

Tabla 16.9: Rango de datos para el ejercicio 16.38

Riesgo de la actividad o tecnología	Votantes	Expertos	Riesgo de la actividad o tecnología	Votantes	Expertos
Energía nuclear	1	20	Vehículos de motor	2	1
Armas de fuego	3	4	Tabaquismo	4	2
Motocicletas	5	6	Bebidas alcohólicas	6	3
Aviación privada	7	12	Trabajo policiaco	8	17
Pesticidas	9	8	Cirugía	10	5
Bombero	11	18	Construcción grande	12	13
Cacería	13	23	Latas de aerosol	14	26
Montañismo	15	29	Bicicletas	16	15
Aviación comercial	17	16	Energía eléctrica	18	9
Natación	19	10	Anticonceptivos	20	11
Esquí	21	30	Rayos X	22	7
Fútbol americano	23	27	Ferrocarriles	24	19
Conservadores de alimentos	25	14	Colorantes de alimentos	26	21
Podadoras	27	28	Antibióticos	28	24
Electrodomésticos	29	22	Vacunas	30	25

## Ejercicios de repaso

**16.39** Un estudio de una empresa química compara las propiedades de desecación de dos diferentes polímeros. Se utilizaron 10 lodos diferentes y se permitió que ambos polímeros secan cada lodo. El secado libre se midió en mL/min.

Tipo de lodo	Polímero A	Polímero B
1	12.7	12.0
2	14.6	15.0
3	18.6	19.2
4	17.5	17.3
5	11.8	12.2
6	16.9	16.6
7	19.9	20.1
8	17.6	17.6
9	15.6	16.0
10	16.0	16.1

- Utilice la prueba de signos a un nivel de 0.05 para probar la hipótesis nula de que el polímero A tiene la misma mediana de secado que el polímero B.
- Utilice la prueba de rangos con signo para probar la hipótesis del inciso a.

**16.40** En el ejercicio de repaso 13.45 de la página 555 use la prueba de Kruskal-Wallis, a un nivel de significancia de 0.05, para determinar si los análisis químicos realizados por los cuatro laboratorios producen, en promedio, los mismos resultados.

**16.41** Use los datos del ejercicio 13.14 de la página 530 para ver si la cantidad mediana de pérdida de nitrógeno en la transpiración difiere para los tres niveles de proteína dietética.



## Capítulo 17

# Control estadístico de la calidad

---

### 17.1 Introducción

La idea de usar técnicas de muestreo y análisis estadístico en un entorno de producción tuvo sus comienzos en la década de 1920. El objetivo de este concepto tan exitoso es reducir de manera sistemática la variabilidad y el aislamiento asociados con las fuentes de dificultades *durante la producción*. En 1924 Walter A. Shewhart, de la empresa Bell Telephone Laboratories, desarrolló el concepto de gráfica de control. Sin embargo, fue hasta la Segunda Guerra Mundial cuando se generalizó el uso de este tipo de gráficas debido a la importancia que durante ese periodo tuvo el mantenimiento de la calidad en los procesos de producción. En las décadas de 1950 y 1960 el desarrollo del control de calidad y el área general de seguridad de la calidad crecieron con rapidez, en particular con el surgimiento del programa espacial en Estados Unidos. En Japón hubo un amplio y exitoso uso del control de calidad gracias a los esfuerzos de W. Edwards Deming, quien trabajó como consultor en Japón después de la Segunda Guerra Mundial. El control de calidad ha sido, y es, un elemento importante en el desarrollo de la industria y la economía de Japón.

El control de calidad está recibiendo cada vez más atención como una herramienta de administración en la cual se observan y evalúan las características importantes de un producto en comparación con algún tipo de estándar. Los diversos procedimientos en el control de calidad implican un uso considerable de los procedimientos de muestreo y los principios estadísticos expuestos en capítulos anteriores. Los principales usuarios del control de calidad son, por supuesto, las corporaciones industriales. Es evidente que un programa eficaz de control de calidad mejora la calidad del artículo que se produce y aumenta las utilidades. Esto es particularmente cierto en la actualidad, pues los productos se fabrican en volúmenes altos. Antes de que surgiera el movimiento hacia los métodos de control de calidad, a menudo ésta se veía afectada debido a la falta de eficiencia, lo cual, por supuesto, incrementaba los costos.

### La gráfica de control

El objetivo de una gráfica de control es determinar si el desempeño de un proceso se mantiene en un nivel aceptable de calidad. Se espera, desde luego, que cualquier proceso experimente una variabilidad natural, es decir, una variabilidad debida esencialmente a fuentes de variación poco importantes e incontrolables. Por otro lado, un proceso puede experimentar formas más severas de variabilidad en mediciones de desempeño fundamentales.

Estas fuentes de variabilidad pueden surgir de uno de varios tipos de “causas asignables” no aleatorias, como errores del operador o indicadores mal ajustados en una máquina. Un proceso que opera en dicho estado se denomina **fuera de control**. Se dice que un proceso que sólo experimenta variaciones aleatorias está en **control estadístico**. Desde luego, un proceso de producción exitoso puede operar en un estado de control durante un periodo largo. Se supone que durante este periodo el proceso elabora un producto aceptable. Sin embargo, podría ocurrir un “cambio” gradual o repentino que requiera detección.

El propósito de una gráfica de control es que funcione como un dispositivo para detectar el estado no aleatorio o fuera de control de un proceso. La gráfica de control suele adoptar la forma que se indica en la figura 17.1. Cuando ocurre un cambio en el proceso es importante detectarlo con rapidez, de manera que se pueda corregir el problema. Evidentemente, si el cambio no se detecta de inmediato, se producirán muchos artículos defectuosos o que no cumplen las especificaciones, lo cual dará como resultado un desperdicio significativo y un incremento en los costos.

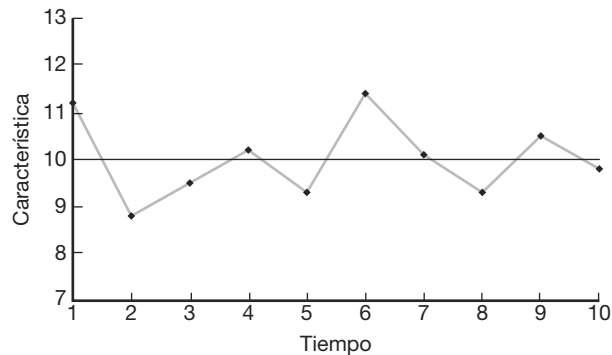


Figura 17.1: Gráfica de control típica.

Se deben considerar ciertos tipos de características de la calidad y se deben tomar muestras de las unidades del proceso a medida que pasa el tiempo. Digamos, por ejemplo, que la característica de un cojinete de motor es la circunferencia. La línea central representa el valor promedio de la característica cuando el proceso está bajo control. Los puntos que se indican en la figura representarían los resultados de, digamos, los promedios muestrales de tal característica, con muestras tomadas en diferentes momentos. Los límites de control superior e inferior se eligen de tal manera que se esperaría que, si el proceso está bajo control, todos los puntos muestrales queden cubiertos por estos límites. Como resultado, la forma general de los puntos graficados a lo largo del tiempo determina si se concluye que el proceso está bajo control. La evidencia de que está “dentro de control” se obtiene de un patrón aleatorio de puntos con todos los valores graficados dentro de los límites de control. Cuando un punto cae fuera de los límites de control, se considera como evidencia de que un proceso está fuera de control, en cuyo caso se sugiere una búsqueda para determinar la causa. Además, un patrón no aleatorio de puntos se debe considerar sospechoso y, evidentemente, un indicador de que es necesario investigar para encontrar la medida correctiva adecuada.

## 17.2 Naturaleza de los límites de control

Las ideas fundamentales en las que se basan las gráficas de control son similares en estructura a la prueba de hipótesis. Los límites de control se establecen para controlar la probabilidad de cometer el error de concluir que el proceso está fuera de control, cuando de hecho no lo está. Esto corresponde a la probabilidad de cometer un error tipo I si probáramos la hipótesis nula de que el proceso está bajo control. Por otro lado, debemos estar atentos al error del segundo tipo, es decir, el de no encontrar el proceso fuera de control cuando de hecho sí lo está (error tipo II). De esta manera, la elección de los límites de control es similar a la elección de una región crítica.

