

Estudio numérico del flujo de Hele-Shaw con succión

Universidad de los Andes



Carlos Daniel Contreras Quiroz

Director: Ahmed Ould

9 de julio de 2020

*En memoria de
Alexander Vasiliev*

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a toda mi familia y amigos, por quienes considero que mi días valen la pena ser vividos. En especial a mi mamá y papá, por todo su esfuerzo y dedicación a lo largo de los años, les debo todo lo que soy.

Y agradezco a mis profesores, de quienes he aprendido cosas, de la matemática y de la vida, que no se aprenden de los libros. En particular a Ahmed, quien me propuso y ayudó en este trabajo del que he aprendido tanto y quien me mostró en un principio el camino del análisis numérico. También a Monika y Xavier, de quienes aprendí cómo se hacen matemáticas y me inspiraron a querer seguir aprendiéndolas.

Índice general

1. Introducción	1
2. El modelo	3
2.1. Ecuaciones de movimiento	4
2.2. Reformulación de Hou-Lowengrub-Shelley	11
2.3. Resultados Analíticos	19
3. Solución Numérica	23
3.1. Cálculo de derivadas	24
3.2. Cálculo de integrales	26
3.3. Integración temporal	28
3.4. Ecuación integral	31
3.5. Control de ruido	34
3.6. Detalles de implementación	35
4. Resultados	38
4.1. Estado inicial circular	38
4.2. Dos puntos de succión	45
4.3. Estado inicial elipsoidal	47
4.4. Expansión de una burbuja de Howison	48
5. Conclusiones y posibles mejoras	51

Índice de figuras

2.1. Flujo de Hele-Shaw. Extraída de [1]	5
2.2. Burbuja de fluido 1 rodeada de fluido 2 con punto de succión en el origen. Extraída de [1]	8
2.3. Evolución analítica de una burbuja con punto de succión. Extraída de [1]	22
4.1. Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0$, $A_\mu = 1$ y $N = 2048$	39
4.2. Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 1$ y $N = 512$	40
4.3. Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$	42
4.4. Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$	43
4.5. Zoom cerca al punto de succión de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$	44
4.6. Ángulo tangencial en la evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 2048$ cerca del punto singular . . .	45
4.7. Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0$ y $A_\mu = 1$ con puntos de succión en $(-0.1, 0.1)$ y $(-0.1, -0.1)$ y $N = 2048$. . .	46
4.8. Evolución de burbuja inicialmente elipsoidal con $S = 0$ y $A_\mu = 1$ con punto de succión en $(-0.4, 0)$ y $N = 512$	47
4.9. Evolución de burbuja inicialmente elipsoidal con $S = 0.01$ y $A_\mu = 1$ con punto de succión en $(-0.4, 0)$ y $N = 256$	48
4.10. Expansión de burbuja con $S = 0.001$, $A_\mu = -1$ y $N = 256$ con punto de inyección en $(0, 0)$	49
4.11. Expansión de burbuja con $S = 0.00025$, $A_\mu = -0.6$ y $N = 256$ con punto de inyección en $(0, 0)$	50

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo vamos a estudiar numéricamente un problema en mecánica de fluidos planteado por *Henry Selby Hele-Shaw* (1854-1941) a finales del siglo XIX. El problema general consiste en estudiar cómo se mueve un fluido que se encuentra entre dos placas paralelas ligeramente separadas, y que puede ser succionado o inyectado a través de un pequeño agujero. El estudio de este tipo de problemas es importante en la industria por su aplicación en la extracción petrolífera, donde se inyecta agua para extraer la mayor cantidad de petróleo posible.

Bajo ciertas simplificaciones sensatas, es posible construir un modelo cuyas ecuaciones de movimiento son suficientemente sencillas como para obtener ciertos resultados analíticos y plantear esquemas numéricos que permitan obtener información precisa de como evoluciona el sistema a partir de una condición inicial.

Particularmente, estudiaremos el caso particular en el que se tiene una burbuja de un fluido 1 rodeada de otro fluido 2 menos viscoso y no miscible en él, y se está succionando a tasa constante fluido por un punto. Veremos como este problema desarrolla interfaces irregulares a pesar de empezar con una condición inicial suave. Además, estudiaremos el efecto regularizador que se obtiene al incluir la tensión superficial en la interfaz de los fluidos. Este problema modernamente se enmarca en lo que hoy se denominan problemas de crecimiento Laplaciano, del cual otros ejemplos son diversos modelos de cristalización en superficies y la formación de patrones en las olas oceánicas.

Existen diversos tipos de métodos numéricos que permiten estudiar la evolución de este tipo de problemas, los cuales se basan en diferentes perspectivas para realizar la discretización y establecer el esquema de evolución. En este caso usaremos

el esquema de *descomposición en pequeñas escalas* propuesto por Hou, Lowengrub y Shelley en [2], que ha sido usado en diferentes situaciones para estudiar el flujo en diversas condiciones. Por ejemplo, en [3] se usa este método para estudiar la evolución de una burbuja circular con un punto de succión fuera de su centro en diferentes condiciones de tensión superficial.

Finalmente, dada la considerable extensión que adquiriría el documento si se realizara un estudio matemático detallado de todos los métodos utilizados, decidí solo presentar una idea general que diera cuenta de los aspectos globales que se han de tener en cuenta al usar este esquema numérico, y para detalles individuales referiré a la literatura adecuada. Además, en el siguiente repositorio se encuentra una implementación en python del algoritmo descrito. <https://github.com/CarlosContrerasQ12/HeleShaw>

Capítulo 2

El modelo

Muchos problemas matemáticos interesantes surgen del modelaje de sistemas físicos reales, los cuales pueden producir ecuaciones cuyas soluciones presentan un comportamiento singular. El abordaje teórico de las características de las posibles soluciones es muy revelador, pero en general demasiado complicado para producir resultados concretos. Por lo cual, es necesario desarrollar métodos numéricos efectivos que tengan en cuenta todas las particularidades del problema y las utilicen para plantear esquemas funcionales con la capacidad de obtener resultados precisos que puedan ser útiles, o bien solo satisfagan el deseo de conocer.

Uno caso particular del mundo real que produce modelos con propiedades interesantes, es el que involucra el estudio de la propagación libre de interfases en mecánica de fluidos. Este problema consiste en determinar cómo se moverá la frontera de un fluido dependiendo de las condiciones que lo rodean, por ejemplo determinar cómo se mueve el agua en la superficie del océano por su interacción con el flujo viento. Para modelar este tipo de sistemas, es necesario definir las ecuaciones de movimiento que lo rigen e involucrar su interacción con el exterior mediante condiciones de frontera. En este caso, la dinámica se modela mediante las ecuaciones de Navier-Stokes y para la interacción con el exterior existen varios modelos.

Por lo general, la dinámica de estos sistemas es muy complicada, lo que se ve reflejado en el comportamiento caótico de las soluciones, en las cuales pequeñas variaciones en las condiciones iniciales conducen a divergencias muy grandes en el comportamiento de las soluciones correspondientes. Además de esta propiedad, también se pueden desarrollar singularidades, en donde se pierde la suavidad inicial, en la evolución del sistema. Estas características implican que la aplicación

ingenua de procesos de discretización para su solución numérica genere esquemas inestables, que en el mejor de los casos no converjan antes de dar resultados erróneos.

En este documento se tratará un caso particular de un ejemplo de este tipo de sistemas, denominado el flujo de Hele-Shaw. En este capítulo se planteará el problema y un modelo matemático que lo describe. En el capítulo 3 se describirá un esquema de solución numérica basado en este modelo, resaltando las dificultades particulares que han de ser resueltas para conseguir descripciones numéricas precisas. Finalmente, en el capítulo 4 se presentarán algunos resultados que se pueden obtener con este esquema aplicado en diversos contextos.

2.1. Ecuaciones de movimiento

El caso que se va a estudiar es el del flujo bidimensional en una celda de Hele-Shaw. Este consiste en estudiar la dinámica de fluidos viscosos que se mueve en el espacio entre un par de placas paralelas ligeramente separadas. Dada la similitud de las ecuaciones de movimiento en este problema con las que describen flujos saturados en medios porosos, su estudio se hace importante por su utilidad en el proceso de extracción de petróleo. En este caso, el petróleo está rodeado de agua, que es un fluido menos viscoso, y se desea extraer mediante un punto de succión maximizando la cantidad obtenida.

Primero estudiemos el movimiento de un fluido en una celda de Hele-Shaw, siguiendo el tratamiento propuesto en [1]. Se consideran un par de placas separadas una distancia b , entre las cuales existe un fluido incompresible con viscosidad μ , densidad ρ , y cuya dinámica está descrita por un campo de velocidades \mathbf{v} y presiones p . Además, se usa un sistema coordenado en el que la placa inferior está en el plano xy y la superior está b unidades arriba en el eje z . Se asume que el flujo es paralelo a las placas, la velocidad del fluido se anula en las paredes y la máxima velocidad se alcanza en la mitad de la celda. Una sección transversal del flujo se muestra en la figura 2.1.

En este caso, las ecuaciones de Navier-Stokes junto con la condición de incompresibilidad proporcionan una descripción para el comportamiento del sistema, estas

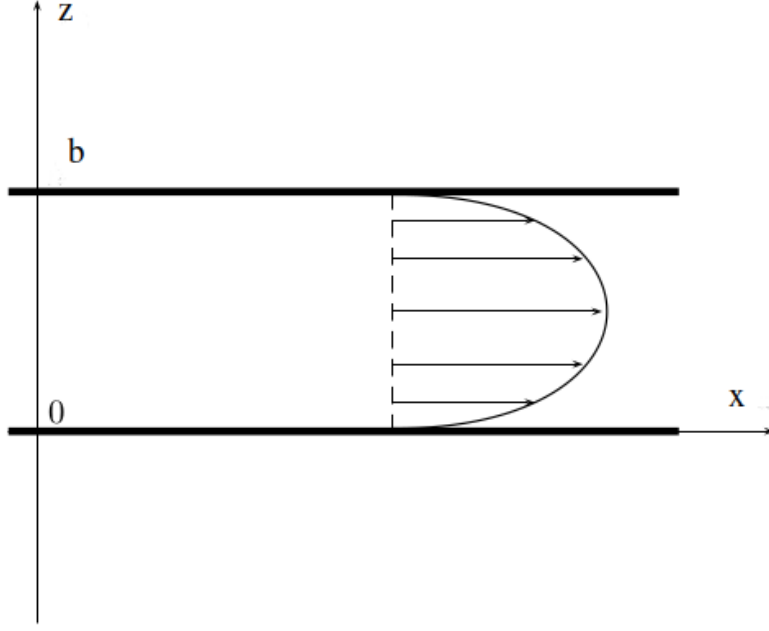


Figura 2.1: Flujo de Hele-Shaw. Extraída de [1]

son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La condición de flujo paralelo y la hipótesis adicional de estabilidad en el campo de velocidades permiten asumir que $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ y $v_z = 0$ en todo punto. De esta manera, estas ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned} \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_x \\ \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_y \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

con las condiciones de frontera

$$v_x|_{z=0,b} = v_y|_{z=0,b} = 0. \quad (2.3)$$

Además, si b es suficientemente pequeño y el flujo es lento, podemos asumir también que las derivadas de v_x y v_y con respecto a x y y son despreciables comparándolas con sus derivadas en la variable z , esto nos permite suponer

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = 0 \quad (2.4)$$

y

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, el sistema inicial se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

del cual se puede concluir que la presión p no depende de la variable z y además v_x y v_y son funciones polinómicas de a lo sumo grado tres en la variable z . Si a este sistema de ecuaciones se le aplican las condiciones de frontera (2.3) se obtiene

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{z^2}{\mu} - \frac{bz}{\mu} \right) \quad (2.7)$$

y

$$v_y = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{z^2}{\mu} - \frac{bz}{\mu} \right), \quad (2.8)$$

lo que implica que, promediando estas velocidades sobre el espesor de la celda, se tiene

$$\tilde{v}_x = \frac{1}{b} \int_0^b v_x dz = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.9)$$

y

$$\tilde{v}_y = \frac{1}{b} \int_0^b v_y dz = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Lo anterior se resume en que el promedio del campo de velocidades sobre el eje z satisface la ecuación en dos dimensiones

$$\tilde{v} = -\frac{b^2}{12\mu} \nabla p, \quad (2.11)$$

que es denominada la *ecuación de Hele-Shaw*, y tiene la misma forma que la ley de Darcy, que describe el movimiento de un fluido en medios porosos.

Además, usando la condición de incompresibilidad, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, se deduce que la presión del fluido satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2.12)$$

y por lo tanto, el campo de velocidades tiene un potencial ϕ que lo describe, es decir $\nabla \phi = \mathbf{v}$.

De ahora en adelante trabajaremos con esta descripción bidimensional de los fluidos dada por la ecuación de Hele-Shaw (2.11), donde p es el campo de presiones del fluido y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es su campo de velocidades, promediadas en el eje z , sin la tilde para simplificar la notación.

Vamos a estudiar el problema en que se tiene una celda de Hele-Shaw en la cual existe una burbuja de un fluido 1 con viscosidad μ_1 , densidad ρ_1 y descrito por un campo de velocidades \mathbf{v}_1 y presión p_1 , rodeado de un fluido 2 con viscosidad μ_2 , densidad ρ_2 y descrito por un campo de velocidades \mathbf{v}_2 y presión p_2 . Además, supongamos que se está extrayendo líquido de la burbuja interna a una tasa fija Q , mediante un punto en el origen coordenado, que está contenido en el fluido 1. Esta situación se esquematiza en la figura 2.2.

