UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ES879 – SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

AULA 12 – Análise em Frequência

Prof. Tiago Henrique Machado
tiagomh@fem.unicamp.br
Bloco FE2 – Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)

Campinas, 2º semestre de 2019

Conteúdo da Aula Anterior

Análise em Frequência

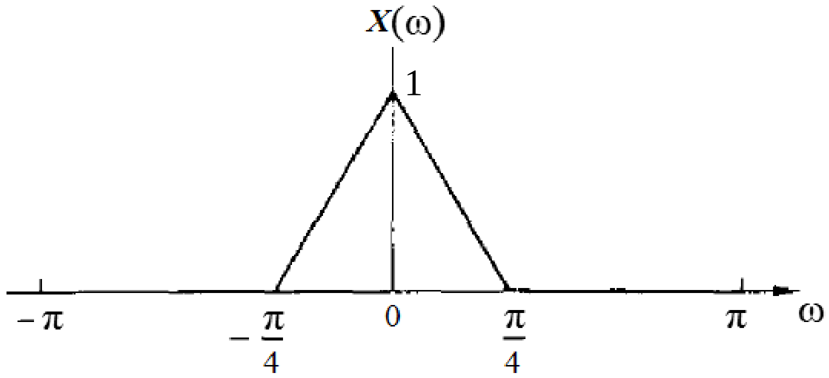
- ✓ Densidade Espectral de Energia de Sinais Contínuos Não-Periódicos;
- ✓ Série de Fourier para um Sinal Periódico Discreto;
- ✓ Densidade Espectral de Potência de Sinais Periódicos Discretos;
- ✓ Transformada de Fourier de Sinais Discretos Não-Periódicos.

Problema Exemplo 12.1

Seja $x(n)$ um sinal discreto com transformada de Fourier dada pela figura abaixo, determine e esboce a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

a) $x_1(n) = x(n)\cos(\pi n/4)$

b) $x_2(n) = x(n)\mathrm{sen}(\pi n/2)$



Solução:

Dados: transformada de Fourier do sinal $x(n)$.

Resultado desejado: transformada de Fourier dos sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$.

Hipóteses: sinal discreto.

Problema Exemplo 12.1

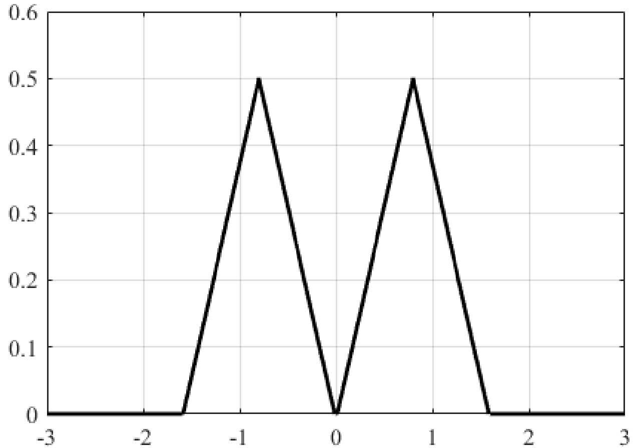
Cálculos:

a) Da igualdade de Euler, o sinal $x_1(n)$ pode ser escrito como:

$$x_1(n) = x(n)\frac{1}{2}\left(e^{j\pi\frac{n}{4}} + e^{-j\pi\frac{n}{4}}\right) = \frac{1}{2}e^{j\pi\frac{n}{4}}x(n) + \frac{1}{2}e^{-j\pi\frac{n}{4}}x(n)$$

Assim, usando a propriedade de translação em frequência, a transformada de Fourier do sinal $x_1(n)$ é dada por:

$$X_1(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \pi/4) + X(\omega + \pi/4)]$$



