

Unidade IX:

Tabelas *Hash*



PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

Introdução

- A tabela *hash* é uma estrutura de dados em que um ou mais elementos podem ser acessados com $\Theta(1)$
- Vantagens:
 - Alta eficiência no custo de pesquisa, que é $\Theta(1)$ para o caso médio
 - Simplicidade de implementação

- Desvantagens:
 - Custo para recuperar os registros na ordem lexicográfica das chaves é alto, sendo necessário ordenar o arquivo
 - Pior caso é $\Theta(n)$
- Considera-se uma tabela e uma função de transformação sobre a chave de pesquisa

Exemplo

- Seja uma tabela com 366 entradas, uma para cada dia do ano, e vamos inserir pessoas conforme a data de nascimento das mesmas

Aniversário	Pessoa
5/1	Paulo
13/3	Lica
26/5	Olímpia
13/9	João

- Como será nossa função de transformação?
 - $5/1 \Rightarrow$ Posição 4 ($0 + 5 - 1$)
 - $13/3 \Rightarrow$ Posição 72 ($31+29+13-1$)
 - $26/5 \Rightarrow$ Posição 146 ($31+29+31+30+26-1$)
 - $13/9 \Rightarrow$ Posição 256 ($31+29+31+30+31+30+31+31+13-1$)

- Como será nossa função de transformação?

```
int hash (Data d) throws Exception {  
    int resp;  
    if (d.invalida() == true){        throw new Exception ("Erro mês invalido!"); }  
    else if (d.mes == 1){              resp = d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 2){              resp = 31 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 3){              resp = 60 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 4){              resp = 91 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 5){              resp = 121 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 6){              resp = 152 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 7){              resp = 182 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 8){              resp = 213 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 9){              resp = 244 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 10){             resp = 274 + d.dia - 1; }  
    else if (d.mes == 11){             resp = 305 + d.dia - 1; }  
    else {                             resp = 335 + d.dia - 1; }  
    return resp;  
}
```

Exemplo

- Seja uma tabela com 366 entradas, uma para cada dia do ano, e vamos inserir pessoas conforme a data de nascimento das mesmas

Aniversário	Pessoa
5/1	Paulo
13/3	Lica
26/5	Olímpia
13/9	João

- Qual é o custo de encontrar uma pessoa?
- Alguns problemas em nossa técnica? Se sim, qual é a chance desse problema acontecer?

Tabela	
0	
1	
2	
3	
4	Paulo
...	
72	Lica
...	
146	Olímpia
...	
256	João
...	

- Quem deseja apostar R\$ 1000,00 que nesta turma (60 alunos) existem pelo menos duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia?

Paradoxo do Aniversário

- Em um grupo de 23 ou mais pessoas quaisquer existe uma chance maior do que 50% de que duas delas comemorem aniversário no mesmo dia
- Em outras palavras, se tivermos uma função de transformação uniforme para endereçar 23 chaves randômicas em uma tabela de tamanho 366, tem-se que a probabilidade de acontecer colisões é maior do que 50%
- A probabilidade de se inserir n itens consecutivos sem colisão em uma tabela de tamanho m é:

$$\frac{m!}{(m-n)!m^n}$$

Função de Transformação

- Mapeia chaves em inteiros $[0, m-1]$, onde m é o tamanho da tabela
- Deve ser simples de ser computada
- As chaves de pesquisa devem ser distribuídas de forma uniforme entre as m entradas possíveis
- Número de comparações nas operações de pesquisa, inserção e remoção depende do tamanho da tabela e da quantidade de elementos inseridos

Função de Transformação

- Normalmente, **não** depende do número de itens da coleção
- O valor de m deve ser escolhido com atenção e uma sugestão é que ele seja um número primo (não qualquer primo)
- As chaves não numéricas devem ser transformadas em números

Exemplo

- $h(k) = k \% m$, onde k é o somatório do código ASCII de todos os caracteres e m , o tamanho da tabela
- Assim, fazendo $m = 13$, temos:

$$h(\text{oscar}) = 536 \% 13 = 3$$

$$h(\text{lucio}) = 540 \% 13 = 7$$

$$h(\text{bosco}) = 534 \% 13 = 1$$

$$h(\text{paulo}) = 545 \% 13 = 12$$

$$h(\text{elisa}) = 526 \% 13 = 6$$

$$h(\text{sofia}) = 530 \% 13 = 10$$

$$h(\text{maya}) = 424 \% 13 = 8$$

$$h(\text{sergio}) = 649 \% 13 = 12$$

Exemplo

- Inserimos, pesquisamos ou removemos um item a partir de sua chave de pesquisa:

0	
1	bosco
2	
3	oscar

4	
5	
6	elisa

7	lucio
8	maya
9	

10	sofia
11	
12	paulo

- A maya está ($h(\text{maya}) = 8$)
- A ana está ($h(\text{ana}) = 5$)
- O sergio está ($h(\text{sergio}) = 12$):
- Como podemos tratar das colisões?