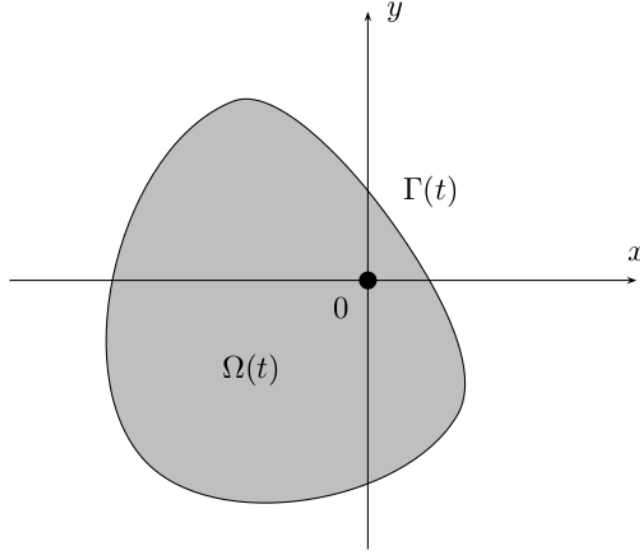


Figura 2.2: Burbuja de fluido 1 rodeada de fluido 2 con punto de succión en el origen. Extraída de [1]

Vamos a seguir el tratamiento presentado en [3] y [2]. Nuestro objetivo será describir la evolución de la interfaz entre los fluidos, que será denominada Γ , conforme se extrae el fluido.

En este caso, vamos a parametrizar la interfaz, que de ahora en adelante denotaremos por Γ , de los fluidos mediante un parámetro $\alpha \in [0, 2\pi]$, que define sus coordenadas cartesianas en un tiempo t , $\Gamma(\alpha, t) = (x(\alpha, t), y(\alpha, t))$. Ambas funciones $x(\alpha, t)$ y $y(\alpha, t)$ son funciones periódicas en el parámetro α con periodo 2π .

El movimiento de los fluidos tiene que satisfacer ciertas propiedades de continuidad en la interfaz entre ellos. En primer lugar, se debe imponer que las partículas en la interfaz permanezcan en ella a lo largo de la evolución del flujo. Esto se logra imponiendo la llamada *condición de frontera cinemática*, la cual establece que las componentes normales de las velocidades de los fluidos en su interfaz deben ser iguales, es decir,

$$[\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{\Gamma} = 0, \quad (2.13)$$

en donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario exterior a Γ y se usa la notación $[f]_{\Gamma} = f_1 - f_2$ para representar la diferencia de la cantidad f en el fluido 1 con respecto al fluido 2.

Esta condición no impone restricciones sobre la velocidad tangencial de los fluidos en la interfaz, por lo que se puede presentar una discontinuidad en esta. Cuando esto sucede, se dice que se tiene un *vortex sheet*, cuya magnitud, denotada por γ , es la diferencia entre las componentes tangenciales de la velocidad en la interfaz, $\gamma = [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{s}}]_\Gamma$, denotando por $\hat{\mathbf{s}}$ el vector tangencial unitario a la interfaz. La velocidad tangencial no influye en la evolución de la forma de la frontera, solo determina como se mueven las partículas tangencialmente a esta. Por lo tanto, existe libertad en la elección de esta velocidad tangencial que puede ser aprovechada para implementar métodos numéricos más sencillos o precisos.

Por otro lado, en la ausencia de fuerzas no conservativas, se debería tener continuidad en el potencial de la velocidad, que está asociado a la presión en la interfaz, esto es, se debería cumplir $[p]_\Gamma = 0$. Sin embargo, el problema de evolución de la frontera bajo estas condiciones está mal planteado en el sentido de Hadamard. En este caso, este mal planteamiento resulta en que a pesar de tener una condición inicial regular, la evolución puede llevar a un estado irregular en tiempo finito. Este comportamiento se evidenciará numéricamente más adelante.

Una manera de regularizar el problema es considerando el efecto de la tensión superficial que se presenta en la interfaz de un fluido con el medio que lo rodea. En este caso, los fluidos interactúan mediante fuerzas intermoleculares con las partículas cercanas a la superficie, generando una fuerza no conservativa entre ellos, que al final se ve reflejada en un cambio en la presión en la frontera de los fluidos. Además, entre mayor sea la deformación local de la interfaz, mayor será este cambio de presión. Este efecto se puede modelar mediante la denominada *condición de frontera de Laplace-Young*, que establece

$$[p]_\Gamma = \tau \kappa, \quad (2.14)$$

es decir, el cambio de la presión de los fluidos en la interfaz está relacionado con la tensión superficial τ y la curvatura de la frontera κ entre los fluidos. Esta curvatura se puede calcular mediante su definición geométrica en términos de la parametrización de la interfaz con el parámetro α mediante

$$\kappa = \frac{x_\alpha y_{\alpha\alpha} - x_{\alpha\alpha} y_\alpha}{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.15)$$

Finalmente, para tener en cuenta el flujo neto en ambos fluidos que se produce por el punto de succión en el fluido 1, se debe establecer la siguiente condición de

frontera en el infinito

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \rightarrow Q \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

que representa un flujo global radial hacia el centro con tasa de succión $Q < 0$.

En la descripción de la evolución de la frontera es útil usar una descripción en el plano complejo, aprovechando que tenemos un sistema en dos dimensiones. Vamos a describir los puntos en la interfaz mediante la variable compleja $z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$, y vamos a usar la variable $W = v_x(\alpha, t) - iv_y(\alpha, t)$ para representar la velocidad compleja conjugada de estos puntos, tomada como el promedio de velocidades en ambos lados de la interfaz $\mathbf{u} = \overline{W} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{2}$.

Para determinar la evolución de la burbuja es posible usar la *fórmula de Birkoff-Root*, que expresa la velocidad conjugada de la interfaz como una integral de frontera más la contribución del punto de extracción de fluido, esta expresa

$$W = \frac{Q}{z(\alpha, t)} + \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha', \quad (2.17)$$

donde $P.V.$ denota el valor principal de la integral y se toma en este caso la magnitud no normalizada del vortex sheet, $\gamma = s_\alpha[\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{s}}]_\Gamma$, con $s_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2$. Esta expresión para la velocidad compleja conjugada viene de resolver la ecuación de Laplace que gobierna el sistema, junto con sus condiciones de frontera, mediante su función de Green en el espacio que ocupa el fluido en un momento determinado. Una derivación completa para esta representación de la velocidad compleja puede encontrarse en [4].

Además, podemos obtener una ecuación integral para γ y así tener una descripción completa de la evolución del sistema. Para ello usamos la ecuación de Hele-Shaw para calcular

$$\begin{aligned} (\nabla p_1 - \nabla p_2) \cdot \hat{\mathbf{s}} &= \left(\frac{12\mu_2}{b^2} \mathbf{u}_2 - \frac{12\mu_1}{b^2} \mathbf{u}_1 \right) \cdot \hat{\mathbf{s}} \\ &= -\frac{12}{b^2} (\Delta\mu \mathbf{u} + \bar{\mu}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde se definió $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ y $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{2}$. De esta manera, usando la definición de la magnitud del vortex sheet sin normalizar, obtenemos

$$\gamma = -s_\alpha \frac{\Delta\mu}{\bar{\mu}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{s}} - s_\alpha \frac{b^2}{12\bar{\mu}} \nabla(p_1 - p_2) \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (2.19)$$

En particular, usando la condición de frontera de Laplace-Young y la velocidad compleja conjugada, podemos escribir esto de manera sencilla como

$$\gamma = 2A_\mu \text{Re}(z_\alpha W) + S\kappa_\alpha, \quad (2.20)$$

donde se denota por $A_\mu = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$ el coeficiente de viscosidad de Atwood y $S = \frac{b^2\tau}{12\mu}$ el parámetro escalado de tensión superficial. Aquí usamos el hecho de que un producto punto entre dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ puede expresarse como la parte real del producto de sus números complejos asociados, es decir, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = \text{Re}((a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2))$.

Si elegimos $Q = -1$ para simplificar, tendríamos en resumen que las siguientes ecuaciones son suficientes para describir el movimiento de la interfaz en el caso de un punto de succión en el interior del fluido 1,

$$W = -\frac{1}{z(\alpha, t)} + \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' + A(\alpha, t) \frac{\bar{z}_\alpha(\alpha, t)}{|z_\alpha(\alpha, t)|}, \quad (2.21)$$

donde $A(\alpha, t)$ es una función arbitraria que determina el marco de la parametrización, pero no afecta el movimiento de la interfaz. Y además, γ satisface la ecuación integral

$$\gamma(\alpha, t) = 2A_\mu \text{Re} \left(\frac{-z_\alpha(\alpha, t)}{z(\alpha, t)} + \frac{z_\alpha(\alpha, t)}{2\pi i} P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' \right) + S\kappa_\alpha. \quad (2.22)$$

Un marco común para la parametrización es el llamado marco Lagrangiano, dado por $A = \gamma/(2|z_\alpha|)$, el cual tiene la propiedad de aglomerar partículas cerca de gradientes de curvatura en donde se necesita más resolución, haciendo necesario un menor número de puntos. Sin embargo, es posible seleccionar otro tipo de marcos que permitan otro tipo de simplificaciones.

2.2. Reformulación de Hou-Lowengrub-Shelley

Una vez obtenidas las ecuaciones de evolución del sistema, nos interesa obtener descripciones numéricas precisas de cómo evoluciona un estado inicial particular. Para ello es necesario realizar discretizaciones espaciales y temporales para las variables de estado, y realizar aproximaciones para calcular las cantidades involucradas. Sin embargo, implementar este proceso ingenuamente puede llevar a

resultados incorrectos o poco precisos dada la susceptibilidad en la evolución del sistema a pequeñas variaciones involuntarias involucradas en el cálculo, incluyendo los errores sistemáticos de redondeo que existen en el computo y el error de truncamiento asociado a la discretización.

Particularmente, el caso donde se incluye la tensión superficial como un parámetro regularizador es susceptible a este tipo de problemas numéricos. En este caso, el mal condicionamiento del sistema es debido al término de curvatura que aparece en la ecuación (2.22), que involucra el cálculo de derivadas de ordenes superiores que interfieren en la dinámica de la interfaz de una forma no lineal y no local. La aplicación directa de métodos implícitos de evolución, que serán descritos posteriormente, resulta complicada debido a este carácter no lineal y no local. Además, este término también impone restricciones de estabilidad serias para los métodos explícitos que se intenten aplicar, resultando en tiempos de cómputo intratables.

Para resolver este inconveniente en el tratamiento numérico, Hou, Lowengrub y Shelley [2] reformularon el problema de tal manera que fuera sencillo separar la influencia de los términos que producen inestabilidad numérica, que solo se presentan en pequeñas escalas, de los términos que no reflejan este comportamiento, denominando a este nuevo tratamiento como la *descomposición de pequeña escala*. En esta formulación se cambia el uso de las coordenadas x, y para describir el estado de la frontera, por el uso del ángulo tangente a la interfaz θ , que es el ángulo entre el vector tangente a la curva y el eje x , y su longitud L .

Para describir la evolución del sistema, se descompone la velocidad de los puntos en la interfaz en su componente normal y su componente tangencial,

$$\mathbf{u} = (v_x, v_y) = U\hat{\mathbf{n}} + T\hat{\mathbf{s}}, \quad (2.23)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario interior a la interfaz, U la componente normal de la velocidad, $\hat{\mathbf{s}}$ el vector tangencial unitario y T la componente tangencial de la velocidad. Como fue mencionado anteriormente, existe libertad en escoger la velocidad T , pues no altera la dinámica de la frontera, solo modifica el marco de la parametrización.

La evolución está controlada unicamente por la velocidad en la componente normal U , en la que se encuentran implícitos los términos que producen el mal condicionamiento asociado al sistema.

En un instante fijo de tiempo, es posible usar la parametrización de la curva en sus coordenadas cartesianas, $(x(\alpha), y(\alpha))$, para obtener expresiones para los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{s}}$. El vector tangencial sin normalizar se calcula mediante

$$\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(x, y) = (x_\alpha, y_\alpha), \quad (2.24)$$

donde definimos que el subíndice α denota la derivación respecto a este parámetro. Por lo tanto, el vector tangencial unitario a la interfaz es

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{(x_\alpha, y_\alpha)}{\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}} = \frac{(x_\alpha, y_\alpha)}{s_\alpha}. \quad (2.25)$$

El vector normal unitario a la curva debe cumplir la condición $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0$, por lo que eligiendo el vector que cumple esta necesidad y apunta en la dirección interna de la curva, se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(-y_\alpha, x_\alpha)}{\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}} = \frac{(-y_\alpha, x_\alpha)}{s_\alpha}. \quad (2.26)$$

Por otro lado, podemos usar la representación en el plano complejo de la interfaz con la variable $z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$ para escribir convenientemente la velocidad normal como

$$U = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (v_x, v_y) \cdot \frac{(-y_\alpha, x_\alpha)}{s_\alpha} = \frac{v_y x_\alpha - v_x y_\alpha}{s_\alpha} = -\frac{1}{s_\alpha} \text{Im}(z_\alpha W). \quad (2.27)$$

Recordemos que la inestabilidad numérica se debe a la aparición de derivadas de ordenes superiores en la ecuación (2.22), mediante el termino de curvatura. Por lo tanto, la inestabilidad en U está asociada a la integral de valor principal que involucra el cálculo de W en la ecuación (2.27). Es decir, el problema principal de inestabilidad está implícito en la integral

$$P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha'. \quad (2.28)$$

La idea principal de la reformulación de Hou-Lowengrub-Shelley es separar el comportamiento a pequeña escala de esta expresión integral, únicamente tomando el término de comportamiento lineal en la expansión del kernel de integración sobre la interfaz. Esto es, se separa el kernel de integración como

$$\frac{1}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} = \frac{1}{z_\alpha \cdot (\alpha - \alpha')} + \left[\frac{1}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} - \frac{1}{z_\alpha \cdot (\alpha - \alpha')} \right], \quad (2.29)$$

donde el término entre los paréntesis presenta una singularidad removible cuando $\alpha = \alpha'$, siempre que z sea una función suave de α y la curva no se cruce a sí misma.