Problema Exemplo 12.1

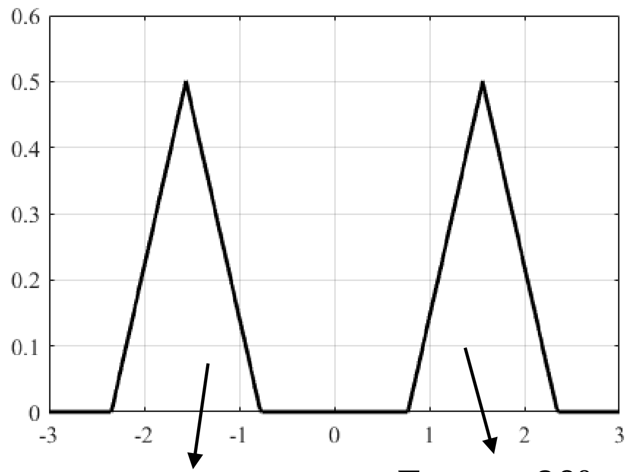
<u>Cálculos</u>:

b) Da igualdade de Euler, o sinal $x_2(n)$ pode ser escrito como:

$$x_2(n) = x(n)\frac{1}{2j}\left(e^{j\pi\frac{n}{2}} - e^{-j\pi\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{2j}e^{j\pi\frac{n}{2}}x(n) - \frac{1}{2j}e^{-j\pi\frac{n}{2}}x(n)$$

Assim, usando a propriedade de translação em frequência, a transformada de Fourier do sinal $x_2(n)$ é dada por:

$$X_2(\omega) = \frac{1}{2j}\left[X(\omega - \pi/2) + X(\omega + \pi/2)\right]$$



Problema Exemplo 12.2

Um sinal *x(n)* tem a seguinte transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Determine a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

a) $x_1(2n+1)$

b) $x_2(-2n)$

Solução:

Dados: transformada de Fourier do sinal *x(n)*.

Resultado desejado: transformada de Fourier dos sinais *x(2n+1)* e *x(-2n)*.

Hipóteses: sinal discreto.

Problema Exemplo 12.2

<u>Cálculos</u>:

a) Da definição da transformada de Fourier:

$$y(n) = x(2n) \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = \sum_n x(2n)e^{-j\omega n}$$

$$Y(\omega) = \sum_n x(n)e^{-j\frac{\omega}{2}n} = X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

Assim, usando a propriedade de translação no tempo, a transformada de Fourier do sinal $x(2n+1) = y(n+1/2)$ é dada por:

$$X_1(\omega) = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{1 - ae^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

Problema Exemplo 12.2

Cálculos:

b) Da definição da transformada de Fourier:

$$y(n) = x(2n) \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = \sum_n x(2n)e^{-j\omega n}$$

$$Y(\omega) = \sum_n x(n)e^{-j\frac{\omega}{2}n} = X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

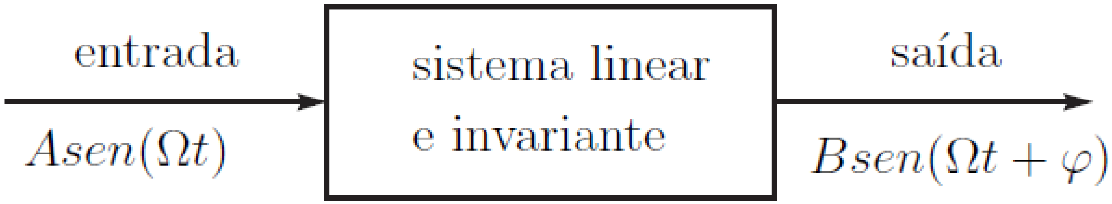
Assim, usando a propriedade de *Folding*, a transformada de Fourier do sinal x_2 dada por:

$$X_2(\omega) = \frac{1}{1-ae^{j\frac{\omega}{2}}}$$

Análise em Frequência

Função de Transferência e Resposta em Frequência:

Sabe-se que a resposta de regime de um sistema linear e invariante a uma entrada senoidal é também uma senóide de mesma frequência (com amplitude e fase distintas da entrada), conforme ilustrado abaixo.



Este conceito pode ser visualizado através da convolução.

Análise em Frequência

<u>Função de Transferência e Resposta em Frequência</u>:

Seja um sistema com resposta ao impulso dada por *h(t)* e sujeito a uma entrada $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$.