Colisões Primárias

- Acontecem quando desejamos inserir um elemento em uma posição do *array* que está ocupada por outro elemento
- Na verdade, a função de transformação dá acesso a um subconjunto de elementos

Gerenciamento de Colisões

- **Métodos de transformação direta** (resolução por cálculo): Quando há uma colisão, calcula-se uma nova posição no *array* a partir da chave do item considerado
- **Métodos de transformação indireta** (resolução por encadeamento): Os elementos que tiverem o mesmo valor da função são encadeados

Gerenciamento de Colisões

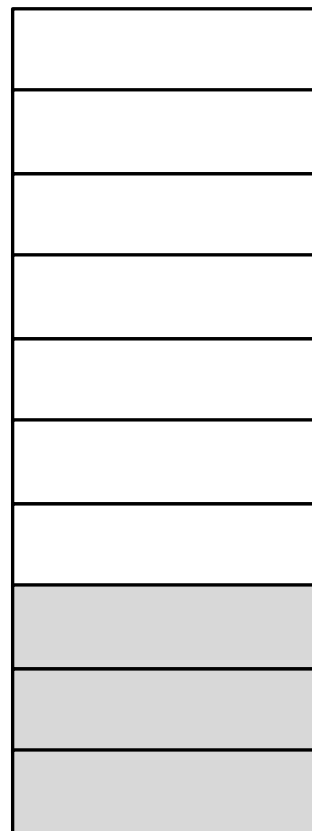
- *Hash* direta com área de reserva (*overflow*)
- *Hash* direta com rehash
- *Hash* indireta com lista flexível simples
- Estrutura híbrida

Gerenciamento de Colisões

- *Hash* direta com área de reserva (*overflow*) ←
- *Hash* direta com rehash
- *Hash* indireta com lista flexível simples
- Estrutura híbrida

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3



Tamanho da tabela

Tamanho da área de reserva

```
int hash (int x){  
    return x % tamTabela;  
}
```

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

livre

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

livre

0	
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7	ocupado
1		
2		
3		
4		
5	5	
6		
7		
8		
9		

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	
8	
9	

livre

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7	ocupado
1		
2		
3		
4		
5	5	
6		
7	14	
8		
9		

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	
9	

livre

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	21
9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

	0	7
	1	
	2	
	3	
	4	
ocupado	5	5
	6	
	7	14
	8	21
	9	

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	21
9	

livre

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Hash Direta com Área de Reserva (overflow)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	21
9	19

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21 e 19

Exercício (1)

- Suponha uma tabela de tamanho 7 com uma área de reserva igual a 3

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	14
8	21
9	19

```
int hash (int x){  
    return x % 7;  
}
```

Exercício: Quantas comparações são necessárias para pesquisar o:

a) 5

b) 21

c) 19

d) 6

Exercício Resolvido (1)

- Implemente os métodos inserir, pesquisar e remover da *hash* direta com área de reserva

Exercício Resolvido (1): Método Inserir

```
void inserir(int x) throws Exception {  
    int i = hash(x);  
    if (x == NULO){  
        throw new Exception ("Erro!");  
    } else if (tabela[i] == NULO){  
        tabela[i] = x;  
    } else if (numReserva < tamReserva) {  
        tabela[tamTabela + numReserva] = x;  
        numReserva++; //o valor inicial de numReserva é zero  
    } else {  
        throw new Exception ("Erro!");  
    }  
}
```

Exercício Resolvido (1): Método Pesquisar

```
int pesquisar (int x){  
    int i = hash(x), resp = NULO;  
    if (tabela[i] == x){ resp = i;  
    } else if (tabela[i] != NULO) {  
        for (int i = 0; i < tamReserva; i++){  
            if (tabela[tamTabela + i] == x){  
                resp = tamTabela + i;    i = tamReserva;  
            } } }  
    return resp;  
}
```

Exercício Resolvido (1): Método Remove


- Implemente os métodos inserir, pesquisar e remover da *hash* direta com área de reserva

Bom trabalho!!!

Análise de Complexidade

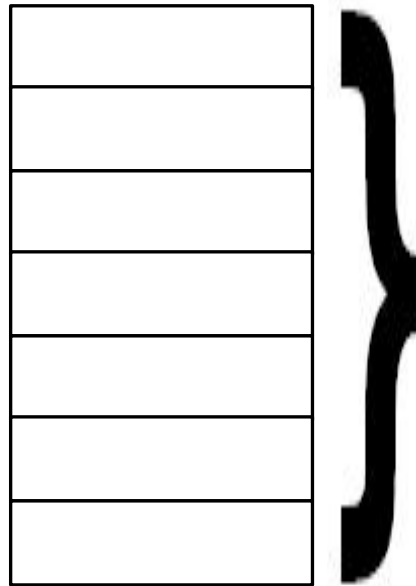
- Como mostrado por Knuth (1973), o custo de uma pesquisa com sucesso é $C(n) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1-\alpha})$, onde $\alpha = n/m$ é o fator de carga da tabela
- A tabela hash direta sofre de um mal chamado *clustering* (Knuth, 1973, pp.520-521) no qual o tempo de pesquisa médio aumenta quando a tabela começa a ficar cheia

Gerenciamento de Colisões

- *Hash* direta com área de reserva (*overflow*)
- ***Hash* direta com rehash** 
- *Hash* indireta com lista flexível simples
- Estrutura híbrida

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7



Tamanho da tabela

```
int hash (int x){  
    return x % tamTabela;  
}
```

```
int rehash (int x){  
    return ++x %  
tamTabela;  
}
```


Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

livre

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	
1	
2	
3	
4	
5	5
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

livre

0	
1	
2	
3	
4	
5	5
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7	ocupado
1		
2		
3		
4		
5	5	
6		

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

livre

0	7
1	
2	
3	
4	
5	5
6	

```
int rehash (int x){  
    return ++x %  
    tamTabela;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7	ocupado
1	14	
2		
3		
4		
5	5	
6		

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	

ocupado

```
int rehash (int x){  
    return ++x %  
    tamTabela;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Não é possível inserir o 21.

