UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 11 – Análise em Frequência

Prof. Tiago Henrique Machado

tiagomh@fem.unicamp.br

Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Análise em Frequência

- ✓ Definições Básicas de Série e Transformada de Fourier;
- ✓ Série de Fourier para Sinais Contínuos e Periódicos;
- ✓ Densidade Espectral de Potência de Sinais Contínuos e Periódicos;
- ✓ Transformada de Fourier para Sinais Contínuos Não-Periódicos.

Análise em Frequência

Densidade Espectral de Energia de Sinais Contínuos Não-Periódicos:

Seja a energia finita de um sinal *x(t)* dada por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

É possível escrever que:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)dF \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF,$$

Análise em Frequência

<u>Densidade Espectral de Energia de Sinais Contínuos Não-Periódicos</u>:

Portanto:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(F) dF,$$

que representa a relação de Parseval.

O termo $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$ representa a distribuição de energia do sinal como uma função da frequência e caracteriza a densidade espectral de energia.

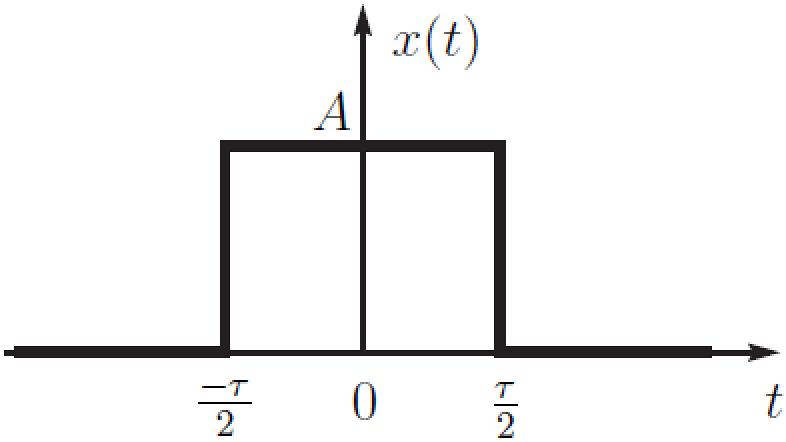
A energia de um sinal na faixa de frequências $F_1 < F < F_1 + \Delta F$ é dada por:

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F} S_{xx}(F) dF.$$

Problema Exemplo 11.1

Determinar a transformada de Fourier e a densidade espectral de energia para um pulso retangular dado por:

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$



Solução:

Dados: sinal contínuo e sua representação gráfica.

Resultado desejado: transformada de Fourier e a densidade espectral de energia.

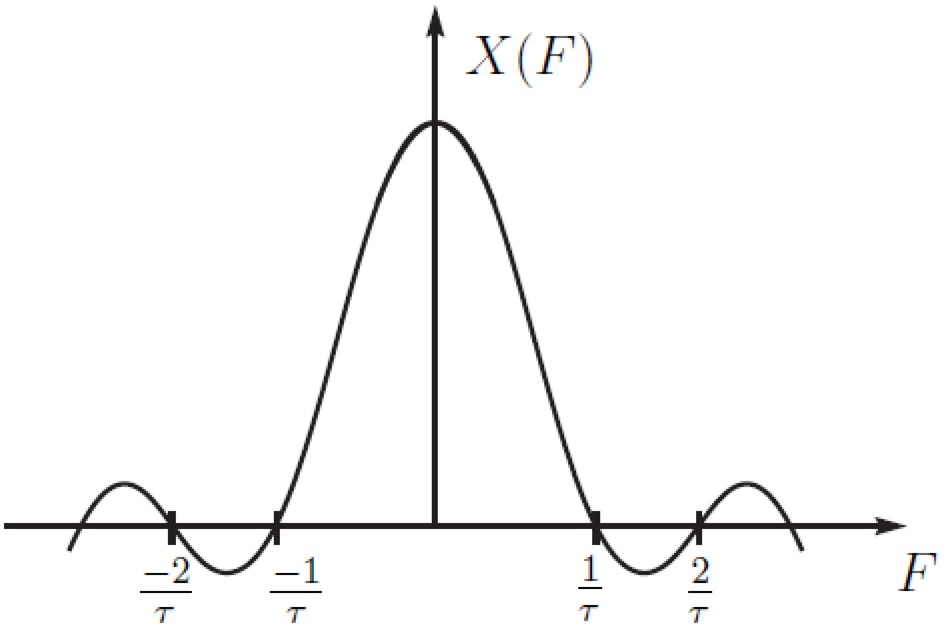
Hipóteses: sinal contínuo não periódico.

Problema Exemplo 11.1

Cálculos: a transformada de Fourier é dada por:

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j2\pi Ft}dt = A\tau\frac{sen(\pi F\tau)}{\pi F\tau},$$

que é uma função real. Então, um gráfico é suficiente para sua representação, conforme mostrado ao lado.



Problema Exemplo 11.1

Cálculos: verifica-se que o espectro de um pulso retangular é o envelope do espectro de linhas (coeficientes da série de Fourier) do sinal periódico obtido pela repetição do pulso com período T_p e escalonado por $1/T_p$.

