

Measurement of the Boltzmann constant by Einstein. Problem of the 5-th Experimental Physics Olympiad. Sofia 9 December 2017

Todor M. Mishonov, Emil G. Petkov, Aleksander A. Stefanov, Aleksander P. Petkov*

Physics Faculty,

*St. Clement of Ohrid University at Sofia,
5 James Bourchier blvd, BG-1164 Sofia*

Iglika M. Dimitrova

*Faculty of Chemical Technologies,
Department of Physical Chemistry,
University of Chemical Technology and Metallurgy,
8, Kliment Ohridski blvd, BG-1756 Sofia*

Stojan G. Manolev†

*Middle school Goce Delchev,
Purvomaiska str. 3,
MKD-2460 Valandovo, R. Macedonia*

Simona I. Ilieva‡

*Department of Atomic Physics, Physics Faculty,
St. Clement of Ohrid University at Sofia,
5 James Bourchier blvd, BG-1164 Sofia*

Albert M. Varonov§

*Department of Theoretical Physics, Physics Faculty,
St. Clement of Ohrid University at Sofia,
5 James Bourchier blvd, BG-1164 Sofia*

(Dated: 13 април 2018 г.)

Several consecutive experiments with specifically built set-up are described. Performing of the consecutive experimental tasks enables possibility to determine Boltzmann's constant k_B . The fluctuations of the voltage $U(t)$ of series of capacitors connected in parallel with a constant resistance are measured. The voltage is amplified 1 million times $Y = 10^6$. The amplified voltage $YU(t)$ is applied to a device, which give the voltage mean squared in time $U_2 = \langle (YU(t))^2 \rangle / U_0$. This voltage U_2 is measured with a multimeter. A series of measurements gives the possibility to determine the Boltzmann's constant from the equipartition theorem $C\langle U^2 \rangle = k_B T$. In order to determine the set-up constant U_0 a series of problems connected with Ohm's law are given that are addressed to the senior students. For the junior high school students, the basic problem is to analyse the analog mean squaring. The students works are graded in four age groups S, M, L, XL. The last age group contains problems that are for university students (XL category) and include theoretical research of the set-up as an engineering device. This problem is given at the Fifth Experimental Physics Olympiad "Day of the Electron", on December 2017 in Sofia, organized by the Sofia Branch of the Union of Physicists in Bulgaria with the cooperation of the Physics Faculty of Sofia University and the Society of Physicists of the Republic of Macedonia, Strumica.

INTRODUCTION

From its very beginning, the Experimental Physics Olympiad (EPO) is worldwide known; all Olympiad problems have been published in Internet [1–4] and from the very beginning there were 120 participants. In the last years high-school students from 7 countries participated and the distance between the most distant cities is more than 4 Mm.

Let us describe the main differences between EPO and other similar competitions.

- Each participant in EPO receives as a gift from the organisers the set-up, which one worked with. So, after the Olympiad has finished, even bad performed participant is able to repeat the experiment and reach the level of the champion. In this way, the Olympiad directly affects the teaching level in the whole world. After the end of the school year, the set-up remains in the school, where the participant has studied.
- Each of the problems is original and is connected to fundamental physics or the the understanding of the operation of a technical patent.
- The Olympic idea is realised in EPO in its initial from and everyone willing to participate from

around the world can do that. There is no limit in the participants number. On the other hand, the similarity with other Olympiads is that the problems are direct illustration of the study material and alongside with other similar competitions mitigates the secondary education degradation, which is a world tendency.

- One and the same experimental set-up is given to all participants but the tasks are different for the different age groups, the same as the swimming pool water is equally wet for all age groups in a swimming competition.

We will briefly mention the problems of former 4 EPOs. The setup of EPO1 was actually a student version of the American patent for auto-zero and chopper stabilised direct current amplifiers [1]. The problem of the second EPO [2] was to measure Planck constant by diffraction of a LED light by a compact disk. A contemporary realization of the assigned to NASA patent for the use of negative impedance converter for generation of voltage oscillations was the set-up of EPO3 [3]. EPO4 [4] was devoted to the fundamental physics – to determine the speed of light by measuring electric and magnetic forces. The innovative element was the application of the catastrophe theory in the analysis of the stability of a pendulum. In short, the established traditions is a balance between contemporary working technical inventions and fundamental physics.

And this 5th Olympiad (EPO5) follows the established tradition. In all countries study programs it is mentioned that heat is connected with atomic motion. But even a comparatively simple example of the Maxwellian velocity distribution of molecules is not illustrated with an experiment even in very good universities. The reason for this is because vacuum technology is very expensive and requires professional work. On the other hand, the electronic measurements are foolproof and thousand times cheaper. That is why, if we want to study the energy of the thermal fluctuations that is described by the temperature and Boltzmann constant [5]

$$m \langle v_x^2 \rangle = k_B T = C \langle U^2 \rangle,$$

the study of the mean square of the voltage $\langle U^2 \rangle$ is thousand times cheaper than the measurement of the mean square of the velocity $\langle v_x^2 \rangle$. That is why, for methodological purposes for known capacity, the Boltzmann constant determination via electric measurements is the only possible method for high-school education. As fundamental physics, this idea was proposed by Albert Einstein and now, 111 years later, the method is an experimental problem for high school students and the set-up has been produced in 200 copies.

CURRENT EPO5 PROBLEM

111 years ago Albert Einstein [6] offered a method for Boltzmann's constant measurement k_B by examination of the mean thermal energy $C \langle U^2 \rangle = k_B T$. Strangely, that experiment has never been conducted so far and you are the first ones that will be able to do it after our team makes this idea a reality. The technological progress during the last century made possible that scientific problem to be adapted to the level of a school problem. We begin with the tasks that can be solved by the junior students and the difficulty arises gradually. Each participant works as far as he/she can. The last tasks are for the university students.

Tasks for further work. The participants in the Olympiad receive from the organizers the experimental set-up they have worked with, as one of the most important goals of the Olympiad is the careful repetition of the experiment up to the point of having a detailed measurement of the Boltzmann's constant and the comprehensive understanding of the theory. The problem's solution will be published on the Cornell University library server and some details of scanned works of participants will be published on the Sofia Branch of Union of Physicists in Bulgaria website. After reading the solution, we expect the participants to conduct all described experiments in it and obtain the Boltzmann's constant. k_B . This first determination of a fundamental constant throws upon us the glare of a great epoch in the development of physics, when the quanta and atoms were subjects of entertainment for the boys who created the contemporary physics.

Similar experiments are given only in the best universities [7, 8] and whoever has an access to the set-ups' descriptions may compare the accuracy with our high school experiment.

The theoretical subproblems are a good exercise in Ohm's law, which give the opportunity for comprehensive understanding of the set-up's operation, and are also a good starting point for understanding the electronics that is the basis of many physical devices. The experimental set-ups are gifts from the Olympiad organizers to the participants, who can use them and make demonstrations in physics classes. After the end of the school year, these set-ups should be given to the physics classroom in the school in which the participants study.

INITIAL EASY TASKS. S

1. Measure the voltages of the four 9 V batteries and measure with maximal accuracy the voltage of the 1.5 V battery.
2. Place the 1.5 V battery in its holder, connect it potentiometrically and measure the interval of voltages which you get by rotating the axis of the potentiometer. This will be the voltage source in the next tasks. Reversing polarity changes the voltage sign.
3. Connect the 9 V batteries with the connection clips by buckling the electrodes..

ANALOGUE SQUARING. M

4. **Attention! From this moment on there is a possibility to burn the integral circuits, if you connect the batteries improperly.** Orient the set-up you work with so that both wires at the edge to be on the right side and the sign “COM” to be on the right at the bottom. Take a look at the schematics in Fig. 1.
5. Carefully connect the 9 V female connector to the right hand side 3-pin male connectors on the circuit board, label to label. Work carefully – if you make an error with the polarity you will burn the integral circuits.
6. Connect the potentiometrically connected battery with the input wire of the set-up at the top with a label “IN” and the other electrode of the potentiometer connect to the wire comes from the “ground” of the circuit with a sign “COM”.
7. Parallel to the potentiometer and “IN”–“COM” inputs of the circuit, connect the first voltmeter, which shows voltage U_1 .
8. At proper connectivity of the circuit, when you rotate the potentiometer axis, the voltage U_1 should change approximately between 0 and the battery voltage 1.5 V.
9. The second voltmeter, that shows voltage U_2 , connect between the output wire of the circuit “OUT” and the common point “COM”. This way U_2 is the voltage between “OUT” and “COM” points.
10. Check whether the “COM” electrodes of both multimeters and the set-up are connected.
11. Rotate the potentiometer axis, wait 1 minute and write down the voltages U_1 and U_2 . Switch the polarity of the voltage source and repeat the measurements of the input voltage U_1 and the output voltage U_2 . Arrange the results in a table with columns: number of measurement i , U_1 and U_2 .
12. Represent the results in a graph in the plane U_1 abscissa (horizontal) and U_2 ordinate (vertical).
13. Add a column to the table $(U_1)^2$ and represent the results graphically in the plane $(U_1)^2$ abscissa and U_2 ordinate. Draw a straight line that passes most closely to the experimental points. This fitting (approximating) line is described by the equation $U_2 = (U_1)^2/U_0 + \text{const}$. Select two points on the straight line, measure the differences in abscissa $\Delta(U_1^2)$, and in ordinate $\Delta(U_2)$ and determine the parameter with dimension voltage from the slope $U_0 = \Delta(U_1^2)/\Delta(U_2)$. This parameter of analogue multiplying schematics is essential for the determination of the Boltzmann’s constant k_B and this is described in the subproblems of the next section.

VOLTAGE FLUCTOSCOPY. DETERMINATION OF BOLTZMANN’S CONSTANT. L

14. Disconnect the potentiometer and the voltmeter, measuring the “IN”–“COM” voltage U_1 .
15. Carefully connect the second voltage source with two 9 V batteries. Label to label, orange mark to orange mark, otherwise the integral circuit will be damaged.
16. This is the most dangerous moment for the integrated circuits (ADA4898-2). Mount both integrated circuits on the board. Again: green mark to green mark, label to label. If you make a mistake you will burn the integrated circuit.

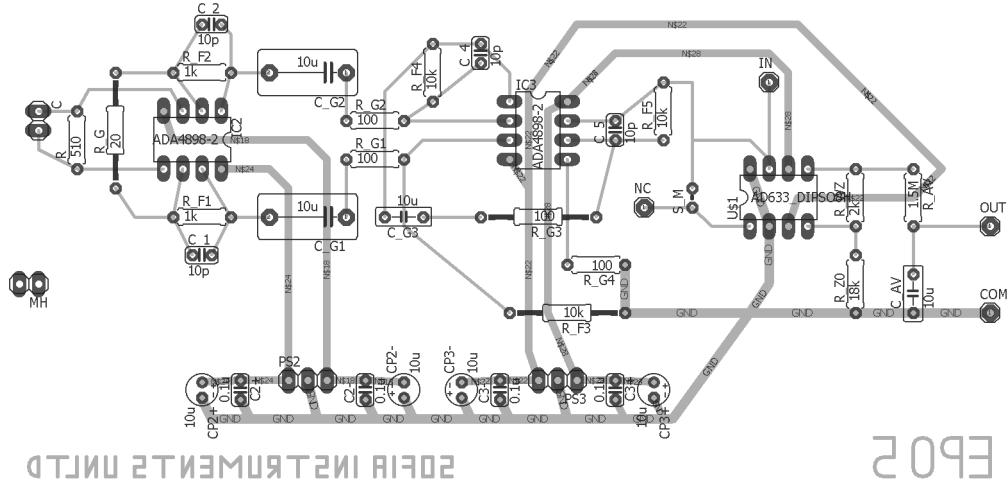


Figure 1: PCB

17. You should have available a set of capacitors soldered to connectors. The capacity C of each capacitor is written in nanofarads ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) on the label glued to the connector. You can arrange the capacitors by the size of their capacity and write down those capacities C_n in a table; the index n shows the consecutive number.
18. What follows is the most important measurement – determining the thermal fluctuations of the voltage of the capacitor. Keep the wire connected to the “NC” label of the set-up away from the power supplies. Attach in a succession each of the capacitors on the connector at the left end of the set-up. Wait for 2 minutes and write down the voltage U_2 shown by the voltmeter connected between the “OUT” and “COM” electrodes of the set-up. Arrange the results in a table with columns n , C_n and U_2 .
19. The fluctuating voltage U of the capacitor C is amplified one million times, more precisely, the gain coefficient is $Y = 1.01 \times 10^6$, compare that to the amplifier of the Habicht brothers. [9] Calculate the parameter $U^* = U_0/Y^2$. It has dimension of voltage and is important for the experiment. Do not be alarmed by the powers, this is a really small voltage of the order of picovolt ($1 \text{ pV} = 10^{-12} \text{ V}$).
20. Evaluate the room temperature and write it down in Kelvins ($0 \text{ K} \approx -273^\circ\text{C}$).
21. Add two new columns to the table: $y_n = U_{2,n}U^*/T$ and $x_n = 1/C_n$; This is the most important experimental data!
22. The results in the table should be represented visually by a graph in the x - y plane. Think for a few moments what the proper scaling should be.
23. If you have worked correctly the individual points should be close to a straight line. Draw the line $y = k_B x + \text{const}$, which you think is closest to all the points. This is a standard mathematical procedure, called linear regression and is implemented numerically in a lot of calculators so you may, if you want, get the solution numerically.
24. Choose two points from the line and determine the difference in their coordinates on the y axis - Δy , and the x axis - Δx . Write down those differences.
25. Calculate the slope of the line $k_B = \Delta y/\Delta x$ and draw a box around the result. Congratulations, you have just measured a fundamental constant - Boltzmann's constant k_B ! Just determining the order correctly is a big success.

THEORETICAL PROBLEMS FOR OHM'S LAW RELATED TO THE EXPERIMENTAL SET-UP. XL

This is an Olympiad in experimental physics, solving the problems in this section will give you only a few points, and their impact on the final score may be insignificant.

The results from the solution of those problems will be used only for differentiating works in which the experiments were performed equally well, or for non-zero results in cases in which the participant has burnt the integrated circuits by not following correctly the assembly instructions.

The circuits shown in Figures 3, 4, 5 and 6 contain triangles. The left vertical side of each triangle has inputs, denoted by (+) and (-). The output is on the right and is denoted by (0). The output current I_0 is such that the input voltages equalize $U_+ = U_-$. The currents at the inputs (+) and (-) are negligible. Such device is called an operational amplifier.

26. By using the Ohm's law show that the relation between voltages and currents is given by the equation $y_1 = V_2/V_1 = 1 + R_f/r_g$, Fig. 3.
27. Analogously, for the symmetric variant of the same circuit $y_1 = (V_2 - V_4)/(V_1 - V_3) = R_f/r_g + 1$, Fig. 4.
28. $y_2 = V_7/(V_5 - V_6) = -R_f/r_g$. Fig. 5.
29. $y_3 = V_9/V_8 = -R_f/r_g$. Fig. 6.
30. If a large capacitor C_g is connected in series with a resistor r_g show that, for frequencies such that $\omega r_g C_g \gg 1$, the effect of the capacitor is negligible.
31. For which frequencies, we can ignore the effect of a small capacitor C_f , connected in parallel with a large resistor R_f ?
32. If the three amplifiers, are connected in series, the total gain is $Y = y_1 y_2 y_3$. Make an estimate for the frequency interval (f_1, f_h) , for which the gain coefficient Y is approximately constant. Use the numerical values of the parameters in table I; $f = \omega/2\pi$
33. In the circuits in Fig. 7 the voltage $U_W = U_X U_Y / U_m + U_Z$, with $U_X = U_Y$, and the constant $U_m = 10$ V for the used amplifier AD633. Express U_Z through U_W and show that $U_W = U_X^2 / \tilde{U}$, where $\tilde{U} = U_m R_1 / (R_1 + R_2)$.
34. Show that $U_2 = R_V \langle U_W \rangle / (R_{av} + R_V)$, where R_V , most frequently 1 MΩ, is the internal resistance of the ohmmeter, and the brackets $\langle U_W \rangle$ denote time average.
35. Show that $U_2 = U_X^2 / U_0$, where $U_0 = \tilde{U} (R_{av} + R_V) / R_V$.
36. Finally, the main equation for our set-up is $U_2 = \langle U^2 \rangle / U^*$, where U is the capacitor voltage at the input of the device, and

$$\frac{1}{U^*} \equiv \frac{Y^2}{U_0} = \frac{Y^2}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_V}{R_{av} + R_V}. \quad (1)$$

37. Calculate the values of the parameter U^* by using the parameters in Table I.

Circuit element	Value
R	510Ω
r_g	20Ω
R_F	$1 \text{ k}\Omega$
C_F	10 pF
C_G	$10 \mu\text{F}$
R_G	100Ω
R'_F	$10 \text{ k}\Omega$
C'_F	10 pF
R_1	$2 \text{ k}\Omega$
R_2	$18 \text{ k}\Omega$
R_{av}	$1.5 \text{ M}\Omega$
C_{av}	$10 \mu\text{F}$
R_V	$\approx 1 \text{ M}\Omega$
V_{CC}	$+9 \text{ V}$
V_{EE}	-9 V

Table I: Table of the numerical values of the circuit elements from Fig. 2.