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

	0	7
	1	14
	2	
	3	
	4	
ocupado	5	5
	6	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	

livre

```
int rehash (int x){  
    return ++x %  
    tamTabela;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	19

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7	ocupado
1	14	
2		
3		
4		
5	5	
6	19	

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	
3	
4	
5	5
6	19

```
int rehash (int x){  
    return ++x %  
    tamTabela;  
}
```

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Hash Direta com Rehash

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	1
3	
4	
5	5
6	19

Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 1

Exercício (2)

- Suponha uma tabela de tamanho 7

0	7
1	14
2	1
3	
4	
5	5
6	19

Exercício: Quantas comparações são necessárias para pesquisar o:

a) 5

b) 21


c) 19

d) 6

Exercício (3)

- Implemente a classe Hash com Rehash (atributos e métodos construtor, inserir, pesquisar e remover)

Gerenciamento de Colisões

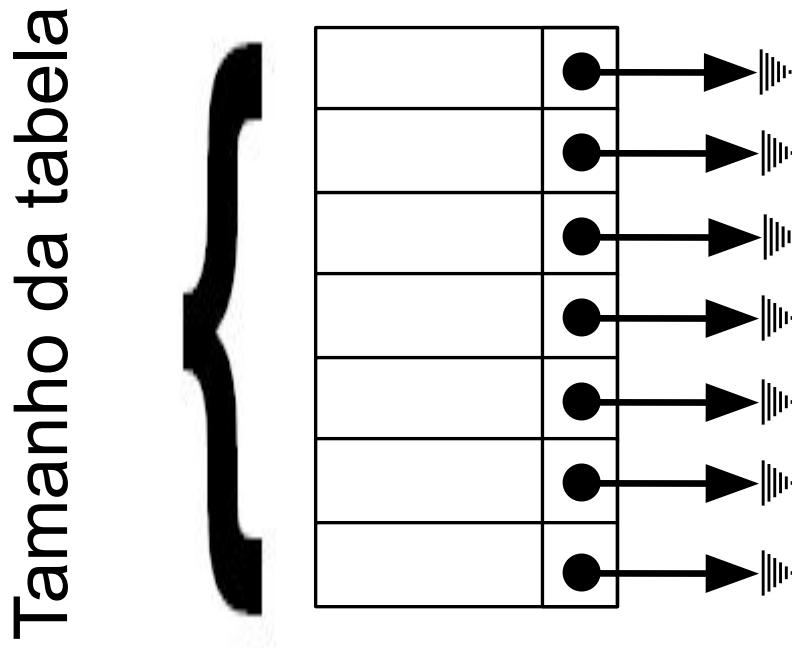
- *Hash* direta com área de reserva (*overflow*)
- *Hash* direta com rehash
- ***Hash* indireta com lista flexível simples** 
- Estrutura híbrida

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

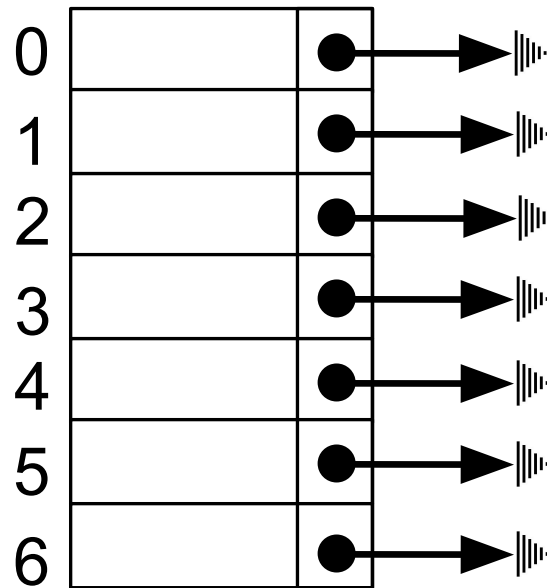
- Suponha uma tabela de tamanho 7