A resposta *y(t)* é dada pela convolução, ou seja,

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\Omega_0 (t-\tau)} d\tau =$$

$$= e^{j\Omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\Omega_0 t} d\tau = x(t) H(\Omega_0).$$

Análise em Frequência

Função de Transferência e Resposta em Frequência:

Observações:

- ✓ A última integral do slide anterior é semelhante a uma integral de Laplace, resultando na respectiva transformada $H(\cdot)$.
- ✓ Enfatiza-se que a resposta é uma exponencial com mudança de amplitude e fase dadas por $|H(\Omega_0)|$ e $\angle H(\Omega_0)$.

Sabe-se que para sistemas contínuos a transformada de Laplace da resposta ao impulso determina a função de transferência do sistema. De forma análoga, através da resposta ao impulso $h(n)$ obtém-se a respectiva função de transferência do sistema discreto.

Análise em Frequência

<u>Função de Transferência e Resposta em Frequência</u>:

A resposta em frequência será caracterizada por:

$$H(w) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn}.$$

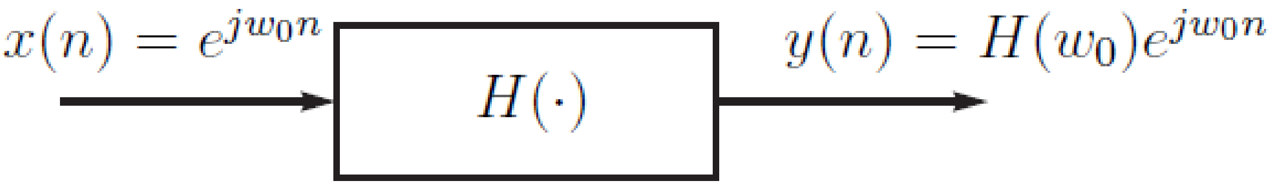
Seja uma entrada com frequência Ω_0, ou seja, $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$. A resposta do sistema pode ser calculada através da convolução, ou seja,

$$y(n) = h(n)*e^{jw_0 n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)e^{jw_0(n-k)} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jw_0 k}\right] e^{jw_0 n} = H(w_0)e^{jw_0 n},$$

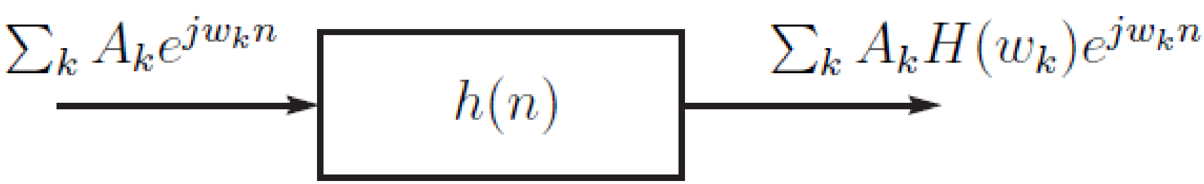
Análise em Frequência

<u>Função de Transferência e Resposta em Frequência</u>:

A expressão anterior pode ser representada por:



Ou ainda,



Análise em Frequência

<u>Função de Transferência e Resposta em Frequência</u>:

O fator de amplificação da resposta é relacionado à magnitude (ou ganho) dada por $|H(\omega_k)|$ e a defasagem da resposta é relacionada ao ângulo de fase $|\theta(\omega_k)|$. Estes valores podem ser obtidos através dos diagramas de Bode para a frequência de interesse.

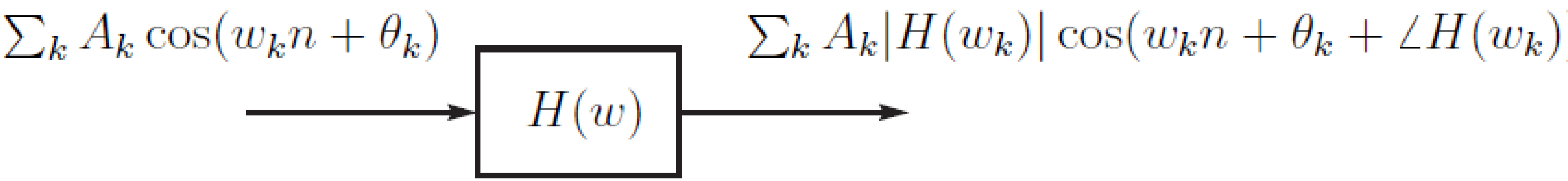
Seja $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta_0)$ a entrada de um sistema linear e invariante cuja resposta ao impulso é $h(n)$. A resposta $y(n)$ em regime será dada por:

$$y(n) = A|H(w_0)|\cos(w_0 n + \theta_0 + \angle H(w_0)),$$

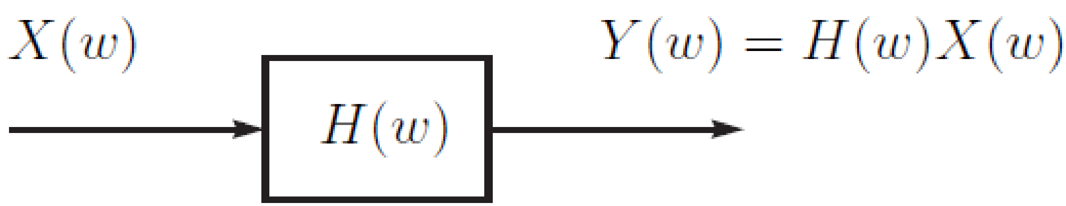
Análise em Frequência

<u>Função de Transferência e Resposta em Frequência</u>:

que pode ser representado como:



Sejam as transformadas da entrada *X(ω) = F[x(n)]* e da saída *Y(ω) = F[y(n)]*. Logo, através da propriedade da convolução tem-se a relação *Y(ω) = H(ω)X(ω)*, que está ilustrada abaixo.

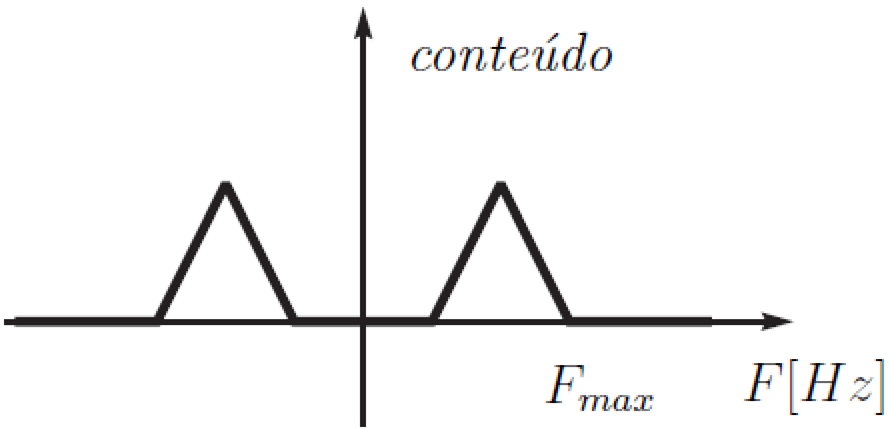


Análise em Frequência

Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial:

Para evitar o aliasing a frequência de amostragem deve ser adequadamente escolhida.

Seja um sinal analógico com conteúdo em frequência conhecido conforme ilustrado abaixo.



Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

Como $F_{max} = F_s/2$, então $F_s = 2F_{max}$. Portanto, se $F_s \geq 2F_{max}$ não haverá aliasing.

O teorema de Shannon (ou teorema da amostragem) estabelece que um sinal analógico contendo componentes até a máxima frequência F_{max} pode ser completamente representado através de uma amostragem (de mesmo espaçamento) quando a frequência de amostragem for $F_s \geq 2F_{max}$.

Análise em Frequência

Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial:

Algumas considerações sobre o teorema da amostragem são:

- ✓ Se o conteúdo em frequência é desconhecido, então define-se uma faixa de frequência de interesse e filtra-se o sinal. Contudo, os filtros não são ideais e podem deixar ainda componentes fora da faixa de interesse. Nestes casos, utiliza-se, por exemplo, $F_s \geq 3F_{max}$ ou $F_s \geq 4F_{max}$.

