

# Processamento de Sinais e Aquisição de Dados

Alberto Luiz Serpa  
2008

Este material caracteriza os principais aspectos das notas de aulas preparadas nos últimos anos quando ministrei a disciplina “ES879 - Sistemas de Aquisição de Dados” para alunos do curso de Engenharia de Controle Automação da UNICAMP.

Este material representa um guia de estudos para os alunos, sendo mais próximo dos principais pontos discutidos nas minhas aulas, e não tem o objetivo de substituir os livros adotados como bibliografia da disciplina.

O objetivo desta versão editada em computador é facilitar as correções e atualizações do material, permitindo a disponibilização no ambiente de Ensino Aberto da UNICAMP.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
1.1	Características dos sinais . . . . .	5
1.2	Conceito de frequência para tempo contínuo e tempo discreto	6
1.2.1	Frequência em tempo contínuo . . . . .	6
1.2.2	Frequência em tempo discreto . . . . .	6
1.3	Amostragem . . . . .	9
1.4	Teorema da amostragem . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Processamento analógico e digital de sinais</b>	<b>14</b>
2.1	Conversão analógico-digital e digital-analógico - Quantização .	17
2.2	Números binários inteiros, <i>fixed point</i> . . . . .	17
2.3	Números binários fracionários, <i>floating point</i> . . . . .	18
2.4	Quantização . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Filtros analógicos</b>	<b>24</b>
3.1	Filtro Butterworth . . . . .	24
3.2	Transformação analógico-analógico . . . . .	29
3.2.1	Transformação passa-baixa para passa-baixa . . . . .	29
3.2.2	Transformação passa-baixa para passa-alta . . . . .	30
3.2.3	Transformação passa-baixa para passa-banda . . . . .	30
3.2.4	Transformação passa-baixa para rejeita-banda . . . . .	31
3.3	Projeto de filtros Butterworth passa-baixa . . . . .	33
3.4	Projeto de filtro Butterworth passa-banda . . . . .	35
3.5	Filtros Chebyshev . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Fundamentos dos sistemas discretos</b>	<b>48</b>
4.1	Sinais discretos importantes . . . . .	50
4.2	Algumas propriedades . . . . .	51
4.3	Filtros FIR e IIR . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Equação a diferenças de coeficientes constantes</b>	<b>57</b>
5.1	Solução de equações a diferenças . . . . .	59
5.1.1	Solução homogênea . . . . .	59
5.1.2	Solução particular . . . . .	60
5.1.3	Solução completa . . . . .	62
5.2	Comportamento da solução homogênea . . . . .	63
5.3	Regiões de estabilidade no plano complexo . . . . .	66

<b>6</b>	<b>Análise em frequência</b>	<b>66</b>
6.1	Série de Fourier para sinais contínuos e periódicos . . . . .	67
6.2	Densidade espectral de potência de sinais contínuos periódicos	70
6.3	Transformada de Fourier para sinais contínuos não periódicos .	77
6.4	Densidade espectral de energia de sinais contínuos não periódicos	80
6.5	Série de Fourier para um sinal periódico discreto . . . . .	82
6.6	Densidade espectral de potência de sinais periódicos discretos .	86
6.7	Transformada de Fourier de sinais discretos não periódicos . .	88
6.8	Função de transferência e resposta em frequência . . . . .	94
6.9	Teorema da amostragem do ponto de vista frequencial . . . . .	98
6.10	Relações entre domínio do tempo e da frequência . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Transformada Discreta de Fourier</b>	<b>104</b>
7.1	DFT como uma transformação linear . . . . .	113
7.2	Algumas propriedades da DFT . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Projetos de filtros FIR</b>	<b>120</b>
8.1	Projeto de filtros FIR usando janelas . . . . .	122
8.2	Procedimento de projeto . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Transformada <math>\mathcal{Z}</math></b>	<b>137</b>
9.1	Transformada $\mathcal{Z}$ de entradas padronizadas . . . . .	139
9.2	Principais propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ . . . . .	141
9.3	Inversa da transformada $\mathcal{Z}$ . . . . .	142
9.4	Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral . . . . .	145
9.4.1	Algumas propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral . .	145
9.5	Solução de equação de diferenças . . . . .	146
<b>10</b>	<b>Função de transferência discreta</b>	<b>147</b>
10.1	polos e zeros . . . . .	148
10.2	Interpretação da função de transferência discreta . . . . .	148
10.3	Relação entre transformada $\mathcal{Z}$ e de Laplace . . . . .	148
<b>11</b>	<b>Filtros digitais IIR</b>	<b>149</b>
11.1	Transformação bilinear . . . . .	150
11.2	Warping . . . . .	153
11.3	Projeto de filtros usando a transformação bilinear . . . . .	153
11.4	Projeto de filtro digital com base em requisitos analógicos . . .	156
11.5	Projeto de filtros digitais usando transformações digital-digital	159
11.6	Filtro Butterworth digital de ordem $n$ . . . . .	161
11.7	Projeto com o conceito de impulso invariante . . . . .	164

11.8 Projeto de filtros via mínimos quadrados . . . . .	167
<b>12 Implementação de filtros digitais</b>	<b>167</b>
12.1 Realização direta . . . . .	168
<b>13 Comentário sobre a transformada rápida de Fourier - FFT</b>	<b>169</b>
<b>14 Bibliografia</b>	<b>172</b>
<b>15 Exercícios</b>	<b>172</b>
15.1 Lista 1 . . . . .	172
15.2 Lista 2 . . . . .	173
15.3 Lista 3 . . . . .	175
15.4 Lista 4 . . . . .	176
15.5 Lista 5 . . . . .	177
15.6 Lista 6 . . . . .	177
15.7 Lista 7 . . . . .	178
15.8 Lista 8 . . . . .	179
15.9 Lista 9 . . . . .	180

# 1 Introdução

## 1.1 Características dos sinais

Um sinal é uma quantidade física que varia com o tempo, espaço ou outras variáveis independentes. Pode ser uma função de uma variável ou de várias variáveis tais como:

$$s(t) = 10t,$$

$$s(x, y) = x + 2xy + 3y^2.$$

Alguns exemplos de sinais dependentes apenas do tempo são: sinal de voz, eletrocardiograma e eletroencefalograma. Um exemplo de sinal de mais variáveis é o sinal de imagem.

Existem situações em que a representação matemática é desconhecida ou muito complicada, por exemplo, sinal de voz. Em geral, estes sinais podem ser representados com certa precisão por

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \sin[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)],$$

que representa um somatório de funções senoidais com amplitude  $A_i(t)$ , frequência  $F_i(t)$  e fase  $\theta_i(t)$ . A representação do sinal através das amplitudes, fases e respectivas frequências caracteriza o espectro do sinal.

Os sinais podem ser brevemente classificados em:

- sinal real, por exemplo,  $s_1(t) = A \sin(3\pi t)$ ; ou sinal complexo, por exemplo,  $s_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A \cos(3\pi t) + jA \sin(3\pi t)$ .
- sinal de 1 canal, por exemplo  $s_3(t)$ , ou multicanal, por exemplo,  $\mathbf{s}_4(t) = \{s_a(t) \ s_b(t) \ s_c(t)\}^t$ .
- sinal unidimensional,  $s_5(t)$ , ou multidimensional,  $s_6(t, x, y)$ .
- sinal contínuo (valores contínuos, função contínua, exemplo:  $x(t) = \cos \pi t$ ), ou discreto (definido apenas em certos valores de tempo).
- sinal de valor contínuo ou sinal de valor discreto. Um sinal discreto no tempo e que assume valores discretos é um sinal digital.
- sinal determinístico (descrito por uma expressão matemática, uma tabela de dados ou uma regra bem definida) ou sinal aleatório (não pode ser descrito de forma razoável por uma regra matemática, o sinal evolui no tempo de uma forma imprevisível). Os sinais aleatórios são analisados através do emprego de técnicas estatísticas.

Um sinal discreto pode ser gerado por:

- Valores de um sinal analógico selecionados em instantes discretos de tempo,  $t_n = nT$ , com  $n$  inteiro, caracterizando o que se conhece como amostragem. Exemplo:

$$x(t) = 0.8^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \longrightarrow x(n) = 0.8^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Sinais efetivamente discretos, por exemplo, grandezas medidas a cada dia, a cada mês, a cada hora, etc.

## 1.2 Conceito de frequência para tempo contínuo e tempo discreto

### 1.2.1 Frequência em tempo contínuo

Um sinal cossenoidal contínuo no tempo é dado por

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

onde  $A$  é a amplitude,  $\Omega$  é a frequência [ $rad/s$ ] e  $\theta$  é a fase [ $rad$ ]. É possível escrever que  $\Omega = 2\pi F$ , com  $F$  a frequência em  $Hz$ , e  $T = \frac{1}{F}$  é o período.

Algumas propriedades do sinal cossenoidal são:

- Para uma frequência  $F$  fixa,  $x_a(t)$  é periódico, isto é,  $x_a(t+T) = x_a(t)$ .  $T$  é o período fundamental.
- Se as frequências são diferentes, então os sinais são distintos;
- Quanto maior a frequência  $F$ , maior a oscilação.

É possível escrever o sinal cossenoidal como

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = A e^{j(\Omega t + \theta)} = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)},$$

onde foi usada a identidade de Euler:  $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$ . Isso permite a representação da senóide através de fasores, como ilustrado na Figura 1.

### 1.2.2 Frequência em tempo discreto

Um sinal cossenoidal discreto no tempo, com  $n$  inteiro, é dado por

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < +\infty,$$

onde  $A$  é a amplitude,  $\omega$  é a frequência [ $rad/amostra$ ], e  $\theta$  é a fase [ $rad$ ]. Verifica-se que  $\omega = 2\pi f$ , com  $f$  a frequência em ciclos por amostra.

Algumas propriedades são:

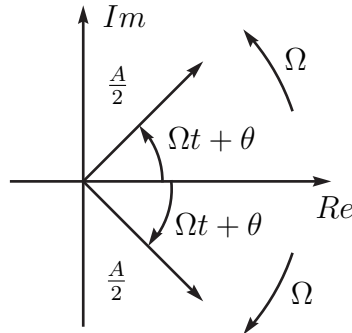


Figura 1: Representação na forma da fasores.

- O sinal discreto  $x(n)$  é periódico se e somente se

$$x(n + N) = x(n), \quad \forall n, \quad N > 0,$$

onde o menor valor de  $N$  é o período fundamental.

- Uma cossenóide no tempo discreto é periódica somente se sua frequência  $f$  é um número racional (razão entre dois inteiros);

Para que um sinal cossenoidal de frequência  $f_0$  seja periódico busca-se que

$$\cos[2\pi f_0(n + N) + \theta] = \cos[2\pi f_0n + \theta],$$

que será verdadeiro se e somente se existir um  $k$  inteiro tal que  $2\pi f_0N = 2\pi k$ , ou seja,  $f_0 = \frac{k}{N}$  racional.

Verifica-se que para sinais cossenoidais discretos, uma pequena alteração na frequência pode resultar em uma grande variação no período.

---

Exemplo: Para  $f_1 = \frac{31}{60}$  tem-se um período de fundamental  $N_1 = 60$ . Para  $f_2 = \frac{30}{60}$  tem-se um período fundamental de  $N_2 = 2$ .

---

Os sinais cossenoidais discretos cujas frequências são separadas por um múltiplo inteiro de  $2\pi$  são idênticos. Isso pode ser verificado como

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(w_0n + 2\pi n + \theta) = \cos(w_0n + \theta).$$

Portanto,

$$x_k(n) = A \cos(w_k n + \theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

com  $w_k = w_0 + 2\pi k$  e  $-\pi < w_0 < \pi$  são sequências idênticas.

Contrariamente, verifica-se que um sinal cossenoidal com frequência  $|w| < \pi$  (ou  $|f| < \frac{1}{2}$ ) será único.

A maior taxa de oscilação de um sinal cossenoidal discreto é obtida quando  $w = \pi$  (ou  $w = -\pi$ ), ou equivalentemente  $f = \pm \frac{1}{2}$ .

Verifica-se que qualquer sequência resultante de uma cossenóide com uma frequência  $w_k > \pi$  será idêntica a uma cossenóide com uma frequência  $|w_k| \leq \pi$ . A cossenóide de frequência  $w_k > \pi$  é conhecida como um *alias* da cossenóide de frequência  $|w_k| \leq \pi$ .

---

Exemplo: Sejam as sequências

$$x_1(n) = \cos(2\pi \frac{1}{8}n) \quad e \quad x_2(n) = \cos(2\pi \frac{-7}{8}n).$$

Estas sequências estão mostradas na Figura 2.

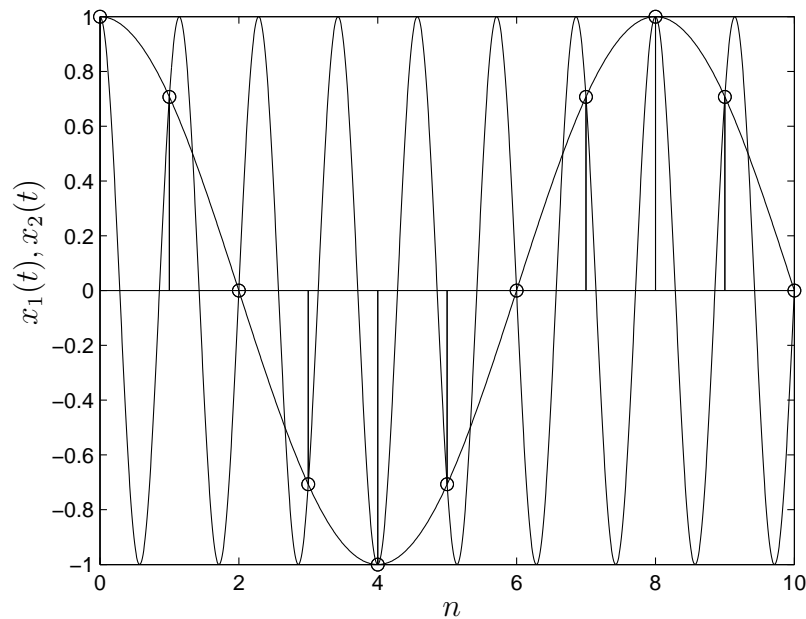


Figura 2: Aliasing no tempo. As curvas contínuas são apresentadas apenas para facilitar a visualização.

Observa-se que os pontos da sequência  $x_2(n)$  coincidem com pontos de  $x_1(n)$ , caracterizando o *aliasing*. Neste caso,  $x_2(n)$  é um alias de  $x_1(n)$ .

---

Algumas observações são:



- para  $w = 0$  o sinal é constante;
- para  $w = 2\pi$  o sinal é constante (também);
- a faixa  $-\pi < w < \pi$  é a faixa fundamental para cossenóides discretas;
- o desenvolvimento anterior poderia ter sido feito usando diretamente uma senóide ao invés de cossenóide e ainda uma outra faixa fundamental poderia ter sido adotada, por exemplo,  $0 < w < 2\pi$ .

### 1.3 Amostragem

O processamento digital de um sinal contínuo consiste em uma conversão para uma sequência.

Um sinal analógico  $x_a(t)$  amostrado a cada  $T$  segundos é representado por

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty,$$

onde  $x(n)$  representa uma sequência de números.

A frequência de amostragem  $F_s = \frac{1}{T}$  deve ser suficientemente grande para que não haja perda de informação espectral (evitar o fenômeno de *aliasing*).

A Figura 3 ilustra o processo de amostragem.

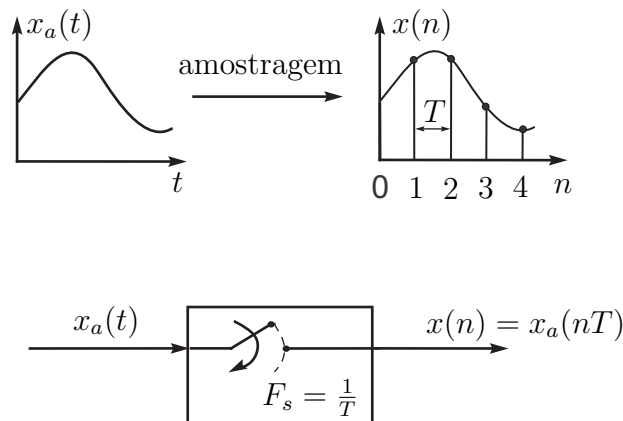


Figura 3: Representação do processo de amostragem.

A relação entre o tempo e o respectivo ponto da sequência gerada através da amostragem é dada por

$$t = nT = \frac{n}{F_s}.$$

Existe uma relação entre a frequência de um sinal contínuo ( $F$  ou  $\Omega$ ) e a frequência do sinal discreto amostrado ( $f$  ou  $w$ ). Considere o sinal analógico dado por

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta),$$

e sua versão amostrada dada por

$$x_a(nt) = x(n) = A \cos(2\pi FnT + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi Fn}{F_s} + \theta\right) = A \cos(2\pi fn + \theta),$$

com  $f = \frac{F}{F_s}$ , ou ainda,  $\Omega = 2\pi F$  e  $w = 2\pi f$ . Logo,

$$w = 2\pi \frac{F}{F_s} = 2\pi \frac{\Omega}{2\pi F_s} = \frac{\Omega}{F_s} = \Omega T.$$

Para senóides contínuas a frequência pode ser qualquer no intervalo  $-\infty < F < +\infty$  ( $-\infty < \Omega < \infty$ ). Para senóides discretas tem-se que  $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$  ( $-\pi < w < \pi$ ). Mas, sabe-se que  $f = \frac{F}{F_s}$ , e a frequência da senóide contínua quando amostrada deve satisfazer

$$-\frac{1}{2} < \frac{F}{F_s} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{F_s}{2} < F < \frac{F_s}{2} \quad \text{ou} \quad (-\pi F_s < \Omega < \pi F_s).$$

A maior frequência do sinal discreto é  $w = \pi$  (ou  $f = \frac{1}{2}$ ). Logo, a frequência de amostragem correspondente aos maiores valores de  $w$  e  $f$  são

$$F_{max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad \text{ou} \quad \Omega_{max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T}.$$

Tomando-se o caso crítico, escreve-se que  $F_s = 2F_{max} = F_N$ , que é conhecida como frequência de Nyquist.

---

Exemplo: Sejam  $x_1(t) = \cos(2\pi 10t)$  e  $x_2(t) = \cos(2\pi 50t)$  amostrados a uma frequência  $F_s = 40\text{Hz}$ .

O período de amostragem é  $T = \frac{1}{40}$ . Os sinais discretos correspondentes são

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi 10 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$x_2(n) = \cos\left(2\pi 50 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right).$$

Contudo,

$$\cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

e então  $x_2(n) = x_1(n)$ , ou seja idênticos e indistinguíveis.

Consequentemente, se a sequência  $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$  é dada, não se sabe para qual dos sinais analógicos ela corresponde ( $x_1(t)$  ou  $x_2(t)$ ). Neste caso, a cossenóide de  $50Hz$  é um *alias* da cossenóide de  $10Hz$  quando  $F_s = 40Hz$ . Verifica-se que outros *aliases* são  $90Hz$ ,  $130Hz$ , etc.

---

## 1.4 Teorema da amostragem

O teorema da amostragem determina qual frequência de amostragem deve ser usada para permitir posteriormente uma adequada reconstrução do sinal.

O conteúdo de frequência de um sinal informa como o sinal é caracterizado em termos de suas frequências componentes. Por exemplo, é sabido que a máxima frequência de um sinal de voz é da ordem de  $3000Hz$ .

Considere que o conteúdo de frequência do sinal é conhecido, ou seja, sua componente de máxima frequência é dada por  $F_{max}$ . Como se verificou anteriormente, a maior frequência do sinal analógico que permite a reconstrução quando o sinal é amostrado à taxa de  $F_s = 1/T$  é  $F_{max} = F_s/2$ . Logo, para evitar o problema de *aliasing* deve-se adotar

$$F_s > 2F_{max}.$$

Quando o conteúdo de frequência é desconhecido, estabelece-se uma faixa de frequência de interesse e se filtra o sinal com um filtro analógico passa-baixa, determinando-se  $F_{max}$  antes de se realizar a amostragem. Como os filtros não são ideais, pois possuem uma região de corte com certa largura em frequência, é usual empregar um fator de segurança, por exemplo,

$$F_s > 2F_{max} \times \beta, \quad \beta > 1.5$$

Quando necessário, o sinal amostrado pode ser reconstruído através da conversão  $D/A$ , como por exemplo, no caso de sinais de voz. Os conversores  $D/A$  interpolam os dados amostrados gerando o sinal contínuo reconstruído. As alternativas usuais de interpolação são:

- Segurador de Ordem zero (ZOH - *zero order holder*). O segurador de ordem zero mantém o valor constante de um ponto ao outro conforme ilustrado na Figura 4.

Em termos matemáticos tem-se que o sinal analógico reconstruído é  $\hat{x}_a(t) = x(n)$ ,  $nT_s \leq t \leq (n+1)T_s$ .

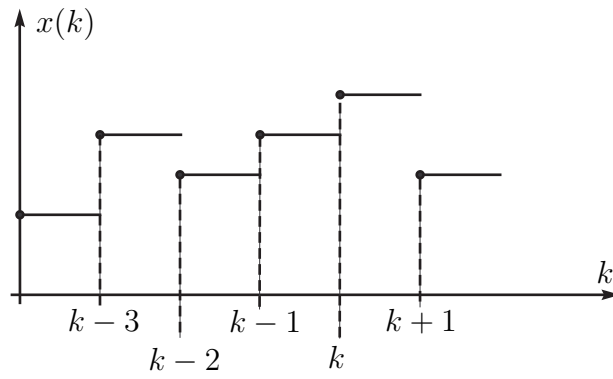


Figura 4: Segurador de ordem zero

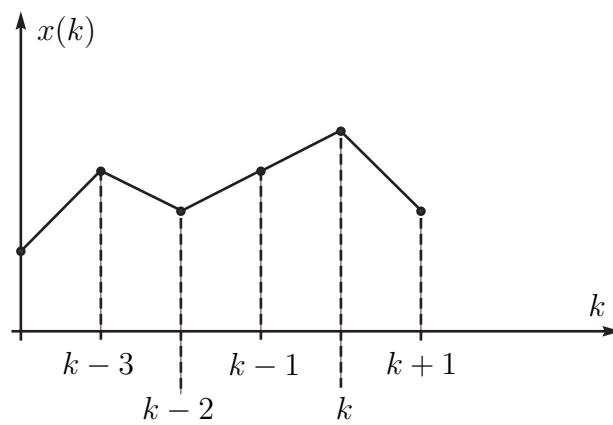


Figura 5: segurador de ordem um

- Segurador de Ordem Um (FOH - *first order holder*). O segurador de ordem um representa uma interpolação linear entre cada par de pontos conforme ilustrado na Figura 5.
- Interpolação cúbica, que realiza uma interpolação cúbica para fazer a interpolação através de *cubic splines*.

Existe uma função de interpolação ideal, que será justificada futuramente, que é dada por

$$g(t) = \frac{\text{sen}(2\pi F_{max}t)}{2\pi F_{max}t},$$

e o sinal analógico reconstruído é dado por

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right),$$

onde  $x_a(n/F_s) = x_a(nT) = x_a(n)$  são os pontos amostrados de  $x_a(t)$ .

---

Exemplo: Seja o sinal analógico:

$$x_a(t) = 3\cos(2000\pi t) + 5\text{sen}(6000\pi t) + 10\cos(12000\pi t).$$

1. Determine a frequência de Nyquist.
2. Se a frequência de amostragem é  $F_s = 5000 \text{ amostras/s}$ , determine o sinal discreto obtido depois da amostragem.
3. Determine o sinal reconstruído  $y_a(t)$  através da interpolação ideal.

As frequências deste sinal são:  $\Omega_1 = 2000\pi \text{ rad/s}$  ( $F_1 = 1000 \text{ Hz}$ ),  $\Omega_2 = 6000\pi \text{ rad/s}$  ( $F_2 = 3000 \text{ Hz}$ ) e  $\Omega_3 = 12000\pi \text{ rad/s}$  ( $F_3 = 6000 \text{ Hz}$ ). Portanto,  $F_{max} = 6000 \text{ Hz}$ . De acordo com o teorema da amostragem tem-se que:

$$F_s > 2F_{max} = 12000 \text{ Hz},$$

e a frequência de Nyquist é  $F_N = 12000 \text{ Hz}$ .

Considerando a frequência de amostragem dada  $F_s = 5000 \text{ Hz}$ , que é menor que a frequência de Nyquist, sabe-se que haverá *aliasing*. Sob esta condição, sabe-se que a máxima frequência que será representada unicamente é de  $F_s/2 = 2500 \text{ Hz}$ .

O sinal discreto será dado por

$$x(n) = x_a(nT) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cos \left( 2000\pi \frac{n}{5000} \right) + 5 \operatorname{sen} \left( 6000\pi \frac{n}{5000} \right) + 10 \cos \left( 12000\pi \frac{n}{5000} \right) = \\
 &= 3 \cos \left( 2\pi \frac{1}{5}n \right) + 5 \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{3}{5}n \right) + 10 \cos \left( 2\pi \frac{6}{5}n \right).
 \end{aligned}$$

O sinal  $x(n)$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 x(n) &= 3 \cos \left( 2\pi \frac{1}{5}n \right) + 5 \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( 1 - \frac{2}{5} \right) n \right] + 10 \cos \left[ 2\pi \left( 1 + \frac{1}{5} \right) n \right] = \\
 &= 3 \cos \left( 2\pi \frac{1}{5}n \right) + 5 \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( -\frac{2}{5} \right) n \right] + 10 \cos \left( 2\pi \frac{1}{5}n \right) = \\
 &= 13 \cos \left( 2\pi \frac{1}{5}n \right) - 5 \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{2}{5}n \right).
 \end{aligned}$$

Verifica-se que este sinal amostrado contém apenas duas componentes com as seguintes frequências:  $f_1 = 1/5$  e  $f_2 = 2/5$ . Como,  $f = F/F_s$  e  $F_s = 5000$ , tem-se que  $F_1 = 1000\text{Hz}$  e  $F_2 = 2000\text{Hz}$ . Consequentemente, o sinal reconstruído através da interpolação ideal será dado por

$$y_a = 13 \cos(2000\pi t) - 5 \operatorname{sen}(4000\pi t),$$

que é diferente do sinal analógico inicial devido ao fenômeno de *aliasing*, causado pela baixa taxa de amostragem empregada.

---

## 2 Processamento analógico e digital de sinais

Um sistema é um componente que executa uma operação sobre um sinal, por exemplo, a resposta de um sistema à uma excitação ou um filtro para eliminar ruídos e interferências de um sinal. O sistema pode ser físico ou não, ou seja, hardware ou software.

O ato de operar sobre um sinal através de um sistema é conhecido pelo termo processamento de sinal (ou sinais).

Um sinal contínuo medido  $x(t)$  pode ser escrito como

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

onde  $n(t)$  é o ruído e  $s(t)$  é o sinal de interesse.

Uma questão fundamental na área de processamento de sinais é: como operar em  $x(t)$  para obter uma boa estimativa  $\hat{s}(t)$  para  $s(t)$  ?

O processamento analógico de um sinal pode ser feito através de um filtro de função de transferência  $H(s)$  como representado no esquema da Figura 6.

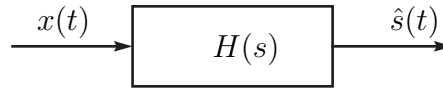


Figura 6: Esquema do processamento analógico de um sinal - envolve funções contínuas.

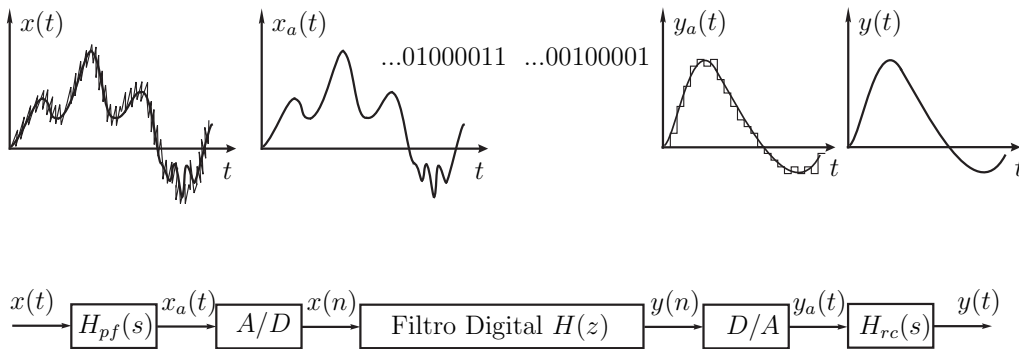


Figura 7: Ilustração do processamento digital de um sinal.

O processamento digital de um sinal é ilustrado no esquema da Figura 7. O processador digital é um computador ou microprocessador programado.

Na Figura 7 tem-se que:

- $H_{pf}(s)$ : pré-filtro (em geral para reduzir efeitos fora da banda, ruído, sinais de alta frequência);
- $A/D$ : conversor analógico digital;
- $H(z)$ : função de transferência do filtro digital;
- $D/A$ : conversor digital analógico;
- $H_{rc}(s)$ : filtro para reconstrução.

Um conversor analógico-digital está esquematizado na Figura 8.

O filtro digital pode ser caracterizado por uma equação a diferenças, por exemplo,

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) - a_1y(n-1),$$

cujas transformada  $\mathcal{Z}$  resulta em na função de transferência  $H(z)$  dada por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 - a_1z^{-1}}.$$

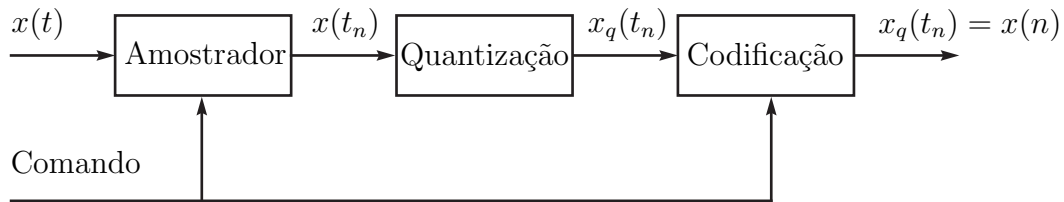


Figura 8: Esquema de um conversor analógico-digital.

O conceito de transformada  $\mathcal{Z}$  e função de transferência de sistemas discretos serão estudados posteriormente.

As principais vantagens do processamento digital de sinais sobre o analógico são:

- Flexibilidade. O processamento digital permite a reprogramação, enquanto que o analógico requer novo projeto do sistema e testes para verificação.
- Precisão. No processamento digital tem-se um maior controle das operações A/D e D/A em função do tamanho das palavras e dos cálculos com ponto flutuante. No processamento analógico, as tolerâncias dos componentes dos circuitos limitam a precisão.
- Armazenamento de dados. No processamento digital tem-se maior facilidade de armazenamento em meios magnéticos sem deterioração ou perda de fidelidade.
- Processamento. O processamento digital permite o emprego de algoritmos mais sofisticados, enquanto o analógico apresenta a dificuldade para executar operações matemáticas com precisão.
- Menores custos.

Pode-se dizer que o processamento digital possui maior estabilidade, pequena degradação, repetibilidade e previsibilidade com custos baixos comparados com o processamento analógico.

Uma limitação do processamento digital de sinais é que a velocidade do conversor  $A/D$  e do processador digital limita a aplicabilidade para sinais que possuem faixas de frequência muito altas, pois requer uma frequência de amostragem muito alta.



## 2.1 Conversão analógico-digital e digital-analógico - Quantização

Os sinais digitais podem ser armazenados em um computador digital na forma de números binários.

Um bit define dois valores, ou seja, 0 ou 1. Um byte representa um número de 8 bits. Uma palavra é um conjunto de bits, por exemplo, palavras de 4 bits, palavras de 128 bits, etc.

A precisão do computador digital é função do comprimento da palavra. Por exemplo, o computador de 8 bits é menos preciso que computador de 16 bits.

## 2.2 Números binários inteiros, *fixed point*

Seja um número escrito como

$$N = a_{n-1}2^{n-1} + \dots + a_22^2 + a_12^1 + a_02^0,$$

onde  $a_i$  são coeficientes 0 ou 1 que caracterizam a representação binária do número.

O bit mais significativo (*most significant bit*, MSB) é  $a_{n-1}$ .

O bit menos significativo (*least significant bit*, LSB) é  $a_0$ .

---

Exemplo: Uma palavra de 3 bits será dada por  $N = a_22^2 + a_12^1 + a_02^0$ , e os respectivos valores são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Números binários de 3 bits

Decimal	MSB	LSB	
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

---

A palavra é um conjunto de bytes, como ilustrado na Figura 9.

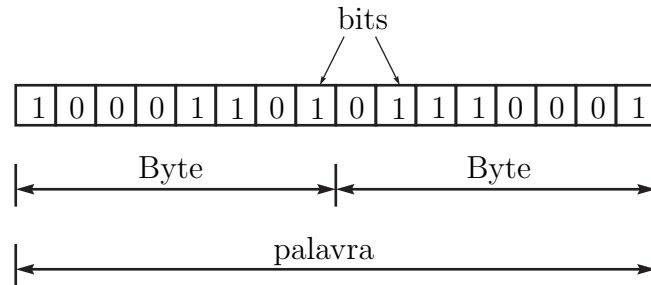


Figura 9: Palavra de 2 bytes.

## 2.3 Números binários fracionários, *floating point*

Os números binários fracionários apresentam uma parte inteira e uma parte fracionária conforme ilustrado na Figura 10.

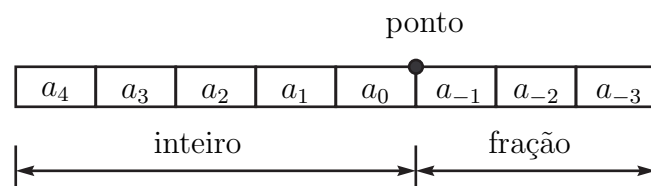


Figura 10: Número binário fracionário.

A representação binária associada à Figura 10 é dada por

$$N = a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + a_{-3} 2^{-3}.$$

---

Exemplo: Determinar o número decimal associado ao número binário fracionário 01011.101

Escreve-se que

$$N = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 11.625$$

---

Uma fração de  $n$  bits é representada como

$$N = a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \dots + a_{-n} 2^{-n}.$$

A Tabela 2 apresenta as frações associadas a 3 bits, e a Figura 11 uma representação gráfica das frações.

Tabela 2: Frações relacionadas a 3 bits

Decimal	<i>MSB</i>		<i>LSB</i>
0	0	0	0
1/8	0	0	1
1/4	0	1	0
3/8	0	1	1
1/2	1	0	0
5/8	1	0	1
3/4	1	1	0
7/8	1	1	1

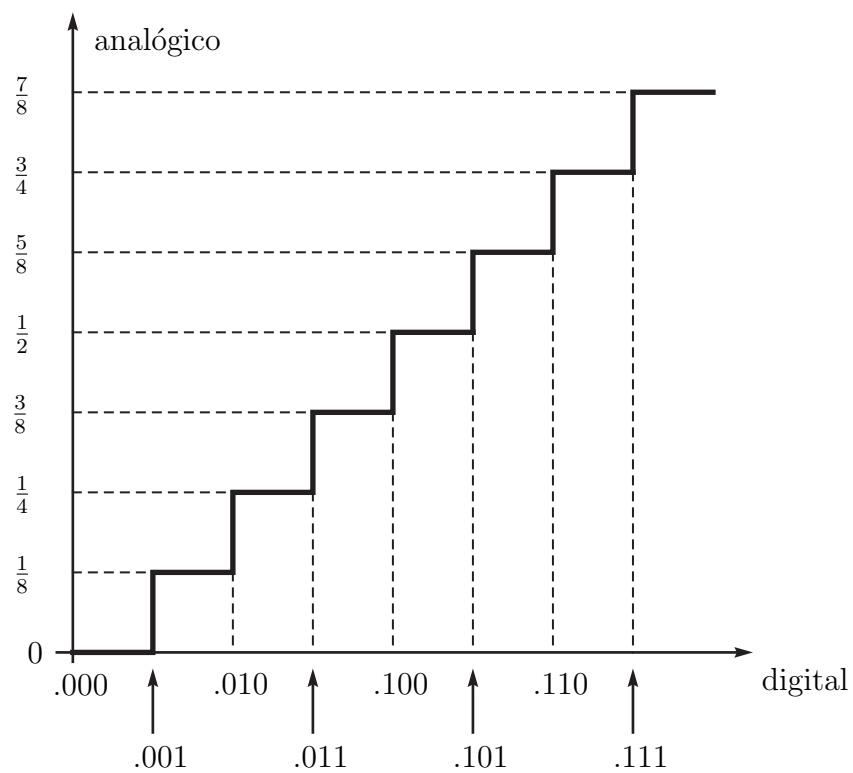


Figura 11: Frações para 3 bits.

## 2.4 Quantização

Nota-se na Tabela 2 que para uma fração de 3 bits, o *MSB* representa metade do fundo de escala, enquanto que o *LSB* representa um oitavo do fundo de escala. Para um número qualquer com uma fração de  $n$  bits, pode-se escrever que

- *MSB* corresponde à metade do fundo de escala ( $FS$ );
- *LSB* corresponde à  $2^{-n}$  do  $FS$ .

Independentemente se inteiro ou fracionário, uma palavra de  $n$  bits determina  $2^n$  estados distintos, ou seja, uma resolução de  $\frac{1}{2^n}$ .

Na conversão A/D o sinal analógico é convertido para um sinal digital. Como o número de bits em uma palavra é finito, apenas uma resolução finita pode ser obtida em uma conversão A/D. Consequentemente, o número analógico é arredondado ou truncado para o número digital. Esta aproximação caracteriza o processo de quantização.

Exemplos de arredondamento são:  $3.5 \rightarrow 3.6$  e  $-3.55 \rightarrow -3.6$ .

Exemplos de truncamento são:  $3.55 \rightarrow 3.5$  e  $-3.55 \rightarrow -3.5$ .

O nível de quantização corresponde ao menor intervalo de divisão, ou seja, equivale ao *LSB*.

O erro de quantização é a diferença entre o que seria esperado e o degrau correspondente.

A Figura 12 apresenta uma representação do processo de quantização com arredondamento. Nota-se na Figura 12 que o maior erro de quantização é  $\pm \frac{q}{2}$ .

A Figura 13 apresenta uma representação do processo de quantização com truncamento. Nota-se na Figura 13 que o maior erro de quantização é  $\pm q$ .

A maior saída digital para 3 bits, que corresponde ao binário 111, é  $\frac{7}{8}FS$ . Por exemplo, se a escala de uma conversão A/D é  $10V$ , então  $FS = 10V$ . Logo,  $q = \frac{1}{8}FS = 1.25V$ . O maior erro de quantização (arredondamento) será de  $\pm \frac{q}{2} = \pm 0.625$ . Logo, o máximo valor de saída possível será:  $\frac{7}{8}FS + \frac{q}{2} = 9.375V$ .

---

Exemplo: O sinal discreto  $x(n) = 6.35\cos(\frac{\pi}{10}n)$  é quantizado com as seguintes resoluções: i)  $\Delta = 0.1$  e ii)  $\Delta = 0.02$ . Determine o número de bits requeridos na conversão A/D em cada caso.

A variação total do sinal é de  $x_{min} = -6.35$  ( $n = 0$ ) até  $x_{max} = +6.35$  ( $n = 10$ ).

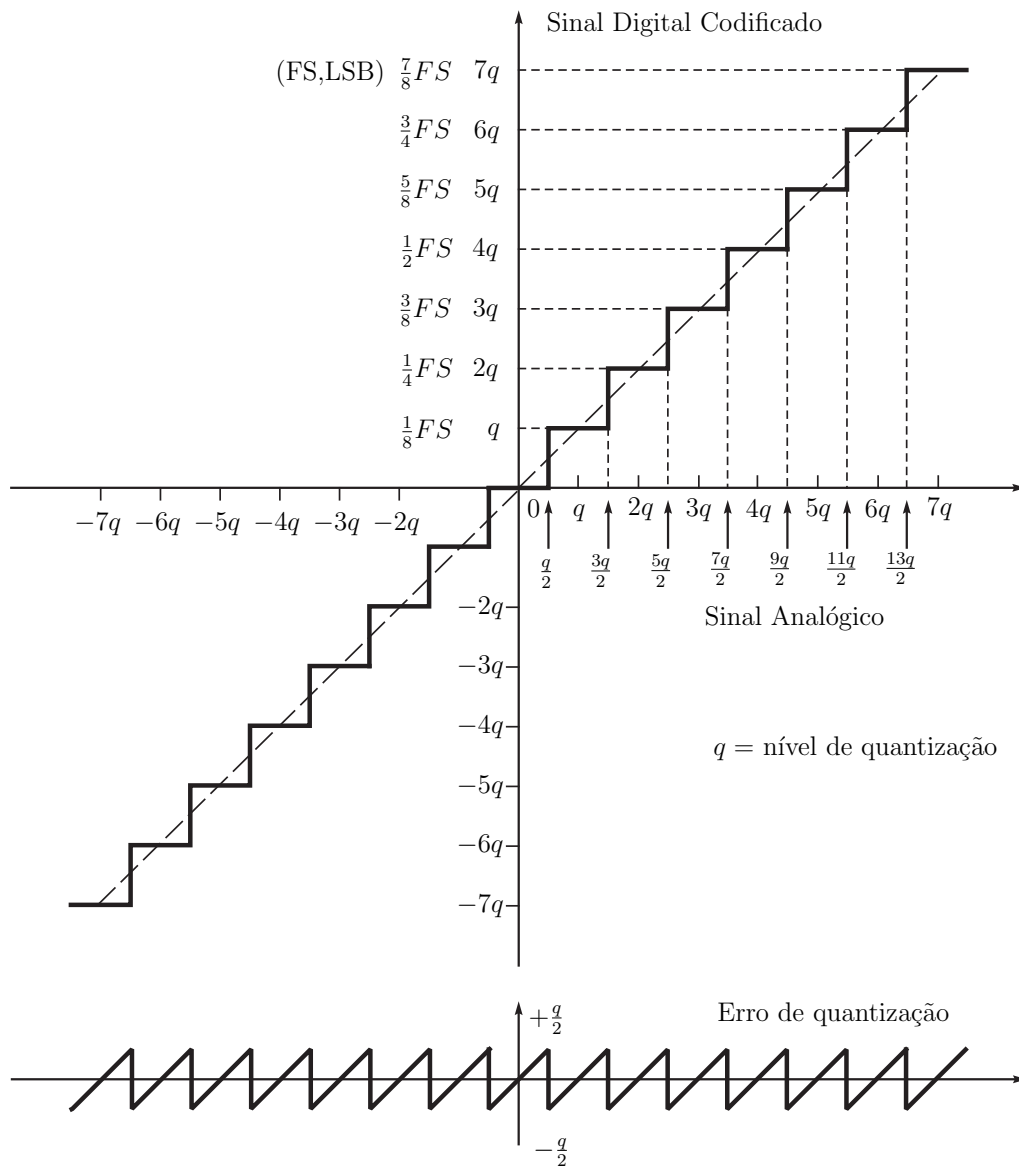


Figura 12: Quantização com arredondamento para 3 bits.

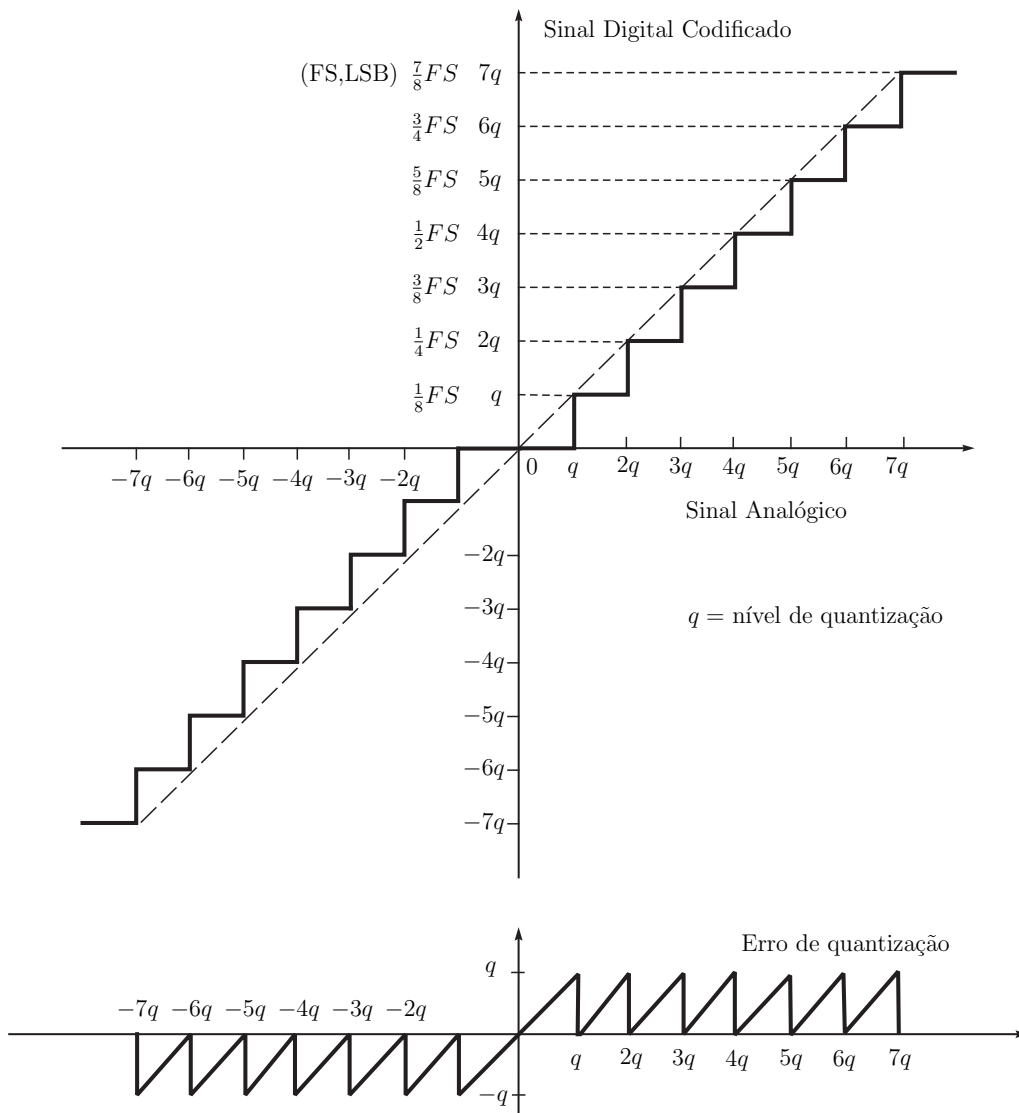


Figura 13: Quantização com truncamento para 3 bits.