```
int hash (int x){  
    return x % tamTabela;  
}
```

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

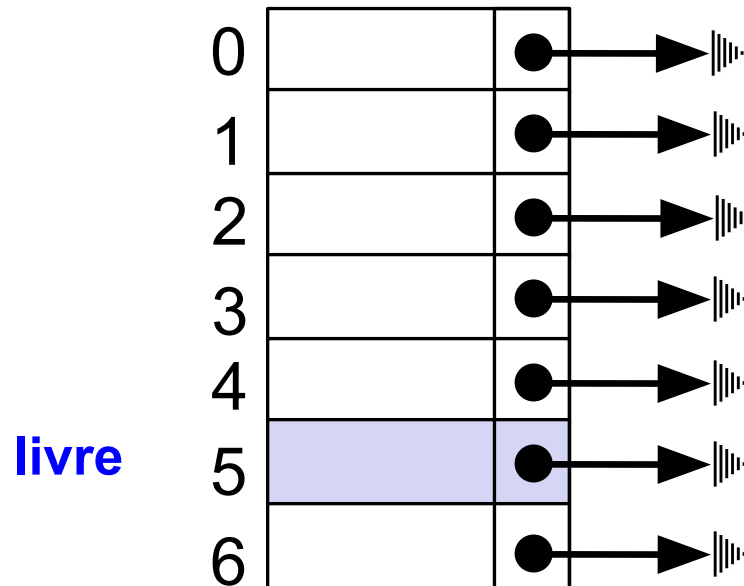


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

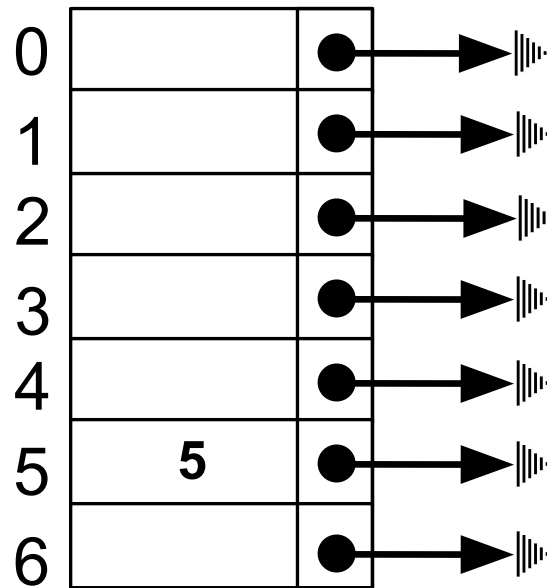


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

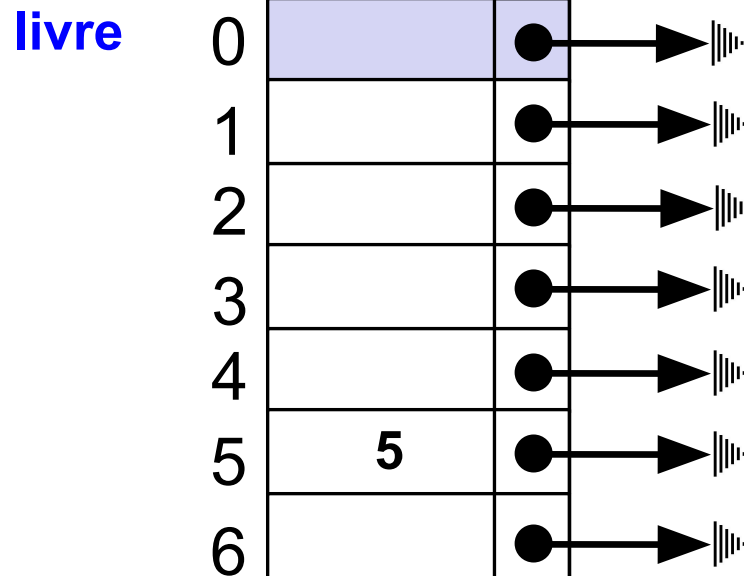


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