Como en el caso de la prueba de hipótesis, el tamaño de la muestra en cada punto es importante. La elección del tamaño de la muestra depende en gran medida de la sensibilidad o potencia de detección del estado fuera de control. En esta aplicación, el concepto de *potencia* es muy similar al de la situación de la prueba de hipótesis. Queda claro que cuanto más grande sea la muestra en cada periodo, más rápida será la detección de un proceso fuera de control. En cierto sentido los límites de control en realidad definen lo que el usuario considera como estar *bajo control*. En otras palabras, la amplitud dada por los límites de control debe depender en cierto sentido de la variabilidad del proceso. Como resultado, el cálculo de los límites de control dependerá de manera natural de los datos que se tomen de los resultados del proceso. De esta forma, cualquier aplicación del control de calidad debe comenzar con el cálculo de una muestra o conjunto de muestras preliminar, que establecerá tanto la línea central como los límites del control de calidad.

## 17.3 Objetivos de la gráfica de control

Un propósito evidente de la gráfica de control es la vigilancia del proceso, o sea determinar si es o no necesario realizar cambios. Además, la constante y sistemática obtención de datos a menudo permite a la administración evaluar la capacidad del proceso. Es evidente que, si una sola característica de desempeño es importante, el muestreo y la estimación continuos de la media y la desviación estándar de esa característica de desempeño ofrecen la actualización de lo que el proceso puede hacer en términos de desempeño promedio y variación aleatoria. Esto es valioso incluso cuando el proceso permanece bajo control durante periodos largos. La estructura sistemática y formal de la gráfica de control a menudo puede prevenir una reacción desmesurada ante cambios que representen sólo fluctuaciones aleatorias. Obviamente, en muchas situaciones los cambios realizados por una reacción desmesurada pueden crear graves problemas que son difíciles de resolver.

Las características de calidad de las gráficas de control por lo general caen en *dos* categorías: **variables** y **atributos**. Como resultado, los tipos de gráficas de control con frecuencia tienen las mismas clasificaciones. En el caso de la gráfica de los tipos de variables, la característica suele ser una medida sobre un continuo, como el diámetro o el peso. En el caso de la gráfica de atributos, lo que refleja la característica es si el producto individual se *ajusta a las especificaciones* (si está o no defectuoso). Las aplicaciones para estas dos situaciones distintas son evidentes.

En el caso de la gráfica de variables se debe ejercer control sobre la tendencia central y la variabilidad. Lo que a un analista de control de calidad le debe preocupar es si existe o no, *en promedio*, un cambio en los valores de la característica de desempeño. Además, siempre habrá interés por saber si algún cambio en las condiciones del proceso

provoca que disminuya la precisión, es decir, que aumente la variabilidad. Para manejar estos dos conceptos es esencial utilizar gráficas de control separadas. La tendencia central es controlada por la *gráfica  $\bar{X}$* , donde las medias de muestras relativamente pequeñas se dibujan en la gráfica de control. La variabilidad alrededor de la media se controla mediante el *rango* en la muestra, o la *desviación estándar de la muestra*. En el caso de muestreo de atributos a menudo la cantidad que se grafica es la *proporción de artículos defectuosos* de una muestra. En la siguiente sección analizamos el desarrollo de gráficas de control para los tipos de variables de las características del desempeño.

## 17.4 Gráficas de control para variables

Un ejemplo es una forma relativamente sencilla de explicar los rudimentos de la gráfica  $\bar{X}$  para variables. Suponga que en un proceso de fabricación de cierta parte de un motor se deben utilizar las gráficas de control de calidad. Suponga también que la media del proceso es  $\mu = 50$  mm y que la desviación estándar es  $\sigma = 0.01$  mm. Imagine que se toman muestras en grupos de 5 cada hora y que los valores de la *media muestral  $\bar{X}$*  se registran y grafican como en la figura 17.2. Los límites para las gráficas  $\bar{X}$  se basan en la desviación estándar de la variable aleatoria  $\bar{X}$ . Sabemos, a partir de lo expuesto en el capítulo 8, que para el promedio de observaciones independientes en una muestra de tamaño  $n$ ,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde  $\sigma$  es la desviación estándar de una observación individual. Los límites de control están diseñados para dar como resultado una pequeña probabilidad de que un valor dado de  $\bar{X}$  esté fuera de los límites dado que, en realidad, el proceso está bajo control, es decir,  $\mu = 50$ . Si recurrimos al teorema del límite central, tendremos que, en las condiciones en las que el proceso está controlado,

$$\bar{X} \sim N \left( 50, \frac{0.01}{\sqrt{5}} \right).$$

Como resultado,  $100(1 - \alpha)\%$  de los valores  $\bar{X}$  cae dentro de los límites cuando el proceso está bajo control si utilizamos los límites

$$LCI = \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 - z_{\alpha/2} (0.0045), \quad LCS = \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 + z_{\alpha/2} (0.0045).$$

Aquí LCI y LCS representan el límite de control inferior y el límite de control superior, respectivamente. Con frecuencia las gráficas  $\bar{X}$  se basan en límites denominados “tres-sigma”, refiriéndonos, por supuesto, a  $z_{\alpha/2} = 3$  y a límites que se convierten en

$$\mu \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro ejemplo, los límites superior e inferior son

$$LCI = 50 - 3(0.0045) = 49.9865, \quad LCS = 50 + 3(0.0045) = 50.0135.$$

Por consiguiente, si vemos la estructura de los límites  $3\sigma$  desde el punto de vista de la prueba de hipótesis para un punto muestral dado, encontraremos que hay una probabilidad

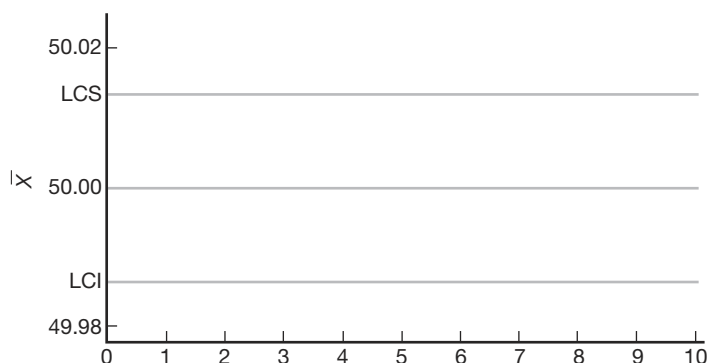


Figura 17.2: Los límites de control  $3\sigma$  para el ejemplo de la parte del motor.

de 0.0026 de que el valor  $\bar{X}$  caiga fuera de los límites de control, dado que el proceso está bajo control. Ésta es la probabilidad de que el analista determine *de manera errónea* que el proceso está fuera de control (véase la tabla A.3).

El ejemplo anterior no sólo ilustra la gráfica  $\bar{X}$  para las variables, también proporciona al lector una idea general de la naturaleza de las gráficas de control. La línea central por lo general refleja el valor ideal de un parámetro importante. Los límites de control se establecen a partir del conocimiento de las propiedades de muestreo del estadístico que estima el parámetro en cuestión. Con mucha frecuencia implican un múltiplo de la desviación estándar del estadístico. Se ha generalizado el uso de límites  $3\sigma$ . En el caso de la gráfica  $\bar{X}$  que se presenta aquí, el teorema del límite central brinda al usuario una buena aproximación de la probabilidad de determinar de forma errónea que el proceso está fuera de control. En general, sin embargo, es probable que el usuario no confíe en la normalidad del estadístico sobre la línea central. Lo anterior podría dar como resultado que no se conozca la probabilidad exacta de cometer un “error tipo I”. A pesar de esto se ha vuelto muy común utilizar los límites  $k\sigma$ . Aunque los límites  $3\sigma$  se utilizan ampliamente, en ocasiones el usuario utilizará otro método. Cuando es importante detectar de forma rápida una situación fuera de control podría ser apropiado utilizar un múltiplo menor de  $\sigma$ . Si se toman en cuenta los costos de producción, cabe señalar que permitir que un proceso continúe funcionando fuera de control, incluso por periodos cortos, puede resultar más costoso que invertir en la investigación y corrección de las causas de la pérdida del control en el proceso. En este caso es evidente que los límites apropiados son los límites de control que son más estrictos que los límites  $3\sigma$ .