A resolução é dada pelo total da variação dividido pelo número de intervalos  $L - 1$ , ou seja,

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1},$$

ou ainda

$$L = \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta} + 1.$$

Para o primeiro caso, tem-se que

$$L = \frac{[6.35 - (-6.35)]}{0.1} + 1 = 128,$$

e consequentemente  $2^7 = 128$ , indicando a necessidade de 7 bits.

Para o segundo caso, tem-se que

$$L = \frac{[6.35 - (-6.35)]}{0.02} + 1 = 636,$$

e consequentemente  $2^9 < 636 < 2^{10}$ , indicando a necessidade de 10 bits.

---

### 3 Filtros analógicos

Seja o filtro analógico ilustrado na Figura 14.

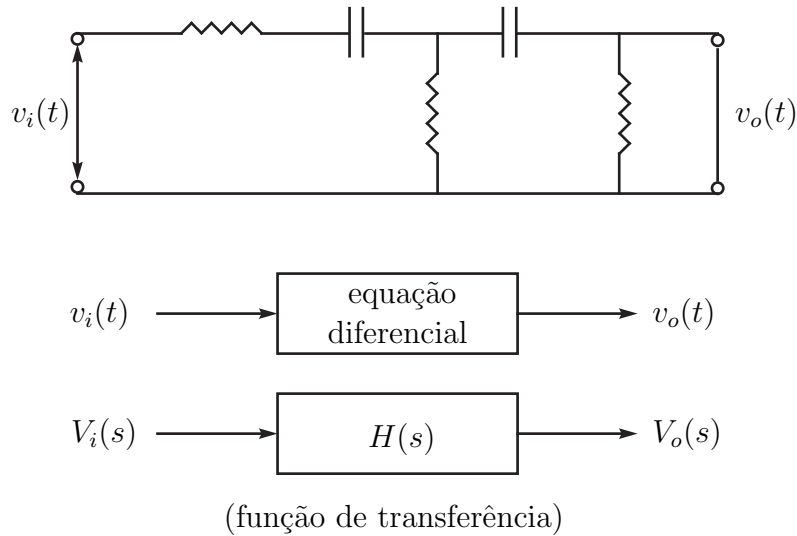


Figura 14: Ilustração de filtro analógico.

Para este filtro sabe-se que a relação entre  $v_i(t)$  e  $v_o(t)$  é dada por uma equação diferencial. Em termos de transformada de Laplace tem-se que

$$V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)], \quad V_o(s) = \mathcal{L}[v_o(t)],$$

e a relação entre entrada e saída é dada pela função de transferência  $H(s)$ .

A resposta em frequência típica de um filtro passa-baixa é mostrada na Figura 15.

Os tipos básicos de resposta em frequência são ilustrados na Figura 16.

#### 3.1 Filtro Butterworth

O filtro Butterworth de ordem  $n$  é descrito por pela seguinte equação

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}.$$

Algumas propriedades deste filtro são:

$$|H_n(j\Omega)|^2|_{\Omega=0} = 1, \quad \forall n,$$



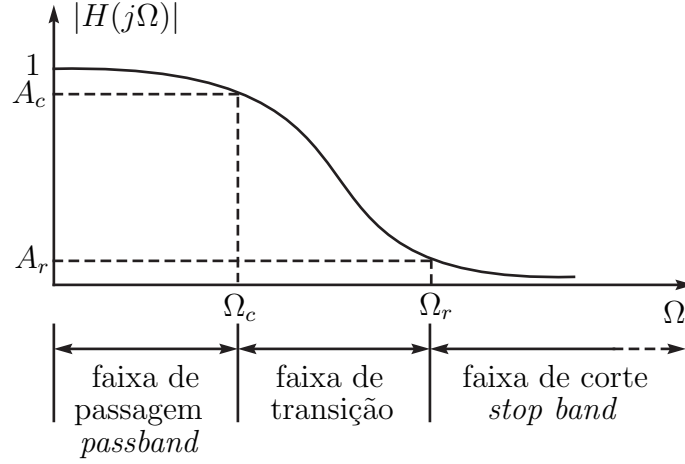


Figura 15: Resposta em frequência típica de um filtro passa-baixa.

$$|H_n(j\Omega)|^2|_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2}, \quad n \text{ finito},$$

$$|H_n(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 0.707, \quad 20 \log |H_n(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = -3.0103.$$

Quando  $n$  aumenta,  $|H_n(j\Omega)|^2$  se aproxima do passa baixa ideal conforme ilustrado na Figura 17.

A Figura 18 apresenta as curvas de resposta em frequência para os filtros Butterworth de ordem 1, 2 e 3.

Em termos de amplitude em  $dB$  tem-se que

$$G_n(\Omega) = 20 \log |H_n(j\Omega)| = 10 \log |H_n(j\Omega)|^2 = 10 \log \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}} \right] = -10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n} \right],$$

e verifica-se que:

- Para  $\Omega \ll \Omega_c$  então  $G_n(\Omega) \approx -10 \log[1 + 0] = 0$ .
- Para  $\Omega \gg \Omega_c$  então  $G_n(\Omega) \approx -10 \log \left[ \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n} \right] = -20n \log \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)$ , que representa uma inclinação de  $-20n$ .
- Para  $\Omega = \Omega_c$  então  $G_n(\Omega) = -10 \log[1 + 1] = -3.01$ .

Seja um filtro normalizado com  $\Omega_c = 1$ . Logo,

$$|H_n(j\Omega)|^2 = H_n(j\Omega)H_n(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}.$$

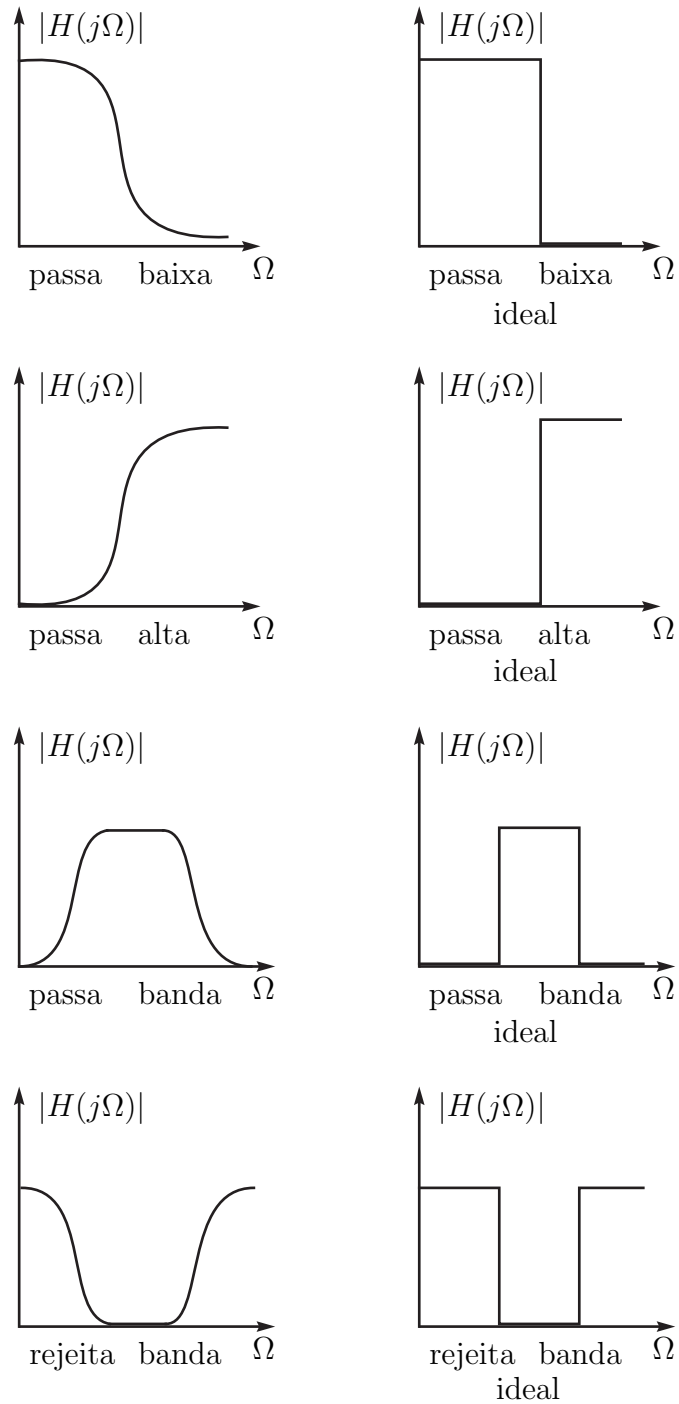


Figura 16: Resposta em frequência dos tipos básicos de filtros.

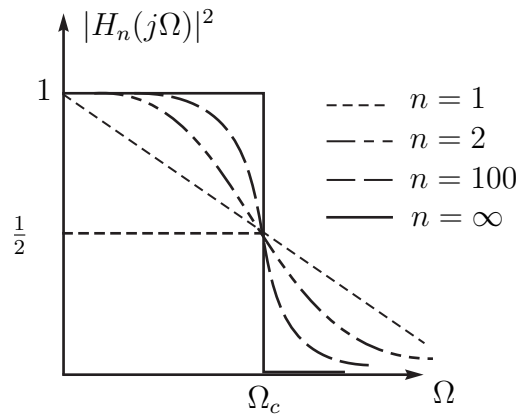


Figura 17: Característica do filtro Butterworth.

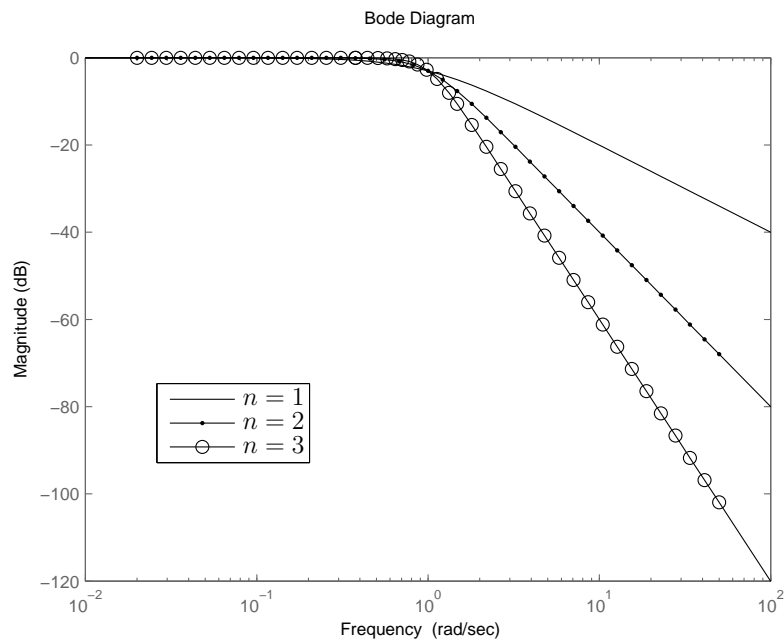


Figura 18: Resposta em frequência de filtros Butterworth de ordens 1, 2 e 3.

Lembrando que  $s = j\Omega$ , escreve-se diretamente a equação característica

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \Rightarrow s^{2n} = -1(j)^{2n},$$

e se verifica que os polos estarão sobre um círculo de raio unitário.

Para assegurar que se tenha um filtro estável, deve-se escolher os polos que estejam no semi-plano esquerdo (*SPE*). Logo, a função de transferência do filtro pode ser escrita como:

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{1}{B_n(s)},$$

onde  $B_n(s)$  são os polinômios de Butterworth dados por

$n$	$B(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76536s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$

---

Exemplo: Achar a função de transferência de um filtro de Butterworth normalizado de ordem 1.

Para  $n = 1$  tem-se

$$H_1(s) = \frac{1}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{1}{s + 1},$$

com o pólo estável  $s_k = -1$ .

Nota:  $s^2 = -1j^2 \Rightarrow s^2 = (-1)(-1) = 1 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = \pm 1$ .

---

Exemplo: Filtro Butterworth normalizado de ordem 2.

Para  $n = 2$  tem-se

$$s^{2 \times 2} = -1(j)^{2 \times 2} \Rightarrow s^4 = -1j^4 \Rightarrow s^4 = -1 \times 1,$$

que representa a equação característica

$$s^4 + 1 = 0,$$

cuja solução instável é  $s_{1,2} = 0.707 \pm 0.707j$  e estável é  $s_{3,4} = -0.707 \pm 0.707j$

Portanto, a função de transferência tomando os polos estáveis será dada por

$$H_2(s) = \frac{1}{(s - s_3)(s - s_4)} = \frac{1}{[s - (-0.707 + 0.707j)][s - (-0.707 - 0.707j)]},$$

ou ainda,

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

### 3.2 Transformação analógico-analógico

O eixo de frequências pode ser ajustado ou reescalado usando transformações para obter funções de transferência de filtros com os requisitos de interesse. As principais transformações são descritas a seguir.

#### 3.2.1 Transformação passa-baixa para passa-baixa

A transformação do filtro  $H(s)$  passa-baixa para o filtro  $H'(s)$  passa-baixa de acordo com a Figura 19 é dada por

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s.$$

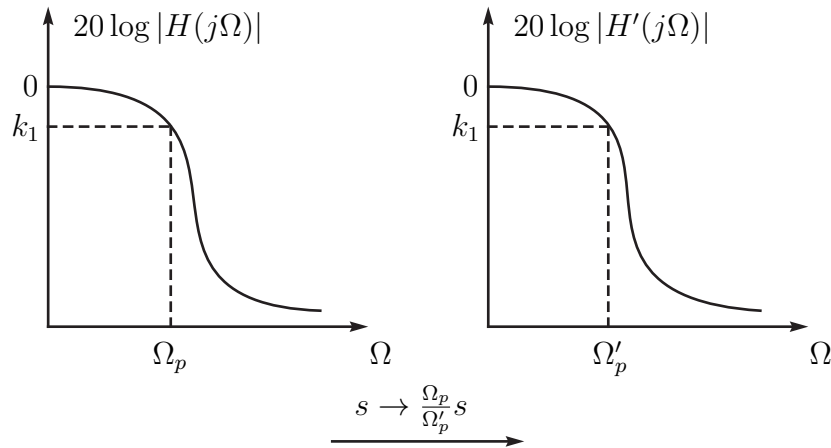


Figura 19: Transformação de passa-baixa para passa-baixa.

Note que

$$H'(s) = H(s)|_{s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s} = H\left(\frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s\right).$$

A função de resposta em frequência é obtida quando  $s = j\Omega$ , ou seja,

$$|H'(j\Omega)| = \left| H \left( \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} j\Omega \right) \right|,$$

e para  $\Omega = \Omega'_p$  então

$$|H'(j\Omega'_p)| = |H(j\Omega_p)|,$$

ou seja, a resposta em frequência de  $H'(\Omega'_p)$  é igual à de  $H(\Omega_p)$ . Isso significa que a transformação não afeta a amplitude na frequência considerada na frequência de interesse da transformação.

### 3.2.2 Transformação passa-baixa para passa-alta

A transformação do filtro  $H(s)$  passa-baixa para o filtro  $H'(s)$  passa-alta de acordo com a Figura 20 é dada por

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}.$$

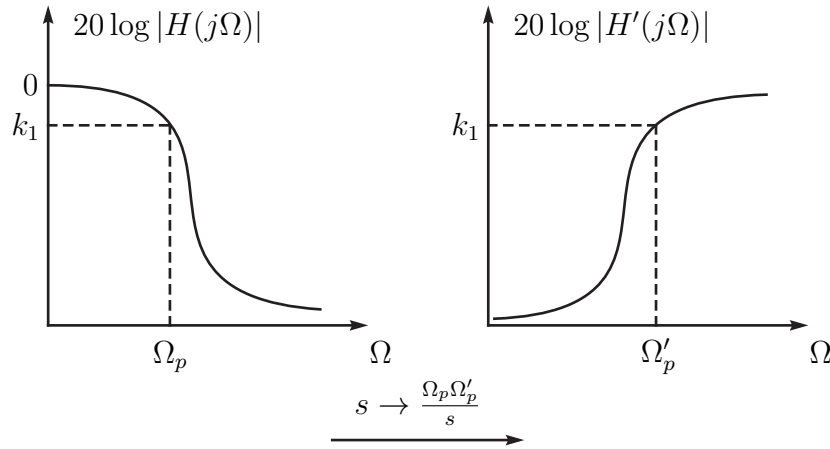


Figura 20: Transformação de passa-baixa para passa-alta.

### 3.2.3 Transformação passa-baixa para passa-banda

A transformação do filtro  $H(s)$  passa-baixa para o filtro  $H'(s)$  passa-banda de acordo com a Figura 21 é dada por

$$s \rightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}.$$

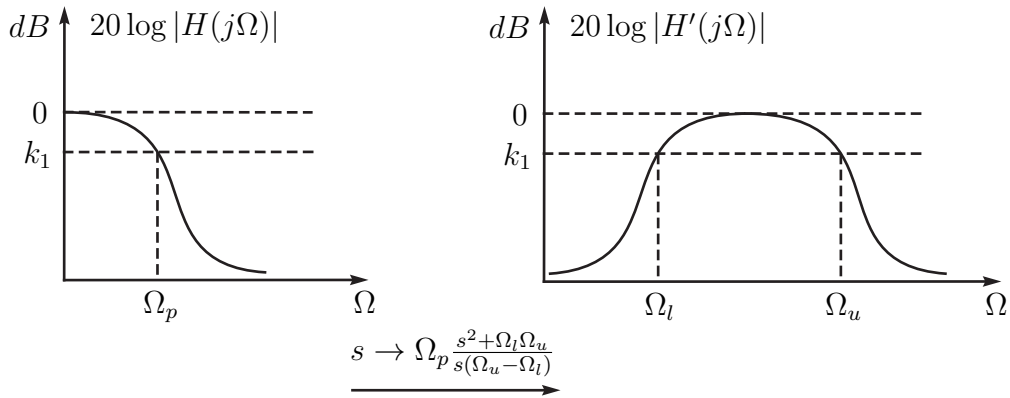


Figura 21: Transformação passa-baixa para passa-banda.

### 3.2.4 Transformação passa-baixa para rejeita-banda

A transformação do filtro  $H(s)$  passa-baixa para o filtro  $H'(s)$  rejeita-banda acordo com a Figura 22 é dada por

$$s \rightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}.$$

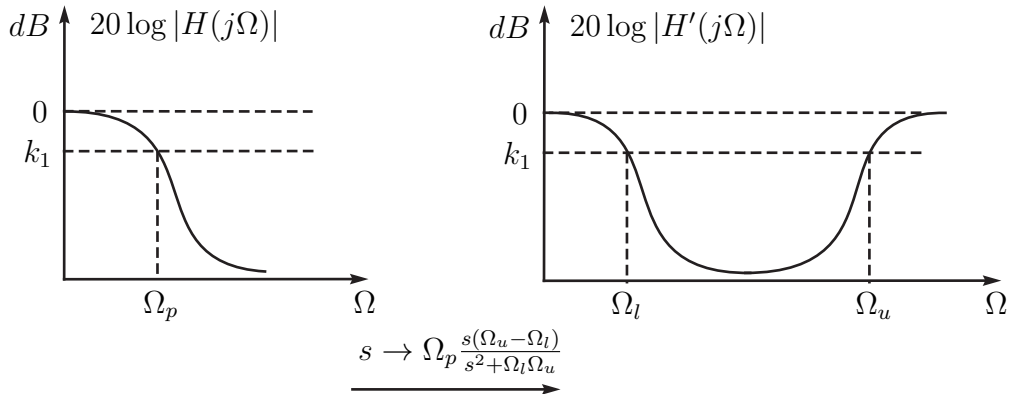


Figura 22: Transformação passa-baixa para rejeita-banda.

Exemplo: A Figura 23 ilustra a transformação de passa-baixa normalizado para um passa-baixa não normalizado.

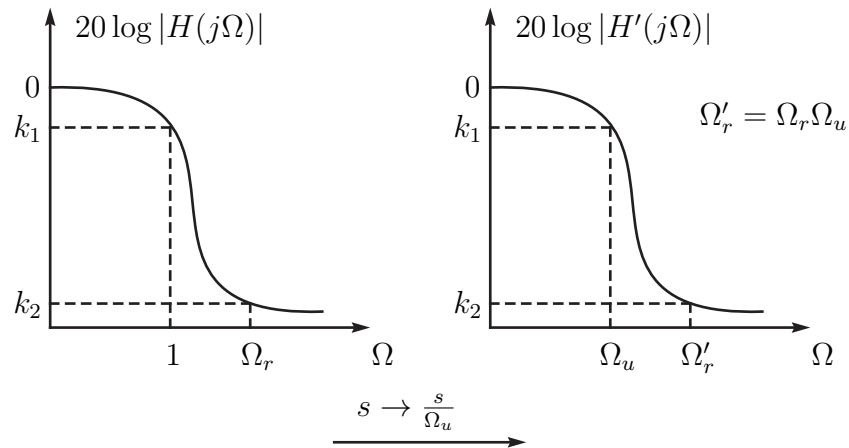


Figura 23: Transformação de passa-baixa para passa-baixa.

Exemplo: A Figura 24 ilustra a transformação de passa-baixa normalizado para passa-alta.

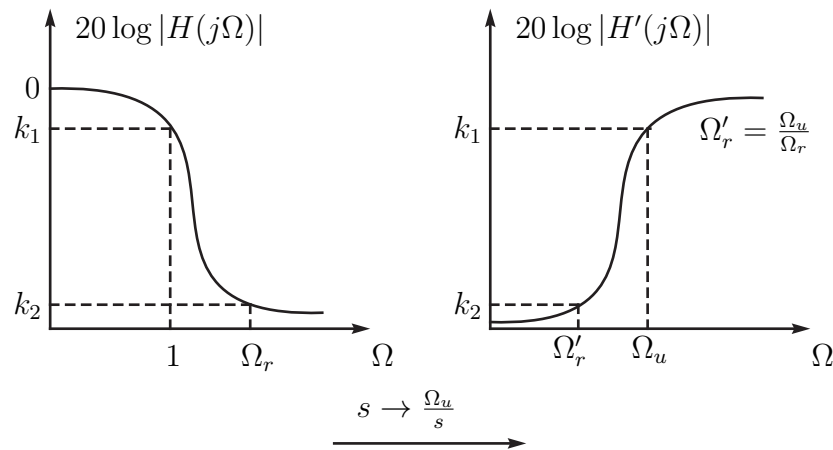


Figura 24: Transformação de passa-baixa para passa-alta.



### 3.3 Projeto de filtros Butterworth passa-baixa

Os parâmetros de projeto de um filtro Butterworth passa-baixa são  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $k_1$  e  $k_2$  conforme ilustrado na Figura 25.

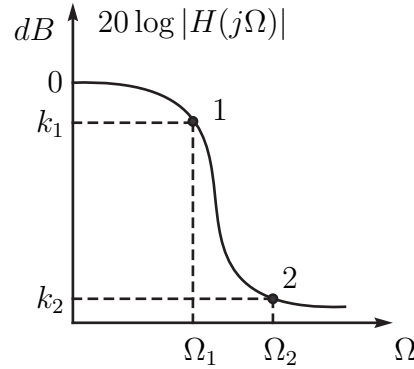


Figura 25: Parâmetros de projeto de um filtro Butterworth passa-baixa.

As condições usuais de projeto são:

- $0 \geq 20 \log |H(j\Omega)| \geq k_1$  para  $\Omega \leq \Omega_1$ ,
- $20 \log |H(j\Omega)| \leq k_2$  para  $\Omega \geq \Omega_2$ .

A equação do filtro Butterworth é

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}.$$

Para os pontos 1 e 2 do gráfico é possível escrever que

$$10 \log |H(j\Omega_1)|^2 = k_1 \Rightarrow 10 \log \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}} \right] = k_1, \quad (1)$$

$$10 \log |H(j\Omega_2)|^2 = k_2 \Rightarrow 10 \log \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n}} \right] = k_2, \quad (2)$$

que caracterizam duas equações e duas incógnitas ( $\Omega_c$  e  $n$ ). De (1) pode-se escrever que

$$\log \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}} \right] = \frac{k_1}{10},$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n}} = 10^{\frac{k_1}{10}} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}},$$

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_1}{10}} - 1 \quad (3)$$

De (2) tem-se que

$$\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{\frac{-k_2}{10}} - 1. \quad (4)$$

Dividindo (3) por (4) obtém-se

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)^{2n} = \frac{10^{\frac{-k_1}{10}} - 1}{10^{\frac{-k_2}{10}} - 1},$$

e isolando  $n$  chega-se em

$$n = \frac{\log \left[ \frac{\left(10^{\frac{-k_1}{10}} - 1\right)}{\left(10^{\frac{-k_2}{10}} - 1\right)} \right]}{2 \log \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)}.$$

Como  $n$  deve ser inteiro, adota-se o próximo maior inteiro. Com  $n$  determinado, utiliza-se (3) ou (4) para determinar  $\Omega_c$ . A escolha entre (3) ou (4) será função de qual par  $(\Omega_1, k_1)$  ou  $(\Omega_2, k_2)$  se deseja satisfazer de forma exata.

---

Exemplo: Projetar um filtro Butterworth passa-baixa que possua uma frequência de corte de  $20 \text{ rad/s}$  a  $-2\text{dB}$  e pelo menos  $-10\text{dB}$  de atenuação a  $30\text{rad/s}^{-1}$ .

Os requisitos do filtro estão mostrados na Figura 26.

A ordem do filtro é determinada por

$$n = \frac{\log \left[ \frac{\left(10^{\frac{-(-2)}{10}} - 1\right)}{\left(10^{\frac{-(-10)}{10}} - 1\right)} \right]}{2 \log \left( \frac{20}{30} \right)} = 3.37 \Rightarrow n = 4.$$

Considerando que se deseja satisfazer de forma exata o ponto 1, tem-se que

$$\left(\frac{20}{\Omega_c}\right)^{2 \times 4} = 10^{\frac{-(-2)}{10}} - 1 \Rightarrow \left(\frac{20}{\Omega_c}\right)^8 = 10^{0.2} - 1 \Rightarrow \frac{20}{\Omega_c} = (10^{0.2} - 1)^{\frac{1}{8}},$$

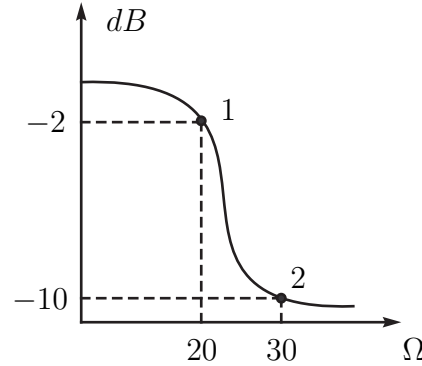


Figura 26: Requisitos do filtro passa-baixa.

$$\Omega_c = \frac{20}{[(10^{0.2} - 1)^{\frac{1}{8}}]} = 21.3868$$

O filtro Butterworth normalizado para  $\Omega_c = 1$  e  $n = 4$  é

$$H_4(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.76536s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)}.$$

Aplicando uma transformação de passa-baixa para passa-baixa tem-se que  $s \rightarrow \frac{s}{\Omega_c}$  com  $\Omega_c = 21.3868$ , ou seja,

$$\begin{aligned} H(s) &= H_4(s)|_{s \rightarrow \frac{s}{21.3868}} = \\ &= \frac{1}{\left[ \left( \frac{s}{21.3868} \right)^2 + 0.76536 \left( \frac{s}{21.3868} \right) + 1 \right] \left[ \left( \frac{s}{21.3868} \right)^2 + 1.84776 \left( \frac{s}{21.3868} \right) + 1 \right]} = \\ &= \frac{0.209210 \times 10^6}{(s^2 + 16.3686s + 457.394)(s^2 + 39.5176s + 457.394)}. \end{aligned}$$

### 3.4 Projeto de filtro Butterworth passa-banda

Um filtro passa-banda e seus parâmetros característicos está ilustrado na Figura 27.

Os requisitos desejados são:

- $20 \log |H(j\Omega)| \leq k_2$  para  $\Omega \leq \Omega_l$  e  $\Omega \geq \Omega_u$ .
- $20 \log |H(j\Omega)| \geq k_1$  para  $\Omega_l \leq \Omega \leq \Omega_u$ .

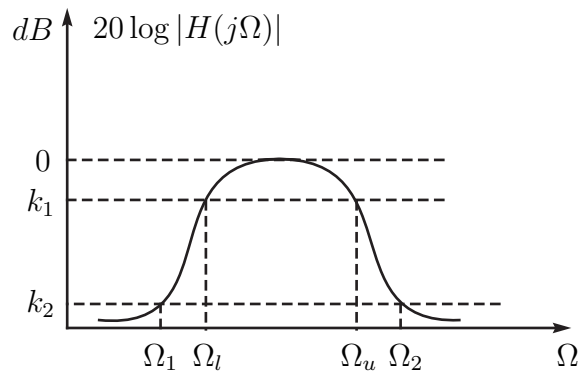


Figura 27: Parâmetros característicos de um filtro passa-banda.

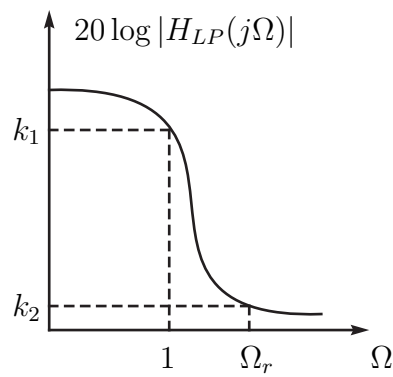


Figura 28: Filtro passa-baixa normalizado.

Seja  $H_{LP}(s)$  um filtro passa-baixa normalizado com frequência crítica  $\Omega_r$  como ilustrado na Figura 28.

A transformação de passa-baixa ( $LP$ ) para passa-banda ( $BP$ ) é dada por:

$$s \rightarrow \frac{(s^2 + \Omega_l \Omega_u)}{s(\Omega_u - \Omega_l)},$$

e conseqüentemente,

$$H_{BP}(s) = H_{LP}(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{(s^2 + \Omega_l \Omega_u)}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

Para satisfazer o requisito de  $k_2$  para  $\Omega_1$  pode-se escrever que

$$j\Omega_r = \frac{[(j\Omega_1)^2 + \Omega_l \Omega_u]}{[j\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} \Rightarrow \Omega_r = \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} = A.$$

De forma análoga para  $\Omega_2$  tem-se

$$\Omega_r = \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]} = B.$$

Os valores de  $A$  e  $B$  não serão necessariamente iguais. Escolhe-se, portanto, o valor mais restritivo, ou seja,

$$\Omega_r = \min\{|A|, |B|\}.$$

O projeto do filtro Butterworth passa-banda consiste de duas fases:

- projeto de um passa-baixa com  $\Omega_r$  adequado, e
- transformação usando os valores de  $\Omega_u$  e  $\Omega_l$  desejados.

---

Exemplo: Projetar um filtro Butterworth passa-banda com as seguintes características:

- $-3.0103dB$  de atenuação nas frequências de corte de  $50Hz$  e  $20kHz$ .
- $-20dB$  de atenuação rejeita-banda para  $20Hz$  e  $45kHz$ .

O filtro desejado está ilustrado na Figura 29.

Os parâmetros de interesse são:

- $\Omega_1 = 2\pi \times 20 = 125.663rad/s$ .

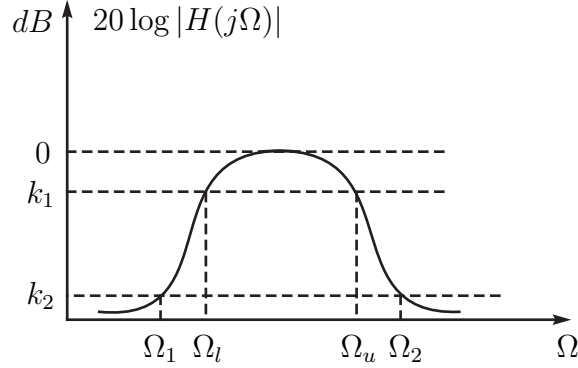


Figura 29: Filtro passa-banda

- $\Omega_2 = 2\pi \times 45 \times 10^3 = 2.82743 \times 10^5 \text{ rad/s}$ .
- $\Omega_l = 2\pi \times 50 = 314.159 \text{ rad/s}$ .
- $\Omega_u = 2\pi \times 20 \times 10^3 = 1.25663 \times 10^5 \text{ rad/s}$ .

Para um filtro passa-baixa normalizado, tem-se

- $0 \geq 20 \log |H_{LP}(1j)| \geq -3.0103 \text{ dB}$ .
- $20 \log |H_{LP}(j\Omega_r)| \leq -20 \text{ dB}$ .

Calculando os valores de  $A$  e  $B$  tem-se

$$|A| = \left| \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} \right| = 2.5053,$$

$$|B| = \left| \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]} \right| = 2.2545,$$

e portanto,  $\Omega_r = 2.2545$ .

O filtro passa-baixa normalizado de ordem  $n$ , de acordo com a Figura 25, pode ser determinado considerando  $\Omega_2 = 2.2545$  e  $\Omega_1 = 1$ , ou seja,

$$n = \frac{\log \left[ \frac{(10^{\frac{-(-3.0102)}{10}} - 1)}{(10^{\frac{-(-20)}{10}} - 1)} \right]}{2 \log(\frac{1}{2.2545})} = 2.829 \Rightarrow n = 3.$$

e portanto

$$H_{LP} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1},$$

obtido através da tabela do filtro normalizado.

Fazendo a transformação de passa-baixa ( $LP$ ) para passa-banda ( $BP$ ) tem-se

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} = \frac{s^2 + 314.159 \times 1.25663 \times 10^5}{s(1.25663 \times 10^5 - 314.159)} = \frac{s^2 + 3.94784 \times 10^7}{s(1.25349 \times 10^5)},$$

e conseqüentemente a função de transferência do filtro desejado é

$$H_{BP}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2 + 3.94784 \times 10^7}{1.25349 \times 10^5 s}\right)^3 + 2 \left(\frac{s^2 + 3.94784 \times 10^7}{1.25349 \times 10^5 s}\right)^2 + 2 \left(\frac{s^2 + 3.94784 \times 10^7}{1.25349 \times 10^5 s}\right) + 1},$$

$$H_{BP}(s) = \frac{1.969530 \times 10^{15} s^3}{(s^6 + 25069909 \times 10^5 s^5 + 3.15434 \times 10^{10} s^4 + 1.9893 \times 10^{15} s^3 + 1.245285 \times 10^{18} s^2 + 3.9072593 \times 10^{20} s + 6.15289108 \times 10^{22})}.$$

Exemplo: Projetar um filtro Butterworth passa-banda com as seguintes características:

- $-2dB$  de atenuação para  $20rad/s$  e para  $40rad/s$ .
- $-10dB$  de atenuação para  $10rad/s$  e  $50rad/s$ .

Inicialmente calculam-se  $|A|$  e  $|B|$ :

$$|A| = \left| \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]} \right| = 3.5,$$

$$|B| = \left| \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_l \Omega_u)}{[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]} \right| = 1.7,$$

e portanto,  $\Omega_r = \min\{|A|, |B|\} = 1.7$ .

A ordem  $n$  do filtro passa-baixa passando pelos pontos  $\Omega_2 = \Omega_r = 1.7$  e  $\Omega_1 = 1$  é dada por

$$n = \frac{\log \left[ \frac{(10^{\frac{-(-2)}{10}} - 1)}{(10^{\frac{-(-10)}{10}} - 1)} \right]}{2 \log(\frac{1}{1.7})} = 2.58 \Rightarrow n = 3.$$

A frequência de corte  $\Omega_c$  associada ao filtro passa-baixa anterior é dada por

$$\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2n} = 10^{-k_2/10} - 1 \Rightarrow \left(\frac{1.7}{\Omega_c}\right)^6 = 10^{-10/10} - 1 \Rightarrow \Omega_c = 1.1787.$$

Consequentemente, o filtro passa-baixa que representa os requisitos do problema passa pelos pontos  $(\Omega_1 = 1, -2dB)$ ,  $(\Omega_c = 1.1787, -3.01dB)$  e  $(\Omega_2 = 1.7, -10dB)$ .

Um filtro Butterworth normalizado de ordem  $n = 3$  é dado por

$$\bar{H}_{LP}(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}.$$

O filtro passa-baixa correspondente a  $\Omega_c = 1.1787$  pode ser obtido pela transformação

$$H_{LP}(s) = \bar{H}_{LP}(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{\Omega_c} s}.$$

Note que este filtro passa pelos pontos de interesse, ou seja,  $(\Omega_1 = 1, -2dB)$ ,  $(\Omega_c = 1.1787, -3.01dB)$  e  $(\Omega_2 = 1.7, -10dB)$ . A partir deste filtro passa-baixa é possível obter o filtro passa-banda  $H_{pb}(s)$  procurando aplicando a transformação correspondente, ou seja,

$$H_{BP}(s) = H_{LP}(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}} = \bar{H}_{LP}(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{\Omega_c} \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}},$$

cujos resultados são

$$H_{BP}(s) = \frac{1.31e004s^3}{s^6 + 47.15s^5 + 3511s^4 + 8.854e004s^3 + 2.809e006s^2 + 3.018e007s + 5.12e008}.$$

---

Os demais tipos de projetos, como por exemplo o caso de filtros passa-alta e rejeita-banda, seguem a mesma metodologia usando as transformações apropriadas.

### 3.5 Filtros Chebyshev

Os filtros Chebyshev possuem uma ondulação (*ripple*) que pode ser na faixa de passagem (tipo 1) ou na faixa de rejeição (tipo 2) conforme mostrados nas Figuras 30 e 31.

Os filtros Chebyshev do tipo 1 possuem a seguinte característica em resposta em frequência:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)},$$

onde  $T_n(\Omega)$  é um polinômio de Chebyshev de ordem  $n$ , ou seja,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n > 2, \quad T_0(x) = 1 \quad e \quad T_1(x) = x.$$



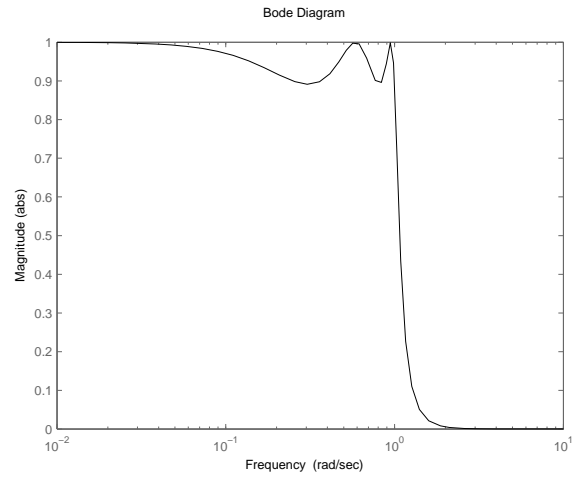


Figura 30: Filtro Chebyshev com *ripple* na faixa de passagem.

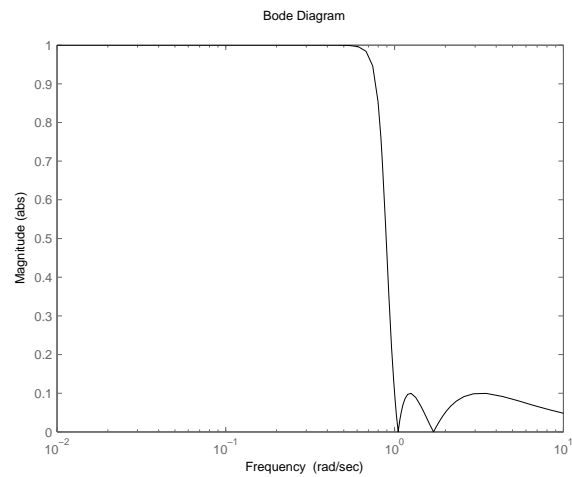


Figura 31: Filtro Chebyshev com *ripple* na região de rejeição.

Alguns polinômios de Chebyshev são:

$n$	$T_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
$\vdots$	

Existem dois tipos de início da resposta em frequência em função de  $n$  ser par ou ímpar, ou seja,

- se  $n$  é ímpar, o filtro parte do valor  $|H(0)| = \sqrt{1} = 1$ , conforme mostrado na Figura 32;

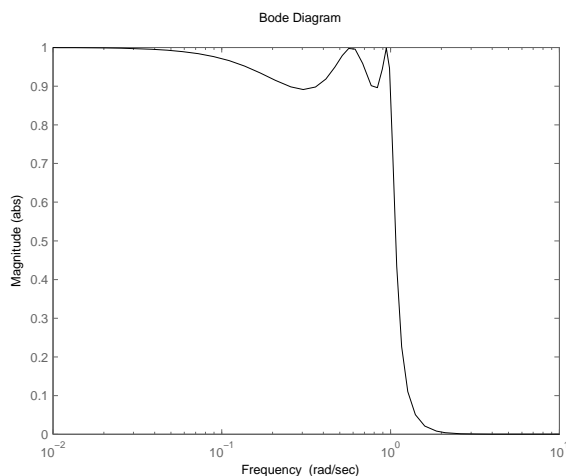
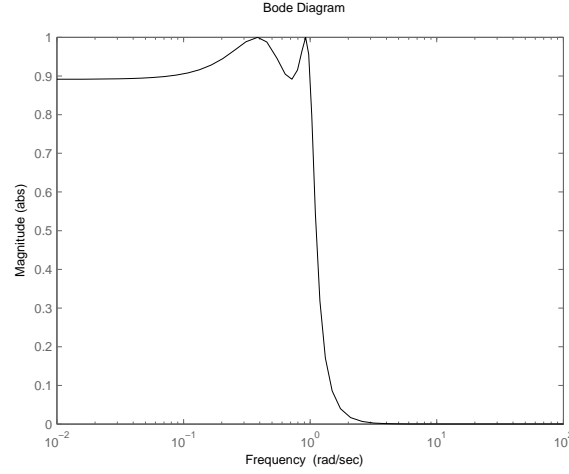


Figura 32: Filtro Chebyshev com  $n = 5$ .

- se  $n$  é par, o filtro parte do valor  $|H(0)| = \sqrt{\frac{1}{1+\epsilon^2}}$ , conforme mostrado na Figura 33.

Algumas propriedades do filtro Chebyshev passa-baixa normalizado do tipo 1 são:

- $\frac{1}{1+\epsilon^2} \leq |H(j\Omega)|^2 \leq 1$  na região de passagem;
- para  $\Omega = 1$  (frequência de corte), então  $|H(1j)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$ ;


 Figura 33: Filtro Chebyshev com  $n = 4$ .

- para  $\Omega > 1$  o comportamento é monotônico.

Os polos de  $H_n(s)H_n(-s)$  são dados por

$$1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0. \quad (5)$$

Para um filtro estável, devem ser escolhidos os polos do semi-plano esquerdo, ou seja,

$$H_n(s) = \frac{K}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{K}{V_n(s)},$$

onde  $K$  é um fator para assegurar que  $H(0) = 1$  para  $n$  ímpar, e  $H(0) = \sqrt{\frac{1}{1+\epsilon^2}}$  para  $n$  par, e o polinômio  $V_n(s)$  é

$$V_n(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0.$$

Logo, tem-se que:

- $K = V_n(0) = b_0$ , para  $n$  ímpar;
- $K = \frac{V_n(0)}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ , para  $n$  par.

Existem tabelas para  $V_n(s)$  em função de  $n$  e de  $\epsilon$ , o que facilita a determinação do filtros.

A escolha da ordem  $n$  é feita usando as seguintes especificações:

- valor do *ripple* dado por  $|H(1j)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$ ;
- valor da frequência  $\Omega_r$  e da respectiva amplitude  $\frac{1}{A^2}$ , ou seja,  $|H(j\Omega_r)|^2 = \frac{1}{A^2}$ .

O valor de  $n$  é dado por

$$n = \frac{\log[g + (g^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]}{\log[\Omega_r + (\Omega_r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]},$$

com

$$A = \frac{1}{|H_n(j\Omega_r)|} \quad e \quad g = \left[ \frac{(A^2 - 1)}{\epsilon^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Da mesma forma que nos filtros de Butterworth, adota-se o próximo valor inteiro para  $n$ . Para detalhes do equacionamento anterior, ver o seguinte livro: Louis Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*, Mc Graw-Hill, 1962.

---

Exemplo: Projetar um filtro Chebyshev passa-baixa normalizado com as seguintes características:

- máxima ondulação de  $2dB$ ;
- frequência de corte de  $1rad/s$ ;
- atenuação de  $-20dB$  (ou mais) para  $1.3rad/s$ .

Para  $\Omega_c = 1$ , frequência de corte, tem-se

$$20 \log |H_n(1j)| = 20 \log \left( \frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 10 \log \left[ \frac{1}{1 + \epsilon^2} \right] = -2,$$

e conseqüentemente,

$$\epsilon = 0.76478$$

Para  $\Omega_r = 1.3$  tem-se

$$20 \log |H_n(1.3j)| = 20 \log \left( \frac{1}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 20 \log \left( \frac{1}{A} \right) = -20,$$

e conseqüentemente,

$$A = 10.$$

Logo,

$$g = \left[ \frac{(A^2 - 1)}{\epsilon^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 13.01,$$

$$n = \frac{\log[g + (g^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]}{\log[\Omega_r + (\Omega_r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]} = 4.3 \Rightarrow n = 5.$$

A equação característica será dada por

$$1 + \epsilon^2 T_n^2 \left( \frac{s}{j} \right) = 0,$$

$$1 + 0.76478^2 \left[ 16 \left( \frac{s}{j} \right)^5 - 20 \left( \frac{s}{j} \right)^3 + 5 \left( \frac{s}{j} \right) \right]^2 = 0,$$

cujos polos estáveis são  $s_{1,2} = -0.0675 \pm 0.9735j$ ,  $s_{3,4} = -0.1766 \pm 0.6016j$  e  $s_5 = -0.2183$ . Logo,

$$\begin{aligned} H_5(s) &= \frac{K}{\prod_{SPE}(s - s_k)} = \frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)} = \\ &= \frac{K}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817}. \end{aligned}$$

Para que  $H_5(0) = 1$  é necessário que  $K = 0.0817$  ( $n$  ímpar). Logo,

$$H_5(s) = \frac{0.0817}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817},$$

cuja resposta gráfica está nas Figuras 34 e 35.

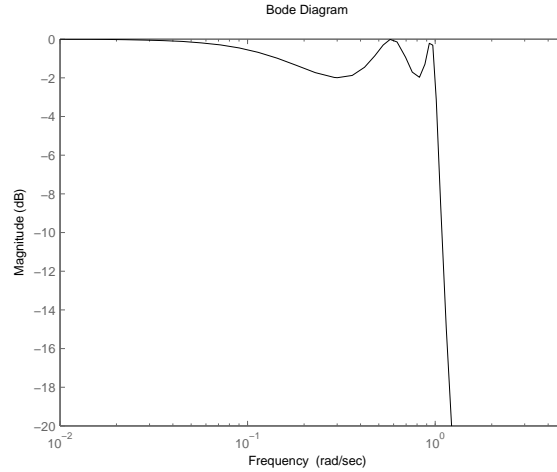


Figura 34: Filtro Chebyshev com  $n = 5$  - resposta em  $dB$ .