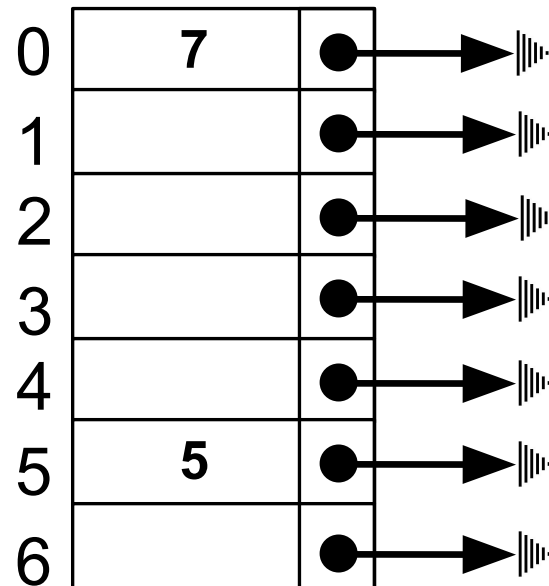


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

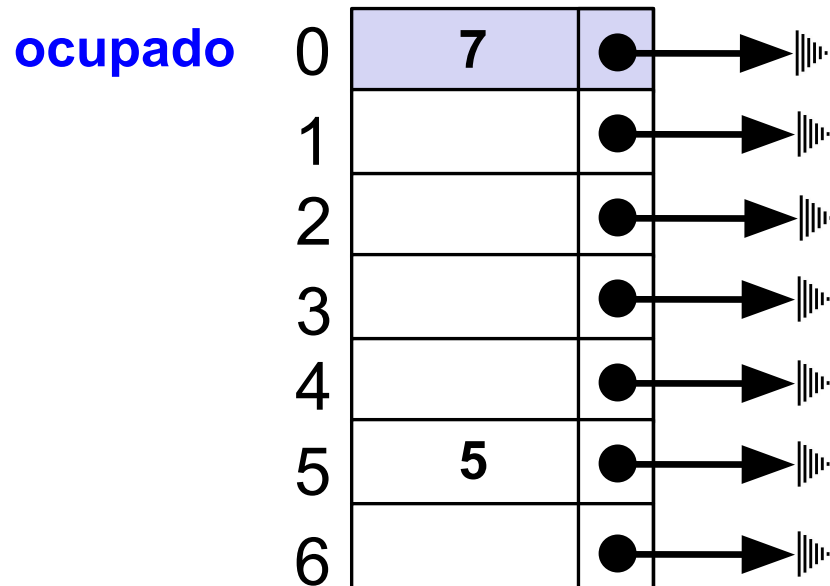


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

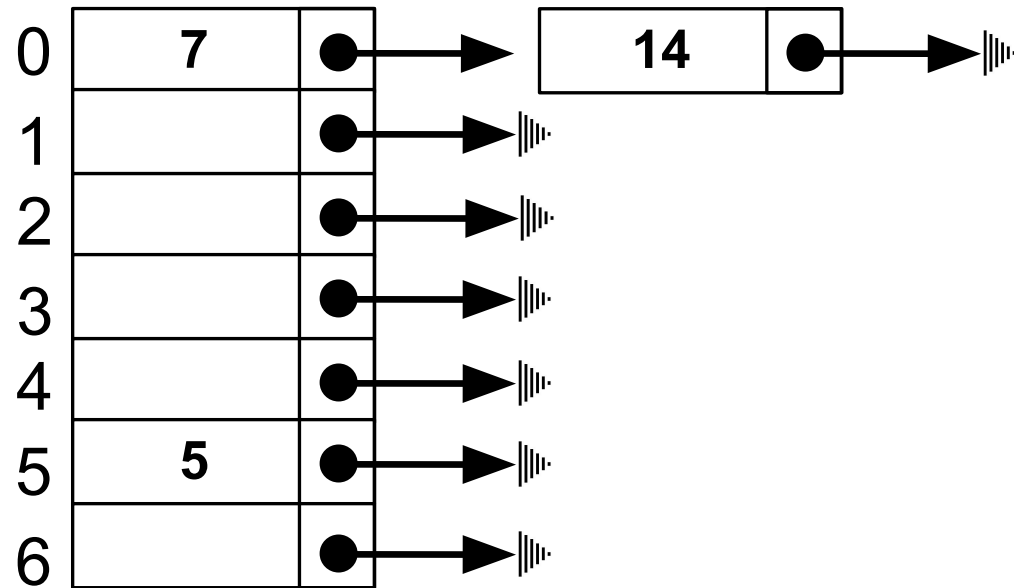


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

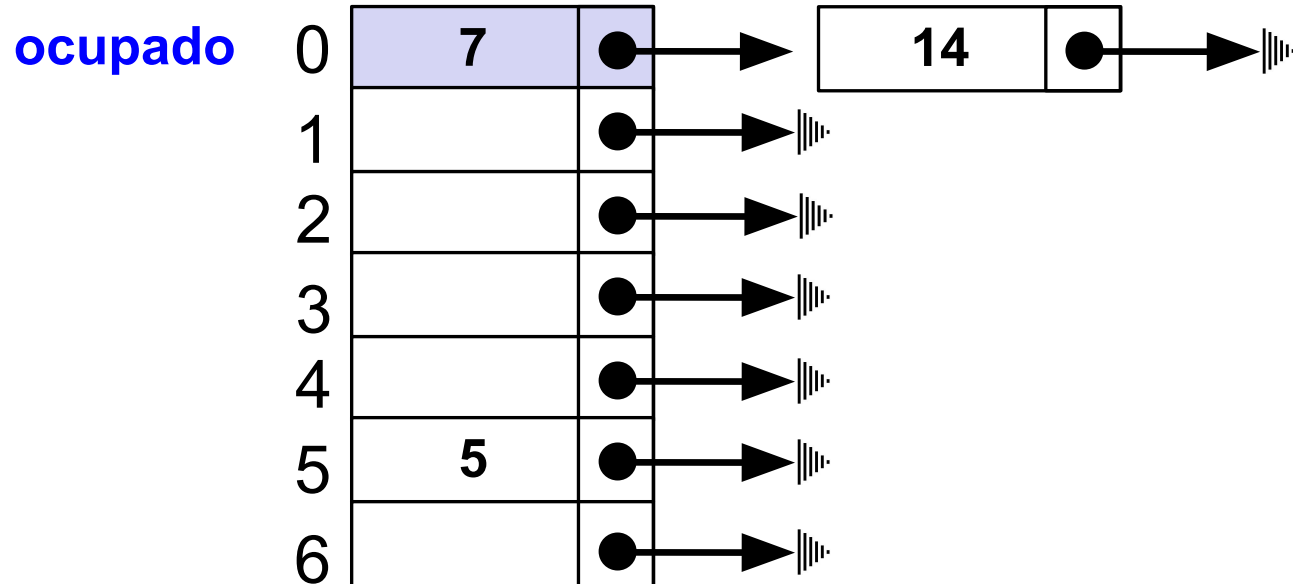


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