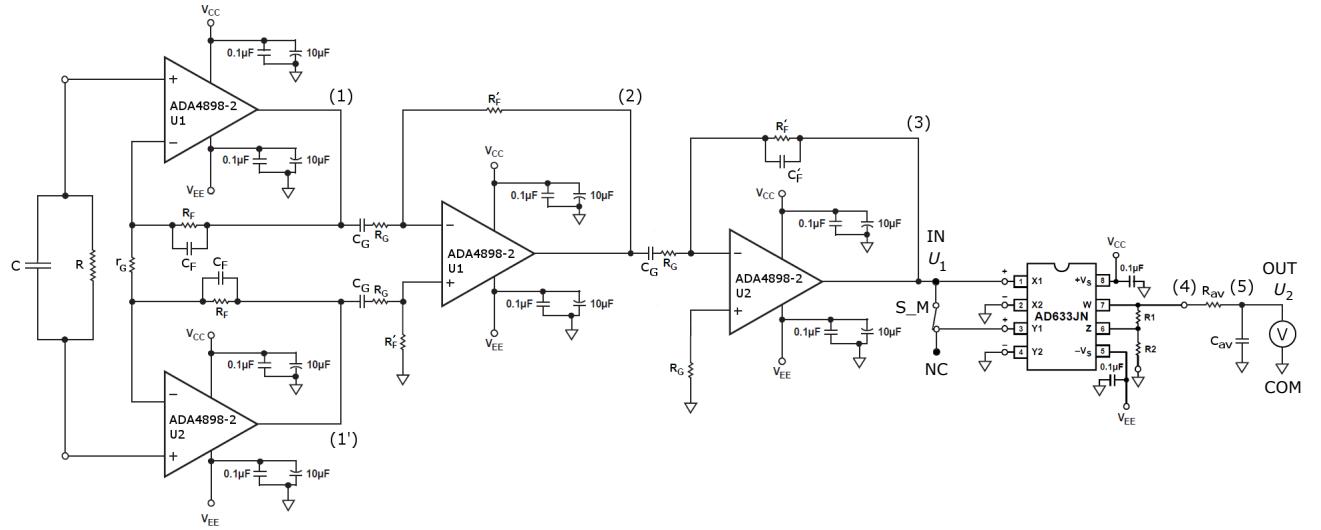


Figure 2: Circuit.

HOMWORK PROBLEM, THE SOLUTION TO WHICH MUST BE SEND DURING THE NIGHT AFTER THE OLYMPIAD, BY SUNRISE, AT THE E-MAIL OF THE OLYMPIAD. DERIVE THE FORMULAS USED FOR DETERMINING BOLTZMANN'S CONSTANT k_B . SOMMERFELD REWARD WITH A MONETARY EQUIVALENT OF DM137. XL

Instructions. Start with the equipartition theorem applied to the energy of the temperature fluctuations. $\frac{1}{2}C \langle U^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$. By analyzing the electronic circuit of the set-up, express the mean-square of voltage $\langle U^2 \rangle = U_2 U^*$ by the experimentally measured voltage U_2 . Express the coefficient U^* in the linear regression formula $U_2 U^* / T = \langle U^2 \rangle / T = k_B (1/C) + \text{const}$, from which, by the slope of the line, you can determine the Boltzmann's constant k_B . In a few words, write an article showing how the idea of Einstein for determining Boltzmann's constant is realized with our set-up. Show what improvements to the set-up would increase the accuracy of the experiment.

You can work as a group with other participants in the Olympiad, you can also consult with professionals, but you must give the names of the consultants and the full list of authors.

The best article will be rewarded the a Sommerfeld reward with a monetary equivalent of DM137. The prize is given personally and only in the day in which the results are announced - 10.12.2017.

PROBLEMS FOR FURTHER WORK

The Olympiad is created with the idea of helping students, deprived of quality education, students coming from schools where the physics classrooms are closed. For this reason, do not get upset if you are not satisfied with the achieved results. Ask your teacher if there is an appropriate measuring apparatus for measuring the capacitors more precisely. Do the same experiment calmly in your home and you will see that it is simple. If you can measure a fundamental constant in your home, then you have a flying start for all natural and technical sciences. If you have the opportunity, say in your physics club, demonstrate the set-up in your school.

Please, write us a short text containing your opinion about the Olympiad. We highly value your recommendations, and will try to take them into account for the next issue of the Olympiad - EPO6, next year at the same time.

The experimental set-up is indeed unique. You have in your hands an amplifier, capable of amplifying a million times, with a noise level of $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

With the proper modification the set-up can be used for measurement of the electron charge and the absolute temperature. Furthermore, with a minimal modification, the device can be used as a lock-in voltmeter, which can measure alternating voltages even smaller than 1 microvolt ($1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$). For those reasons, there is an output, denoted by "NC", which is not used in the problems for the Olympiad. For more details, please follow the publications of the authors, on the server, containing the problems and their solutions from the previous issues of the Olympiad.

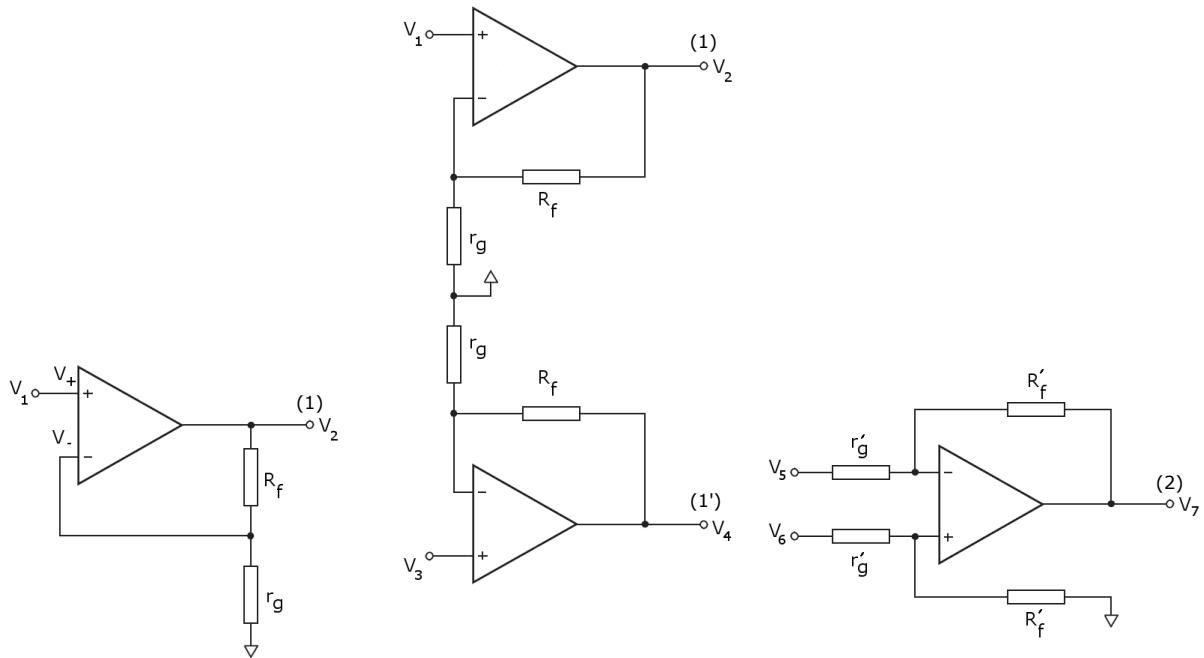


Figure 3: Non-inverting amplifier

Figure 4: Buffer

Figure 5: Differential amplifier

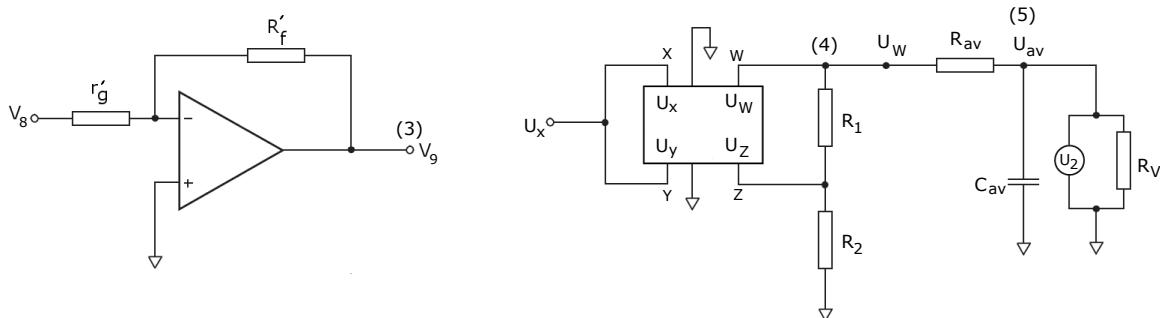


Figure 6: Inverting amplifier

Figure 7: Analog multiplier

* E-mail: mishonov@gmail.com, mishonov@bgphysics.eu

† E-mail: manolest@yahoo.com

‡ E-mail: simonailieva24@gmail.com

§ E-mail: akofmg@gmail.com

- [1] V. G. Yordanov, P. V. Peshev, S. G. Manolev, T. M. Mishonov, "Charging of capacitors with double switch. The principle of operation of auto-zero and chopper-stabilized DC amplifiers", arXiv:1511.04328 [physics.ed-ph]
- [2] V. N. Gourev, S. G. Manolev, V. G. Yordanov, T. M. Mishonov, "Measuring Plank constant with colour LEDs and compact disk", arXiv:1602.06114 [physics.ed-ph].
- [3] S. G. Manolev, V. G. Yordanov, N. N. Tomchev, T. M. Mishonov, "Volt-Ampere characteristic of "black box" with a negative resistance", arXiv:1602.08090 [physics.ed-ph].
- [4] V. G. Yordanov, V. N. Gourev, S. G. Manolev, A. M. Varonov, T. M. Mishonov, "Measuring the speed of light with electric and magnetic pendulum", arXiv:1605.00493 [physics.ed-ph].
- [5] C. W. McCombie, "Nyquist Theorem and its generalisations", Chap. 24 in *Problems in Thermodynamics and Statistical Physics*, (PION London 1971), edited by P. T. Landsberg.
- [6] A. Einstein, "Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der Elementarquanta (On the boundaries of the applicability of the law of thermodynamic equilibrium and on the opportunity of a new definition of the elementary quanta)," Ann. Phys. **22**, 569-572 (1907), http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1907_22_569-572.pdf.
- [7] D. B. Pengra, R. Van Dyck and J. Stoltzenberg, "Fundamental noise and fundamental constants University

- of Washington Modern Physics Laboratory – Condensed Matter (2012), http://courses.washington.edu/phys431/noise/new_noise_old_box.pdf.
- [8] “Johnson Noise and Shot Noise: The Determination of the Boltzmann Constant, Absolute Zero Temperature and the Charge of the Electron”, MIT Department of Physics (2013), “Johnson Noise and Shot Noise”, MIT Junior Lab Regular Experiment, (2013), <http://web.mit.edu/8.13/www/43.shtml>, <http://web.mit.edu/8.13/www/JLExperiments/JLExp43.pdf>, Used equipment: Low-noise voltage preamplifier, SR560 – DC to 1 MHz, <http://thinksrs.com/downloads/PDFs/Catalog/SR560c.pdf>, $e_N = 4 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, \$2595; Krohn-Hite 3BS8TB-1k/50kg, 8-pole Butterworth, cutoff accuracy 2%, <http://www.krohn-hite.com/htm/filters/PDF/ModulesData.pdf>.
 - [9] C. Habicht and P. Habicht, “Elektrostatischer Potentialmultiplikator nach A. Einstein,” Phys. Ztschr. **11**, 532-555 (1910); Amplification 360000 (111 dB); $\delta U = 300 \mu\text{V}$.
 - [10] T. M. Mishonov, V. I. Danchev, E. G. Petkov, V. N. Gourev, I. M. Dimitrova, A. M. Varonov, “Manhattan equation for the operational amplifier”, arXiv:1802.09342 [eess.SP].
 - [11] T. M. Mishonov, V. G. Yordanov, A. M. Varonov, “Measurement of electron charge q_e and Boltzmann’s constant k_B by a cheap do-it-yourself undergraduate experiment”, arXiv:1703.05224 [physics.ed-ph].

A photograph of the experimental set-up

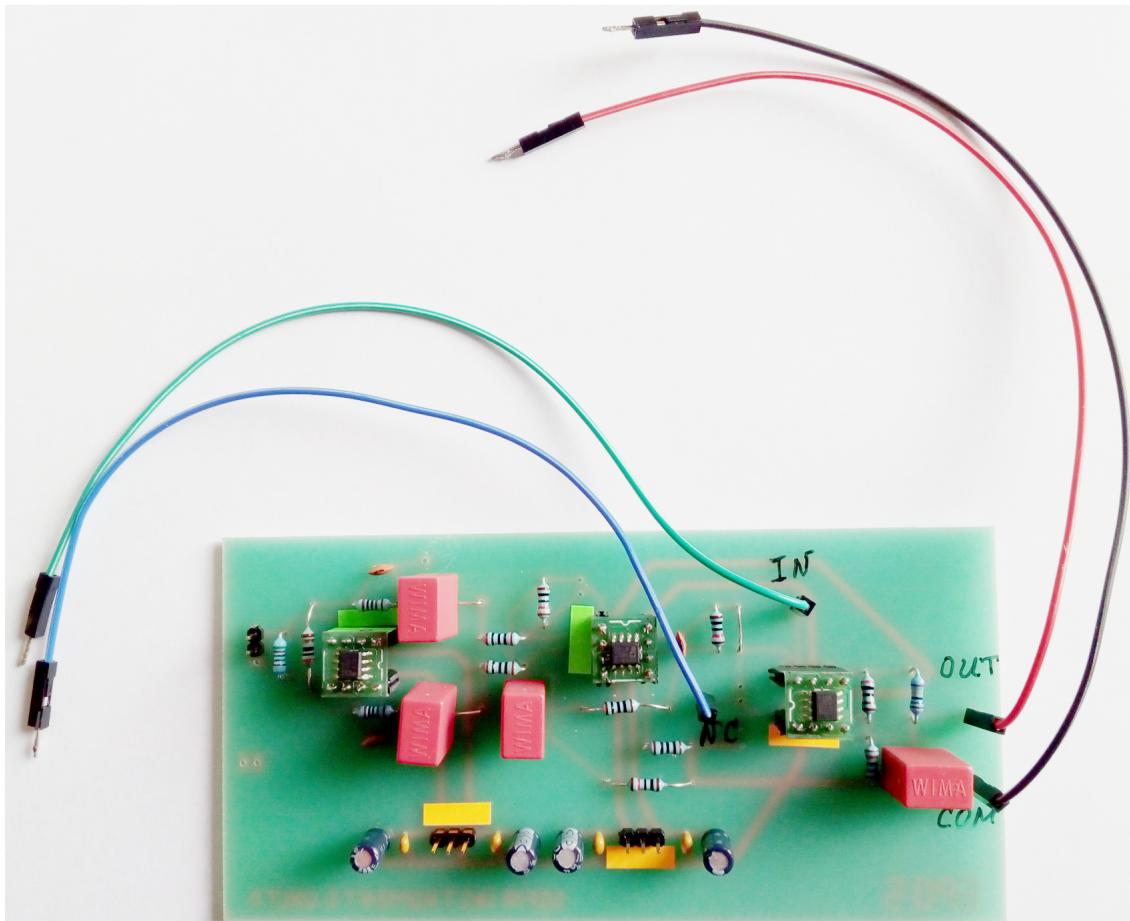


Figure 8: A photograph of the experimental set-up. The electrodes and wires between which the difference U_2 of the output voltage “OUT” and the ground “COM” are visible on the right. The input voltage U_1 is applied between the input “IN” and the ground “COM”. The wire “NC” can be used for further research. On the 2-pin male connector on the left at the end the different capacitors C_n are placed.

