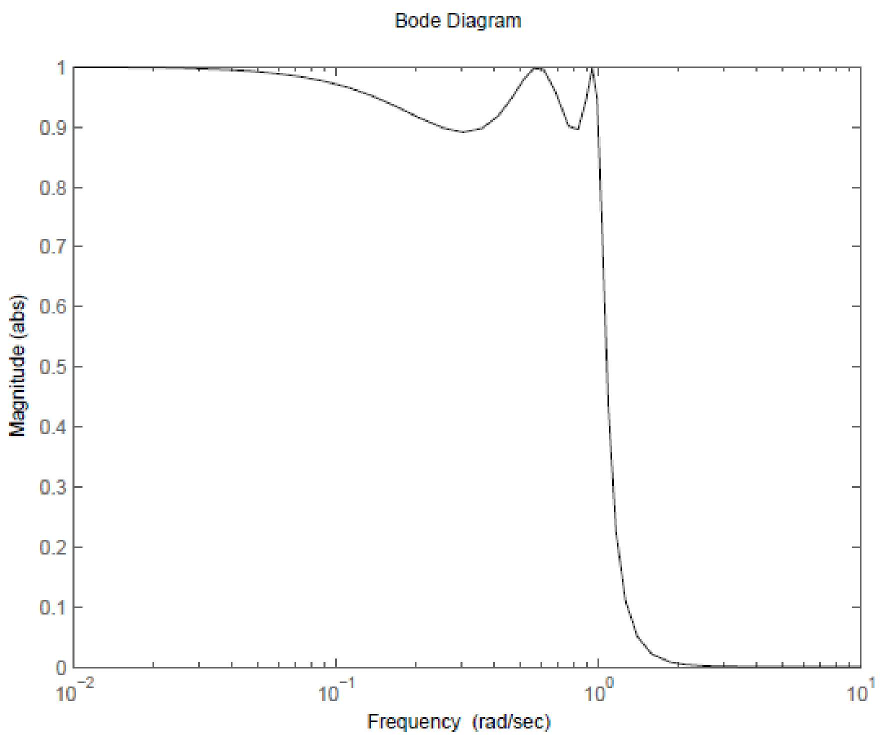
$$H_{BP}(s) = \frac{1.969530 \times 10^{15} s^3}{\begin{array}{l}(s^6 + 25069909 \times 10^5 s^5 + 3.15434 \times 10^{10} s^4 + 1.9893 \times 10^{15} s^3 + \\ +1.245285 \times 10^{18} s^2 + 3.9072593 \times 10^{20} s + 6.15289108 \times 10^{22}).\end{array}}$$

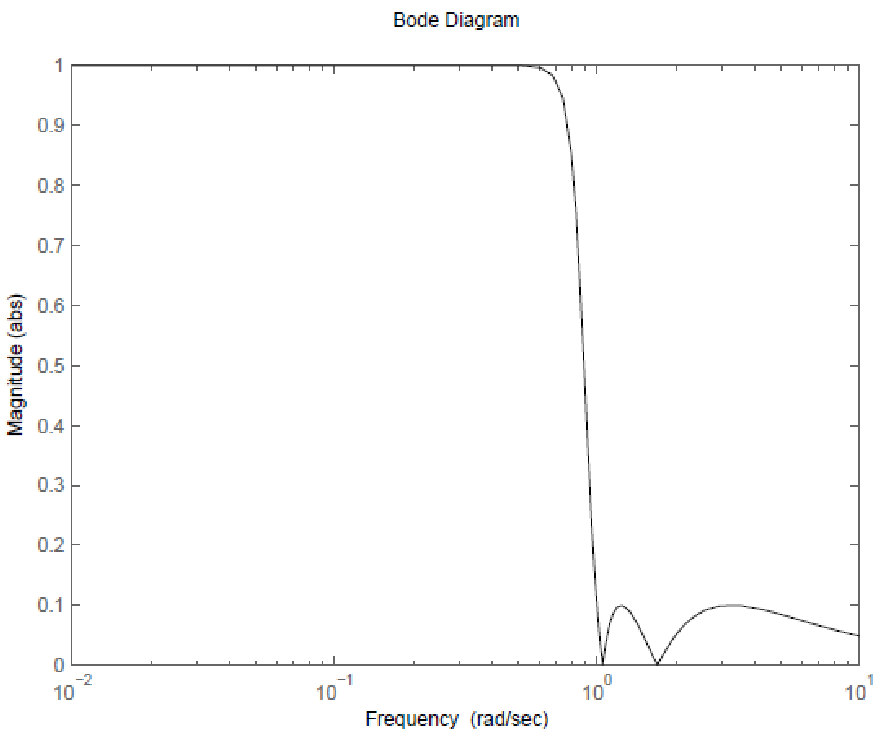
Conclusões: a função de transferência do filtro Butterworth de ordem 3 requerido é dada pela expressão de $H_{BP}(s)$ acima.

Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

Os filtros Chebyshev possuem uma ondulação (*ripple*) que pode ser na faixa de passagem (tipo *1*) ou na faixa de rejeição (tipo *2*) conforme mostrado abaixo.





Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

Os filtros Chebyshev do tipo *1* possuem a seguinte característica em resposta em frequência:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega)},$$

onde $T_n(\Omega)$ é um polinômio de Chebyshev de ordem n, ou seja,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n > 2, \quad T_0(x) = 1 \quad e \quad T_1(x) = x.$$

Filtros Analógicos

Filtros Chebyshev:

Alguns polinômios de Chebyshev são:

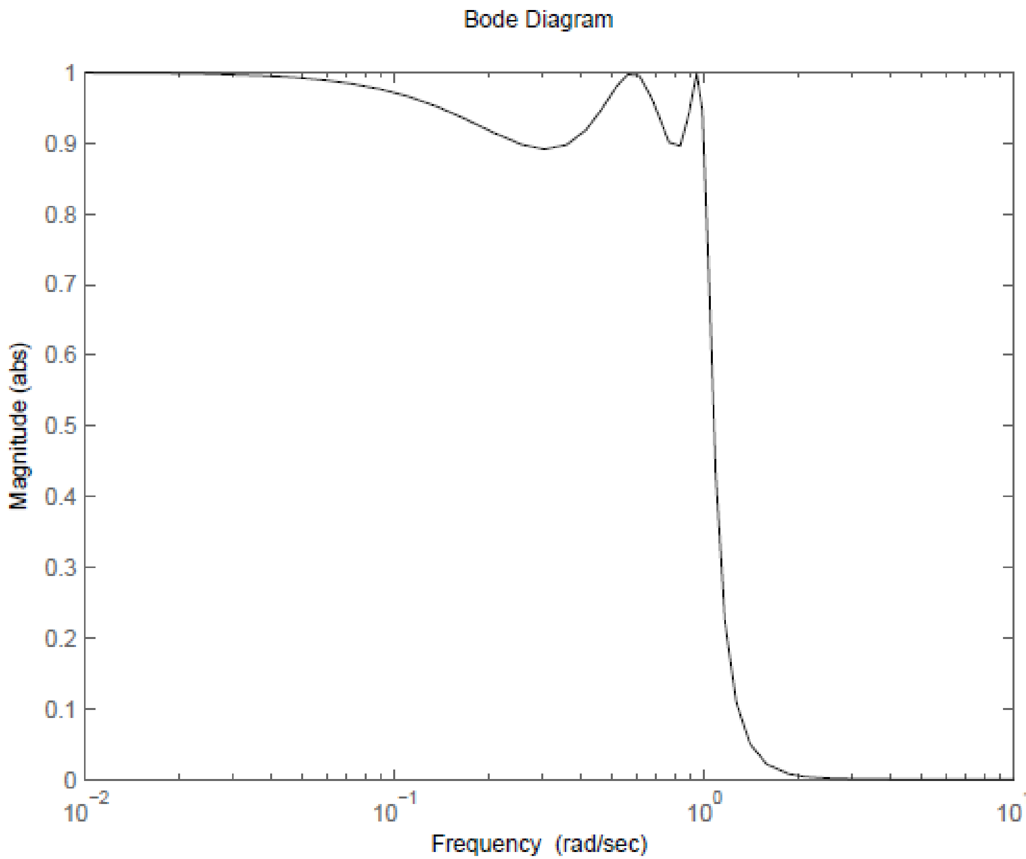
n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
$\vdots$	