## Subgrupos racionales

Los valores de la muestra que se utilizan para el control de calidad se dividen en subgrupos, en los que una *muestra* representa un subgrupo. Como antes indicamos, el orden en el tiempo de producción es en realidad una base natural para la selección de los subgrupos. Podríamos considerar el esfuerzo de control de calidad de manera muy simple como 1) muestreo, 2) detección de un estado fuera de control y 3) búsqueda de las causas atribuibles que puedan ocurrir con el tiempo. Tal vez parezca que la selección de la base para estos grupos muestrales es muy sencilla, pero la elección de estos subgrupos de información muestral podría tener un efecto importante en el éxito del programa de control de calidad. Estos subgrupos con frecuencia se denominan **subgrupos racionales**. En

general, si el analista está interesado en detectar un *cambio de ubicación*, se considera que los subgrupos se deben elegir de manera que la variabilidad dentro del subgrupo sea pequeña, y de manera que haya mayores posibilidades de detectar las causas atribuibles, si se presentaran. Así, deseamos elegir los subgrupos de forma que se maximice la variabilidad entre subgrupos. Por ejemplo, un método razonable es elegir unidades en un subgrupo que se producen de forma cercana en el tiempo. Por otro lado, las gráficas de control a menudo se utilizan para controlar la variabilidad, en cuyo caso el estadístico de desempeño es la *variabilidad dentro de la muestra*. Por consiguiente, es más importante elegir los subgrupos racionales para maximizar la variabilidad dentro de la muestra. En este caso las observaciones en los subgrupos se deberían comportar más como una muestra aleatoria y la variabilidad dentro de las muestras necesita ser una descripción de la variabilidad del proceso.

Es importante señalar que las gráficas de control sobre la variabilidad se deben establecer antes de construir gráficas sobre el centro de ubicación (digamos, gráficas  $\bar{X}$ ). Cualquier gráfica de control sobre el centro de ubicación en realidad dependerá de la variabilidad. Por ejemplo, vimos un ejemplo de la gráfica de tendencia central y ésta depende de  $\sigma$ . En las secciones que siguen se analizará un estimado de  $\sigma$  a partir de los datos.

## Gráfica $\bar{X}$ con parámetros estimados

Con anterioridad ilustramos las nociones de la gráfica  $\bar{X}$  que usa el teorema del límite central y emplea valores *conocidos* de la media y desviación estándar del proceso. Como al principio se indicó, se utilizan los límites de control

$$LCI = \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad LCS = \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y un valor  $\bar{X}$  que cae fuera de estos límites se considera evidencia de un cambio en la media  $\mu$ , y, por lo tanto, de la posibilidad de que el proceso esté fuera de control.

En muchas situaciones prácticas no es razonable suponer que conocemos  $\mu$  y  $\sigma$ . Como resultado, se deben proporcionar estimados de los datos que se obtienen cuando el proceso está bajo control. Por lo general los estimados se determinan durante un periodo en el que se reúne *información antecedente* o *de inicio*. Se elige una base para subgrupos racionales y se reúnen los datos con muestras de tamaño  $n$  en cada subgrupo. Los tamaños de la muestra por lo general son pequeños, digamos, 4, 5 o 6, y se toman  $k$  muestras, con  $k$  al menos igual a 20. Durante este periodo, en el que se supone que el proceso está bajo control, el usuario establece los estimados de  $\mu$  y  $\sigma$  en los que se basa la gráfica de control. La información importante reunida durante este periodo incluye las medias muestrales en el subgrupo, la media general y el rango de la muestra en cada subgrupo. En los siguientes párrafos señalaremos cómo se utiliza esta información para producir la gráfica de control.

Una parte de la información muestral de estas  $k$  muestras toma la forma  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ , donde la variable aleatoria  $\bar{X}_i$  es el promedio de los valores en la  $i$ -ésima muestra. Evidentemente, el promedio global es la variable aleatoria

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i.$$

Éste es el estimador adecuado de la media del proceso y, por consiguiente, es la línea central en la gráfica de control  $\bar{X}$ . En aplicaciones de control de calidad a menudo es



conveniente estimar  $\sigma$  a partir de la información relacionada con los *rangos* en las muestras, en vez de las desviaciones estándar muestrales. Definamos

$$R_i = X_{\text{máx}, i} - X_{\text{mín}, i}$$

como el rango para los datos en la  $i$ -ésima muestra. Aquí  $X_{\text{máx}, i}$  y  $X_{\text{mín}, i}$  son, respectivamente, la observación más grande y la más pequeña en la muestra. El estimado apropiado de  $\sigma$  es una función del rango promedio

$$\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i.$$

Un estimado de  $\sigma$ , digamos  $\hat{\sigma}$ , se obtiene mediante

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2},$$

donde  $d_2$  es una constante que depende del tamaño de la muestra. Los valores de  $d_2$  se muestran en la tabla A.22.

El uso del rango para producir un estimado de  $\sigma$  tiene sus raíces en aplicaciones similares a la del control de calidad, en particular debido a que, en la época en que aún era muy difícil lograr cálculos precisos, el rango era muy fácil de calcular en comparación con otros estimados de variabilidad. La suposición de normalidad de las observaciones individuales está implícita en la gráfica  $\bar{X}$ . Por supuesto, la existencia del teorema del límite central es ciertamente útil a este respecto. Bajo la suposición de normalidad, usamos una variable aleatoria llamada rango relativo dada por

$$W = \frac{R}{\sigma}.$$

De la cual resulta que los momentos de  $W$  son funciones simples del tamaño de la muestra  $n$  (véase la referencia de Montgomery, 2000b, en la bibliografía). El valor esperado de  $W$  a menudo se denomina  $d_2$ . Así, al tomar el valor esperado de la  $W$  anterior,

$$\frac{E(R)}{\sigma} = d_2,$$

la cual facilita la comprensión del fundamento para el estimado  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ . Se sabe bien que el método del rango produce un estimador eficiente de  $\sigma$  en muestras hasta cierto punto pequeñas. Esto hace que el estimador sea particularmente atractivo en aplicaciones de control de calidad, ya que los tamaños de la muestra en los subgrupos por lo general son pequeños. El uso del método del rango para la estimación de  $\sigma$  tiene como resultado gráficas de control con los siguientes parámetros:

$$\text{LCS} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}, \quad \text{línea central} = \bar{\bar{X}}, \quad \text{LCI} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}.$$

Al definir la cantidad

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}},$$

tenemos que

$$\text{LCS} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}, \quad \text{LCI} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}.$$

Para simplificar la estructura el usuario de las gráficas  $\bar{X}$  a menudo encuentra valores tabulados de  $A_2$ . En la tabla A.22 se incluyen valores de  $A_2$  para varios tamaños de la muestra.

## Gráficas $R$ para control de variación

Hasta aquí todos los ejemplos y detalles tuvieron que ver con el intento del analista de control de calidad de detectar condiciones fuera de control producidas por un *cambio en la media*. Los límites de control se basan en la distribución de la variable aleatoria  $\bar{X}$  y dependen de la suposición de normalidad de las observaciones individuales. Es importante que el control se aplique tanto a la variabilidad como al centro de ubicación. De hecho, muchos expertos consideran que el control de la variabilidad de la característica del desempeño es más importante y que es necesario establecerlo antes de considerar el centro de ubicación. La variabilidad del proceso se puede controlar usando *gráficas del rango muestral*. Una gráfica de los rangos muestrales a lo largo del tiempo se denomina **gráfica  $R$** . Se puede utilizar la misma estructura general, como en el caso de la gráfica  $\bar{X}$ , donde  $\bar{R}$  es la *línea central* y los límites de control dependen de que se estime la desviación estándar de la variable aleatoria  $R$ . Por lo tanto, como en el caso de la gráfica  $\bar{X}$ , se establecen límites  $3\sigma$  donde “ $3\sigma$ ” implica  $3\sigma_R$ . La cantidad  $\sigma_R$  se debe estimar a partir de los datos, tal como se estima  $\sigma_{\bar{X}}$ .