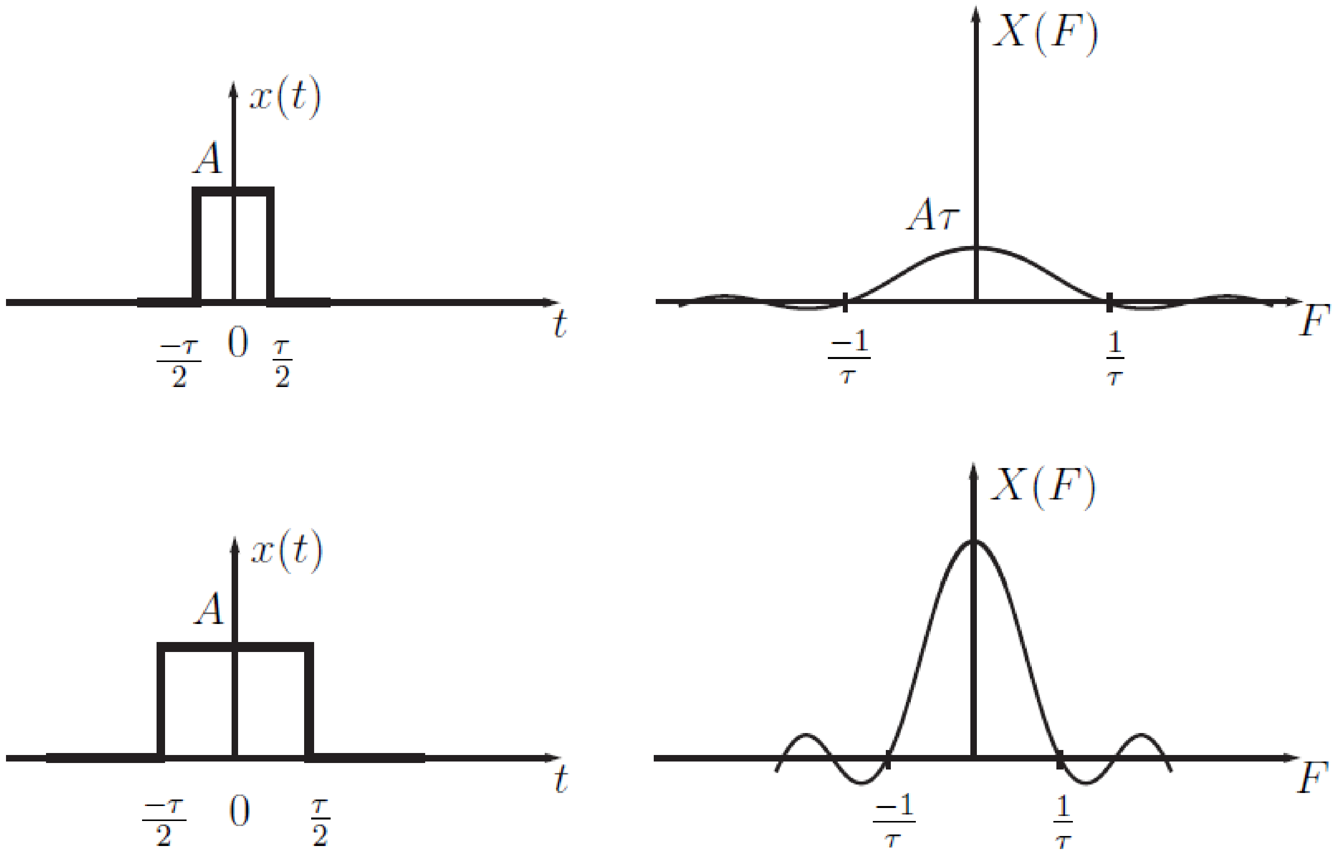
Os coeficientes de Fourier c_k do sinal periódico correspondente são simplesmente amostragens de $X(F)$ nas frequências $kF_0 = k/T_p$, ou seja:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right)$$

Obs: $X(F) = 0$ para múltiplos de $1/\tau$.

Problema Exemplo 11.1

Cálculos: quando τ diminui (largura do pulso diminui) ocorre o espalhamento de energia para maiores frequências conforme ilustrado abaixo.



Problema Exemplo 11.1

Cálculos: por fim, a densidade espectral de energia do pulso retangular será dada por:

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left[\frac{sen(\pi F\tau)}{\pi F\tau}\right]^2$$

Conclusões: a transformada de Fourier do pulso retangular é $X(F) = A\tau\frac{sen(\pi F\tau)}{\pi F\tau}$ e a densidade espectral de energia é $S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left[\frac{sen(\pi F\tau)}{\pi F\tau}\right]^2$.

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para um Sinal Periódico Discreto</u>:

Seja $x(n) = x(n + N)$ um sinal periódico de período N. A representação em série de Fourier consiste de N exponenciais harmonicamente relacionadas do tipo:

$$e^{j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

e é expressa como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

caracterizando a série de Fourier em tempo discreto (DTFS).