De esta manera, la integral (2.28) puede ser reescrita como

$$P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' = \frac{\pi}{z_\alpha} \mathcal{H}[\gamma] + \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha', t) g(\alpha, \alpha', t) d\alpha', \quad (2.30)$$

donde $\mathcal{H}[\gamma]$ representa la transformada de Hilbert de γ [5], definida como

$$\mathcal{H}[f](\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{\alpha - \alpha'} d\alpha', \quad (2.31)$$

y $g(\alpha, \alpha', t)$ representa los términos entre paréntesis de la ecuación (2.29), es decir

$$g(\alpha, \alpha', t) = \left[\frac{1}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} - \frac{1}{z_\alpha \cdot (\alpha - \alpha')} \right]. \quad (2.32)$$

La integral que contiene el término $g(\alpha, \alpha', t)$ actúa como un operador que suaviza γ . Así, en vista de (2.27) y (2.30), bajo hipótesis de regularidad en $z(\alpha, t)$ y suponiendo que la interfaz no se cruza a sí misma, podemos escribir la velocidad normal U como

$$U(\alpha, t) = \frac{1}{2s_\alpha} \mathcal{H}[\gamma](\alpha, t) + E[\gamma](\alpha, t), \quad (2.33)$$

donde E es un operador suavizador sobre γ .

Ahora, introducimos la notación $f \sim g$ cuando la diferencia entre f y g es más suave que f y g , con la cual, el resultado anterior expresa que

$$U(\alpha, t) \sim \frac{1}{2s_\alpha} \mathcal{H}[\gamma](\alpha, t). \quad (2.34)$$

Para establecer de forma heurística el comportamiento de γ a pequeña escala recurrimos a la ecuación (2.22). Tenemos que $\text{Re}(z_\alpha W)$ actúa como un operador suavizador sobre γ , por lo tanto, a pequeñas escalas, este término integral se vuelve despreciable respecto a la presencia explícita de γ en la ecuación. En consecuencia, el comportamiento a pequeña escala de γ viene dado por

$$\gamma \sim S\kappa_\alpha. \quad (2.35)$$

Una vez obtenidos los comportamientos de U y γ a pequeña escala, vamos a usar la formulación geométrica en coordenadas (θ, L) que permitan separar el problema de una forma clara que será útil en la implementación de métodos numéricos.

En primer lugar, construyamos una descripción de la evolución de la interfaz en términos de su ángulo tangencial θ y su métrica local de longitud de arco $s_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$. Tenemos que θ es el ángulo entre el vector tangencial unitario $\hat{\mathbf{s}}$ definido anteriormente y el eje x , el cual satisface

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{(x_\alpha(\alpha, t), y_\alpha(\alpha, t))}{s_\alpha(\alpha, t)} = (\cos(\theta(\alpha, t)), \sin(\theta(\alpha, t))). \quad (2.36)$$

De esta expresión podemos calcular $\hat{\mathbf{n}}$ con la fórmula (2.26), obteniendo

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(-y_\alpha(\alpha, t), x_\alpha(\alpha, t))}{s_\alpha(\alpha, t)} = (-\sin(\theta(\alpha, t)), \cos(\theta(\alpha, t))). \quad (2.37)$$

En particular, derivando estas dos últimas relaciones respecto a α obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_\alpha &= \theta_\alpha \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}}_\alpha &= -\theta_\alpha \hat{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_\alpha}{x_\alpha}\right), \quad (2.39)$$

y luego

$$\theta_\alpha = \left(\frac{y_\alpha}{x_\alpha} \right)_\alpha \frac{1}{\left(\frac{y_\alpha}{x_\alpha} \right)^2 + 1} = \frac{y_{\alpha\alpha}x_\alpha - x_{\alpha\alpha}y_\alpha}{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} s_\alpha = \kappa s_\alpha. \quad (2.40)$$

Para continuar, es necesario encontrar las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de θ y s_α , para ello, primero usamos las relaciones (2.38) para calcular \mathbf{u}_α , así

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(v_x, v_y) = (x_{\alpha t}, y_{\alpha t}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(U\hat{\mathbf{n}} + T\hat{\mathbf{s}}) \\ &= U_\alpha\hat{\mathbf{n}} - U\theta_\alpha\hat{\mathbf{s}} + T_\alpha\hat{\mathbf{s}} + T\theta_\alpha\hat{\mathbf{n}} \\ &= (U_\alpha + T\theta_\alpha)\hat{\mathbf{n}} + (T_\alpha - U\theta_\alpha)\hat{\mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

con lo cual podemos calcular $s_{\alpha t}$ como,

$$\begin{aligned} s_{\alpha t} &= \frac{d}{dt}\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = \frac{2x_\alpha x_{\alpha t} + 2y_\alpha y_{\alpha t}}{2\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}} \\ &= \frac{(x_\alpha, y_\alpha) \cdot (x_{\alpha t}, y_{\alpha t})}{\sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}} = (x_{\alpha t}, y_{\alpha t}) \cdot \hat{\mathbf{s}} = T_\alpha - U\theta_\alpha, \end{aligned} \quad (2.42)$$

y también θ_t de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \theta_t &= \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y_\alpha}{x_\alpha}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y_\alpha^2}{x_\alpha^2}} \cdot \frac{x_\alpha y_{\alpha t} - y_\alpha x_{\alpha t}}{x_\alpha^2} \\ &= \frac{(x_{\alpha t}, y_{\alpha t}) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{s_\alpha} = \frac{U_\alpha + \theta_\alpha T}{s_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En resumen, las ecuaciones que describen el movimiento de la interfaz en esta parametrización son

$$s_{\alpha t} = T_\alpha - \theta_\alpha U \quad (2.44)$$

y

$$\theta_t = \frac{U_\alpha + T\theta_\alpha}{s_\alpha}, \quad (2.45)$$

donde los términos que generan mal condicionamiento en el tratamiento numérico están implícitos en las pequeñas escalas espaciales de U_α .

La ventaja de esta formulación reside en que nos permite usar la descomposición en pequeñas escalas de U y γ , proporcionadas por las relaciones (2.34) y (2.35), para escribir de forma separada los términos que producen mal condicionamiento y los que no en la ecuación (2.45), de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\theta_t &= \frac{U_\alpha + T\theta_\alpha}{s_\alpha} \\
&= \frac{S}{2s_\alpha} \left(\frac{1}{s_\alpha} \mathcal{H} \left[\left(\frac{\theta_\alpha}{s_\alpha} \right)_\alpha \right] \right)_\alpha + \left[\frac{1}{s_\alpha} U_\alpha - \frac{S}{2s_\alpha} \left(\frac{1}{s_\alpha} \mathcal{H} \left[\left(\frac{\theta_\alpha}{s_\alpha} \right)_\alpha \right] \right)_\alpha \right] + \frac{1}{s_\alpha} \theta_\alpha T \\
&= \frac{S}{2s_\alpha} \left(\frac{1}{s_\alpha} \mathcal{H} \left[\left(\frac{\theta_\alpha}{s_\alpha} \right)_\alpha \right] \right)_\alpha + P(\alpha, t),
\end{aligned} \tag{2.46}$$

donde se denotan por $P(\alpha, t)$ los términos restantes en el lado derecho de la primera igualdad, esto es

$$P(\alpha, t) = \left[\frac{1}{s_\alpha} U_\alpha - \frac{S}{2s_\alpha} \left(\frac{1}{s_\alpha} \mathcal{H} \left[\left(\frac{\theta_\alpha}{s_\alpha} \right)_\alpha \right] \right)_\alpha \right] + \frac{1}{s_\alpha} \theta_\alpha T. \tag{2.47}$$

Por lo tanto, extrayendo el término dominante en la expresión para U_α , hemos obtenido una ecuación de evolución que es lineal en θ_α en el término dominante, pero no local por la transformada de Hilbert.

Finalmente, es posible realizar una simplificación más en la descripción de la dinámica del sistema. Aprovechando la libertad en la elección de la velocidad tangencial $T(\alpha, t)$, posemos convertir la ecuación en derivadas parciales (2.44) en una ecuación diferencial ordinaria, haciendo que s_α sea independiente de α en su evolución. Más aún, esta elección hace que los coeficientes espaciales en el término dominante de la ecuación (2.46) sean constantes.

Para esto, imponemos la condición a s_α de ser en todo tiempo de la evolución igual a su media, es decir

$$s_\alpha(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{\alpha'}(\alpha', t) d\alpha' = \frac{1}{2\pi} L(t), \tag{2.48}$$

donde $L(t)$ es la longitud de la interfaz en el tiempo t .

Para lograr esta condición podemos elegir inteligentemente la velocidad tangencial T , para ello derivamos la ecuación (2.48) con respecto a t y usamos la ecuación

(2.44) para obtener

$$s_{\alpha t}(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{\alpha'}(\alpha', t) d\alpha' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{\alpha'} - \theta_{\alpha'} U d\alpha' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_{\alpha'} U d\alpha', \quad (2.49)$$

y volviendo a usar (2.44),

$$T_{\alpha} = \theta_{\alpha} U - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_{\alpha'} U d\alpha', \quad (2.50)$$

por lo que, integrando con respecto a α , obtenemos

$$T(\alpha, t) = T(0, t) + \int_0^{\alpha} \theta_{\alpha'} U d\alpha' - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_{\alpha'} U d\alpha', \quad (2.51)$$

donde $T(0, t)$ es un corrimiento temporal en el marco de la parametrización, que por simplicidad se puede tomar como 0, aunque bien podría evolucionar también. En este caso, si la parametrización inicial de la frontera es tal que los puntos están igualmente espaciados, esta elección de T conservará esta propiedad a lo largo de la evolución.

Bajo esta restricción especial se cumple (2.48), y por lo tanto se puede usar la longitud de la interfaz L como parámetro para describirla en su evolución. Solo hace falta encontrar una ecuación de cambio para esta cantidad, la cual se obtiene derivando la ecuación (2.48) con respecto a t y la ecuación (2.51) respecto a α para obtener

$$\frac{dL}{dt} = 2\pi s_{\alpha t} = 2\pi(T_{\alpha} - \theta_{\alpha} U) = - \int_0^{2\pi} \theta_{\alpha'} U d\alpha'. \quad (2.52)$$

En conclusión, si se elige la velocidad tangencial como en (2.51), la evolución de la interfaz en el tiempo para el problema que estamos considerando, usando la parametrización dada por el ángulo tangencial y la longitud de la frontera entre los fluidos, viene dada por las ecuaciones

$$L_t = - \int_0^{2\pi} \theta_{\alpha'} U d\alpha' \quad (2.53)$$

y

$$\theta_t = \frac{S}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \mathcal{H}[\theta_{\alpha\alpha\alpha}] + P. \quad (2.54)$$

Veremos en el capítulo 3 la utilidad de esta formulación en el desarrollo de esquemas numéricos para estudiar la dinámica de este flujo.

2.3. Resultados Analíticos

En general, es raro que el estudio analítico de sistemas como el que hemos estudiado derive en expresiones explícitas para las soluciones y evolución del problema que se considera. Es más común encontrar argumentos de existencia y unicidad de soluciones, los cuales pueden usarse en determinados casos para diseñar esquemas numéricos que aproximen la solución. Para nuestra suerte, en el problema que estamos considerando se han encontrado ambos tipos de resultados para ciertos casos particulares, lo que lo hace particularmente interesante.

El estudio teórico del movimiento de fluidos en la celda de Hele-Shaw se basa principalmente en la estrecha relación que existe entre la ecuación de Laplace en dos dimensiones que cumple el potencial de velocidad (2.12) y la teoría de funciones holomorfas en el plano complejo. Particularmente, la teoría de mapeos conformes es útil para describir potenciales en dominios definidos en dominios que varían en el tiempo y en los cuales satisfacen la ecuación de Laplace.

Las primeras soluciones para el flujo de Hele-Shaw fueron encontradas por Polubarinova-Kochina y Galin en 1945. Estas hacen uso de dos importantes resultados en análisis complejo. El primero es que cualquier función armónica es, localmente, la parte real de una función que es analítica compleja en el dominio que ocupa el fluido, salvo posiblemente en los puntos de succión. El segundo es el teorema del mapeo abierto de Riemann, que afirma que si denotamos por $\Omega(t)$ la región del espacio ocupado por el fluido interior, entonces existe un mapeo conforme del disco unitario $\mathbb{D} = \{|\zeta| < 1, \zeta \in \mathbb{C}\}$ al dominio $\Omega(t)$.

Para ilustrar el uso de las técnicas de mapeos conformes, estudiemos un caso particular en el que podemos obtener soluciones explícitas y que podremos comparar posteriormente con los resultados numéricos. Vamos a seguir el tratamiento propuesto en [1]. Este caso es donde no se considera la viscosidad del fluido exterior, es decir $A_\mu = 1$, en el cual podemos ajustar el valor del potencial de velocidad en la frontera a la presión atmosférica, es decir imponer la condición $p = 0$ en Γ . De

esta manera, el potencial satisface el sistema

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &= Q\delta(z), \quad z = x + iy \\ p &= 0 \text{ en } \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= v_n.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Usando el primer resultado de análisis complejo mencionado anteriormente, existe un potencial complejo $\Phi(z, t)$ cuya parte real p satisface (2.55). Si aplicamos las condiciones de Cauchy-Riemman, obtenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y}.\tag{2.56}$$

Además, usando la solución fundamental para la ecuación de Laplace en 2D, obtenemos la representación para W dada por

$$W(z, t) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z) + w_0(z, t),\tag{2.57}$$

con $w_0(z, t)$ analítica en $\Omega(t)$.