---

Exemplo: Projetar um filtro passa-baixa de Chebyshev com as seguintes especificações:

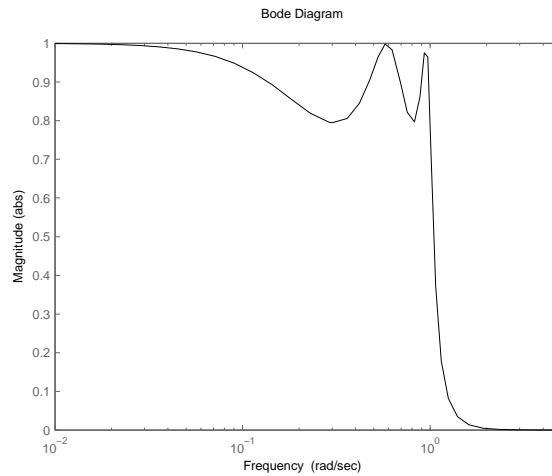


Figura 35: Filtro Chebyshev com  $n = 5$  - resposta em valor absoluto.

- ondulação de  $2dB$  na região de passagem;
- frequência de corte de  $40rad/s$ ;
- atenuação de  $-20dB$  para  $52rad/s$ .

Projeta-se inicialmente um filtro normalizado, ou seja,  $\Omega_r = \frac{52}{40} = 1.3$ .

Os requisitos do filtro normalizado são:  $\Omega_r = 1.3$ , atenuação de  $-20dB$ , frequência de corte de  $1rad/s$  e ondulação de  $2dB$ . Estes requisitos correspondem ao filtro projetado no exemplo anterior, ou seja,

$$H_5(s) = \frac{0.0817}{s^5 + 0.7065s^4 + 1.4996s^3 + 0.6935s^2 + 0.4594s + 0.0817}.$$

Aplica-se então a transformação de passa-baixa para passa-baixa corresponde à

$$s \rightarrow \frac{s}{\Omega_u} = \frac{s}{40},$$

e conseqüentemente, a função de transferência do filtro desejado será

$$H(s) = \frac{0.0817}{\left[ \left( \frac{s}{40} \right)^5 + 0.7065 \left( \frac{s}{40} \right)^4 + 1.4996 \left( \frac{s}{40} \right)^3 + 0.6935 \left( \frac{s}{40} \right)^2 + 0.4594 \left( \frac{s}{40} \right) + 0.0817 \right]},$$

cujas representações gráficas são mostradas nas Figuras 36 e 37.

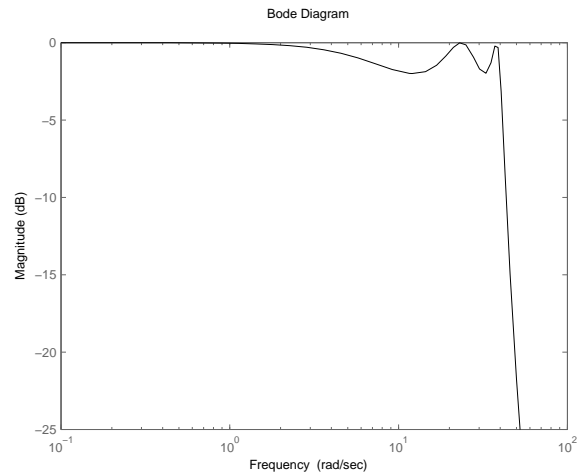


Figura 36: Filtro Chebyshev com  $n = 5$ , corte em  $40\text{rad/s}$  - resposta em  $\text{dB}$ .

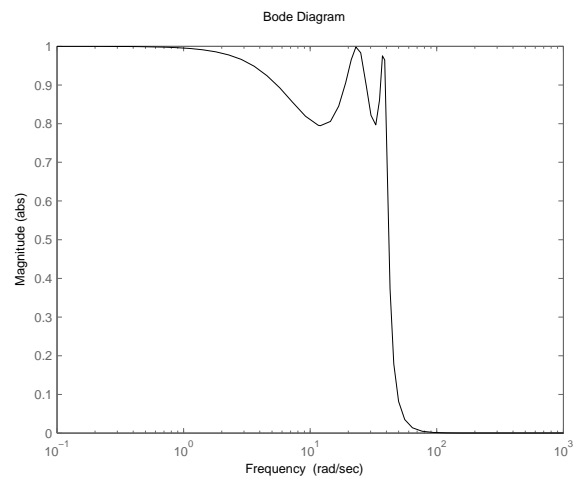


Figura 37: Filtro Chebyshev com  $n = 5$ , corte em  $40\text{rad/s}$  - resposta em valor absoluto.

Nota: os filtros Chebychev do tipo 2, com *ripple* na região de rejeição, possuem também zeros e sua equação é dada por

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_n^2(\frac{\Omega_r}{\Omega_c}) / T_n^2(\frac{\Omega_r}{\Omega})]}.$$

## 4 Fundamentos dos sistemas discretos

Um sinal contínuo é uma função do tempo (um valor real para cada valor de tempo), como mostrado na Figura 38.

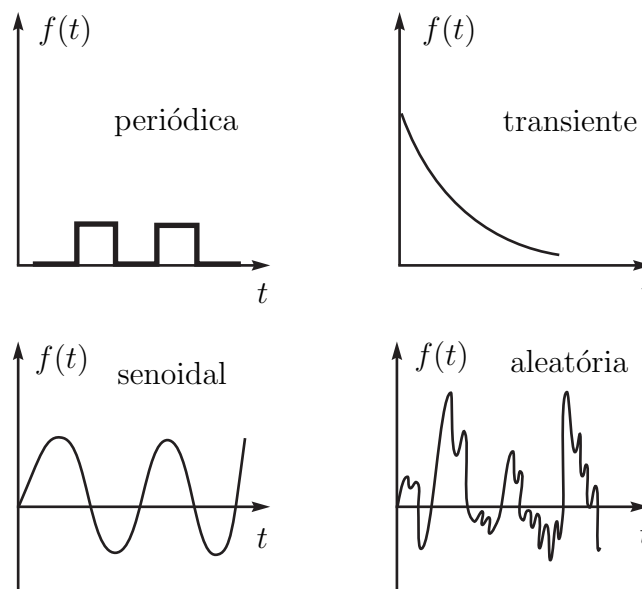


Figura 38: Alguns sinais contínuos.

Um sistema contínuo relaciona uma entrada contínua a uma saída contínua, conforme ilustrado na Figura 39.



Figura 39: Sistema contínuo.



Um sinal é uma sequência, ou uma função, definida para números inteiros, ou seja,

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n),$$

e quando  $x_I(n) = 0$ , então  $x(n)$  é uma sequência real.

Um sistema discreto é um mapeamento do conjunto discreto de entradas para o conjunto discreto de saída, conforme ilustrado na Figura 40.



Figura 40: Sistema discreto.

Um sinal digital é um sinal discreto cujos valores pertencem a um conjunto finito. Por exemplo, um sinal digital para valores de  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  é ilustrado na Figura 41.

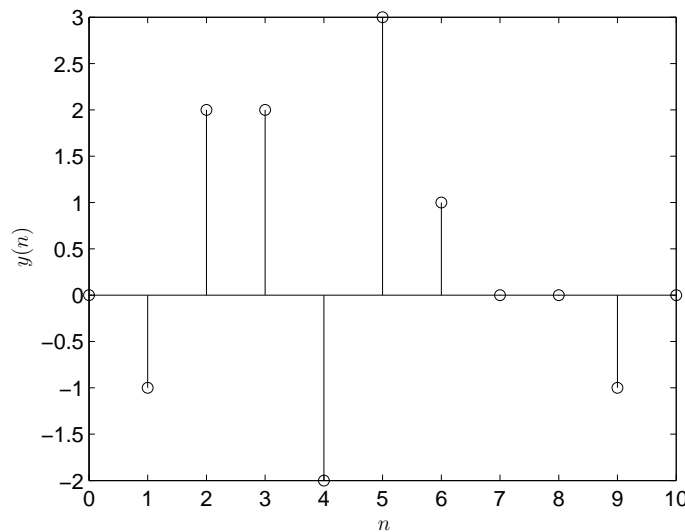


Figura 41: Sinal digital.

Um sistema digital é aquele que relaciona um sinal digital de entrada a um sinal digital de saída.

## 4.1 Sinais discretos importantes

Uma sequência real é denotada como

$$\{x(n), n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\}.$$

Se um sinal contínuo  $x(t)$  é amostrado a cada  $T$  segundos, uma sequência  $\{x(nT)\}$  resulta. Para simplificar a notação será usada apenas a simbologia  $x(n)$ , i.e.,

$$\{x(nT)\} \rightarrow x(n).$$

Alguns sinais discretos importantes são listados a seguir.

1. O impulso unitário discreto, Figura 42, é definido como

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

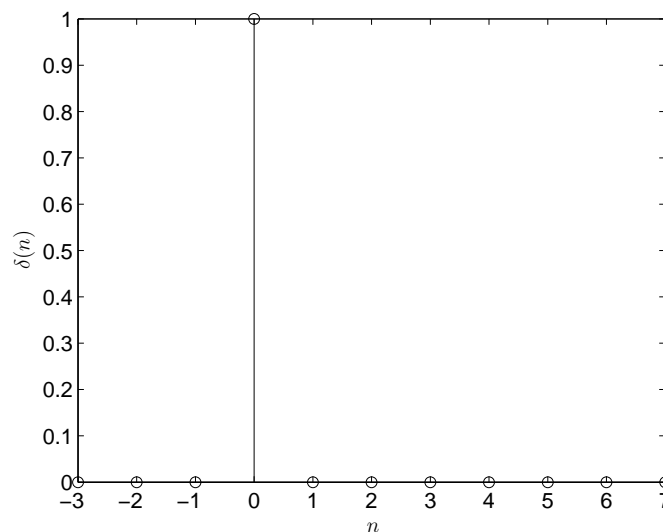


Figura 42: Impulso unitário.

2. O degrau unitário discreto é definido como

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0, \\ 0 & \text{se } n < 0, \end{cases}$$

e está ilustrado na Figura 43.

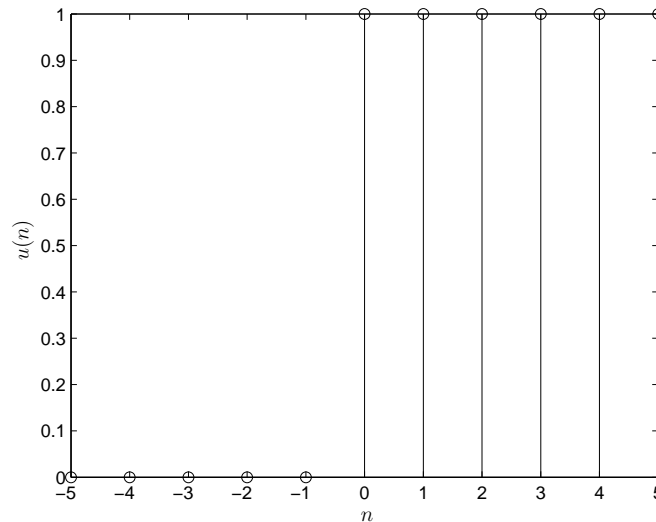


Figura 43: Degrau unitário discreto.

3. Uma sequência exponencial real é dada por

$$x(n) = a^n.$$

4. Uma sequência senoidal é dada por

$$x(n) = A \sin(w_0 n).$$

Um sinal discreto periódico é aquele em que  $x(n) = x(n + P)$  com  $P$  inteiro. O menor valor de  $P$  que satisfaz a condição de periodicidade é o período do sinal. A figura 44 mostra uma senóide discreta.

A sequência senoidal é periódica se  $\frac{w_0}{2\pi}$  é racional (razão de dois inteiros). Se  $\frac{w_0}{2\pi}$  não é racional, então a sequência não é periódica.

## 4.2 Algumas propriedades

1. Energia. A energia de uma sequência é definida como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2,$$

onde  $x^*(n)$  é o complexo conjugado de  $x(n)$ .

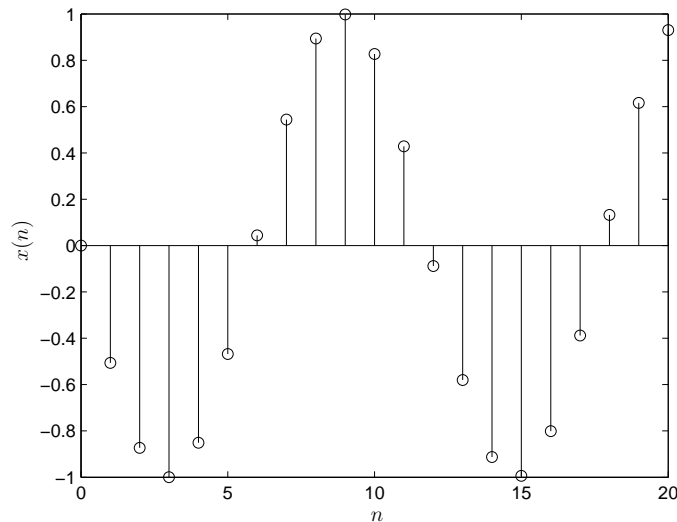


Figura 44: Senóide discreta,  $x(n) = \text{sen}(100n)$ .

Se a energia do sinal é finita, o sinal é chamado de sinal de energia (*energy signal*).

Se  $x(n) = x^*(n)$ , ou seja,  $x(n)$  é uma sequência real, então

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n).$$

2. Potência média. A potência média de um sinal é definida como

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2.$$

Seja a energia do sinal no intervalo de  $-N \leq n \leq N$  dada por

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2.$$

Neste caso, a energia é dada por

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N,$$

e a potência média será dada por

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N.$$

Se a energia é finita, então a potência média será nula. Se a energia é infinita, então a potência pode ser finita ou infinita. Se a potência média é finita e não nula, o sinal é chamado de sinal de potência (*power signal*).

---

Exemplo: Determinar a energia e potência média do degrau unitário  $u(n)$ .

A energia será dada por

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} u^2(n) = \infty.$$

A potência média será dada por

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}.$$

Verifica-se que o degrau unitário é um sinal de potência (*power signal*).

---

3. Sinal par. Um sinal é par, ou simétrico, se  $x(-n) = x(n)$ .
4. Sinal ímpar. Um sinal é ímpar, ou anti-simétrico, se  $x(-n) = -x(n)$ .  
Nota-se que neste caso,  $x(0) = 0$ .
5. Sinal em função de impulsos. Um sinal discreto pode ser escrito como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

---

Exemplo: O sinal da Figura 45 pode ser escrito como

$$y(n) = y(-2)\delta(n+2) + y(0)\delta(n) + y(1)\delta(n-1) + y(4)\delta(n-4).$$


---

6. Linearidade. Um sistema discreto pode ser caracterizado por uma transformação (ou operador)  $T$  que relaciona a saída  $y(n)$  à entrada  $x(n)$ , ou seja,

$$y(n) = T[x(n)].$$

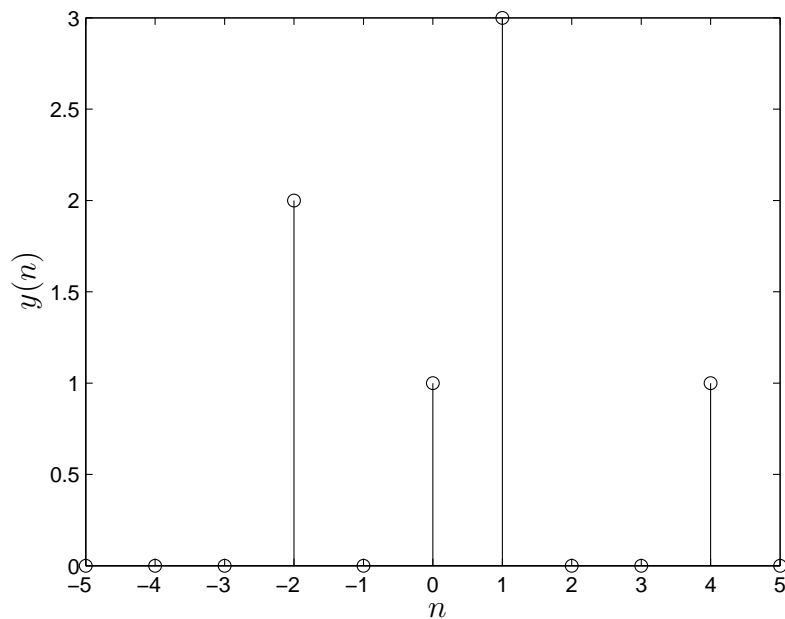


Figura 45:  $y(n) = y(-2)\delta(n+2) + y(0)\delta(n) + y(1)\delta(n-1) + y(4)\delta(n-4)$ .

Um sistema discreto é linear quando se aplica o princípio da superposição, ou seja,

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)].$$

7. Invariância no tempo. Um sistema discreto é invariante no tempo quando seus coeficientes não variam com o tempo, ou seja, se  $y(n) = T[x(n)]$  então,

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0).$$

8. Resposta de sistemas lineares em termos da resposta impulsiva. Seja a resposta do sistema  $T(\cdot)$  ao um impulso aplicado no tempo  $k$  dada por

$$h_k(n) = T[\delta(n - k)].$$

A resposta do sistema a uma entrada  $x(n)$  será dada por

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n - k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n).$$

Portanto, a resposta de um sistema discreto linear pode ser escrita como uma soma ponderada de  $h_k(n)$  pela entrada  $x(\cdot)$ .

9. Convolução. Se  $x(n)$  é a entrada de um sistema linear e invariante caracterizado por  $T[\cdot]$ , então a saída  $y(n)$  é dada por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k),$$

onde  $h(n) = T[\delta(n)]$  é a resposta ao impulso.

Esta soma é conhecida como soma de convolução e é denotada por

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n).$$

Algumas propriedades da convolução são:

- (a)  $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$
- (b)  $x(n) * (y(n) * z(n)) = (x(n) * y(n)) * z(n)$
- (c)  $x(n) * (y(n) + z(n)) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$
- (d)  $x(n) * \delta(n) = \delta(n) * x(n) = x(n)$
- (e)  $x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$

10. Estabilidade BIBO (*bounded-input, bounded-output*). A sequência  $x(n)$  é limitada se existe um  $M$  finito tal que

$$|x(n)| < M, \quad \text{para todo } n.$$

Um sistema discreto é BIBO estável se toda sequência limitada de entrada  $x(n)$  produz uma saída também limitada.

Um sistema linear e invariante com resposta  $h(n)$  ao impulso é BIBO estável se e somente se

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

é finito (soma absoluta finita).

Prova: suponha que a entrada  $x(n)$  é limitado, ou seja  $|x(n)| < M$ .

A saída é do sistema é dada por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Logo,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)x(n-k)|,$$

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} M|h(k)| = MS,$$

e portanto,

$$|y(n)| < MS,$$

ou seja, o sistema é BIBO estável já que toda entrada limitada produz uma saída limitada quando  $S$  é finito.

Em resumo, sistema BIBO estável  $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < S$  (finito), ou ainda, a soma em módulo da resposta ao impulso é finita.

11. Causalidade. Um sistema discreto é causal se a saída para  $n = n_0$  depende apenas da entrada para  $n \leq n_0$ . Um sistema causal também pode ser chamado de realizável ou não antecipatório.

Uma sequência discreta é causal se tem valores nulos para  $n < 0$ .

Um sistema linear e invariante (LTI) é causal se a resposta ao impulso  $h(n)$  é nula para  $n < 0$ .

Prova: a resposta do sistema é dada por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Se  $h(n) = 0$  para  $n < 0$  então  $h(n-k) = 0$  para  $n-k < 0$  ou  $k > n$ . Pode-se escrever que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k),$$

de onde se verifica que a resposta  $y(n)$  só depende de valores passados ou do valor presente da entrada.

### 4.3 Filtros FIR e IIR

Um filtro FIR (*finite impulse response*) é um sistema linear e invariante que possui uma resposta finita ao impulso, ou seja,

$$h(n) = \begin{cases} \text{valores não nulos para } n_1 \leq n \leq n_2, \\ 0 \text{ para os demais,} \end{cases}$$



onde  $h(n)$  é a resposta ao impulso.

Um filtro IIR (*infinite impulse response*) é um sistema em que a resposta ao impulso unitário é de duração infinita.

Um sistema causal linear e invariante caracterizado por

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r),$$

será FIR se  $a_0 \neq 0$  e  $a_k = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Caso contrário poderá ser IIR ou FIR.

Prova: Seja  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Logo,

$$\begin{aligned} a_0 y(n-0) &= \sum_{r=0}^M b_r x(n-r), \\ y(n) &= \sum_{r=0}^M \underbrace{\left( \frac{b_r}{a_0} \right)}_{h(r)} x(n-r), \end{aligned}$$

que representa uma convolução.

Portanto,

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que é de duração finita.

## 5 Equação a diferenças de coeficientes constantes

O comportamento dinâmico de sistemas contínuos é descrito por equações diferenciais. O comportamento dinâmico de sistemas discretos é descrito por equações a diferenças.

Um sistema discreto linear e invariante no tempo é aquele em que a entrada  $x(n)$  e a saída  $y(n)$  satisfazem uma equação a diferenças com coeficientes lineares e constantes do tipo

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m), \quad a_0 \neq 0,$$

ou também,

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r).$$

Exemplo: Resolver a equação  $y(n) - ay(n-1) = x(n)$ , com  $y(n) = 0$  para  $n < 0$ , e tendo como entrada  $x(n) = \delta(n)$  um impulso unitário.

Este problema pode ser resolvido diretamente, ou seja,

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1 \\ n = 1 &\Rightarrow y(1) = ay(0) + x(1) = a \times 1 + 0 = a \\ n = 2 &\Rightarrow y(2) = ay(1) + x(2) = a \times a + 0 = a^2 \\ &\vdots \\ &\Rightarrow y(n) = a^n. \end{aligned}$$

Como não existe resposta para  $n < 0$ , escreve-se a solução como

$$y(n) = a^n u(n),$$

que representa a resposta ao impulso procurada. Usa-se o degrau unitário,  $u(n)$ , para assegurar valores nulos para  $n < 0$ .

Exemplo: Determinar o modelo para descrever uma colônia de bactérias duplicando a população a cada 12h ( $T = 12h$ ).

É possível escrever que

$$y(n) = 2y(n-1), \quad y(0) = c.$$

Logo,

$$y(1) = 2c, \quad y(2) = 4c, \quad y(3) = 8c, \dots$$

que caracteriza um comportamento explosivo.

Exemplo: Problema do banqueiro. Seja o intervalo  $T = 1$  mês associado a uma taxa de juros de  $i\%$ .

O modelo que descreve este problema é

$$v(n) = \left(1 + \frac{i}{100}\right) v(n-1),$$

onde  $v(n)$  é o valor no mês  $n$ .

Exemplo: Modelo de um integrador numérico pela regra dos trapézios. Seja o esquema da Figura 46.

A área de um elemento trapezoidal é dada por

$$A = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt \approx \frac{T(f_n + f_{n-1})}{2},$$

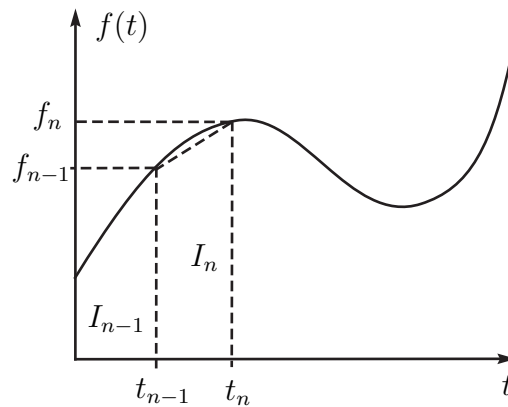


Figura 46: Integração pela regra dos trapézios.

onde  $T = t_n - t_{n-1}$  é a base do trapézio.

Logo, a integral da curva pode ser aproximada por

$$I_n = I_{n-1} + \frac{T(f_n + f_{n-1})}{2}.$$

## 5.1 Solução de equações a diferenças

A solução de equações a diferenças segue um procedimento semelhante ao da solução de equações diferenciais lineares e com coeficientes constantes.

Seja uma equação a diferenças denotada por

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k),$$

ou também

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N) = \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M). \end{aligned}$$

### 5.1.1 Solução homogênea

A equação homogênea (entrada nula) é dada por

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0.$$

Seja uma solução do tipo  $y(n) = c\lambda^n$ . Logo,

$$\sum_{k=0}^N a_k c \lambda^{n-k} = 0,$$

e então

$$a_0 c \lambda^n + a_1 c \lambda^{n-1} + a_2 c \lambda^{n-2} + \dots + a_N c \lambda^{n-N} = 0,$$

$$(a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_N) c \lambda^{n-N} = 0,$$

$$a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_N = 0,$$

que é o polinômio característico, cujas raízes são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ .

A solução homogênea  $y_h(n)$  será função do tipo das raízes, ou seja,

- para raízes distintas a solução homogênea é

$$y_h(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_N \lambda_N^n,$$

com  $c_1, c_2, \dots, c_N$  determinados através das condições iniciais.

- para raízes com multiplicidade, por exemplo  $\lambda_1$  de multiplicidade  $l$ , a solução homogênea é do tipo

$$y_h(n) = (c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n + c_3 n^2 \lambda_1^n + \dots + c_l n^{l-1} \lambda_1^n) + d_2 \lambda_2^n + \dots + d_N \lambda_N^n.$$

- para um par complexo conjugado, por exemplo  $\lambda_{1,2} = a \pm b_j$ , tem-se

$$\lambda_1 = \rho e^{j\theta}, \quad \lambda_2 = \rho e^{-j\theta},$$

e a solução é do tipo  $c\lambda^n$ , ou seja,

$$c_1 (\rho e^{j\theta})^n + c_2 (\rho e^{-j\theta})^n = c_1 \rho^n e^{j\theta n} + c_2 \rho^n e^{-j\theta n} = C \rho^n \sin(\theta n + \varphi).$$

Verifica-se que o comportamento muda em função do valor de  $\rho$  como ilustrado nas Figuras 47 e 48.

### 5.1.2 Solução particular

A solução particular da equação a diferenças depende da forma da entrada, ou seja, é do mesmo tipo da entrada. Alguns exemplos são ilustrados na Tabela 3.

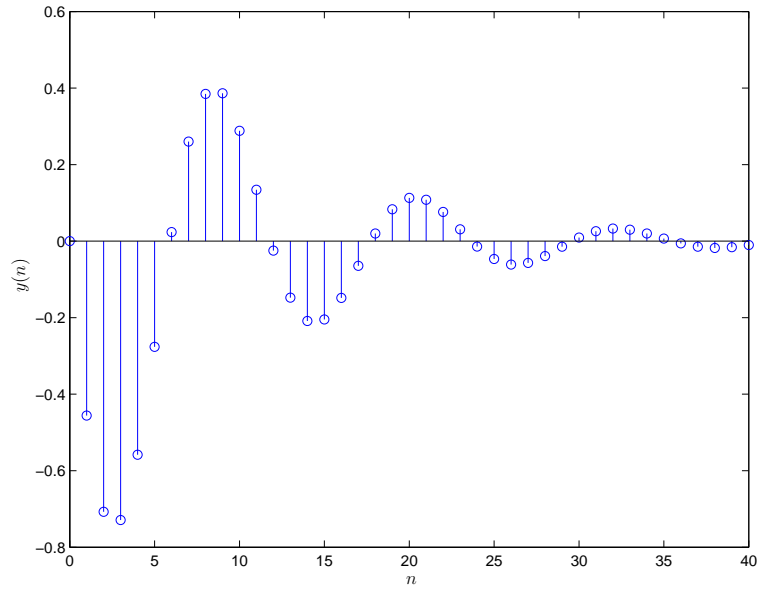


Figura 47: Solução  $C\rho^n \text{sen}(\theta n + \varphi)$  para  $\rho < 1$ .

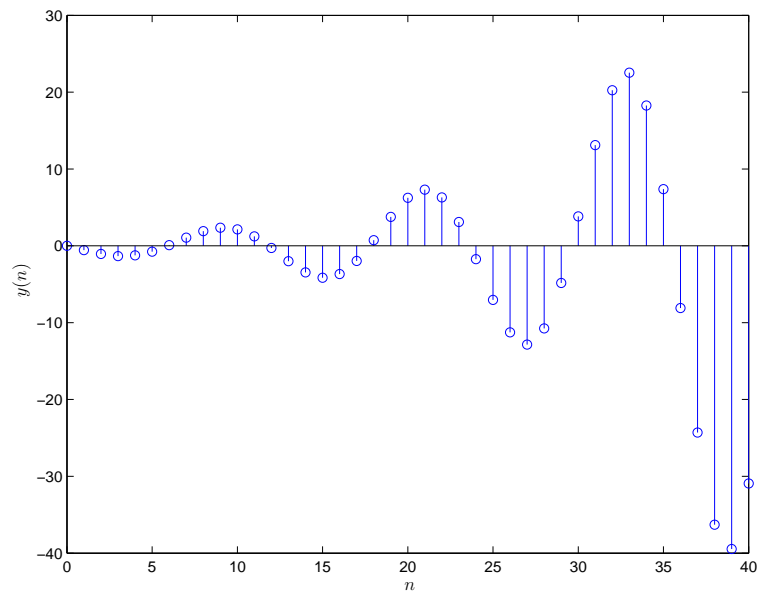


Figura 48: Solução  $C\rho^n \text{sen}(\theta n + \varphi)$  para  $\rho > 1$ .

Tabela 3: Soluções particulares típicas.

entrada $x(n)$	solução particular $y_p(n)$
$A$ (constante)	$K$ (constante)
$AM^n$	$KM^n$
$An^M$	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A\cos(w_0n) \\ A\sin(w_0n) \end{Bmatrix}$	$K_1\cos(w_0n) + K_2\sin(w_0n)$

### 5.1.3 Solução completa

A solução completa da equação a diferenças será a soma da solução particular com a solução homogênea, isto é,

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n).$$

---

Exemplo: Toma-se emprestado em  $n = 0$  o capital  $C_0$ . Este capital deve ser pago em  $N$  prestações mensais iguais e ser remunerado com uma taxa  $i$  de juros mensais. Calcular o valor da prestação mensal como função de  $N$ ,  $i$  e  $C_0$ .

Sejam  $d(n)$  a dívida no momento  $n$  e  $P$  o valor da prestação. Pode-se escrever que

$$d(n) = (1 + i)d(n - 1) - P \Rightarrow d(n) - (1 + i)d(n - 1) = -P,$$

com  $d(0) = C_0$ , ou seja, a dívida em  $n = 0$  é o capital  $C_0$ .

A solução homogênea é dada por  $d_h(n) = c\lambda^n$  que substituída na equação a diferenças leva a

$$c\lambda^n - (1 + i)c\lambda^{n-1} = 0 \Rightarrow c\lambda^{n-1}[\lambda - (1 + i)] = 0,$$

ou seja

$$\lambda - (1 + i) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 + i.$$

Portanto, a solução homogênea é

$$d_h(n) = c\lambda^n = c(1 + i)^n.$$

A solução particular é dada por

$$d_p(n) = A,$$

que substituída na equação a diferenças leva a

$$A - (1 + i)A = -P \Rightarrow A = \frac{P}{i}.$$

A solução completa é dada por

$$d(n) = d_h(n) + d_p(n) = c(1 + i)^n + \frac{P}{i}.$$

Aplicando a condição inicial tem-se que

$$d(0) = c(1 + i)^0 + \frac{P}{i} = C_0 \Rightarrow c = C_0 - \frac{P}{i},$$

e conseqüentemente

$$d(n) = \left(C_0 - \frac{P}{i}\right)(1 + i)^n + \frac{P}{i}.$$

Para pagar a dívida tem-se que  $d(n) = 0$ . Logo, o valor da prestação será dado por

$$\left(C_0 - \frac{P}{i}\right)(1 + i)^n + \frac{P}{i} = 0 \Rightarrow P = \frac{iC_0}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}.$$


---

## 5.2 Comportamento da solução homogênea

Para raízes distintas a solução homogênea é composta de termos do tipo  $c\lambda^n$ , e em função de  $\lambda$  os seguintes casos são possíveis.

- Para  $\lambda$  real tem-se os seguintes casos:
  1.  $\lambda > 1$ , situação instável como ilustrado na Figura 49.
  2.  $0 < \lambda < 1$ , situação estável como ilustrado na Figura 50.
  3.  $-1 < \lambda < 0$ , situação estável oscilante como na Figura 51.
  4.  $\lambda < -1$ , situação instável oscilante como na Figura 52.
- Para  $\lambda$  complexo (pares conjugados) tem-se a solução na forma

$$C\rho^n \text{sen}(n\theta + \varphi).$$

Verifica-se que:

1. Para  $0 < \rho < 1$ , tem-se situação estável;
2. Para  $\rho > 1$ , tem-se situação instável.

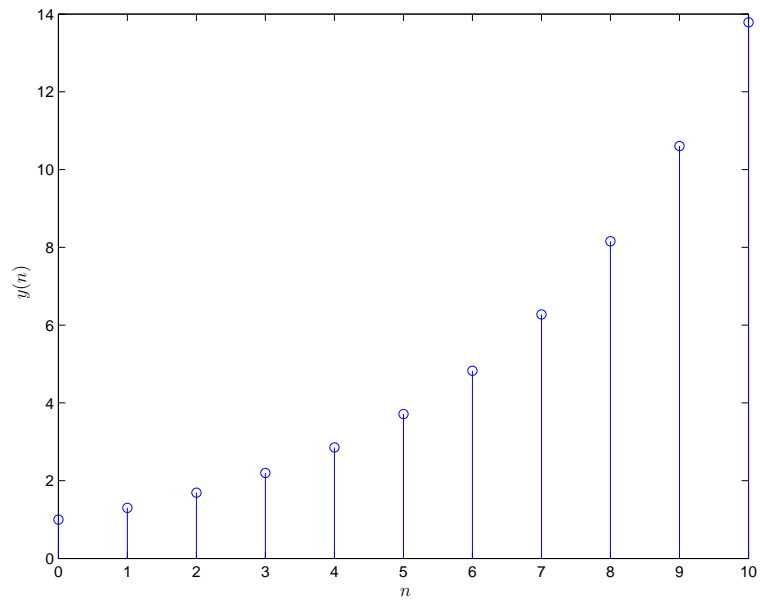


Figura 49: Situação instável,  $c\lambda^n$  para  $\lambda > 1$ .

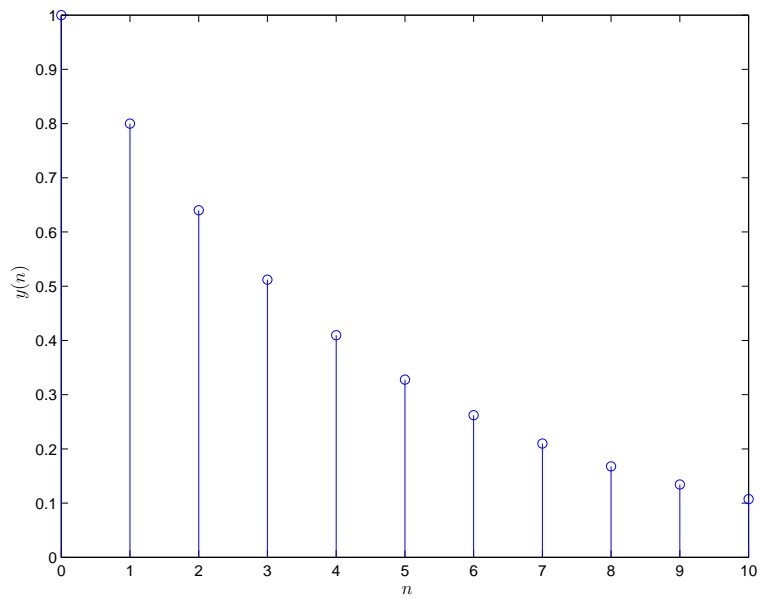


Figura 50: Situação estável,  $c\lambda^n$  para  $\lambda < 1$ .



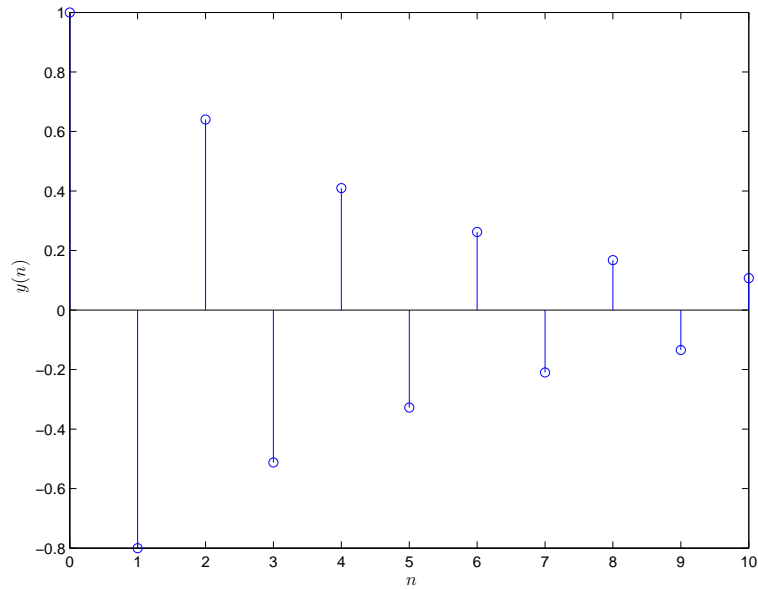


Figura 51: Situação estável oscilante,  $c\lambda^n$  para  $-1 < \lambda < 0$ .

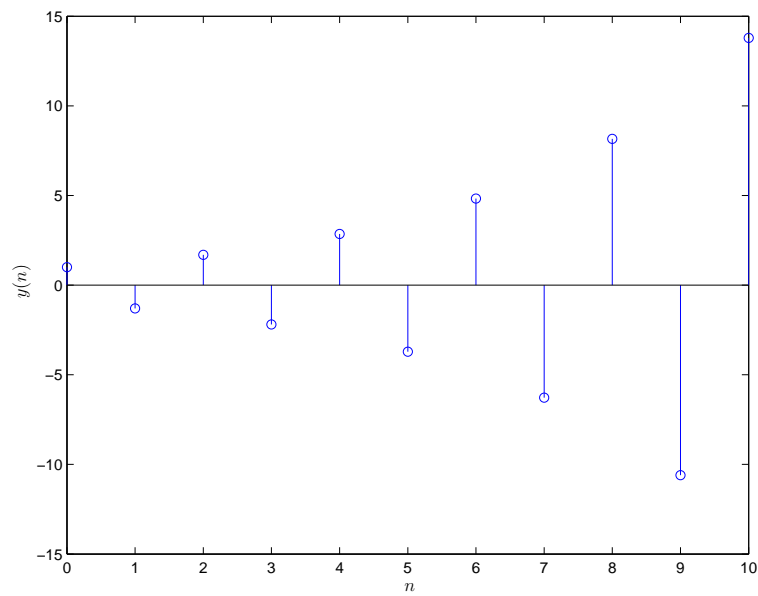


Figura 52: Situação instável oscilante,  $c\lambda^n$  para  $\lambda < -1$ .

### 5.3 Regiões de estabilidade no plano complexo

Com base na análise realizada na seção anterior nota-se que a estabilidade é assegurada se as raízes estiverem dentro de um círculo unitário conforme ilustrado na Figura 53.

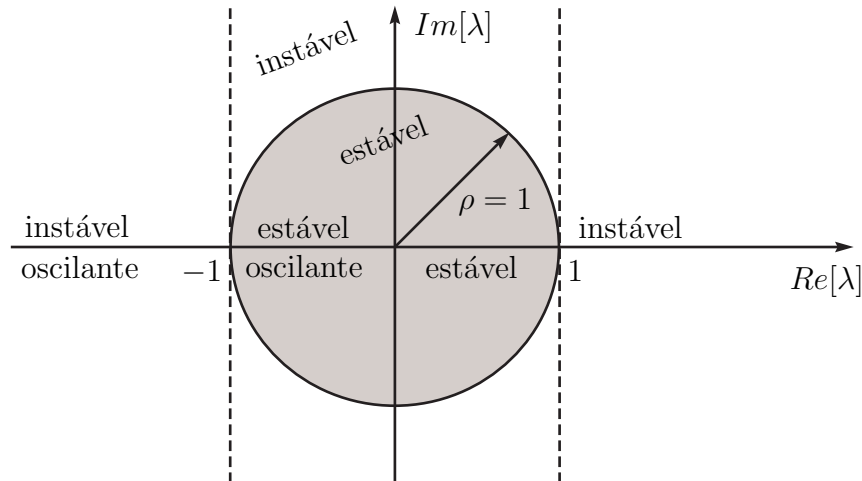


Figura 53: Regiões de estabilidade e instabilidade.

Salienta-se que mesmo no caso de raízes múltiplas, o termo exponencial predomina e a estabilidade ocorre para raízes dentro do círculo unitário.

## 6 Análise em frequência

As ferramentas matemáticas principais para análise em frequência são a transformada de Fourier e a série de Fourier.

A análise de Fourier de um sinal (domínio do tempo) irá fazer a decomposição em componentes senoidais (ou exponenciais complexas) caracterizando a representação deste sinal no domínio da frequência, ou seja, gerando o espectro do sinal.

O espectro do sinal permite identificar o sinal, ou seja, pode ser visto como sua *assinatura*.

Para a análise de um sinal periódico é empregada a série de Fourier. Para um sinal com energia finita emprega-se a transformada de Fourier.

## 6.1 Série de Fourier para sinais contínuos e periódicos

Seja uma sequência de exponenciais dada por

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde  $\Omega_0$  é a frequência fundamental em  $rad/s$ ,  $F_0$  é a frequência fundamental em  $Hz$ ,  $T_p = \frac{1}{F_0}$  é o período fundamental.

A combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas caracteriza a série de Fourier, ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t},$$

onde  $c_k$  é chamado de forma de  $x(t)$  e  $F_0$  é a frequência fundamental.

Nota-se que

$$e^{j2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

representam os blocos de sinais exponenciais que permitem construir sinais periódicos de diferentes tipos através da escolha de  $F_0$  e  $c_k$ . Isso é garantido pelo fato que estas exponenciais são funções ortogonais e caracterizam uma base para a geração de outras funções.

Multiplicando-se ambos os lados da equação da série de Fourier por  $e^{-j2\pi F_0 l t}$ , com  $l$  inteiro, e integrando sobre um período, de  $t_0$  até  $t_0 + T_p$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 l t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi F_0 l t} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \right) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[ \frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right] \Big|_{t_0}^{t_0+T_p}. \end{aligned}$$

Para  $k \neq l$  tem-se que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[ \frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right] \Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = 0.$$

Para  $k = l$  tem-se que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T_p = c_l T_p.$$

Portanto, é possível escrever que

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 l t} dt,$$

e como  $t_0$  é arbitrário, pode-se escrever que

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt.$$

Notas:

- Uma forma alternativa para obter os coeficientes da série de Fourier é considerar a minimização do erro quadrático entre a função e sua respectiva aproximação pela série.
- Observa-se que se empregou a integração em um período, e consequentemente, a série de Fourier irá representar apenas este trecho do sinal no caso da função não ser periódica. Se a função é periódica, então a representação dada pela série de Fourier será para todo o intervalo de tempo.
- O coeficiente  $c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) dt$  representa o valor médio do sinal no respectivo período.

As condições de Dirichlet estabelecem as condições para que a série de Fourier convirja para  $x(t)$ , ou seja, as condições para que  $x(t)$  e  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$  sejam iguais para todo  $t$ . Estas condições são:

- $x(t)$  tem um número finito de descontinuidades em qualquer período;
- $x(t)$  tem um número finito de mínimos e máximos em qualquer período;
- $x(t)$  é absolutamente integrável em qualquer período, ou seja,

$$\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty.$$

As condições de Dirichlet são condições apenas suficientes, ou seja, existem sinais que possuem sua representação via série de Fourier, mas que não satisfazem estas condições.

Os coeficientes  $c_k$ , em geral, são valores complexos. Para sinais periódicos reais,  $c_k$  e  $c_{-k}$  são complexos conjugados, ou seja,

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}, \quad c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k},$$

e consequentemente a série de Fourier pode ser representada como

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k),$$

e como  $x(t)$  é real, então  $c_0$  será real.

Como

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t) \cos \theta_k - \operatorname{sen}(2\pi k F_0 t) \operatorname{sen} \theta_k,$$

pode-se escrever que

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k F_0 t) - b_k \operatorname{sen}(2\pi k F_0 t)]$$

onde  $a_0 = c_0$ ,  $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$  e  $b_k = 2|c_k| \operatorname{sen} \theta_k$ .

Notas:

- $a_k^2 + b_k^2 = 4|c_k|^2 (\cos^2 \theta_k + \operatorname{sen}^2 \theta_k) = 4|c_k|^2$ .
- Esta última forma de apresentar a série de Fourier é conhecida como série trigonométrica de Fourier e só se aplica a sinais reais.

---

Exemplo: Obter a série de Fourier para  $x(t) = \operatorname{sen}(\Omega_0 t)$ .

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 t},$$

e se verifica que:

- $c_k = 0$  para  $|k| \neq 1$ , e  $c_{-1} = c_1 = \frac{1}{2j}$ ;
- o nível médio do sinal é zero, concordante com  $c_0 = 0$ ;
- como o sinal é real tem-se que  $c_k = -c_{-k}^*$ ;
- o sinal é composto apenas pela componente fundamental, ou seja,

$$x(t) = \operatorname{sen}(\Omega_0 t) = \cos(\Omega_0 t - \frac{\pi}{2}),$$

e portanto,

$$2c_1 = 1 \quad e \quad \theta_1 = \frac{-\pi}{2}.$$

---

A representação gráfica dos resultados da série de Fourier caracterizam os espectros de Fourier do sinal. Geralmente os coeficientes da série são números complexos requerendo dois gráficos para a representação: uma para a parte real e outro para a parte imaginária. É usual a representação através dos gráficos do módulo (espectro de amplitude) e da fase (espectro de fase). Nestes gráficos são empregadas frequências negativas, sem significado físico, mas apenas com significado matemático que decorre das exponenciais complexas e seus conjugados.

## 6.2 Densidade espectral de potência de sinais contínuos periódicos

Seja um sinal periódico com energia infinita e potência média finita. A potência média é definida como

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t)x^*(t) dt.$$

Como

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t},$$

tem-se que

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left( \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

que é conhecida como relação de Parseval.

Uma interpretação física para a relação de Parseval é dada a seguir. Seja  $x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$  uma exponencial complexa. Neste caso, todos os coeficientes da série de Fourier serão nulos exceto  $c_k$ , e consequentemente  $P_x = |c_k|^2$ . O termo  $|c_k|^2$  representa a potência média da harmônica  $k$ . A potência média total de um sinal periódico será dada pela soma das potências médias de todas as harmônicas, caracterizando a densidade espectral de potência como ilustrado na Figura 54, onde  $|c_k|^2$  é apresentado como uma função de  $kF_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A densidade espectral de potência apresenta como a potência de um sinal periódico é distribuída para as várias frequências componentes do sinal.