Análise em Frequência

<u>Série de Fourier para um Sinal Periódico Discreto</u>:

O cálculo dos coeficientes da série de Fourier, de forma semelhante ao caso contínuo, resulta em:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Os coeficientes c_k representam o sinal *x(n)* no domínio da frequência, ou seja, caracterizam a amplitude e fase da componente dada por:

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N} = e^{jw_k n}, \qquad w_k = \frac{2\pi k}{N}.$$

Análise em Frequência

Série de Fourier para um Sinal Periódico Discreto:

Como a sequência $s_k(n) = s_k(n + N)$ é periódica, então c_k também será periódico. Logo,

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = c_k.$$

Portanto, o espectro de um sinal $x(n)$ periódico de período N é uma sequência periódica de período N.

Análise em Frequência

<u>Densidade Espectral de Potência de Sinais Periódicos Discretos</u>:

A potência média no período *N* de um sinal discreto pode ser calculada como:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2,$$

que corresponde à relação de Parseval para sinais discretos.

Análise em Frequência

Densidade Espectral de Potência de Sinais Periódicos Discretos:

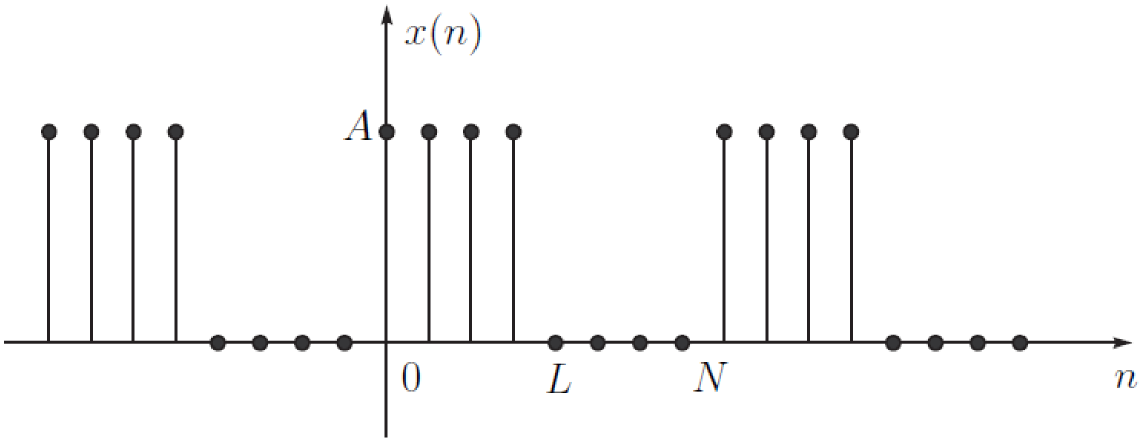
Os valores $|c_k|^2$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ fornecem a densidade espectral de potência do sinal periódico.

A energia de $x(n)$ em um período é dada por:

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2.$$

Problema Exemplo 11.2

Determinar os coeficientes da série de Fourier e a densidade espectral de potência para o sinal discreto mostrado ao lado.



Solução:

Dados: representação do sinal.

Resultado desejado: coeficientes da série de Fourier e densidade espectral de potência.

Hipóteses: sinal discreto e periódico.

Problema Exemplo 11.2

Cálculos: os coeficientes da série de Fourier serão dados por:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{\frac{-j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$c_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\right)^n = \begin{cases} \frac{AL}{N}, & k = 0, \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{\frac{-j2\pi kL}{N}}}{1-e^{\frac{-j2\pi k}{N}}}, & k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Sabe-se que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a = 1, \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1. \end{cases}$$

Problema Exemplo 11.2

Cálculos: os coeficientes da série de Fourier serão dados por:

$$\frac{1-e^{\frac{-j2\pi kL}{N}}}{1-e^{\frac{-j2\pi k}{N}}} = \frac{e^{\frac{-j\pi kL}{N}}}{e^{\frac{-j\pi k}{N}}} \times \frac{e^{\frac{j\pi kL}{N}} - e^{\frac{-j\pi kL}{N}}}{e^{\frac{j\pi k}{N}} - e^{\frac{-j\pi k}{N}}} =$$

$$= e^{\frac{-j\pi k(L-1)}{N}} \times \frac{sen(\frac{\pi kL}{N})}{sen(\frac{\pi k}{N})}.$$

Logo:

$$c_k = \begin{cases} \frac{AL}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ \frac{A}{N} e^{\frac{-j\pi k(L-1)}{N}} \times \frac{sen(\frac{\pi kL}{N})}{sen(\frac{\pi k}{N})}, & para\ os\ demais. \end{cases}$$

Problema Exemplo 11.2

Cálculos: a densidade espectral de potência é dada por:

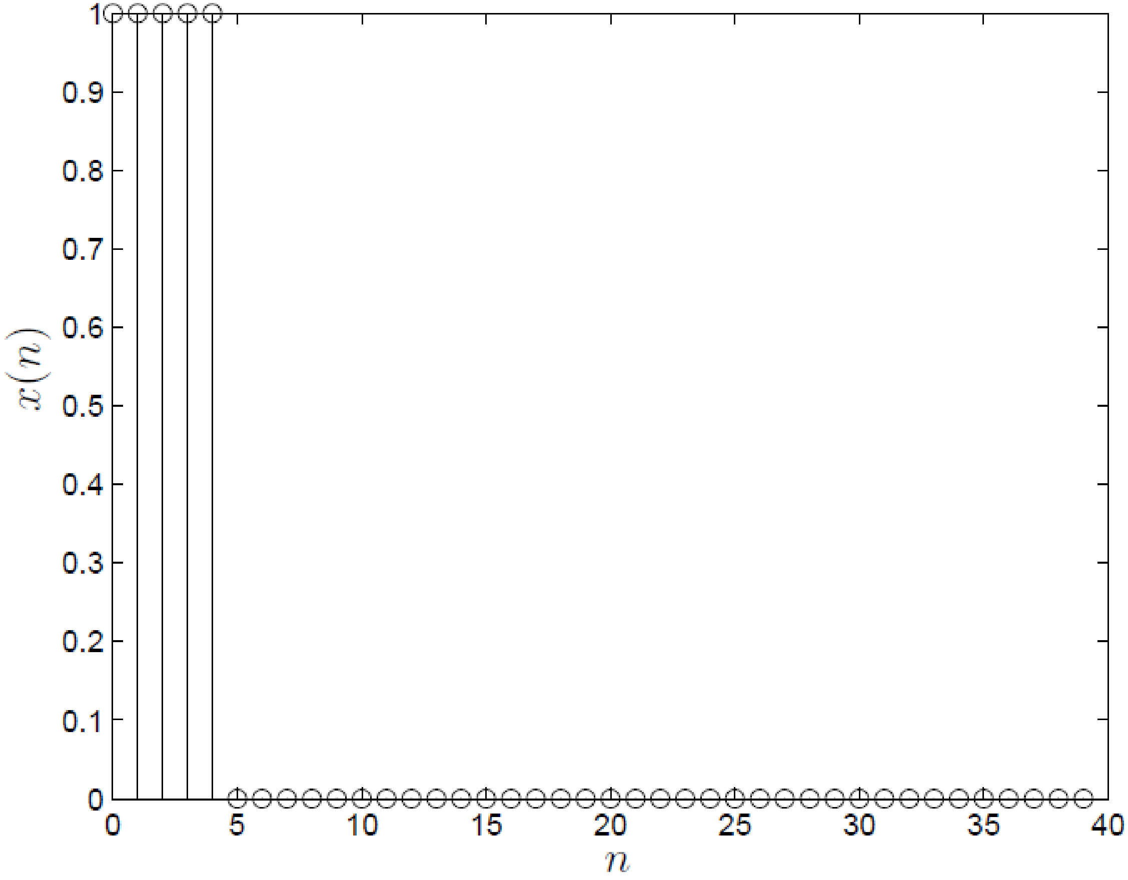
$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{AL}{N}\right)^2, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ \left(\frac{A}{N}\right)^2 \left(\frac{sen(\frac{\pi k L}{N})}{sen(\frac{\pi k}{N})}\right)^2, & para\ os\ demais. \end{cases}$$

Como exemplo, seja $L = 5$ e $N = 40$. O primeiro período deste caso é ilustrado no próximo slide. A amplitude e fase dos coeficientes da série para este exemplo são mostrados no slide 20. Lembra-se que neste caso a sequência destes coeficientes é também periódica.

A densidade espectral de energia é mostrada no slide 21.