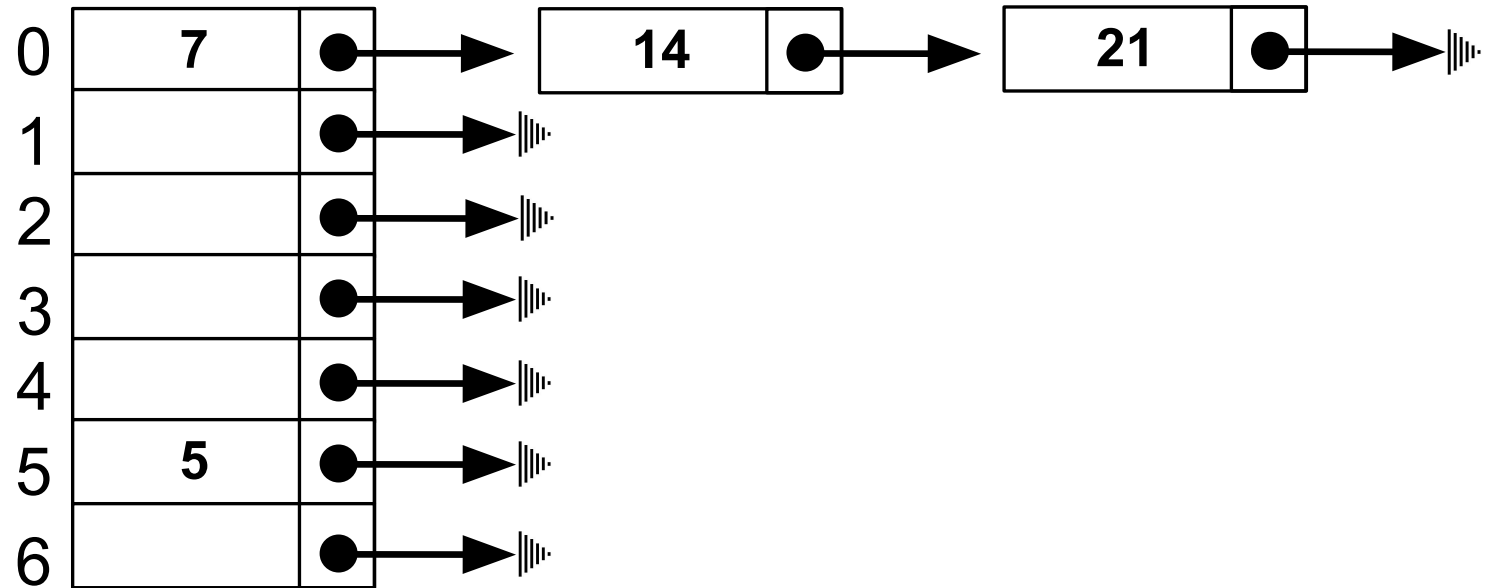


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

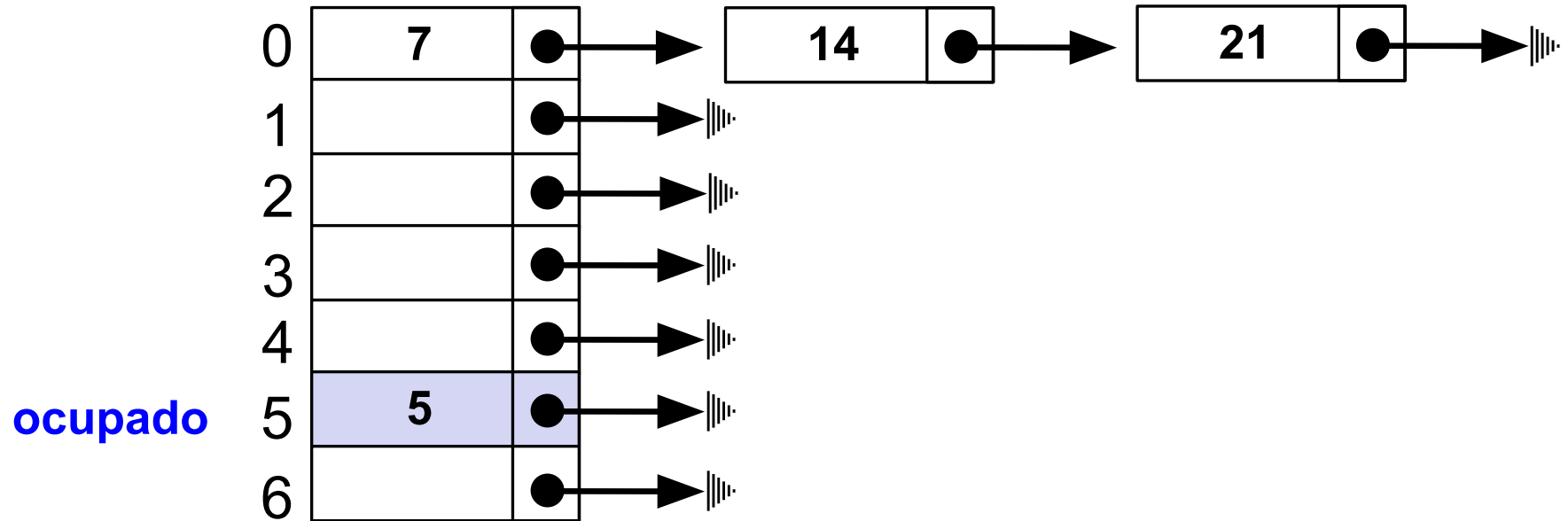


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

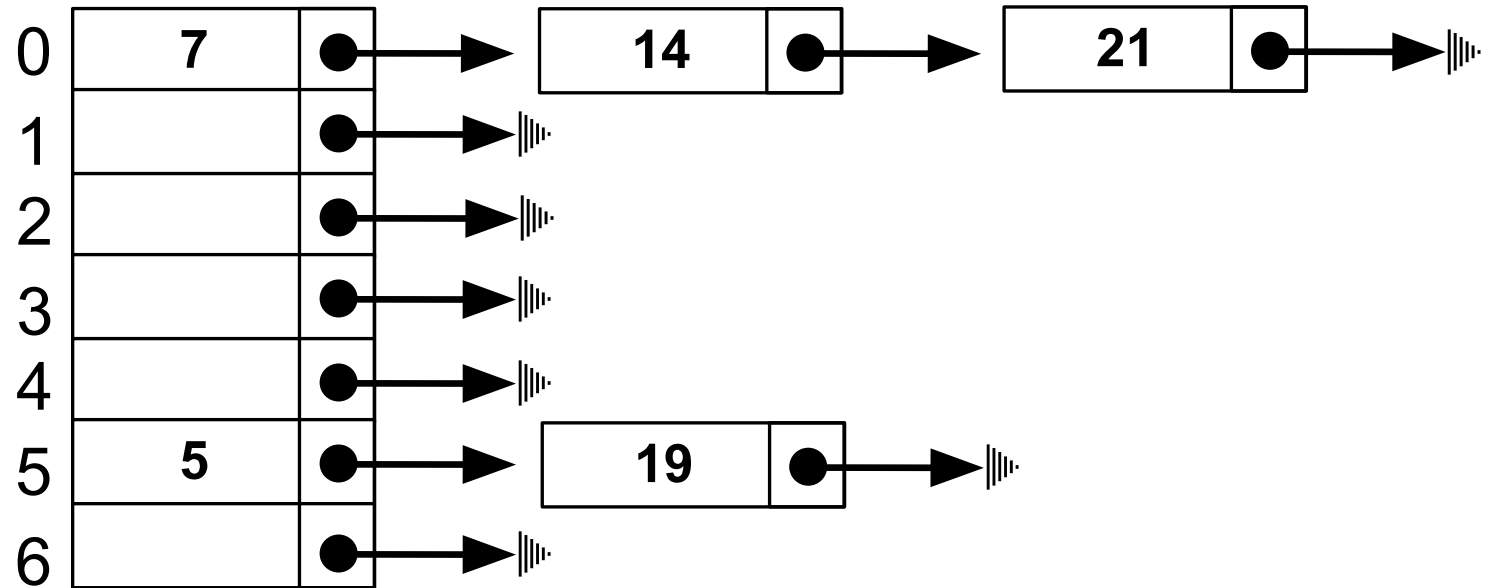


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

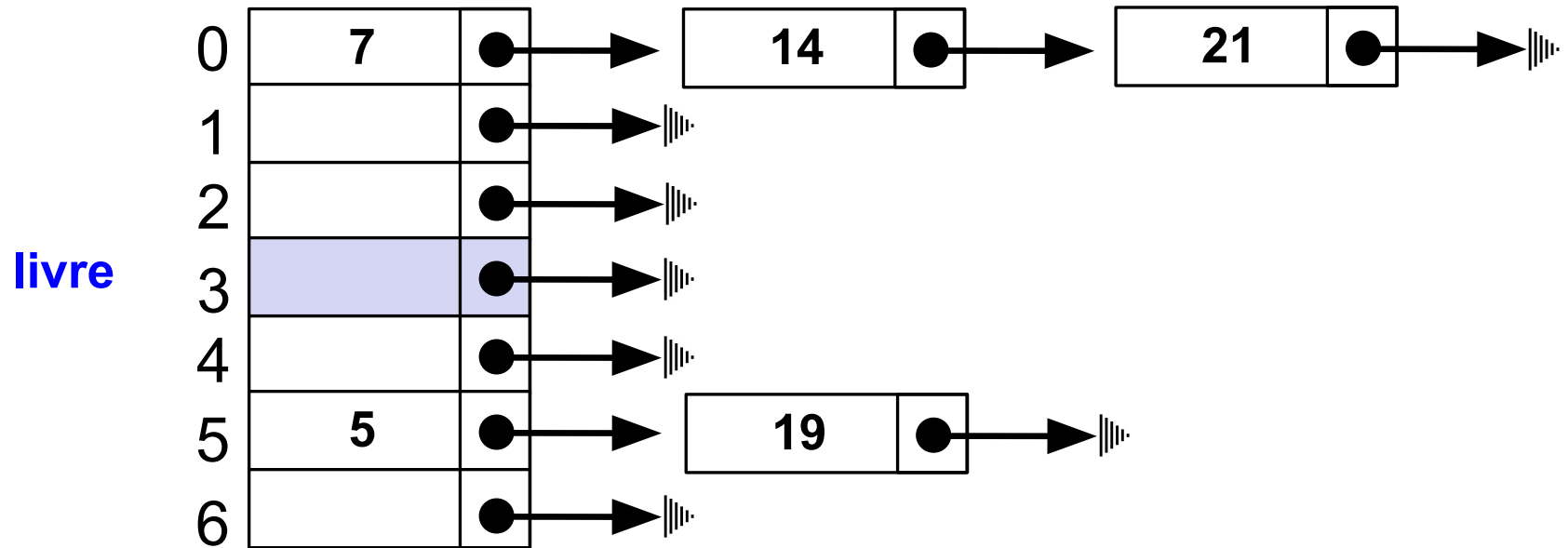


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7