Solution to the experimental problems

Initial easy tasks. S

1. $U_{B1} = 9.72 \text{ V}$, $U_{B2} = 9.73 \text{ V}$, $U_{B3} = 9.73 \text{ V}$, $U_{B4} = 9.73 \text{ V}$ and for the 1.5 V battery measurement the multimeter range that gives the best accuracy should be used (usually this range is 2 V), $U_{B5} = 1.582 \text{ V}$.
2. The potentiometer has three terminals, the outer two of which are soldered to the battery holder. A potentiometer connectivity means connection to the middle and one of the outer terminals, $U_{\min} = -1.577 \text{ V}$, $U_{\max} = 1.577 \text{ V}$ and therefore the voltage interval is $U \in [-1.577, 1.577] \text{ V}$.
3. Simply connecting the 9 V batteries to their connection clips.

Analogue squaring. M

4. Orient the experimental set-up according to the instructions.
5. Turn on the voltage according to the instructions.
6. Connect the battery to the described in the instructions electrodes of the experimental set-up.
7. Connect a voltmeter parallel to the input according to the instructions.
8. A check for proper connectivity.
9. Connect the second voltmeter to the output of the set-up according to the instructions.
10. A check for proper connection of both voltmeters, the “COM” electrodes of which should be connected.
11. Table II without the last column (task 13).

i	$U_1 \text{ [V]}$	$U_2 \text{ [V]}$	$U_1^2 \text{ [V}^2]$
1	0.1	0.011	0.01
2	0.2	0.023	0.04
3	0.4	0.07	0.16
4	0.6	0.15	0.36
5	0.8	0.263	0.64
6	1.0	0.386	1.00
7	1.2	0.551	1.44
8	1.4	0.748	1.96
9	1.573	0.941	2.474
10	-1.572	0.942	2.471
11	-1.4	0.75	1.96
12	-1.2	0.553	1.44
13	-1.0	0.387	1.00
14	-0.8	0.265	0.64
15	-0.6	0.151	0.36
16	-0.4	0.071	0.16
17	-0.2	0.024	0.04
18	-0.1	0.012	0.01

Table II: Results from the measurements in task 11 and the data processing in task 13 (last column).

12. The results are presented in Fig. 9.
13. The last column of Table II and the results presented in Fig. 10. We choose points (a) and (b) in Fig. 10, so that in ordinate $(U_2)_a = 0.9 \text{ V}$ and $(U_2)_b = 0.3 \text{ V}$ and we find their corresponding values in abscissa $(U_1)_a^2 \approx 2.24 \text{ V}^2$ and $(U_1)_b^2 \approx 0.725 \text{ V}^2$ by for each point drawing a line parallel to the ordinate towards the abscissa, and the value of the intersection point is the corresponding $(U_1)^2$

$$U_0 = \frac{\Delta(U_1^2)}{\Delta(U_2)} = \frac{(U_1)_a^2 - (U_1)_b^2}{(U_2)_a - (U_2)_b} = \frac{2.24 - 0.725}{0.9 - 0.3} = 2.525 \text{ V}. \quad (2)$$

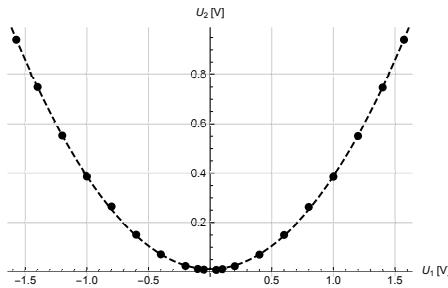


Figure 9: The graphically represented dependency U_2 of U_1 from Table II.

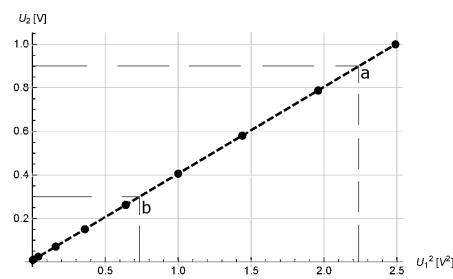


Figure 10: The graphically represented dependency U_2 of $(U_1)^2$ from Table II.

Voltage fluctoscropy. Determination of Boltzmann's constant. L

14. Disconnect the input voltage source and input voltmeter according to the instructions.
15. Apply voltage to the amplifier **according to the instructions**.
16. Connect the two operational amplifiers to the printed circuit board **according to the instructions**.
17. The capacity values of the capacitors set are written in the first 2 columns of Table III.

n	C_n [nF]	U_2 [V]	x_n [1/ μ F]	y_n [fV 2 /K]
1	14.8	0.293	67.57	2.458
2	27.9	0.255	35.84	2.139
3	33.4	0.244	29.94	2.047
4	42.3	0.233	23.64	1.955
5	66.9	0.202	14.95	1.695
6	105.0	0.204	9.524	1.712

Table III: Experimental results from the measurement of the voltage of the thermal fluctuations for the set of capacitors. Here for brevity we have included the prefix f = 10^{-15} .

18. The results from the measurement according to the instructions are written in the 3-rd column of Table III.
19. For U_0 we obtained 2.525 V, therefore
$$U^* = \frac{U_0}{Y^2} = \frac{2.525}{(1.01 \times 10^6)^2} = \frac{2.525}{(1.01)^2 \times 10^{12}} = 2.475 \times 10^{-12} = 2.475 \text{ pV}. \quad (3)$$
20. No thermometer is necessary for the evaluation (not exact measurement) of the temperature in the auditorium. For room temperature values between 20°C and 25°C are acceptable, in Kelvins (we add 273°C more) respectively 293 K and 298 K, we will pick up the lesser value $T = 293$ K. The difference between both values is below 2%, which is completely satisfying for our problem. Moreover, these 5°C are fully sensible and in practice any human being is capable to feel even smaller temperature differences (for instance whether it is warm enough in the auditorium for one to work in a t-shirt). Your body is a thermometer and like any measuring device, it needs proper calibration for reliable readings.
21. The results are written in the last 2 columns of Table III, where the second index n of the notion $U_{2,n}$ is the number of the respective capacitor and the prefix "f" for fV = 10^{-3} pV = 10^{-15} V is called femto-volt.
22. Assess the scale for the graphical representation of the obtained measurements.
23. The straight line is drawn in Fig. 11.

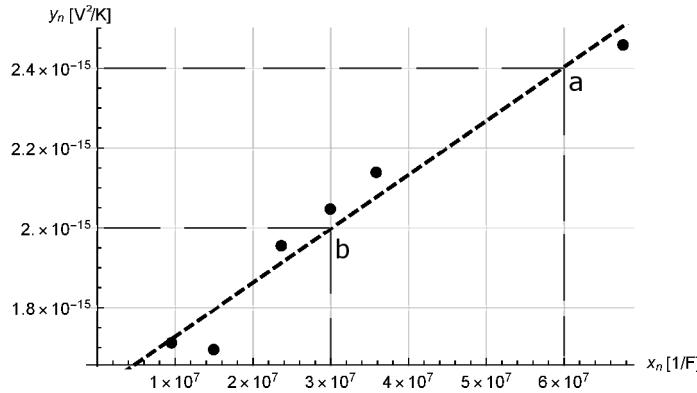


Figure 11: Graphical representation of the dependency y_n of x_n from Table III. First, the experimental points are placed. Then an approximating line is drawn. This line can be drawn with an eye, while the mathematical procedure is called a linear regression. On the straight line we choose 2 points (a) and (b) and calculate the slope $k_B = \Delta y / \Delta x$, which in our case gives the Boltzmann constant.

24. Analogously to problem 13, we choose 2 points on the straight line (a) and (b) with respective coordinates $x_a = 6 \times 10^7 \text{ F}^{-1}$, $y_a = 2.4 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}$ and $x_b = 3 \times 10^7 \text{ F}^{-1}$, $y_b = 2 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}$ and we calculate the difference in their coordinates

$$\Delta y = y_a - y_b = (2.4 - 2) \times 10^{-15} = 0.4 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}, \quad (4)$$

$$\Delta x = x_a - x_b = (6 - 3) \times 10^7 = 3 \times 10^7 \text{ 1/F}. \quad (5)$$

25. With the obtained values for the coordinate differences, we calculate the slope of the line, which in fact is k_B

$$k_B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.4}{3} \times 10^{-22} = 1.33 \times 10^{-23} (\text{F V}^2/\text{K} = \text{J/K}). \quad (6)$$

Let us account that the Boltzmann constant is very small and even the correct determination of its magnitude with such a simple set-up is a significant success. When the signal is amplified a million times in voltage and 10^{12} times (120 dB) in power a multiplier of 2 (3 dB) means an error in logarithmic scale $3/120=2.5\%$, which is a considerable success for an experimental set-up for the high school education. Although, it happens the set-up to give an accuracy of several percent. With the well-known experimental value $k_B = 1.38064 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ the relative measurement error is $(138 - 133)/138 < 4\%$. The effects of non-ideality of the operational amplifiers give systematic errors, but the main source of uncertainty is the floating of the zero of the experimental set-up. The reduction of the floating of the zero is possible but this would significantly complicate the circuit up to the level of university physics or even metrology.

Several simple tasks on Ohm's law

Let us consider 6 consecutive tasks that are solved by Ohm's law application. In Figures 3-6 the current going out from the right angle of the triangle is such that the voltages at the points (+) and (-) are equal

$$V_+ - V_- = 0, \quad (7)$$

and the currents in these inputs are negligible.

1. Let us study the current $I_2 = V_2/(R_f + r_g)$, which goes down from the output V_2 to the "ground" (\downarrow) with potential 0. According to Ohm's law the voltage at the point between the resistors R_f and r_g , which is the same as it is at the (-) input is

$$V_- = r_g I_2 = \frac{r_g}{R_f + r_g} V_2. \quad (8)$$

On the other hand, for each of the triangles the two voltages are nearly equal and

$$V_1 = V_+ = V_- = \frac{r_g}{R_f + r_g} V_2. \quad (9)$$

In this way we obtain for the gain coefficient

$$y_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_f}{r_g} + 1. \quad (10)$$

Because $y_1 > 0$ this amplifier is called non-inverting. The electronic devices that equalise the potentials at both input terminals according to Eq. (7) are called operational amplifiers but the terminology only repels the beginners.

2. In Fig. 4 two such amplifiers are drawn, for which

$$\begin{aligned} V_2 &= y_1 V_1, \\ V_4 &= y_1 V_2. \end{aligned} \quad (11)$$

If we subtract both equations, we obtain the same gain coefficient

$$\frac{V_2 - V_4}{V_1 - V_2} = y_1 = \frac{R_f}{r_g} + 1. \quad (12)$$

The ground in Fig. 4 is wrongly drawn because it is not necessary this point to have zero potential and it is left disconnected. Such a ground is called virtual ground and instead of two serial connected resistors r_g , one double resistor $r_G = 2r_g$ is used and then

$$y_1 = 1 + \frac{2R_f}{r_G}. \quad (13)$$

Such a circuit with two non-inverting amplifiers is called a buffer. The circuit parameters of the buffer drawn in Fig. 2 are given in Table I, where $r_G = 20 \Omega$, $R_f \equiv R_F = 1 \text{ k}\Omega$ and $y_1 \approx 101$. We use 1% accuracy resistors.

3. The amplifier shown in Fig. 5 is analysed by studying of voltage dividers described by Ohm's law, too. From a point with potential V_6 to the ground a current goes down $I_6 = V_6/(R'_f + r'_g)$. According to Ohm's law the potential at point (+) is

$$V_+ = 0 + R'_f I_6 = \frac{R'_f}{R'_f + r'_g} V_6. \quad (14)$$

Completely analogically from point V_5 to V_7 a current $I_5 = (V_5 - V_7)/(R'_f + r'_g)$ goes down and the potential at point (-) is

$$V_- = V_7 + \frac{V_5 - V_7}{R'_f + r'_g} R'_f. \quad (15)$$

The current from the triangle (symbolising the operational amplifier) is such that $V_+ = V_-$ and the substitution of the both upper Eqs. (14 and 15) gives

$$\frac{R'_f}{R'_f + r'_g} V_6 = V_7 \frac{R'_f + r'_g}{R'_f + r'_g} + \frac{V_5 - V_7}{R'_f + r'_g} R'_f. \quad (16)$$

From the right hand side of Eq. (16) the nominator terms that have $R'_f V_7$ cancel each other. We multiply the upper equation with $(R'_f + r'_g)$ and obtain

$$R'_f V_6 = r'_g V_7 + R'_f V_5, \quad (17)$$

which can be rewritten as

$$y_2 = \frac{V_7}{V_6 - V_5} = \frac{R'_f}{r'_g}. \quad (18)$$

As per the parameters from Table (I) $R'_f \equiv R'_F = 10 \text{ k}\Omega$, $r'_g \equiv R_G = 100 \Omega$ and $y_2 \approx 100$. Eq. (18) describes the amplification of a difference amplifier. Buffer followed by a difference amplifier is called an instrumental amplifier. For the instrumental amplifier considered by us $y_1 y_2 \approx 10100$ and in this way we are gradually entering in the terminology used in electronics.

4. In Fig. 6 an amplifier, which can be considered as a difference amplifier with grounded (+) input is presented. Then from Eq. (18) we obtain

$$y_3 = \frac{V_9}{V_8} = -\frac{R'_f}{r'_g}. \quad (19)$$

The substitution of parameters from Table (I) $R'_f \equiv R'_F = 10 \text{ k}\Omega$, $r'_g \equiv R_G = 100 \Omega$ gives $y_3 = 100$ and then the full gain of our circuit is

$$Y = y_1 y_2 y_3 \approx -1.01 \times 10^6. \quad (20)$$

Until now we have studied static cases, for which we have direct voltages and currents or in other words, at zero frequency $f = 0$. In Fig. 2, however, we have capacitors C_G sequentially connected to the resistors R_G , and capacitors C_F and C'_F parallelly connected respectively to the resistors R_F and R'_F . Despite this, the amplification of about million times is applicable in the frequency interval, for which

$$\frac{1}{\omega C_G} \ll R_G, \quad (21)$$

and in the meantime

$$\omega C'_F \ll \frac{1}{R'_F}, \quad (22)$$

where $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency. The inequalities describe the negligible influence of the capacitors. The large capacitor C_G should have negligible impedance in comparison with the resistor R_G . And in the meantime, the small capacitor C'_F should have negligible conductivity in comparison with the conductivity of the resistor R'_F . And finally, at a fixed resistor R at the amplifier input, for the whole set of different input capacitors C_i the respective time constant RC_i should be in the optimal interval, in which the amplifier works

$$R'_F C'_F \ll RC_i \ll R_G C_G. \quad (23)$$

Because of $R_G C_G / R'_F C'_F \approx 10^4 \gg 1$, the demanding conditions are satisfied and the corrections to the simplified study at zero frequency are only few percent.

5. Let us consider and the non-linear element that ensures the measurement of the mean squared voltage of the amplified signal U_X . In Fig. 7 a device is shown, for which the voltage at the output U_W and the input voltages U_X, U_Y and U_Z are connected with the relation

$$U_W = \frac{U_X U_Y}{U_m} + U_Z, \quad (24)$$

where for the used in the set-up multiplier AD633 the constant is $U_m = 10 \text{ V}$. The current $I_W = U_W / (R_1 + R_2)$, which goes down from the point W towards the ground creates a voltage at the point Z

$$U_Z = I_W R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_W. \quad (25)$$

We substitute U_Z in Eq. (24) and additionally considering that according to the connectivity from Fig. 7 $U_Y = U_X$, we obtain

$$\begin{aligned} U_W &= \frac{U_X^2}{U_m} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_W \quad \text{or} \\ U_W &= \frac{U_X^2}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} = U_X^2 / \tilde{U}, \quad \tilde{U} = U_m \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

6. Finally, the circuit ends with averaging filter with large time constant $R_{av} C_{av} = 15 \text{ sec}$. After this filter we observe the time averaged voltage $\langle U_W \rangle$. This averaged voltage through the averaging resistor R_{av} and the voltmeter with internal resistance R_V creates an averaged current

$$I_V = \frac{\langle U_W \rangle}{R_{av} + R_V} \quad (27)$$

and the averaged voltage measured by the voltmeter is

$$U_V = \frac{R_V}{R_{av} + R_V} \langle U_W \rangle. \quad (28)$$

In this way, combining the latter equation with Eq. (26) we obtain

$$U_V = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_V}{R_{av} + R_V} = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U_0}, \quad (29)$$

where for brevity we introduce the notation

$$U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_{av} + R_V}{R_V} U_m. \quad (30)$$

The parameter with dimension voltage U_0 can be experimentally measured, if at the point X we apply with a potentiometer different direct voltages and measure the voltmeter voltage.