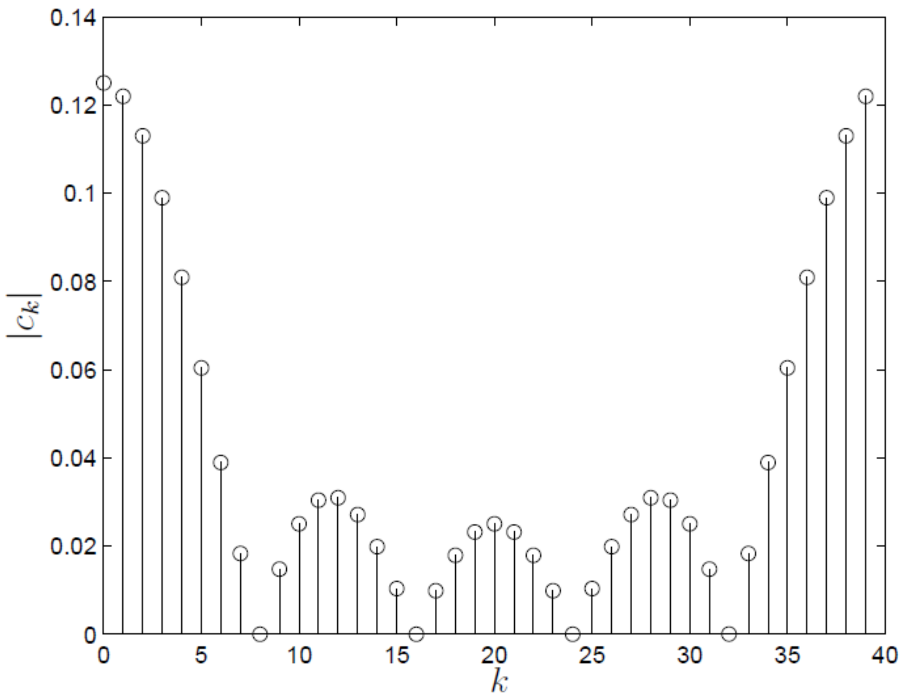
Problema Exemplo 11.2

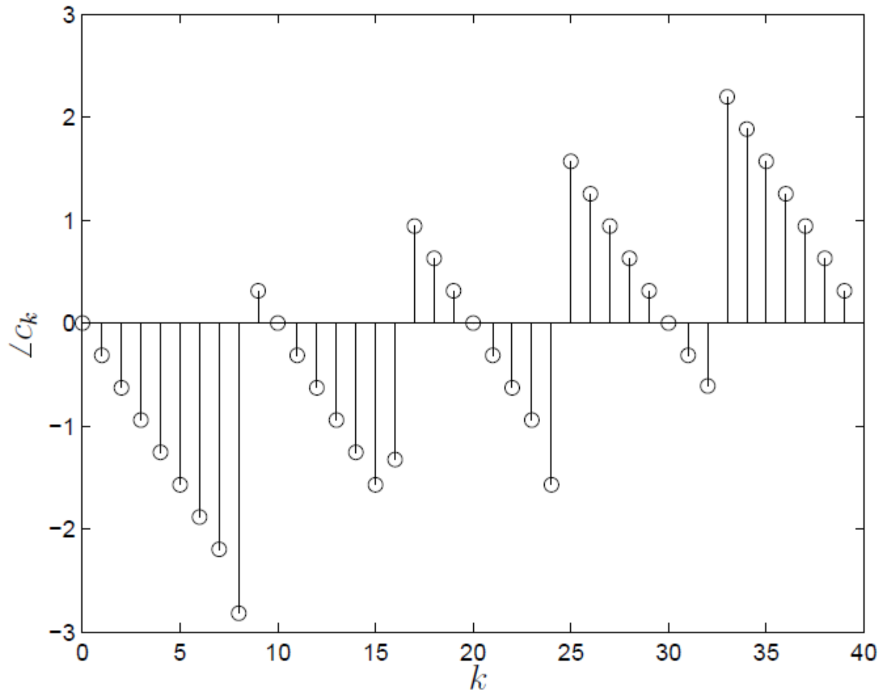
Primeiro Período com $L = 5$ e $N = 40$



Problema Exemplo 11.2

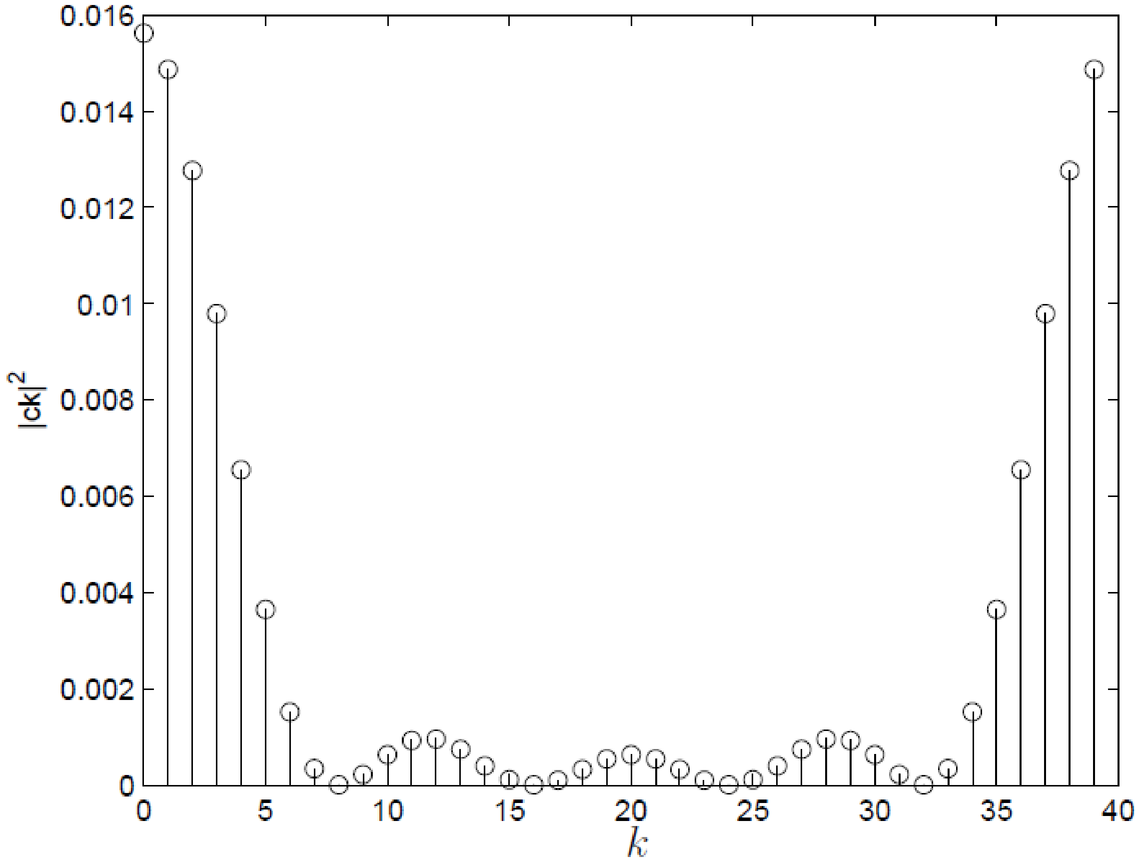
Amplitude e Fase de c_k com $L = 5$ e $N = 40$