Algumas considerações são:

- $c_k$  é um número complexo e então pode ser representado graficamente em termos do módulo  $|c_k|$  e da fase  $\theta_k$ .
- para um sinal real,  $c_{-k} = c_k^* \Rightarrow |c_k|^2 = |c_k^*|^2$ , o que leva à simetria do espectro, e neste caso tem-se

$$P_x = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

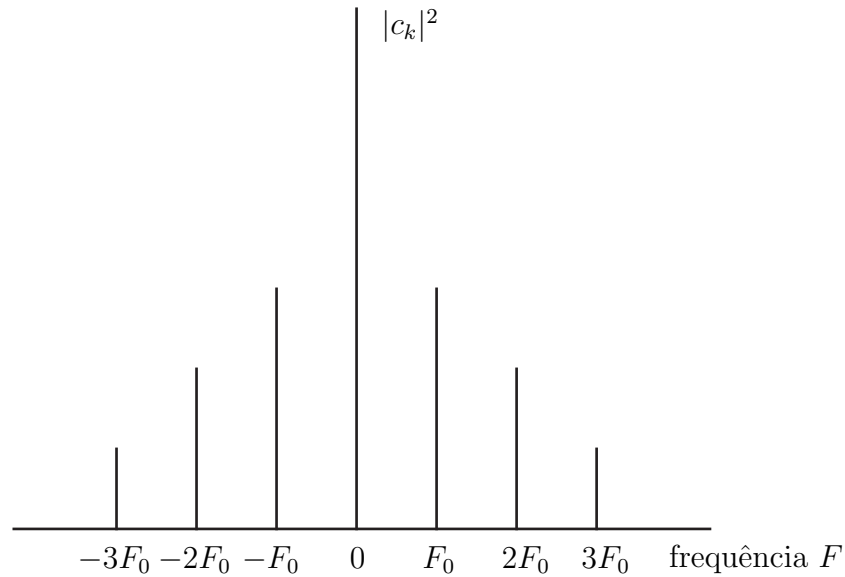


Figura 54: Representação da densidade espectral de potência.

Exemplo: Determinar a série de Fourier e a densidade espectral de potência de um trem de pulsos retangulares conforme mostrado na Figura 55.

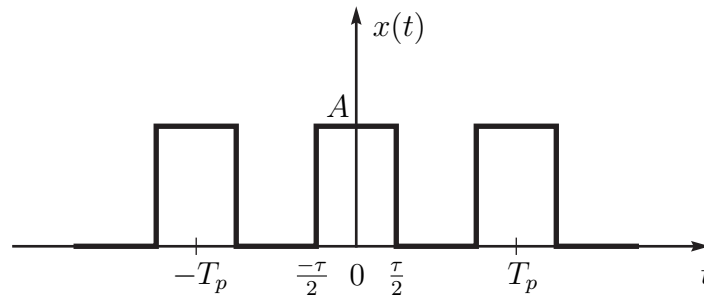


Figura 55: Trem de pulsos.

O trem de pulsos é periódico de período fundamental  $T_p$ . Observa-se que se trata de um sinal ímpar,  $x(t) = x(-t)$ . É conveniente escolher o intervalo de integração de  $-\frac{T_p}{2}$  até  $\frac{T_p}{2}$ . A frequência fundamental é dada por  $F_0 = \frac{1}{T_p}$ .

Para  $k = 0$  tem-se

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) dt = \frac{A\tau}{T_p},$$

que representa o valor médio do sinal  $x(t)$ .

Para  $k \neq 0$  tem-se

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi F_0 k t} dt = \frac{A}{T_p} \left( \frac{e^{-j2\pi F_0 k t}}{-j2\pi F_0 k} \right) \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
 &= \frac{A}{\pi F_0 k T_p} \left( \frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{2j} \right) = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{\text{sen}(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \\
 c_k &= \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{\text{sen}(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau} = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{\text{sen}\phi}{\phi},
 \end{aligned}$$

com  $\phi = \pi k F_0 \tau$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

A densidade espectral de potência do trem de pulsos é dada por

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left( \frac{A\tau}{T_p} \right)^2 & \text{para } k = 0, \\ \left( \frac{A\tau}{T_p} \right)^2 \left[ \frac{\text{sen}(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau} \right]^2, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

A Figuras 56 e 57 apresentam os gráficos dos coeficientes da série de Fourier para dois valores distintos de  $\tau$ .

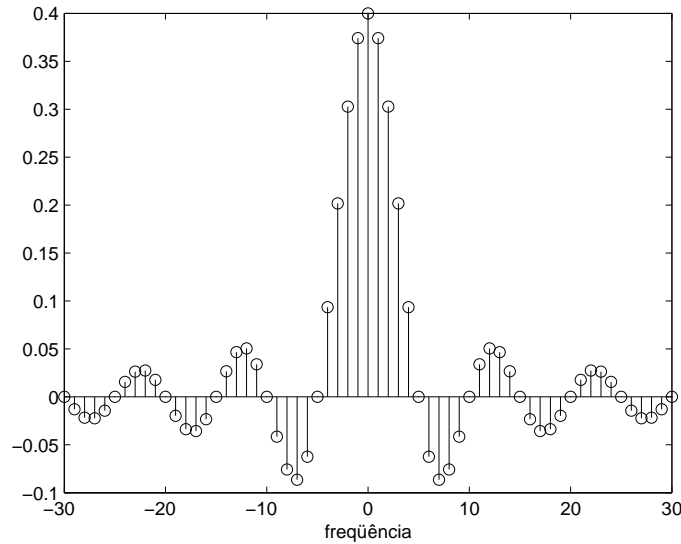


Figura 56: Coeficientes da série de Fourier para o trem de pulsos com  $T_p = 1$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.2$ .

Verifica-se que para  $T_p$  fixo e se diminuindo  $\tau$  (menor largura do pulso) ocorre um espalhamento da potência do sinal sobre toda a faixa de frequência.



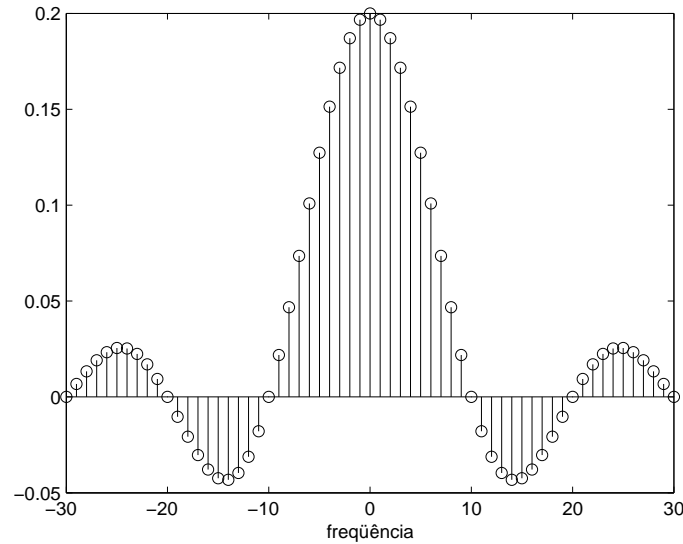


Figura 57: Coeficientes da série de Fourier para o trem de pulsos com  $T_p = 1$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.1$ .

Para  $\tau$  fixo e aumentado  $T_p$  (Figuras 57 e 58) verifica-se uma diminuição do espaçamento entre as linhas espectrais adjacentes. Para  $T_p$  muito grande,  $c_k$  torna-se pequeno, e quando  $T_p \rightarrow \infty$ , a potência média tende a zero.

Nota-se que para  $k \neq 0$  e  $\text{sen}(\pi k F_0 \tau) = 0$ , então  $c_k = 0$ . Neste caso, as harmônicas com potência nula ocorrem para frequências tais que  $\pi(k F_0) \tau = m\pi$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , ou ainda,  $k F_0 = \frac{m}{\tau}$ .

Os gráficos da densidade espectral de potência para os casos anteriores estão apresentadas nas Figuras 59, 60 e 61.

Exemplo: Considere o pulso retangular do exemplo anterior com  $T_p = 2$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 1$ . Verificar o efeito da inclusão das harmônicas para a representação deste sinal.

A frequência fundamental é  $F_0 = 1/T_P = 0.5$ .

- Para  $k = 0$  tem-se

$$c_0 = \frac{A\tau}{T_p} = \frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

- Para  $k = 1$  tem-se

$$c_1 = \frac{A\tau}{T_p} \times \frac{\text{sen}(\pi F_0 \tau)}{\pi F_0 \tau} = 1 \times \frac{\text{sen}(0.5\pi)}{0.5\pi} = 0.6366,$$

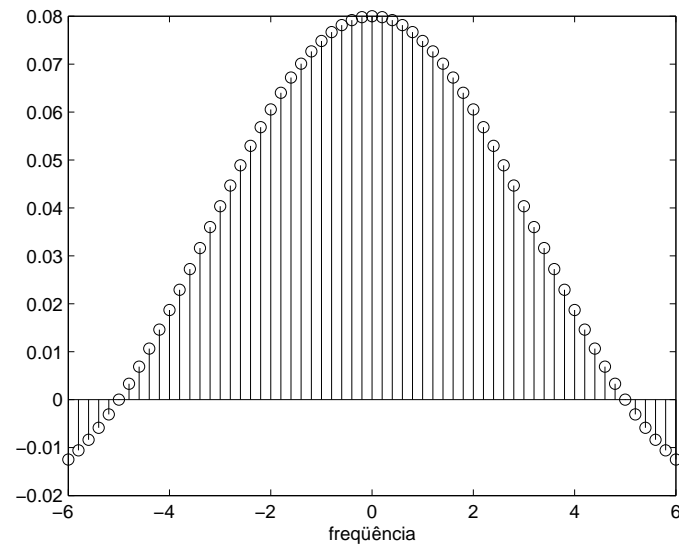


Figura 58: Coeficientes da série de Fourier para o trem de pulsos com  $T_p = 5$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.2$ .

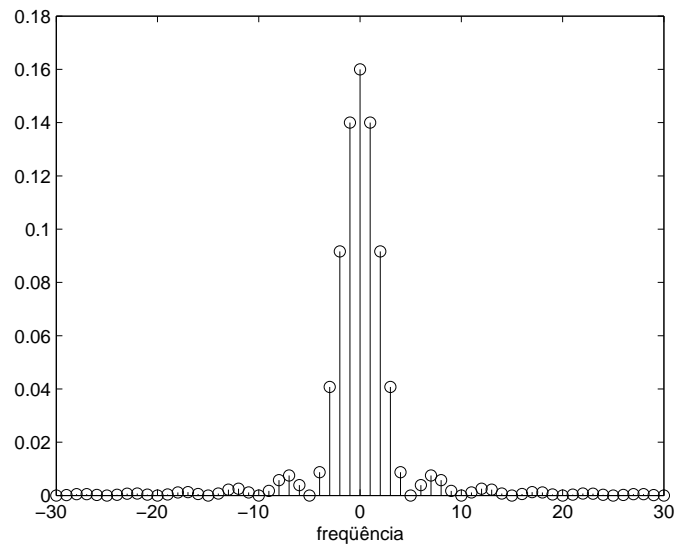


Figura 59: Densidade espectral de potência para o trem de pulsos com  $T_p = 1$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.2$ .

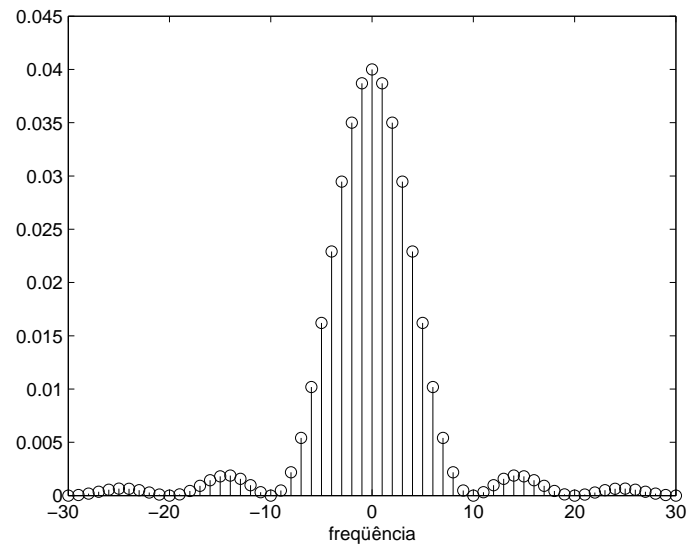


Figura 60: Densidade espectral de potência para o trem de pulsos com  $T_p = 1$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.1$ .

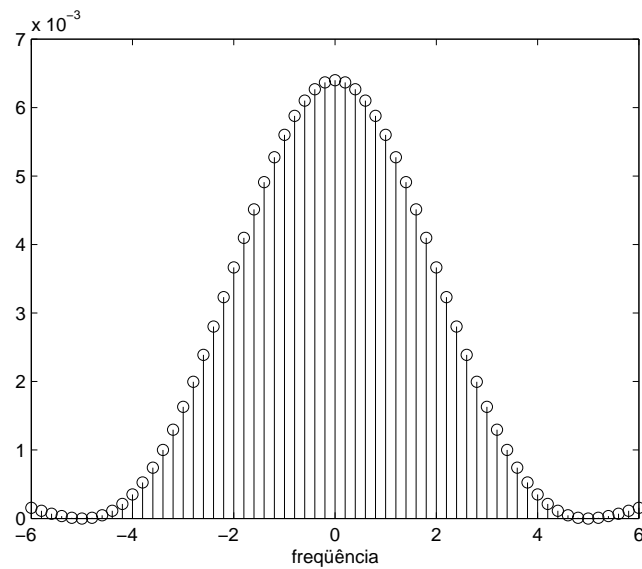


Figura 61: Densidade espectral de potência para o trem de pulsos com  $T_p = 5$ ,  $A = 2$  e  $\tau = 0.2$ .

$$a_1 = 2\text{Re}(c_1) = 2 \times 0.6366, \quad b_1 = 2\text{Imag}(c_1) = 0,$$

e primeira harmônica ( $k = 1$ ) será dada por

$$x_1(t) = c_0 + a_1 \cos(2\pi \times 1F_0 t) - b_1 \sin(2\pi \times 1F_0 t),$$

e está representada na Figura 62.

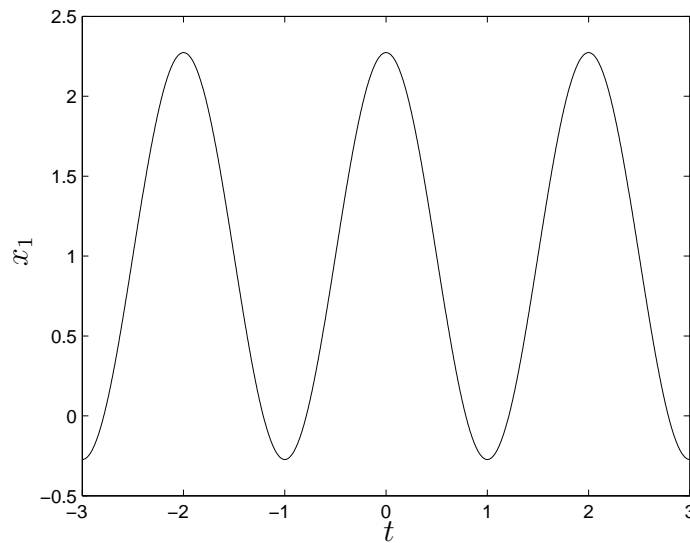


Figura 62: Primeira harmônica do trem de pulsos.

- Para  $k = 2$  tem-se

$$c_2 = 0,$$

$$a_1 = 2\text{Re}(c_2) = 0, \quad b_2 = 2\text{Imag}(c_2) = 0,$$

e então

$$x_2(t) = x_1(t) + 0.$$

- Para  $k = 3$  tem-se

$$c_3 = -0.2122,$$

$$a_3 = 2\text{Re}(c_3) = 2 \times -0.2122, \quad b_3 = 2\text{Imag}(c_3) = 0,$$

e então

$$x_3(t) = x_2(t) + a_3 \cos(2\pi \times 3F_0 t) - b_3 \sin(2\pi \times 3F_0 t),$$

e está representada na Figura 63.

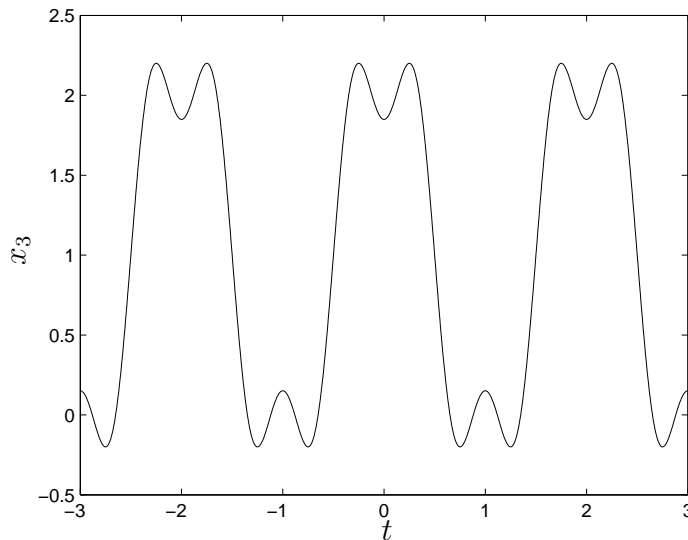


Figura 63: Terceira harmônica do trem de pulsos.

- Para  $k=4$  tem-se

$$c_4 = 0,$$

$$a_4 = 2\text{Re}(c_4) = 0, \quad b_4 = 2\text{Imag}(c_4) = 0,$$

e então

$$x_4(t) = x_3(t) + 0.$$

- Para  $k = 5$  tem-se

$$c_5 = 0.1273,$$

$$a_5 = 2\text{Re}(c_5) = 2 \times 0.1273, \quad b_5 = 2\text{Imag}(c_5) = 0,$$

e então

$$x_5(t) = x_4(t) + a_5 \cos(2\pi \times 5F_0 t) - b_5 \sin(2\pi \times 5F_0 t),$$

e está representada na Figura 64.

---

### 6.3 Transformada de Fourier para sinais contínuos não periódicos

Para um sinal periódico emprega-se a série de Fourier, que gera um espectro formado por linhas igualmente espaçadas, cujo espaçamento é a frequência

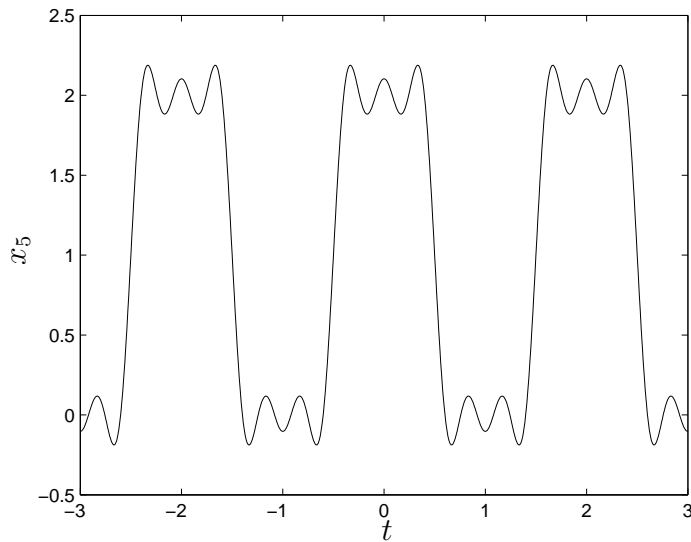


Figura 64: Quinta harmônica do trem de pulsos.

fundamental. Neste caso, se o período cresce ilimitadamente, então o espaçamento entre as linhas tende a zero. Se o período é igual a infinito, então o sinal é aperiódico, e obtém-se um espectro contínuo.

Seja um sinal não periódico  $x(t)$  com duração finita conforme mostrado na Figura 65.

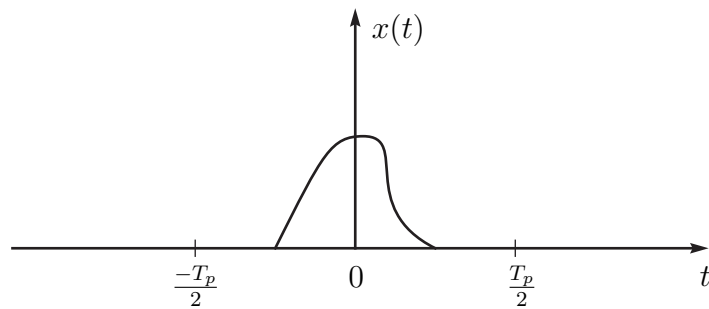
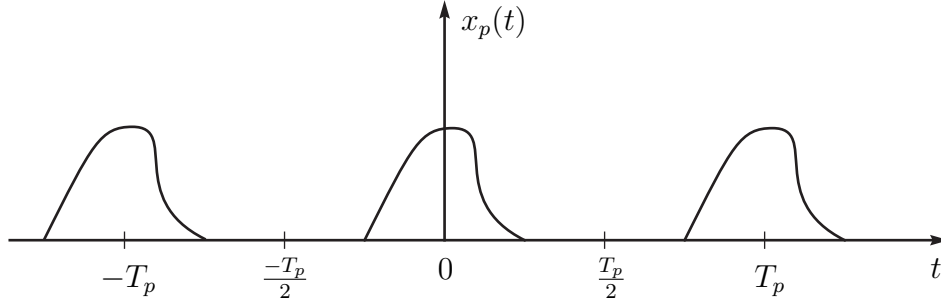


Figura 65: Sinal não periódico de duração finita.

Seja  $x_p(t)$  um sinal periódico com período  $T_p$  conforme mostrado na Figura 66.

Quando  $T_p \rightarrow \infty$ , então  $x_p(t) = x(t)$ . Assim, é possível obter o espectro de  $x(t)$  através do espectro de  $x_p(t)$  quando  $T_p \rightarrow \infty$ .


 Figura 66: Sinal periódico com período  $T_p$ .

A série de Fourier para  $x_p(t)$  é dada por

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \quad \text{com } F_0 = \frac{1}{T_p},$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt.$$

Para  $-\frac{T_p}{2} \leq t \leq \frac{T_p}{2}$  então  $x_p(t) = x(t)$ , e conseqüentemente,

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt,$$

pois  $x(t) = 0$  para  $|t| > \frac{T_p}{2}$ .

Define-se a transformada de Fourier  $X(F)$  do sinal  $x(t)$  como sendo

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt.$$

Através de uma comparação escreve-se que  $c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0)$ , ou  $T_p c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right)$ , com  $F = kF_0$ , ou seja, os coeficientes de Fourier são amostragens de  $X(F)$  feitas em múltiplos de  $F_0$  e escalonados por  $F_0$  (ou  $\frac{1}{T_p}$ ). Portanto,

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2\pi k F_0 t}.$$

Seja  $\frac{1}{T_p} = \Delta F = F_0$ . Logo,

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k \Delta F t} \Delta F.$$

Quando  $T_p \rightarrow \infty$ , então  $x_p(t) \rightarrow x(t)$ ,  $\Delta F = dF$ ,  $k\Delta F = F$ . Logo,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF,$$

que representa a transformada inversa de Fourier.

Para a frequência em radianos por segundo,  $\Omega = 2\pi F$ , escreve-se a transformada de Fourier como

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt,$$

e a transformada inversa como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega.$$

## 6.4 Densidade espectral de energia de sinais contínuos não periódicos

Seja energia finita de um sinal  $x(t)$  dada por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

É possível escrever que

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)dF \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF, \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(F)dF,$$

que representa a relação de Parseval.

O termo  $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$  representa a distribuição de energia do sinal como uma função da frequência e caracteriza a densidade espectral de energia. A energia de um sinal na faixa de frequências  $F_1 < F < F_1 + \Delta F$  é dada por

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F} S_{xx}(F)dF.$$



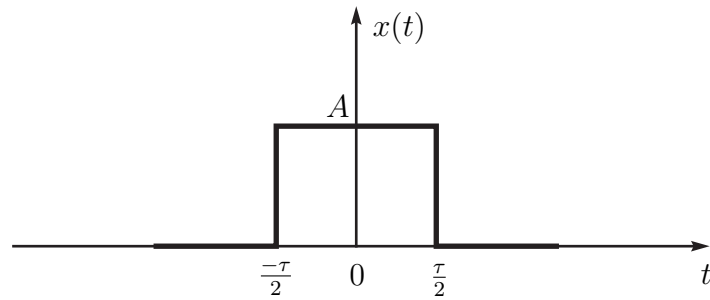


Figura 67: Pulso retangular.

Exemplo: Determinar a transformada de Fourier e a densidade espectral de energia para um pulso retangular dado por

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

e ilustrado na Figura 67.

A transformada de Fourier será dada por

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\text{sen}(\pi F\tau)}{\pi F\tau},$$

que é uma função real. Então, um gráfico é suficiente para sua representação conforme mostrado na Figura 68.

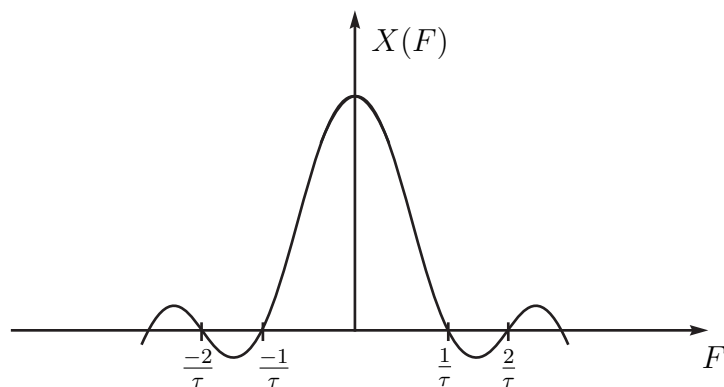


Figura 68: Representação da transformada de Fourier do pulso retangular.

Verifica-se que o espectro de um pulso retangular é o envelope do espectro de linhas (coeficientes da série de Fourier) do sinal periódico obtido pela repetição do pulso com período  $T_p$  e escalonado por  $\frac{1}{T_p}$ .

Os coeficientes de Fourier  $c_k$  do sinal periódico correspondente são simplesmente amostragens de  $X(F)$  nas frequências  $kF_0 = \frac{k}{T_p}$ , ou seja:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right).$$

Nota:  $X(F) = 0$  para múltiplos de  $\frac{1}{\tau}$ .

Quando  $\tau$  diminui (largura do pulso diminui) ocorre o espalhamento de energia para maiores frequências conforme ilustrado na Figura 69.

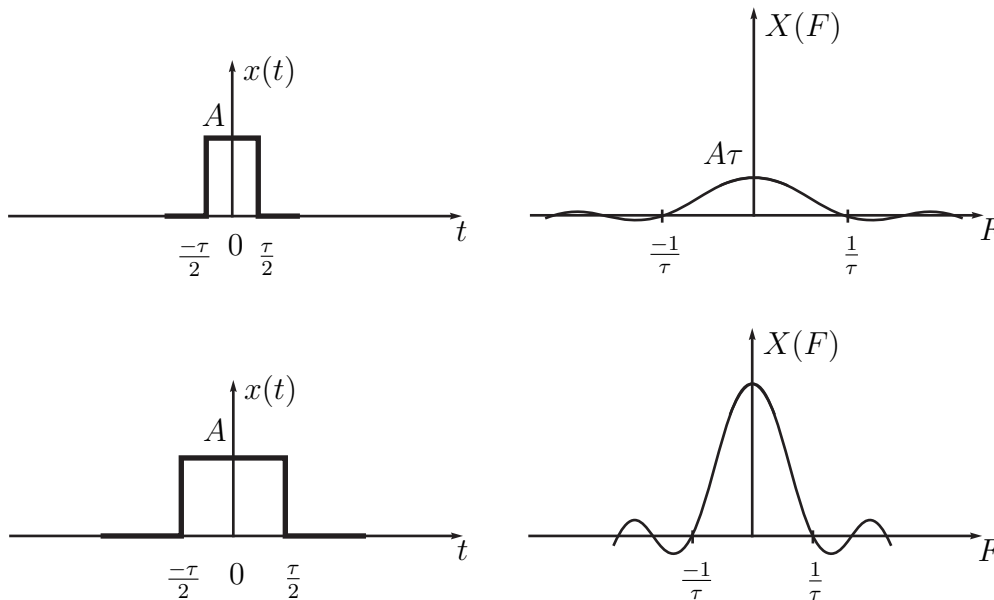


Figura 69: Efeito da mudança da largura do pulso.

A densidade espectral de energia do pulso retangular será dada por

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left[ \frac{\text{sen}(\pi F\tau)}{\pi F\tau} \right]^2.$$

## 6.5 Série de Fourier para um sinal periódico discreto

Seja  $x(n) = x(n + N)$  um sinal periódico de período  $N$ . A representação em série de Fourier consiste de  $N$  exponenciais harmonicamente relacionadas do

tipo

$$e^{j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

e é expressa como

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

caracterizando a série de Fourier em tempo discreto (DTFS).

O cálculo dos coeficientes da série de Fourier, de forma semelhante ao caso contínuo, resulta em

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Os coeficientes  $c_k$  representam o sinal  $x(n)$  no domínio da frequência, ou seja, caracterizam a amplitude e fase da componente dada por

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N} = e^{jw_k n}, \quad w_k = \frac{2\pi k}{N}.$$

Como a sequência  $s_k(n) = s_k(n + N)$  é periódica, então  $c_k$  também será periódico. Logo,

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = c_k.$$

Portanto, o espectro de um sinal  $x(n)$  periódico de período  $N$  é uma sequência periódica de período  $N$ .

---

Exemplo: Determinar o espectro dos seguintes sinais:

1.  $x(n) = \cos(\sqrt{2}\pi n)$

A frequência deste sinal é  $w_0 = \sqrt{2}\pi$  e então  $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Este não é um número racional, e então o sinal não é periódico e não pode ser expandido em série de Fourier. Seu conteúdo espectral é composto de uma única frequência  $w = w_0 = \sqrt{2}\pi$ .

2.  $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$

A frequência deste sinal é  $w_0 = \frac{\pi}{3}$  e então  $f_0 = \frac{1}{6}$ . Neste caso,  $x(n)$  é periódico com período fundamental  $N = \frac{1}{f_0} = 6$ . Escreve-se que

$$c_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x(n) e^{-j2\pi kn/6}, \quad k = 0, 1, \dots, 5,$$

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6},$$

a qual já está na forma de série de Fourier. Portanto, para o primeiro termo  $c_1 = \frac{1}{2}$ . O segundo termo, considerando a periodicidade, pode ser escrito como

$$\underbrace{e^{-j2\pi n/6}}_{k=-1} = e^{j2\pi(5-6)n/6} = \underbrace{e^{j2\pi(5n)/6}}_{k=5}.$$

Portanto,  $c_{-1} = c_5$ , ou seja,  $c_{k+N} = c_k$  como esperado.

Conclui-se, portanto, que:

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad c_1 = c_5 = \frac{1}{2},$$

e o espectro do sinal  $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$  está mostrado na Figura 70.

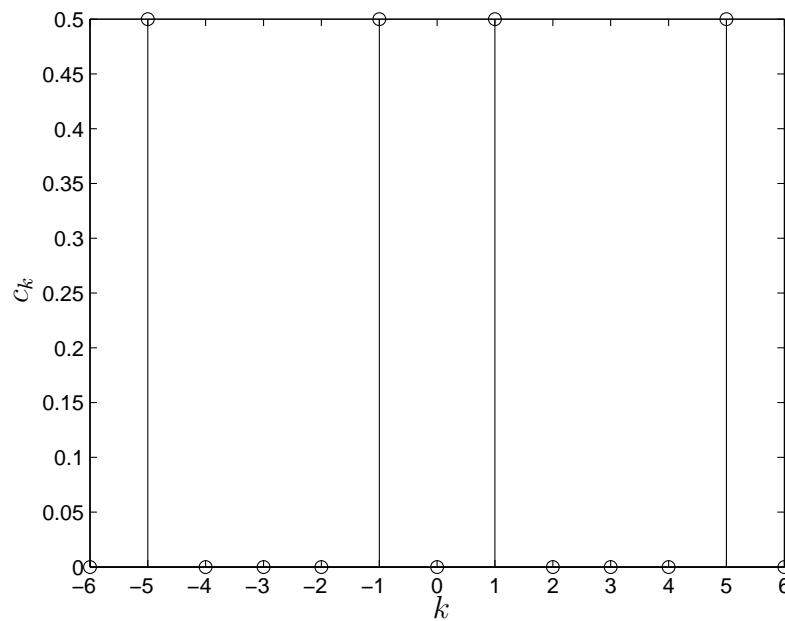


Figura 70: Espectro do sinal  $x(n) = \cos(\frac{\pi n}{3})$ .

3.  $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$ , periódico com  $N = 4$ .

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j2\pi kn/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$c_k = \frac{1}{4} \left[ x(0)e^{-j0} + x(1)e^{-j2\pi k/4} + x(2)e^{-j2\pi k \times 2/4} + x(3)e^{-j2\pi k \times 3/4} \right],$$

$$c_k = \frac{1}{4} \left( 1 + e^{-j\pi k/2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Portanto,

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}(1 - j), \quad c_2 = 0 \quad e \quad c_3 = \frac{1}{4}(1 + j).$$

Neste caso, o espectro pode ser representado em dois gráficos (magnitude e fase). Para isso tem-se que

$$|c_0| = \frac{1}{2}, \quad |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad |c_2| = 0 \quad e \quad |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\angle c_0 = 0, \quad \angle c_1 = \frac{-\pi}{4}, \quad \angle c_2 = \textit{indefinido}, \quad e \quad \angle c_3 = \frac{\pi}{4}.$$

A Figura 71 ilustra o espectro em termos dos módulos e a Figura 72 em termos dos ângulos.

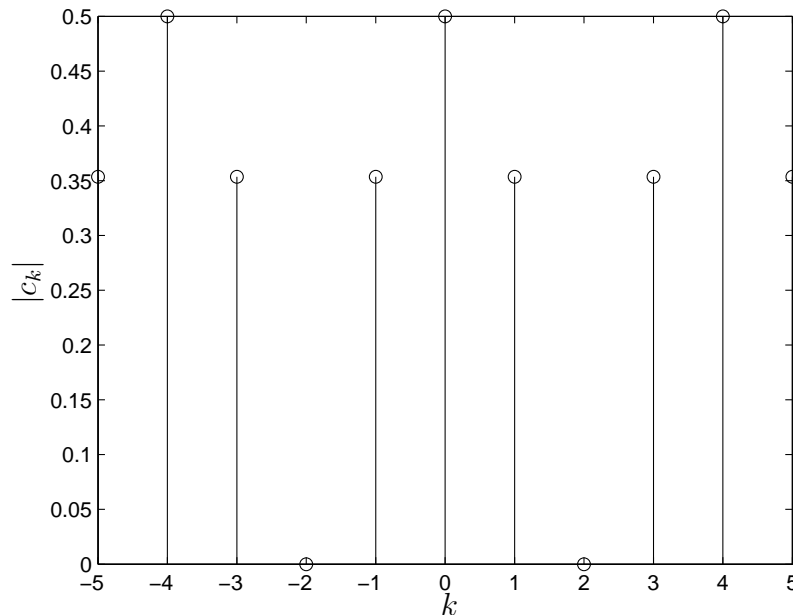


Figura 71: Espectro do sinal  $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$  em termos de módulos.

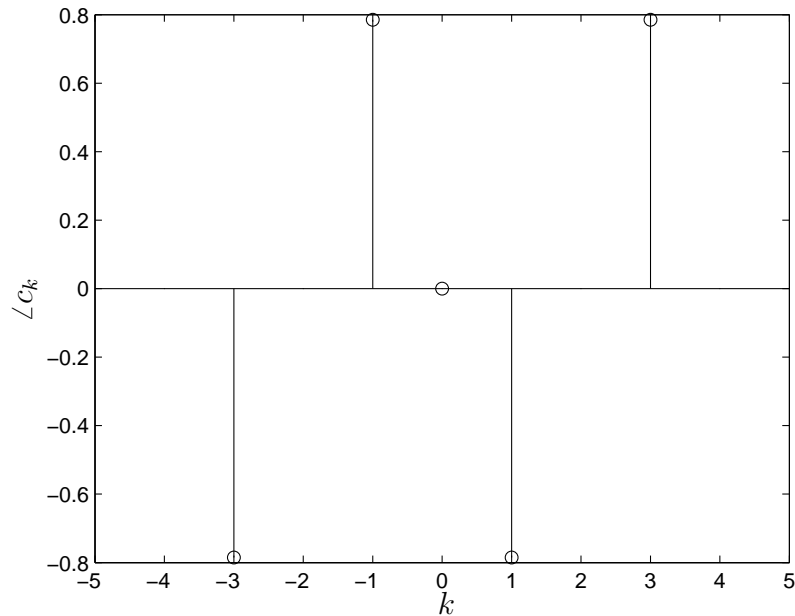


Figura 72: Espectro do sinal  $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$  em termos de ângulos de fase.

## 6.6 Densidade espectral de potência de sinais periódicos discretos

A potência média no período  $N$  e um sinal discreto pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left( \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2,
 \end{aligned}$$

que corresponde à relação de Parseval para sinais discretos.

Os valores  $|c_k|^2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  fornecem a densidade espectral de potência do sinal periódico.

A energia de  $x(n)$  em um período é dada por

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2.$$

---

Exemplo: Determinar os coeficientes da série de Fourier e a densidade espectral de potência para o sinal discreto mostrado na Figura 73.

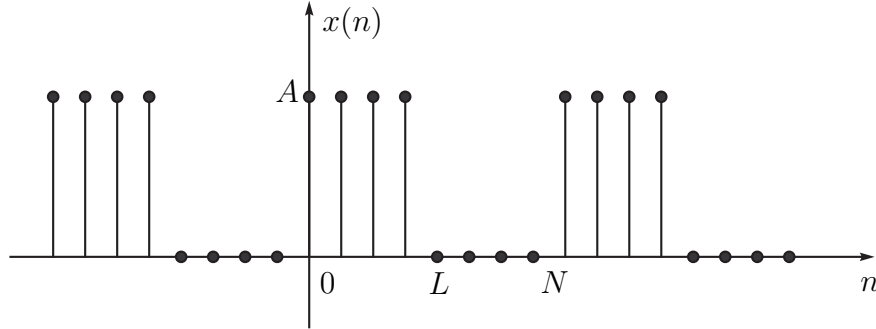


Figura 73: Trem de pulsos discreto.

Os coeficientes da série de Fourier serão dados por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$c_k = \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} \left( e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right)^n = \begin{cases} \frac{AL}{N}, & k = 0, \\ \frac{A}{N} \frac{1 - e^{-\frac{j2\pi kL}{N}}}{1 - e^{-\frac{j2\pi k}{N}}}, & k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Sabe-se que

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a = 1, \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1. \end{cases}$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-\frac{j2\pi kL}{N}}}{1 - e^{-\frac{j2\pi k}{N}}} &= \frac{e^{-\frac{j\pi kL}{N}}}{e^{-\frac{j\pi k}{N}}} \times \frac{e^{\frac{j\pi kL}{N}} - e^{-\frac{j\pi kL}{N}}}{e^{\frac{j\pi k}{N}} - e^{-\frac{j\pi k}{N}}} = \\ &= e^{-\frac{j\pi k(L-1)}{N}} \times \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$c_k = \begin{cases} \frac{AL}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ \frac{A}{N} e^{-\frac{j\pi k(L-1)}{N}} \times \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, & \text{para os demais.} \end{cases}$$

A densidade espectral de potência é dada por

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{AL}{N}\right)^2, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ \left(\frac{A}{N}\right)^2 \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}\right)^2, & \text{para os demais.} \end{cases}$$

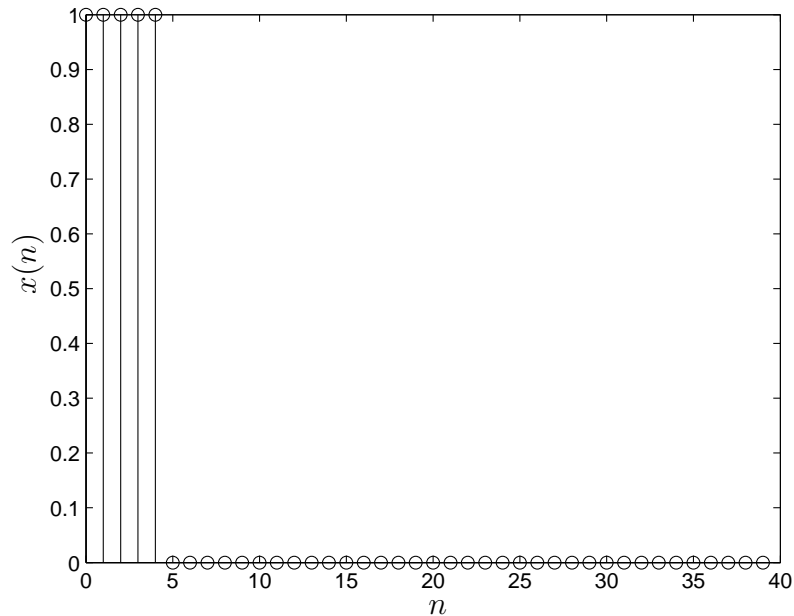


Figura 74: Primeiro período com  $L = 5$  e  $N = 40$ .

Como exemplo, seja  $L = 5$  e  $N = 40$  que caracteriza o primeiro período mostrado na Figura 74.

A amplitude e fase dos coeficientes da série são mostradas na Figura 75 e 76. Lembra-se que neste caso a sequência destes coeficientes é também periódica.

A densidade espectral de energia é mostrada na Figura 76.

---

## 6.7 Transformada de Fourier de sinais discretos não periódicos

A transformada de Fourier para sinais de energia finita é definida como

$$X(w) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn},$$

onde  $X(w)$  representa o conteúdo frequencial de  $x(n)$ .  $X(w)$  é periódica de período  $2\pi$ , ou seja,

$$X(w + 2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(w+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} = X(w).$$



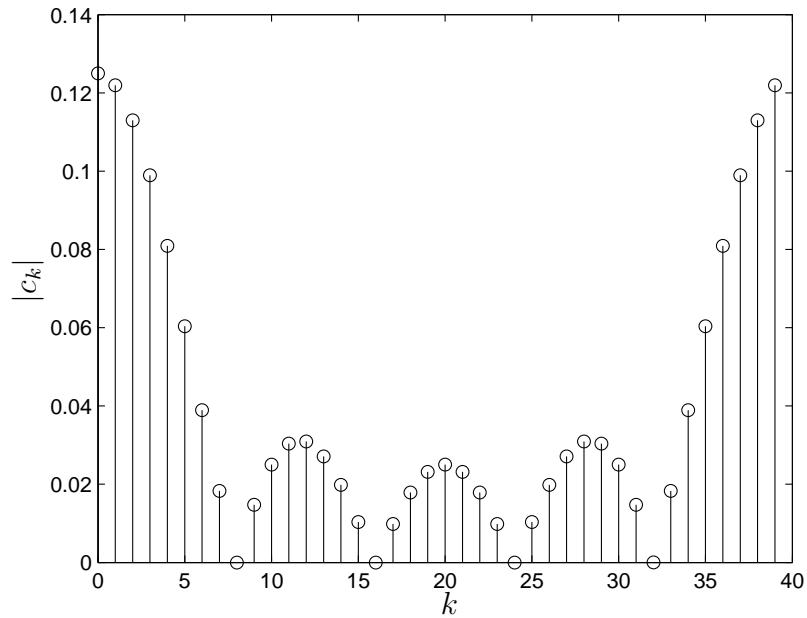


Figura 75: Amplitude de  $c_k$  com  $L = 5$  e  $N = 40$ .

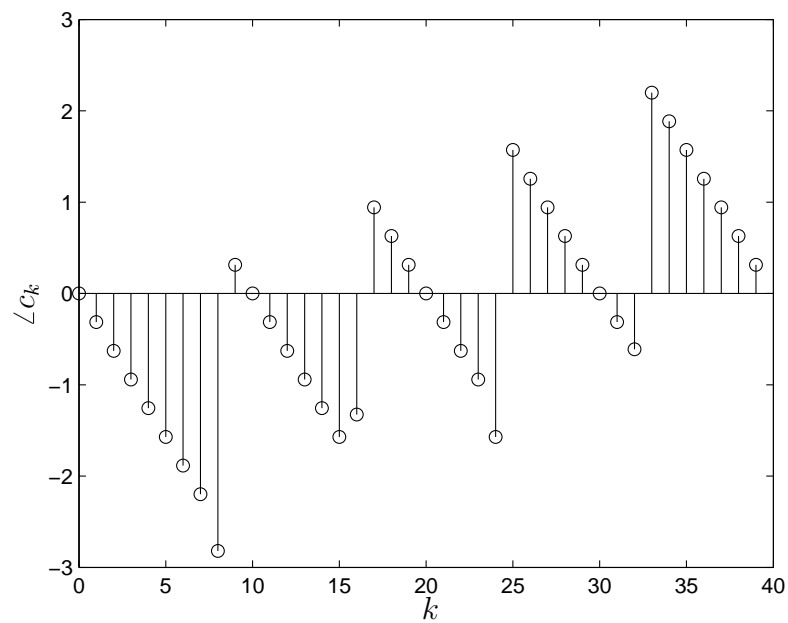


Figura 76: Fase de  $c_k$  com  $L = 5$  e  $N = 40$ .

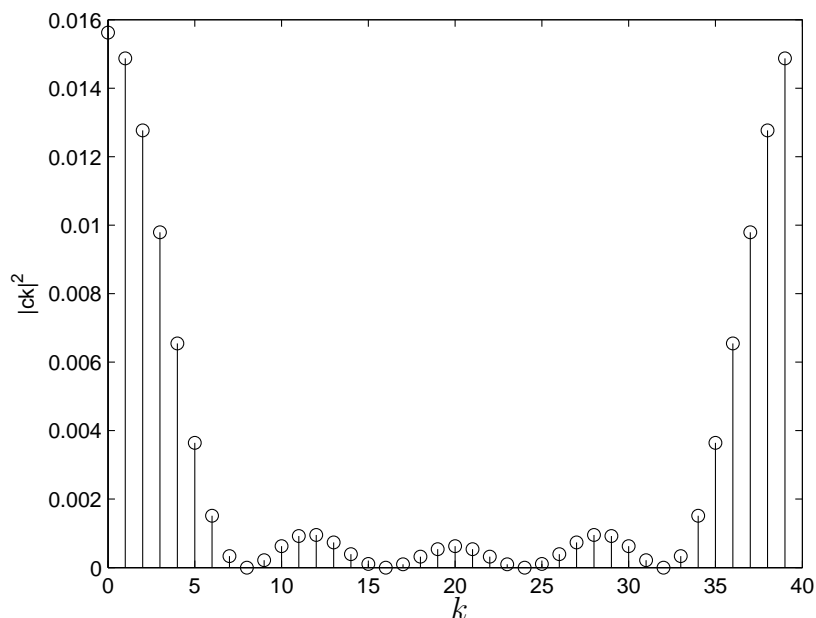


Figura 77: Densidade espectral de energia com  $L = 5$  e  $N = 40$ .