Para derivar una ecuación para la evolución de $\Gamma(t)$, consideramos el plano complejo auxiliar en la variable $\zeta = \xi + i\eta$, y el mapeo conforme inyectivo $f(\zeta, t) : \mathbb{D} \rightarrow \Omega(t)$ dado por el teorema de mapeo abierto de Riemman. Con este, la forma de la interfaz se parametriza como $\Gamma(t) = \{f(e^{i\theta}, t), \theta \in [0, 2\pi)\}$. Por otro lado, si adoptamos la notación $\partial f / \partial t = \dot{f}$ y $\partial f / \partial \zeta = f'$, entonces el vector normal interior a la interfaz viene dado

$$\hat{\mathbf{n}} = -\zeta \frac{f'}{|f'|}, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D},\tag{2.58}$$

y por lo tanto, la componente normal de la velocidad se expresa como

$$U = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta \frac{f'}{|f'|} \right).\tag{2.59}$$

Por otro lado, la solución fundamental de la ecuación de Laplace es invariante ante transformaciones conformes, por lo que

$$(\Phi \circ f)(\zeta, t) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta),\tag{2.60}$$

y luego, tomando la derivada obtenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} f'(\zeta, t) = -\frac{Q}{2\pi\zeta}. \quad (2.61)$$

Finalmente, usando (2.61) en la tercera condición de (2.55), obtenemos la relación

$$\operatorname{Re}(\dot{f}(\zeta, t) \overline{\zeta f'(\zeta, t)}) = \frac{Q}{2\pi}, \quad (2.62)$$

donde ζ es un número complejo con magnitud 1. Esta ecuación es denominada la *ecuación de Polubarinova-Galin*, y sus soluciones describen la evolución de la frontera en el plano xy cuando se tiene un punto de succión en el origen coordenado contenido en un fluido en una celda de Hele-Shaw.

Es posible construir soluciones por inspección a esta ecuación. Por ejemplo, con una función polinomial de segundo grado para f dada por

$$f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2, \quad (2.63)$$

que cuando es sustituida en (2.62), resulta en las ecuaciones para los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1^2(t)a_2(t) &= a_1^2(0)a_2(0) \\ a_1^2(t) + 2a_2^2(t) &= a_1^2(t) + 2a_0^2(0) + \frac{Qt}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para cualquier condición inicial para la cual $|a_1/a_2| < 1/2$, la solución $f(\zeta, t)$ es regular en el plano xy hasta el tiempo crítico t_c cuando $|a_1/a_2| = \frac{1}{2}$, en el cual se forma un pico en la interfaz. Este tipo de evolución se ilustra en la figura 2.3, en donde se evidencia que se forma el pico antes de que la interfaz alcance el punto de succión. Este comportamiento también será evidenciado numéricamente en el capítulo 3.

Con otro tipo de funciones $f(\zeta, t)$ se pueden obtener soluciones aplicables a diferentes casos.

Por otro lado, usando este procedimiento de mapeos conformes también es posible incluir otras condiciones de frontera, como la que se necesitan para incluir el efecto de la tensión superficial[6]. Sin embargo, por la complejidad del sistema que resulta, es muy difícil construir por inspección soluciones analíticas exactas

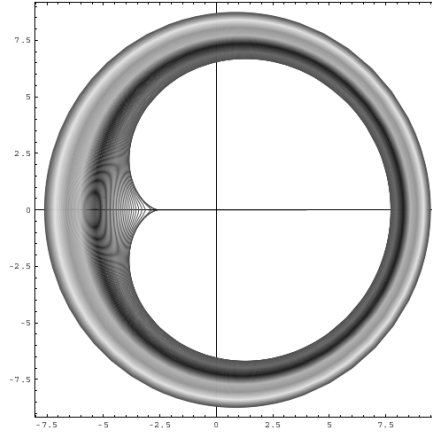


Figura 2.3: Evolución analítica de una burbuja con punto de succión. Extraída de [1]

para la ecuación de Polubarinova-Galin.

A pesar de lo anterior, mediante este método es posible establecer propiedades generales de las soluciones para diferentes casos, incluyendo la existencia de soluciones para condiciones iniciales suficientemente regulares. En particular, se ha mostrado que incluir el efecto de la tensión superficial *regulariza* el problema, es decir, no se forman cúspides en tiempo finito antes de que la interfaz alcance el punto de succión. Esta característica será también evidenciada en el capítulo 4.

Capítulo 3

Solución Numérica

Una vez establecido el modelo, procedemos a desarrollar un esquema de solución numérica. Este debe contemplar que existen varios aspectos en las ecuaciones de evolución que no son tratables mediante métodos estándar. Un esquema que ha probado ser eficiente, es el contemplado en [3], el cual seguiremos en este documento, realizando ligeras modificaciones según convenga. En este capítulo se presentan detalles de los esquemas utilizados para calcular diferentes partes del problema, así como una justificación de porqué son útiles en este caso al mantener un error aceptable que no se propague de sobremanera y arruine los cálculos.

El método implementado es un *método de elementos en la frontera*. Este tipo de métodos se utilizan cuando se dispone de una representación integral sobre la frontera de la solución de la ecuación diferencial que se desea resolver. En el caso del problema bidimensional en una celda de Hele-Shaw, la ecuación para el potencial de la velocidad es la ecuación de Laplace con ciertas condiciones de frontera. Para esta ecuación se conoce la solución en términos de una integral sobre los valores de la función en la frontera, mediante lo que se denominan *double layer potentials* y *single layer potentials* [7]. La aplicación de estos métodos resulta en la ecuación de Birkoff-Root (2.21) mencionada en el capítulo anterior.

El método consiste en discretizar la frontera eligiendo puntos en la interfaz, que se denominan partículas computacionales, y calcular todas las cantidades involucradas en el modelo con aproximaciones respecto a este mallado. De esta manera, eligiendo esquemas para la aproximación de derivadas, integrales e integración temporal con propiedades de convergencia óptimas, se obtiene una solución del problema después de dejarlo evolucionar de un estado inicial.

La discretización se realiza eligiendo N puntos en la frontera del estado inicial, tomando N valores discretos del parámetro $\alpha \in [0, 2\pi)$. Esta discretización tiene un espaciamiento $h = \frac{2\pi}{N}$, y se enumeran los puntos como $\alpha_i = ih$ con $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Las cantidades se evalúan en los puntos de esta malla y usamos la notación f_i para denotar el valor que toma la cantidad f en el punto α_i .

3.1. Cálculo de derivadas

En la evolución del sistema descrita por el modelo propuesto debemos calcular derivadas espaciales (con respecto al parámetro α) de varias cantidades, como la curvatura, cuyo cálculo involucra las derivadas de las coordenadas x y y respecto a α , y también debemos calcular la derivada de múltiples velocidades.

El cálculo de estas derivadas con aproximaciones que usan información local, como aproximaciones con diferencias finitas, no proporciona la precisión suficiente para producir un esquema que sea útil en este caso. Sin embargo, todas las cantidades tienen un carácter 2π -periódico en el parámetro α , dado que están definidas sobre una curva cerrada. Esto permite el uso de la aproximación pseudo-espectral para las derivadas, que usa información global de las funciones para el cálculo. Esta hace uso de la transformada de Fourier y sus propiedades para calcular con orden espectral (el error de truncamiento decrece mejor que cualquier potencia entera de h) aproximaciones de la derivada.

Primero, recordemos de manera intuitiva y sin rigurosidad algunas propiedades elementales del análisis de Fourier, siguiendo el tratamiento propuesto en [8]. La transformada de Fourier para funciones f , con las propiedades adecuadas de regularidad e integrabilidad, se define como

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

que da cuenta de la densidad de amplitud que posee la función f en la frecuencia con número de onda k . En general esta transformación es invertible, siendo posible reconstruir una función f a partir de su transformada mediante la transformada inversa, definida como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

La operación de derivación en el espacio real se convierte en un producto en el espacio de Fourier. Esto se puede ver derivando (3.2) con respecto a x , obteniendo

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)e^{ikx} f(k) dk, \quad (3.3)$$

por lo que los coeficientes de la transformada de Fourier de f' son los de f multiplicados por ik .

Si no se dispone de información en el caso continuo para la función f , sino en un conjunto discreto de puntos, entonces se puede usar la transformada discreta de Fourier. Si se tienen los valores de una función f evaluados en los puntos de una malla discreta con N un número par de puntos sobre un intervalo en el cual la función es periódica, entonces se definen los valores de la transformada discreta de Fourier (DFT) como

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{-N/2+1}^{N/2} f_j e^{-ik\alpha_j}, \quad (3.4)$$

y a partir de estos coeficientes se pueden reconstruir los valores de la función f en la malla mediante la transformada discreta inversa de Fourier, que está dada por

$$f_j = \sum_{-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_k e^{ik\alpha_j}. \quad (3.5)$$

Teniendo los valores de una función en una malla, el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) permite calcular de manera muy eficiente la transformada discreta de Fourier y también su operación inversa.

Basándose en la propiedad (3.3), es posible plantear un método para calcular la derivada de una función de la cual se conocen sus valores evaluados en los puntos de una malla en la cual es periódica. Dados f_i los N valores de la función en la malla, se debe calcular mediante la transformada rápida de Fourier su transformada discreta \hat{f}_k , luego definir los coeficientes de la transformada de la derivada como $\hat{f}'_k = ik \cdot \hat{f}_k$, imponiendo además $\hat{f}'_{N/2} = 0$, y finalmente obtener los valores de f'_i en la malla mediante la aplicación de la transformada inversa a \hat{f}'_k .

Es posible mostrar la convergencia de este esquema de diferenciación conforme $N \rightarrow \infty$, para funciones con propiedades de regularidad suficiente. Además, para

funciones periódicas infinitamente diferenciables cuyas derivadas estén en $L_2(\mathbb{R})$, se tiene que el orden de convergencia de esta aproximación es espectral. Es decir, el error de truncamiento tiende a caer más rápido que cualquier potencia de $1/N$. Esto se debe, de forma heurística, a que la transformada de Fourier de funciones suaves, que cambian lentamente, decae rápidamente cuando $|k| \rightarrow \infty$. Por lo tanto, los números de onda asociados a variaciones rápidas tendrán magnitudes pequeñas, y en consecuencia, al conservar únicamente números de onda pequeños en la discretización el error introducido es pequeño.

En este trabajo se usa este esquema de diferenciación cada vez que sea necesario calcular una derivada por su propiedad de convergencia espectral, que mantiene el error de truncamiento bajo. El uso de este esquema está justificado porque las funciones que se derivan tienen el carácter de ser infinitamente diferenciables y son periódicas en el intervalo propuesto.

3.2. Cálculo de integrales

En la descripción propuesta del problema también se deben calcular varios tipos de integrales, como las involucradas en las relaciones (2.21), (2.53) y (2.51). Para cada tipo de integral se usa un esquema de aproximación que conserva la propiedad de convergencia espectral en el número de puntos de la discretización.

El primer caso es el cálculo de integrales en las cuales la función periódica se requiere integrar hasta un punto de la parametrización α , como la segunda integral en la ecuación (2.51). Para estas integrales del estilo

$$\int_0^\alpha f(x) dx, \quad (3.6)$$

se usa un esquema basado en la transformada discreta de Fourier.

Con base en la misma propiedad que se usó en la aproximación de derivadas anteriormente, se plantea la siguiente regla de cuadratura para las integrales. Teniendo inicialmente los valores de la función a integrar evaluados en los puntos de la malla, f_i , se calculan los coeficientes de la transformada discreta con la transformada rápida de Fourier, \hat{f}_k , luego se calculan los coeficientes de la cantidad integrada dividiendo por ik , así $\hat{f}f_k = \hat{f}_k/(ik)$ y para el modo $k = 0$ se asigna $\hat{f}f_0 = 0$, finalmente se recuperan los valores de la integral deseada mediante la transformada inversa.

Este método permite calcular de forma suficientemente precisa todas las integrales que se requieren hasta el parámetro α . Además, para cada α en la discretización no es necesario calcular individualmente la integral, pues la transformada proporciona todos los valores de las integrales simultáneamente.

El segundo tipo de integrales son aquellas en que sus límites son sobre el periodo completo de la función, como es el caso de la ecuación (2.53), que es del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx. \quad (3.7)$$

Notemos que el método anterior no funciona para calcular este tipo de integrales, puesto que solo proporciona valores hasta $2\pi - h$. En cambio, se usa la sorprendente propiedad de la cuadratura usual de la regla del trapecio aplicada a funciones periódicas C^∞ , sobre las cuales tiene un orden espectral de convergencia, no solo cuadrático como en el caso general. Esto es, si se tienen los valores de la función f evaluada en los puntos de la malla, se usa el esquema de aproximación

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{N-1} f_i, \quad (3.8)$$

y se obtiene una aproximación espectral útil y económica de calcular computacionalmente para la integral.

Finalmente, el tercer tipo de integrales que se deben aproximar son las que se toman en el sentido del valor principal, ya que tienen un núcleo singular y por tanto no se pueden aplicar los esquemas anteriores. Por ejemplo, la integrales involucradas en (2.22) y (2.21) presentan esta dificultad. Para este caso, se usa el esquema propuesto en [9], que aplicado a este problema proporciona una cuadratura de la forma

$$P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha)}{z(\alpha_i) - z(\alpha')} d\alpha' \approx \sum_{\substack{j=0 \\ (j-i) \text{ impar}}}^{N-1} \frac{\gamma_i}{z_i - z_j} 2h, \quad (3.9)$$

la cual converge con precisión espectral.