Problema Exemplo 11.2

Densidade Espectral de Potência com $L = 5$ e $N = 40$



Análise em Frequência

Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos:

A transformada de Fourier para sinais de energia finita é definida como:

$$X(w) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn},$$

onde *X(ω)* representa o conteúdo frequencial de *x(n)*. *X(ω)*) é periódica de período *2π*, ou seja,

$$X(w + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(w+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} = X(w).$$

Análise em Frequência

<u>Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos</u>:

A transformada de Fourier inversa é dada por:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw.$$

A condição suficiente para a convergência é que a sequência *x(n)* seja absolutamente somável, ou seja,

$$|X(w)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|,$$

e se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, então *X(ω)* existe. Esta condição é apenas suficiente.

Análise em Frequência

Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos:

As principais propriedades da transformada de Fourier são apresentadas a seguir:

1. Periodicidade: $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$.

2. Simetria: se $x(n)$ é real, então $X(\omega) = X^*(\omega)$. Neste caso, apenas $\omega \in [0, \pi]$ é suficiente para a análise.

3. Linearidade: $\mathcal{F}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha \mathcal{F}[x_1(n)] + \beta \mathcal{F}[x_2(n)]$.

4. Translação no tempo: $\mathcal{F}[x(n-k)] = X(w)e^{-jwk}$.

Análise em Frequência

Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos:

As principais propriedades da transformada de Fourier são apresentadas a seguir:

5. Translação na frequência: $\mathcal{F}[x(n)e^{jw_0 n}] = X(w - w_0).$

6. Conjugado: $\mathcal{F}[x^*(n)] = X^*(-w).$

7. *Folding*: $\mathcal{F}[x(-n)] = X(-w).$

8. Convolução: $\mathcal{F}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(w)X_2(w).$

Análise em Frequência

Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos:

A energia do sinal *x(n)* pode ser escrita através da relação de Parseval como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw.$$

Se *x(n)* é real, então,

$$E_x = \int_0^{\pi} \frac{|X(w)|^2}{\pi} dw.$$

Define-se $S_{xx} = |X(\omega)|^2$ como a densidade espectral de energia de *x(n)*.

Problema Exemplo 11.3

Determinar a densidade espectral de energia, $S_{xx}(\omega)$, para o sinal $x(n) = a^n u(n)$ com $-1 < a < 1$.

Solução:

Dados: representação do sinal.

Resultado desejado: densidade espectral de energia.

Hipóteses: sinal discreto e não-periódico.

Problema Exemplo 11.3

Cálculos: verifica-se que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty,$$

e portanto $X(\omega)$ existe.

Através da definição escreve-se que:

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = \frac{1}{1-ae^{-jw}},$$

pois $|ae^{-jw}| = |a| < 1$.

Problema Exemplo 11.3

Cálculos: a densidade espectral de energia será dada por:

$$S_{xx}(w) = |X(w)|^2 = X(w)X^*(w) = \frac{1}{(1 - ae^{-jw})(1 - a^{jw})} = \frac{1}{1 - 2a\cos w + a^2}.$$