El estimado de  $\sigma_R$ , la desviación estándar, también se basa en la distribución del rango relativo

$$W = \frac{R}{\sigma}.$$

La desviación estándar de  $W$  es una función conocida del tamaño de la muestra y por lo general se denota por  $d_3$ . Esto da como resultado,

$$\sigma_R = \sigma d_3.$$

Ahora podemos reemplazar  $\sigma$  por  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ , y de esta forma el estimador de  $\sigma_R$  es

$$\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}d_3}{d_2}.$$

Por consiguiente, las cantidades que definen la gráfica  $R$  son

$$\text{LCS} = \bar{R}D_4, \quad \text{línea central} = \bar{R}, \quad \text{LCI} = \bar{R}D_3,$$

donde las constantes  $D_4$  y  $D_3$  (que dependen sólo de  $n$ ) son

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}.$$

Las constantes  $D_4$  y  $D_3$  se encuentran tabuladas en la tabla A.22.

## Gráficas $\bar{X}$ y $R$ para variables

Se controla un proceso de fabricación de partes componentes para misiles, donde la característica de desempeño es la resistencia a la tensión, en libras por pulgada cuadrada. Se toman muestras de tamaño 5 cada hora y se reportan 25 muestras. Los datos se muestran en la tabla 17.1.

Tabla 17.1: Información muestral de los datos de resistencia a la tensión

Número de muestra	Observaciones					$\bar{X}_i$	$R_i$
1	1515	1518	1512	1498	1511	1510.8	20
2	1504	1511	1507	1499	1502	1504.6	12
3	1517	1513	1504	1521	1520	1515.0	17
4	1497	1503	1510	1508	1502	1504.0	13
5	1507	1502	1497	1509	1512	1505.4	15
6	1519	1522	1523	1517	1511	1518.4	12
7	1498	1497	1507	1511	1508	1504.2	14
8	1511	1518	1507	1503	1509	1509.6	15
9	1506	1503	1498	1508	1506	1504.2	10
10	1503	1506	1511	1501	1500	1504.2	11
11	1499	1503	1507	1503	1501	1502.6	8
12	1507	1503	1502	1500	1501	1502.6	7
13	1500	1506	1501	1498	1507	1502.4	9
14	1501	1509	1503	1508	1503	1504.8	8
15	1507	1508	1502	1509	1501	1505.4	8
16	1511	1509	1503	1510	1507	1508.0	8
17	1508	1511	1513	1509	1506	1509.4	7
18	1508	1509	1512	1515	1519	1512.6	11
19	1520	1517	1519	1522	1516	1518.8	6
20	1506	1511	1517	1516	1508	1511.6	11
21	1500	1498	1503	1504	1508	1502.6	10
22	1511	1514	1509	1508	1506	1509.6	8
23	1505	1508	1500	1509	1503	1505.0	9
24	1501	1498	1505	1502	1505	1502.2	7
25	1509	1511	1507	1500	1499	1505.2	12

Como antes indicamos, es importante comenzar por establecer las condiciones de variabilidad “bajo control”. La línea central calculada para la gráfica  $R$  es

$$\bar{R} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} R_i = 10.72.$$

En la tabla A.22 encontramos que para  $n = 5$ ,  $D_3 = 0$  y  $D_4 = 2.114$ . Como resultado, los límites de control para la gráfica  $R$  son

$$\text{LCI} = \bar{R}D_3 = (10.72)(0) = 0,$$

$$\text{LCS} = \bar{R}D_4 = (10.72)(2.114) = 22.6621.$$

En la figura 17.3 se muestra la gráfica  $R$ . Ninguno de los rangos graficados cae fuera de los límites de control. Como resultado, no hay nada que indique la existencia de una situación fuera de control.

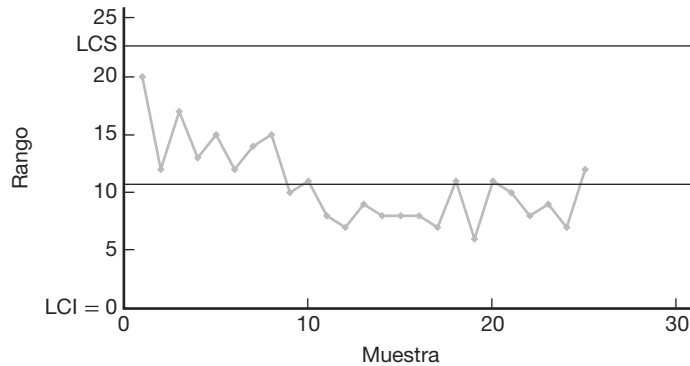


Figura 17.3: Gráfica  $R$  para el ejemplo de resistencia a la tensión.

Ahora se puede construir la gráfica  $\bar{X}$  para las lecturas de la resistencia a la tensión. La línea central es

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \bar{X}_i = 1507.328.$$

En la tabla A.22 encontramos que, para muestras de tamaño 5,  $A_2 = 0.577$ . De esta forma, los límites de control son

$$\text{LCS} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} = 1507.328 + (0.577)(10.72) = 1513.5134,$$

$$\text{LCI} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} = 1507.328 - (0.577)(10.72) = 1501.1426.$$

En la figura 17.4 se muestra la gráfica  $\bar{X}$ . Como el lector puede observar, tres valores caen fuera de los límites de control, lo cual es una señal de que no se deberían usar los límites de control de  $\bar{X}$  para el control de calidad de la línea.

## Más comentarios acerca de las gráficas de control para variables

Un proceso podría parecer estar bajo control y, de hecho, permanecer así durante un periodo largo. ¿Esto significaría necesariamente que el proceso está funcionando de manera exitosa? Un proceso que opera *bajo control* es simplemente aquel en el que la media y la variabilidad del proceso permanecen estables, indicando, aparentemente, que no han ocurrido cambios graves. “Bajo control” implica que el proceso permanece consistente con variabilidad natural. Las gráficas de control de calidad pueden verse como un método en el que la variabilidad natural inherente rige la amplitud de los límites de control. Sin embargo, no determinan hasta qué punto un proceso bajo control satisface las *especificaciones* predeterminadas que requiere el proceso. Las especificaciones son límites que establece el consumidor. Si la variabilidad natural del proceso actual es mayor

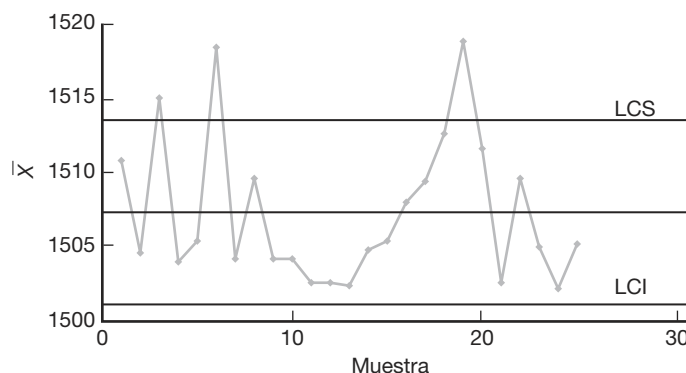


Figura 17.4: Gráfica  $\bar{X}$  para el ejemplo de resistencia a la tensión.

que la que determinan las especificaciones, aunque el proceso permanezca estable y esté bajo control, con demasiada frecuencia producirá artículos que no cumplirán las especificaciones.