3.3. Integración temporal

Para resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.10)$$

existen una variedad de métodos numéricos con diversas propiedades de convergencia, facilidad de implementación y efectividad práctica. La elección del método depende fundamentalmente del comportamiento de la función f , así como de la precisión deseada. En general, los métodos se construyen aproximando la integral

$$y = \int f(t, y), \quad (3.11)$$

mediante la evaluación de la función f en puntos discretos de tiempo. Estas aproximaciones pueden depender de una o más evaluaciones en puntos de tiempo presentes o pasados.

Es posible clasificar los esquemas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias en dos categorías, *métodos explícitos* y *métodos implícitos*. Los esquemas explícitos son aquellos que usan solo información conocida para calcular el paso siguiente en la evolución, un ejemplo de estos es el esquema de Runge-Kutta de cuarto orden, en donde se calcula el punto siguiente y_{i+1} en la evolución de la función mediante

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta t\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, y_i + \frac{1}{2}k_2\Delta t\right) \\ k_4 &= f(t_i + \Delta t, y_i + k_3\Delta t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

y Δt es el tamaño de paso en la discretización de tiempo. Así solo es usada información en tiempo presente para calcular el siguiente paso. Si se comienza con el paso $y_{i=0} = y_0$ la condición inicial, es posible calcular una aproximación de la solución en pasos discretos de tiempo posteriores. El orden del método indica de que magnitud es el error acumulado en la aproximación conforme avanza el método, en este caso el error decae como la cuarta potencia de Δt .

Este método implica tener que calcular cuatro veces la función f en diferentes puntos, lo que puede resultar poco práctico si este proceso es costoso. En consecuencia, también existen *métodos multipaso*, los cuales usan información de evaluaciones en tiempo pasado para calcular el siguiente paso en la evolución. Un ejemplo de estos métodos es el método de Adams-Bashforth de cuarto orden, en el cual el paso siguiente se calcula mediante

$$y_{i+4} = y_{i+3} + \frac{\Delta t}{24} (55f(t_{i+3}, y_{i+3}) - 59f(t_{i+2}, y_{i+2}) + 37f(t_{i+1}, y_{i+1}) - 9f(t_i, y_i)). \quad (3.14)$$

De esta manera, si se almacenan los valores de la función f evaluada en cuatro puntos anteriores, se puede calcular el punto siguiente con una sola evaluación más, reduciendo el costo de computo y conservando el orden de aproximación. Este método requiere de cuatro puntos iniciales para poder calcular todos los puntos siguientes. Si solo se dispone de la condición inicial $y(t_0) = y_0$, se pueden calcular tres pasos siguientes con un método de un solo paso, como Runge-Kutta, de orden mínimo uno menos al que tenga el método multipaso, con el objetivo de conservar el orden global del método.

El principal problema con estos métodos son las restricciones de estabilidad que sufren. A veces, dependiendo de la función f , es necesario usar espaciamientos de tiempo Δt en la discretización muy pequeños para asegurar la convergencia del método, lo cual puede ser poco práctico por la elevada cantidad de computo adicional que se requiere para llegar a cierto tiempo, o a veces inútil debido a errores de redondeo en máquinas de precisión finita. Este tipo de problemas se presentan cuando la función f contiene términos que hacen variar rápidamente la solución de la ecuación diferencial, en cuyo caso se denomina *stiff* o mal condicionada.

Para este tipo de ecuaciones se usan los métodos implícitos. En estos, a diferencia de los métodos explícitos, se usa la información de tiempo futuro para calcular el siguiente paso en la evolución. El ejemplo más sencillo es el método de Euler implícito, el cual calcula la aproximación en un paso de tiempo futuro mediante

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad (3.15)$$

en donde se debe resolver esta ecuación, que puede ser no lineal si f no lo es, para encontrar y_{i+1} . Se ha probado que este tipo de métodos presentan mejores propiedades de estabilidad, permitiendo intervalos de tiempo Δt más grandes para discretización, a costo de tener que resolver una ecuación que puede ser muy

complicada para hallar el siguiente paso de tiempo. En particular, estos métodos son aptos para resolver ecuaciones diferenciales mal condicionadas.

En el problema que estamos considerando tenemos dos descripciones con diferentes variables para la evolución de la interfaz de los fluidos en la celda de Hele-Shaw. La ecuación diferencial (2.21), junto con (2.22), proporciona un sistema completo que describe el proceso de succión del fluido en la burbuja en términos de los puntos en coordenadas cartesianas de la interfaz entre los fluidos. En el caso $S = 0$, la ecuación no posee términos que hacen variar rápidamente la solución, por lo que usar un método explícito de un orden adecuado proporciona resultados precisos. Cuando sea este caso, se discretiza la ecuación (2.21) explícitamente con el método de Adams-Bashforth de cuarto orden propuesto en (3.14).

Además, si se realiza la elección del marco Lagrangiano eligiendo $A = \gamma/(2|z_\alpha|)$, que define la velocidad tangencial de las partículas conforme avanza la simulación, entonces se aprovecha la propiedad de que bajo este marco las partículas computacionales se agrupan cerca de puntos de la interfaz donde la curvatura es alta. Esto permite tener mayor resolución en el computo cerca de puntos de tiempo críticos, donde se forman picos en la interfaz y se pierde regularidad en la solución.

En el caso donde se considera el efecto de la tensión superficial, $S \neq 0$, el sistema (2.21) junto con (2.22) incluye términos de curvatura que contienen derivadas de orden superior, los cuales provocan que el sistema sea mal condicionado por variaciones rápidas en la solución. Por lo tanto, los resultados explícitos no proporcionan buenos resultados en este caso con Δt razonables. Además, la aplicación directa de un método implícito para discretizar estas ecuaciones es poco eficiente dado el carácter no lineal y no local de la ecuación que se debería resolver para encontrar pasos de tiempo futuros, haciendo difícil implementar este tipo de métodos.

Para tratar este problema se usa la reformulación vista en el capítulo 2, en términos de las variables L y θ , cuyas ecuaciones de evolución son (2.53) y (2.54). Como se vio, la ecuación (2.53) no presenta términos de rápido crecimiento, por lo que un método explícito puede ser usado. En este caso también se usa el método de cuarto orden de Adams-Bashforth comentado anteriormente.

Los términos que generan mal condicionamiento están asociados al primer término en la ecuación (2.54). Por lo tanto, se puede aprovechar que la transformada de Hilbert se diagonaliza mediante la transformada de Fourier como $\mathcal{H}[f] = -i|k|\hat{f}$,

y así, en el espacio de Fourier la ecuación (2.54) se puede ver como

$$\hat{\theta}_t = -\frac{S}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 |k| k^3 \hat{\theta} + \hat{P}, \quad (3.16)$$

y los términos que producen mal condicionamiento siguen asociados al primer termino, que es lineal en $\hat{\theta}$.

Ahora, con esta separación entre los factores mal condicionados y los que no, se puede aplicar una discretización implícita para los primeros y una explícita para los segundos. En este caso se realiza con el esquema de cuarto orden propuesto por Asher *et al* en [10], que también es usado en [3], que permite calcular el paso siguiente en la evolución en el espacio de Fourier mediante el esquema

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{25}{12} \hat{\theta}_{i+1} - 4\hat{\theta}_i + 3\hat{\theta}_{i-1} - \frac{4}{3} \hat{\theta}_{i-2} + \frac{1}{4} \hat{\theta}_{i-3} \right) = \\ -\frac{S}{2} \left(\frac{2\pi}{L_{i+1}} \right)^3 |k| k^3 \hat{\theta}_{i+1} + 4\hat{P}_i - 6\hat{P}_{i-1} + 4\hat{P}_{i-2} - \hat{P}_{i-3}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

en el cual, en cada paso de tiempo se calcula primero L_{i+1} como fue mencionado anteriormente y se debe resolver una ecuación lineal para encontrar $\hat{\theta}_{i+1}$.

De esta manera, la aproximación de la evolución de la interfaz es de cuarto orden global en tiempo y solo presenta una restricción de estabilidad lineal dada por $\Delta t \leq Ch$, donde C es una constante y h es la longitud del intervalo en la discretización espacial, impuesta por el tratamiento explícito en los términos P en este esquema.

3.4. Ecuación integral

Teniendo un estado de la interfaz en un instante de tiempo descrito por la variable $z(\alpha, t)$, es necesario resolver la ecuación integral (2.22) para encontrar la magnitud del *vortex sheet* γ . Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversos métodos según las propiedades de regularidad que tenga el operador asociado, por ejemplo el método de Nyström es una aproximación estandar a esta clase de problemas, al igual que los metodos de colocación [11].

Sin embargo, el costo computacional de este tipo de aproximaciones es relativamente grande dado el tipo de sistemas lineales que se forman y además no tiene

buenas propiedades de escalabilidad para problemas grandes, por lo que su aplicación a este problema resulta en tiempos de computo poco prácticos. Por ejemplo, el trabajo desarrollado con estas técnicas en [2] resultó en tiempos de computo de hasta 9 días. En este tipo de problemas de evolución libre de fronteras en mecánica de fluidos este parece ser el común denominador, la parte computacionalmente costosa del problema está asociada a calcular la función que controla como es el movimiento de la interfaz, en este caso la cantidad γ .

Por lo anterior, buscar formas alternativas de calcular esta cantidad es el medio más efectivo para reducir tiempo de computo sin alterar sustancialmente los requerimientos de precisión requerida. Particularmente, en [3] se usa el hecho de que en el caso $|A_\mu| \leq 1$ el operador asociado a la ecuación Fredholm de segundo orden (2.22) posee serie de Neumann convergente, hecho demostrado en [12], por lo que es posible resolverla mediante un esquema de iteraciones de punto fijo. Esto es, para cierto γ^0 una adivinanza inicial de cual podría ser la solución de la ecuación, la sucesión recursiva

$$\gamma^{n+1} = 2A_\mu Re \left(\frac{-z_\alpha(\alpha, t)}{z(\alpha, t)} + \frac{z_\alpha(\alpha, t)}{2\pi i} P.V. \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^n(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' \right) + S\kappa_\alpha, \quad (3.18)$$

converge a la solución de la ecuación integral requerida en un tiempo menor que los métodos estándar para un numero fijo de puntos en la interfaz.

La principal dificultad con este método, al igual que con la mayoría de métodos iterativos, es la elección del vector inicial para el método. Si no se elige de manera inteligente, la convergencia podría ser muy lenta, o incluso no converger. En este caso, esta adivinanza inicial se construye mediante un proceso de extrapolación de soluciones anteriores. Esta extrapolación se realiza tomando cada punto de los cuatro γ evaluados en los puntos del mallado que se obtienen con el método de evolución temporal, y generando un spline interpolador de primer grado que se usa para predecir el punto de γ en el siguiente paso de tiempo. Eligiendo de esta manera el punto inicial de la iteración, el método converge en pocas iteraciones, siendo un promedio de 50 para los casos estudiados.

En este trabajo también se probaron otras maneras de resolver esta ecuación integral para agilizar la obtención de resultados. La primera consistió en implementar el esquema de aceleración de convergencia de Aitken [13] para la iteración de punto fijo. Lamentablemente, experimentos numéricos mostraron que el método con esta modificación pierde en general propiedades de convergencia, por lo que se descartó su uso en la implementación global del tratamiento numérico. La razón

de este fenómeno es desconocida y podría ser interesante a futuro estudiar esta pérdida de convergencia.

Por otro lado, si se considera la ecuación (2.22) en su forma discretizada en una malla con N puntos y se aproxima el valor principal de la integral con el esquema (3.9), entonces el problema puede verse como hallar la raíz de una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que tiene como argumento el conjunto de N puntos de γ evaluados en la malla, y cuyas componentes F_i en la imagen están definidas como

$$F_i = 2A_\mu Re \left(\frac{-z_{\alpha i}}{z_i} + \frac{z_{\alpha i}}{2\pi i} \sum_{\substack{j=0 \\ (j-i) \text{ impar}}}^{N-1} \frac{\gamma_i}{z_i - z_j} 2h \right) + S\kappa_{\alpha i} - \gamma_i. \quad (3.19)$$

De esta manera, el problema se reduce a encontrar la raíz de la función F . En general hallar la raíz a una función multidimensional no es una tarea sencilla, sin embargo, esta perspectiva para este problema probó ser útil bajo ciertos casos. Para encontrar la raíz a esta función se probaron tres algoritmos de conocimiento general; el método de Newton-Krylov, el método df-sane[14], y el método de Anderson.

Bajo diferentes configuraciones de parámetros, como la elección del punto inicial, el tamaño de paso y forma de aproximar el gradiente, se probaron los métodos para resolver de forma aproximada la ecuación integral. En general, bajo una buena elección de parámetros, los tres métodos llegaban a la aproximación correcta de γ y, comparada con el método de punto fijo, lo hacían en un tiempo considerablemente menor. Sin embargo, el tiempo de convergencia de estos métodos es dependiente de los parámetros que se usan, y es difícil ajustarlos para obtener siempre convergencia óptima en tiempo de ejecución, por lo que en ciertos casos y a partir de cierto punto en la simulación, es más efectivo usar iteraciones de punto fijo.

Entre los tres métodos, el que tuvo mejor desempeño fue el método de Newton-Krylov usando la misma adivinanza inicial que en las iteraciones de punto fijo. Este parece ser el menos dependiente a la elección de los parámetros entre los otros dos métodos, cuya convergencia efectiva era muy variable según el estado del sistema. De nuevo, una investigación más exhaustiva sobre la aplicación de este tipo de esquemas a este problema podría proporcionar mejores propiedades

de convergencia.