- ✓ F_{max} é chamada frequência de Nyquist e $2F_{max}$ é a taxa de Nyquist.

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

Seja $x_a(t)$ analógico e absolutamente somável. A transformada e anti-transformada de Fourier são dadas por:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad ou \quad X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt.$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \quad ou \quad x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

A amostragem de $x_a(t)$ com período de amostragem T_s (intervalo de amostragem) é dada por:

$$x(n) = x_a(nT_s).$$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

O espectro de *x(n)* pode ser obtido através da transformada de Fourier, ou seja,

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwt} \quad ou \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$$

O sinal *x(n)* pode ser escrito através da transformada inversa, ou seja,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi fn}df$$

Sabe-se que $t = nT_s = n/F_s$ (relação entre *t* e *n*). Logo,

$$x(n) = x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}dF$$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

Comparando as duas últimas equações do slide anterior, tem-se que:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi fn}df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}dF$$

Como $f = F/F_s$ chega-se que,

$$\frac{1}{F_s}\int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X\left(\frac{F}{F_s}\right)e^{j2\pi nF/F_s}dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s}dF$$

Análise em Frequência

Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial:

Pode-se escrever que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})F_s}^{(k+\frac{1}{2})F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X_a(F - kF_s) e^{j2\pi n(F-kF_s)/F_s} dF =$$

$$= \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} dF,$$

pois, $e^{j2\pi n(F-kF_s)/F_s} = e^{j2\pi nF/F_s}$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

devido à periodicidade, e $X_a(F)$ no intervalo $(k - 1/2)F_s$ até $(k + 1/2)F_s$ é igual a $X_a(F - kF_s)$ no intervalo $-F_s/2$ até $F_s/2$.

Comparando as equações anteriores, escreve-se:

$$\frac{1}{F_s}\int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi nF/F_s}\,dF = \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)\right] e^{j2\pi nF/F_s}\,dF,$$

E consequentemente:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad \text{ou} \quad X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k)F_s,$$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

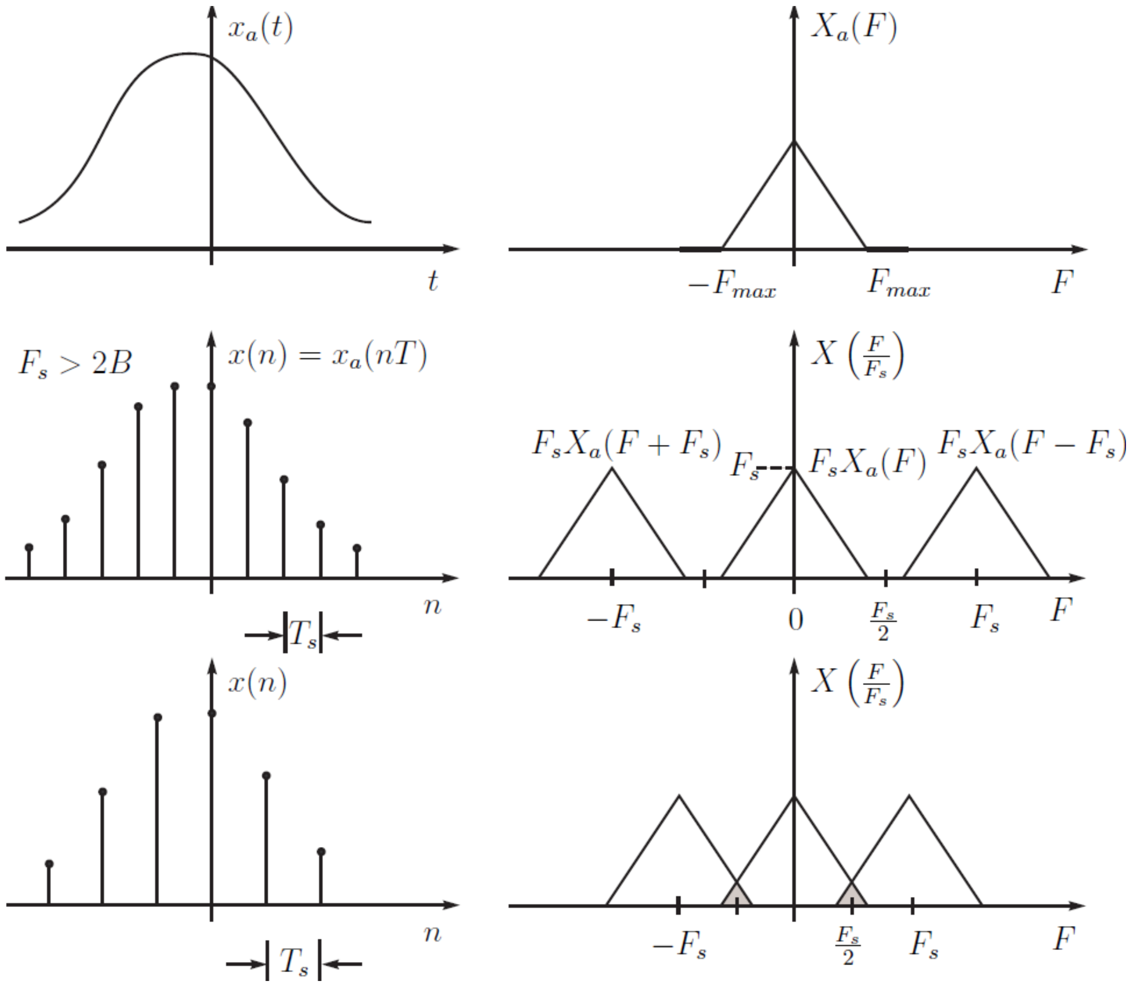
A relação anterior fornece a relação entre o espectro do sinal discreto e o espectro do sinal analógico.