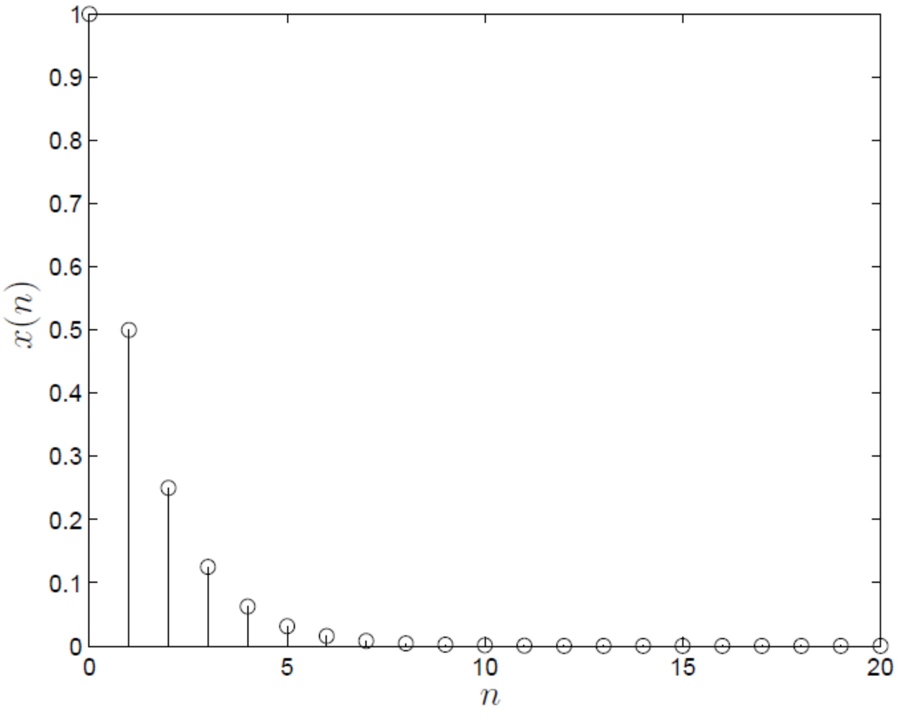
Nota-se que $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$, pois $x(n)$ é real.

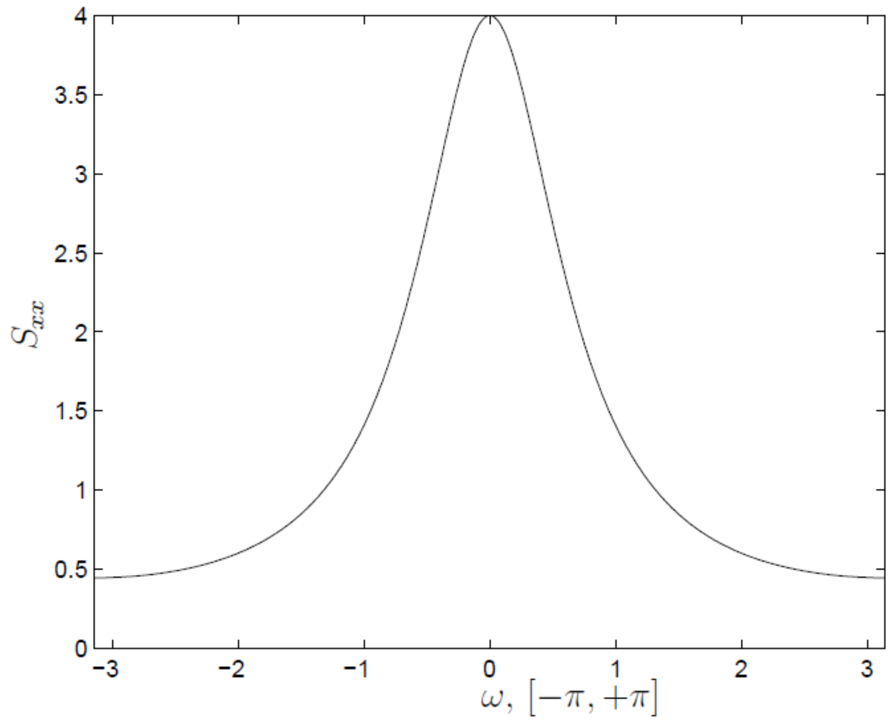
O slide seguinte mostra a sequência $x(n)$ e o gráfico de $S_{xx}(\omega)$ para $a = 0.5$.

O slide seguinte mostra a sequência $x(n)$ e o gráfico de $S_{xx}(\omega)$ para $a = -0.5$.

Problema Exemplo 11.3

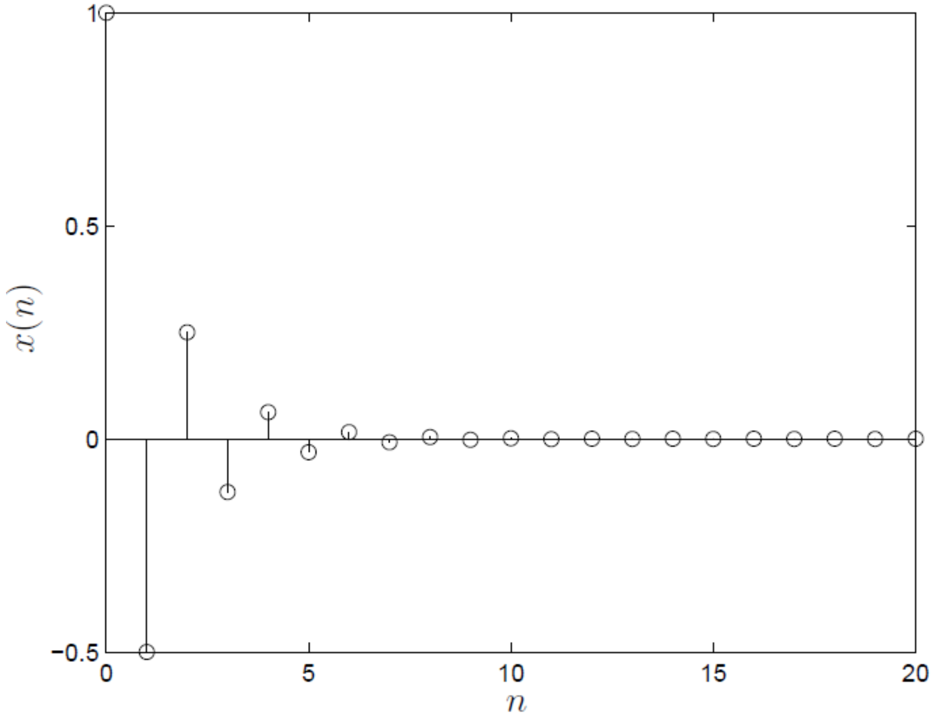
$x(n)$ e $S_{xx}(\omega)$ para $a = 0.5$