A transformada de Fourier inversa é dada por

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw.$$

A condição suficiente para a convergência é que a sequência  $x(n)$  seja absolutamente somável, ou seja,

$$|X(w)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|,$$

e se  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ , então  $X(w)$  existe. Note que esta é uma condição apenas suficiente.

As principais propriedades da transformada de Fourier são apresentadas a seguir.

1. Periodicidade:  $X(w) = X(w + 2\pi)$ .
2. Simetria: se  $x(n)$  é real, então  $X(-w) = X^*(w)$ . Neste caso, apenas  $w \in [0, \pi]$  é suficiente para a análise.
3. Linearidade:  $\mathcal{F}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha \mathcal{F}[x_1(n)] + \beta \mathcal{F}[x_2(n)]$ .

4. Translação no tempo:  $\mathcal{F}[x(n-k)] = X(w)e^{-jwk}$ .
5. Translação na frequência:  $\mathcal{F}[x(n)e^{jw_0n}] = X(w-w_0)$ .
6. Conjugado:  $\mathcal{F}[x^*(n)] = X^*(-w)$ .
7. *Folding*:  $\mathcal{F}[x(-n)] = X(-w)$ .
8. Convolução:  $\mathcal{F}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(w)X_2(w)$ .

A energia do sinal  $x(n)$  pode ser escrita através da relação de Parseval como

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw.$$

Se  $x(n)$  é real, então,

$$E_x = \int_0^{\pi} \frac{|X(w)|^2}{\pi} dw.$$

Define-se  $S_{xx} = |X(w)|^2$  como a densidade espectral de energia de  $x(n)$ .

---

Exemplo: Determinar  $S_{xx}(w)$  para  $x(n) = a^n u(n)$  com  $-1 < a < 1$ .  
Verifica-se que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty,$$

e portanto  $X(w)$  existe.

Através da definição escreve-se que

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = \frac{1}{1-ae^{-jw}},$$

pois  $|ae^{-jw}| = |a| < 1$ .

A densidade espectral de energia será dada por

$$S_{xx}(w) = |X(w)|^2 = X(w)X^*(w) = \frac{1}{(1-ae^{-jw})(1-ae^{jw})} = \frac{1}{1-2a\cos w + a^2}.$$

Nota-se que  $S_{xx}(-w) = S_{xx}(w)$ , pois  $x(n)$  é real.

As Figuras 78 e 79 mostram a sequência  $x(n)$  e o gráfico de  $S_{xx}(w)$  para  $a = 0.5$ .

As Figuras 80 e 81 mostram a sequência  $x(n)$  e o gráfico de  $S_{xx}(w)$  para  $a = -0.5$ .

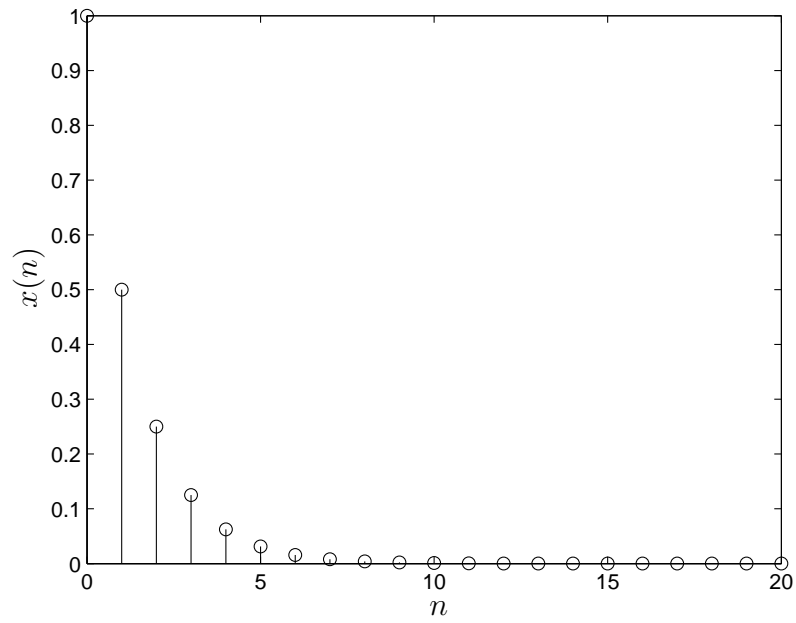


Figura 78:  $x(n)$  para  $a = 0.5$ .

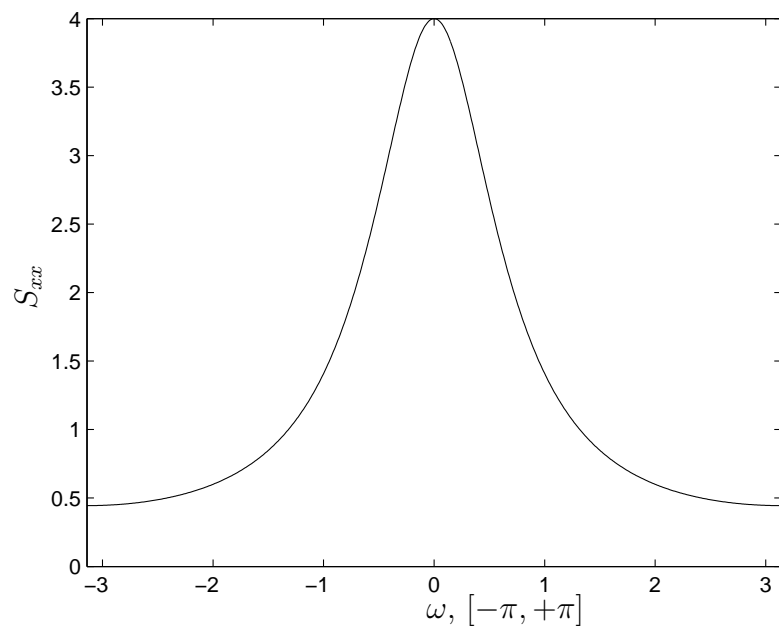


Figura 79:  $S_{xx}(w)$  para  $a = 0.5$ .

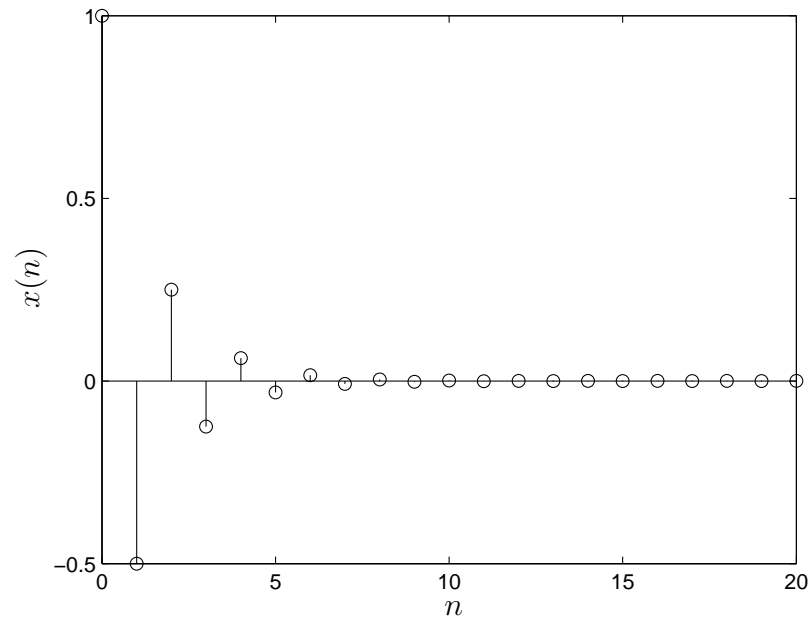


Figura 80:  $x(n)$  para  $a = -0.5$ .

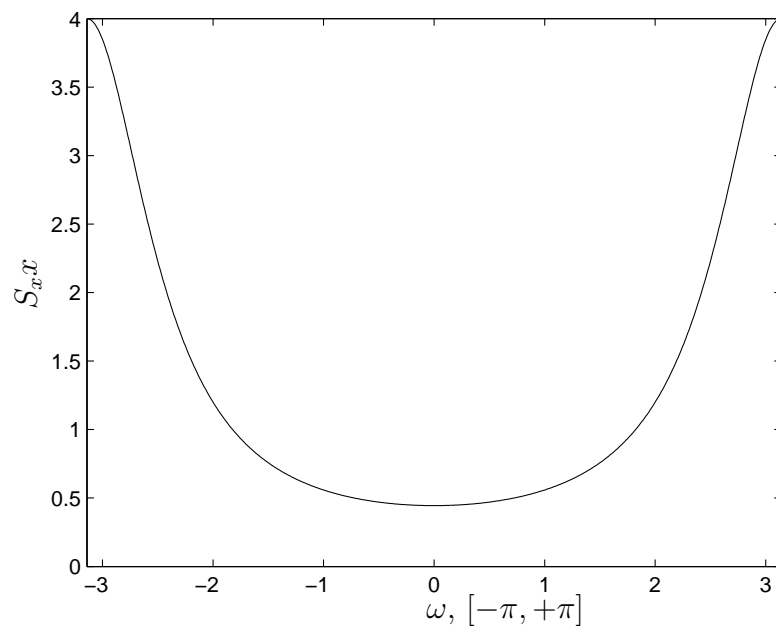


Figura 81:  $S_{xx}(w)$  para  $a = -0.5$ .

Exemplo: Determinar  $X(w)$  e  $S_{xx}(w)$  para

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}$$

Verifica-se que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty,$$

ou seja, a sequência é absolutamente somável e então  $X(w)$  existe. Logo,

$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-jwn} = A \frac{1 - e^{-jwL}}{1 - e^{-jw}} = Ae^{-j(\frac{w}{2})(L-1)} \frac{\text{sen}(\frac{wL}{2})}{\text{sen}(\frac{w}{2})}.$$

Nota-se que  $X(0) = AL$ .

Neste caso  $X(w)$  pode ser representada graficamente através dos gráficos de amplitude e fase, ou seja,

$$|X(w)| = \begin{cases} |A|L, & \text{para } w = 0, \\ |A| \left| \frac{\text{sen}(\frac{wL}{2})}{\text{sen}(\frac{w}{2})} \right|, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

$$\angle X(w) = \angle A - \angle \frac{w}{2}(L-1) + \angle \frac{\text{sen}(\frac{wL}{2})}{\text{sen}(\frac{w}{2})}.$$

As Figuras 82, 83 e 84 apresentam os gráficos da amplitude, da fase e da densidade espectral de energia quando  $A = 1$  e  $L = 5$ .

---

## 6.8 Função de transferência e resposta em frequência

Sabe-se que a resposta de regime de um sistema linear e invariante a uma entrada senoidal é também uma senóide de mesma frequência (com amplitude e fase distintas da entrada), conforme ilustrado na Figura 85.

Este conceito pode ser visualizado através da convolução. Seja um sistema com resposta ao impulso dada por  $h(t)$  e sujeito a uma entrada  $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ . A resposta  $y(t)$  é dada pela convolução, ou seja,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\Omega_0(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{j\Omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\Omega_0 \tau} d\tau = x(t) H(\Omega_0). \end{aligned}$$

Notas:

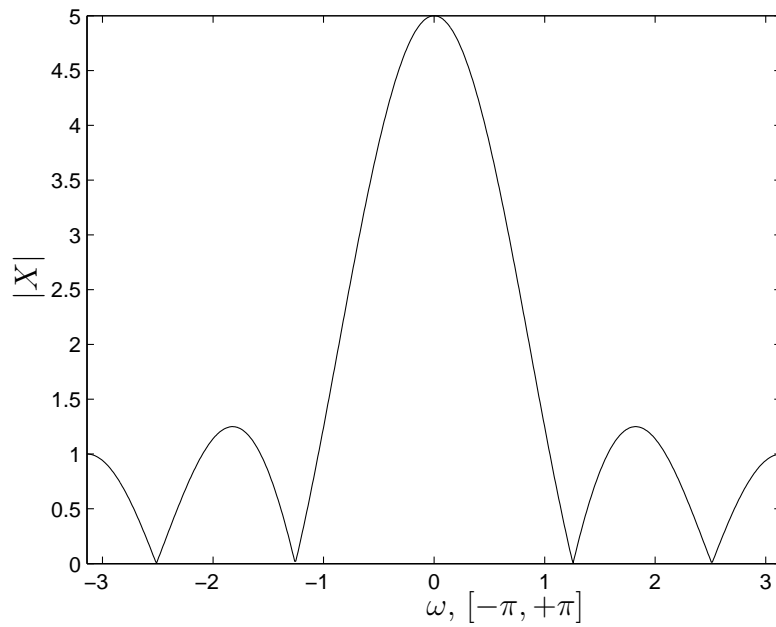


Figura 82:  $|X(w)|$ .

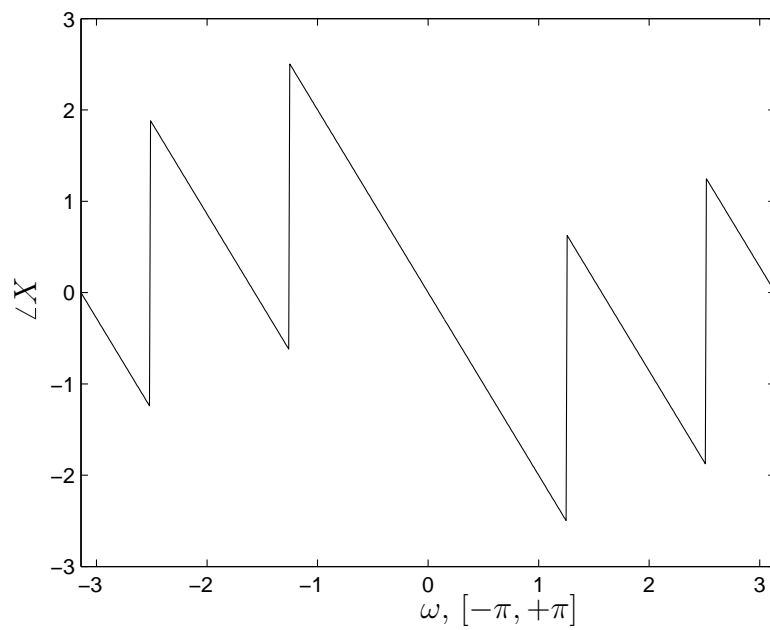


Figura 83: Fase de  $X(w)$ .

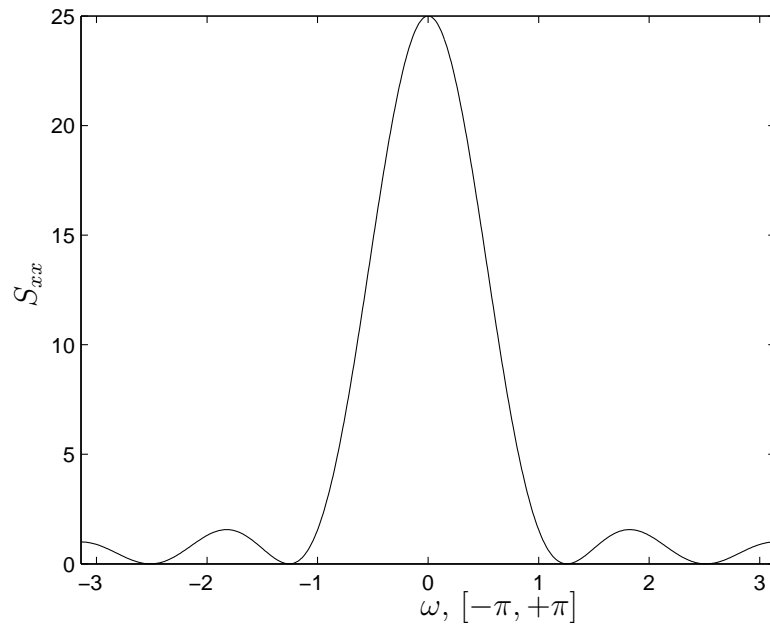


Figura 84:  $S_{xx}$ .

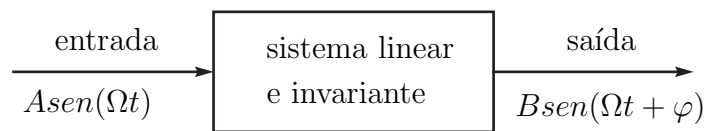


Figura 85: Relação entrada e saída para entrada senoidal.



- Observa-se que a última integral é semelhante a uma integral de Laplace, resultando na respectiva transformada  $H(\cdot)$ .
- Enfatiza-se que a resposta é uma exponencial com mudança de amplitude e fase dadas por  $|H(\Omega_0)|$  e  $\angle H(\Omega_0)$ .

Sabe-se que para sistemas contínuos a transformada de Laplace da resposta ao impulso determina a função de transferência do sistema. De forma análoga, através da resposta ao impulso  $h(n)$  obtém-se a respectiva função de transferência do sistema discreto.

A resposta em frequência será caracterizada por

$$H(w) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn}.$$

Seja uma entrada com frequência  $w_0$ , ou seja,  $x(n) = e^{jw_0n}$ . A resposta do sistema pode ser calculada através da convolução, ou seja,

$$y(n) = h(n) * e^{jw_0n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)e^{jw_0(n-k)} = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k} \right] e^{jw_0n} = H(w_0)e^{jw_0n},$$

que está representada na Figura 86.

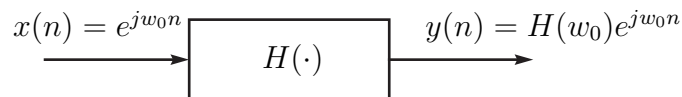


Figura 86: Conceito de resposta em frequência.

Ou ainda conforme esquematizado na Figura 87.

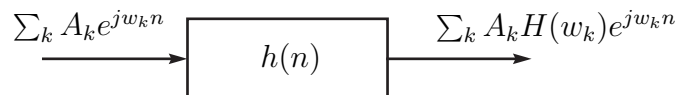


Figura 87: Representação da resposta em frequência.

O fator de amplificação da resposta é relacionado à magnitude (ou ganho) dada por  $|H(w_k)|$  e a defasagem da resposta é relacionada ao ângulo de fase  $|\theta(w)|$ . Estes valores podem ser obtidos através dos diagramas de Bode para a frequência de interesse.

Seja  $x(n) = A \cos(w_0 n + \theta_0)$  a entrada de um sistema linear e invariante cuja resposta ao impulso é  $h(n)$ . A resposta  $y(n)$  em regime será dada por

$$y(n) = A |H(w_0)| \cos(w_0 n + \theta_0 + \angle H(w_0)),$$

como representado na Figura 88.

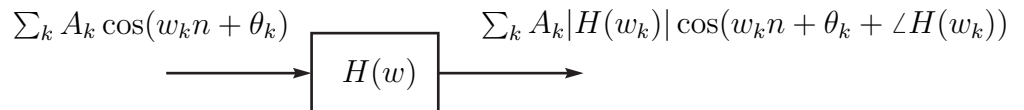


Figura 88: Relação entre entrada cossenoidal e resposta de regime.

Sejam as transformadas da entrada  $X(w) = \mathcal{F}[x(n)]$  e da saída  $Y(w) = \mathcal{F}[y(n)]$ . Logo, através da propriedade da convolução tem-se a relação  $Y(w) = H(w)X(w)$ , que está ilustrada na Figura 89.

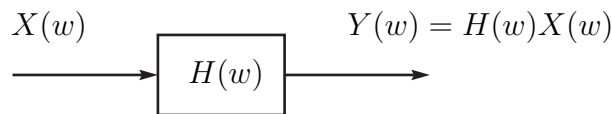


Figura 89: Relação entre entrada e saída em termos da transformada de Fourier.

## 6.9 Teorema da amostragem do ponto de vista frequencial

Para evitar o *aliasing* a frequência de amostragem deve ser adequadamente escolhida.

Seja um sinal analógico com conteúdo em frequência conhecido conforme ilustrado na Figura 90.

Como  $F_{max} = \frac{F_s}{2}$  então  $F_s = 2F_{max}$ . Portanto, se  $F_s \geq 2F_{max}$  não haverá *aliasing*.

o teorema de Shannon (ou teorema da amostragem) estabelece que um sinal analógico contendo componentes até a máxima frequência  $F_{max}$  pode ser completamente representado através de uma amostragem (de mesmo espaçamento) quando a frequência de amostragem for  $F_s \geq 2F_{max}$ .

Algumas considerações sobre o teorema da amostragem são:

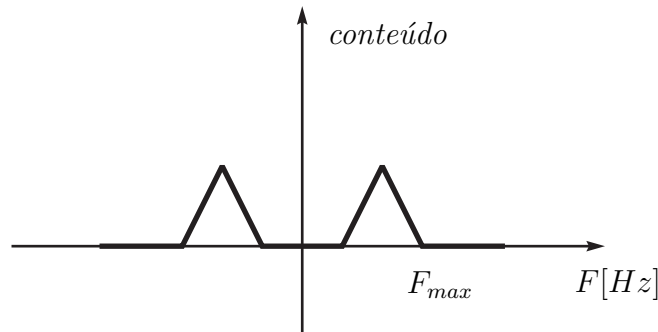


Figura 90: Sinal analógico com conteúdo frequencial conhecido.

- Se o conteúdo em frequência é desconhecido, então define-se uma faixa de frequência de interesse e filtra-se o sinal. Contudo, os filtros não são ideais e podem deixar ainda componentes fora da faixa de interesse. Nestes casos, utiliza-se, por exemplo,  $F_s \geq 3F_{max}$  ou  $F_s \geq 4F_{max}$ .
- $F_{max}$  é chamada frequência de Nyquist e  $2F_{max}$  é a taxa de Nyquist.

Seja  $x_a(t)$  analógico e absolutamente somável. A transformada e anti-transformada de Fourier são dadas por:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad \text{ou} \quad X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt.$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad \text{ou} \quad x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

A amostragem de  $x_a(t)$  com período de amostragem  $T_s$  (intervalo de amostragem) é dada por

$$x(n) = x_a(nT_s).$$

O espectro de  $x(n)$  pode ser obtido através da transformada de Fourier, ou seja,

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \quad \text{ou} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn}.$$

O sinal  $x(n)$  pode ser escrito através da transformada inversa, ou seja,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn} dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df. \quad (6)$$

Sabe-se que  $t = nT_s = \frac{n}{F_s}$  (relação entre  $t$  e  $n$ ). Logo,

$$x(n) = x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF. \quad (7)$$

Comparando (7) com (6) tem-se que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF.$$

Como  $f = \frac{F}{F_s}$  chega-se que

$$\frac{1}{F_s} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF. \quad (8)$$

Pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})F_s}^{(k+\frac{1}{2})F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X_a(F - kF_s) e^{j2\pi n(F-kF_s)/F_s} dF = \\ &= \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} dF, \end{aligned} \quad (9)$$

pois

$$e^{j2\pi n(F-kF_s)/F_s} = e^{j2\pi nF/F_s}$$

devido à periodicidade, e  $X_a(F)$  no intervalo  $(k - \frac{1}{2})F_s$  até  $(k + \frac{1}{2})F_s$  é igual a  $X_a(F - kF_s)$  no intervalo  $-\frac{F_s}{2}$  até  $\frac{F_s}{2}$ .

Comparando (9) com (8) escreve-se:

$$\frac{1}{F_s} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} dF,$$

e consequentemente:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s),$$

ou

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kF_s),$$

que fornece a relação entre o espectro do sinal discreto e o espectro do sinal analógico.

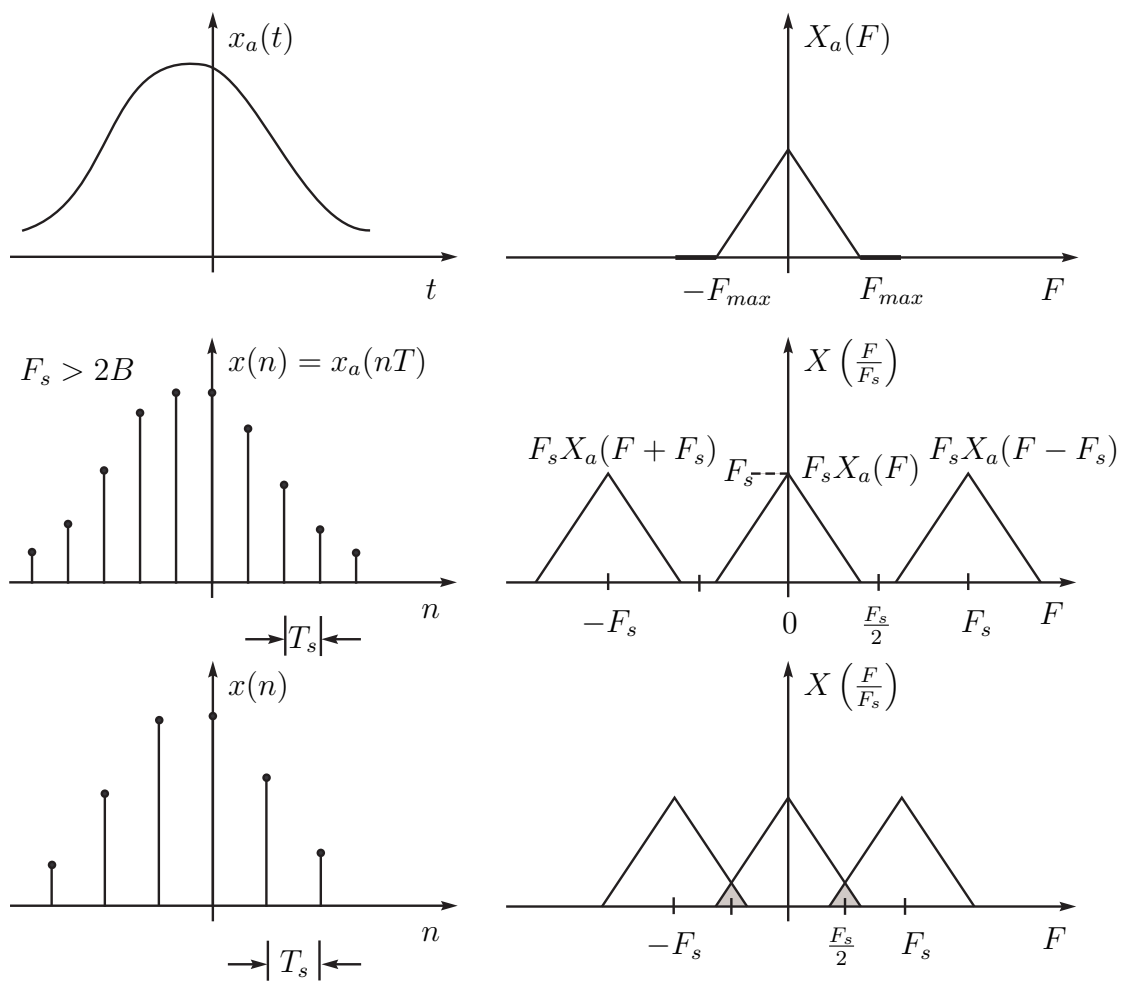


Figura 91: *Aliasing* na frequência.

Nota-se que  $F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$  é a repetição do espectro  $F_s X_a(F)$  com período  $F_s$ .

A Figura 91 mostra o efeito do aliasing na frequência.

Nota-se na Figura 91 a perda da *unicidade* do espectro, ocorrendo *aliasing* e então  $x_a(t)$  não será adequadamente reconstruído a partir de  $x(n)$ .

Seja  $x(n)$  e seu espectro  $X\left(\frac{F}{F_s}\right)$  sem *aliasing*. Logo,

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & \text{para } |F| \leq \frac{F_s}{2}, \\ 0 & \text{para } |F| > \frac{F_s}{2}, \end{cases}$$

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi n F / F_s},$$

$$x_a(t) = \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF.$$

Considerando a inexistência de *aliasing* pode-se escrever

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi F t} dF = \\ &= \frac{1}{F_s} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi n F / F_s} e^{j2\pi F t} dF = \\ &= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} e^{j2\pi F (t - \frac{n}{F_s})} dF = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{T}\right)(t - nT)\right]}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t - nT)}, \end{aligned}$$

que representa a fórmula ideal de reconstrução do sinal contínuo a partir do sinal discreto.

Nota: a função

$$g(t) = \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{T}\right)t\right]}{\left(\frac{\pi}{T}\right)t},$$

com  $T = \frac{1}{F_s} = \frac{1}{2F_{max}}$  representa a função de interpolação ideal.

## 6.10 Relações entre domínio do tempo e da frequência

A Figura 92 apresenta um resumo das principais relações entre os domínios do tempo e da frequência.

Alguns pontos que merecem destaque são:

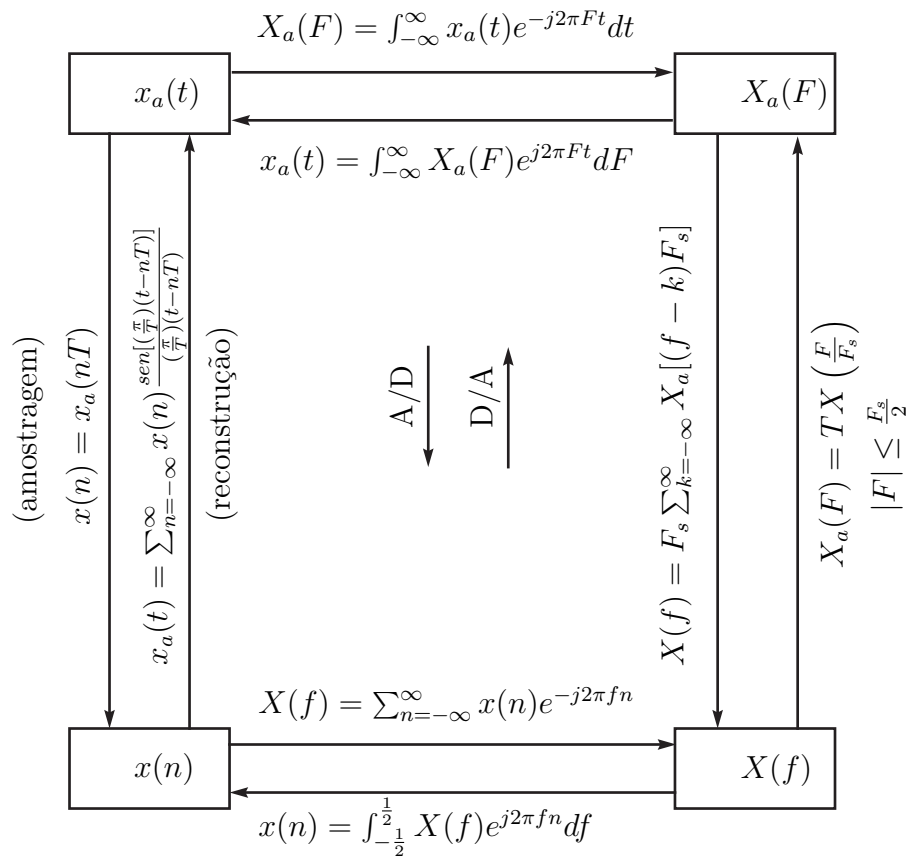


Figura 92: Esquema das relações entre domínio do tempo e da frequência.

- Sinais em tempo contínuo possuem espectros não periódicos (o termo  $e^{j2\pi Ft}$  é contínuo na variável  $t$ ).
- Sinais em tempo discreto possuem espectros periódicos com faixa de frequência  $|w| < \pi$  ou  $|f| < \frac{1}{2}$ .
- Sinais periódicos possuem espectro discreto (série de Fourier).
- Sinais não periódicos com energia finita possuem espectros contínuos ( $X(F)$  ou  $X(w)$  são funções contínuas).

## 7 Transformada Discreta de Fourier

O tratamento de sinais discretos é feito através de um processador digital ou de um computador.

Sabe-se que para sinais discretos não periódicos o espectro  $X(w)$  é contínuo. O interesse está em amostrar  $X(w)$  para representar  $x(n)$  adequadamente.

A transformada de Fourier é dada por

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn},$$

com  $x(n)$  não periódico e de energia finita, e  $X(w)$  periódico.

Amostrando  $X(w)$  com espaçamento  $\delta_w$  como na Figura 93 no período  $0 \leq w \leq 2\pi$  tem-se que

$$\delta_w = \frac{2\pi}{N} \quad e \quad w = k\delta_w = \frac{2\pi k}{N},$$

onde  $N$  é o número de amostras.

Logo, é possível escrever que

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \dots = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \end{aligned}$$



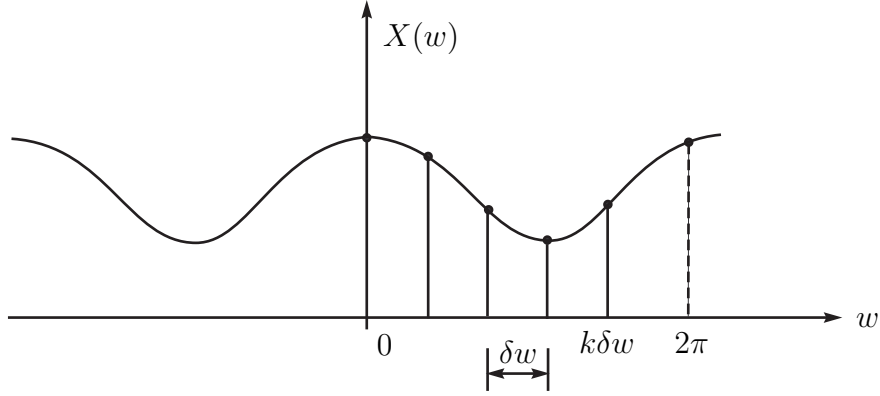


Figura 93: Transformada discreta de Fourier.

onde o somatório foi dividido em infinitos somatórios de  $N$  termos, que permite escrever

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right]}_{x_p(n)} e^{-j2\pi kn/N}, \quad (10)$$

onde

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN),$$

é periódico de período fundamental  $N$ , e foi obtido pela repetição de  $x(n)$  a cada  $N$  amostras.

A sequência  $x_p(n)$  pode ser expandida em série de Fourier, isto é,

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

com

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (11)$$

Comparando (10) e (11) verifica-se que

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

e então,

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Logo, o sinal periódico  $x_p(n)$  pode ser reconstruído através da amostragem de  $X(w)$ . Além disso, o sinal  $x(n)$  pode ser recuperado através de  $x_p(n)$  desde que  $x(n)$  tenha uma duração menor que o período  $N$  de  $x_p(n)$ , conforme ilustrado na Figura 94.

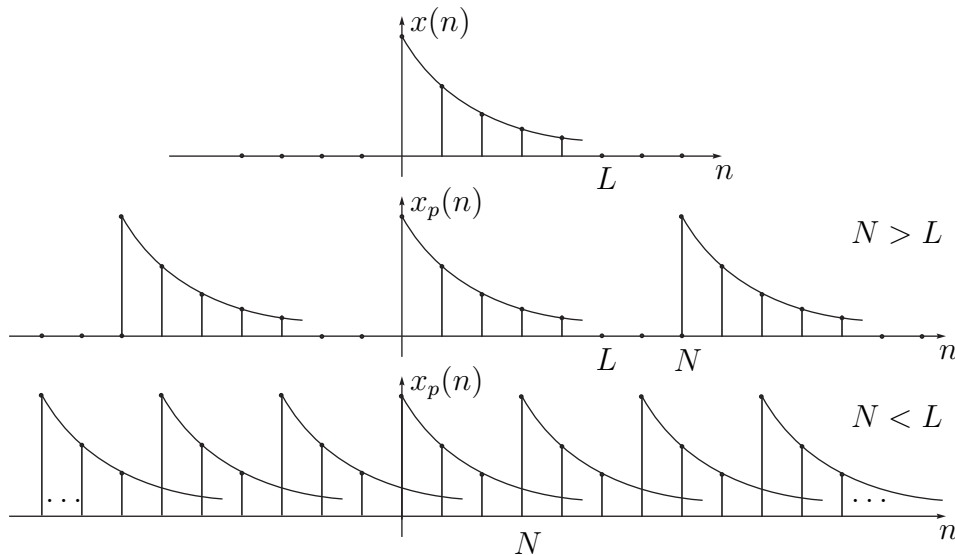


Figura 94: Ilustração do efeito de *aliasing*.

Verifica-se que:

- Se  $N < L$  haverá *aliasing* no domínio do tempo, o que não permite a recuperação de  $x(n)$ .
- Quando  $N > L$  é possível estabelecer que  $x(n) = x_p(n)$ , para  $0 < n < N - 1$ , e neste caso,  $x(n)$  é recuperado a partir de  $x_p(n)$ .

Consequentemente, o espectro de uma sequência não periódica de duração  $L$  pode ser exatamente recuperado através das suas amostras nas frequências  $w_k = \frac{2\pi k}{N}$ , se  $N > L$ . De forma esquemática tem-se que

$$X(w) \xrightarrow{\text{amostragem}} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \longrightarrow x_p(n) \longrightarrow \underbrace{x(n)}_{N > L} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(w).$$

Exemplo: Seja o sinal  $x(n) = a^n u(n)$ . A transformada de Fourier é dada por

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \frac{1}{1 - ae^{-jw}}.$$

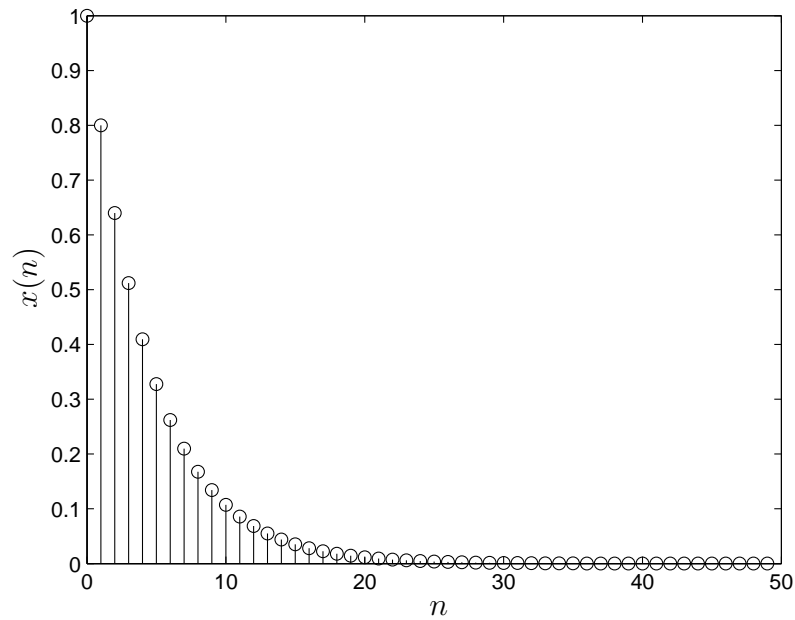


Figura 95: Sequência  $x(n) = a^n u(n)$ , com  $a = 0.8$ .

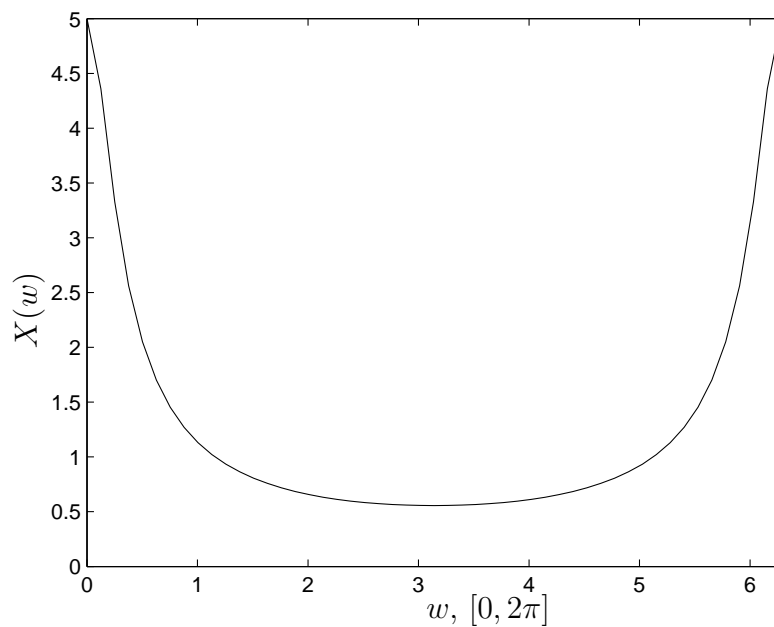


Figura 96:  $X(w)$  para  $x(n) = a^n u(n)$ , com  $a = 0.8$ .

As Figuras 95 e 96 apresentam o sinal  $x(n)$  e a respectiva transformada de Fourier  $X(w)$ .

O espectro amostrado é dado por

$$X(w_k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

e está mostrado na Figura 97 para  $N = 5$ .

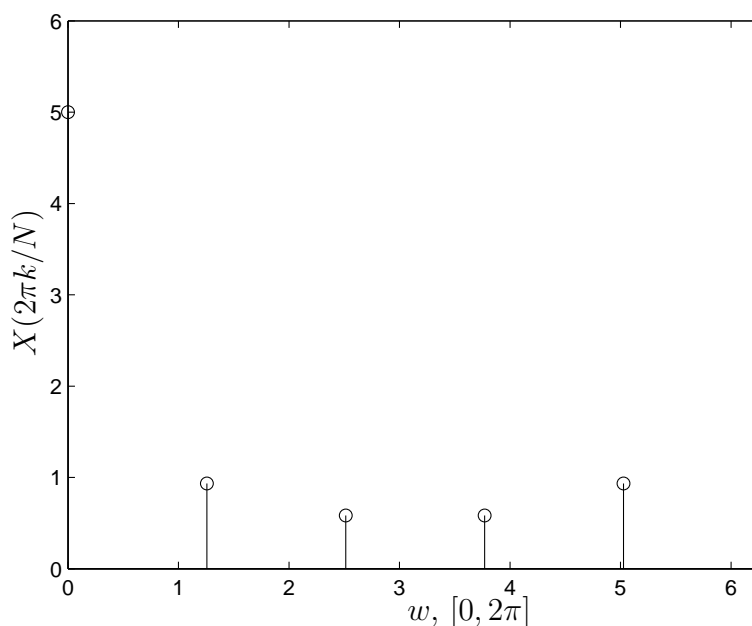


Figura 97:  $X(w)$  amostrado com  $N = 5$ .

A sequência reconstruída  $x_p(n)$  é dada por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{n-lN} = a^n \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} = \frac{a^n}{1 - a^N}, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

e está mostrada na Figura 98.

Note que para  $x_p(n)$  ser igual a  $x(n)$ , o fator  $\frac{1}{1-a^N}$  deve ser unitário. Este fator representa o efeito do *aliasing*. Como  $0 < a < 1$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , o *aliasing* diminui. O sinal reconstruído é normalmente obtido na prática através da equação (12).

Para  $N = 50$ , tem-se o espectro amostrado na Figura 99.

O sinal reconstruído para  $N = 50$  está mostrado na Figura 100, onde se verifica a redução do *aliasing*.

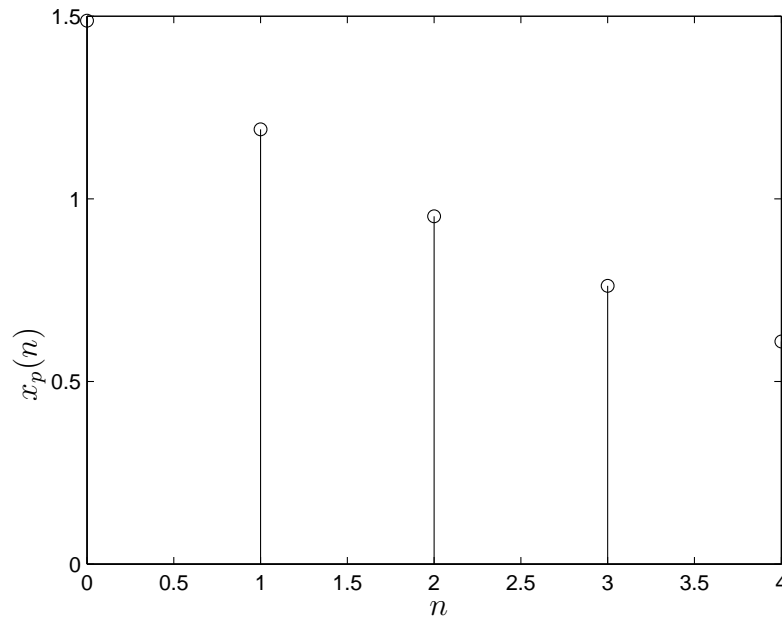


Figura 98: Sinal reconstruído para  $N = 5$ .

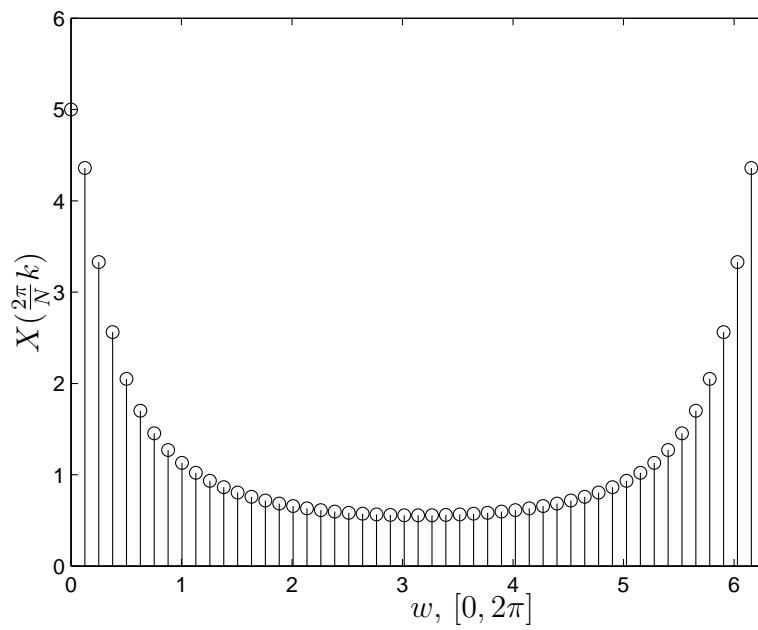
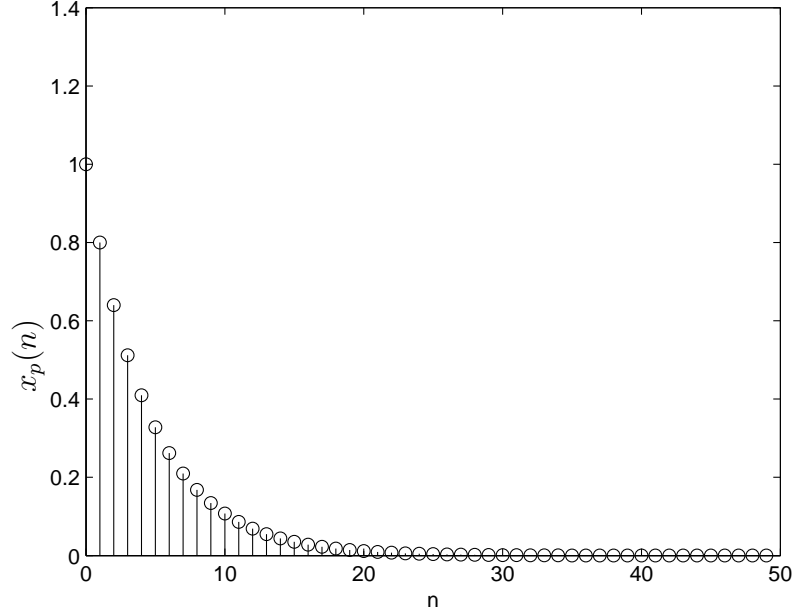


Figura 99:  $X(w)$  amostrado com  $N = 50$ .