En resumen, las iteraciones de punto fijo constituyen un método más robusto para hallar γ , sin embargo, en condiciones ideales, encontrar la raíz de la función propuesta F puede tener un mejor desempeño. Se presentarán algunos ejemplos de cálculo ilustrando esto en el siguiente capítulo.

3.5. Control de ruido

Otro detalle importante que es necesario considerar cuando se simula la evolución libre de fronteras en mecánica de fluidos, es el crecimiento esporádico de ruido producido por redondeo. En cómputos iniciales de la década de los 60 sobre este tipo de problemas con discontinuidades en el campo de velocidades de los fluidos, Birkhoff encontró que los resultados de ciertas simulaciones divergían conforme se aumentaba el número de puntos en la discretización. Esto es contrario al comportamiento esperado, cuando se aumentaba la cantidad de partículas computacionales, se producía un comportamiento irregular temprano y deterioro rápido en la precisión del cálculo.

La razón de esta inestabilidad numérica fue estudiada por Krasny en 1986[15], quien estableció que pueden existir dos clases de comportamientos irregulares en este tipo de cálculos. El primero se presenta cerca a puntos críticos en la evolución de la frontera, sin importar el número de partículas computacionales. Este tipo de error es consecuencia de la pérdida de regularidad en las soluciones después de cierto valor de tiempo, denominado tiempo crítico. Por ejemplo, cuando las soluciones del movimiento desarrollan picos en las interfaces. Este error es ineludible, puesto que los esquemas propuestos necesitan de funciones regulares para asegurar su convergencia.

El segundo tipo de inestabilidad se presenta en tiempos cortos después de iniciar la simulación y cuando se utiliza un número relativamente alto de puntos en la discretización. Esta inestabilidad se debe a errores de redondeo por la aritmética de precisión finita en los computadores. Las perturbaciones introducidas por error en el cálculo crecerán de acuerdo a la dinámica del sistema, que tiene a ser susceptible a cambios ligeros en la evolución. El ruido introducido tiene altas frecuencias y su crecimiento es exponencial conforme se aumenta el número de onda. Por lo tanto, al usar más puntos se está incrementando la frecuencia del ruido y por tanto este tiende a crecer más rápido conforme avanza el cálculo.

Al contrario del error del primer tipo, este error por redondeo es remediable en cierto grado. Una posible solución para este problema es usar aritmética con más decimales de precisión. Aunque al usar esta técnica se presenta una mejoría en la reducción de ruido, esta también aumenta considerablemente los tiempos de computo y no es completamente efectiva para eliminar el crecimiento esporádico de ruido, pues lo hace a una tasa exponencial.

Teniendo en cuenta lo anterior, Krasny implementó un método de filtrado no lineal para controlar el crecimiento del error producido por redondeo. Este *filtrado de Krasny* consiste en asignar manualmente el valor cero a todos los coeficientes de la transformada discreta de Fourier de la solución cuya magnitud esté por debajo de cierto punto de corte. De esta manera, si la solución es suficientemente suave y su transformada decae rápidamente en el espacio de Fourier, se elimina el crecimiento esporádico de ruido producido por redondeo [16].

Para conservar la mayor precisión posible en el cálculo se requiere un nivel de corte bajo, pero lo suficientemente alto para eliminar las componentes del ruido de alta frecuencia. En este trabajo se toma el valor 10^{-12} como nivel de corte, todos los modos normales cuya magnitud esté por debajo de este valor son anulados .

3.6. Detalles de implementación

Finalmente, se deben considerar ciertos detalles en el procedimientos que, más que problemas numéricos, son problemas de implementación.

En primer lugar, se requieren mapeos de intercambio entre las descripciones en diferentes variables de la interfaz. Para traducir coordenadas (L, θ) a coordenadas cartesianas (x, y) se pueden integrar mediante la transformada de Fourier las relaciones

$$x_\alpha = \frac{L}{2\pi} \cos(\theta), \quad y_\alpha = \frac{L}{2\pi} \sin(\theta). \quad (3.20)$$

La integración mediante la transformada de Fourier permite conservar la precisión espectral en la reconstrucción, de otra manera se perdería progresivamente la periodicidad en los arreglos, provocando el fallo en los demás métodos que asumen esta propiedad.

También se debe tener en cuenta el hecho de que las coordenadas (L, θ) son comunes para cualquier curva cerrada que es trasladada en el plano, por lo que se necesita una coordenada inicial para iniciar la reconstrucción. En los ejemplos tratados se toma este punto inicial como el primer punto de la parametrización, que se procura que se mueva solo en el eje x , así el traslado en el eje y es constante y la coordenada x del punto inicial de la reconstrucción viene dado por la evolución misma del sistema. En casos más generales, es posible evolucionar un puntos directo en la interfaz de manera explícita para obtener este punto inicial en la reconstrucción.

Por otro lado, también se requiere un método para transformar coordenadas (x, y) en coordenadas (L, θ) . La definición del ángulo tangencial dada por $\theta = \arctan(y_\alpha/x_\alpha)$ no es particularmente útil, dado que variaciones en la cantidad y_α/x_α no se verían bien representadas en θ por las múltiples ramas de la arcotangente. En la práctica es mejor integrar la relación

$$\theta_\alpha = s_\alpha \kappa, \quad (3.21)$$

calculando κ con la ecuación (2.15) y eligiendo la constante de integración teniendo en cuenta la geometría elegida con la parametrización.

Esta relación también es útil para calcular κ partiendo de θ , evitando introducir derivaciones numéricas que podrían inducir ruido en el cálculo. Para ello habría que derivar θ con respecto al parámetro α , teniendo en cuenta que θ podría presentar una aparente no periodicidad debida a que 0 y 2π no son numéricamente iguales, a pesar de tener el mismo significado geométrico. Esta aparente no periodicidad se puede solucionar usando una artimaña similar a la usada en la construcción de la cuadratura de Clenshaw-Curtis. Para recuperar el significado geométrico de los ángulos, estos se consideran bajo la aplicación de las funciones trigonométricas seno y coseno. Así, si se definen

$$\begin{aligned} l &= \cos(\theta) \\ m &= \sin(\theta), \end{aligned} \quad (3.22)$$

se obtienen funciones periódicas cuyas derivadas, l_α y m_α , se puede calcular con la transformada de Fourier discreta. A partir de estas derivadas numéricas es posible obtener θ_α mediante la combinación de las relaciones

$$\begin{aligned} l_\alpha &= -\theta_\alpha \sin(\theta) \\ m_\alpha &= \theta_\alpha \cos(\theta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

de las cuales se obtiene

$$\theta_\alpha = \pm \sqrt{l_\alpha^2 + m_\alpha^2}, \quad (3.24)$$

donde el signo de la raíz se puede elegir como $\text{sign}(l_\alpha) * \text{sign}(m)$.

Experimentos numéricos realizados muestran que en este problema esta forma de calcular θ_α es efectiva y usa menos derivaciones con la transformada de Fourier que usando la relación $\theta_\alpha = s_\alpha \kappa$. Sin embargo, el uso de este método no está bien documentado en la literatura, por lo que no se conocen con precisión las precauciones que se deben tener para evitar inestabilidades, y además el costo computacional de calcular derivadas con la transformada de Fourier es mínimo y no representa un tiempo significativo en el cálculo. Por lo tanto, en los resultados que se muestran en la siguiente sección se usa la forma tradicional de calcular θ_α , mediante la formula (3.21).

Por último, en caso de tener una parametrización inicial cuyos puntos no estén a distancias iguales, es necesario construir otra a partir de esta que sí cumpla con esta propiedad. Para lograr esto, supongamos que tenemos puntos $(x(\alpha), y(\alpha))$ sobre la interfaz inicial entre los fluidos, descritos mediante un parámetro α , entonces queremos encontrar los β_j para los cuales

$$\int_0^{\beta_j} \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} d\alpha = jh \frac{L}{2\pi}, \quad (3.25)$$

con $j = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, L la longitud de la interfaz y $h = N/2\pi$. Para encontrar estos puntos, podemos encontrar la raíz de la función

$$\int_0^{\beta_j} \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} d\alpha - jh \frac{L}{2\pi} = 0, \quad (3.26)$$

para cada $j = 1, 2, \dots, N - 1$, usando el método de Newton. Con la integración de Fourier se pueden evaluar las integrales hasta los puntos sobre la parametrización inicial, y a partir de un proceso de interpolación obtener las integrales hasta cualquier punto en $[0, 2\pi]$. Aquí usamos la interpolación con splines de grado cinco. Finalmente, se debe realizar otro proceso de interpolación para encontrar los nuevos puntos en la parametrización equidistante a partir de los puntos de la parametrización inicial.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan algunos resultados de la evolución de la interfaz entre dos fluidos en una celda de Hele-Shaw bajo diferentes configuraciones y geometrías. Estos fueron obtenidos con el método anteriormente descrito, implementado en lenguaje Python. Los cálculos se realizaron en el clúster de la Universidad de los Andes y en un ordenador portátil con un procesador Intel Celeron N2840 2.15GHz y 4Gb de RAM.

El objetivo de estos cálculos no es realizar un análisis numérico minucioso de una situación particular, ni detallar el comportamiento asintótico de una configuración en específico, como se hace en [3], sino mostrar la utilidad del método e ilustrar características generales en la evolución de flujos en celdas de Hele-Shaw. Por lo tanto, salvo en algunos casos, se mantiene en general un número de partículas computacionales relativamente bajo.

Aún cuando para resolver más precisamente etapas avanzadas en el flujo se hace necesario un alto número de puntos, con las cantidades usadas a continuación se pueden evidenciar instancias de comportamientos generales y patrones interesantes que se presentan en la evolución de interfaces.

4.1. Estado inicial circular

En este caso se establece una burbuja inicial circular de una unidad de radio, cuyo centro está en el punto $(0, -0.1)$ y se está succionando su líquido en el origen del plano.

Ejemplo 1: $S = 0, A_\mu = 1.0$

Primero, para evidenciar el efecto regularizador de la tensión superficial, se realiza una simulación para el caso $A_\mu = 1$, que corresponde a no considerar la viscosidad del fluido exterior. En el caso $S = 0$ se realiza un proceso de discretización explícita con el esquema de Adams-Bashforth, dada la ausencia de términos que producen mal condicionamiento. Además, se usa el marco Lagrangiano que es útil dado que se acumulan partículas cerca de puntos en la interfaz de alta curvatura, donde se está produciendo el comportamiento interesante. Se elige $N = 2048$, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$ y la ecuación integral para γ se resuelve con el método de Newton-Krylov. La simulación de la evolución tomó aproximadamente 4 horas en el clúster y sus resultados se muestran en la figura 4.1.

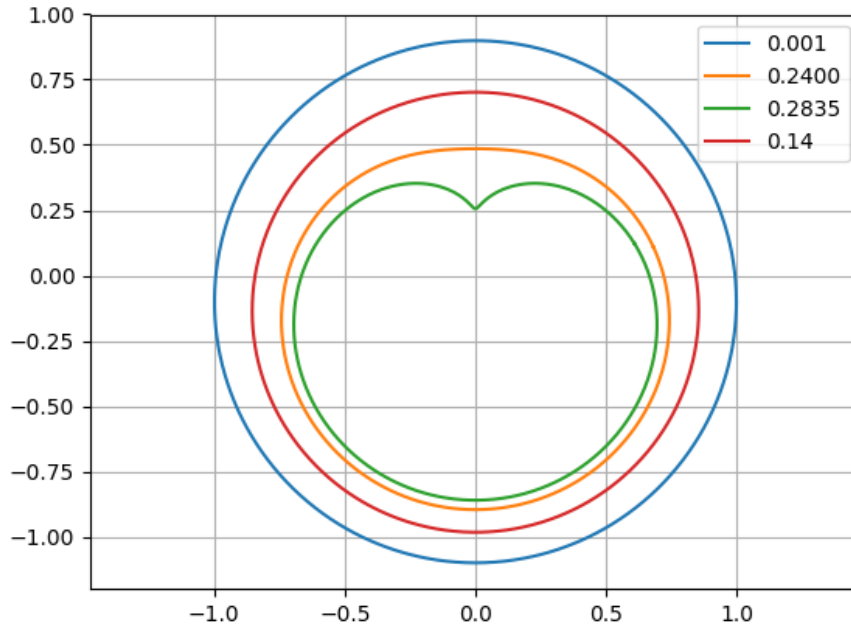


Figura 4.1: Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0, A_\mu = 1$ y $N = 2048$

Aquí se evidencia el comportamiento descrito en la sección 1.3, donde se forma una cúspide en la interfaz en un tiempo finito. En este caso se forma en $t_c = 0.2835$.

Después de este tiempo la simulación no puede avanzar dado que la interfaz ya no es regular. Este resultado concuerda con el obtenido en [3].

El cómputo resolviendo la ecuación integral para γ usando el método de punto fijo tarda aproximadamente 7 horas. Por lo que en este caso el uso del método de Newton-Krylov para hallar la raíz presenta una mejoría considerable en términos de tiempo de cómputo.

Ejemplo 2: $S = 0.01, A_\mu = 1.0$

Ahora, con el método de descomposición en pequeñas escalas se realiza la simulación en el caso con tensión superficial con magnitud $S = 0.01$. Se elige $N = 512$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$ y la ecuación integral se resuelve con iteraciones de punto fijo, esto debido a que el método de Newton-Krylov se hace inestable cerca de las etapas finales del cómputo, lo cual es general para los casos con tensión superficial. En este caso se obtiene la evolución que se muestra en la figura 4.2.