Now we can synthesise the whole set-up operation. The thermal voltage of the capacitor at the input $U(t)$ is amplified

$$Y = y_1 y_2 y_3 = - \left(\frac{2R_F}{r_G} + 1 \right) \frac{R'_F}{R_G} \frac{R'_F}{R_G} \quad (31)$$

times $U_X(t) = YU(t)$, after which it is squared, averaged and measured with a voltmeter

$$U_V = \frac{\langle U(t)^2 \rangle Y^2}{U_0} = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U^*}, \quad (32)$$

where

$$U^* \equiv \frac{U_m}{Y^2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_{av} + R_V}{R_V} = \frac{U_0}{Y^2}. \quad (33)$$

So, if the equipartition theorem gives

$$C \langle U(t)^2 \rangle = k_B T, \quad (34)$$

the substitution in Eq. (31) gives

$$U_V = \frac{k_B T}{C U^*} + \text{const.} \quad (35)$$

The so obtained formula is used for the Boltzmann constant measurement in subproblems 23-25, where $y = U_V$ and $x = T/CU^*$.

In conclusion, combining 6 simple problems on Ohm's law we obtained the complete theory of operation of our experimental set-up and the method for the processing of the obtained experimental data.

EPO5

This problem was given at the 5th Experimental Physics Olympiad and more than 137 from the participants knew Ohm's law and managed not only to understand after the Olympiad but during the competition to do the elementary calculations. Except for Ohm's law as mathematics, we used only the solution of a linear equation and elementary substitutions. The area of comprehensive high school students was between Ohrid and Astana, which is larger than the distance between Los Angeles and New York. And it is not quite necessary to be a professional with expertise in the field of the analogue electronics to analyse circuits for which the voltages at the points (+) and (-) of some triangle are equal. The high school students solve a series of 6 problems on Ohm's law with ease and they do not need a course in analogue electronics at all. Moreover, the teachers that went through some similar course cannot remember something useful for the education and especially for the solution of the problem. Inspired students as from Ohrid, as well as from Astana, took part in the Olympiad and if we have to compare with other continents, the distance between these two cities is larger than the distance between Los Angeles and New York.

Advanced electronics applied to our setup

And after all, at an engineering or at least university level, if we wish to reach 1% accuracy, it is necessary to account for the frequency dependence emerging from the main equation of the operational amplifiers in frequency representation

$$U_+ - U_- = \varepsilon U_0, \quad \varepsilon(\omega) \approx j\omega\tau, \quad j^2 = -1, \quad \tau = \frac{1}{2\pi f_0}, \quad (36)$$

where f_0 is the cut-off frequency of the operational amplifier. The determination of $f_0^{\text{ADA4898}} \approx 40$ MHz is described in Ref. 10. A detailed calculation of the frequency dependency of the gain coefficients of the amplifiers is given in Ref. 11, here we simply write down their values only

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{Y^{-1}(\omega) + \varepsilon(\omega)}, \quad Y(\omega) = \frac{Z_f(\omega)}{z_g(\omega)} + 1, \quad \Upsilon_1(0) = y_1 = \frac{R_f}{r_g} + 1, \quad z_g = r, \quad \frac{1}{Z_f} = \frac{1}{R_f} + j\omega C_f, \quad (37)$$

$$\Upsilon_2 = \frac{1}{\Lambda(\omega) + \varepsilon(\omega) [\Lambda(\omega) + 1]}, \quad \Lambda(\omega) = \frac{z_g(\omega)}{Z'_f(\omega)}, \quad \Upsilon_2(0) = y_2 = \frac{R'_f}{r'_g}, \quad z_g = r'_g + \frac{1}{j\omega C_g}, \quad Z'_f = R'_f, \quad (38)$$

$$\Upsilon_3 = -\frac{1}{\mathcal{L}(\omega) + \varepsilon(\omega) [\mathcal{L}(\omega) + 1]}, \quad \mathcal{L}(\omega) = \frac{z_g(\omega)}{Z''_f(\omega)}, \quad \Upsilon_3(0) = y_3 = -\frac{R''_f}{r'_g}, \quad \frac{1}{Z''_f} = \frac{1}{R'_f} + j\omega C'_f, \quad (39)$$

and for the whole frequency dependent gain coefficient of the amplifier we obtain the product of the separate independent amplifiers

$$\Upsilon(\omega) = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3. \quad (40)$$

After calculating the pass bandwidth of the amplifier, which is an important notion in electronics, we derive the substitution rule

$$\frac{1}{U^*} = \frac{1}{U_0} Y^2 \rightarrow \frac{1}{U_0} Y^2 Z, \quad (41)$$

where the correction multiplier Z is given with the integral describing the amplifier pass bandwidth and the filter at its input

$$Z = 1 + \epsilon = \frac{\int_0^\infty \frac{|\Upsilon(\omega)|^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega}{\int_0^\infty \frac{Y^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{RC}{Y^2} \int_0^\infty \frac{|\Upsilon(\omega)|^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega. \quad (42)$$

The integral in the denominator gives the pass bandwidth in case of amplifier operation up to high frequencies and the capacitors, which stop the floating of the zero and the self-excitation are not mounted. The numerical calculation of the correction gives $\epsilon \approx 6\%$, with which all systematic errors for our used set-up are accounted for. In this formula the capacitances C_n from the examined set should be substituted.

Lock-in voltmeter hidden in the experimental set-up

Let us now take a look at the element named S_M in Figs. 1 and 2. In the circuit in Fig. 2 S_M is a switch, whose initial position is closed, that equals the potentials of both "IN" and "NC" inputs. Or in other words, $U_X = U_Y$, as we have already considered in the operation of the non-linear element.

For the Olympiad problems the switch S_M is not necessary and hence it has not been placed on the printed circuit board in Fig. 1. Instead, both switch contacts are soldered together, which in practice means that the switch is permanently closed or short-circuited (i.e. missing). The joint connecting both switch contacts can be easily removed by cutting with diagonal pliers (wire cutters) or unsoldering it and in this way the switch is opened and now $U_X \neq U_Y$, which means that the multiplier multiplies two different signals.

Let us now consider a different element in principle. A weak signal $U_s(t) = U_s \cos(\omega t)$ is applied at the amplifier input, which is amplified Y times, so that at the multiplier X input voltage $U_X(t) = YU_s(t)$ is applied. In case of a removed connection between X and Y inputs, i.e. open switch S_M in Fig. 1, at the "NC" labeled input of the board a known signal $U_r(t) = U_r \cos(\omega t)$ is applied. This signal goes to the Y multiplier input $U_Y(t) = U_s(t)$.

Then the multiplied signal according to Eq. (24) will be

$$U_W = \frac{1}{2} \frac{YU_s(t)U_r(t) \cos^2(\omega t)}{U_m} + U_Z. \quad (43)$$

We have already expressed U_Z by the resistances R_1 and R_2 , and that is why directly using Eqs. (28) and (29) and accounting that $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$, for the time averaged voltaged measured by the voltmeter we obtain

$$U_V = \frac{YU_r}{2U_0} U_s. \quad (44)$$

In this way, at the circuit output the voltmeter measures direct voltage U_V , in which the studied by us periodic signal with amplitude U_s is present. The signal U_r that we have applied to the Y input is called carrier or reference signal and a device whose operation we have just described is also called a lock-in voltmeter (amplifier).

Lock-in amplifiers are used for small signals measurements even when through an oscilloscope the amplified signal is lost in the background of the external noise. In this synchronous measurement of two sinusoidal signals with common frequency, the measured signal can be separated from the noise with spectral density $(\mathcal{E}^2)_f$, if

$$U_s > \sqrt{(\mathcal{E}^2)_f \Delta f_{av}}, \quad \Delta f_{av} = \frac{1}{2\pi R_{av} C_{av}}, \quad (45)$$

i.e. at large enough time averaging $\tau_{av} = R_{av} C_{av}$. Still the noise should not overload the amplifier

$$U_m > \sqrt{Y^2 (\mathcal{E}^2)_f B}, \quad B = \frac{f_0}{y_1} \quad (46)$$

and this sets the upper limit of the possible gain coefficient

$$Y < \frac{U_m}{\sqrt{(\mathcal{E}^2)_f B}}. \quad (47)$$

EPO5 feedback in English

- Adaptation of a computer translation from Greek.

Experiences of the 5th Balkan Olympiad in Experimental Physics "The day of the electron"

Thank you for the opportunity you gave me to attend the Olympics by gathering valuable information, knowledge of how this institution is being conducted and exchanging views with other countries' science teachers on science education. I would like to congratulate all students from the Greek team who participated in the competition by writing history as the first Greek mission. The Balkan Olympiad was organized by the Bulgarian Physicists' Section, with the collaboration of the Physics Faculty of the Sofia University, and was held at the St.Clement University of Ohrid University in the Physics Faculty. Over the years the Olympiad has been established as a tradition for extracurricular education in physics. The aim of this year's Olympiad was to present an experimental problem by exploring the properties of an electron. The authors of the works used the experiments described in the textbooks manuals as part of the curriculum. On the first day all participants and their escorts gathered in the event hall. 150 pupils from the Balkans and Russia participated. The opening speech was begun by the dean of the Physics Faculty (prof. Dreischuh), the contest manager and then the speakers from different countries. The enthusiasm was too great. Then, the students were divided into sections of about 15 people of different nationalities and left for the university classes. They had at their disposal 4 hours to experiment experimentally with the experimental exercises of the experiment that 111 years ago, the great physicist Einstein, a pioneering method for measuring the Boltzmann constant by studying the average thermal energy of a capacitor. Surprisingly, to date, this experiment has never been done, with the result that the participants in the competition, following the appropriate processing of their experiment and methodology by the university's university team, and the development of technology over the last 100 years that allowed it to adapt of the scientific problem at school level, were the first to apply it in practice. At first, students were provided with the necessary materials to carry out the experiment, such as electronic boards, batteries and terminals. The pupils had to be familiar with the use of measuring instruments (multimeters) that they brought with them. As the students competed, the teachers gathered in another room and conducted the experiment at the same time. Prior to the experiment, I found that the brochures were not translated into the Greek language, nor was there a group of explanations of the issues for our country, which made it difficult for the students of the Greek team to fully understand the exercises. The organization of the contest was impeccable. The next day we went back to the University that followed the award ceremony bringing the student from Kazakhstan to the contest. Sofia greeted us with a dreamy snowy landscape.

- The Olympiad was truly great and I had real fun conducting the experiment, which I plan to conduct with my classmates one day at school. I have a few recommendations for the next Olympiad as well. First of all, it would be good to be informed about the instruments that we will have to use during the experiment. I personally had a problem with the potentiometer since this was the first time I ever got to connect it to the circuit and I had to spend time in order to find out how. This resulted in spending a big amount of time and then not having enough to design a nice graphical representation of the experimental data. Besides that, it would also be good to have at least one thermometer in every classroom in order to determine the room temperature, because guessing it makes the experiment inaccurate. Other than that, I believe the organization of the Olympiad was great. The experimental setup is truly amazing and I would like to say a big thank you for offering it to us for free. I will try to use it in the best way possible. It was an honour to have been part of this Olympiad.

Answers to the question: Have you repeated the experiment at home? What value did you get for Boltzmann's constant?

- Yes, we repeated it in the physics class.
- Yes, 15% error.
- $1.29 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.
- I have not repeated the experiment at home yet, but I am planning to do so in a week during the Christmas holidays, since I am going to have a lot of free time. Nevertheless, I have actually kept the measurements I did during the EPO and I analyzed them using Microsoft Office Excel. The value I got was $k=1.182 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ (at a temperature of 17 degrees Celsius) which is not very close (there is a 15% error compared to the known value, $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$). I concluded that I should have measured the voltage $U_{2,n}$ (the one measured in task 18) more precisely, in mV.

The result of the absolute champion

Kazernuu oamben III (13): Amangeldi Yerassy

$$U_0 = (-0,0550 \pm 0,0003) B$$

$$\text{IV. Onpegeletue } k_B (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Dc/K})$$

n	1	2	3	4	5	6
$C_{0,n} \cdot P$	26,1	32,9	42,9	103	14,6	65,8
U_2, B	0,46	0,41	0,44	0,35	0,27	0,31
$y_n \cdot 10^5$	-0,085	-0,076	-0,082	-0,065	-0,050	-0,057
$X_n \cdot 10^3$	0,038	0,030	0,023	0,009	0,068	0,015
					:	

$$19) U^* = U_0 / Y^2 \approx -55 \cdot 10^{-15} B$$

$$20) t = 23^\circ C \Rightarrow T = 296 K$$

$$y_n = \frac{U_{2,n} - U^*}{X_n}$$

$$x_n = \frac{T}{C_{0,n}}$$

$$21) y = x k_B + \text{const} \Leftrightarrow y = a + b x, (MfK) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{Ман. Смакаңызу же усакызы спектар})$$

$$b = \frac{\bar{y} - a}{\bar{x}} \Rightarrow b = k_B \Rightarrow k_B \approx 1,19 \cdot 10^{-23} \text{ Dc/K}$$

$$\Delta k_B = 6 \times \approx 0,29 \cdot 10^{-23} \text{ Dc/K}$$

$$k_B = (1,19 \cdot 10^{-23} \pm 0,29 \cdot 10^{-23}) \text{ Dc/K}$$

SPK

Измерване на константата на Болцман по Айнщайн. Задача на 5-ата Олимпиада по експериментална физика. София 9 декември 2017

Тодор М. Мишонов¹, Емил Г. Петков¹, Александър А. Стефанов¹,
Александър П. Петков¹, Иглика М. Димитрова², Стоян Г. Манолов³, Симона И.
Илиева⁴, Алберт М. Варонов⁵

¹Софийски университет Св. Климент Охридски,
Физически факултет, София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

²Химикотехнологичен и металургичен университет,
Факултет по химични технологии, к-ра Физикохимия, София 1156, бул. Климент Охридски 8

³СУ Гоце Делчев, ул. Първомайска 3, МКД-2460 Валандово, Република Македония

⁴Софийски университет Св. Климент Охридски,
Физически факултет, к-ра Атомна Физика, София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

¹Софийски университет Св. Климент Охридски,
Физически факултет, к-ра Теоретична физика, София 1164, бул. Джеймс Баучер 5

Резюме. Описани са няколко последователни експеримента със специално конструирана постановка. Изпълнението на последователните експериментални задачи дава възможност за определяне на константата на Болцман k_B . Изследват се флуктуациите на напрежението $U(t)$ на серия от кондензатори свързани успоредно с постоянно съпротивление. Напрежението се усиљва 1 милион пъти $Y = 10^6$. Усиленото напрежение $YU(t)$ се подава на устройство, което отчита средния по време квадрат на напрежението $U_2 = \langle (YU(t))^2 \rangle / U_0$. Напрежението U_2 се измерва с мултиметър. Серия от измервания дава възможност за определяне на константата на Болцман от теоремата за равноразпределението $C \langle U^2 \rangle = k_B T$. Средната кинетична енергия на атомното движение на един газ $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{3}{2}k_B T$ е най-известния пример от ученическата физика. За определяне на константата на постановката U_0 е дадена серия от задачи свързани със закона на Ом, които са адресирани към най-големите ученици. За най-малките ученици основната задача е да се изследва аналоговото повдигане на квадрат. Работите на учениците се оценяват в 4 възрастови групи S, M, L и XL. Последните подусловия са предназначени за студенти (категория XL) и са свързани с теоретичното изследване на постановката като инженерно съоръжение. Тази задача е дадена на Петата Олимпиада по Експериментална Физика “Ден на Електронна” на 9 декември 2017 г., София, организирана от Софийския клон на Съюза на физиците в България със съдействието на Регионалното дружество на физиците в Струмица, Р. Македония и Физически факултет на СУ.

Увод

От самото си начало Олимпиадата по експерименталната физика (ОЕФ) е световно известна; задачите на всички Олимпиади са публикувани в Интернет [1–4], а от самото начало участниците бяха 120. В последните години са участвали ученици от 7 страни и разстоянието между най-отдалечените градове е повече от 4 Mm.

Нека опишем главните различия между ОЕФ и други подобни състезания.