Filtros Analógicos

Filtros Chebyshev:

Existem dois tipos de início da resposta em frequência em função de *n* ser par ou ímpar, ou seja,

✓ se *n* é ímpar, o filtro parte do valor $|H(0)| = \sqrt{1} = 1$, conforme mostrado ao lado, para $n = 5$;



Filtros Analógicos

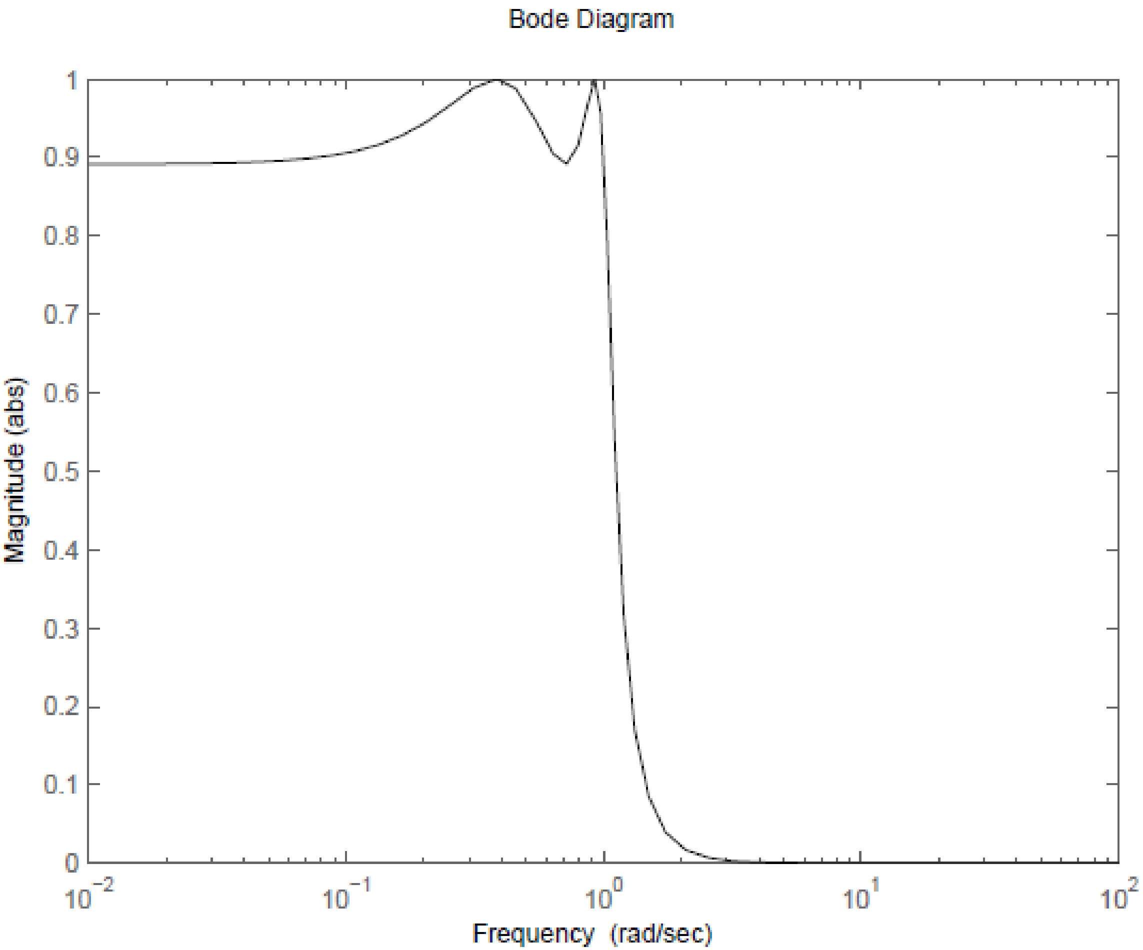
<u>Filtros Chebyshev</u>:

✓ se *n* é par, o filtro parte do

valor $|H(0)| = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}}$,

conforme mostrado ao lado,

para $n = 4$;



Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

Algumas propriedades do filtro Chebyshev passa-baixa normalizado do tipo *1* são:

- ✓ $\frac{1}{1+\varepsilon^2} \leq |H(j\Omega)|^2 \leq 1$ na região de passagem;
- ✓ para $\Omega = 1$ (frequência de corte), então $|H(1j)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$;
- ✓ para $\Omega > 1$ o comportamento é monotônico.

Filtros Analógicos

Filtros Chebyshev:

Os polos de $H_n(s)H_n(-s)$ são dados por:

$$1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0.$$

Para um filtro estável, devem ser escolhidos os polos do semi-plano esquerdo, ou seja,

$$H_n(s) = \frac{K}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{K}{V_n(s)},$$

onde K é um fator para assegurar que $H(0) = 1$ para n ímpar, e $|H(0)| = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}}$ para n par.

Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

E o polinômio $V_n(s)$ é:

$$V_n(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0.$$

Logo, tem-se que:

- ✓ $K = V_n(0) = b_0$, para n ímpar;
- ✓ $K = \frac{V_n(0)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$, para n par.

Existem tabelas para $V_n(s)$ em função de n e de ε, o que facilita a determinação dos filtros.

Filtros Analógicos

Filtros Chebyshev:

A escolha da ordem *n* é feita usando as seguintes especificações:

- ✓ valor do *ripple* dado por $|H(1j)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$;
- ✓ valor da frequência Ω_r e da respectiva amplitude 1/A^2, ou seja, $|H(j\Omega_r)|^2 = \frac{1}{A^2}$.

O valor de *n* é dado por:

$$n = \frac{\log[g + (g^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]}{\log[\Omega_r + (\Omega_r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]},$$

Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

Onde:

$$A = \frac{1}{|H_n(j\Omega_r)|} \quad e \quad g = \left[\frac{(A^2-1)}{\epsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Da mesma forma que nos filtros de Butterworth, adota-se o próximo valor inteiro para *n*.

Para detalhes do equacionamento anterior, ver o seguinte livro: Louis Weinberg, Network Analysis and Synthesis, Mc Graw-Hill, 1962.

Filtros Analógicos

<u>Filtros Chebyshev</u>:

Os outros tipos de filtros Chebyshev apresentam equacionamento similar ao apresentado aqui. Por exemplo, os filtros Chebychev do tipo *2*, com *ripple* na região de rejeição, possuem também zeros e sua equação é dada por:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2[T_n^2(\frac{\Omega_r}{\Omega_c})/T_n^2(\frac{\Omega_r}{\Omega})]}.$$

Problema Exemplo 5.2

Projetar um filtro Chebyshev passa-baixa que possua os seguintes requisitos:

- ✓ Máxima ondulação de *2dB*;
- ✓ Frequência de corte de *1rad/s*;
- ✓ Atenuação de *-20dB* (ou mais) para *1,3rad/s*.

Solução:

Dados: requisitos para o projeto de um filtro Chebyshev passa-baixa.

Resultado desejado: função de transferência do filtro requerido.

Hipóteses: filtro normalizado.

Problema Exemplo 5.2

<u>Cálculos</u>: para $\Omega_c = 1$, frequência de corte, tem-se:

$$20\log|H_n(1j)| = 20\log\left(\frac{1}{1+\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 10\log\left[\frac{1}{1+\epsilon^2}\right] = -2,$$

e consequentemente, $\varepsilon = 0.76478$.

para $\Omega_r = 1.3$ tem-se:

$$20\log|H_n(1.3j)| = 20\log\left(\frac{1}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 20\log\left(\frac{1}{A}\right) = -20,$$

e consequentemente, $A = 10$.