Aludimos a la suposición de normalidad para las observaciones individuales en una gráfica de control de variables. Para la gráfica  $\bar{X}$ , si las observaciones individuales son normales, el estadístico  $\bar{X}$  es normal. Como resultado, el analista de control de calidad en este caso tiene control sobre la probabilidad de un error tipo I. Si las  $X$  individuales no son normales,  $\bar{X}$  es aproximadamente normal, por lo tanto, existe un control aproximado sobre la probabilidad de un error tipo I para el caso en el que se conoce  $\sigma$ . Sin embargo, utilizar o no el método del rango para estimar la desviación estándar también depende de la suposición de normalidad. Estudios respecto a la robustez de la gráfica  $\bar{X}$  para desviaciones de la normalidad indican que, para las muestras de tamaño  $k \geq 4$ , la gráfica  $\bar{X}$  da como resultado un riesgo  $\alpha$  cercano al anunciado (véase el trabajo de Montgomery, 2000b, y Schilling y Nelson, 1976, en la bibliografía). Indicamos antes que la aproximación  $\pm k\sigma_R$  a la gráfica  $R$  es una cuestión de conveniencia y tradición. Incluso si la distribución de observaciones individuales es normal, la distribución de  $R$  no es normal. De hecho, la distribución de  $R$  no es ni siquiera simétrica. Los límites de control simétricos de  $\pm k\sigma_R$  sólo proporcionan una aproximación al riesgo  $\alpha$  y, en algunos casos, la aproximación no es particularmente buena.

## Elección del tamaño de la muestra (función característica de operación) en el caso de la gráfica $\bar{X}$

Los científicos e ingenieros que manejan el control de calidad a menudo se refieren a los factores que influyen en el *diseño de la gráfica de control*. Los componentes que determinan el diseño de la gráfica incluyen el tamaño de la muestra que se toma en cada subgrupo, la amplitud de los límites de control y la frecuencia del muestreo. Todos estos factores dependen en gran medida de consideraciones económicas y prácticas. La frecuencia de muestreo evidentemente depende del costo del muestreo y del costo en el que se incurre si el proceso continúa fuera de control durante un periodo largo. Estos mismos factores afectan la amplitud de la región “bajo control”. El costo asociado con la investigación y la búsqueda de las causas atribuibles de la pérdida de control repercute en

la amplitud de la región y en la frecuencia de muestreo. Se ha puesto mucha atención en el diseño óptimo de gráficas de control, por lo que aquí no se darán mayores detalles. Se remite al lector al trabajo de Montgomery (2000b), que se cita en la bibliografía, para un excelente recuento histórico de gran parte de esta investigación.

La elección del tamaño de la muestra y la frecuencia de muestreo implican equilibrar los recursos disponibles para estos dos esfuerzos. En muchos casos es probable que el analista necesite hacer cambios en la estrategia hasta lograr el equilibrio adecuado. El analista siempre debe estar consciente de que, si el costo de producción de artículos no adecuados es grande, la estrategia adecuada sería una alta frecuencia de muestreo con un tamaño de la muestra relativamente pequeño.

Al elegir el tamaño de una muestra hay que tomar en cuenta muchos factores. En la ilustración y el análisis enfatizamos el uso de  $n = 4, 5$  o  $6$ . Estos valores se consideran relativamente pequeños para problemas generales en inferencia estadística, pero serían tamaños de muestra apropiados para el control de calidad. Una justificación, por supuesto, es que el control de calidad es un proceso continuo y los resultados producidos por una muestra o un conjunto de unidades serán seguidos por resultados de muchas más. Así, el tamaño de la muestra “eficaz” de todo el esfuerzo de control de calidad es muchas veces mayor que el tamaño que se utiliza en un subgrupo. Por lo general se considera más efectivo *tomar muestras frecuentemente* con un tamaño muestral pequeño.

El analista puede utilizar el concepto de potencia de una prueba para obtener información de la eficacia del tamaño de la muestra elegido. Esto es especialmente importante, ya que por lo general se utilizan muestras de tamaño pequeño en cada subgrupo. Remítase a los capítulos 10 y 13 para un análisis de la potencia de pruebas formales sobre las medias y el análisis de varianza. Aunque en el control de calidad en realidad no se realizan pruebas formales de hipótesis, se puede tratar la información como si la estrategia en cada subgrupo fuera la de probar una hipótesis, ya sea sobre la media de la población  $\mu$  o sobre la desviación estándar  $\sigma$ . Es de interés la *probabilidad de detectar* una condición fuera de control para una muestra dada y, quizá más importante, el número esperado de corridas requeridas para detectarla. La probabilidad de detectar una condición fuera de control específica corresponde a la potencia de una prueba. No es nuestra intención demostrar el desarrollo de la potencia para todos los tipos de gráficas de control que aquí se presentan, más bien, lo que deseamos es mostrar el desarrollo de la gráfica  $\bar{X}$  y presentar los resultados de potencia para la gráfica  $R$ .

Considere la gráfica  $\bar{X}$  cuando se conoce el valor de  $\sigma$ . Suponga que el estado bajo control tiene  $\mu = \mu_0$ . Un estudio del papel que desempeña el tamaño de la muestra del subgrupo equivale a investigar el riesgo  $\beta$ , es decir, la probabilidad de que un valor  $\bar{X}$  permanezca dentro de los límites de control cuando realmente ha ocurrido un cambio en la media. Suponga que la forma que toma el cambio es

$$\mu = \mu_0 + r\sigma.$$

De nuevo, al utilizar la normalidad de  $\bar{X}$  tenemos

$$\beta = P(\text{LCI} \leq \bar{X} \leq \text{LCS} \mid \mu = \mu_0 + r\sigma).$$

Para el caso de límites  $k\sigma$ ,

$$\text{LCI} = \mu_0 - \frac{k\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \text{LCS} = \mu_0 + \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Como resultado, si denotamos con  $Z$  la variable aleatoria normal estándar

$$\begin{aligned}\beta &= P \left[ Z < \left( \frac{\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] - P \left[ Z < \left( \frac{\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= P \left\{ Z < \left[ \frac{\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n} - (\mu + r\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \right\} - P \left\{ Z < \left[ \frac{\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n} - (\mu + r\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \right\} \\ &= P(Z < k - r\sqrt{n}) - P(Z < -k - r\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Observe el papel que desempeñan  $n$ ,  $r$  y  $k$  en la expresión para el riesgo  $\beta$ . La probabilidad de no detectar un cambio específico, como se esperaba, aumenta claramente con un incremento en  $k$ .  $\beta$  disminuye con un aumento en  $r$ , la magnitud del cambio, y disminuye con un incremento en el tamaño de la muestra,  $n$ .

Se debería enfatizar que la expresión anterior da como resultado el riesgo  $\beta$  (probabilidad de un error tipo II) para el caso de una *sola muestra*. Por ejemplo, suponga que, en el caso de una muestra de tamaño 4, ocurre un cambio de  $\sigma$  en la media. La probabilidad de detectar el cambio (potencia) en la primera muestra después del cambio es, suponiendo límites  $3\sigma$ :

$$1 - \beta = 1 - [P(Z < 1) - P(Z < -5)] = 0.1587.$$

Por otro lado, la probabilidad de detectar un cambio de  $2\sigma$  es

$$1 - \beta = 1 - [P(Z < -1) - P(Z < -7)] = 0.8413.$$

Los resultados anteriores ilustran una muy modesta probabilidad de detectar un cambio de magnitud  $\sigma$  y una alta probabilidad de detectar un cambio de magnitud  $2\sigma$ . En la figura 17.5 se observa la imagen completa de cómo se desempeñan los límites de control  $3\sigma$  para la gráfica  $\bar{X}$  que aquí se describe. En lugar de graficar las funciones de potencia se presenta una gráfica de  $\beta$  contra  $r$ , donde el cambio en la media tiene una magnitud  $r\sigma$ . Por supuesto, los tamaños de la muestra de  $n = 4, 5, 6$  dan como resultado una pequeña probabilidad de detectar un cambio de  $1.0\sigma$  o incluso  $1.5\sigma$  en la primera muestra después del cambio.