Nota-se que $F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$ é a repetição do espectro $F_s X_a(F)$ com período F_s.

A figura do slide seguinte mostra o efeito do aliasing na frequência.

Análise em Frequência

Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial:



Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

Nota-se na figura anterior a perda da unicidade do espectro, ocorrendo aliasing e então $x_a(t)$ não será adequadamente reconstruído a partir de $x(n)$.

Seja $x(n)$ e seu espectro $X(F/F_s)$ sem aliasing. Logo,

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) \quad para \quad |F| \leq \frac{F_s}{2}, \\ 0 \quad para \quad |F| > \frac{F_s}{2}, \end{cases}$$

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\frac{j2\pi nF}{F_s}},$$

$$x_a(t) = \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF.$$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

Considerando a inexistência de aliasing pode-se escrever:

$$x_a(t) = \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi F t} dF =$$

$$= \frac{1}{F_s} \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\frac{j2\pi n F}{F_s}} e^{j2\pi F t} dF =$$

$$= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\frac{F_s}{2}}^{\frac{F_s}{2}} e^{j2\pi F(t-\frac{n}{F_s})} dF =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{sen[(\frac{\pi}{T})(t-nT)]}{(\frac{\pi}{T})(t-nT)},$$

Análise em Frequência

<u>Teorema da Amostragem do Ponto de Vista Frequencial</u>:

A expressão anterior representa a fórmula ideal de reconstrução do sinal contínuo a partir do sinal discreto.

Nota: a função

$$g(t) = \frac{sen[(\frac{\pi}{T})t]}{(\frac{\pi}{T})t},$$

com $T = 1/F_s = 1/2F_{max}$ representa a função de interpolação ideal.