- Всеки участник на ОЕФ получава като подарък от организаторите постановката, с която е работил. Така след Олимпиадата, даже лошо представил се участник, ще може да повтори експеримента и да достигне нивото на шампиона. По този начин Олимпиадата пряко повлиява върху нивото на преподаване в целия свят. След приключване на учебната година, постановката остава в училището, където е учили участникът.
- Всяка от задачите е авторска и е свързана с фундаментална физика или разбирането на работата на технически патент.
- Олимпийската идея се реализира в ОЕФ в първоначалния си вид и всеки желаещ от целия свят може да участва. Няма ограничение на броя участници. От друга страна, приликата с другите Олимпиади е, че задачите са пряка илюстрация на учебния материал и заедно с други подобни състезания смекчава деградацията на средното образование, което е световна тенденция.
- Една и съща експериментална постановка се дава за всички участници, но задачите са различни за различните възрастови групи, така както водата в басейна е еднакво мокра за всички възрастови групи при едно състезание по плуване.

Нека изброим накратко задачите от отминалите 4 ОЕФ. Постановката на първата олимпиада ОЕФ1 бе една ученическа версия на американския патент за принципа на самонулиране на постоянно токови усилватели [1]. Задачата на втората ОЕФ2 [2] бе да се измери константата на Планк като се използва дифракция от компакт диск на светлина от светодиоди . Една съвременна реализация на принадлежаща на НАСА патент за използване на отрицателното съпротивление за генериране на електрични трептения бе постановката на ОЕФ3 [3]. Четвъртата ОЕФ [4] бе посветена на фундаменталната физика – да се определи скоростта на светлината чрез измерване на електрични и магнитни сили. Иновативния елемент бе приложението на теорията на катастрофите към анализа на устойчивостта на махала. Вече установената традиция за стила на олимпиадата е баланса между съвременни работещи технически изобретения и фундаменталната физика.

И тази 5-та Олимпиада (ОЕФ5) следва установената традиция. В учебните програми на всички страни се споменава, че топлината е свързана с движението на атомите. Но даже сравнително прост пример на Максвелово разпределение на молекулите по скорости не се илюстрира с експеримент даже в много добри университети. Това е защото вакуумната техника е много скъпа и изиска професионална работа. От друга страна, електронните измервания са устойчиви (*дурокоустойчиви, foolproof*) и хиляда пъти по-евтини. Затова, ако искаме да изследваме енергията на топлинните флуктуации, която се описва от температурата и константата на Болцман [5]

$$m \langle v_x^2 \rangle = k_B T = C \langle U^2 \rangle,$$

изследването на средноквадратичното напрежение $\langle U^2 \rangle$ е хиляди пъти по-евтино от измерването на средноквадратичната скорост $\langle v_x^2 \rangle$. Затова, за методични цели при известен капацитет определянето на константата на Болцман чрез електрични измервания е единствено възможния метод за средното образование. Като фундаментална физика, тази идея бе изказана от Алберт Айнщайн, а сега 111 след това методът е експериментална задача за ученици, а постановката е изготвена в 200 екземпляра.

Задача на настоящата ОЕФ5

Преди 111 години Алберт Айнщайн [6] предложи метод за измерване на константата на Болцман k_B чрез изследване на средната топлинна енергия $C \langle U^2 \rangle = k_B T$ на кондензатор с капацитет C . Странното е, че досега този експеримент не е извършен и вие сте първите, които ще могат да го направят след като нашият колектив реализира тази идея. Развитието на техниката през изминалото столетие направи възможно този научен проблем да бъде адаптиран за нивото на ученическа задача. Започваме с подусловията, които са решими и от най-малките ученици и трудността постепенно ще нараства като работите докъдето можете да стигнете. Последните подусловия са адресирани към студентите.

Теми за по-нататъшна работа. Участниците от олимпиадата получават от организаторите експерименталната постановка, с която са работили, като една от най-важните цели на Олимпиадата е внимателното повтаряне на експеримента до детайлното измерване на константата на Болцман и пълното разбиране на теорията. Решението на задачата ще бъде публикувано на сървъра на библиотеката на Корнелския университет, а няколко детайла от сканирани работи на участници в Олимпиадата ще бъдат публикувани на сайта на Софийски клон на Съюза на физиците в България. Очакваме участниците в олимпиадата, след като прочетат решението, да извършат всички описани в него експерименти и да получат константата на Болцман k_B . Това първо определяне на фундаментална константа хвърля върху нас отблясъка на една велика епоха в развитието на физиката, когато квантите и атомите са били предмет на забавление на момчета, създали съвременната физика.

Подобни експериментални задачи се дават само в най-добрите университети [7, 8] и който има достъп до описанietо на постановките, нека сравни точността, която се получава при нашия ученически експеримент.

Теоретичните подусловия са едно добро упражнение по закона на Ом, което дава възможност за цялостното разбиране на работата на постановката и тези задачи са едно добро начало за разбиране на електрониката, която стои в основата на много физични прибори. Експерименталните постановки са подарък от организаторите на олимпиадата за участниците, които могат да ги ползват и да правят демонстрации в часовете по физика. След края на учебната година, тези постановки трябва да бъдат предадени на кабинета по физика в училището, където участниците учат.

Начални лесни задачи. S

1. Измерете напреженията на 4-те батерии от 9 V и с максимална точност на батерията от 1.5 V.

2. Поставете батерията от 1.5 V в държача, свържете я потенциометрично и измерете интервала от напрежения, които постигате когато въртите оста на потенциометъра. Това ще бъде източника за напрежение за следващите задачи. Обръщането на полярността променя знака на напрежението.
3. Свържете батериите от 9 V със съединителните клипове, като закопчаете капачките.

Аналогоvo повдигане на квадрат. M

4. **Внимание! От този момент нататък вече има възможност да изгорите интегралните схеми на постановката, ако свържете батериите неправилно.** Ориентирайте постановката, с която работите така, че двете крайни жички да са отляво, а етикета с надпис "COM" да бъде долу вдясно. Виж схемата на Фиг. 1.
5. Внимателно включете рейката с батериите от 9 V към десните 3 рейки от дънната платка; етикет към етикет, лист към лист. Работете внимателно - ако събъркate полярността ще изгорите интегралните схеми.
6. Свържете потенциометрично свързаната батерия с входната жичка на постановката горе по средата с надпис "IN", а другия електрод на потенциометъра към жичката, която излиза от "земята" на схемата с надпис "COM".
7. Успоредно на потенциометъра и "IN"-“COM" входовете на постановката включете първия волтметър, който показва напрежение U_1 .
8. При правилно свързване на схемата, когато въртите оста на потенциометъра, напрежението U_1 трябва да се изменя приблизително между нулата и напрежението на батерията от 1.5 V.
9. Вторият волтметър, който показва напрежение U_2 , включете между електрода на изхода на постановката "OUT" и електрода на общата точка "COM". Така U_2 е напрежението между точките "OUT"-“COM".
10. Проверете дали "COM" електродите на двата мултиметра и постановката са свързани.
11. Въртете оста на потенциометъра, изчакайте 1 минута и запишете напреженията U_1 и U_2 . Обърнете полярността на източника на напрежение и повторете измерванията на входното напрежение U_1 и изходното напрежение U_2 . Резултатите подредете в таблица със стълбове: номер на измерването i , U_1 и U_2 .
12. Резултатите представете графично в равнината U_1 по абсциса (хоризонтала), U_2 по ордината (вертикалa).
13. Към таблицата добавете допълнителна колона $(U_1)^2$ и представете резултатите графично в равнината $(U_1)^2$ абсциса и U_2 ордината. Начертайте права линия, която най-добре преминава в близост до експерименталните точки. Тази приближаваща (апроксимираща) права се описва с уравнението $U_2 = (U_1)^2/U_0 + \text{const}$. Върху правата изберете 2 точки, измерете разликите по абсциса $\Delta(U_1^2)$, по ордината $\Delta(U_2)$, и по наклона определете параметъра с размерност напрежение $U_0 = \Delta(U_1^2)/\Delta(U_2)$. Този параметър на аналогоvo умножаващата схема е съществен за определянето на константата на Болцман k_B и това е описано в подусловията от следващия раздел.

Флуктоскопия на напрежението. Определяне на константата на Болцман. L

14. Откачете потенциометъра и волтметъра, който измерва "IN"-“COM" напрежението U_1 .
15. Внимателно включете и втория източник за напрежение с две батерии от 9 V. Етикет към етикет, оранжево листче към оранжево листче, иначе интегралната схема ще изгори.
16. Сега предстои най-опасният момент за Интегралните схеми (ADA4898-2). Трябва и двете интегрални схеми да се монтират към постановката. Отново: зелено листче към зелено листче, етикет към етикет. При грешка изгарят.

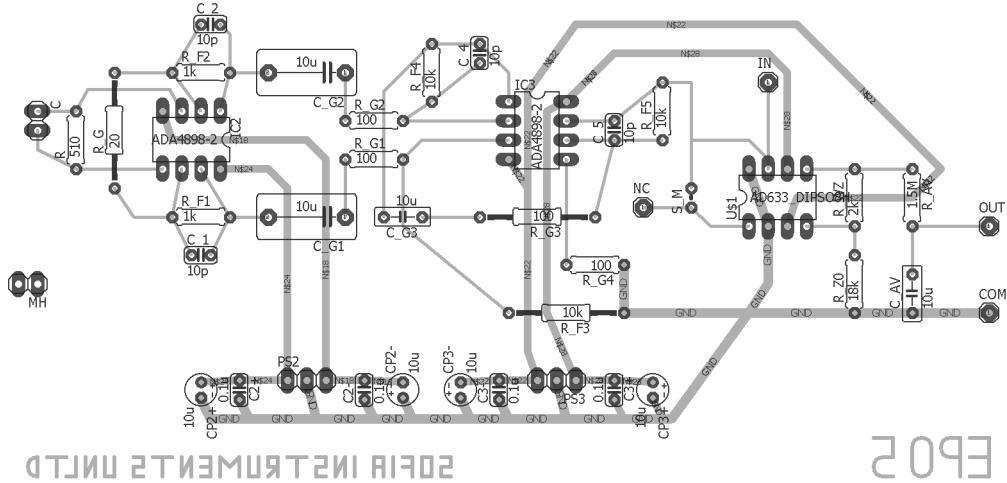


Figure 12: PCB (Схема на печатната платка)

17. Вие разполагате с набор от кондензатори запоени на рейки. Капацитетът C на всеки кондензатор в нанофаради ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) е написан върху залепения на рейката етикет. Може да подредите кондензаторите по големина и да запишете стойността на капацитета им C_n в таблица; индексът n показва поредния им номер.
18. Сега следва най-важното измерване – изследването на топлинните флуктуации на напрежението на кондензатора. Дръжте жичката, свързана с етикета “NC” на платката, далеч от източниците на напрежение. Последователно закачате всеки един от кондензаторите на рейката в левия край на постановката. Изчаквате 2 минути и записвате напрежението U_2 , което показва волтметърът включен между “OUT” и “COM” електродите на постановката. Резултатите подреждате в таблица със стълбове n , C_n и U_2 .
19. Флуктуиращото напрежение U на кондензатора C се усилва милион пъти, по-точно коефициентът на усилване е $Y = 1.01 \times 10^6$, сравни с усилвателя на братя Хабихт. [9] Пресметнете важния за постановката параметър с размерност напрежение $U^* = U_0/Y^2$. Не се плашете от степените, това е едно много малко напрежение от порядъка на пико-волт ($1 \text{ pV} = 10^{-12} \text{ V}$).
20. Преценете колко е температурата в аудиторията и я запишете в Келвини ($0 \text{ K} \approx -273^\circ\text{C}$).
21. Допълните таблицата с две нови колони: $y_n = U_{2,n}U^*/T$ и $x_n = 1/C_n$; това са най-важните експериментални данни!
22. Резултатите от таблицата представете графично в равнината $x-y$. Отделете няколко минути за да обмислите мащаба.
23. При правилна работа на постановката отделните експериментални точки са в близост до една права. Начертайте правата $y = k_B x + \text{const}$, която по ваша преценка най-добре преминава в близост до точките. Тази стандартна математична процедура се нарича линейна регресия и е заложена в много калкулатори, ако искате да получите решението числено.
24. Върху правата изберете две точки и определете разликата в техните координати по вертикалата Δy и хоризонтала Δx . Запишете тези разлики.
25. Пресметнете наклона на правата $k_B = \Delta y / \Delta x$ и начертайте рамка около вашия резултат. Поздравления, Вие измерихте фундаменталната константа на Болцман k_B и дори правилно определилият порядък е голям успех.

Теоретични задачи за закона на Ом отнасящи се за постановката. XL

Олимпиадата е по експериментална физика и задачите от тази секция дават малко точки, които могат да окажат незначително влияние върху класирането. Резултатите от решението на тези

подусловия могат да се използват само за разграничаване на работи, в които експеримента е изпълнен еднакво добре или пък за ненулев резултат на работи, в които участникът е изгорил интегралните схеми, нарушавайки инструкциите за монтирането.

На схемите показани на Фиг. 14, 15, 16 и 17 има нарисувани триъгълници. На вертикалната страна отляво влизат проводници и входовете са маркирани с (+) и (-), а от десния връх излиза проводник и понякога се добавя маркировка (0). Устройството работи така, че от изхода (0) излиза такъв ток I_0 , че напреженията на входовете (+) и (-) се изравняват $U_+ = U_-$. Токовете, които влизат във входовете (+) и (-) са пренебрежими. Такова устройство се нарича операционен усилвател.

26. Като използвате закона на Ом покажете, че отношението на напреженията и съпротивленията са свързани с уравнението $y_1 = V_2/V_1 = 1 + R_f/r_g$. Виж Фиг. 14.
27. Аналогично за симетричния вариант на същата схема $y_1 = (V_2 - V_4)/(V_1 - V_3) = R_f/r_g + 1$. Виж Фиг. 15.
28. $y_2 = V_7/(V_5 - V_6) = -R_f/r_g$. Фиг. 16.
29. $y_3 = V_9/V_8 = -R_f/r_g$. Фиг. 17.
30. Ако голям кондензатор C_g е свързан последователно с резистор r_g покажете, че при честоти за които $\omega r_g C_g \gg 1$, влиянието на кондензатора е пренебрежимо?
31. При какви честоти е пренебрежимо влиянието на малък кондензатор C_f успоредно свързан с голям резистор R_f ?
32. Ако 3-те усилвателя които разглеждахме са свързани последователно общото им усилване е $Y = y_1 y_2 y_3$. Оценете честотния интервал (f_l, f_h) при който коефициента на усилване Y е приблизително постоянен, като използвате числените стойности на параметрите от таблица IV; $f = \omega/2\pi$
33. На схемата от Фиг. 18 напрежението $U_W = U_X U_Y / U_m + U_Z$, като $U_X = U_Y$, а константата $U_m = 10$ V за използвання AD633. Изразете U_Z чрез U_W и покажете, че $U_W = U_X^2 / \tilde{U}$, където $\tilde{U} = U_m R_1 / (R_1 + R_2)$.
34. Покажете, че $U_2 = R_V \langle U_W \rangle / (R_{av} + R_V)$, където R_V най-често 1 MΩ е вътрешното съпротивление на омметъра, а скобите на $\langle U_W \rangle$ означават осредняване по време.
35. Покажете, че $U_2 = U_X^2 / U_0$, където $U_0 = \tilde{U}(R_{av} + R_V)/R_V$.
36. Накрая основното уравнение за нашата постановка $U_2 = \langle U^2 \rangle / U^*$, където U е напрежението на кондензатора на входа на прибора, а

$$\frac{1}{U_*} \equiv \frac{Y^2}{U_0} = \frac{Y^2}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_V}{R_{av} + R_V}.$$

37. Пресметнете параметъра U_* като използвате параметрите от Таблица IV.

Задача за домашно, което трябва да се изпрати в ноцта след олимпиадата до изгрев слънце на електронния адрес на олимпиадата: Изведете използваните формули за определяне на константата на Болцман k_B . Зомерфелдова премия с паричен еквивалент от DM137. XL

Упътване. Започнете с теоремата за равноразпределението, приложена към енергията на топлинните флуктуации $\frac{1}{2}C \langle U^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$. Като анализирате електронната схема на постановката, изразете средно квадратичното напрежение $\langle U^2 \rangle = U_2 U^*$ чрез експериментално измерваното напрежение U_2 . Трябва да се изрази коефициента U^* във формулата за линейната регресия $U_2 U^* / T = \langle U^2 \rangle / T = k_B (1/C) + \text{const}$, от която по наклона на правата се определя константата на Болцман k_B . Накратко, напишете статия как идеята на Айнщайн за определяне на константата на Болцман се реализира с нашата постановка. Посочете какви подобрения на постановката биха повишили точността на измерването.

Можете да работите в колектив от участници в Олимпиадата, може да се консултирате с професионалисти, но трябва да се посочат имената на консултантите и пълния списък на авторите.

Най-добрата работа се награждава със Зомерфелдова премия с паричен еквивалент от DM137. Наградата се дава само лично и само в деня на обявяването на резултатите 10.12.2017.