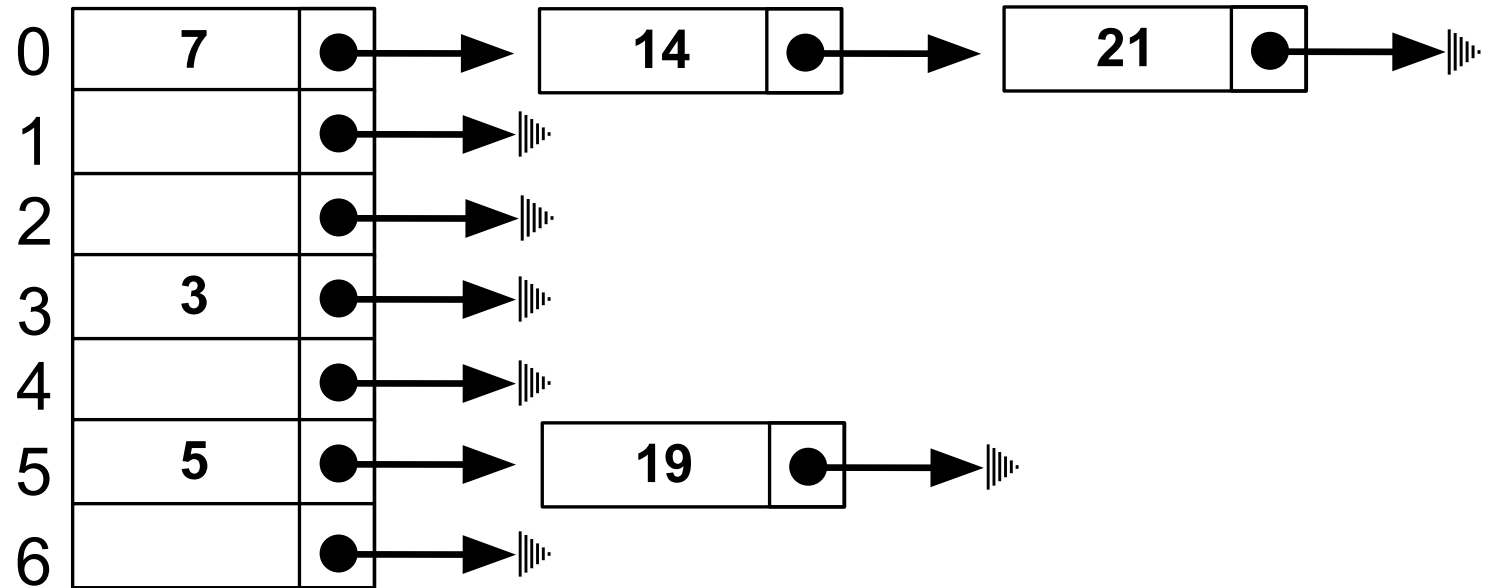


Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Hash Indireta com Lista Flexível Simples

- Suponha uma tabela de tamanho 7



Vamos inserir os números:

5, 7, 14, 21, 19 e 3

Exercício Resolvido (2)

- Como podemos implementar este TAD?

Exercício Resolvido (2): Construtor da Classe

- Como podemos implementar este TAD?