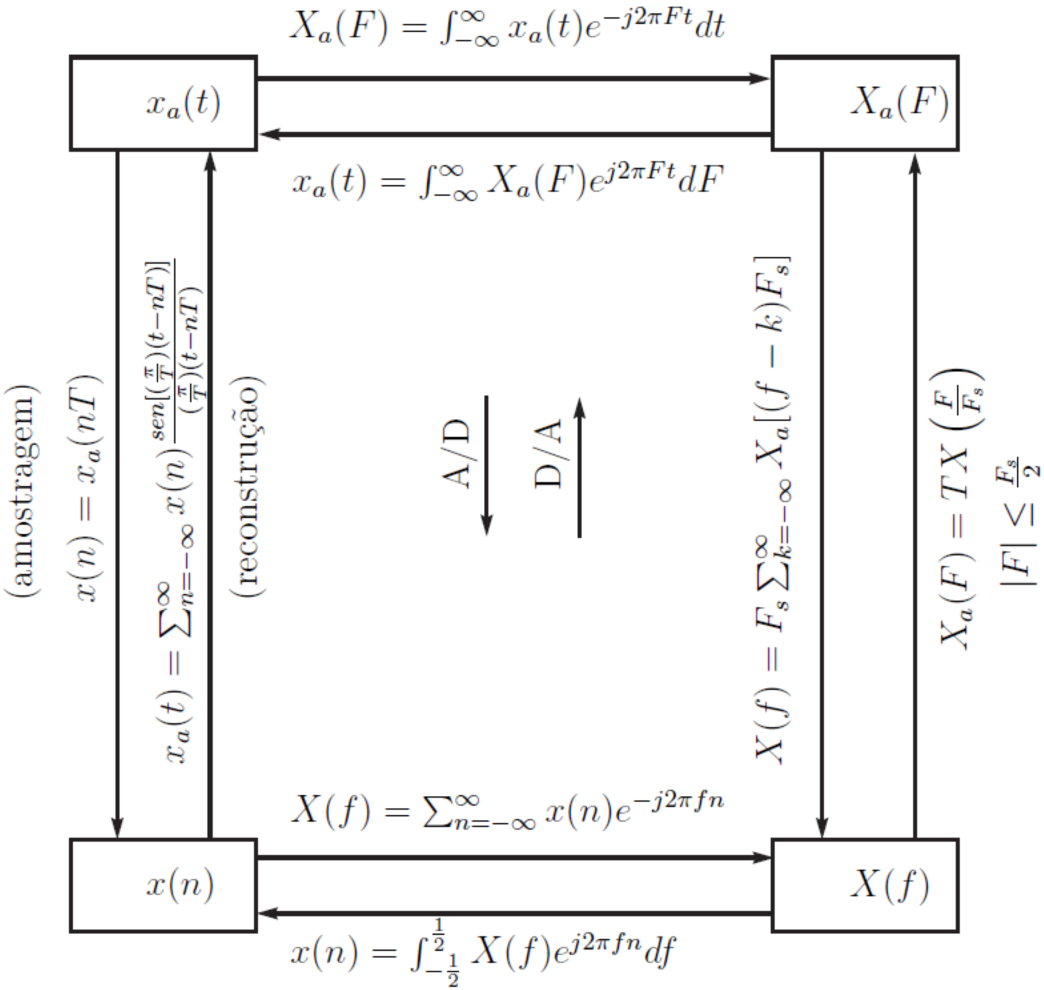
Análise em Frequência

Relações entre Domínio do Tempo e da Frequência:

A figura do slide seguinte apresenta um resumo das principais relações entre os domínios do tempo e da frequência.

Análise em Frequência

Relações entre Domínio do Tempo e da Frequência:



Análise em Frequência

<u>Relações entre Domínio do Tempo e da Frequência</u>:

Alguns pontos que merecem destaque são:

- ✓ Sinais em tempo contínuo possuem espectros não periódicos (o termo $e^{j2\pi Ft}$ é contínuo na variável t);
- ✓ Sinais em tempo discreto possuem espectros periódicos com faixa de frequência $|\omega| < \pi$ ou $|f| < 1/2$;
- ✓ Sinais periódicos possuem espectro discreto (série de Fourier);
- ✓ Sinais não periódicos com energia finita possuem espectros contínuos ($X(F)$ ou $X(\omega)$ são funções contínuas).

Problema Exemplo 12.3

Exemplo sobre a amostragem do apito de trem feito em sala com o auxílio do MATLAB.

Encerramento

Final da aula 12.

Exercícios Propostos:

Exercícios de 1 a 4 da lista disponibilizada no GoogleClass 'Lista Aliasing em Frequência'.

Próxima aula:

Exercícios.

26/09/2019