Problema Exemplo 5.2

Cálculos: logo:

$$g = \left[\frac{(A^2 - 1)}{\epsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 13.01,$$

e a ordem do filtro é dada por:

$$n = \frac{\log[g + (g^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]}{\log[\Omega_r + (\Omega_r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]} = 4.3 \Rightarrow n = 5.$$

e a equação característica será dada por: $1 + \epsilon^2 T_n^2 \left(\frac{s}{j}\right) = 0,$

Problema Exemplo 5.2

Cálculos:

$$1 + 0.76478^2 \left[16\left(\frac{s}{j}\right)^5 - 20\left(\frac{s}{j}\right)^3 + 5\left(\frac{s}{j}\right)\right]^2 = 0,$$

cujos polos estáveis são $s_{1,2} = -0.0675 \pm 0.9735j$, $s_{3,4} = -0.1766 \pm 0.6016j$ e $s_5 = -0.2183$. Logo,

$$H_5(s) = \frac{K}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_4)} =$$

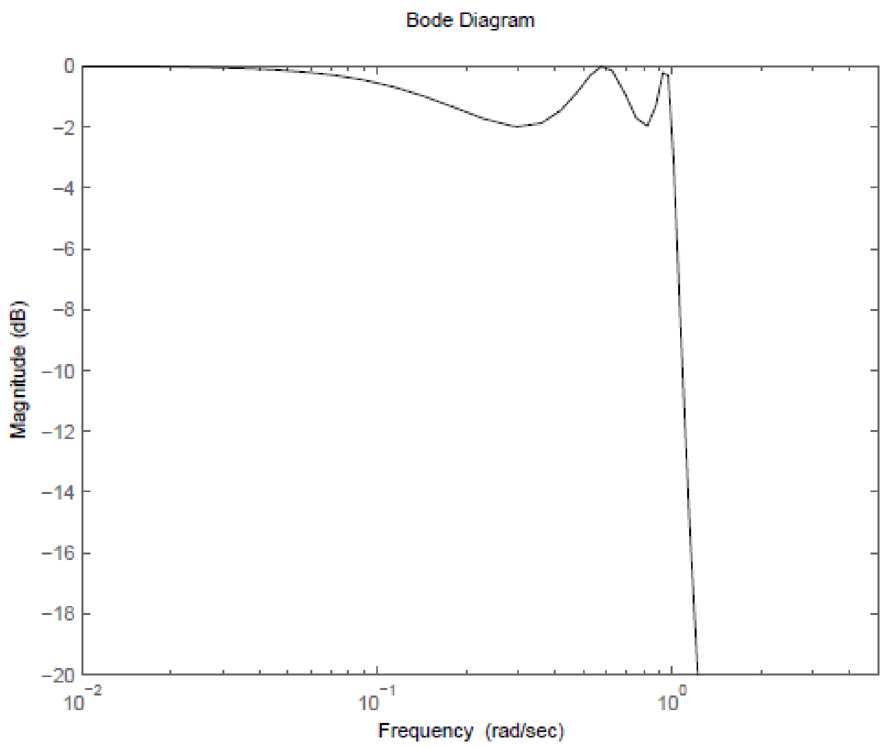
$$= \frac{K}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817}.$$

Problema Exemplo 5.2

Cálculos: Para que $H_5(0) = 1$ é necessário que $K = 0.0817$ (n ímpar). Logo,

$$H_5(s) = \frac{0.0817}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817},$$

e a resposta gráfica é mostrada ao lado.



Conclusões: a função de transferência do filtro Chebyshev de ordem 5 requerido é dada pela expressão de $H_5(s)$ acima.

Problema Exemplo 5.3

Projetar um filtro Chebyshev passa-baixa que possua os seguintes requisitos:

- ✓ Ondulação de 2*dB* na região de passagem;
- ✓ Frequência de corte de 40rad/s;
- ✓ Atenuação de -20dB para 52rad/s.

Solução:

Dados: requisitos para o projeto de um filtro Chebyshev passa-baixa.