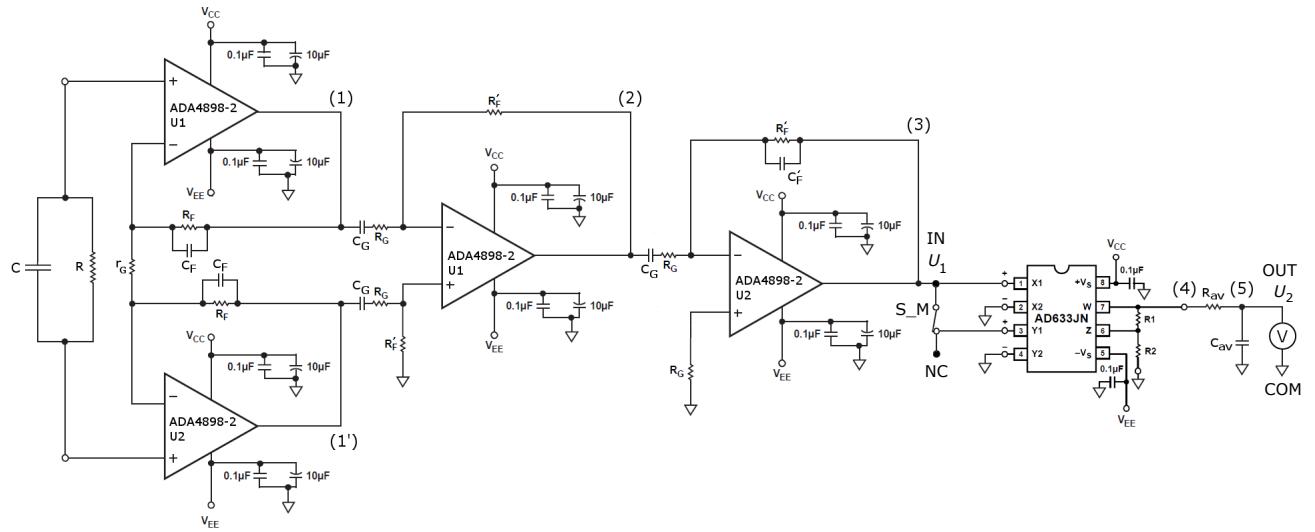


Figure 13: Подробна схема на постановката.

Елемент от схемата	Стойност
R	510 Ω
r_G	20 Ω
R_F	1 k Ω
C_F	10 pF
C_G	10 μ F
R_G	100 Ω
R'_F	10 k Ω
C'_F	10 pF
R_1	2 k Ω
R_2	18 k Ω
R_{av}	1.5 M Ω
C_{av}	10 μ F
R_V	≈ 1 M Ω
V_{CC}	+9 V
V_{EE}	-9 V

Table IV: Таблица на числени стойности на елементите от схемата показана на Фиг. 13.

Задачи за по-нататъшна работа

Олимпиадата е замислена да помогне и на ученици, лишиeni от качествено образование. Ученици идващи от училища, където кабинетите по физика са затворени. Затова не се смущавайте, ако не сте доволни от постигнатите резултати. Попитайте учителя си дали подходящ уред за да измерите кондензаторите по-точно. Спокойно повторете експеримента вкъщи и ще видите колко е било просто. Щом можете вкъщи да измерите фундаментална константа, значи имате летящ старт за всички природни и технически науки. Ако имате възможност, например в кръжок по физика, може да демонстрирате как работи постановката в училище. Моля, напишете ни отзив с вашето мнение за Олимпиадата. Ние организаторите ще оценим високо вашите препоръки, които ще се опитаме да отчетем за следващото издание на олимпиадата ЕРО6, догодина по същото време.

Постановката от Олимпиадата е наистина уникална. Разполагате с усилвател, който усилва милион пъти, с ниво на шума от $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

С подходяща модификация постановката може да се използва и за измерване на заряда на електро-на и абсолютната температура. Нещо повече, с минимално изменение постановката от Олимпиадата е възможност един локин (lock-in) волтметър, който може да се използва за измерване на променливи напрежения даже по-малки от 1 микроволт ($1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$). Именно заради тази възможност от постановката излиза жичката "NC", която не се използва в описаните задачи. За детайли следете публикациите на авторите на сървъра, където са публикувани задачите и решенията от предишните Олимпиади.

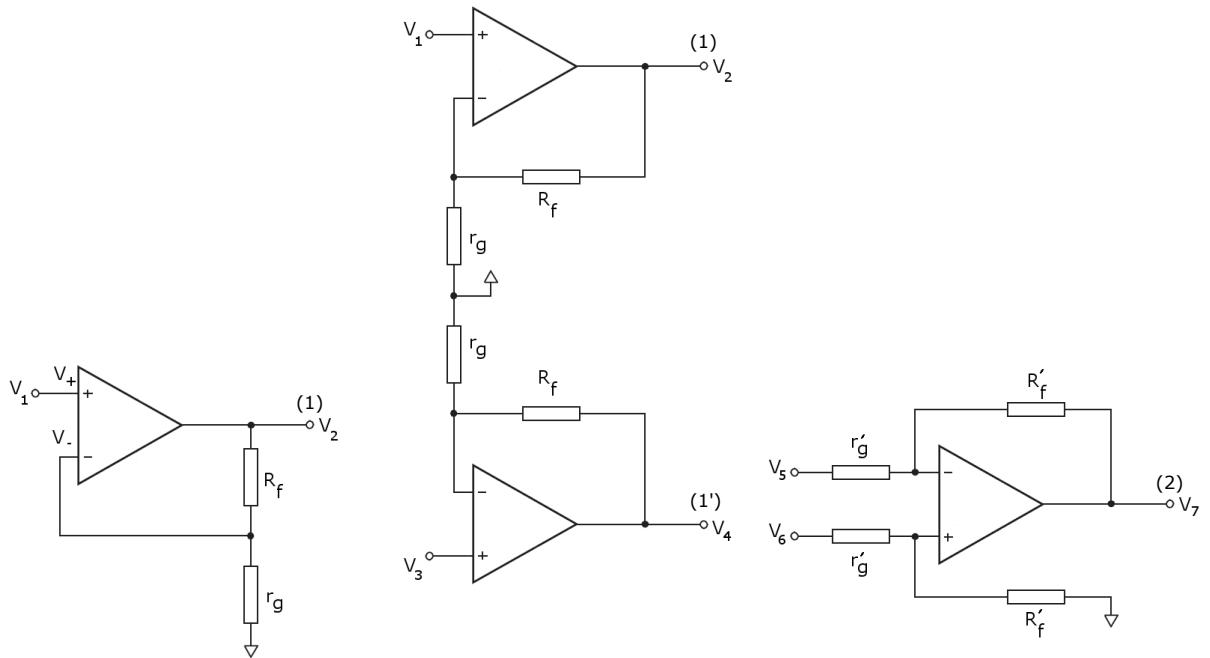


Figure 14: Неинвертиращ усилвател

Figure 15: Буфер

Figure 16: Разликов усилвател

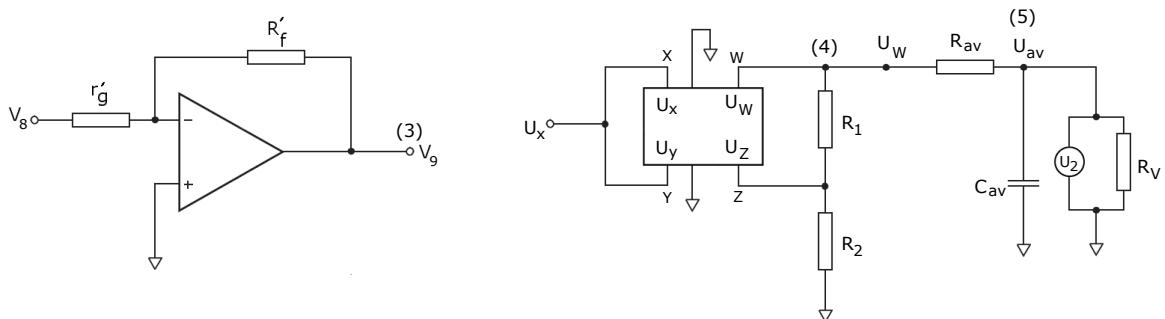


Figure 17: Инвертиращ усилвател

Figure 18: Умножител на напрежения

* E-mail: mishonov@gmail.com, mishonov@bgphysics.eu

† E-mail: manolest@yahoo.com

‡ E-mail: simonailieva24@gmail.com

§ E-mail: akofmng@gmail.com

- [1] V. G. Yordanov, P. V. Peshev, S. G. Manolev, T. M. Mishonov, "Charging of capacitors with double switch. The principle of operation of auto-zero and chopper-stabilized DC amplifiers", arXiv:1511.04328 [physics.ed-ph]
- [2] V. N. Gourev, S. G. Manolev, V. G. Yordanov, T. M. Mishonov, "Measuring Plank constant with colour LEDs and compact disk", arXiv:1602.06114 [physics.ed-ph].
- [3] S. G. Manolev, V. G. Yordanov, N. N. Tomchev, T. M. Mishonov, "Volt-Ampere characteristic of "black box" with a negative resistance", arXiv:1602.08090 [physics.ed-ph].
- [4] V. G. Yordanov, V. N. Gourev, S. G. Manolev, A. M. Varonov, T. M. Mishonov, "Measuring the speed of light with electric and magnetic pendulum", arXiv:1605.00493 [physics.ed-ph].
- [5] C. W. McCombie, "Nyquist Theorem and its generalisations", Chap. 24 in *Problems in Thermodynamics and Statistical Physics*, (PION London 1971), edited by P. T. Landsberg.
- [6] A. Einstein, "Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der Elementarquanta (On the boundaries of the applicability of the law of thermodynamic equilibrium and on the opportunity of a new definition of the elementary quanta)," Ann. Phys. **22**, 569-572 (1907),
http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1907_22_569-572.pdf.

- [7] D. B. Pengra, R. Van Dyck and J. Stoltenberg, "Fundamental noise and fundamental constants University of Washington Modern Physics Laboratory – Condensed Matter (2012), http://courses.washington.edu/phys431/noise/new_noise_old_box.pdf.
- [8] "Johnson Noise and Shot Noise: The Determination of the Boltzmann Constant, Absolute Zero Temperature and the Charge of the Electron", MIT Department of Physics (2013),
"Johnson Noise and Shot Noise", MIT Junior Lab Regular Experiment, (2013), <http://web.mit.edu/8.13/www/43.shtml>, <http://web.mit.edu/8.13/www/JLExperiments/JLExp43.pdf>, Used equipment: Low-noise voltage preamplifier, SR560 – DC to 1 MHz, <http://thinksrs.com/downloads/PDFs/Catalog/SR560c.pdf>, $e_N = 4 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, \$2595; Krohn-Hite 3BS8TB-1k/50kg, 8-pole Butterworth, cutoff accuracy 2%, <http://www.krohn-hite.com/htm/filters/PDF/ModulesData.pdf>.
- [9] C. Habicht and P. Habicht, "Elektrostatischer Potentialmultiplikator nach A. Einstein," Phys. Ztschr. **11**, 532-555 (1910); Amplification 360000 (111 dB); $\delta U = 300 \mu\text{V}$.
- [10] T. M. Mishonov, V. I. Danchev, E. G. Petkov, V. N. Gourev, I. M. Dimitrova, A. M. Varonov, "Manhattan equation for the operational amplifier", arXiv:1802.09342 [eess.SP].
- [11] T. M. Mishonov, V. G. Yordanov, A. M. Varonov, "Measurement of electron charge q_e and Boltzmann's constant k_B by a cheap do-it-yourself undergraduate experiment", arXiv:1703.05224 [physics.ed-ph].

Снимка на експерименталната постановка

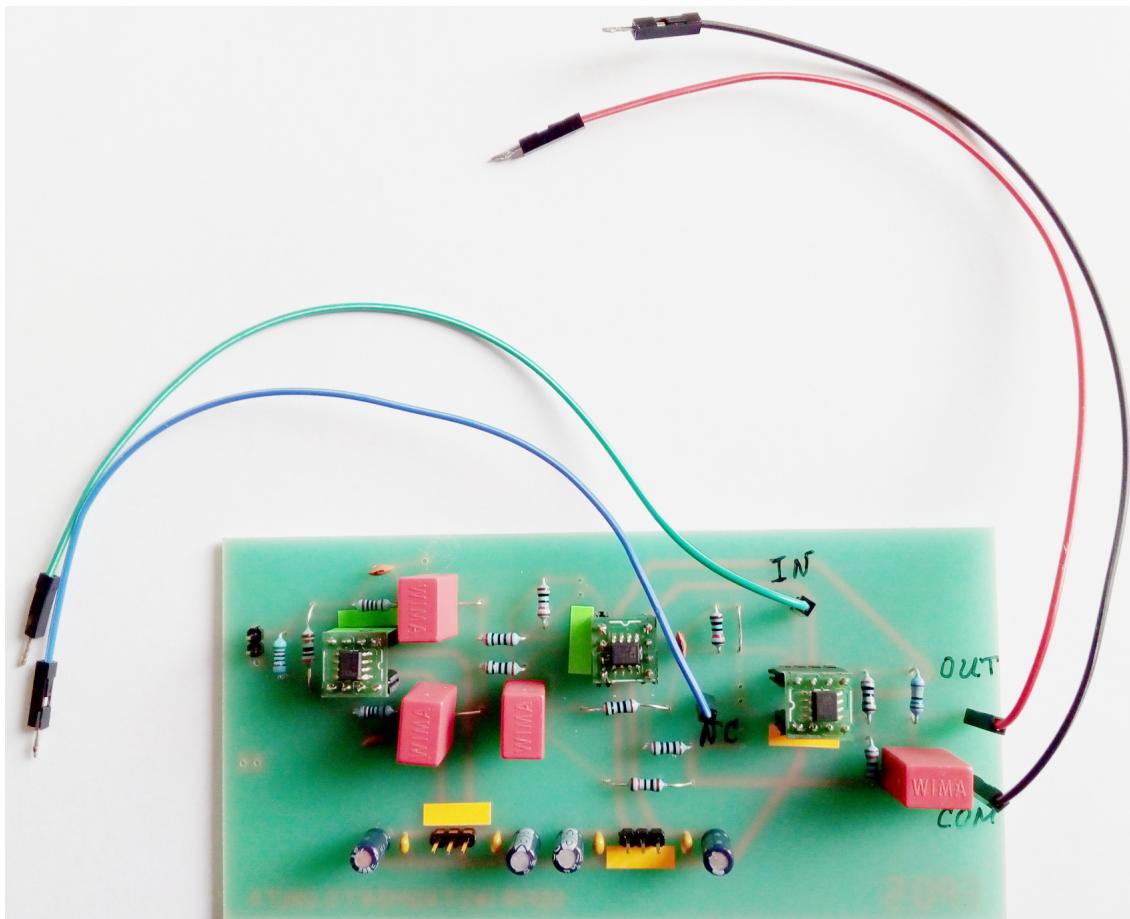


Figure 19: Снимка на постановката. В дясно се виждат изводите и жиците между които се измерва разликата U_2 между изходното напрежение "OUT" и земята "COM". Входното напрежение U_1 се подава между входа (IN) и земята "COM". Изводът "NC" може да се използва за по-нататъшни изследвания. На рейката най-отляво се поставят различните кондензатори C_n .

Решения на експерименталните задачи

Начални лесни задачи. S

1. $U_{B1} = 9.72 \text{ V}$, $U_{B2} = 9.73 \text{ V}$, $U_{B3} = 9.73 \text{ V}$, $U_{B4} = 9.73 \text{ V}$, а за измерването на батерията от 1.5 V трябва да се ползва обхват на волтметъра, който дава най-добра точност (обикновено този обхват е 2 V), $U_{B5} = 1.582 \text{ V}$.
2. Потенциометърът има три контакта, като крайните два са запоени за държача на батерията. Потенциометрично свързване означава свързване на средния и един от крайните контакти, $U_{\min} = -1.577 \text{ V}$, $U_{\max} = 1.577 \text{ V}$ и следователно интервалът от напрежения е $U \in [-1.577, 1.577] \text{ V}$.
3. Просто поставяне на 9 V батерии в техните държачи.