Pero si el muestreo se realiza con frecuencia, la probabilidad podría no ser tan importante como el número promedio o esperado de corridas que se requiere antes de detectar un cambio. Una detección rápida es importante y ciertamente posible, aunque no hay muchas probabilidades de lograrlo en la primera muestra. Resulta que las gráficas  $\bar{X}$  con estas muestras pequeñas conducirán a una detección relativamente rápida. Si  $\beta$  es la probabilidad de no detectar un cambio en la primera muestra después del cambio, entonces la probabilidad de detectarlo en la muestra  $s$ -ésima después de que ocurre es, suponiendo que las muestras son independientes:

$$P_s = (1 - \beta)\beta^{s-1}.$$

El lector debe reconocer que ésta es una aplicación de la distribución geométrica. El valor promedio o esperado del número de muestras que se requieren para la detección es

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\beta^{s-1}(1 - \beta) = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Por consiguiente, el número esperado de muestras que se requieren para detectar el cambio en la media es el *recíproco de la potencia*, es decir, la probabilidad de detección en la primera muestra después del cambio.

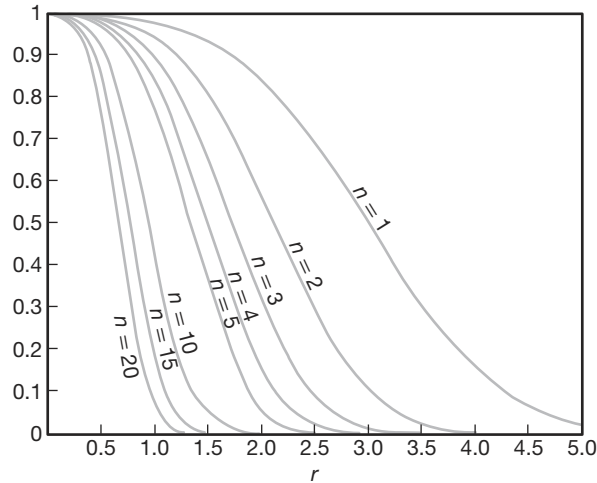


Figura 17.5: Curvas características de operación para la gráfica  $\bar{X}$  con límites  $3\sigma$ . Aquí,  $\beta$  es el error de probabilidad tipo II en la primera muestra después de que ocurre un cambio en la media de  $r\sigma$ .

**Ejemplo 17.1:** En cierto esfuerzo por controlar la calidad es importante que el analista detecte con rapidez los cambios en la media de  $\pm\sigma$  utilizando una gráfica de control  $3\sigma$  con una muestra de tamaño  $n = 4$ . El número esperado de muestras que se requieren después del cambio para detectar el estado fuera de control podría ser útil en la evaluación del procedimiento de control de calidad.

En la figura 17.5, para  $n = 4$  y  $r = 1$ , se puede ver que  $\beta \approx 0.84$ . Si utilizamos  $s$  para denotar el número de muestras que se requieren para detectar el cambio, la media de  $s$  es

$$E(s) = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{0.16} = 6.25.$$

De esta manera, se requieren siete subgrupos, en promedio, antes de detectar un cambio de  $\pm\sigma$ . ■

## Elección del tamaño de la muestra para la gráfica $R$

La curva CO de la gráfica  $R$  se muestra en la figura 17.6. Como la gráfica  $R$  se utiliza para controlar la desviación estándar del proceso, y la desviación estándar después de que el proceso se sale de control, el riesgo  $\beta$  se grafica como una función de la desviación estándar bajo control,  $\sigma_0$ . La última desviación estándar se denotará con  $\sigma_1$ . Sea

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}.$$

Para varios tamaños muestrales se grafica  $\beta$  contra  $\lambda$ .



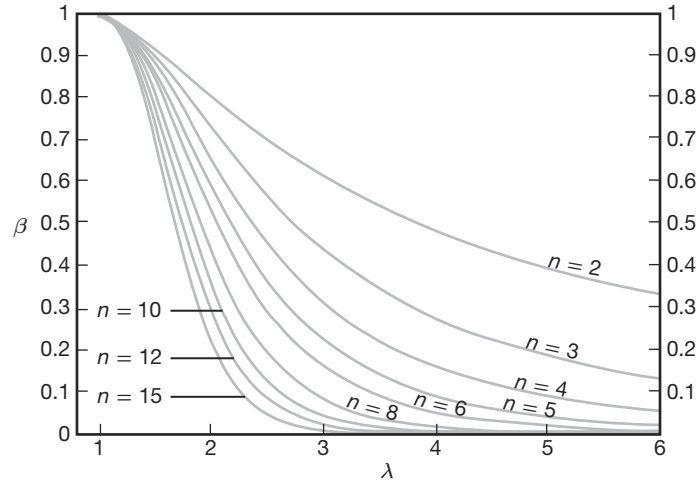


Figura 17.6: Curva característica operativa para las gráficas  $R$  con límites de  $3\sigma$ .

## Gráficas $\bar{X}$ y $S$ para variables

Para el estudiante de estadística es natural anticipar el uso de la varianza muestral en la gráfica  $\bar{X}$  y en una gráfica para el control de la variabilidad. El rango es un estimador eficiente de  $\sigma$ , pero esta eficiencia disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Para una  $n$  tan grande como 10 se debe utilizar el tan conocido estadístico

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

en la gráfica de control, tanto para la media como para la variabilidad. El lector debe recordar que en el capítulo 9 se expuso que  $S^2$  es un estimador no sesgado de  $\sigma^2$ , pero que  $S$  no es no sesgado para  $\sigma$ . Para evitar sesgos se acostumbra corregir  $S$  en las aplicaciones de la gráfica de control. Sabemos, en general, que

$$E(S) \neq \sigma.$$

En el caso en que las  $X_i$  sean independientes y estén distribuidas de forma normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ ,

$$E(S) = c_4 \sigma, \quad \text{donde} \quad c_4 = \left( \frac{2}{n-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$$

y  $\Gamma(\cdot)$  se refiere a la función gamma (véase el capítulo 6). Por ejemplo, para  $n = 5$ ,  $c_4 = (3/8)\sqrt{2\pi}$ . Además, la varianza del estimador  $S$  es

$$\text{Var}(S) = \sigma^2(1 - c_4^2).$$

Establecimos las propiedades de  $S$  que nos permitirán escribir límites de control para  $\bar{X}$  y  $S$ . Para construir una estructura adecuada comenzamos por suponer que conocemos  $\sigma$ . Después presentamos la estimación de  $\sigma$  a partir de un conjunto de muestras preliminar.

Al graficar el estadístico  $S$ , los parámetros evidentes de la gráfica de control son

$$\text{LCS} = c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2}, \quad \text{línea central} = c_4\sigma, \quad \text{LCI} = c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2}.$$

Como de costumbre, los límites de control se definen de manera más sucinta utilizando constantes tabuladas. Sean

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2},$$

entonces, tenemos

$$\text{LCS} = B_6\sigma, \quad \text{línea central} = c_4\sigma, \quad \text{LCI} = B_5\sigma.$$

En la tabla A.22 se encuentran tabulados los valores de  $B_5$  y  $B_6$  para varios tamaños muestrales.

Ahora, por supuesto, los límites de control anteriores sirven como base para el desarrollo de los parámetros de control de calidad en la situación que con más frecuencia se observa en la práctica, a saber, en la que se desconoce  $\sigma$ . Debemos suponer una vez más que para producir un estimado de  $\sigma$  durante lo que se supone es un periodo “bajo control” se toma un conjunto de *muestras base* o muestras preliminares. Las desviaciones estándar de las muestras  $S_1, S_2, \dots, S_m$  se obtienen a partir de muestras que son, cada una, de tamaño  $n$ . A menudo se utiliza un estimador no sesgado del tipo

$$\frac{\bar{S}}{c_4} = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \right) / c_4$$

para  $\sigma$ . Aquí, desde luego,  $\bar{S}$ , el valor promedio de la desviación estándar muestral en la muestra preliminar, es la línea central lógica en la gráfica de control para el control de la variabilidad. Los límites de control superior e inferior son estimadores no sesgados de los límites de control adecuados para el caso en el que se conoce  $\sigma$ . Como

$$E \left( \frac{\bar{S}}{c_4} \right) = \sigma,$$

el estadístico  $\bar{S}$  es una línea central apropiada (como un estimador no sesgado de  $c_4\sigma$ ) y las cantidades

$$\bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \quad \text{y} \quad \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

son los límites de control  $3\sigma$  inferior y superior apropiados, respectivamente. Como resultado, la línea central y los límites para la gráfica  $S$  de control de variabilidad son

$$\text{LCI} = B_3\bar{S}, \quad \text{línea central} = \bar{S}, \quad \text{LCS} = B_4\bar{S},$$

donde

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}.$$

las constantes  $B_3$  y  $B_4$  aparecen en la tabla A.22.