 Figura 100: Sinal reconstruído para  $N = 50$ .

Seja

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n < N - 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O espectro reconstruído a partir de  $\hat{x}(n)$  será dado

$$\hat{X}(w) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jwn} = \frac{1}{1 - a^N} \times \frac{1 - a^N e^{-jwN}}{1 - a e^{-jw}},$$

e embora  $X(w) \neq \hat{X}(w)$ , nota-se que

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - a^N} \times \frac{1 - a^N}{(1 - a e^{-j2\pi k/N})} = \frac{1}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Quando  $x(n)$  possui uma duração finita  $L \leq N$ , então  $x_p(n)$  é uma repetição periódica de  $x(n)$ . Para um período tem-se

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & L < n < N - 1. \end{cases}$$

Neste caso,  $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , representa de forma única a sequência  $x(n)$ .

Nota: a inclusão dos zeros de  $L$  até  $N-1$  não fornece informação adicional para o espectro  $X(w)$  de  $x(n)$ , mas melhora a visualização de  $X(w)$ .

Em resumo é possível escrever que:

- Para  $x(n)$  de comprimento  $L$ ,  $x(n) = 0$  para  $n < 0$  e para  $n \geq L$ , a transformada de Fourier é

$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-jwn}, \quad 0 \leq w \leq 2\pi.$$

- A amostragem do espectro é dada por

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad N \geq L,$$

e o espectro amostrado é dado pela DFT (transformada discreta de Fourier)

$$X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

- O sinal recuperado a partir do espectro amostrado é obtido através da IDFT (inversa da transformada discreta de Fourier)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

---

Exemplo: Determinar a DFT para  $N > L$  para a sequência dada por

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}$$

A transformada de Fourier é dada por

$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-jwn} = \frac{1 - e^{-jwL}}{1 - e^{-jw}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{wL}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)} e^{-jw(L-1)/2},$$

e está representada nas Figuras 101 e 102.

A amostragem da transformada de Fourier (DFT) é dada por

$$X(k) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k L}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j2\pi k(L-1)/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

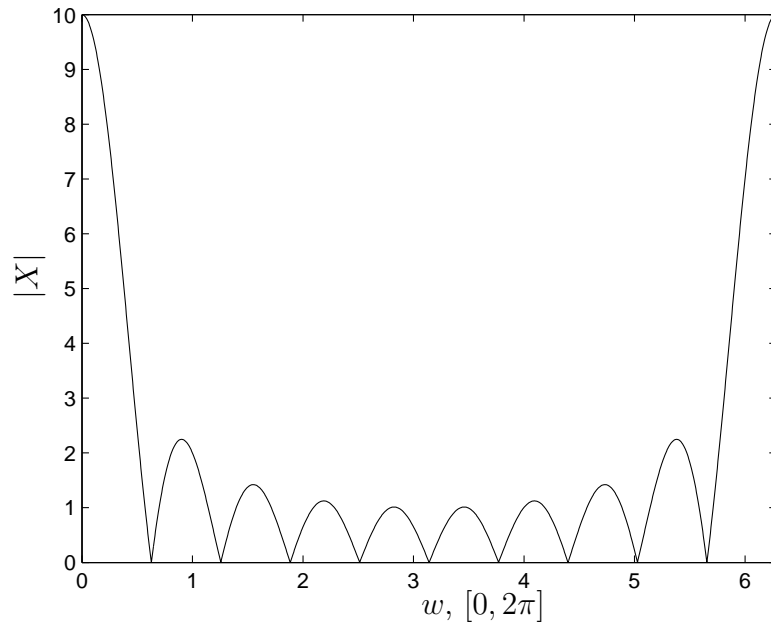


Figura 101: Módulo da transformada de Fourier.

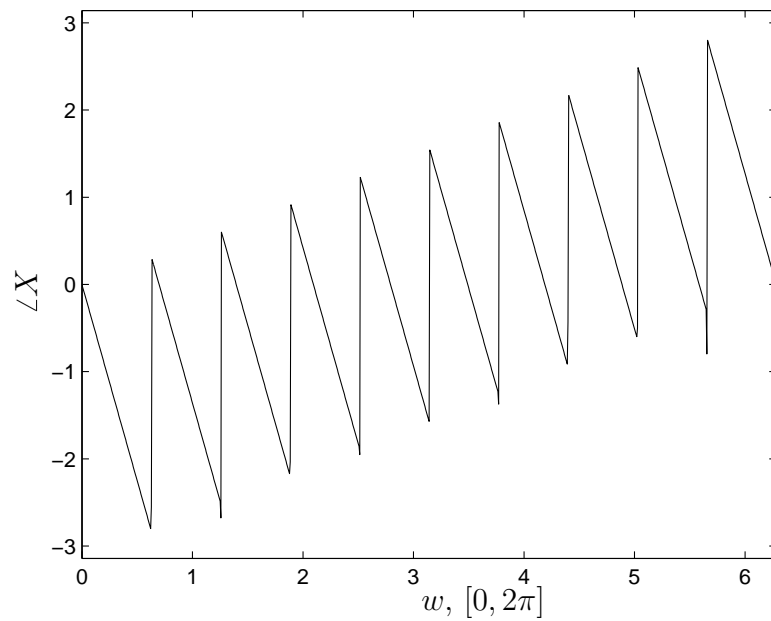


Figura 102: Ângulo de fase da transformada de Fourier.



Para  $N = L$  tem-se

$$X(k) = \begin{cases} L, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \dots, L - 1. \end{cases}$$

Note que  $X(k)$  possui um único valor não nulo, mas que permite recuperar  $x(n)$  através da IDFT. Contudo, incluindo zeros até o comprimento  $N$  uma melhor representação é obtida.

Os resultados em termos de amplitude da DFT para  $L = 10$  e  $N = 50$ , e para  $L = 10$  e  $N = 100$ , são mostrados respectivamente nas Figuras 103 e 104.

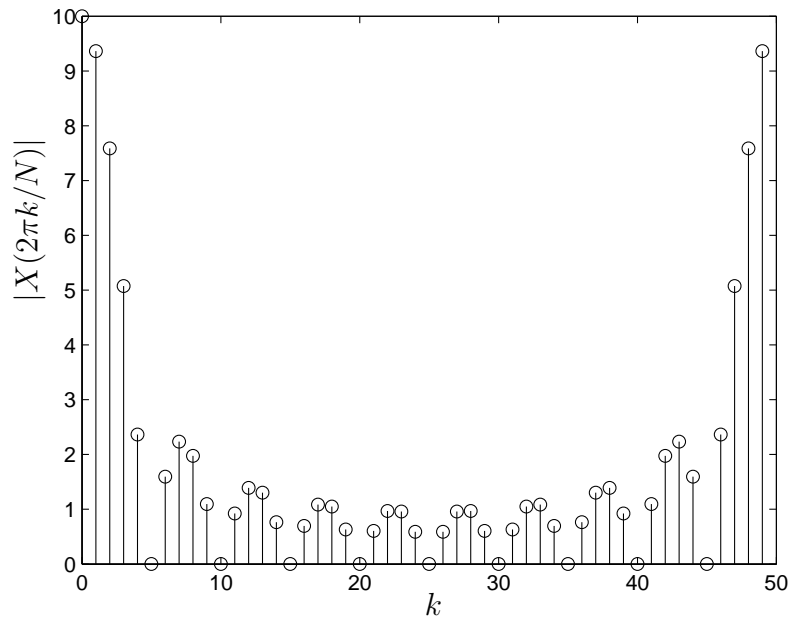


Figura 103: Módulo da transformada de Fourier amostrada,  $L = 10$  e  $N = 50$ .

## 7.1 DFT como uma transformação linear

A transformada discreta de Fourier (DFT) pode ser escrita como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

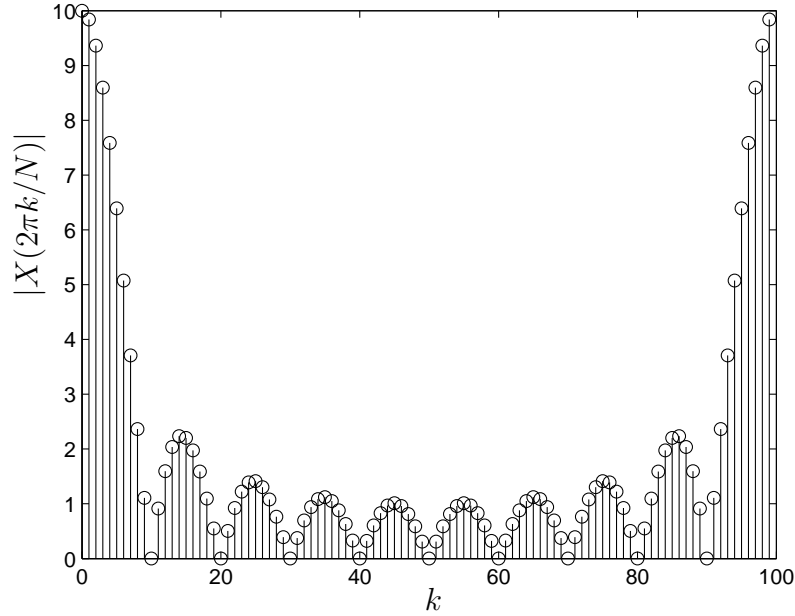


Figura 104: Módulo da transformada de Fourier amostrada,  $L = 10$  e  $N = 100$ .

e o sinal reconstruído pode ser obtido através da respectiva transformada inversa (IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

onde

$$W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

A sequência  $x(n)$  pode ser representada pelo vetor  $\mathbf{x}_N$ , a sequência  $X(k)$  pelo vetor  $\mathbf{X}_N$  e os elementos  $W_N$  pela matriz simétrica  $\mathbf{W}_N$ , ou seja,

$$\mathbf{x}_N = \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

É possível escrever a transformada discreta de Fourier através da seguinte equação matricial

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N, \quad (14)$$

e a transformada inversa como

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N,$$

onde  $\mathbf{W}_N^{-1}$  deve existir ( $\mathbf{W}_N$  não deve ser singular).

A IDFT pode ser escrita de (13) juntamente com (14) como

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N$$

onde  $\mathbf{W}_N^*$  é a matriz complexa conjugada de  $\mathbf{W}_N$ .

Logo, é possível concluir que

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \Rightarrow \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N,$$

onde  $\mathbf{W}_N$  é uma matriz ortogonal, e portanto, invertível.

---

Exemplo: Seja a sequência  $x(n) = \{0 \ 1 \ 2 \ 3\}$ , ou na forma de vetor  $\mathbf{x} = [0 \ 1 \ 2 \ 3]^t$ . Sabendo da periodicidade e simetria pode-se escrever que

$$\begin{aligned} W_N^{k+\frac{N}{2}} &= -W_N^k, \\ \mathbf{W}_4 &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, escreve-se a transformada discreta de Fourier como

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{X}_4 = \begin{Bmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{Bmatrix}.$$

Verifica-se que

$$\mathbf{W}_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

e portanto a transformada inversa permite obter

$$\mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

## 7.2 Algumas propriedades da DFT

As principais propriedades da DFT são apresentadas a seguir. Considere a seguinte notação:

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k).$$

1. Linearidade:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{DFT} aX_1(n) + bX_2(n).$$

2. Periodicidade. Se

$$x(n + N) = x(n),$$

então

$$X(k + N) = X(k).$$

3. Simetria circular. Seja a sequência  $x(n)$  e a sua extensão periódica  $x_p(n)$ . Seja uma defasagem de  $k$  pontos em  $x_p$ , ou seja,  $x_p(n - k)$ , e a sequência  $x'(n)$  caracterizada por um período da sequência defasada, conforme ilustrado na Figura 105 para  $k = 2$ .

A simetria circular pode ser ilustrada conforme na Figura 106.

É possível escrever que

$$x'(n) = x(n - k, \text{módulo } N) = x((n - k))_N,$$

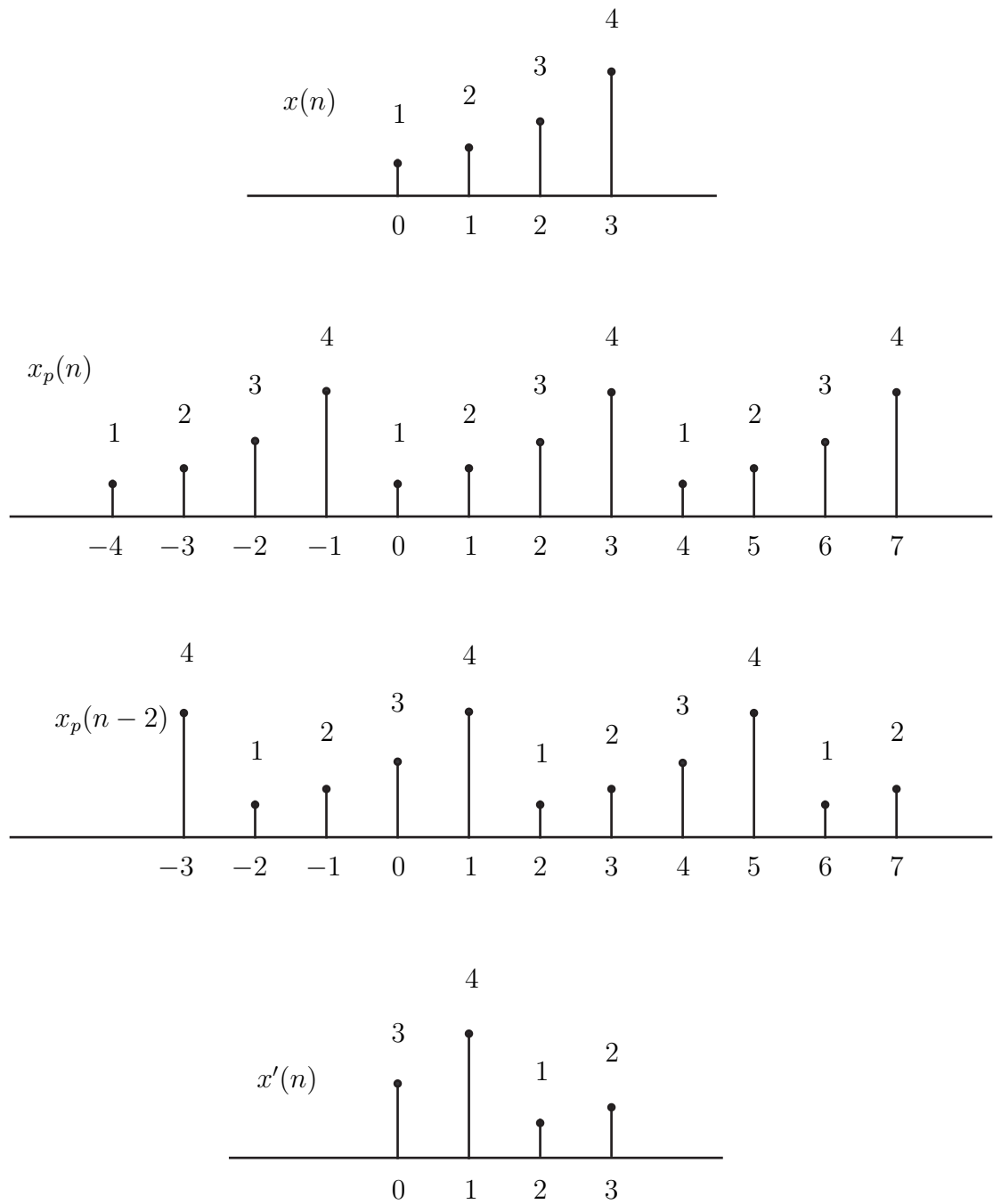


Figura 105: Exemplo da simetria circular.

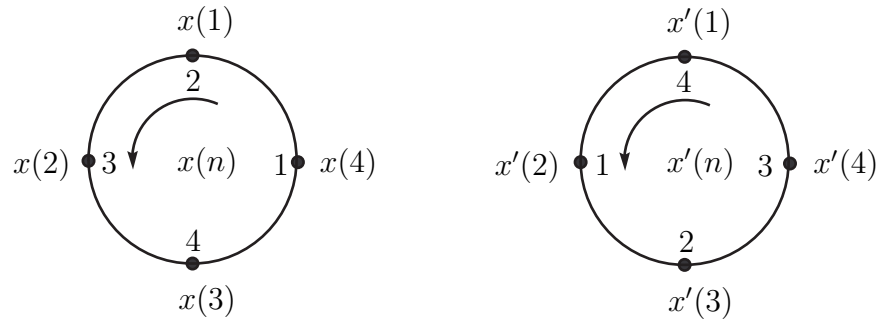


Figura 106: Ilustração da simetria circular.

ou seja, a sequência  $x'(n)$  é a sequência  $x(n)$  defasada de  $k$  unidades e com  $N$  pontos. Para este caso escreve-se que

$$X'(k) = W_N^{km} X(k),$$

caracterizando a propriedade da simetria circular.

4. Convolução circular. Sejam as sequências  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  de comprimento  $N$ . A convolução circular é dada por

$$x_1(n) \odot x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

e neste caso tem-se que

$$x_1(n) \odot x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)X_2(k).$$

5. DFT do produto:

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N}X_1(k) \odot X_2(k).$$

---

Exemplo: Calcular a sequência  $x_3(n)$  resultante da convolução circular entre as sequências  $x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$  e  $x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$$x_1(n) \odot x_2(n) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((n-m))_4 = x_3(n),$$

$$x_3(0) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((0-m))_4 = x_1(0)x_2(0) + x_1(1)x_2(-1) + x_1(2)x_2(-2) + x_1(3)x_2(-3),$$

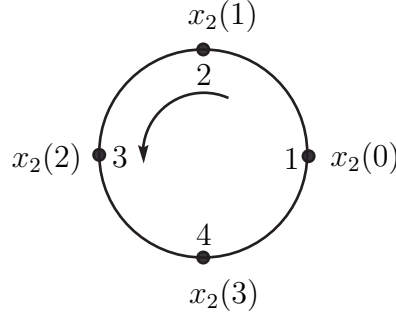


Figura 107: Representação da sequência  $x_2(n)$  de forma circular.

$$x_3(0) = 2 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 14.$$

A Figura 107 auxilia a visualizar os cálculos.

$$x_3(1) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((1-m))_4 = x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) + x_1(2)x_2(-1) + x_1(3)x_2(-2),$$

$$x_3(1) = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 16,$$

$$x_3(2) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((2-m))_4 = x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0) + x_1(3)x_2(-1),$$

$$x_3(2) = 2 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 4 = 14,$$

$$x_3(3) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((3-m))_4 = x_1(0)x_2(3) + x_1(1)x_2(2) + x_1(2)x_2(1) + x_1(3)x_2(0),$$

$$x_3(3) = 2 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 16.$$

Portanto,  $x_3(n) = \{14, 16, 14, 16\}$ .

Este resultado pode ser verificando através da DFT e IDFT, ou seja,

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^3 x_1(n)e^{-j2\pi nk/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$X_1(k) = 2 + 1 \times e^{-j\pi k/2} + 2 \times e^{-j\pi k} + 1 \times e^{-j3\pi k/2},$$

$$X_1(0) = 6, \quad X_1(1) = 0, \quad X_1(2) = 2, \quad X_1(3) = 0,$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^3 x_2(n)e^{-j2\pi nk/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$X_2(k) = 1 + 2 \times e^{-j\pi k/2} + 3 \times e^{-j\pi k} + 4 \times e^{-j3\pi k/2},$$

$$X_2(0) = 10, \quad X_2(1) = -2 + 2j, \quad X_2(2) = -2, \quad X_2(3) = -2 - 2j,$$

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k) = \{60, 0, -4, 0\}.$$

Calculando a IDFT tem-se

$$x_3(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_3(k) e^{j2\pi nk/4}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

$$x_3(n) = \frac{1}{4} [X_3(0) + X_3(1)e^{j2\pi n/4} + X_3(2)e^{j2\pi n/2} + X_3(3)e^{j2\pi 3n/4}] =$$

$$= \frac{1}{4} [60 + 0 - 4 \times e^{j\pi n} + 0] = \frac{1}{4} [60 - 4 \times e^{j\pi n}],$$

$$x_3(0) = 14, \quad x_3(1) = 16, \quad x_3(2) = 14, \quad x_3(3) = 16,$$

como esperado.

---

## 8 Projetos de filtros FIR

Em muitas situações uma característica de fase linear é requerida na região de passagem do filtro para preservar a forma do sinal a ser filtrado nesta região.

Seja, por exemplo, um filtro dado por

$$H(w) = \begin{cases} e^{-jw\alpha}, & \text{para } |w| < w_0, \\ 0, & w_0 < |w| < \pi, \\ \text{periódico}, & \text{demais valores de } w. \end{cases}$$

Pode ser estabelecida a relação da Figura 108.

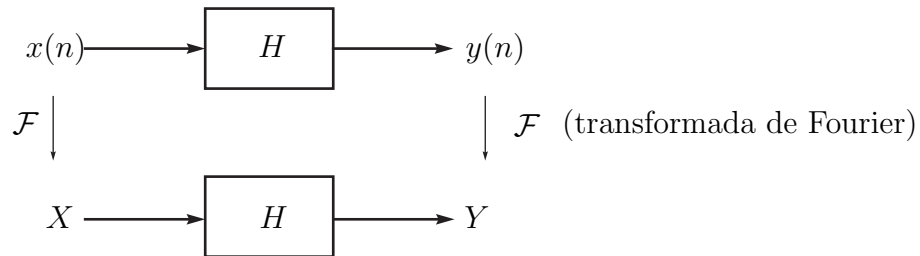


Figura 108: Relação em termos da transformada de Fourier.



É possível escrever que

$$Y(w) = X(w)H(w) = X(w)e^{-jw\alpha},$$

e através da transformada inversa de Fourier tem-se  $y(n) = x(n - \alpha)$ .

Verifica-se que:

- a fase linear não altera a forma do sinal original, apenas ocorre uma translação de  $\alpha$ .
- se a fase não fosse linear, o sinal de saída seria uma versão distorcida de  $x(n)$ .

Teorema: Se  $h(n)$  representa a resposta ao impulso, então uma condição necessária e suficiente para que se tenha fase linear é que  $h(n)$  tenha duração finita  $N$  e seja simétrica em torno do seu ponto central como ilustrado na Figura 109.

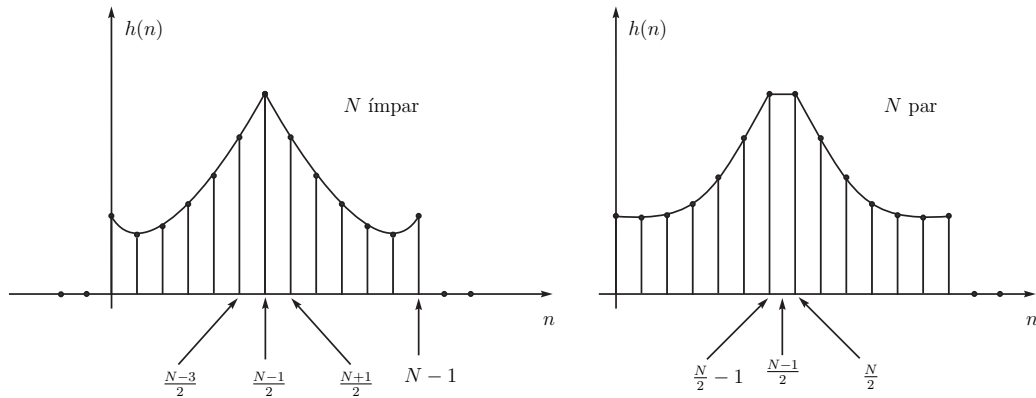


Figura 109: Simetria nos casos de  $N$  ímpar e de  $N$  par.

Para um filtro causal cuja resposta começa em zero e termina em  $N - 1$ , deve-se satisfazer que

$$h(n) = h(N - 1 - n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Se  $h(n)$  satisfaz o teorema, então  $H(w)$  terá fase linear. Seja o caso de  $N$  par. Então,

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-jwn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-jwn},$$

Seja  $m = N - 1 - n$ , então,

$$\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-jwn} = \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-1-m)e^{-jw(N-1-m)}.$$

Mas  $h(N-1-m) = h(m)$ , e então,

$$\begin{aligned} H(w) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-jwn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(m)e^{-jw(N-1-m)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \exp \left[ -j \frac{w(N-1)}{2} \right] \times \left\{ \exp \left[ -j \left( wn - \frac{w(N-1)}{2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[ -j \left( w(N-1-n) - \frac{w(N-1)}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \exp \left\{ -j \left[ \frac{w(N-1)}{2} \right] \right\} \cos \left\{ w \left[ \frac{n - (N-1)}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$H(w) = \underbrace{e^{\frac{-jw(N-1)}{2}}}_{\text{fase linear}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left\{ w \left[ \frac{n - (N-1)}{2} \right] \right\}}_{\text{amplitude}},$$

para  $N$  par.

De forma análoga, para  $N$  ímpar, tem-se

$$H(w) = e^{\frac{-jw(N-1)}{2}} \left\{ h \left( \frac{N-1}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\frac{(N-3)}{2}} 2h(n) \cos \left[ w \left( \frac{n - (N-1)}{2} \right) \right] \right\}$$

Como conclusão tem-se que a fase linear pode ser facilmente obtida através da imposição de que a resposta ao impulso seja simétrica. Isso é explorado no projeto de filtros através do uso das chamadas janelas.

## 8.1 Projeto de filtros FIR usando janelas

A forma mais fácil de obter um filtro FIR é truncar a resposta ao impulso de um filtro IIR. Se  $h_d(n)$  é a resposta ao impulso de um filtro IIR, então um filtro FIR com resposta ao impulso pode ser obtido como

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & N_1 \leq n \leq N_2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (15)$$

A resposta  $h(n)$  pode ser vista como

$$h(n) = h_d(n)w(n),$$

onde  $w(n)$  é uma função janela.

No caso de (15),  $w(n)$  é uma janela retangular, ou seja,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & N_1 \leq n \leq N_2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sejam os seguintes pares de transformada de Fourier:

$$h(n) \longleftrightarrow H(w),$$

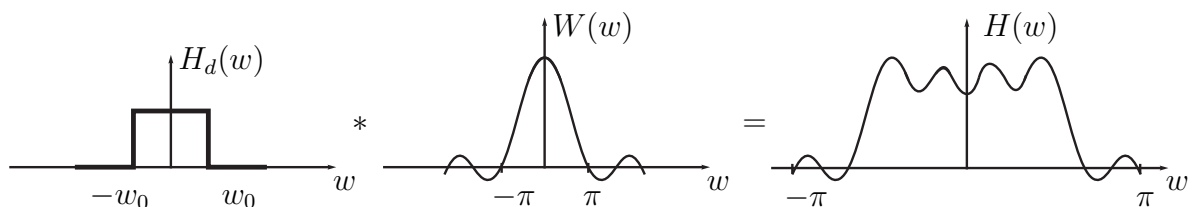
$$h_d(n) \longleftrightarrow H_d(w),$$

$$w(n) \longleftrightarrow W(w).$$

É possível escrever que

$$H(w) = H_d(w) * W(w).$$

Seja, por exemplo,  $H_d(w)$  um filtro passa-baixa ideal com frequência de corte  $w_0$  e  $w(n)$  uma janela retangular posicionada na origem. Então,  $H(w)$  será do tipo



Verifica-se que:

- A convolução causa uma *distorção* no filtro;
- Quanto mais largo o lóbulo de  $W$ , ocorre mais espalhamento;
- Quanto mais estreito o lóbulo de  $W$  (maior valor de  $N$ ),  $|H(\cdot)|$  se aproxima mais de  $|H_d(\cdot)|$ ;
- Existe um compromisso: quando  $N$  aumenta, a distorção diminui; e quando  $N$  diminui a implementação torna-se viável.

As janelas usuais, que procuram garantir boas características ao filtro, são apresentadas a seguir.

- A janela retangular é dada por

$$W_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{demais.} \end{cases}$$

As Figuras 110 e 111 apresentam a janela retangular no tempo e na frequência respectivamente.

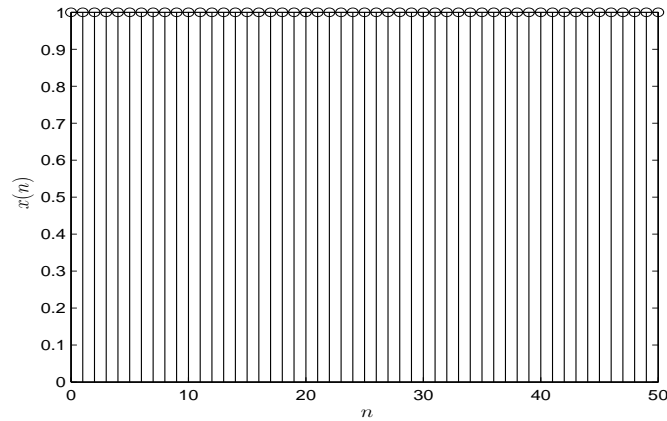


Figura 110: Janela retangular no domínio do tempo.

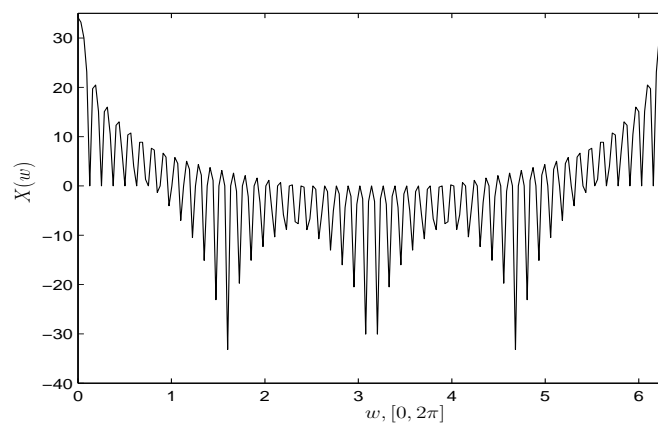


Figura 111: Janela retangular no domínio da frequência.

- A janela de Barlett é dada por

$$W_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{(N-1)}, & 0 \leq n \leq \frac{(N-1)}{2}, \\ \frac{2-2n}{(N-1)}, & \frac{(N-1)}{2} \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{de mais.} \end{cases}$$

As Figuras 112 e 113 apresentam a janela de Barlett no tempo e na frequência respectivamente.

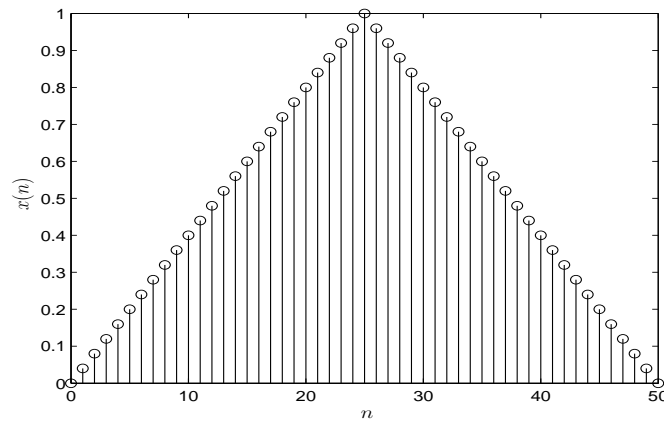


Figura 112: Janela de Barlett no domínio do tempo.

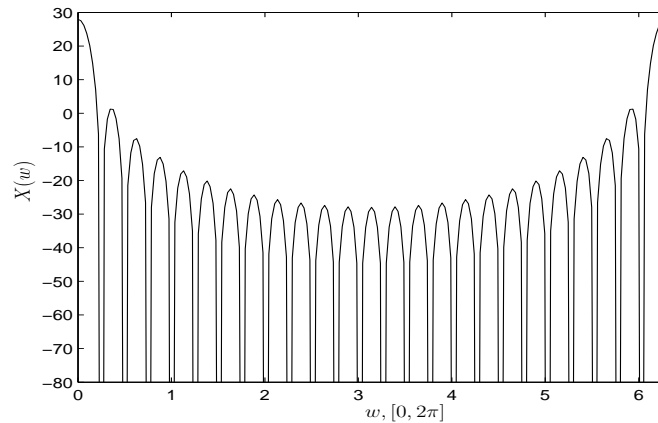


Figura 113: Janela de Barlett no domínio da frequência.

- A janela de Hanning é dada por

$$W_{Han}(n) = \begin{cases} \frac{(1-\cos[\frac{2\pi n}{(N-1)}])}{2}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{de mais.} \end{cases}$$

As Figuras 114 e 115 apresentam a janela de Hanning no tempo e na frequência respectivamente.

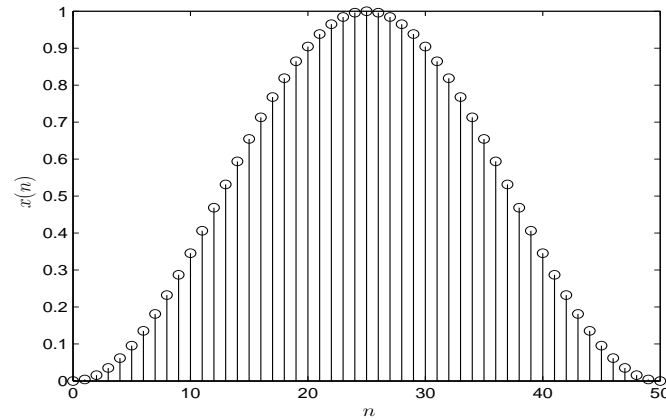


Figura 114: Janela de Hanning no domínio do tempo.

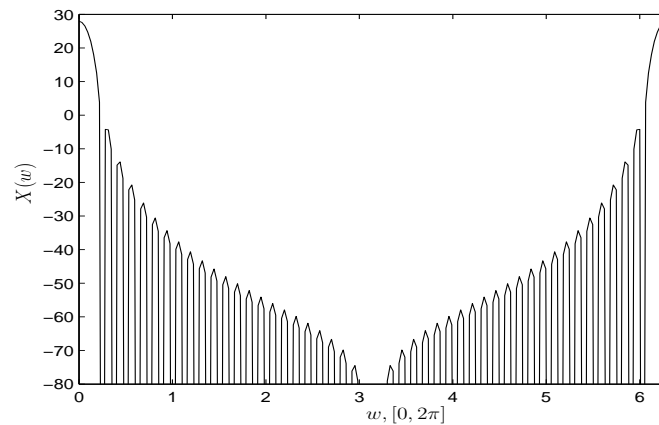


Figura 115: Janela de Hanning no domínio da frequência.

- A janela de Hamming é dada por

$$W_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos \left[ \frac{2\pi n}{(N-1)} \right], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{demais.} \end{cases}$$

As Figuras 116 e 117 apresentam a janela de Hamming no tempo e na frequência respectivamente.

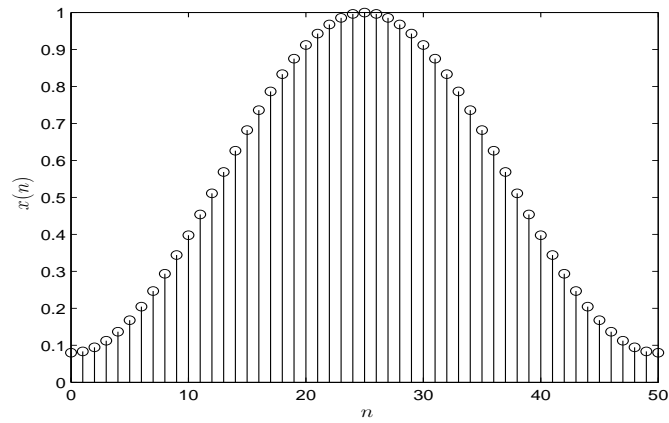


Figura 116: Janela de Hamming no domínio do tempo.

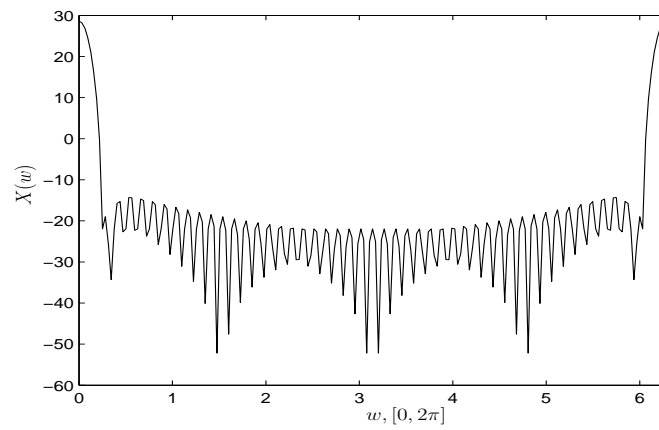


Figura 117: Janela de Hamming no domínio da frequência.

- A janela de Blackman é dada por

$$W_{Bl}(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \left[ \frac{2\pi n}{(N-1)} \right] + 0.08 \cos \left[ \frac{4\pi n}{(N-1)} \right], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{demais.} \end{cases}$$

As Figura 118 e 119 apresentam a janela de Blackman no tempo e na frequência respectivamente.

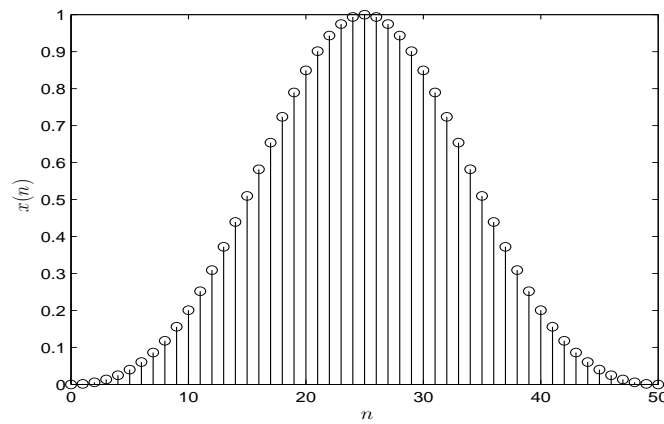


Figura 118: Janela de Blackman no domínio do tempo.

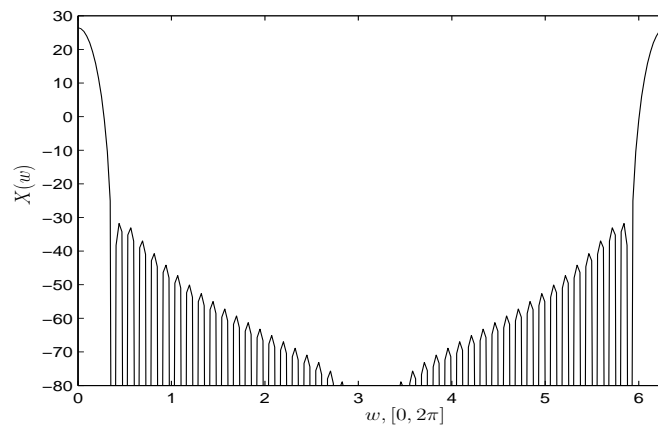


Figura 119: Janela de Blackman no domínio da frequência.



## 8.2 Procedimento de projeto

Um filtro passa-baixa ideal com fase linear (inclinação  $-\alpha$ ) e frequência de corte  $w_c$  pode ser caracterizado por:

$$H_d(w) = \begin{cases} e^{-jw\alpha}, & |w| \leq w_c, \\ 0, & w_c < |w| < \pi. \end{cases}$$

A resposta ao impulso  $h_d(n)$  do filtro é dada por

$$h_d(n) = \mathcal{F}^{-1}[H_d] = \frac{\text{sen}[w_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)}.$$

Um filtro FIR causal com resposta ao impulso  $h(n)$  pode ser obtido através de

$$h(n) = h_d(n)w(n),$$

onde  $w(n)$  é uma janela, começando em zero e terminando em  $N - 1$ . Logo,

$$h(n) = \frac{\text{sen}[w_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)}w(n).$$

Para  $h(n)$  ter fase linear,  $\alpha$  deve ser escolhido para que  $h(n)$  seja simétrico. O termo

$$\frac{\text{sen}[w_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)},$$

é simétrico em torno de  $\alpha$ , e  $w(n)$  é simétrico em torno de  $\frac{(N-1)}{2}$ . Portanto, para assegurar a simetria do produto deve-se ter que

$$\alpha = \frac{(N - 1)}{2}.$$

---

Exemplo: Seja um filtro com base na janela de Hamming com  $w_c = \frac{\pi}{2}$ .

As Figuras 120 e 121 apresentam a resposta em frequência da janela e do filtro para  $N = 51$ .

As Figuras 122 e 123 apresentam a resposta em frequência da janela e do filtro para  $N = 101$ .

As Figuras 124 e 125 apresentam a resposta em frequência da janela e do filtro para  $N = 201$ .

Algumas constatações são:

- O ganho na região de rejeição é relativamente insensível ao tamanho da janela;

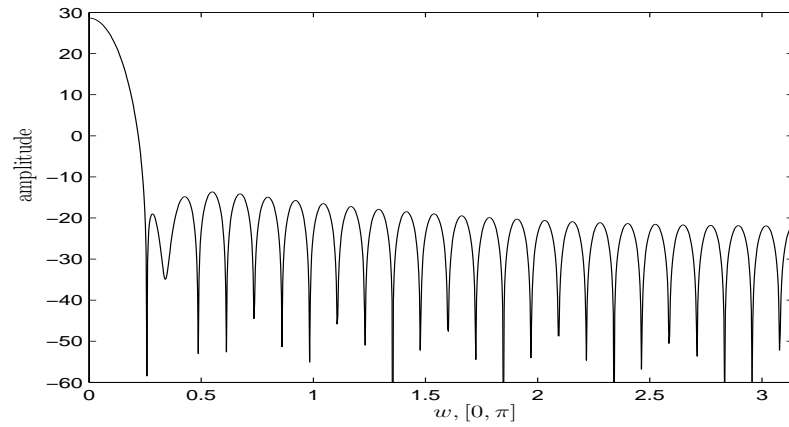


Figura 120: Janela de Hamming para  $N = 51$ .

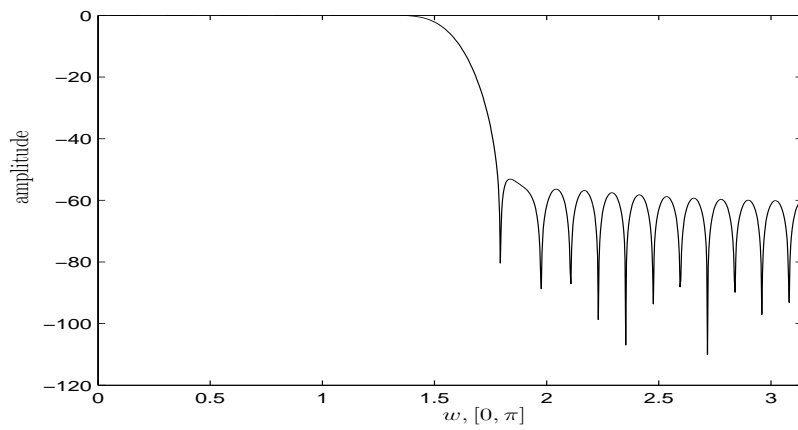


Figura 121: Resposta em frequência do filtro para  $N = 51$ .

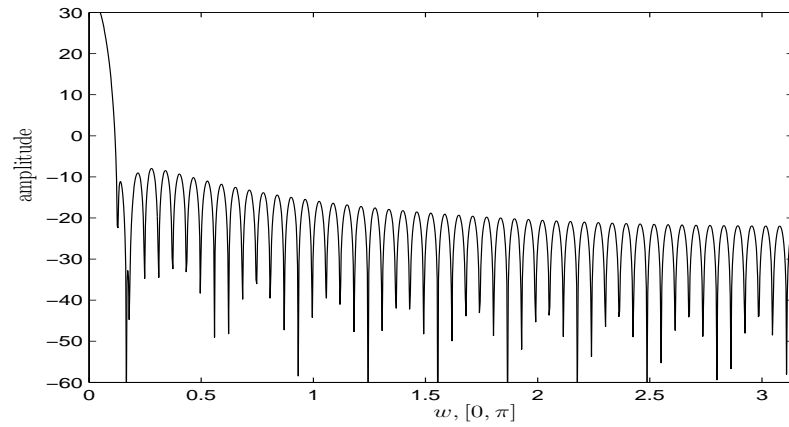


Figura 122: Janela de Hamming para  $N = 101$ .

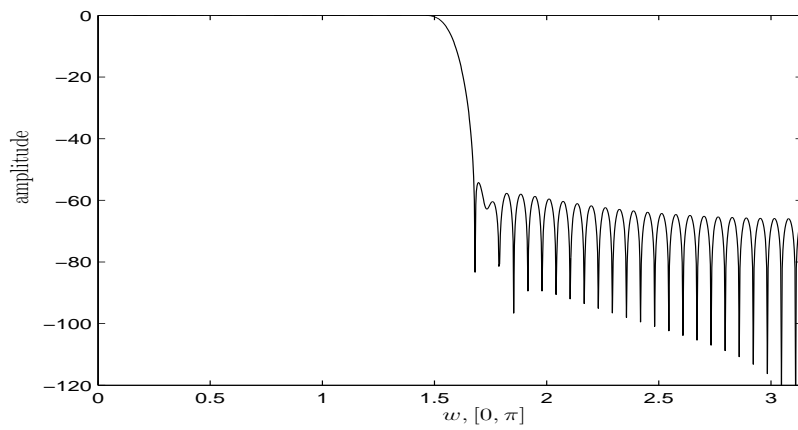


Figura 123: Resposta em frequência do filtro para  $N = 101$ .