```
class Hash {  
    public Lista[] tabela;  
    public Hash (int m) {  
        tabela = new Lista [m];  
        for (int i = 0; i < m; i++){  tabela[i] = new Lista();  }  
    }  
  
    // Qual é a diferença dessa implementação  
    // para nosso exemplo?  
}
```

Exercício Resolvido (2): Método Inserir

```
void inserir(int x) throws Exception {  
    if (pesquisar(x) == true){  
        throw new Exception("Erro ao inserir!");  
    } else {  
        tabela[hash(x)].inserir(x);  
    }  
}
```

Exercício Resolvido (2): Método Pesquisar

```
boolean pesquisar(int x){  
    return tabela[hash(x)].pesquisar(x);  
}
```


Exercício Resolvido (2): Método Remove

```
void remover(int x){  
    tabela[hash(x)].remover(x);  
}
```


Análise de Complexidade

- Supondo que todos os elementos têm a mesma probabilidade de endereçamento, o comprimento esperado de cada lista será n/m , onde n é número de registros e m o tamanho da tabela
- As operações três operações custam em média $\Theta(1 + n/m)$, onde 1 é para encontrarmos a entrada na tabela e n/m , para percorrermos a lista
- Para valores de m próximos de n , o tempo se torna constante, ou seja independente de n

Gerenciamento de Colisões

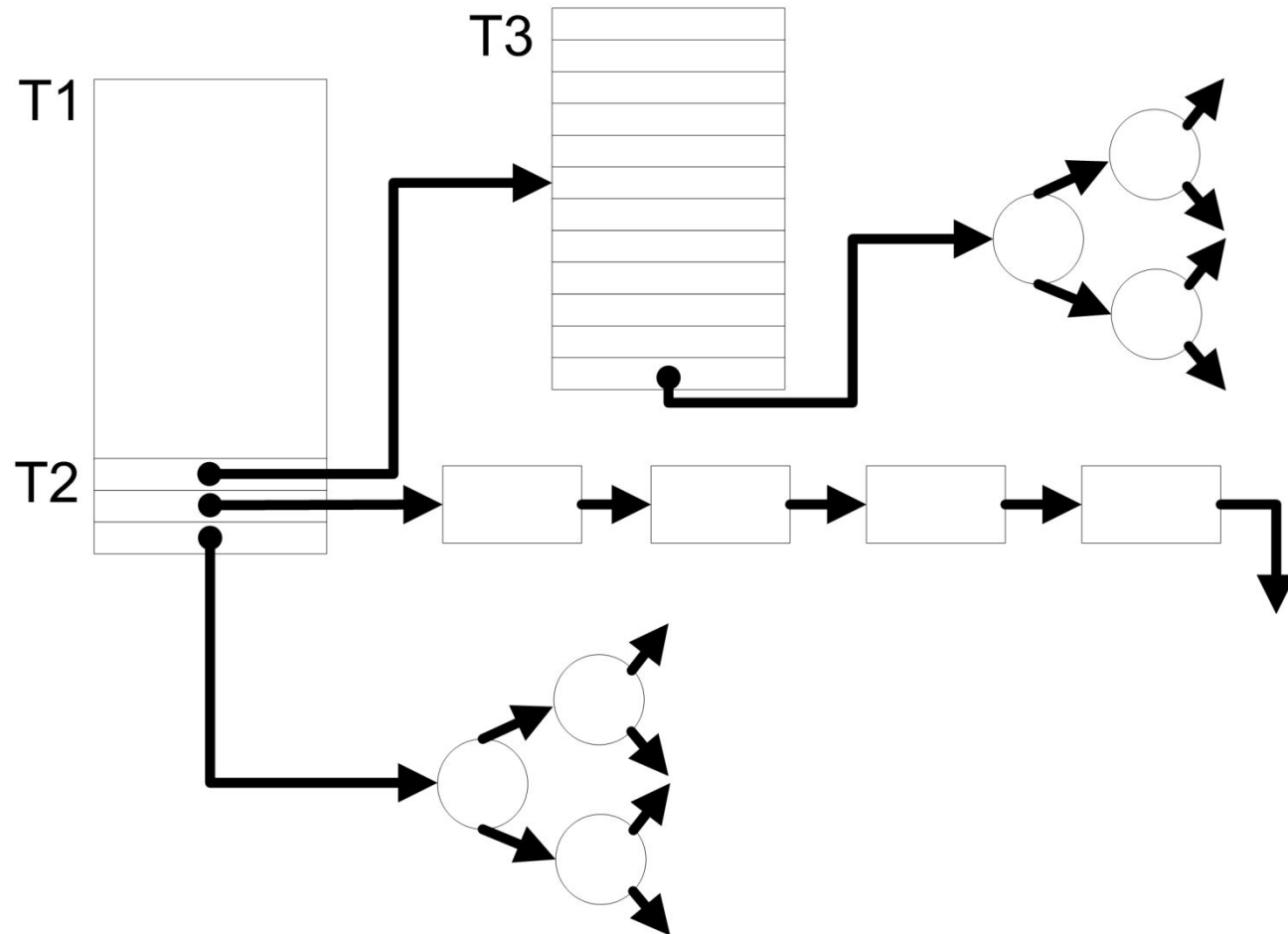
- *Hash* direta com área de reserva (*overflow*)
- *Hash* direta com rehash
- *Hash* indireta com lista flexível simples
- **Estrutura híbrida** 

Exercício (4)

- Faça os métodos de inserir, pesquisar, mostrar e remover na estrutura abaixo. Ela é composta pela tabela *hash* T1 cuja área de reserva é T2 sendo que T2 é virtual.

T3 é uma *hash* com rehash e com uma árvore binária em sua área de reserva

Considere que os métodos de *hash* e rehash estão implementados. Use as classes de Lista e Árvore apresentadas.



Exercício (5)

- Repita o exercício anterior, contudo, sem usar as classes Lista e Árvore. Nesse caso, você deve usar as classes Nó e Célula