Ahora podemos escribir los parámetros de la gráfica  $\bar{X}$  correspondiente que implican el uso de la desviación estándar muestral. Supongamos que podemos disponer de  $S$  y  $\bar{X}$  de la muestra base preliminar. La línea central continúa siendo  $\bar{\bar{X}}$  y los límites  $3\sigma$  son simplemente de la forma  $\bar{\bar{X}} \pm 3\hat{\sigma}/\sqrt{n}$ , donde  $\hat{\sigma}$  es un estimador insesgado. Simplemente proporcionamos  $\bar{S}/c_4$  como un estimador de  $\sigma$ , y de esta forma tenemos

$$\text{LCI} = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}, \quad \text{línea central} = \bar{\bar{X}}, \quad \text{LCS} = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S},$$

donde

$$A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}.$$

En la tabla A.22 aparece la constante  $A_3$  para varios tamaños de la muestra.


**Ejemplo 17.2:** Se producen contenedores mediante un proceso en el que el volumen de éstos es sometido a un control de calidad. Se utilizaron 25 muestras de tamaño 5 para establecer los parámetros de control de calidad. En la tabla 17.2 se documenta la información de estas muestras.

En la tabla A.22 se observa que  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = 2.089$  y  $A_3 = 1.427$ . Como resultado, los límites de control para  $\bar{X}$  son dados por

$$\text{LCS} = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S} = 62.3771, \quad \text{LCI} = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S} = 62.2741,$$

y los límites de control para la gráfica  $S$  son

$$\text{LCI} = B_3 \bar{S} = 0, \quad \text{LCS} = B_4 \bar{S} = 0.0754.$$

Las figuras 17.7 y 17.8 muestran las gráficas de control para este ejemplo,  $\bar{X}$  y  $S$ , respectivamente. En las gráficas se representa la información de las 25 muestras en el conjunto de datos preliminar. Al parecer, el control se establece después de las primeras muestras. 

## 17.5 Gráficas de control para atributos

Como indicamos al principio de este capítulo, muchas aplicaciones industriales de control de calidad requieren que la característica de calidad indique sólo que el artículo “se ajusta”. En otras palabras, no hay una medición continua que sea crucial para el desempeño del artículo. Una ilustración evidente de este tipo de muestreo, denominado **muestreo por atributos**, es el desempeño de una bombilla que funciona o no de manera satisfactoria. El artículo **está o no defectuoso**. Las piezas metálicas fabricadas pueden tener deformaciones; los contenedores de una línea de producción pueden tener fugas. En ambos casos un artículo defectuoso impide su uso por parte del consumidor. La gráfica de control estándar para esta situación es la gráfica  $p$ , o *gráfica para la fracción de defectuosos*. Como se podría esperar, la distribución de probabilidad que interviene es la distribución binomial. Se remite al lector al capítulo 5 para información básica de la distribución binomial.

Tabla 17.2: Volumen de contenedores para 25 muestras en una muestra preliminar (en centímetros cúbicos)

Muestra	Observaciones					$\bar{X}_i$	$S_i$
1	62.255	62.301	62.289	62.189	62.311	62.269	0.0495
2	62.187	62.225	62.337	62.297	62.307	62.271	0.0622
3	62.421	62.377	62.257	62.295	62.222	62.314	0.0829
4	62.301	62.315	62.293	62.317	62.409	62.327	0.0469
5	62.400	62.375	62.295	62.272	62.372	62.343	0.0558
6	62.372	62.275	62.315	62.372	62.302	62.327	0.0434
7	62.297	62.303	62.337	62.392	62.344	62.335	0.0381
8	62.325	62.362	62.351	62.371	62.397	62.361	0.0264
9	62.327	62.297	62.318	62.342	62.318	62.320	0.0163
10	62.297	62.325	62.303	62.307	62.333	62.313	0.0153
11	62.315	62.366	62.308	62.318	62.319	62.325	0.0232
12	62.297	62.322	62.344	62.342	62.313	62.324	0.0198
13	62.375	62.287	62.362	62.319	62.382	62.345	0.0406
14	62.317	62.321	62.297	62.372	62.319	62.325	0.0279
15	62.299	62.307	62.383	62.341	62.394	62.345	0.0431
16	62.308	62.319	62.344	62.319	62.378	62.334	0.0281
17	62.319	62.357	62.277	62.315	62.295	62.313	0.0300
18	62.333	62.362	62.292	62.327	62.314	62.326	0.0257
19	62.313	62.387	62.315	62.318	62.341	62.335	0.0313
20	62.375	62.321	62.354	62.342	62.375	62.353	0.0230
21	62.399	62.308	62.292	62.372	62.299	62.334	0.0483
22	62.309	62.403	62.318	62.295	62.317	62.328	0.0427
23	62.293	62.293	62.342	62.315	62.349	62.318	0.0264
24	62.388	62.308	62.315	62.392	62.303	62.341	0.0448
25	62.324	62.318	62.315	62.295	62.319	62.314	0.0111
						$\bar{\bar{X}} = 62.3256$	
						$\bar{\bar{S}} = 0.0361$	

Gráfica *p* para la fracción de artículos defectuosos

Cualquier artículo fabricado puede tener varias características que son importantes y deben ser examinadas por un inspector. Sin embargo, todo el procedimiento se enfoca aquí en una sola característica. Suponga que para todos los artículos la probabilidad de encontrar uno defectuoso es *p*, y que todos los artículos se producen de forma independiente. Entonces, en una muestra aleatoria de *n* artículos producidos, con *X* como el número de artículos defectuosos, tenemos

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n - x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Como se podría suponer, la media y varianza de la variable aleatoria binomial desempeñarán un papel importante en el desarrollo de la gráfica de control. El lector debería recordar que

$$E(X) = np \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

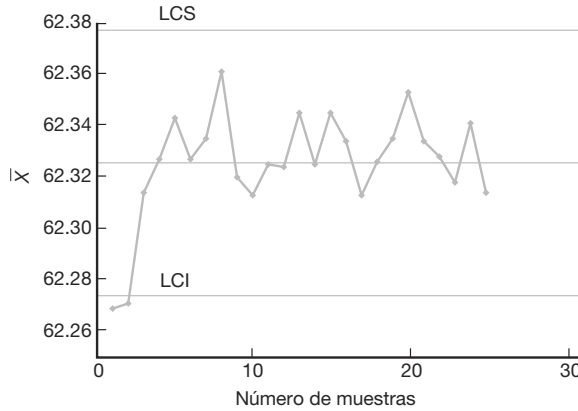


Figura 17.7: Gráfica  $\bar{X}$  con límites de control establecidos con los datos del ejemplo 17.2.

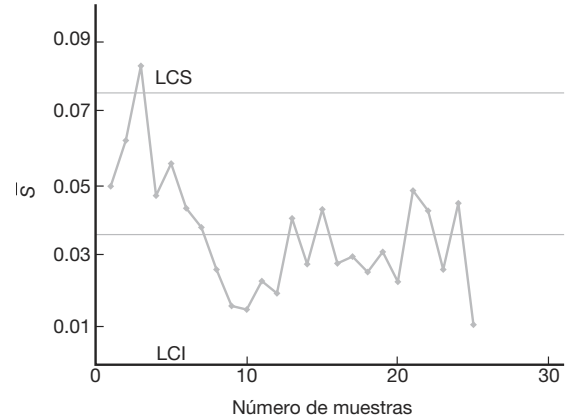


Figura 17.8: Gráfica  $\bar{S}$  con límites de control establecidos con los datos del ejemplo 17.2.