Аналогово повдигане на квадрат. M

4. Ориентиране на платката според инструкциите.
5. Включване на напрежение според инструкциите.
6. Свързване на батерията към съответните изводи на платката според инструкциите.
7. Успоредно свързване на първия волтметър на входа според инструкциите.
8. Проверка за правилно свързване.
9. Свързване на втория волтметър на изхода на постановката според инструкциите.
10. Проверка за правилно свързване на двата волтметъра, чиито "COM" електроди трябва да са свързани.
11. Таблица V без последната колона (задача 13).

i	$U_1 \text{ [V]}$	$U_2 \text{ [V]}$	$U_1^2 \text{ [V}^2]$
1	0.1	0.011	0.01
2	0.2	0.023	0.04
3	0.4	0.07	0.16
4	0.6	0.15	0.36
5	0.8	0.263	0.64
6	1.0	0.386	1.00
7	1.2	0.551	1.44
8	1.4	0.748	1.96
9	1.573	0.941	2.474
10	-1.572	0.942	2.471
11	-1.4	0.75	1.96
12	-1.2	0.553	1.44
13	-1.0	0.387	1.00
14	-0.8	0.265	0.64
15	-0.6	0.151	0.36
16	-0.4	0.071	0.16
17	-0.2	0.024	0.04
18	-0.1	0.012	0.01

Table V: Резултати от измерванията в задача 11 и обработката на резултатите в задача 13 (последната колона).

12. Резултатите са представени на Фиг. 20.
13. Последната колона на Таблица V и резултатите са представени на Фиг. 21. Избираме 2 точки (a) и (b) на Фиг. 21, така че по ордината $(U_2)_a = 0.9 \text{ V}$ и $(U_2)_b = 0.3 \text{ V}$ и намираме съответните им стойности по абсциса $(U_1)_a^2 \approx 2.24 \text{ V}^2$ и $(U_1)_b^2 \approx 0.725 \text{ V}^2$, като за всяка от двете точки чертаем

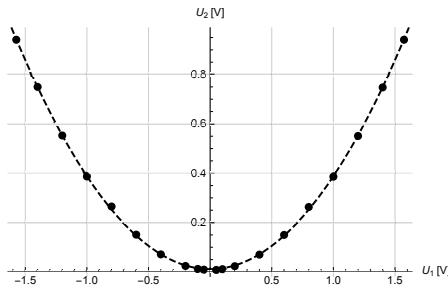


Figure 20: Графично представената зависимост U_2 от U_1 от Таблица V.

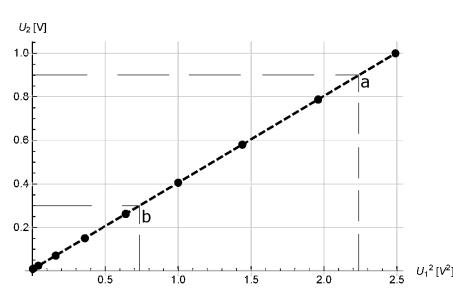


Figure 21: Графично представената зависимост U_2 от $(U_1)^2$ от Таблица V.

права успоредна на ординатата към абсцисата, и пресечната им точка е съответната стойност за $(U_1)^2$

$$U_0 = \frac{\Delta(U_1^2)}{\Delta(U_2)} = \frac{(U_1)_a^2 - (U_1)_b^2}{(U_2)_a - (U_2)_b} = \frac{2.24 - 0.725}{0.9 - 0.3} = 2.525 \text{ V.} \quad (48)$$

Флуктоскопия на напрежението. Определяне на константата на Болцман. L

14. Разкачване на входните източник на напрежение и волтметър според инструкциите.
15. Подаване на напрежение към усилвателя **според инструкциите**.
16. Свързване на двата операционни усилвателя към платката **според инструкциите**.
17. Стойностите на капацитетите на набора от кондензатори е нанесен в първите 2 колони на Таблица VI.

n	C_n [nF]	U_2 [V]	x_n [1/ μ F]	y_n [fV ² /K]
1	14.8	0.293	67.57	2.458
2	27.9	0.255	35.84	2.139
3	33.4	0.244	29.94	2.047
4	42.3	0.233	23.64	1.955
5	66.9	0.202	14.95	1.695
6	105.0	0.204	9.524	1.712

Table VI: Експериментални резултати от измерването на напрежението на топлинните флуктуации за набора кондензатори. Тук за краткост сме въвели префиксa f = 10⁻¹⁵.

18. Резултатите от измерването според инструкциите са нанесени в 3-тата колона на Таблица VI.
19. За U_0 получихме 2.525 V, следователно

$$U^* = \frac{U_0}{Y^2} = \frac{2.525}{(1.01 \times 10^6)^2} = \frac{2.525}{(1.01)^2 \times 10^{12}} = 2.475 \times 10^{-12} = 2.475 \text{ pV.} \quad (49)$$

20. За преценка (не точно измерване) на температурата в аудиторията не е необходим термометър. За стайна температура може да се приемат стойности между 20°C и 25°C, които в Келвини (добавяме още 273°C) са съответно 293 K и 298 K, ние ще изберем по-малката стойност $T = 293$ K. Разликата между двете стойности е под 2%, което е напълно задоволително за нашата задача. Още повече, тези 5° са напълно осезаеми и на практика всеки човек е способен да различи още по-малки температурни разлики (например дали е топло в аудиторията, за да работите по тениска). Вашето тяло е един термометър и както всеки измерителен прибор, за надеждни показания е необходима правилна калибровка.

21. Резултатите се намират в последните 2 колони на Таблица VI, като вторият индекс n на означението $U_{2,n}$ е номерът на съответния кондензатор, а представката "f" на $fV = 10^{-3}$ pV = 10^{-15} V се нарича фемто-волт.
22. Преценете машаба за графичното представяне на получените измервания.
23. Правата е начертана на Фиг. 22.

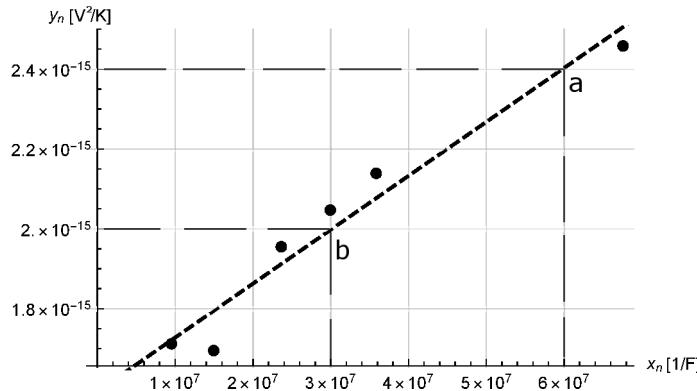


Figure 22: Графично представената зависимост y_n от x_n от Таблица VI. Първоначално са нанесени експерименталните точки. После се прекарва приближаващата права. Тя може да се начертава и на око, а математичната процедура се нарича линейна регресия. От правата избираме 2 точки (a) и (b) и пресмятаме наклона $k_B = \Delta y / \Delta x$, който в нашия случай дава константата на Болцман.

24. Аналогично на задача 13, си избираме 2 точки (a) и (b) от правата с координати съответно $x_a = 6 \times 10^7 \text{ F}^{-1}$, $y_a = 2.4 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}$ и $x_b = 3 \times 10^7 \text{ F}^{-1}$, $y_b = 2 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}$ и пресмятаме разликите в координатите

$$\Delta y = y_a - y_b = (2.4 - 2) \times 10^{-15} = 0.4 \times 10^{-15} \text{ V}^2/\text{K}, \quad (50)$$

$$\Delta x = x_a - x_b = (6 - 3) \times 10^7 = 3 \times 10^7 \text{ F}^{-1}. \quad (51)$$

25. С получените стойности за разликите в координатите, пресмятаме наклона, който всъщност е k_B

$$k_B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.4}{3} \times 10^{-22} = 1.33 \times 10^{-23} (\text{F V}^2/\text{K} = \text{J/K}). \quad (52)$$

Нека отчетем, че константата на Болцман е много малка и даже правилното определяне на нейния порядък с толкова пристрастна постановка е значителен успех. Когато сигналът се усилва милион пъти по напрежение и 10^{12} пъти (120 dB) по мощност един множител от 2 (3 dB) означава грешка в логаритмичен машаб $3/120=2.5\%$, което е значителен успех за постановка предназначена за средното образование. Все пак се случва постановката дава точност от няколко процента. При добре известната експериментална стойност $k_B = 1.38064 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ относителната грешка на измерването е $(138 - 133)/138 < 4\%$. Систематична грешка дават ефектите на неидеалност на операционните усилватели, но основен източник на неопределеност е плаването на нулата на измервателната постановка. Намаляването на дрейфа на нулата на постановката е възможно, но значително би усложнило схемата до ниво на университетска физика или даже метрология.

Няколко прости задачи за закона на Ом

Нека разгледаме 6 последователни задачи, които се решават чрез прилагане на закона на Ом. На Фигури 14-17 токът, който излиза от десния ъгъл на триъгълника е такъв, че напреженията в точките (+) и (-) са равни

$$V_+ - V_- = 0, \quad (53)$$

а в тези входове токът е пренебрежим.

1. Нека разгледаме тока $I_2 = V_2/(R_f + r_g)$, който се спуска от изхода V_2 до “земята” (\downarrow) с потенциал 0. По закона на Ом напрежението в точката между резисторите R_f и r_g , което е същото както и на (-) входа е

$$V_- = r_g I_2 = \frac{r_g}{R_f + r_g} V_2. \quad (54)$$

От друга страна, за всеки от триъгълниците двете напрежения са почти равни и

$$V_1 = V_+ = V_- = \frac{r_g}{R_f + r_g} V_2. \quad (55)$$

Така получаваме за коефициента на усилване

$$y_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_f}{r_g} + 1. \quad (56)$$

Тъй като $y_1 > 0$ този усилвател се нарича неинвертиращ. Електронните устройства, които изравняват потенциалите на двета входа съгласно Ур. (53) се наричат операционни усилватели, но терминологията само отблъскава начини на действие.

2. На Фиг. 15 са начертани два такива усилвателя, за които

$$\begin{aligned} V_2 &= y_1 V_1, \\ V_4 &= y_1 V_2. \end{aligned} \quad (57)$$

Ако извадим едното уравнение от другото, получаваме същия коефициент на усилване

$$\frac{V_2 - V_4}{V_1 - V_2} = y_1 = \frac{R_f}{r_g} + 1. \quad (58)$$

Земята на Фиг. 15 е нарисуване неправилно, защото тази точка не е необходимо да има нулев потенциал и се оставя свободна. Такава земя се нарича виртуална и вместо две последователно свързани съпротивления r_g се използва едно двойно $r_g = 2r_g$ и тогава

$$y_1 = 1 + \frac{2R_f}{r_g}. \quad (59)$$

Такава схема с два неинвертиращи усилватели се нарича буфер. На буфера, начертан на Фиг. 13, параметрите на схемата са дадени в Таблица IV, където $r_g = 20 \Omega$, $R_f \equiv R_F = 1 k\Omega$ и $y_1 \approx 101$. Използваме резистори с 1% точност.

3. Усилвателят показан на Фиг. 16 се анализира също като се разглеждат делители на напрежение, описани от закона на Ом.

От точка с потенциал V_6 до земята се спуска ток $I_6 = V_6/(R'_f + r'_g)$. По закона на Ом потенциалът в точка (+) е

$$V_+ = 0 + R'_f I_6 = \frac{R'_f}{R'_f + r'_g} V_6. \quad (60)$$

Съвършено аналогично от точка V_5 към V_7 се спуска ток $I_5 = (V_5 - V_7)/(R'_f + r'_g)$ и потенциалът в точка (-) е

$$V_- = V_7 + \frac{V_5 - V_7}{R'_f + r'_g} R'_f. \quad (61)$$

Токът от триъгълника (символизиращ операционния усилвател) е такъв, че $V_+ = V_-$ и заместването от двете по-горни уравнения (60 и 61) дава

$$\frac{R'_f}{R'_f + r'_g} V_6 = V_7 \frac{R'_f + r'_g}{R'_f + r'_g} + \frac{V_5 - V_7}{R'_f + r'_g} R'_f. \quad (62)$$

В дясната страна на това Ур. (62) членовете в числителите, които имат $R'_f V_7$ се съкращават. Умножаваме горното уравнение с $(R'_f + r'_g)$ и получаваме

$$R'_f V_6 = r'_g V_7 + R'_f V_5, \quad (63)$$

което може да се препише като

$$y_2 = \frac{V_7}{V_6 - V_5} = \frac{R'_f}{r'_g}. \quad (64)$$

Съгласно параметрите от Таблица (IV) $R'_f \equiv R'_F = 10 \text{ k}\Omega$, $r'_g \equiv R_G = 100 \Omega$ и $y_2 \approx 100$. Формула (64) описва усилването на един разликов усилвател. Буфер, последван от разликов усилвател се нарича инструментален усилвател. За разгледания от нас инструментален усилвател $y_1 y_2 \approx 10100$ и така постепенно навлизаме в терминологията, която се използва в електрониката.

4. На Фиг. 17 е представен един усилвател, който може да се разглежда като разликов усилвател със заземен (+) вход. Тогава от Ур. (64) получаваме

$$y_3 = \frac{V_9}{V_8} = -\frac{R'_f}{r'_g}. \quad (65)$$

Заместването на параметри от Таблица (IV) $R'_f \equiv R'_F = 10 \text{ k}\Omega$, $r'_g \equiv R_G = 100 \Omega$ дава $y_3 = 100$ и така пълното усилване на нашата схема е

$$Y = y_1 y_2 y_3 \approx -1.01 \times 10^6. \quad (66)$$

Досега разглеждахме случаи на статика, за които имаме прости напрежения и токове, или с други думи при нулева честота $f = 0$. На Фиг. 2, обаче, имаме кондензатори C_G последователно свързани на резисторите R_G , и кондензатори C_F и C'_F успоредно свързани съответно на резисторите R_F и R'_F . Въпреки това, това усилване от около милион пъти е приложимо в честотния интервал, за който

$$\frac{1}{\omega C_G} \ll R_G, \quad (67)$$

и същевременно с това

$$\omega C'_F \ll \frac{1}{R'_F}, \quad (68)$$

където $\omega = 2\pi f$ е кръгова честота. Неравенствата описват пренебрежимо влияние на кондензаторите. Големият кондензатор C_G трябва да има пренебрежим импеданс в сравнение със съпротивлението R_G . И едновременно с това, малкият кондензатор C'_F трябва да има пренебрежима проводимост в сравнение с проводимостта на съпротивлението R'_F . И накрая, при фиксирано съпротивление R на входа на усилвателя за целия набор от различни входни кондензатори C_i , съответната времеконстанта RC_i трябва да попада в оптималния интервал, в който работи усилвателя

$$R'_F C'_F \ll RC_i \ll R_G C_G. \quad (69)$$

Тъй като $R_G C_G / R'_F C'_F \approx 10^4 \gg 1$, изискваните условия са удовлетворени и корекциите към опростеното разглеждане при нулева честота са само няколко процента.

5. Нека разгледаме и нелинейния елемент, който осигурява измерването на средноквадратичното напрежение на усиления сигнал U_X . На Фиг. 18 е показано устройство, за което напрежението на изхода U_W и напреженията на входовете U_X, U_Y и U_Z са свързани с релацията

$$U_W = \frac{U_X U_Y}{U_m} + U_Z, \quad (70)$$

където за използвания в постановката умножител AD633 константата $U_m = 10 \text{ V}$. Токът $I_W = U_W / (R_1 + R_2)$, който се спуска от точката W към земята създава в точката Z напрежение

$$U_Z = I_W R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_W. \quad (71)$$

Заместваме U_Z в Ур. (70) и допълнително отчитайки, че съгласно свързването от Фиг. 18 $U_Y = U_X$, получаваме

$$\begin{aligned} U_W &= \frac{U_X^2}{U_m} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_W \quad \text{или} \\ U_W &= \frac{U_X^2}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} = U_X^2 / \tilde{U}, \quad \tilde{U} = U_m \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (72)$$

6. Накрая схемата завършва с усредняващ филтър с голяма времеконстанта $R_{av}C_{av} = 15$ сек. След този филтър наблюдаваме усредненото по време напрежение $\langle U_W \rangle$. Това средно напрежение през усредняващия резистор R_{av} и волтметъра с вътрешно съпротивление R_V създава среден ток

$$I_V = \frac{\langle U_W \rangle}{R_{av} + R_V} \quad (73)$$

и средното напрежение, което измерва волтметъра е

$$U_V = \frac{R_V}{R_{av} + R_V} \langle U_W \rangle. \quad (74)$$

Така, комбинирайки горното уравнение с Ур. (72) получаваме

$$U_V = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U_m} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_V}{R_{av} + R_V} = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U_0}, \quad (75)$$

където за краткост въвеждаме означението

$$U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_{av} + R_V}{R_V} U_m. \quad (76)$$

Параметърът с размерност напрежение U_0 може да се измери експериментално, ако в точката X подаваме с потенциометър различни постоянни напрежения и измерваме напрежението на волтметъра.