Resultado desejado: função de transferência do filtro requerido.

Hipóteses: filtro normalizado.

Problema Exemplo 5.3

Cálculos: projeta-se inicialmente um filtro normalizado, ou seja, $\Omega_r = 52/40 = 1.3$. Os requisitos do filtro normalizado são: $\Omega_r = 1.3$, atenuação de $-20dB$, frequência de corte de $1rad/s$ e ondulação de $2dB$. Estes requisitos correspondem ao filtro projetado no exemplo anterior, ou seja,

$$H_5(s) = \frac{0.0817}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817}.$$

Aplica-se então a transformação de passa-baixa para passa-baixa corresponde à:

$$s \to \frac{s}{\Omega_u} = \frac{s}{40},$$

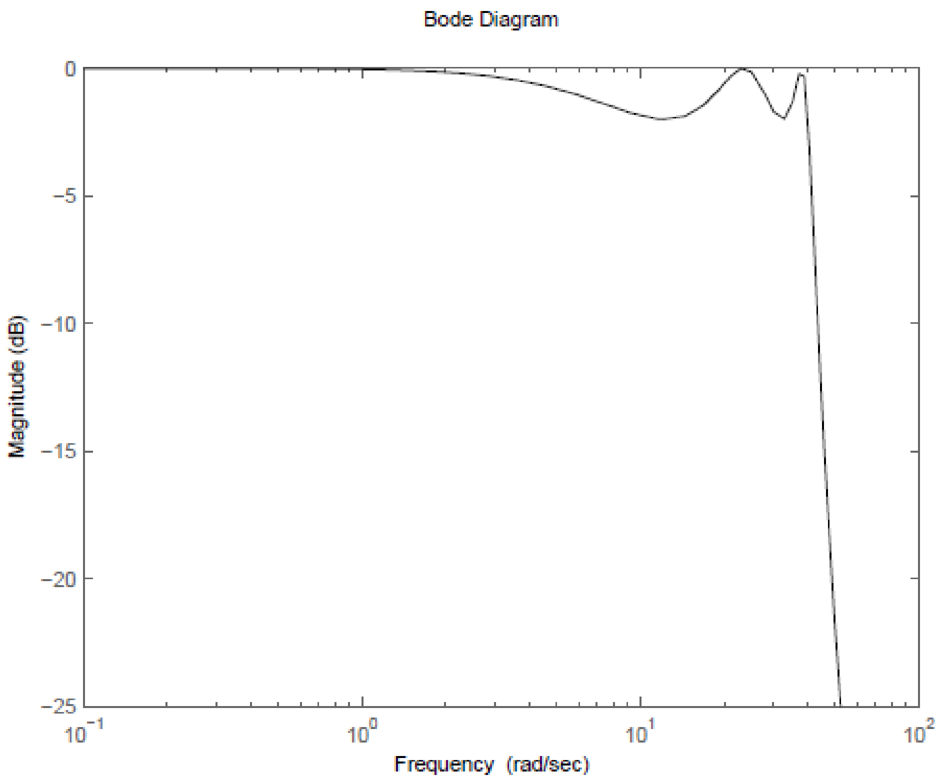
Problema Exemplo 5.3

Cálculos: e consequentemente, a função de transferência do filtro desejado será:

$$H(s) = \frac{0.0817}{\left[\left(\frac{s}{40}\right)^5 + 0.7065\left(\frac{s}{40}\right)^4 + 1.4996\left(\frac{s}{40}\right)^3 + 0.6935\left(\frac{s}{40}\right)^2 + 0.4594\left(\frac{s}{40}\right) + 0.0817\right]},$$

cuja representação gráfica é mostrada ao lado.

Conclusões: a função de transferência do filtro Chebyshev de ordem 5 requerido é dada pela expressão de *H(s)* acima.



Encerramento

Final da aula 5.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – Refazer o exemplo resolvido 8.3.7 (página 688) usando a metodologia apresentada na aula.

Próxima aula:

Sinais e Sistemas Discretos.

20/08/2019