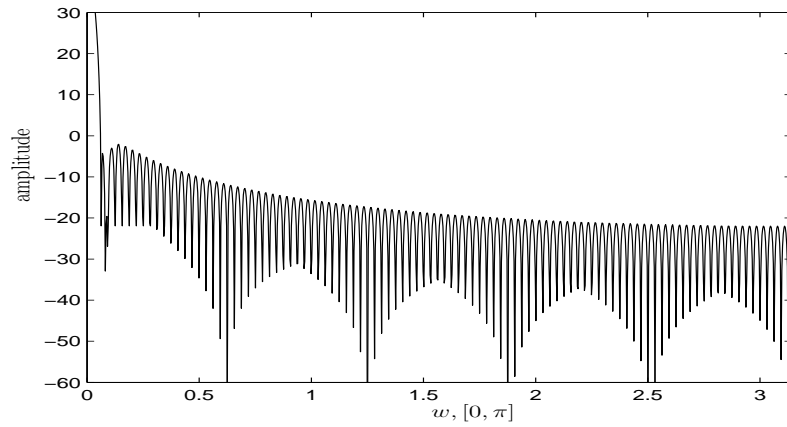


Figura 124: Janela de Hamming para  $N = 101$ .

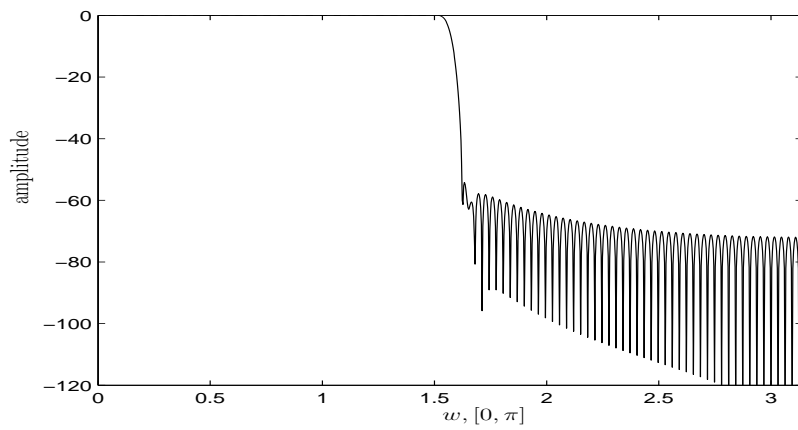


Figura 125: Resposta em frequência do filtro para  $N = 101$ .

- A largura da região de transição do filtro passa-baixa é aproximadamente igual à largura do lóbulo principal da janela usada.

A Tabela 8.2 apresenta a largura de transição e atenuação de rejeição para as principais janelas de forma aproximada.

Tabela 4: Largura e atenuação das principais janelas

Janela	Largura da transição ( $w_l$ )	Atenuação na rejeição ( $k_2$ )
Retangular	$4\pi/N$	$-21 \text{ dB}$
Barlett	$8\pi/N$	$-25 \text{ dB}$
Hann	$8\pi/N$	$-44 \text{ dB}$
Hamming	$8\pi/N$	$-53 \text{ dB}$
Blackman	$12\pi/N$	$-74 \text{ dB}$

A metodologia de projeto de filtros com base em janelas é brevemente descrita a seguir.

1. Estabelecer os requisitos  $(w_1, k_1)$  e  $(w_2, k_2)$  do filtro.
2. Escolher o tipo de janela em função de  $k_2$  na tabela.
3. Escolher o número de pontos da janela para satisfazer a largura ( $w_t$ ) da região de transição, ou seja,

$$w_t = w_2 - w_1 \geq w_l = k \frac{2\pi}{N},$$

$$N \geq \frac{k2\pi}{(w_2 - w_1)}.$$

4. Escolher  $w_c$  e  $\alpha$  associados à resposta impulsiva, ou seja,

$$w_c = w_1, \quad \alpha = \frac{(N-1)}{2},$$

$$h(n) = \frac{\text{sen} \left[ w_c \left( n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right]}{\pi \left[ n - \frac{(N-1)}{2} \right]} w(n).$$

5. Verificar a resposta em frequência do filtro em termos do atendimento os requisitos, ou seja,

$$H(w) = e^{-jw \frac{(N-1)}{2}} \left\{ h \left( \frac{(N-1)}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\frac{(N-3)}{2}} 2h(n) \cos \left[ w \left( n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right] \right\}.$$

6. Se o requisito  $(w_1, k_1)$  não está satisfeito, ajuste  $w_c$  e retorne ao passo 5 com a nova equação para  $h(n)$ .
7. Se os requisitos foram satisfeitos, verifique se  $N$  pode ser reduzido. Se  $N$  puder ser reduzido, verifique novamente o projeto (retornar ao passo 5).

Notas:

- Se o filtro será usado no esquema  $A/D - H(z) - D/A$ , as especificações analógicas equivalentes devem ser convertidas para especificações digitais usando

$$w_i = \Omega_i T,$$

onde  $T$  é o período de amostragem.

- A resposta em frequência pode ser obtida através do uso adequado da DTFT ou DFT.

---

Exemplo: Projetar um filtro passa-baixa a ser usado em uma estrutura  $A/D - H(z) - D/A$  que tenha as seguintes características:  $-3dB$  de atenuação a  $30\pi rad/s$  e  $-50dB$  a  $45\pi rad/s$ . O filtro deve apresentar uma fase linear e uma taxa de amostragem de  $100 amostras/s$  será usada.

Os requisitos equivalentes são dados por

$$w_c = \Omega_c T = 30\pi(0.01) = 0.3\pi = 0.94, \quad k_c \geq -3dB,$$

$$w_r = \Omega_r T = 45\pi(0.01) = 0.45\pi = 1.41, \quad k_r \leq -50dB.$$

Da tabela, as janelas candidatas são: Hamming ou Blackman. Adota-se a janela de Hamming por ter menor região de transição e menor  $N$ .

O número de pontos de pontos é determinado por

$$N \geq \frac{k2\pi}{(w_2 - w_1)} = \frac{8\pi}{(0.45\pi - 0.30\pi)} = 53.3,$$

e o próximo inteiro ímpar é selecionado, ou seja,  $N = 55$ .

Determina-se  $w_c$ ,  $\alpha$  e  $h(n)$ :

$$w_c = w_1 = 0.3\pi, \quad \alpha = \frac{(N - 1)}{2} = 27,$$

e então,

$$h(n) = \frac{\text{sen}[0.3\pi(n - 27)]}{\pi(n - 27)} \times \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{54}\right) \right],$$

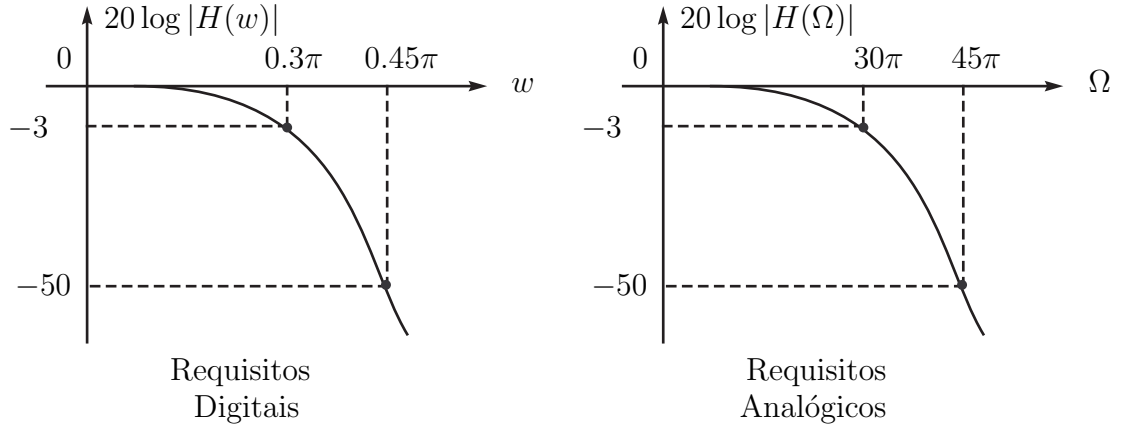


Figura 126: Requisitos digitais e analógicos do exemplo.

para  $0 \leq n \leq 54$ .

A Figura 126 apresenta os requisitos digitais e analógicos correspondentes para o filtro.

Verifica-se a resposta em frequência, ou seja,

$$H(w) = e^{-jw \frac{(N-1)}{2}} \left\{ h \left( \frac{(N-1)}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\frac{(N-3)}{2}} 2h(n) \cos \left[ w \left( \frac{n - (N-1)}{2} \right) \right] \right\},$$

cujo gráfico do módulo é apresentado na Figura 127. Observa-se que a atenuação de  $-3dB$  foi obtida para uma frequência de  $\approx 0.89$ , e que a atenuação de  $-50dB$  ocorre para  $\approx 1.13$ .

O projeto pode ser refinado ajustando-se  $w_c$  e  $N$ . Adotando  $w_c = 0.33\pi = 1.04$  e diminuindo para  $N = 29$  tem-se que

$$h(n) = \frac{\text{sen}[0.33\pi(n-14)]}{\pi(n-14)} \times \left[ 0.54 - 0.46 \cos \left( \frac{2\pi n}{28} \right) \right],$$

para  $0 \leq n \leq 28$ .

Retorna-se para a resposta em frequência do filtro, cujo resultado está mostrado na Figura 128 e que satisfaz os requisitos do projeto, ou seja, para atenuação de  $-3dB$  tem-se uma frequência de  $\approx 0.95$ , e para uma atenuação de  $-50dB$  tem-se uma frequência de  $\approx 1.41$ .

A saída correspondente é dada pela convolução

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k),$$

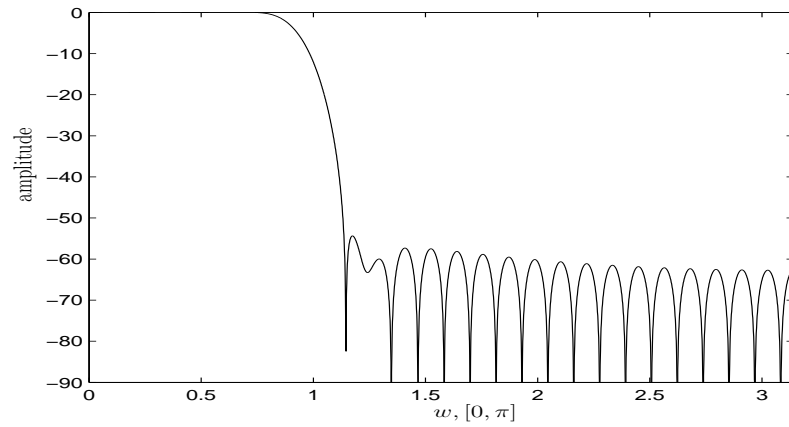


Figura 127: Resposta em frequência do filtro para  $N = 55$ .

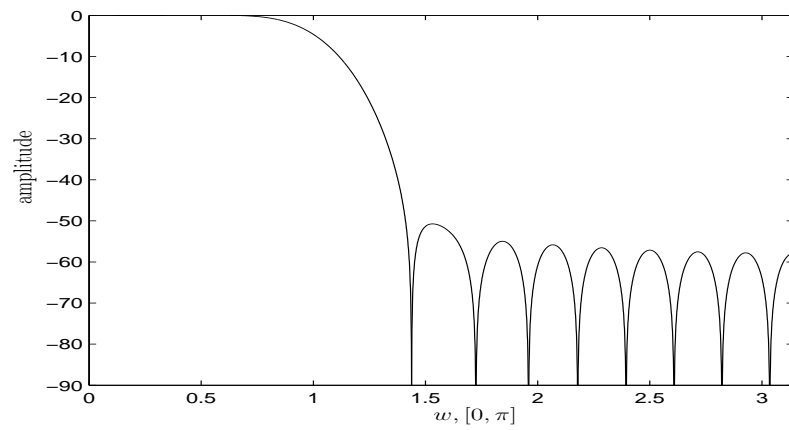


Figura 128: Resposta em frequência do filtro para  $N = 29$ .



ou ainda,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k).$$

Notas:

- A propriedade da simetria de  $h(n)$  pode ser usada na implementação computacional do filtro para torná-la mais eficiente.
- A resposta em frequência pode ser determinada diretamente com o emprego adequado da DTFT ou DFT.

## 9 Transformada $\mathcal{Z}$

A transformada  $\mathcal{Z}$  bilateral de uma sequência  $x(n)$  é

$$X(z) := \mathcal{Z}[x(n)] := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},$$

onde  $z$  é uma variável complexa.

O conjunto dos valores de  $z$  para os quais  $X(z)$  converge (é finita) é chamado de Região de Convergência ( $RC$ ) e é dado por

$$r_0 \leq |z| \leq R_0.$$

---

Exemplo: Determinar a transformada  $\mathcal{Z}$  para a sequência  $x(n) = \{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\}$ . O número sublinhado refere-se ao valor para  $n = 0$ .

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-2}^3 x(n)z^{-n} = x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} = \\ &= z^2 + 2z + 5z^0 + 7z^{-1} + 0 \times z^{-2} + z^{-3} = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}. \end{aligned}$$

A região de convergência ( $RC$ ), neste caso, é todo o plano complexo exceto  $z = 0$  e  $z = \pm\infty$ .

---

Exemplo: Determinar a transformada  $\mathcal{Z}$  para  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  com  $u(n)$  um degrau unitário.

$$x(n) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots \right\},$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 1z^0 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n. \end{aligned}$$

Nota: usou-se que

$$1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{1 - A},$$

se  $|A| < 1$  (soma de PG).

Logo, para  $|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1$ , ou  $|z| > \frac{1}{2}$ ,  $X(z)$  converge para  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ , e a região de convergência é  $|z| > \frac{1}{2}$ .

---

Exemplo: Transformada  $\mathcal{Z}$  para a equação do integrador trapezoidal, ou seja,

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} [x(n) + x(n-1)].$$

Multiplicando-se por  $z^{-n}$  tem-se

$$y(n)z^{-n} = y(n-1)z^{-n} + \frac{T}{2} [x(n)z^{-n} + x(n-1)z^{-n}],$$

e fazendo o somatório de todos os termos tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-1)z^{-n} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-1)z^{-n} \right], \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} &= z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-1)z^{-(n-1)} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-1)z^{-(n-1)} \right]. \end{aligned}$$

Seja  $j = n - 1$ . Logo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = z^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(j)z^{-j} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} + z^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)z^{-j} \right],$$

e usando a definição de transformada  $\mathcal{Z}$  escreve-se que

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2} [X(z) + z^{-1}X(z)],$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2} (1 + z^{-1}) X(z),$$

que corresponde à transformada  $\mathcal{Z}$  da equação a diferenças.

A relação entre a entrada e a saída pode ser escrita em termos de uma função de transferência discreta  $H(z)$ , ou seja,

$$Y(z) = \underbrace{\frac{T}{2} \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)}_{H(z)} X(z),$$

e uma representação usual está mostrada na Figura 129.

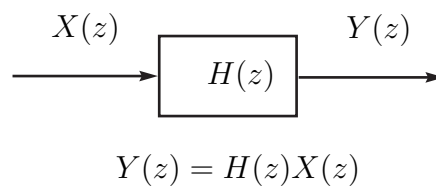


Figura 129: Representação de uma função de transferência.

---

## 9.1 Transformada $\mathcal{Z}$ de entradas padronizadas

1. Degrau unitário. O degraú unitário é definido como

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0, \\ 0 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

A transformada  $\mathcal{Z}$  do degraú é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[u(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} = \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots + 1z^{-n} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a fórmula da soma de uma PG de razão  $z^{-1}$ .

Portanto,

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$$

cujá região de convergência é  $|z^{-1}| < 1$ .

2. Rampa de inclinação  $a$ . Uma rampa é definida como

$$r(n) = \begin{cases} an & \text{se } n \geq 0, \\ 0 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

A transformada  $\mathcal{Z}$  será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[r(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} anz^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} anz^{-n} = 0z^0 + az^{-1} + 2az^{-2} + \dots = \\ &= z^{-1}a[1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots] = \\ &= az^{-1}[(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) + z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) + z^{-2}(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) + \dots] = \\ &= az^{-1}[(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots)\underbrace{(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots)}_{\frac{1}{1-z^{-1}}}] = \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} = \mathcal{Z}[r(n)] &= az^{-1} \left[ \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \right] = az^{-1} \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \\ &= \frac{az}{z^2-2z+1} = \frac{az}{(z-1)^2}, \end{aligned}$$

cuja região de convergência é  $|z^{-1}| < 1$ .

3. Impulso unitário. A transformada  $\mathcal{Z}$  do impulso unitário é dada por

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0)z^{-0} = 1 \times 1 = 1.$$

4. Exponencial. A exponencial discreta é dada por

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & \text{se } n \geq 0, \\ 0 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

A transformada  $\mathcal{Z}$  é dada por

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n.$$

Se  $|\alpha z^{-1}| < 1$ , ou  $|z| > |\alpha|$ , esta série converge para  $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ . Portanto,

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha},$$

com uma região de convergência dada por  $|z| > |\alpha|$ .

Nota: se  $\alpha = e^{-a}$ , então  $x(n) = e^{-an}u(n)$ . Logo,  $X(z) = \frac{z}{z-e^{-a}}$ , o que permite calcular  $\mathcal{Z}[\sin(\omega n)u(n)]$  e  $\mathcal{Z}[\cos(\omega n)u(n)]$ .

## 9.2 Principais propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

1. Linearidade. Sejam  $\mathcal{Z}[x_1(n)] = X_1(z)$  e  $\mathcal{Z}[x_2(n)] = X_2(z)$ , então,

$$\mathcal{Z}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1X_1(z) + a_2X_2(z),$$

cuja região de convergência está contida em  $RC_{X_1} \cap RC_{X_2}$ .

2. Deslocamento em atraso. Se  $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$  com região de convergência  $RC_X$ , então,

$$\mathcal{Z}[x(n-k)] = z^{-k}X(z),$$

com região de convergência  $RC_X$

3. Escalamento. Se  $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$ , com  $RC$ :  $r_1 < |z| < r_2$ , então,

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X[a^{-1}z],$$

com  $RC$ :  $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$ .

4. Reversão de tempo. Se  $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$ , com  $RC$ :  $r_1 < |z| < r_2$ , então,

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}),$$

com  $RC$ :  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$ .

5. Diferenciação. Se  $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$  com  $RC_X$ , então,

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz},$$

com  $RC_X$  mantida.

6. Convolução. Sejam  $\mathcal{Z}[x_1(n)] = X_1(z)$  com  $RC_{X_1}$ , e  $\mathcal{Z}[x_2(n)] = X_2(z)$  com  $RC_{X_2}$ , então,

$$\mathcal{Z}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z)X_2(z),$$

com  $RC$  contida em  $RC_{X_1} \cap RC_{X_2}$ .

7. Teorema do valor inicial. Se  $x(n)$  é causal,  $x(n) = 0$  para  $n < 0$ , então,

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

8. Teorema do valor final. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$  existe (sequência estável, que converge), então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)].$$

### 9.3 Inversa da transformada $\mathcal{Z}$

A inversa da transformada  $\mathcal{Z}$  é dada por

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{j2\pi} \oint_c X(z) z^{n-1} dz.$$

Contudo, é pouco prático calcular uma transformada inversa pela definição anterior. Em geral, a transformada inversa é obtida através da expansão em frações parciais quando  $X(z)$  é uma função racional (razão de dois polinômios).

Observa-se que as transformadas em geral possuem  $z$  no seu numerador, de forma que um fator  $z$  pode ser fatorado primeiramente. Aplica-se então o mesmo procedimento da expansão em frações parciais usado na transformada de Laplace.

---

Exemplo: Determinar a anti-transformada  $x(n)$  para

$$X(z) = \frac{z}{(3z^2 - 4z + 1)}.$$

Seja a expansão em frações parciais

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{3z^2 - 4z + 1} = \frac{1}{3(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3})} = \\ &= \frac{1}{3(z-1)(z-\frac{1}{3})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

As constantes podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} A &= F(z)(z-1)|_{z=1} = \frac{1}{3(z-\frac{1}{3})} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}, \\ B &= F(z)(z-\frac{1}{3}) \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3(z-1)} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{3}}, \\ X(z) &= \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{-\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Consultando uma tabela de transformada  $\mathcal{Z}$  verifica-se que

- para  $|z| > 1$  obtém-se

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} \right] + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{3}} \right],$$

$$x(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^n u(n).$$

- para  $|z| < \frac{1}{3}$  tem-se que

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} \right] + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{3}} \right],$$

$$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) - \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{1}{3} \right)^n u(-n-1) \right].$$

- para  $\frac{1}{3} < |z| < 1$  tem-se que

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} \right] + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{3}} \right],$$

$$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^n u(n).$$

---

Verifica-se através do exemplo anterior a importância da região de convergência para assegurar a unicidade da anti-transformada  $\mathcal{Z}$ .

---

Exemplo: Determinar a anti-transformada  $\mathcal{Z}$  para

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}.$$

Esta função possui uma das raízes do denominador com multiplicidade dois. A expansão em frações parciais deve levar isso em conta, mantendo a característica em termos desta multiplicidade, ou seja,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{A_3}{z-1},$$

A constante  $A_1$  da expansão pode ser obtida através de

$$(z+1) \frac{X(z)}{z} = A_1 + (z+1) \frac{A_2}{(z-1)^2} + (z+1) \frac{A_3}{(z-1)},$$

fazendo-se  $z = -1$ , ou seja,

$$A_1 = (z+1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}.$$

A constante  $A_2$  pode ser obtida através de

$$(z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = (z-1)^2 A_1 + A_2 + (z-1)^2 \frac{A_3}{(z-1)}, \quad (16)$$

fazendo-se  $z = 1$ , ou seja,

$$A_2 = (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

Derivando (16) tem-se

$$\frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right] = \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 A_1 + A_2 + (z-1) A_3 \right],$$

$$\frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right] = \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 A_1 \right] + A_3,$$

e fazendo  $z = 1$ , tem-se que,

$$A_3 = \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right] \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}.$$

Note que:

$$\frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 A_1 \right] \Big|_{z=1} = 2(z-1) A_1 \Big|_{z=1} = 0.$$

Logo,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(z-1)},$$

e a transformada inversa pode ser calculada considerando as respectivas regiões de convergência.

---



## 9.4 Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

A transformada  $\mathcal{Z}$  unilateral é definida como

$$X^+(z) = \mathcal{Z}^+[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Nota-se que a transformada unilateral não requer que o sinal seja definido para  $n < 0$ .

Esta transformada é usada na solução de equações a diferenças com condições iniciais não nulas, e é idêntica à transformada bilateral do sinal  $x(n)u(n)$ .

---

Exemplo: Determinar a transformada  $\mathcal{Z}$  unilateral para

$$x_1(n) = \{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\}.$$

A solução é

$$X_1^+(z) = 5z^{-0} + 7z^{-1} + 0z^{-2} + 1z^{-3}.$$

---

Exemplo: Determinar a transformada  $\mathcal{Z}$  unilateral para

$$x_2(n) = \{2, 4, \underline{5}, 7, 0, 1\}.$$

A solução é

$$X_2^+(z) = 5z^{-0} + 7z^{-1} + 0z^{-2} + 1z^{-3}.$$

---

Note que as transformadas dos exemplos anteriores  $X_1^+$  e  $X_2^+$  são iguais embora  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  sejam distintas, ou seja, a transformada unilateral não é única para sinais não causais. Ela é única apenas para sinais causais.

### 9.4.1 Algumas propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

1. Propriedade do atraso no tempo. Seja  $X^+(z) = \mathcal{Z}^+[x(n)]$ , então,

$$\mathcal{Z}^+[x(n-k)] = z^{-k} \left( X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right), \quad k > 0.$$

Se  $x(n)$  é causal, então:

$$\mathcal{Z}^+[x(n-k)] = z^{-k} X^+(z).$$

2. Propriedade do avanço no tempo. Seja  $X^+(z) = \mathcal{Z}^+[x(n)]$ , então,

$$\mathcal{Z}^+[x(n+k)] = z^k \left( X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right), \quad k > 0.$$

3. Teorema do valor final. Seja  $X^+(z) = \mathcal{Z}^+[x(n)]$ , então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X^+(z)].$$

## 9.5 Solução de equação de diferenças

---

Exemplo: Seja a sequência de Fibonacci  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ . Qual sua fórmula?

Esta sequência pode ser gerada por

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2),$$

com as seguintes condições iniciais,

$$y(0) = y(-1) + y(-2) = 1,$$

$$y(1) = y(0) + y(-1) = 1,$$

pelas quais se determina que  $y(-1) = 0$  e  $y(-2) = 1$ .

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  unilateral e usando a propriedade do atraso tem-se

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= z^{-1} \left[ Y^+(z) + \sum_{n=1}^1 y(-n)z^n \right] + z^{-2} \left[ Y^+(z) + \sum_{n=1}^2 y(-n)z^n \right] = \\ &= z^{-1} [Y^+(z) + 0z^1] + z^{-2} [Y^+(z) + 0z^1 + 1z^2] = \\ &= z^{-1}Y^+(z) + z^{-2}Y^+(z) + 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y^+(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) = 1 \Rightarrow Y^+(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1},$$

cujas raízes do denominador são  $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$  e  $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618$ .

Uma expansão em frações parciais é

$$\frac{Y^+(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{A_1}{(z - p_1)} + \frac{A_2}{(z - p_2)},$$

de onde se obtém

$$A_1 = \frac{p_1}{\sqrt{5}} = 0.724, \quad A_2 = -\frac{p_2}{\sqrt{5}} = 0.276.$$

Logo,

$$Y^+(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left[ \frac{z}{z - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right] + \frac{[-(1 - \sqrt{5})]}{2\sqrt{5}} \left[ \frac{z}{z - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \right],$$

$$y(n) = \left[ \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n).$$


---

## 10 Função de transferência discreta

Seja  $q$  o operador avanço unitário, i.e.,

$$qx(n) = x(n+1),$$

e  $q^{-1}$  o operador atraso unitário, i.e.,

$$q^{-1}x(n) = x(n-1).$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  nesta última equação tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[q^{-1}x(n)] &= \mathcal{Z}[x(n-1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \\ &= z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-1)z^{-(n-1)} = z^{-1}X(z). \end{aligned}$$

Uma equação a diferenças pode ser escrita como

$$(a_0 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n})y(n) = (b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m})x(n).$$

Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  na equação a diferenças tem-se

$$(a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n})Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m})X(z).$$

A função de transferência discreta (relação entra a entrada e a saída) é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}.$$

Nota: deve-se ter  $n \geq m$  para sistema não antecipativo.

## 10.1 polos e zeros

Os zeros de  $X(z)$  são os valores de  $z$  tais que  $X(z) = 0$ , ou seja, são as raízes do numerador de  $X(z)$ .

Os polos de  $X(z)$  são os valores de  $z$  tais que  $X(z) = \infty$ , ou seja, as raízes do denominador de  $X(z)$ .

## 10.2 Interpretação da função de transferência discreta

Seja a relação entre entrada e saída

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

Se a entrada é um impulso unitário,  $X(z) = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$ , então  $Y(z) = H(z)$ . Portanto, a função de transferência  $H(z)$  representa a resposta do sistema ao impulso unitário. Ou ainda, se a resposta ao impulso unitário é  $h(n)$  então

$$\mathcal{Z}[h(n)] = H(z),$$

é a função de transferência do sistema.

## 10.3 Relação entre transformada $\mathcal{Z}$ e de Laplace

Seja o processo de amostragem da Figura 130.

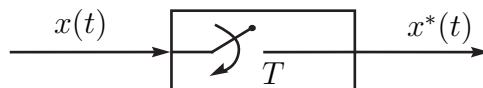


Figura 130: Ilustração do processo de amostragem como chaveamento periódico.

Aplicando a transformada de Laplace à função amostrada tem-se que

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = \int_0^\infty \left[ \sum_{k=0}^\infty x(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^\infty x(kT) \int_0^\infty \delta(t - kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^\infty x(kT) e^{-skT}. \end{aligned}$$

Definindo  $z = e^{sT}$  pode-se escrever que

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^\infty x(kT) z^{-k} = X(z),$$

que é a relação entre a transformada de Laplace e transformada  $\mathcal{Z}$ , ou seja, a transformada  $\mathcal{Z}$  pode ser vista como a respectiva transformada de Laplace de um sinal discretizado.

## 11 Filtros digitais IIR

Seja o esquema da Figura 131.



Figura 131: Esquema de filtro discreto.

Um filtro discreto pode ser caracterizado através da:

- sua resposta ao impulso  $h(n)$ ;
- sua função de transferência  $H(z)$ ;
- sua equação a diferenças.

A equação a diferenças é dada por

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k),$$

e a respectiva função de transferência é

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

A resposta em frequência (para sistemas estáveis) é obtida ao se fazer  $z = e^{jw}$ , ou seja,

$$H(w) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}}.$$

Um filtro analógico pode ser representado como na Figura 132.

Um filtro discreto equivalente ao analógico pode ser representado como na Figura 133.

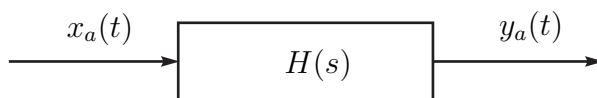


Figura 132: Esquema de filtro analógico.

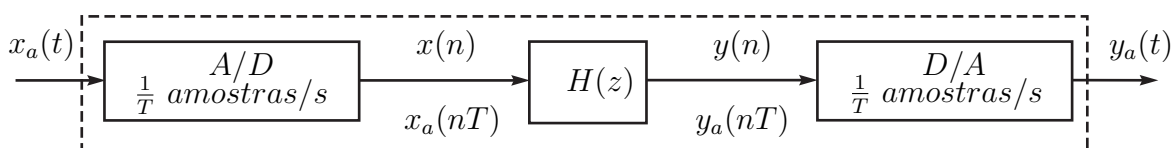


Figura 133: Filtro discreto equivalente ao analógico.

### 11.1 Transformação bilinear

Na conversão de funções de transferência analógicas para funções de transferência discretas, existe o interesse de preservar as características da resposta no tempo e em frequência. Contudo, na maioria das vezes não é possível atender a estes dois requisitos simultaneamente. Quando se preserva a resposta no tempo, normalmente perde-se na resposta em frequência, e vice-versa.

Uma técnica usual para transformação é a transformação bilinear descrita a seguir.

Seja um sistema de primeira ordem dado por

$$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t),$$

cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}.$$

É possível escrever que

$$y(t) = \int_{t_0}^t \dot{y}(t) dt + y(t_0).$$

Seja um intervalo de tempo tal que  $t = nT$  e  $t_0 = (n-1)T$ . Logo,

$$y(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} \dot{y}(t) dt + y((n-1)T).$$

Esta integral pode ser aproximada pela regra dos trapézios, ou seja,

$$\int_{(n-1)T}^{nT} \dot{y}(t) dt \approx \frac{T}{2} [\dot{y}(nT) + \dot{y}((n-1)T)],$$

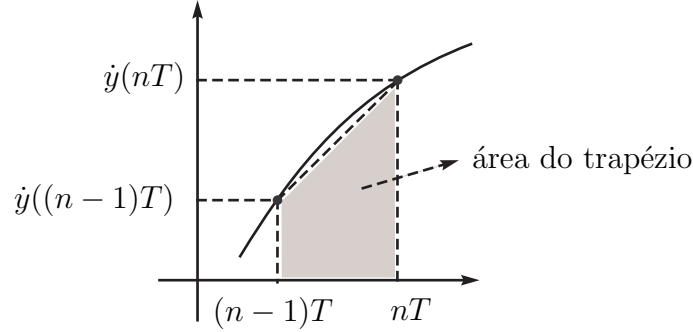


Figura 134: Área do trapézio.

como ilustrado na Figura 134.

Portanto, uma aproximação válida é

$$y(nT) = y((n-1)T) + \frac{T}{2} [\dot{y}(nT) + \dot{y}((n-1)T)].$$

Da equação diferencial escreve-se que

$$\dot{y}(t) = \frac{-a_0}{a_1} y(t) + \frac{b_0}{a_1} x(t),$$

que pode ser usada para substituir os termos  $\dot{y}(nT)$  e  $\dot{y}((n-1)T)$ , ou seja,

$$y(nT) = y((n-1)T) + \frac{T}{2} \left[ \frac{-a_0}{a_1} y(nT) + \frac{b_0}{a_1} x(nT) - \frac{a_0}{a_1} y((n-1)T) + \frac{b_0}{a_1} x((n-1)T) \right],$$

cuja transformada  $\mathcal{Z}$  é

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2} \left[ \frac{-a_0}{a_1} Y(z) + \frac{b_0}{a_1} X(z) - \frac{a_0}{a_1} z^{-1}Y(z) + \frac{b_0}{a_1} z^{-1}X(z) \right],$$

$$Y(z) \left( 1 - z^{-1} + \frac{T}{2} \frac{a_0}{a_1} + \frac{T}{2} \frac{a_0}{a_1} z^{-1} \right) = \frac{T}{2} \left( \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_0}{a_1} z^{-1} \right) X(z),$$

e portanto pode-se escrever que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{a_1 \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a_0}.$$

Comparando  $H(z)$  com  $G(s)$  conclui-se que

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right),$$

ou ainda,

$$z = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}},$$

que caracteriza a transformação bilinear ou transformação de Tustin.

O mapeamento  $s - z$  obtido com a transformação bilinear é mostrado na Figura 135. Verifica-se que a transformação de Tustin mapeia o semi-plano esquerdo em  $s$  para o interior do círculo unitário no plano  $z$ .

Uma verificação pode ser feita fazendo  $s = j\Omega$  (eixo imaginário) e obtendo a equação correspondente em  $z$ , ou seja,

$$z = \frac{1 + j\Omega\frac{T}{2}}{1 - j\Omega\frac{T}{2}} = \left( \frac{1 + j\Omega\frac{T}{2}}{1 - j\Omega\frac{T}{2}} \right) \left( \frac{1 + j\Omega\frac{T}{2}}{1 + j\Omega\frac{T}{2}} \right) = \frac{1 + j\Omega T - \Omega^2 \frac{T^2}{4}}{1 + \Omega^2 \frac{T^2}{4}},$$

cujo módulo é

$$|z| = \frac{1}{1 + \Omega^2 \frac{T^2}{4}} \left[ \left( 1 - \Omega^2 \frac{T^2}{4} \right)^2 + \Omega^2 T^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1.$$

e a fase de  $z$  é dada por

$$\tan\theta_z = \frac{\Omega T}{1 - \Omega^2 \frac{T^2}{4}} = 2 \frac{\frac{\Omega T}{2}}{1 - \left( \frac{\Omega T}{2} \right)^2}.$$

Portanto, quando  $\Omega$  cresce, a fase varia e o módulo permanece constante e unitário, o que significa caminhar sobre o círculo unitário.

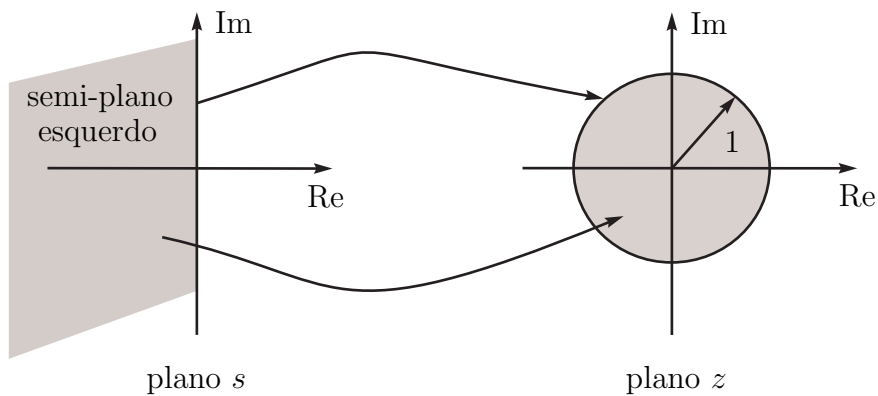


Figura 135: Mapeamento dado pela transformação bilinear.



## 11.2 Warping

A transformação bilinear causa uma distorção no eixo da frequência conhecida como *warping*.

Sejam  $\Omega$  a frequência no plano  $s$  e  $w$  a frequência no plano  $z$ . Usando a relação da transformação bilinear e as relações  $s = j\Omega$ ,  $z = e^{sT}$  e  $w = \Omega T$ , é possível escrever que

$$j\Omega = \frac{2}{T} \left( \frac{e^{jw} - 1}{e^{jw} + 1} \right) = \frac{2}{T} \left[ \frac{2j \operatorname{sen} \left( \frac{w}{2} \right)}{2 \cos \left( \frac{w}{2} \right)} \right] = j \frac{2}{T} \tan \left( \frac{w}{2} \right),$$

que permite escrever que

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \left( \frac{w}{2} \right),$$

ou também

$$w = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Omega T}{2} \right).$$

As equações anteriores caracterizam as fórmulas de *warping* e representam como a transformação bilinear distorce o eixo de frequências no processo de discretização.

## 11.3 Projeto de filtros usando a transformação bilinear

O problema de interesse consiste em projetar um filtro digital  $H(z)$ , que usado na forma esquematizada na Figura 136, simule um filtro analógico.

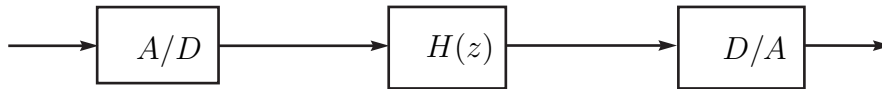


Figura 136: Filtro digital equivalente ao analógico.

A equação diferencial do filtro analógico é

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad (17)$$

cujas função de transferência (condições iniciais nulas) é dada por

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k s^k}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}.$$

As especificações digitais são caracterizadas pelo conjunto de pontos  $(w_1, k_1), (w_2, k_2), \dots, (w_N, k_N)$ . É possível calcular as frequências críticas dadas por  $\Omega_i = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_i}{2}\right), i = 1, 2, \dots, N$ .

As especificações analógicas são caracterizadas pelo conjunto de pontos  $(\Omega_1, k_1), (\Omega_2, k_2), \dots, (\Omega_N, k_N)$ .

Através da transformação bilinear tem-se que

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}.$$

A transformação analógico-analógico de passa-baixa para passa-baixa é dada por  $s \rightarrow \frac{s}{\Omega_i}$ . Aplicando a transformação bilinear nesta transformação tem-se

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \times \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})\Omega_i} = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1}) \left[ \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_i}{2}\right) \right]} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + z^{-1}) \tan\left(\frac{w_i}{2}\right)},$$

que caracteriza uma transformação independente do valor de  $T$ .

As principais etapas do projeto de um filtro digital usando a técnica da transformação bilinear são brevemente apresentadas a seguir.

1. Sejam as especificações digitais:

$$\begin{aligned} w_1, w_2, \dots, w_N, \\ k_1, k_2, \dots, k_N. \end{aligned}$$

2. Considere  $T = 1$  e a equação de *pre-warping*, ou seja,

$$\Omega_i = 2 \tan\left(\frac{w_i}{2}\right).$$

3. Tem-se, assim, as especificações analógicas:

$$\begin{aligned} \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \\ k_1, k_2, \dots, k_N. \end{aligned}$$

4. Realizar o projeto do filtro analógico  $H_a(s)$ .
5. Aplicar a transformação bilinear com  $T = 1$ , ou seja,

$$s \rightarrow 2 \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right).$$

para obter  $H(z)$ , e verificação da resposta em frequência em termos do atendimento dos requisitos.

Exemplo: Projetar um filtro digital passa-baixa usando o método da transformação bilinear para atender aos seguintes requisitos:

1. monotônico tanto na faixa de passagem como na faixa de rejeição;
2. frequência de corte de  $0.5\pi \text{ rad/amostra}$  com  $3.01dB$  de atenuação;
3. atenuação de  $15dB$  para  $0.75\pi \text{ rad/amostra}$ .

Os requisitos estão representados de forma gráfica na Figura 137.

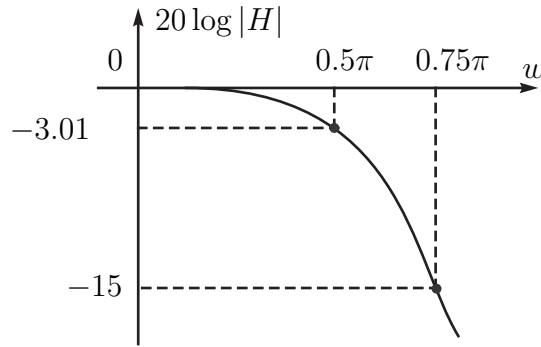


Figura 137: Requisitos do para o projeto do filtro.

As principais etapas da solução são:

1. *Pre-warping*:

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_1}{2}\right) = \frac{2}{1} \tan\left(\frac{0,5\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_2}{2}\right) = \frac{2}{1} \tan\left(\frac{0,75\pi}{2}\right) = 4.8282$$

2. Obtenção das especificações analógicas:

$$0 \geq 20 \log |H_a(j\Omega_1)| \geq -3.01dB = k_1,$$

$$20 \log |H_a(j\Omega_2)| \leq -15 \text{ dB} = k_2.$$

Como o filtro deve ser monotônico tanto na região de passagem como na região de rejeição, deve-se empregar um filtro Butterworth.

3. Projeto do filtro Butterworth analógico:

$$n = \frac{\log \left[ \frac{(10^{\frac{3.01}{10}} - 1)}{(10^{\frac{15}{10}} - 1)} \right]}{2 \log \left( \frac{2}{4.8282} \right)} = 1.94 \Rightarrow n = 2,$$

$$\Omega_c = \frac{2}{(10^{\frac{3.01}{10}} - 1)^{\frac{1}{4}}} = 2,$$

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{2}} = \frac{4}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}.$$

4. Aplicação da transformação bilinear ( $T = 1$ ):

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}} = \\ &= \frac{4}{\left[ \frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} \right]^2 + 2\sqrt{2} \left[ \frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} \right] + 4} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{3.4142135 + 0.5857865z^{-2}}. \end{aligned}$$

5. A resposta em frequência é mostrada na Figura 138.

6. Obtenção da equação a diferenças do filtro digital:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z),$$

$$\begin{aligned} Y(z)(3.4142135 + 0.5857865z^{-2}) &= (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z), \\ 3.4142135y(n) + 0.5857865y(n-2) &= x(n) + 2x(n-1) + x(n-2), \\ y(n) &= 0.2928932[x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)] - 0.1715729y(n-2). \end{aligned}$$

## 11.4 Projeto de filtro digital com base em requisitos analógicos

Sejam os requisitos de um filtro analógico:  $(\Omega_1, k_1), (\Omega_2, k_2), \dots, (\Omega_N, k_N)$ . A questão do projeto de um filtro digital que tenha as mesmas características do filtro analógico é determinar o filtro  $A/D - H(z) - D/A$  que satisfaça estes requisitos.

Seja  $\frac{1}{T}$  a taxa de amostragem do conversor  $A/D$ . Suponha um sinal analógico  $x_a(t) = \text{sen}(\Omega_i t)$ . A saída do conversor  $A/D$  será

$$x(n) = x_a(nT) = \text{sen}(\Omega_i T n) = \text{sen}(w_i n),$$

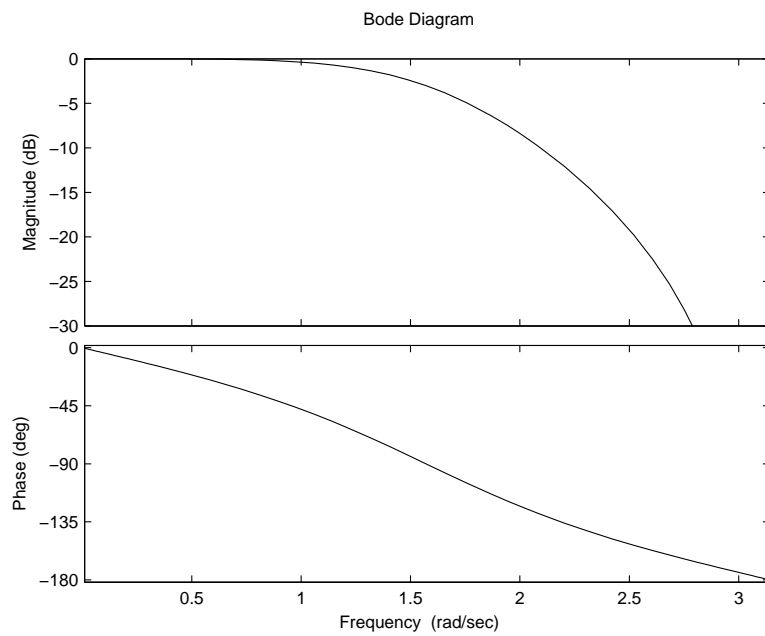


Figura 138: Resposta em frequência do filtro projetado. Nota: ler a frequência em *rad/amostra*.

e conseqüentemente  $w_i = \Omega_i T$ , que permite obter as respectivas especificações digitais para o projeto.

---

Exemplo: Projetar um filtro  $H(z)$  que quando usado como  $A/D - H(z) - D/A$  forneça um filtro passa-baixa equivalente ao analógico com:

- $-3.01dB$  de atenuação para uma frequência de corte de  $500Hz$ ;
- região de passagem e de rejeição monotônicas;
- amplitude menor que  $15dB$  para frequências maiores que  $750Hz$ ;
- taxa de amostragem de  $2000 amostras/segundo$ .

Os requisitos estão mostrados na Figura 139.

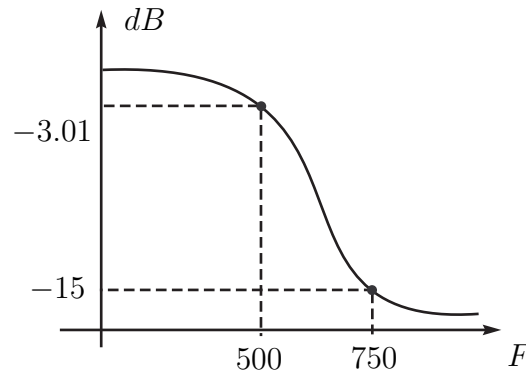


Figura 139: Requisitos analógicos desejados.

Os requisitos são:

$$\Omega_1 = 2\pi F_1 = 2\pi \times 500 = \pi \times 10^3 \text{ rad/s}, \quad k_1 = -3.01dB.$$

$$\Omega_2 = 2\pi F_2 = 2\pi \times 750 = 1.5\pi \times 10^3 \text{ rad/s}, \quad k_2 = -15dB.$$

As especificações digitais serão:

$$w_1 = \Omega_1 T = \pi \times 10^3 \times \left(\frac{1}{2000}\right) = 0.5\pi, \quad k_1 = -3.01dB,$$

$$w_2 = \Omega_2 T = 1.5\pi \times 10^3 \times \left(\frac{1}{2000}\right) = 0.75\pi, \quad k_2 = -15dB,$$

que são as mesmas especificações do exemplo anterior. Logo, a função de transferência do filtro é

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{3.4142135 + 0.5857865z^{-2}}.$$


---

## 11.5 Projeto de filtros digitais usando transformações digital-digital

De forma análoga aos filtros analógicos, é possível aplicar transformações de um filtro passa-baixa para outros filtros digitais. Estas transformações envolvem a substituição de  $z$  por uma função  $g(z)$  na função de transferência  $H(z)$ .