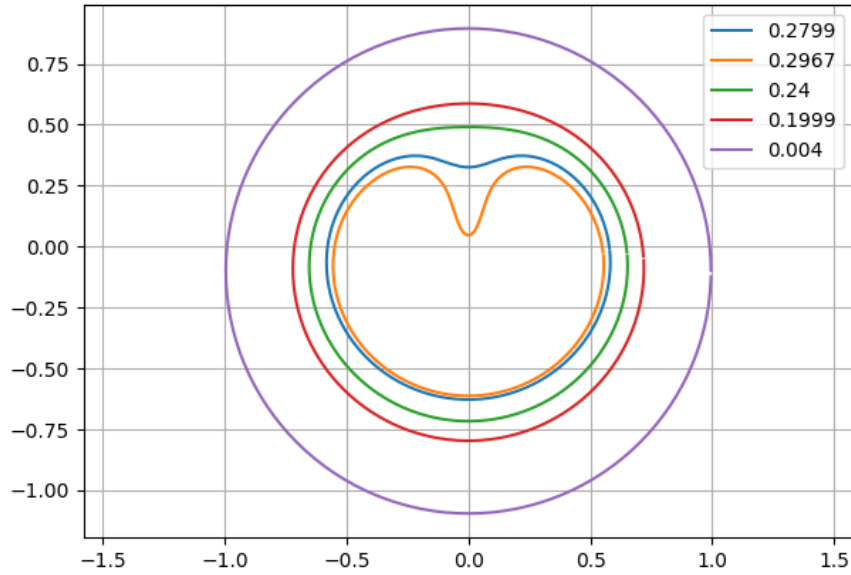


Figura 4.2: Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 1$ y $N = 512$

Se evidencia cómo el incluir el efecto de la tensión superficial regulariza el problema e impide la formación de una cúspide en la interfaz. La frontera sigue siendo suave después del tiempo crítico hallado anteriormente, y la interfaz continua deformándose en dirección al punto de succión. Sin embargo, para resolver mejor el comportamiento de la interfaz cuando se aproxima al punto de succión, es necesario incrementar el número de partículas computacionales y reducir el paso en la discretización de tiempo Δt , puesto que los cambios se producen rápidamente. Este estudio es realizado en [3], pero no se considera necesario replicar completamente los resultados que allí se obtuvieron, pues requieren de un mayor tiempo de cómputo. A pesar del relativamente bajo número de punto, se logra evidenciar gráficamente el comportamiento de la interfaz cuando se acerca al punto de succión.

Ejemplo 3: $S = 0$, $A_\mu = 0.8$

Para observar los efectos al considerar la viscosidad del fluido que rodea la burbuja, se realiza la misma simulación para el valor del coeficiente de Atwood $A_\mu = 0.8$. En el caso sin tensión superficial $S = 0$ se obtienen los resultados de la figura 4.3.

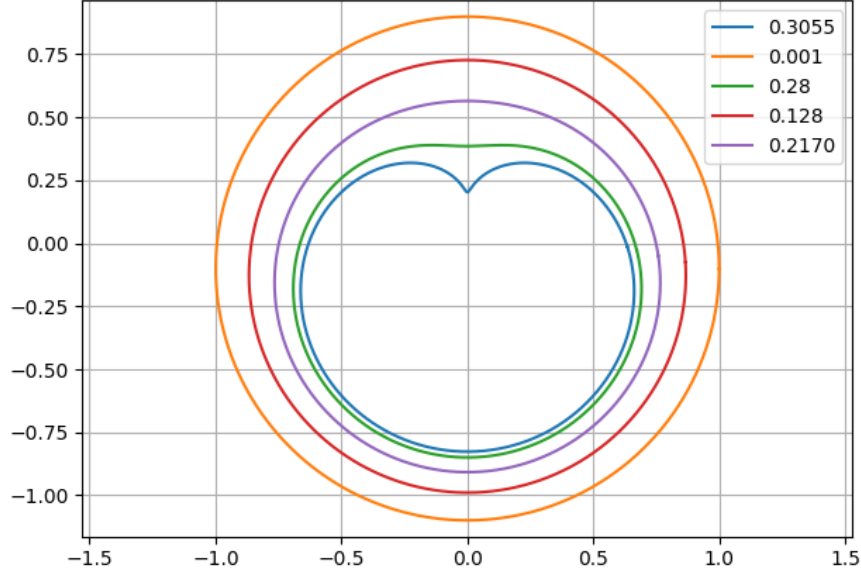


Figura 4.3: Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$

Se evidencia que considerar el efecto de la viscosidad del fluido exterior no es un cambio regularizador, ya que se sigue desarrollando la singularidad en la interfaz antes de alcanzar el punto de succión. Sin embargo, se observa que la cúspide se forma en un tiempo posterior al tiempo crítico en el caso $A_\mu = 0$ en este caso en $t_c = 0.3055$. Es decir, considerar la viscosidad del medio en que se está succionando retrasa la formación de picos, pero no los previene.

Ejemplo 4: $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$

También se realizó el cómputo para el caso donde se considera tensión superficial $S = 0.01$ y la viscosidad del fluido circundante $A_\mu = 0.8$. La discretización se realizó con 256 puntos, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$ y tomó aproximadamente 3 horas en el computador portátil, hasta el punto en donde la resolución de puntos no es suficiente para continuar el cálculo. Los resultados se muestran en la figura 4.4.

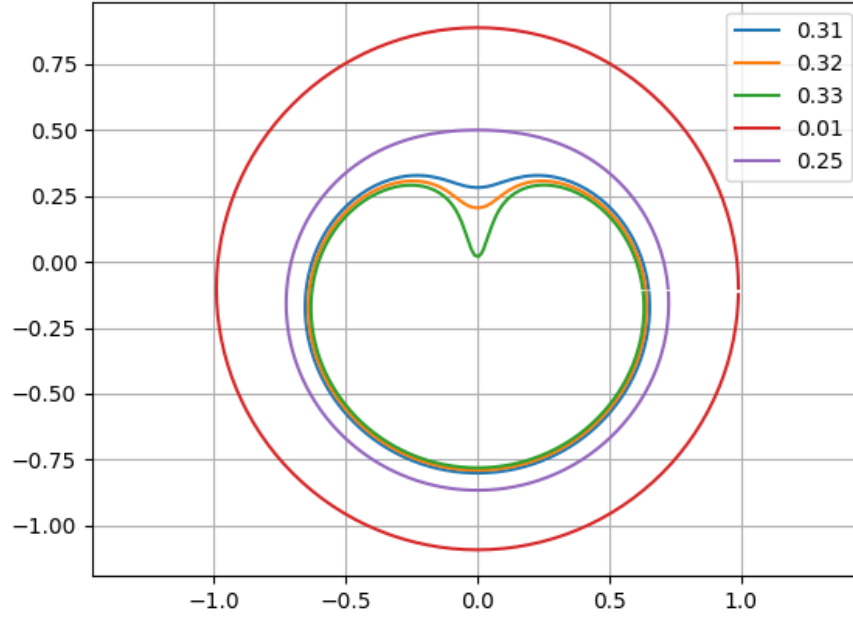


Figura 4.4: Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$

Aunque el cálculo se hizo con pocos puntos, todavía se evidencia el efecto regularizador de la tensión superficial. Además de retrasar la llegada de la interfaz al punto de succión, se reduce en cierta medida el ancho del cuello de succión del fluido.

En la figura 4.5 se muestra la última etapa del cómputo.

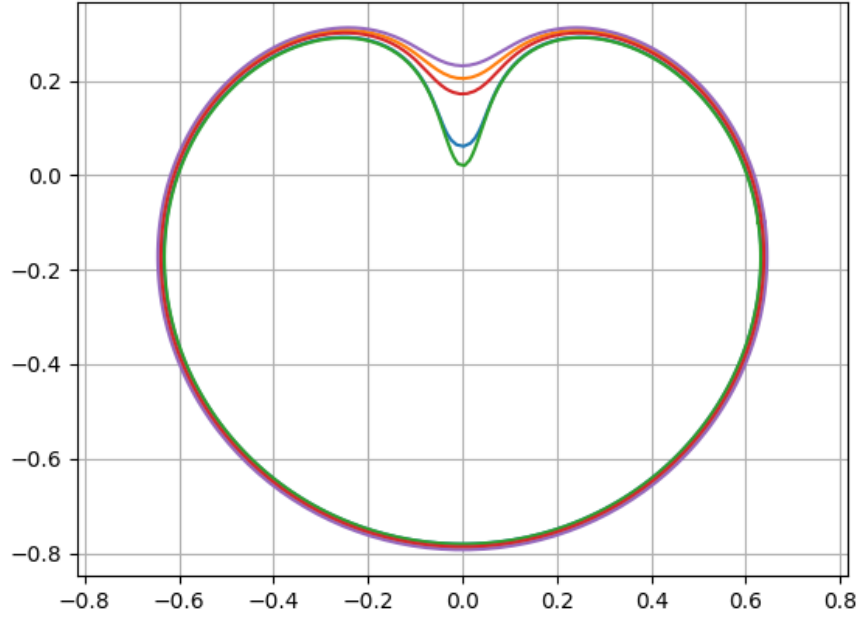


Figura 4.5: Zoom cerca al punto de succión de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 256$

Finalmente, en la figura 4.6 se muestra el ángulo tangencial de la interfaz cerca de $\alpha = \pi/2$, que es el punto en la parametrización que está más cerca al punto de succión.

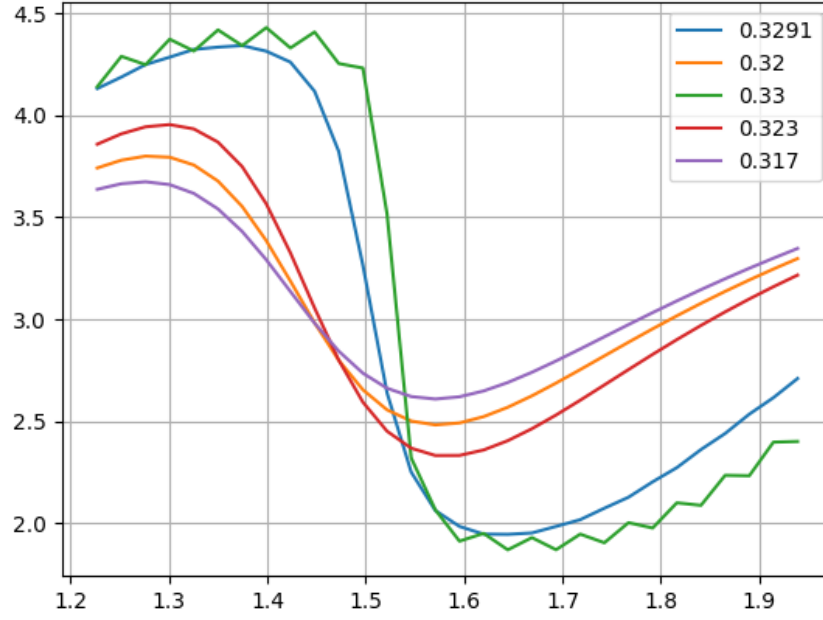


Figura 4.6: Ángulo tangencial en la evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0.01$, $A_\mu = 0.8$ y $N = 2048$ cerca del punto singular

En esta se evidencia la discontinuidad en el ángulo tangencial que se va formando en el punto $\alpha = \pi/2$. Además, en el último momento, donde el error es alto debido al bajo número de puntos y el gran Δt , se evidencia la pérdida de suavidad debido al error numérico.

4.2. Dos puntos de succión

Ahora, una forma de modificar el problema que hemos estudiado es modificando el número de puntos de succión en la burbuja inicial. Esta modificación se puede implementar exigiendo la condición sobre el flujo que a lo lejos deba satisfacer

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow Q_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}_1|} + Q_2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}_2|}, \quad (4.1)$$

donde \mathbf{q}_i son las posiciones de los puntos de succión con tasa de Q_i . Esto modifica la ecuación para W de la siguiente manera

$$W = \frac{Q_1}{z(\alpha, t) - q_1} + \frac{Q_2}{z(\alpha, t) - q_2} + \frac{1}{2\pi i} P.V \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' + A(\alpha, t) \frac{\bar{z}_\alpha(\alpha, t)}{|z_\alpha(\alpha, t)|}, \quad (4.2)$$

donde q_1 es el número complejo asociado a \mathbf{q}_1 .

Realizando la correspondiente modificación a γ , se pueden aplicar los mismos esquemas que fueron usados anteriormente. En la figura 4.7 se presenta la evolución de la interfaz de una burbuja inicialmente circular con centro en $(0, 0)$ cuando se ponen dos puntos de succión con coordenadas $(-0.1, 0.1)$ y $(-0.1, -0.1)$ y tasa de succión 0.5 en cada uno. La simulación fue realizada con $N = 2048$ y $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$, y tomó aproximadamente 6 horas en el clúster.

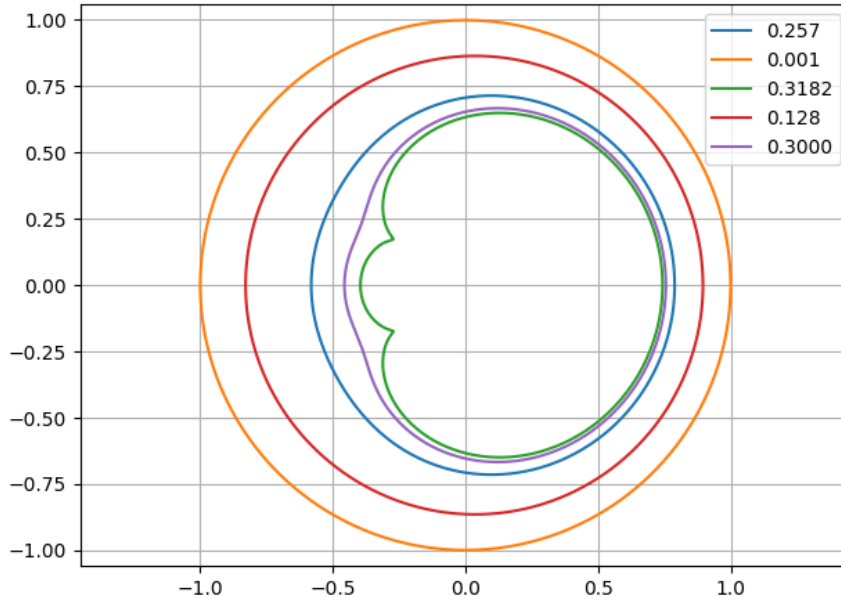


Figura 4.7: Evolución de burbuja inicialmente circular con $S = 0$ y $A_\mu = 1$ con puntos de succión en $(-0.1, 0.1)$ y $(-0.1, -0.1)$ y $N = 2048$

Se evidencia el comportamiento esperado, en el cual se forman dos picos por la

ausencia de tensión superficial.