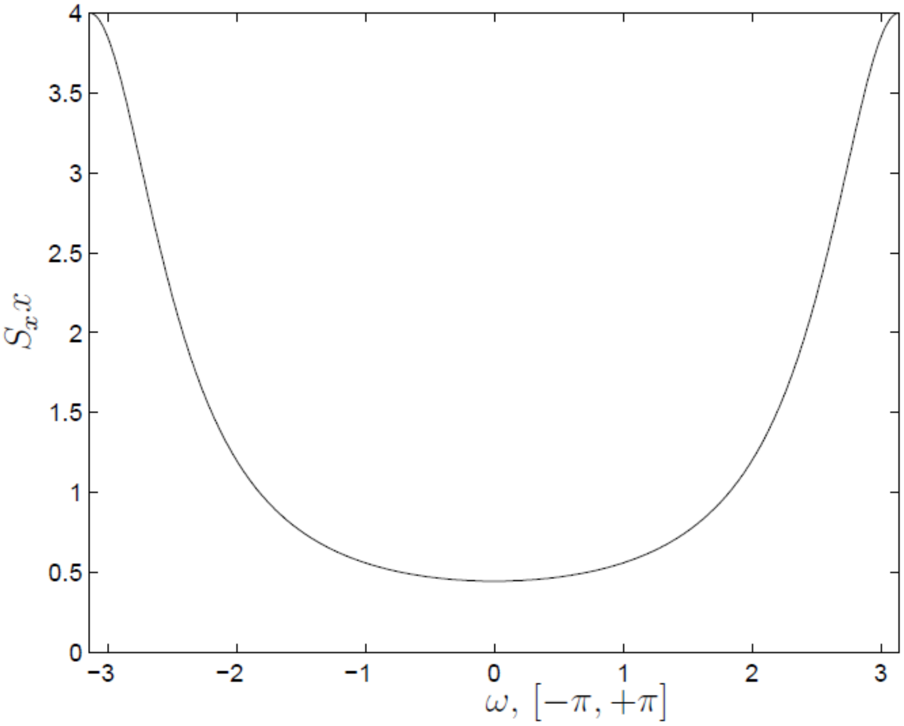




Problema Exemplo 11.3

x(n) e $S_{xx}(\omega)$ para $a = -0.5$





Problema Exemplo 11.4

Determinar a transformada de Fourier, $X(\omega)$, e a densidade espectral de energia, $S_{xx}(\omega)$, para o sinal:

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & demais\ \ casos. \end{cases}$$

Solução:

Dados: representação do sinal.

Resultado desejado: transformada de Fourier e densidade espectral de energia.

Hipóteses: sinal discreto e não-periódico.

Problema Exemplo 11.4

Cálculos: verifica-se que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty,$$

ou seja, a sequência é absolutamente somável e então *X(ω)* existe. Logo,

$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-jwn} = A\frac{1-e^{-jwL}}{1-e^{-jw}} = Ae^{-j(\frac{w}{2})(L-1)}\frac{sen(\frac{wL}{2})}{sen(\frac{w}{2})}.$$

Nota-se que *X(0) = AL*.

Problema Exemplo 11.4

Cálculos: neste caso *X(ω)* pode ser representada graficamente através dos gráficos de amplitude e fase, ou seja,

$$|X(w)| = \begin{cases} |A|L, & para \quad w = 0, \\ |A| \left| \dfrac{sen(\frac{wL}{2})}{sen(\frac{w}{2})} \right|. & \end{cases}$$

$$\angle X(w) = \angle A - \angle \frac{w}{2}(L-1) + \angle \frac{sen(\frac{wL}{2})}{sen(\frac{w}{2})}.$$

As figuras do slide seguinte apresentam os gráficos da amplitude e da fase quando $A = 1$ e $L = 5$.

A figura do slide 36 apresenta a densidade espectral de energia com $A = 1$ e $L = 5$.

Encerramento

Final da aula 11.

Exercícios Propostos:

Livro Proakis e Manolakis (Digital Signal Processing, 1996) – 4.5, 4.6 (c) e (e), 4.7 (a), 4.9 (a) e (b), 4.10 (a) e (b) e 4.12 (a).

Apostila ES879 disponibilizada – LISTA 5 – 5 e 6.

Próxima aula:

Análise em Frequência.

24/09/2019