O roteiro de projeto é brevemente apresentado a seguir.

1. Sejam as especificações digitais:  $(w_1, k_1), (w_2, k_2), \dots, (w_N, k_N)$ .
2. Obter os requisitos de um passa-baixa.
3. Projetar um filtro passa-baixa para os respectivos requisitos.
4. Aplicar a transformação apropriada, obtendo o filtro desejado.

Um exemplo de transformação digital-digital é

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p - w_p)}{2} \right]}{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p + w_p)}{2} \right]},$$

que caracteriza a transformação passa-baixa para passa-baixa conforme ilustrada na Figura 140.

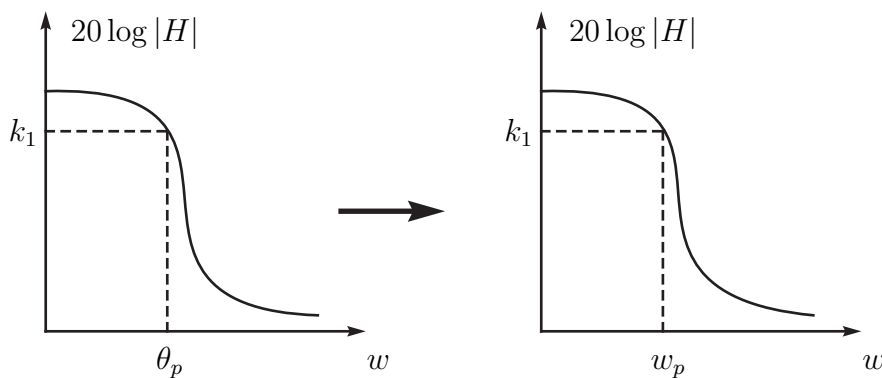


Figura 140: Transformação passa-baixa para passa-baixa.

Exemplo: Projetar um filtro Butterworth digital normalizado, com atenuação de  $-3dB$  e de ordem 1 usando o procedimento da transformação bilinear.

Os requisitos digitais são:

$$w_1 = 1, \quad k_1 = -3dB.$$

Os requisitos analógicos são:

$$\Omega_1 = 2 \tan \left( \frac{w_1}{2} \right) = 2 \tan \left( \frac{1}{2} \right) = 1.092605, \quad k_1 = -3dB.$$

O filtro Butterworth analógico de ordem 1 é

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{\Omega_1}},$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{1.092605}} = \frac{1}{0.9152438s+1}.$$

Aplicando a transformação bilinear tem-se

$$H(z) = H(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}} = \frac{1}{0.9152438 \left[ \frac{2(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} \right] + 1},$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2.8305 - 0.83052z^{-1}},$$

que corresponde à função de transferência do filtro desejado.

Exemplo: Projetar um filtro Butterworth digital de ordem 1 usando a transformação passa-baixa para passa-baixa (digital-digital), normalizado e com atenuação de  $-3dB$ .

O filtro Butterworth analógico de ordem 1 é

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Aplicando a transformação bilinear tem-se

$$H(z) = \frac{1}{s+1} \Big|_{s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}} = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}.$$

Usando o *pre-warping*, com  $T = 1$  tem-se

$$w_c = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Omega T}{2} \right) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{1.1}{2} \right) = 0.9272952$$

Aplicando a transformação digital-digital conforme ilustrada na Figura 141 tem-se que



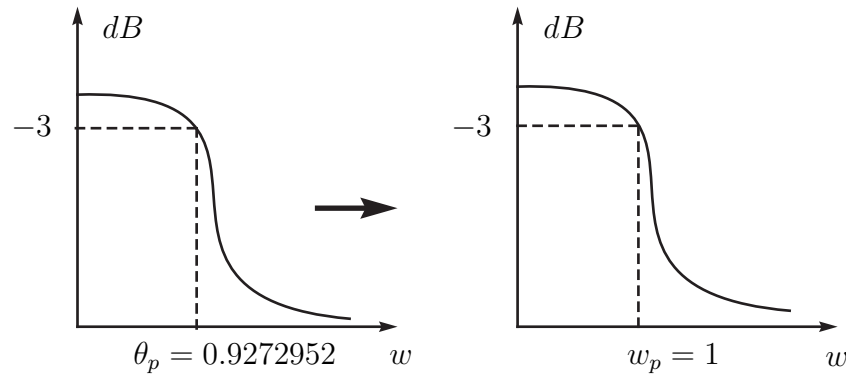


Figura 141: Transformação digital-digital.

$$\alpha = \frac{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p - w_p)}{2} \right]}{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p + w_p)}{2} \right]} = \frac{\text{sen} \left[ \frac{(0.9272952 - 1)}{2} \right]}{\text{sen} \left[ \frac{(0.9272952 + 1)}{2} \right]} = -0.04425,$$

e então,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{3 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}} = \\ &= \frac{1 + \left( \frac{z^{-1} + 0.04425}{1 + 0.04425 z^{-1}} \right)}{3 - \left( \frac{z^{-1} + 0.04425}{1 + 0.04425 z^{-1}} \right)} = \frac{1 + z^{-1}}{2.8305 - 0.8305 z^{-1}}, \end{aligned}$$

que representa o mesmo resultado obtido no exemplo anterior.

## 11.6 Filtro Butterworth digital de ordem $n$

Os requisitos típicos de um filtro Butterworth são:

$$0 \geq 20 \log |H(w_1)| \geq k_1,$$

$$20 \log |H(w_2)| \leq k_2.$$

A ordem do filtro é determinada através de

$$n = \frac{\log \left[ \frac{(10^{-\frac{k_1}{10}} - 1)}{(10^{-\frac{k_2}{10}} - 1)} \right]}{2 \log \left[ \frac{\tan\left(\frac{w_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{w_2}{2}\right)} \right]},$$

onde foi usada a relação de pre-warping  $\Omega_i = 2 \tan\left(\frac{w_i}{2}\right)$ .

Verifica-se que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2n} &= 10^{\frac{-k_1}{10}} - 1, \\ \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right) &= (10^{\frac{-k_1}{10}} - 1)^{\frac{1}{2n}}, \\ \Omega_c &= (10^{\frac{-k_1}{10}} - 1)^{\frac{-1}{2n}} \Omega_1 = (10^{\frac{-k_1}{10}} - 1)^{\frac{-1}{2n}} 2 \tan\left(\frac{w_1}{2}\right), \\ w_c &= 2 \tan^{-1} \left[ (10^{\frac{-k_1}{10}} - 1)^{\frac{-1}{2n}} \tan\left(\frac{w_1}{2}\right) \right].\end{aligned}$$

Com as deduções anteriores o filtro Butterworth passa-baixa digital é determinado. O filtro final pode ser determinado através de uma transformação digital-digital.

Exemplo: Usando o método da transformação digital-digital, encontre o filtro  $H(z)$  passa-baixa que satisfaz os seguintes requisitos:

- monotônico tanto na região de passagem como na região de rejeição;
- frequência de corte de  $0.5\pi$  para  $-3.0102dB$ ;
- atenuação de  $-15dB$  para  $0.75\pi$ .

A Figura 142 apresenta os requisitos.

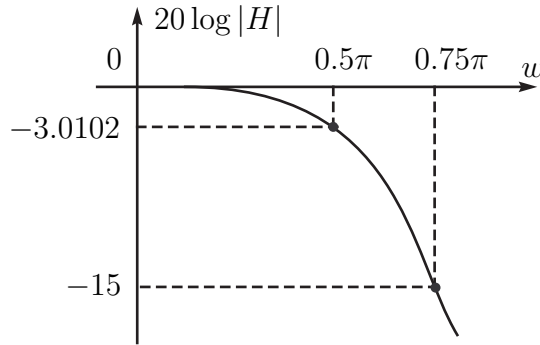


Figura 142: Requisitos do problema.

Para este problema tem-se que:

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_1}{2}\right) = \frac{2}{1} \tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right) = 2, \quad k_1 = -3.0102,$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_2}{2}\right) = \frac{2}{1} \tan\left(\frac{0.75\pi}{2}\right) = 4.8282, \quad k_2 = -15.$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{(10^{\frac{3.0102}{10}} - 1)}{(10^{\frac{15}{10}} - 1)}\right]}{2 \log\left(\frac{2}{4.8282}\right)} = 1.9412 \Rightarrow n = 2,$$

Verifica-se ainda que

$$\Omega_c = \frac{2}{(10^{\frac{3.0102}{10}} - 1)^{\frac{1}{4}}} = 2,$$

$$w_c = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) = 2 \tan^{-1}\left(2 \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

como imposto inicialmente.

O filtro Butterworth analógico normalizado de ordem 2 é

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Para  $w_1 = 1$  (filtro digital normalizado) tem-se

$$\Omega_1 = 2 \tan\left(\frac{w_1}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{1}{2}\right) = 1.092605,$$

e então

$$H(s) = H_a(s)|_{s \rightarrow \frac{s}{\Omega_1}} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{1.092605}},$$

$$H(s) = \frac{1}{0.8377s^2 + 1.2944s + 1}$$

Aplicando a transformação bilinear tem-se que

$$H(z) = \frac{1}{0.8377s^2 + 1.2944s + 1} \Big|_{s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}},$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2500(1+z^{-1})^2}{17349 - 11754z^{-1} + 4405z^{-2}} = \\ &= \frac{0.1441(1+z^{-1})^2}{1 - 0.6775z^{-1} + 0.2539z^{-2}}, \end{aligned}$$

que representa o filtro Butterworth digital normalizado de ordem 2.

A transformação digital-digital de passa-baixa para passa-baixa é dada por:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}},$$

com

$$\alpha = \frac{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p - w_p)}{2} \right]}{\text{sen} \left[ \frac{(\theta_p + w_p)}{2} \right]} = \frac{\text{sen} \left[ \frac{(1 - 0.5\pi)}{2} \right]}{\text{sen} \left[ \frac{(1 + 0.5\pi)}{2} \right]} = -0.293407993$$

Aplicando esta transformação digital-digital tem-se

$$H(z) = H(z)_{B2} \left| \frac{z^{-1} + 0.293407993}{1 + 0.293407993z^{-1}} \right|,$$

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{3.4142 + 0.5858z^{-2}},$$

como já havia sido obtido anteriormente.

---

## 11.7 Projeto com o conceito de impulso invariante

A idéia na metodologia do impulso invariante é preservar a resposta ao impulso.

Sejam os sistemas analógico e discreto como mostrados na Figura 143.

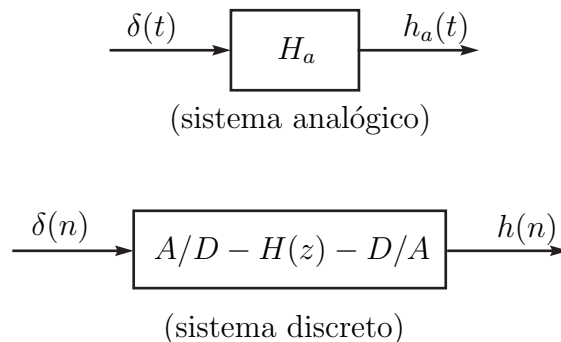


Figura 143: Esquema para resposta impulsiva.

A resposta  $h(n)$  deve ser a versão amostrada de  $h_a(t)$ . Portanto,

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \mathcal{Z}[h_a(t)|_{t=nT}] = \mathcal{Z}[(\mathcal{L}^{-1}[H_a(s)])|_{t=nT}].$$

---

Exemplo: Encontrar  $H(z)$  através do método do impulso invariante usando uma taxa de amostragem de  $\frac{1}{T}$  amostras/s para o filtro analógico dado por

$$H_a(s) = \frac{A}{s + \alpha}.$$

A resposta ao impulso do filtro analógico será

$$h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_a(s)] = Ae^{-\alpha t}u(t),$$

e sua versão amostrada é

$$h(n) = Ae^{-\alpha nT}u(nT) = A(e^{-\alpha T})^n u(n).$$

Consequentemente, a função de transferência será

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \mathcal{Z}[A(e^{-\alpha T})^n u(n)] = \frac{Az}{z - e^{-\alpha T}}.$$

A resposta em frequência do filtro analógico é dada por

$$H_a(j\Omega) = \frac{A}{j\Omega + \alpha} \Rightarrow |H_a(j\Omega)| = \frac{A}{(\Omega^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

A resposta em frequência do filtro discreto é dada por

$$H(e^{jw}) = \frac{Ae^{jw}}{e^{jw} - e^{-\alpha T}}.$$

A resposta equivalente do filtro discreto será dada por

$$H_{eq}(j\Omega) = H(e^{jw})_{w \rightarrow \Omega T} = \frac{Ae^{j\Omega T}}{e^{j\Omega T} - e^{-\alpha T}}, \quad \Omega < \frac{\pi}{T},$$

que pode ser escrita como

$$H_{eq}(j\Omega) = \frac{A}{(1 - e^{-\alpha T} \cos \Omega T) + je^{-\alpha T} \sin \Omega T},$$

$$|H_{eq}(j\Omega)| = \frac{A}{(1 + e^{-\alpha 2T} - 2e^{-\alpha T} \cos \Omega T)^{\frac{1}{2}}},$$

e está ilustrada na Figura 144.

---

Verifica-se, portanto, que a técnica do impulso invariante pode ser considerada adequada para  $T$  pequeno.

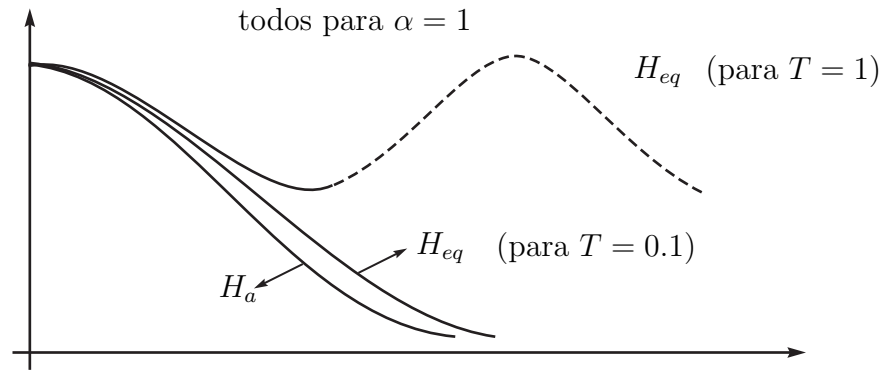


Figura 144: Resposta em frequência baseado no impulso invariante.

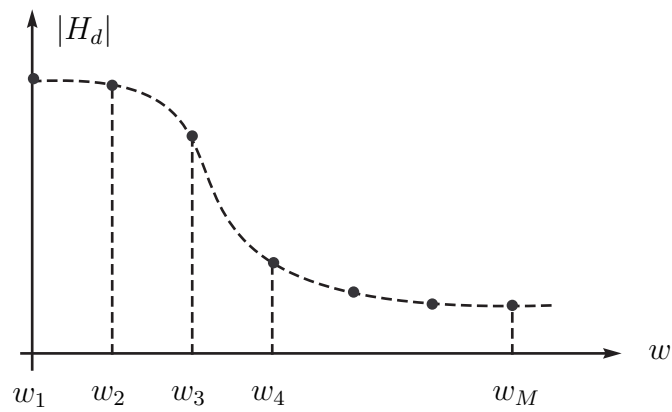


Figura 145: Conjunto de pontos especificados.

## 11.8 Projeto de filtros via mínimos quadrados

Sejam as especificações:  $w_i$ ,  $|H_d(w_i)|$ ,  $i = 1, \dots, M$  conforme ilustrado na Figura 145.

A função de transferência de um filtro genérico pode ser escrita como

$$H(z) = A \prod_{k=1}^k \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = AG(z).$$

A soma dos erros quadráticos entre os pontos conhecidos e os pontos que satisfazem  $H(z)$  é dada por

$$E = \sum_{i=1}^M [|H_d(w_i)| - |H(w_i)|]^2,$$

onde  $|H_d(w_i)|$  é um ponto conhecido e  $|H(w_i)|$  é a função desejada calculada no ponto  $w_i$ .

Deseja-se que a soma dos erros  $E$  seja mínima (ajuste por mínimos quadrados). As variáveis são:  $A$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $a_k$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\dots$ ,  $b_k$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\dots$ ,  $c_k$  e  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\dots$ ,  $d_k$ . A condição de mínimo é dada por

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial d_k} = 0,$$

que representa um sistema de equações não lineares.

Alternativas para solução deste sistema são:

- resolver o sistema não linear de equações, por exemplo, pelo método de Newton-Raphson;
- resolver a minimização de  $E$  por métodos da programação não linear (Newton, Quase-Newton).

Nota: é preciso verificar se o filtro final obtido é estável. Caso não seja, é possível escolher os polos recíprocos, mantendo-se a mesma magnitude.

## 12 Implementação de filtros digitais

Um filtro digital pode ser implementado através de:

- um programa de computador;
- circuitos digitais específicos;

- circuitos integrados programáveis específicos.

Considere o filtro descrito pela equação a diferenças

$$y(n) = \sum_{k=0}^L b(k)x(n-k).$$

Uma representação para este filtro é mostrada na Figura 146.

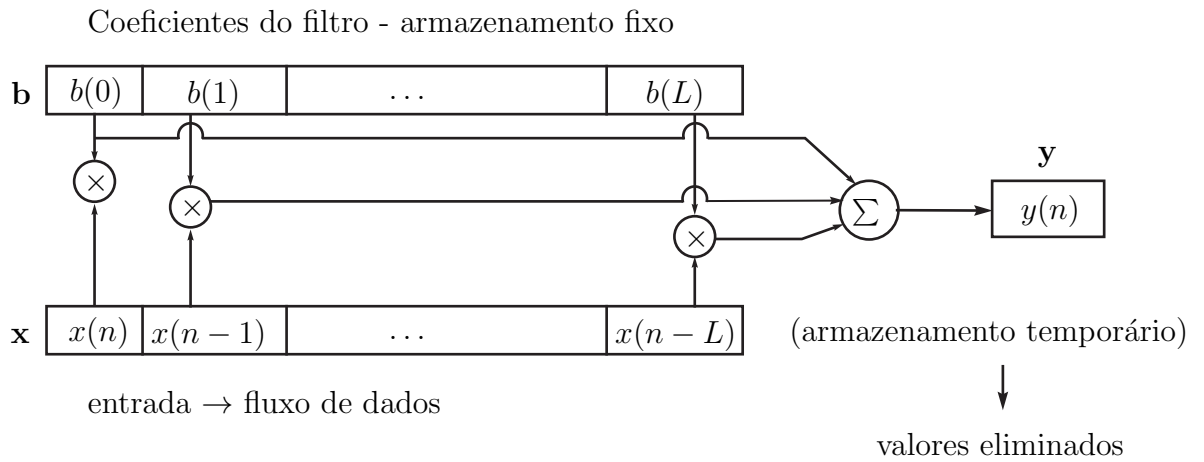


Figura 146: Representação do filtro.

Para operação em tempo real é necessário que

- as multiplicações e adições devem ser realizadas antes da chegada da próxima amostra de entrada;
- o tempo para realizar estas operações representa uma restrição para o menor tempo entre as amostras, e determina assim a máxima frequência de amostragem possível.

## 12.1 Realização direta

Seja a função de transferência dada por

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad M \leq N,$$

que corresponde à equação

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k),$$



equação esta que pode ser representada em um diagrama de blocos como na Figura 147.

Por exemplo, para  $M = 2$  e  $N = 2$  tem-se

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2),$$

que corresponde à parte em *negrito* do diagrama da Figura 147.

É possível construir várias realizações para filtros digitais, de forma análoga ao feito com os diagramas de blocos de equações diferenciais (caso contínuo), através de manipulações na função de transferência  $H(z)$ .

Na realização em série (ou em cascata) a função de transferência é vista como

$$H(z) = H_1(z) \times H_2(z) \times \dots \times H_k(z),$$

ou ainda como ilustrado na Figura 148.

Na realização em paralelo a função de transferência é vista como

$$H(z) = G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_k(z),$$

onde  $G_i(z)$  são funções mais simples. A Figura 149 mostra funções de transferência em paralelo.

## 13 Comentário sobre a transformada rápida de Fourier - FFT

A transformada discreta de Fourier, DFT, é muito utilizada como ferramenta de análise em processamento de sinais. Uma das razões para isso é que existem algoritmos eficientes para seu cálculo.

A transformada rápida de Fourier, *Fast Fourier Transform* - FFT, é caracterizada por algoritmos que calculam eficientemente a DFT quando  $N$  é uma potência de 2 ou de 4. Em resumo tem-se as seguintes relações para a DFT e IDFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N},$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Para cada valor de  $k$  no cálculo de  $X(k)$  tem-se:

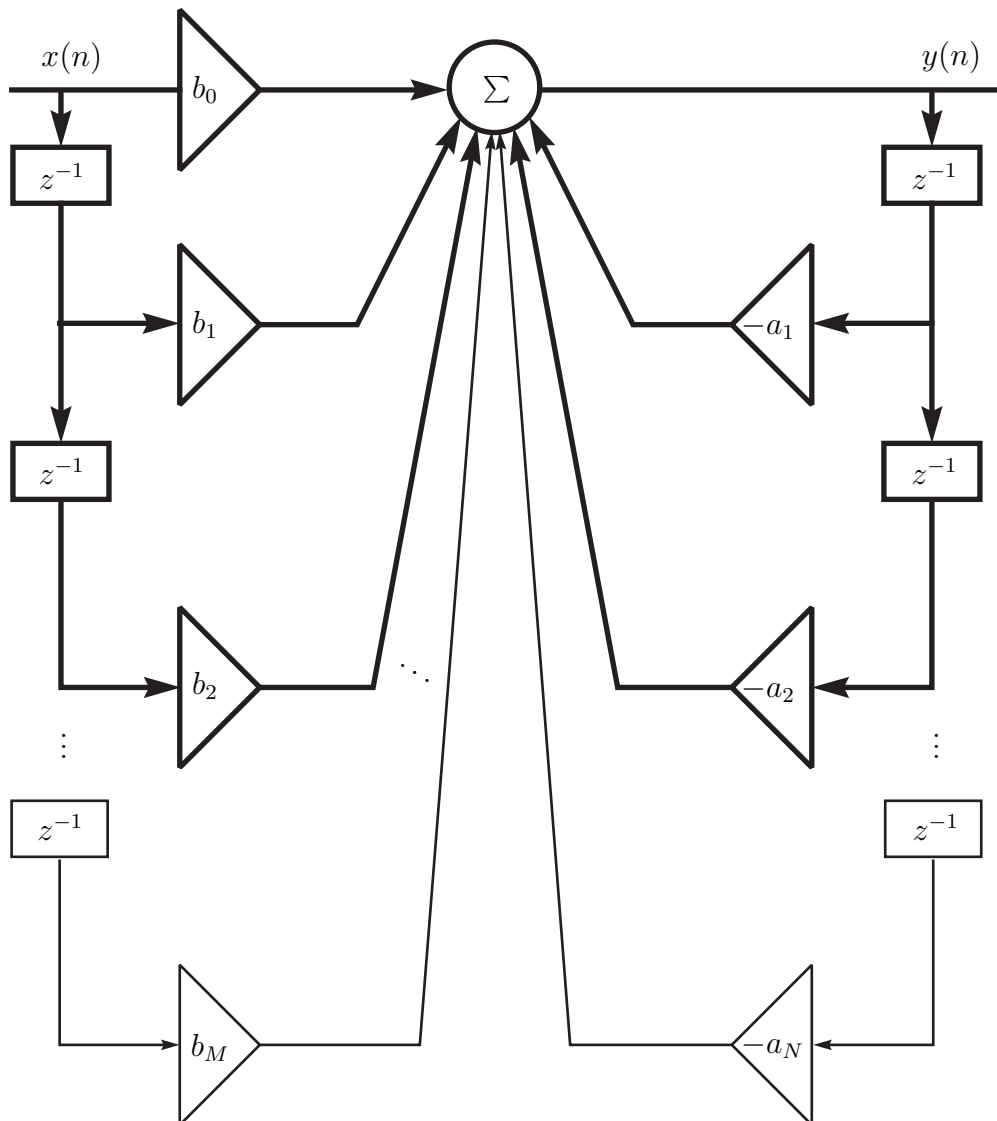


Figura 147: Diagrama de blocos para equação à diferenças.

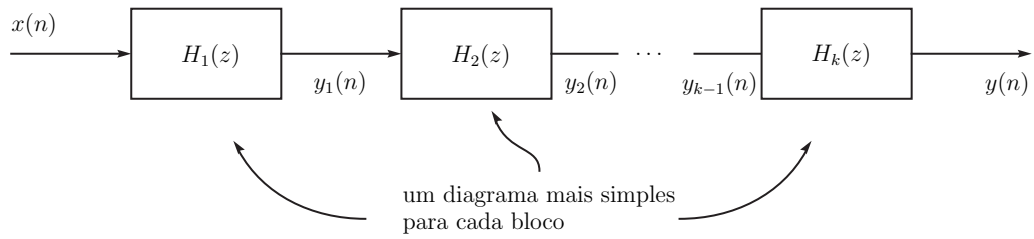


Figura 148: Funções de transferência em série.

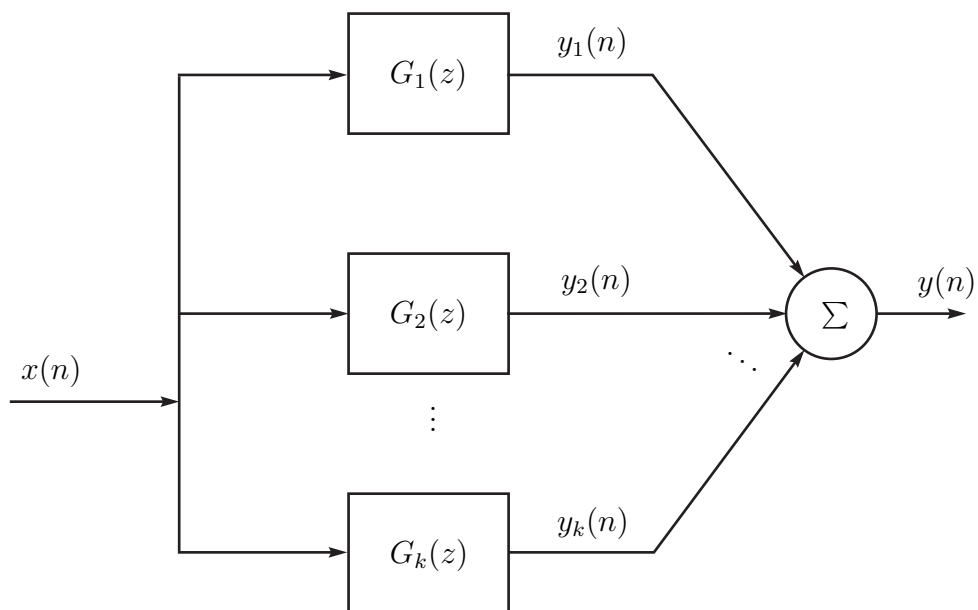


Figura 149: Funções de transferência em paralelo.

- $N$  multiplicações complexas (ou  $4N$  multiplicações reais);
- $N - 1$  adições complexas ( $4N - 2$  adições reais).

Para calcular os  $N$  valores de uma DFT, tem-se então:

- $N^2$  multiplicações complexas;
- $N^2 - N$  adições complexas.

O cálculo direto da DFT é ineficiente pois não explora as propriedades de simetria e periodicidade de  $W_N$ , ou seja,

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad e \quad W_N^{k+N} = W_N^k.$$

Vários algoritmos exploram estas propriedades para tornar o cálculo mais eficiente, caracterizando os vários algoritmos de FFT.

## 14 Bibliografia

Este texto é baseado nos livros listados a seguir.

1. Proakis J. G., Manolakis D. G., Digital Signal Processing - Algorithms and Applications, Prentice-Hall, 1996.
2. Ludeman L. C., Fundamentals of Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1986.
3. Shahian B., Hassul M., Control System Design Using Matlab, Prentice-Hall, 1993.

## 15 Exercícios

### 15.1 Lista 1

1. Seja o sistema descrito por  $y(n) = nx(n) = T[x(n)]$ , onde  $x(n)$  é a entrada e  $y(n)$  é a saída. Verifique se este sistema é a) linear, e b) variante no tempo.

Resposta: linear e variante no tempo.

2. A resposta ao impulso unitário discreto de um sistema é  $h(n) = a^n u(n)$  para  $0 < a < 1$ . Determine a resposta  $y(n)$  se a entrada for  $x(n) = u(n)$  (degrau unitário).

Resposta:  $y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$ .

3. Um sistema linear e invariante no tempo é caracterizado pela sua resposta ao impulso unitário por  $h(n) = a^n u(n)$ . a) Este sistema é causal?  
b) Este sistema é BIBO estável?

Resposta: sistema causal, BIBO estável para  $|a| < 1$ .

4. Resolva a equação a diferenças  $y(n) - ay(n-1) = x(n)$  com  $y(n) = 0$  para  $n < 0$  e  $x(n) = \delta(n)$ .

Resposta:  $y(n) = a^n u(n)$ .

5. Determine a transformada  $Z$  e a região de convergência para  $x(n) = -b^n u(-n-1)$ .

Resposta:  $X(z) = \frac{z}{z-b}$ , RC:  $|z| < |b|$ .

6. Determine a transformada  $Z$  e a região de convergência para  $x(n) = (n-2)a^{n-2} \cos[\omega_0(n-2)]u(n-2)$ .

Resposta:  $Z[x(n)] = -z^{-1} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \right) \Big|_{z \rightarrow z/a}$ ,  $|z| > |a|$ .

7. Encontre a anti-transformada  $Z$  de

$$X(z) = \frac{z^4 + z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

para a região de convergência  $\frac{1}{2} < |z| < \infty$ .

Resposta:  $x(n) = \delta(n+2) + \frac{3}{4}\delta(n+1) + [\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n - \frac{17}{16}(\frac{1}{4})^n]u(n)$ .

8. Encontre a anti-transformada  $Z$  de

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{(z - \frac{1}{2})^3(z - \frac{1}{4})}$$

para a região de convergência  $|z| > \frac{1}{2}$ .

Resposta:  $x(n) = \{80(\frac{1}{2})^n - 20n(\frac{1}{2})^{n-1} + 6[\frac{n(n-1)}{2}](\frac{1}{2})^{n-2} - 80(\frac{1}{4})^n\}u(n)$ .

9. Para  $y(n) = ay(n-1) + x(n)$  encontre a resposta ao impulso calculando  $H(z)$  e a respectiva transformada inversa.

Resposta:  $y(n) = a^n u(n)$ .

## 15.2 Lista 2

1. Gerar e representar graficamente as sequências. Sugestão: usar o Matlab e a função *stem*.

(a)  $x(n) = \sum_{m=0}^{10} (m+1)[\delta(n-2m) - \delta(n-2m-1)]$ ,  $0 \leq n \leq 25$ .

(b)  $x(n) = 0.9^n \cos(0.2\pi n + \pi/3)$ ,  $0 \leq n \leq 20$ .

2. A sequência exponencial complexa  $e^{jwn}$  (ou  $\cos(wn)$ ) é periódica se a frequência  $f = w/(2\pi)$  é um número racional.
  - (a) Prove este resultado.
  - (b) Gere e plote  $\cos(0.3\pi n)$ ,  $-20 \leq n \leq 20$ . Esta sequência é periódica? Se sim, qual é o período fundamental?
  - (c) Mesmo que o item anterior para  $\cos(0.3n)$ ,  $-20 \leq n \leq 20$ .
3. Considere os sistemas:
 
$$T_1[x(n)] = 2^{x(n)};$$

$$T_2[x(n)] = 3x(n) + 4;$$

$$T_3[x(n)] = x(n) + 2x(n-1) - x(n-2).$$
  - (a) Verifique analiticamente se estes sistemas são lineares.
  - (b) Seja  $x_1(n)$  uma sequência aleatória uniformemente distribuída entre  $[0, 1]$ , para  $0 \leq n \leq 100$ , e seja  $x_2(n)$  uma sequência aleatória com distribuição normal com média 0 e variância 10, para  $0 \leq n \leq 100$ . Usando estas sequências, verifique a linearidade dos sistemas. Dica: use os comandos Matlab *rand* e *randn* para gerar as sequências.
4. Considere os sistemas:
 
$$T_4[x(n)] = \sum_0^k x(x);$$

$$T_5[x(n)] = \sum_{n-10}^{n+10} x(k);$$

$$T_6[x(n)] = x(-n).$$
  - (a) Verifique analiticamente se estes sistemas são invariantes.
  - (b) Seja  $x(n)$  uma sequência com distribuição normal com média 0 e variância 10, para  $0 \leq n \leq 100$ . Usando estas sequências, verifique a invariância destes sistemas. Dica: use o comando Matlab *randn* para gerar a sequência.
5. Para os sistemas  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  e  $T_6$  dos exercícios anteriores, verifique a estabilidade BIBO e a causalidade.
6. A convolução possui as seguintes propriedades:
 
$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n);$$

$$[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)];$$

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n);$$

$$x(n) * \delta(n - k) = x(n - k).$$

- (a) Prove as propriedades anteriores.
  - (b) Verifique estas propriedades para  $x(n) = n[u(n + 10) - u(n - 20)]$ .
7. Seja  $x(n) = 0.8^n u(n)$ .
- (a) Determine  $x(n) * x(n)$  analiticamente.
  - (b) Usando a função *filter* do Matlab, determine os 50 primeiros pontos de  $x(n) * x(n)$  e compare com a solução analítica.
8. Um sistema linear e invariante é descrito pela seguinte equação
- $$y(n) - 0.5y(n - 1) + 0.25y(n - 2) = x(n) + 2x(n - 1) + x(n - 3).$$
- (a) Determine a estabilidade do sistema.
  - (b) Determine e plote a resposta ao impulso para  $0 \leq n \leq 100$ . Determine a estabilidade desta resposta ao impulso.
  - (c) Se a entrada deste sistema é  $x(n) = [5 + 3\cos(0.2\pi n) + 4\sin(0.6\pi n)]u(n)$ , calcule a resposta  $y(n)$  para  $0 \leq n \leq 100$ .

### 15.3 Lista 3

1. Determinar a transformada  $z$  das seguintes sequências e as respectivas regiões de convergência:
  - (a)  $x(n) = (\frac{4}{3})^n u(1 - n)$ ;
  - (b)  $x(n) = 2^{-|n|} + (\frac{1}{3})^{|n|}$ ;
  - (c)  $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n - 2) + 0.9^{n-3} u(n)$ .
2. Determine as transformadas inversas, através de frações parciais, para:
  - (a)  $X(z) = \frac{1 - z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - \frac{11}{4}z^{-1} + \frac{13}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}$ , (sequência absolutamente somável).
  - (b)  $X(z) = \frac{z}{z^3 + 2z^2 + 1.25z + 0.25}$ ,  $|z| > 1$ .
3. Para um sistema linear e invariante descrito pelas respostas ao impulso  $h(n)$ , determine a função de transferência do sistema, a equação à diferenças correspondente, e a resposta  $y(n)$  se a entrada é  $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$ :
  - (a)  $h(n) = 2(\frac{1}{2})^n u(n)$ ;

(b)  $h(n) = n[u(n) - u(n - 10)]$ .

4. Resolva a seguinte equação a diferenças usando a transformada  $z$  unilateral:

$$y(n) = 0.5y(n-1) + 0.25y(n-2) + x(n), \quad n \geq 0; \quad y(-1) = 1, \quad y(-2) = 2$$

$$x(n) = 0.8^n u(n)$$

5. Um sistema linear, causal e invariante é dado pela equação a diferenças:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

- (a) Determine a função de transferência deste sistema;
- (b) Determine os polos e os zeros e a respectiva região de convergência;
- (c) Encontre a resposta ao impulso deste sistema;
- (d) Este sistema é estável? Se sim, justifique.

## 15.4 Lista 4

1. Escrever uma função em Matlab para calcular a transformada de Fourier de um sinal discreto (DTFT). A entrada deve ser: a sequência  $x$ , o número de pontos  $n$  e a frequência  $w$ . A saída deve ser  $X$ .
2. Para as seguintes sequências, determinar a DTFT  $X(w)$ . Plotar a magnitude e o ângulo de  $X(w)$ .

(a)  $x(n) = \{4, 3, 2, 1, 2, 3, 4\}$ ;

(b)  $x(n) = \{4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4\}$ .

Nota: estas sequências estão iniciadas para  $n = 0$ .

3. Determine analiticamente as DTFT e plote a magnitude e ângulo de cada uma.

(a)  $x(n) = 3(0.9)^3 u(n)$ ;

(b)  $x(n) = 2(0.8)^{n+2} u(n-2)$ ;

(c)  $x(n) = n(0.5)^n u(n)$ .

4. Um pulso retangular simétrico é dado por:

$$R_N = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}$$

Determine a DTFT para  $N = 5, 15, 25, 100$ . Analise os resultados em função de  $N$ .



5. Determine  $H(w)$  e plote a magnitude e fase para os sistemas:
  - (a)  $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - 0.5y(n-1) - 0.25y(n-2)$ ;
  - (b)  $y(n) = 2x(n) + x(n-1) - 0.25y(n-1) + 0.25y(n-1)$ .
6. Considere o sinal analógico  $x_a(t) = \sin(20\pi t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Este sinal é amostrado a  $T_s = 0.01, 0.05, 0.1$  segundos para obter  $x(n)$ .
  - (a) Para cada  $T_s$  plote  $x(n)$ ;
  - (b) Reconstrua o sinal analógico  $y_a(t)$  através das amostra de  $x(n)$  usando a interpolação ideal. Use  $\Delta t = 0.001$ . Estime a frequência de  $y_a(t)$  através do gráfico (ignore os efeitos de bordas).
  - (c) Discuta os resultados.

## 15.5 Lista 5

1. Fazer um programa Matlab para calcular os coeficientes da série de Fourier (sinal contínuo) e para a reconstrução do sinal a partir destes coeficientes. Testar para um pulso retangular.
2. Verificar, com auxílio do Matlab, que sequências senoidais discretas são periódicas somente para frequências dadas por números racionais.
3. Verificar, com auxílio do Matlab, que sequências senoidais discretas satisfazem  $|f| \leq 0.5$  (e que  $|f| > 0.5$  caracterizam "aliases").
4. Verificar, através do Matlab, o fenômeno de "aliasing". Usar, por exemplo, uma frequência de amostragem de  $1Hz$  e duas cosenóides com  $F_1 = 1/8 Hz$  e  $F_2 = -7/8 Hz$  respectivamente. Propor um outro conjunto de valores que caracterizem "aliasing".
5. Fazer um programa em Matlab para calcular a série de Fourier para sinais discretos. Verificar seu programa com exemplos.
6. Fazer um programa em Matlab para calcular a transformada de Fourier de sinais discretos. Verificar seu programa com exemplos.

## 15.6 Lista 6

1. Fazer um programa em Matlab para calcular a DFT. Verifique seu programa através de exemplos.

2. Fazer um programa em Matlab para calcular a IDFT. Verifique seu programa através de exemplos.
3. Determine a transformada discreta de Fourier (DFT) para as sequências.
  - (a)  $x(n) = \{2, 0, 2, 0\}$ ;
  - (b)  $x(n) = \{0, 0, 1, 0, 0\}$ ;
  - (c)  $x(n) = \{j, j, -j, -j\}$ .
4. Determine a transformada discreta inversa de Fourier (ITDF) para as sequências.
  - (a)  $X(k) = \{5, -2j, 3, 2j\}$ ;
  - (b)  $X(k) = \{4, -5, 3, -5\}$ ;
  - (c)  $X(k) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
5. Seja  $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ .
  - (a) Determine a DFT  $X(k)$  de  $x(n)$ . Plote-a através do Matlab.
  - (b) Plote a magnitude e a fase da DTFT  $X(w)$  de  $x(n)$ .
  - (c) Verifique que a  $X(k)$  é a versão amostrada de  $X(w)$ .
  - (d) É possível reconstruir  $X(w)$  a partir de  $X(k)$ ? Se sim, como isso deve ser feito.
6. Plote a magnitude da DTFT das seguintes sequências usando como ferramenta a DFT. Escolha o valor adequado de  $N$  para que estas representações façam sentido.
  - (a)  $x(n) = 2\cos(0.2\pi n)[u(n) - u(n - 10)]$ ;
  - (b)  $x(n) = 3(2)^n, -10 \leq n \leq 10$ .

## 15.7 Lista 7

1. Estudar as transformações analógico-analógico a seguir. Verificar através de um exemplo o sucesso de cada transformação.
  - (a) Passa-baixa para Passa-Baixa;
  - (b) Passa-baixa para Passa-Alta;
  - (c) Passa-baixa para Passa-Banda;
  - (d) Passa-baixa para Rejeita-Banda.

2. Estudar as transformações digital-digital a seguir. Verificar através de um exemplo o sucesso de cada transformação.
  - (a) Passa-baixa para Passa-Baixa;
  - (b) Passa-baixa para Passa-Alta;
  - (c) Passa-baixa para Passa-Banda;
  - (d) Passa-baixa para Rejeita-Banda.

## 15.8 Lista 8

1. A função  $H_5(s)$  representa um filtro Butterworth normalizado.
  - (a) Determine  $H_5(s)$  na forma fatorada e na forma polinomial;
  - (b) Determine o ganho  $|H_5(j\Omega)|$  para  $\Omega = 1$  rad/s. Qual o ganho em dB?
  - (c) Repita para um filtro Chebyshev com  $\epsilon = 0.7647831$ .
2. Obtenha a função de transferência para um filtro Butterworth normalizado de ordem 9.
3. Dado que  $G(s) = 1/(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$  representa um filtro Butterworth passa-baixa normalizado de ordem 2:
  - (a) Represente graficamente  $20\log|G(j\Omega)|$  para  $\Omega$  de 0 a 100. Quais os valores de  $\Omega$  que correspondem a 3dB e 20dB?
  - (b) Aplique uma transformação passa-baixa para passa-alta ( $s \rightarrow 10/s$ ) em  $G(s)$  para obter  $H(s)$ . Represente  $20\log|H(j\Omega)|$  graficamente e verifique se o filtro obtido possui as características esperadas. Quais os valores de  $\Omega$  que correspondem a -3dB e -20dB?
  - (c) Aplique a transformação  $s \rightarrow 5s/(s^2 + 50)$  em  $G(s)$  para obter  $|H(s)|$ . Que tipo de filtro é  $|H(s)|$  e quais suas frequências críticas? Represente  $20\log|H(j\Omega)|$  graficamente para verificar suas conclusões.
4. Projete filtros (a) Butterworth e (b) Chebyshev passa-baixa que possuem atenuação de 3 dB a 100 rad/s e atenuação de 25 dB (ou mais) para frequências maiores que 250 rad/s. Plote  $20\log|H|$  para os filtros projetados e verifique se os requisitos foram satisfeitos.

5. Qual é a ordem  $n$  de um filtro Chebyshev analógico passa-baixa que possui uma região de passagem de 0 a 200Hz com uma ondulação aceitável de 1dB e é monotônico na região de rejeição que inicia em 250Hz para atenuação de 40dB? Repita para um filtro Butterworth e compare o valor de  $n$ .
6. Projete um filtro passa-banda para satisfazer as seguintes especificações: (S1) Atenuação de -3dB para as frequências de corte de 100Hz e 3.8kHz; (S2) atenuação na região de parada de 20dB em 20Hz e 8kHz; (S3) sem ondulação tanto na região de atenuação como na de passagem. Verifique seu projeto através da resposta em frequência obtida.
7. Projete filtros (a) Butterworth e (b) Chebyshev passa-alta que terão região de passagem para frequência maior que 200 rad/s (atenuação menor que 2dB) e terão atenuação de 20dB na região de corte para frequências menores que 100 rad/s.

## 15.9 Lista 9

1.  $H(s)$  é uma função representando um filtro Chebyshev de terceira ordem com frequência de corte de normalizada e  $\epsilon = 0.5088471$ .
  - (a) Apresente  $H(s)$  na forma fatorada;
  - (b) Qual o ganho para  $\Omega = 0$ ?
  - (c) Se um filtro digital é obtido usando a transformação  $s \rightarrow 8(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ , qual é a frequência de corte correspondente a -1dB?
  - (d) O filtro digital obtido é estável?
2. Desenvolva uma transformação semelhante à transformação bilinear, mas usando a regra de Simpson para fazer a integração ao invés da regra dos trapézios.
3. Projete um filtro digital  $H(z)$ , usando a transformação bilinear, para ser usado em uma estrutura A/D-H(z)-D/A para satisfazer os seguintes requisitos analógicos equivalentes usando uma taxa de amostragem de 1000 amostras/s. (S1) Atenuação de -2dB para 5 rad/s, com região de passagem o mais plana possível; (S2) Pelo menos 23dB de atenuação para frequências maiores que 10 rad/s.
4. Projete um filtro digital  $H(z)$  do tipo Chebyshev, usando a transformação bilinear, para ser usado em uma estrutura A/D-H(z)-D/A

para satisfazer os seguintes requisitos analógicos equivalentes usando uma taxa de amostragem de 60000 amostras/s. (S1) Atenuação de -2dB para 15000 Hz; (S2) Atenuação de 10dB para frequências maiores que 30000 Hz.

5. Projete um filtro digital  $H(z)$  que quando usado na forma A/D- $H(z)$ -D/A satisfaça os seguintes requisitos analógicos equivalentes:
  - (a) -2dB a  $75\pi$  rad/s;
  - (b) 40dB de atenuação para  $500\pi$  rad/s;
  - (c) Monotônico (na passagem e atenuação);
  - (d) Taxa de amostragem de 1500 amostras/s.
6. Projete um filtro passa-baixa digital para operar sobre dados amostrados tais que a frequência de corte seja 200Hz (1dB de ondulação aceitável) e 20dB de atenuação para 400Hz com comportamento monotônico. A taxa de amostragem é de 2000 amostras/s. Esboce a resposta em frequência em dB para a estrutura equivalente A/D- $H(z)$ -D/A. Determine também a equação a diferenças do filtro digital.
7. Um filtro digital passa-baixa normalizado com atenuação de -3dB de corte possui a função de transferência  $H(z) = (1 + z^{-1})/(2.8305 - 0.83045z^{-1})$ . Encontre o filtro digital  $H_d(z)$  com -3dB de atenuação para frequência de corte de  $\pi/2$  rad usando uma transformação digital-digital.
8. Você possui disponível um filtro com as seguintes características:  $H(z)$ , atenuação de 1dB para  $0.1\pi$ , e atenuação de 40dB para  $0.2\pi$ . Um filtro digital passa-alta com -1dB e frequência de corte de  $0.5\pi$  pode ser obtido através de uma transformação digital-digital.
  - (a) Forneça a transformação a mostre como você pode obter função  $G(z)$  do filtro passa-alta.
  - (b) Para qual frequência digital o filtro passa-alta atenuará 40dB?
9. Não deixe de entender e praticar os vários tipos de transformações de filtros normalizados para outros tipos de filtros.