Сега вече може да синтезираме работата на цялата постановка. Топлинното напрежение на кондензатора на входа $U(t)$ се усилва

$$Y = y_1 y_2 y_3 = - \left(\frac{2R_F}{r_G} + 1 \right) \frac{R'_F}{R_G} \frac{R'_F}{R_G} \quad (77)$$

пъти $U_X(t) = YU(t)$, след което се повдига на квадрат, усреднява и измерва с волтметър

$$U_V = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle Y^2}{U_0} = \frac{\langle U_X(t)^2 \rangle}{U^*}, \quad (78)$$

където

$$U^* \equiv \frac{U_m}{Y^2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_{av} + R_V}{R_V} = \frac{U_0}{Y^2}. \quad (79)$$

Така, ако теоремата за равноразпределението дава

$$C \langle U(t)^2 \rangle = k_B T, \quad (80)$$

заместването в Ур. (77) дава

$$U_V = \frac{k_B T}{C U^*} + \text{const.} \quad (81)$$

Така получената формула се използва за измерването на константата на Болцман в подзадачи 23-25, където $y = U_V$ и $x = T/CU^*$.

В заключение, комбинирайки 6 прости задачи от закона на Ом, ние получихме пълната теория на работата на експерименталната постановка и методът за обработването на получените експериментални данни.

ОЕФ5

Тази задача бе дадена на 5-тата Олимпиада по експериментална физика и повече от 137 от участниците ученици знаеха закона на Ом и можаха не само да разберат след олимпиадата, но и по време на състезанието да извършат елементарните пресмятания. Освен закона на Ом като математика, ние използвахме само решаването на линейно уравнение и елементарни замествания. И съвсем не е нужно да си специалист с практика в областта на аналоговата електроника, за да анализираш схеми, на които в точките (+) и (-) на някакъв триъгълник, потенциалите са еднакви. Учениците с лекота решават серия от 6 задачи от закона на Ом и съвсем не се нуждаят от курс по аналогова електроника. Нещо повече, учителите слушали някакъв подобен курс не могат да си спомнят нещо полезно за преподаването и специално за решаването на задачата. В Олимпиадата участваха вдъхновени ученици и от Охрид и от Астана, а ако трябва да се сравняваме с други континенти, разстоянието между тези два града е по-голямо от разстоянието между Лос Анджелес и Ню Йорк.

Напредничава електроника приложена към нашата постановка

И все пак на инженерно или поне университетско ниво, ако желаем да постигнем 1% точност, се налага да отчетем честотната зависимост, възникваща от основното уравнение на операционните усилватели в честотно представяне

$$U_+ - U_- = \varepsilon U_0, \quad \varepsilon(\omega) \approx j\omega\tau, \quad j^2 = -1, \quad \tau = \frac{1}{2\pi f_0}, \quad (82)$$

където f_0 е сръзващата честота на операционния усилвател. Определянето на $f_0^{(\text{ADA4898-2})} \approx 40 \text{ MHz}$ е описано в литературен извор 10. Подробно пресмятане на честотните зависимости на кофициентите на усилване на усилвателите е дадено в друг извор [11], тук просто ще напишем само техните стойности

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{Y^{-1}(\omega) + \varepsilon(\omega)}, \quad Y(\omega) = \frac{Z_f(\omega)}{z_g(\omega)} + 1, \quad \Upsilon_1(0) = y_1 = \frac{R_f}{r_g} + 1, \quad z_g = r, \quad \frac{1}{Z_f} = \frac{1}{R_f} + j\omega C_f, \quad (83)$$

$$\Upsilon_2 = \frac{1}{\Lambda(\omega) + \varepsilon(\omega) [\Lambda(\omega) + 1]}, \quad \Lambda(\omega) = \frac{z_g(\omega)}{Z'_f(\omega)}, \quad \Upsilon_2(0) = y_2 = \frac{R'_f}{r'_g}, \quad z_g = r'_g + \frac{1}{j\omega C_g}, \quad Z'_f = R'_f, \quad (84)$$

$$\Upsilon_3 = -\frac{1}{\mathcal{L}(\omega) + \varepsilon(\omega) [\mathcal{L}(\omega) + 1]}, \quad \mathcal{L}(\omega) = \frac{z_g(\omega)}{Z''_f(\omega)}, \quad \Upsilon_3(0) = y_3 = -\frac{R'_f}{r'_g}, \quad \frac{1}{Z''_f} = \frac{1}{R'_f} + j\omega C'_f, \quad (85)$$

и за целия честотно-зависим кофициент на усилване на усилвателя получаваме произведението на отделните независими усилватели

$$\Upsilon(\omega) = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3. \quad (86)$$

След пресмятане на ширината на лентата на усилвателя, което е важно понятие в електрониката извеждаме правилото на заместване

$$\frac{1}{U^*} = \frac{1}{U_0} Y^2 \rightarrow \frac{1}{U_0} Y^2 Z, \quad (87)$$

където корекционният Z се дава с интеграла който описва ширината на лентата на усилвателя и филтъра поставен на входа му

$$Z = 1 + \epsilon = \frac{\int_0^\infty \frac{|\Upsilon(\omega)|^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega}{\int_0^\infty \frac{Y^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{RC}{Y^2} \int_0^\infty \frac{|\Upsilon(\omega)|^2}{1+(\omega RC)^2} d\omega. \quad (88)$$

Интеграла от знаменателя дава ширината на лентата, ако усилвателя работи до много високи честоти и не са поставени кондензаторите които спират плаването на нулите и самовъзбуждането. Численото пресмятане за корекцията дава $\epsilon \approx 6\%$, с което се отчитат всички систематични грешки при използването на нашата постановка. В тази формула трябва да бъдат замествани капацитетите C_n от изследваната серия.

Локин волтметър скрит в експерименталната постановка

Нека сега обърнем внимание на елемента с наименование S_M във Фиг. 12 и 13. В схемата на Фиг. 13 S_M е ключ, чието първоначално положение е затворено, което изравнява потенциалите на двата входа "IN" и "NC". Или с други думи, $U_X = U_Y$, както вече разглеждахме при работата на нелинейния елемент.

За задачите на Олимпиадата ключът S_M не е необходим и затова не е поставен на платката на Фиг. 12. Вместо това, двата контакта на ключа са запоени, което на практика означава, че ключът е постоянно затворен или окъсен (т.е. липсващ). Спойката свързваща двата контакта на ключа може лесно да се премахне като се отреже със секачки или се разпои, като по този начин ключът се отваря и вече $U_X \neq U_Y$, което означава че умножителят умножава два различни сигнала.

Нека сега разгладдаме принципно различен експеримент. На входа на усилвателя се подава слаб сигнал $U_s(t) = U_s \cos(\omega t)$, който се усилва Y пъти, така че на X входа на умножителя се подава напрежение $U_X(t) = YU_s(t)$.

При прерязана връзка между X и Y входовете на умножителя, т.е. при отворен ключ S_M от Фиг. 1, към входа на платката означен с "NC" се подава известен сигнал $U_r(t) = U_r \cos(\omega t)$. Този сигнал отива до Y -входа на умножителя $U_Y(t) = U_s(t)$.

Тогава умноженият сигнал съгласно Ур. (70) ще бъде

$$U_W = \frac{1}{2} \frac{Y U_s(t) U_r(t) \cos^2(\omega t)}{U_m} + U_Z. \quad (89)$$

Вече изразихме U_Z чрез съпротивленията R_1 и R_2 , затова директно използвайки Ур. (74) и (75), отчитайки и че $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$, за усредненото по време напрежение, което мери волтметъра получаваме

$$U_V = \frac{Y U_r}{2 U_0} U_s. \quad (90)$$

Така на изхода на схемата волтметъра измерва постоянно напрежение U_V , в което участва и изследваният от нас периодичен сигнал с амплитуда U_s . Сигналът U_r , който сме подали на Y входа се нарича носещ или референтен сигнал, а устройството чиято работа описахме току-що се нарича още локин (*lock-in*) волтметър (усилвател).

Локин усилвателите се използват за измерване на малки сигнали, дори когато на осцилоскоп усилният сигнал се губи на фона на външния шум. При това синхронно измерване на два синусоидални сигнала с обща честота измервания сигнал може да бъде отделен от шума със спектрална плътност $(\mathcal{E}^2)_f$, ако

$$U_s > \sqrt{(\mathcal{E}^2)_f \Delta f_{av}}, \quad \Delta f_{av} = \frac{1}{2\pi R_{av} C_{av}}, \quad (91)$$

т.е. при достатъчно голямо време на усредняване $\tau_{av} = R_{av} C_{av}$. Все пак шумът не трябва да претоварва усилвателя

$$U_m > \sqrt{Y^2 (\mathcal{E}^2)_f B}, \quad B = \frac{f_0}{y_1} \quad (92)$$

и това поставя горна граница на възможния коефициент на усилване

$$Y < \frac{U_m}{\sqrt{(\mathcal{E}^2)_f B}}. \quad (93)$$

Отзиви за олимпиадата

- Адаптация на компютърен превод от гръцки:

Отзив за 5-та Балканска олимпиада по експериментална физика “Ден на електрона”

Благодарение на участието в олимпиадата учителите получават ценна информация, запознават се как провежда това състезание и обменят мнения с колеги от други страни за образование и наука. Бих искал да поздравя всички ученици от гръцкия отбор, участвали в конкурса, това е исторически първото гръцко участие. Балканската олимпиада се организира от Съюза на физиците в България със съдействието на Физически факултет на Софийския университет Св. Климент Охридски. През годините олимпиадата е създадена като традиция за извънкласно обучение по физика. Целта на тазгодишната олимпиада беше да представи експериментален проблем, като изследва свойствата на електрона и флуктуациите на напрежението. Авторите на задачата са модифицирали експериментите, описани в ръководствата и учебници като част от учебната програма. В първия ден всички участници и техните придружители се събраха в аулата на Физически факултет. Това бяха 150 ученици от Балканите и Русия. Декана на Факултета (проф. Драйш) прочете встъпителната реч, после ръководителя на конкурса и от участници от различни страни. Ентузиазмът беше много голям. След това учениците бяха разделени да работят в аудитории от около 15 души от различни националности. Те имаха четири часа за решаване на експерименталните задачи на олимпиадата, включващи експеримента предложен преди 111 години от великия физик Айнщайн – иновативен метод за измерване на константата на Болцман чрез изучаване на средната топлинна енергия на кондензатор. Изненадващо, към днешна дата този експеримент не беше извършен, така че групата от преподаватели от университета отчитайки развитието на методологията и технологиите през последните 100 години са направили възможно да се адаптира този на научен проблем на училищно ниво. И са първите, които го прилагат на практика и го предлагат на участниците в конкурса. Първоначално студентите получиха необходимите материали за извършване на експеримента, като електронни платки, батерии и проводници. Учениците трябвало да са запознати с използването на измервателните уреди (мултиметри), които те носеха

със себе си. Докато учениците се състезаваха, учителите се събраха в друга аудитория и проведоха експеримента едновременно. Преди експеримента установено, че брошурутите не бяха преведени на гръцки език, докато за участниците от другите страни условията бяха преведени на езика на който се преподава в съответната страна. Гръцките участници използваха английския превод, което направи задачата малко по-трудна за пълното разбиране, но въпреки това гръцките участници се представиха добре. Организацията на конкурса беше безупречна. На следващия ден се върнахме в Университета, където последва церемонията по връчване на наградите. Най-добре се представи в конкурса един ученик от Казахстан. София ни посрещна с мечтателен снежен пейзаж.

- Много беше забавно, искам пак!
- Да има среща и беседа с авторите на задачите. Може би след края на олимпиадата.
- Задачите са повече като инструкции какво да се направи и не изискват голямо разбиране. Организацията и издаването на класация може да се подобрят, но с изключение на това идеята е страховта и беше забавно. Надявам се в следващите години олимпиадата да се разпространи и утвърди. Благодаря ви, че я организирате за нас :)
- Участвам в олимпиадата с удоволствие. Благодаря за положения огромен труд от ваша страна. Олимпиадата ми дава това, което училището не може.
- Можеби да се зголеми котизацијата колку да се овозможат медали на најуспешните во сите категории, мислам дека дечките би биле презадоволни!!!
- Задоволство ми беше да ги запознам моите колеги од другите држави. Тоа ме направи побогата и посигурна во моите сопствени вредности. Задоволна сум што моите ученици од услови на потполна занемареност на експерименти во наставата по физика се одважија да се одмерат со своите врсници од другите држави. Верувам во нивната интелектуална вредност и неверојатната храброст исказана пред големите предизвици од овој вид. Би сакала да има повеќе теми кои би им дале шанса на девојките да ги покажат своите способности. Толкало изобилство од електроника некако ги обесхрабрува. Од толкав број на награди само една беше девојка или од оние што не бе присутни можеби имаше уште некоја. Малку ми пречеше што немаше квалитетен интернет и еднаква можност за сите да участват со полн капацитет во решавањето и испраќањето на решението. Мислам дека во тој дел не дојдовме целосно до израз како тим.
- Пожелно е да се случуваат некакви активности за менторите па и за учениците (на пример оние кои завршуваат порано) во текот на решавањето на задачата. Би сакале да видеме поширока ранг листа, за да знаеме каков успех постигнале сите ученици.
- Pristo sam zadovolen.
- Учениците добро да бидат поделени во возрасни групи и сите да добиваат задача во зависност со нивната возраст. Најмалите од S категорија на пример да бидат наградувани и бодувани само за S категорија и да немаат право или да не се оценувани за M L и XL категорија.
- The Olympiad was truly great and I had real fun conducting the experiment, which I plane to conduct with my classmates one day at school. I have a few recommendations for the next Olympiad as well. First of all, it would be good to be informed about the instruments that we will have to use during the experiment. I personally had a problem with the potentiometer since this was the first time I ever got to connect it to the circuit and I had to spend time in order to find out how. This resulted in spending a big amount of time and then not having enough to design a nice graphical representation of the experimental data. Besides that, it would also be good to have at least one thermometer in every classroom in order to determine the room temperature, because guessing it makes the experiment inaccurate. Other than that, I believe the organization of the Olympiad was great. The experimental setup is truly amazing and I would like to say a big thank you for offering it to us for free. I will try to use it in the best way possible. It was an honour to have been part of this Olympiad.

Отговори на въпроса: Повторихте ли експеримента в къщи? Каква стойност за константата на Болцман получихте?

- Да повторихме го в час по физика.

- Да, 15% грешка.
- $1.29 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.
- I have not repeated the experiment at home yet, but I am planning to do so in a week during the Christmas holidays, since I am going to have a lot of free time. Nevertheless, I have actually kept the measurements I did during the EPO and I analyzed them using Microsoft Office Excel. The value I got was $k=1.182 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ (at a temperature of 17 degrees Celsius) which is not very close (there is a 15% error compared to the known value, $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$). I concluded that I should have measured the voltage $U_{2,n}$ (the one measured in task 18) more precisely, in mV.

Резултатът на абсолютният шампион

Качествен проблем III (15): Amangeldi Verassyk
 $V_o = (-0.0550 \pm 0.0003) B$.
 II. Определение $k_B (1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/K})$

n	1	2	3	4	5	6
$C_{n,B}$	26,1	32,9	42,9	103	14,6	65,8
$U_{2,B}$	0,96	0,41	0,44	0,35	0,27	0,31
$y_n \cdot 10^5$	-0,085	-0,076	-0,082	-0,065	-0,050	-0,057
$x_n \cdot 10^9$	0,038	0,030	0,023	0,009	0,068	0,015
					:	

19) $V^* = V_o / Y^2 \approx -55 \cdot 10^{-15} B$.
 20) $t = 23^\circ C \Rightarrow T = 296 K$.
 $y_n = \frac{V_{em} - V^*}{T}$ Нормиране
абсолютна
температура
 $x_n = \frac{T}{C_n}$
 24) $y = x k_B + \text{const} \Leftrightarrow y = a + b x$, (MFK) \Rightarrow
 $\Rightarrow a = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ (Ман. Статистика че
используя график)
 $b = \frac{\bar{y} - a}{\bar{x}}$. $\Rightarrow b = k_B \Rightarrow k_B \approx 1.19 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/K}$.
 $\Delta k_B = 6 \times \approx 0.29 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/K}$
 $k_B = (1.19 \cdot 10^{-23} \pm 0.29 \cdot 10^{-23}) \text{ Дж/K}$ бпк