4.3. Estado inicial elipsoidal

Ahora, consideremos una elipse centrada en $(0, 0)$ cuyo semieje mayor mide 1.5 unidades y a la cual se le está extrayendo el fluido en un punto de succión ubicado en $(-0.4, 0)$. Con $N = 512, A_\mu = 1, S = 0$ y $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$ se obtienen los resultados de la figura 4.8 para la evolución de la burbuja. El computo tomó aproximadamente 1 hora en el computador portátil.

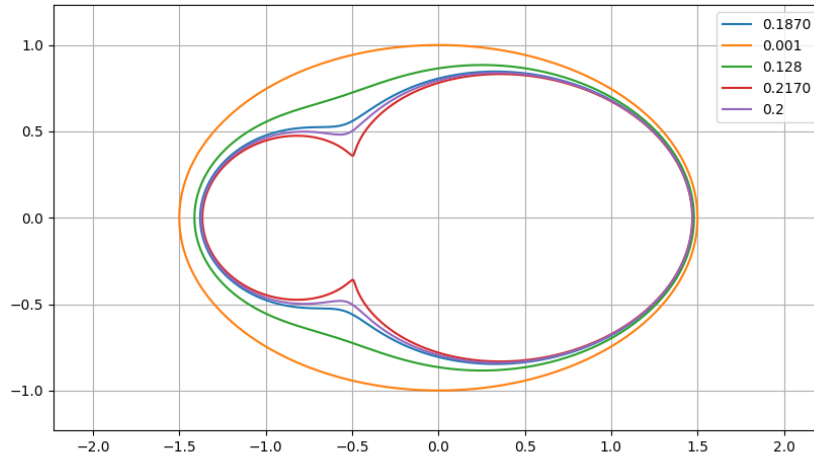


Figura 4.8: Evolución de burbuja inicialmente elipsoidal con $S = 0$ y $A_\mu = 1$ con punto de succión en $(-0.4, 0)$ y $N = 512$

Como es de esperar, se observa la formación de un pico en tiempo finito antes de que la interfaz alcance el punto de succión. Además, se observa la simetría esperada sobre el eje x en la formación de las cúspides.

También se considera el caso con tensión superficial $S = 0.01$ y $A_\mu = 1.0$. Aquí se realiza el cálculo con 256 puntos en la discretización y el tiempo empleado fue de aproximadamente 2 horas en el computador portátil. Los resultados en diferentes instantes de tiempo se muestran en la figura 4.9.

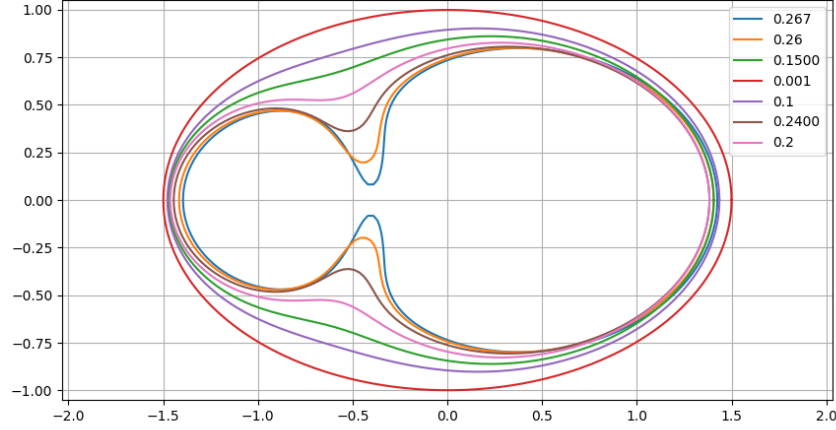


Figura 4.9: Evolución de burbuja inicialmente elipsoidal con $S = 0.01$ y $A_\mu = 1$ con punto de succión en $(-0.4, 0)$ y $N = 256$

Igualmente se presenta una regularización por tensión superficial, y además se obtiene la simetría esperada en la evolución de los dos puntos en la elipse más cercanos al punto de succión. También es posible notar que el ancho de los dedos formados es mayor que en el caso de la burbuja circular.

4.4. Expansión de una burbuja de Howison

El modelo usado también describe la evolución de la frontera entre un líquido con cierta viscosidad que es inyectado en uno más viscoso en una celda de Hele-Shaw. Modificando ligeramente las ecuaciones (2.21) y (2.22), eligiendo $Q = 1$, $A_\mu = -1$ y $S = 0.001$ estaríamos describiendo un fluido no viscoso que es inyectado en una celda de Hele-Shaw que contiene un fluido más viscoso. Un ejemplo de lo que sucede se muestra en la figura 4.10.

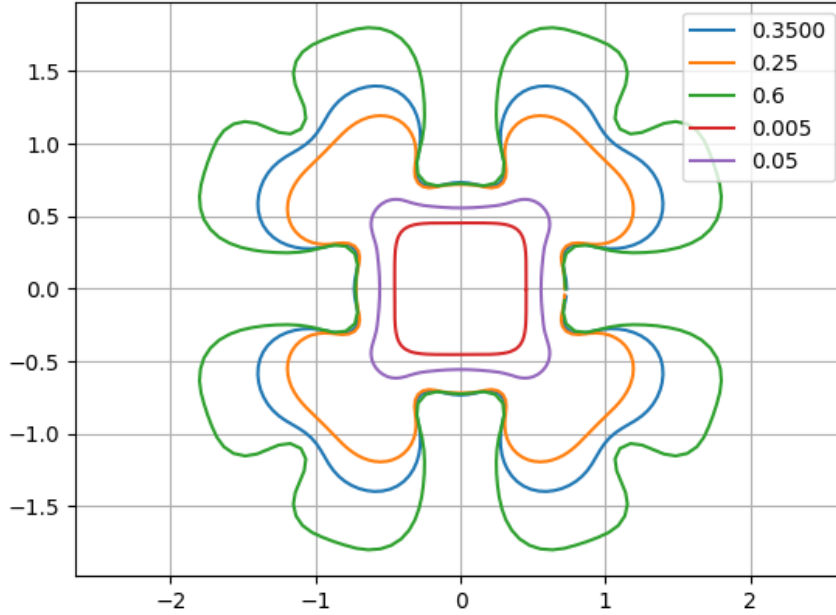


Figura 4.10: Expansión de burbuja con $S = 0.001$, $A_\mu = -1$ y $N = 256$ con punto de inyección en $(0, 0)$

En este caso, como condición inicial se tomó la forma de la burbuja de la solución exacta de Howison en ausencia de tensión superficial, como es descrito en [17]. Además, se usó $N = 256$ y se resolvió la ecuación integral para γ con iteraciones de punto fijo.

El cálculo de la solución sin tensión superficial es más complejo dada la formación de picos más estrechos con curvatura hacia afuera, haciendo necesarias más partículas computacionales de las que se tiene capacidad de procesar.

La dinámica de esta expansión es diferente cuando se considera la viscosidad del fluido inyectado. En la figura 4.11 se muestra la evolución hasta el tiempo $t = 2.5$, dibujando cada 0.05, de la misma condición inicial anterior escalada por un factor de 1/4 cuando $S = 0.00025$ y $A_\mu = -0.6$.

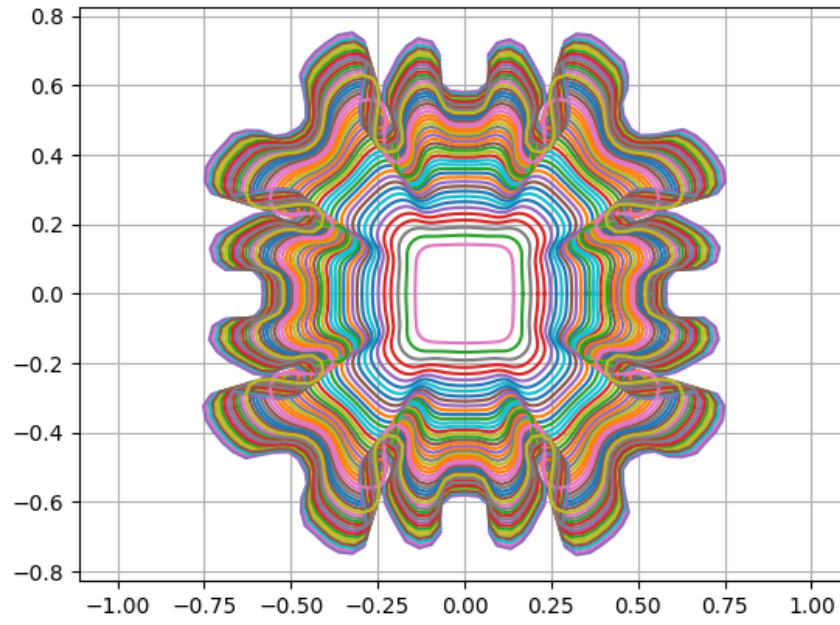


Figura 4.11: Expansión de burbuja con $S = 0.00025$, $A_\mu = -0.6$ y $N = 256$ con punto de inyección en $(0, 0)$

Nuevamente, para continuar el cálculo sería necesario incrementar el número de puntos para mejorar la resolución.

Capítulo 5

Conclusiones y posibles mejoras

Se implementó exitosamente el esquema de descomposición en pequeñas escalas de Hou, Lowengrub y Shelley, para estudiar el desarrollo interfacial de fluidos en la celda de Hele-Shaw. Usando este método se evidenció la formación de cúspides esperada en ausencia de tensión superficial y cómo la presencia de este parámetro regulariza la evolución de la interfaz. Además, se probó este método en diferentes condiciones iniciales y bajo diferentes parámetros que modifican la evolución.

En general, el problema principal al implementar esquemas de evolución para este tipo de problemas es el control del error, por lo cual es necesario usar métodos estables e implementar otras medidas para controlar el crecimiento de ruido producido por aproximaciones de punto flotante.

Otras maneras de elevar la eficiencia computacional del método podrían ser el implementar marcos diferentes de velocidad tangencial T que permitan tener una malla más fina en donde se produzcan cambios importantes en la evolución de la interfaz. Aunque las ecuaciones de movimientos perderían sencillez, resultados precisos podrían requerir menor número de puntos en la discretización y por lo tanto menor tiempo computacional.

También podría ser posible aprovechar de mejor manera la estructura compleja proporcionada por los mapeos conformes descrita en la sección 1.3 para plantear esquemas diferentes con otras propiedades de manejo de error y convergencia.

Por otro lado, para acelerar los cálculos no se usó la simetría sobre algunos ejes que pueden presentar los sistemas en su evolución, lo cual al aprovecharse podría reducir considerablemente los tiempos de computo.

Bibliografía

- [1] A. Bjorn and A. Vasilev, *Conformal and potential analysis in Hele-Shaw cells*. Basel Boston: Birkhauser Verlag, 2006.
- [2] T. Hou, J. Lowengrub, and M. Shelley, “Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 312–338, Oct. 1994.
- [3] H. Cenicerros, T. Hou, and H. Si, “Numerical study of hele-shaw flow with suction,” *Physics of Fluids*, vol. 11, pp. 2471–2486, Sept. 1999.
- [4] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, Jan. 1993.
- [5] L. Grafakos, *Classical and modern fourier analysis*. Upper Saddle River, N.J: Pearson/Prentice Hall, 2004.
- [6] M. C. Dallaston, *Mathematical models of bubble evolution in a Hele-Shaw Cell*. PhD thesis, Queensland University of Technology, 2013. Recipient of 2013 Outstanding Doctoral Thesis Award.
- [7] G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*. Mathematical Notes, Princeton University Press, 1995.
- [8] L. Trefethen, *Spectral Methods in MatLab*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [9] A. Sidi and M. Israeli, “Quadrature methods for periodic singular and weakly singular fredholm integral equations,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 3, pp. 201–231, June 1988.
- [10] U. Ascher, S. J. Ruuth, and B. Wetton, “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 32, pp. 797–823, June 1995.

- [11] R. Kress, *Numerical analysis*. New York, NY: Springer New York, 1998.
- [12] G. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag, “Generalized vortex methods for free-surface flow problems,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 123, pp. 477–501, Oct. 1982.
- [13] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley, 1989.
- [14] W. L. Cruz, J. Martínez, and M. Raydan, “Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations,” *Mathematics of Computation*, vol. 75, pp. 1429–1449, Apr. 2006.
- [15] R. Krasny, “A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 167, p. 65, June 1986.
- [16] T. Hou, “Numerical solutions to free boundary problems,” *Acta Numerica*, vol. 4, pp. 335–415, Jan. 1995.
- [17] H. Cenicerros and J. M. Villalobos, “Topological reconfiguration in expanding hele—shaw flow,” *Journal of Turbulence*, vol. 3, p. N37, Jan. 2002.