Un estimador no sesgado de  $p$  es la **fracción de defectuosos** o la **proporción de defectuosos**,  $\hat{p}$ , donde

$$\hat{p} = \frac{\text{número de defectuosos en la muestra de tamaño } n}{n}.$$

Como en el caso de las gráficas de control de variables, las propiedades de distribución de  $p$  son importantes para la creación de la gráfica de control. Sabemos que

$$E(\hat{p}) = p, \quad \text{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Aquí aplicamos los mismos principios  $3\sigma$  que utilizamos para las gráficas de variables. Supongamos inicialmente que conocemos  $p$ . Entonces, la estructura de las gráficas de control implica utilizar límites  $3\sigma$  con

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

De esta manera, los límites son

$$\text{LCI} = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad \text{LCS} = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

con el proceso considerado bajo control cuando los valores  $\hat{p}$  de la muestra caen dentro de los límites de control.

En general, por supuesto, no se conoce el valor de  $p$  y se debe estimar a partir de un conjunto base de muestras de forma muy similar al caso de  $\mu$  y  $\sigma$  en las gráficas de variables. Suponga que hay  $m$  muestras preliminares de tamaño  $n$ . Para una muestra dada, cada una de las  $n$  observaciones se reporta como “defectuosa” o “no defectuosa”. El estimador no sesgado evidente para  $p$  que se utiliza en la gráfica de control es

$$\bar{p} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{p}_i,$$

donde  $\hat{p}_i$  es la proporción de artículos defectuosos en la  $i$ -ésima muestra. Como resultado, los límites de control son


$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}, \quad \text{línea central} = \bar{p}, \quad LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}.$$

**Ejemplo 17.3:** Considere los datos que se presentan en la tabla 17.3 sobre el número de componentes electrónicos defectuosos en muestras de tamaño 50. Se tomaron 20 muestras con la finalidad de establecer valores preliminares para la gráfica de control. Las gráficas de control determinadas por este periodo preliminar tendrán una línea central  $\hat{p} = 0.088$  y límites de control

$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{50}} = -0.0322 \quad \text{y} \quad LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{50}} = 0.2082.$$

Tabla 17.3: Datos para el ejemplo 17.3 que permiten establecer límites de control en gráficas  $p$ , con muestras de tamaño 50

Muestra	Número de componentes defectuosos	Fracción de defectuosos $\hat{p}_i$
1	8	0.16
2	6	0.12
3	5	0.10
4	7	0.14
5	2	0.04
6	5	0.10
7	3	0.06
8	8	0.16
9	4	0.08
10	4	0.08
11	3	0.06
12	1	0.02
13	5	0.10
14	4	0.08
15	4	0.08
16	2	0.04
17	3	0.06
18	5	0.10
19	6	0.12
20	3	0.06
		$\bar{p} = 0.088$

Evidentemente, con un valor calculado negativo, el LCI se ajusta a cero. A partir de los valores de los límites de control al parecer el proceso está bajo control durante este periodo preliminar. 

### Selección del tamaño de la muestra para la gráfica $p$

La elección del tamaño de la muestra para la gráfica  $p$  de atributos incluye los mismos tipos generales de consideraciones que los de la gráfica para variables. Se requiere un tamaño de la muestra tan grande como para tener una alta probabilidad de detectar una

condición fuera de control cuando, de hecho, ha ocurrido un cambio específico en  $p$ . No existe un *mejor método* para elegir el tamaño de la muestra. Sin embargo, Duncan (1986; véase la bibliografía) sugirió una aproximación razonable que consiste en elegir una  $n$  tal que haya 0.5 de probabilidades de detectar un cambio de una cantidad particular en  $p$ . La solución resultante para  $n$  es bastante simple. Suponga que se aplica la aproximación normal a la distribución binomial. Deseamos, siempre que la condición de  $p$  haya cambiado a, digamos,  $p_1 > p_0$ , que

$$P(\hat{p} \geq \text{LCS}) = P\left[Z \geq \frac{\text{LCS} - p_1}{\sqrt{p_1(1 - p_1)/n}}\right] = 0.5.$$

Como  $P(Z > 0) = 0.5$ , se establece

$$\frac{\text{LCS} - p_1}{\sqrt{p_1(1 - p_1)/n}} = 0.$$

Al sustituir,

$$p + 3\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} = \text{LCS},$$

tenemos

$$(p - p_1) + 3\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} = 0.$$

Ahora podemos calcular  $n$ , el tamaño de cada muestra:

$$n = \frac{9}{\Delta^2} p(1 - p),$$

donde, desde luego,  $\Delta$  es el “cambio” en el valor de  $p$ , y  $p$  es la probabilidad de un artículo defectuoso sobre la que se basan los límites de control. Sin embargo, si las gráficas de control se basan en límites  $k\sigma$ , entonces

$$n = \frac{k^2}{\Delta^2} p(1 - p).$$

**Ejemplo 17.4:** Suponga que se diseña una gráfica de control de calidad de atributos con un valor de  $p = 0.01$  para la probabilidad de tener bajo control un artículo defectuoso. ¿Cuál es el tamaño de la muestra por subgrupo que produce una probabilidad de 0.5 de que se detecte un cambio en el proceso para  $p = p_1 = 0.05$ ? La gráfica  $p$  resultante incluirá límites  $3\sigma$ .

**Solución:** Aquí tenemos  $\Delta = 0.04$ . El tamaño adecuado de la muestra es

$$n = \frac{9}{(0.04)^2} (0.01)(0.99) = 55.69 \approx 56.$$



## Gráficas de control para artículos defectuosos (uso del modelo de Poisson)

En el procedimiento anterior supusimos que el artículo bajo consideración es uno que está defectuoso, es decir, que no funciona, o uno que no tiene defecto, en cuyo caso el artículo funciona y, por lo tanto, es aceptable para el consumidor. En muchas situaciones este método del artículo “defectuoso o no” es demasiado simplista. Las unidades pueden contener defectos o no cumplir con las especificaciones, y aun así funcionar bastante bien para el consumidor. En realidad, en este caso sería importante ejercer control sobre el *número de defectos* o *número de artículos que no cumplen las especificaciones*. Este tipo de control de calidad tiene aplicación cuando las unidades no son simplistas ni grandes. Por ejemplo, el número de defectos puede ser muy útil como objeto de control cuando el artículo o unidad es, digamos, una computadora personal. Otro ejemplo es una unidad definida por 50 pies de tubería fabricada, donde el número de soldaduras defectuosas es el objeto del control de calidad; el número de defectos en 50 pies de alfombra fabricada o el número de “burbujas” en una hoja grande de vidrio fabricado.

A partir de lo aquí descrito queda claro que en este caso no es apropiada la distribución binomial. El número total de artículos que no cumplen las especificaciones en una unidad o el número promedio por unidad se podría usar como la medida para la gráfica de control. A menudo se supone que el número de artículos que no cumplen las especificaciones en una muestra tiene una distribución de Poisson. A este tipo de gráfica con frecuencia se le llama **gráfica C**.

Suponga que el número de defectos  $X$  en una unidad de producto tiene una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ . (Aquí  $t = 1$  para el modelo de Poisson). Recuerde que para la distribución de Poisson,

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Aquí, la variable aleatoria  $X$  es el número de artículos que no cumplen las especificaciones. En el capítulo 5 vimos que tanto la media como la varianza de la variable aleatoria de Poisson son  $\lambda$ . Por consiguiente, si la gráfica de control de calidad se estructurara de acuerdo con los límites  $3\sigma$  acostumbrados, si conociéramos  $\lambda$  tendríamos,

$$LCS = \lambda + 3\sqrt{\lambda}, \quad \text{línea central} = \lambda, \quad LCI = \lambda - 3\sqrt{\lambda}.$$

Como de costumbre,  $\lambda$  a menudo debe provenir de un estimador de los datos. Un estimado no sesgado de  $\lambda$  es el número *promedio* de artículos que no cumplen las especificaciones por muestra. Este estimado se denota mediante  $\hat{\lambda}$ . Así, la gráfica de control tiene los límites

$$LCS = \hat{\lambda} + 3\sqrt{\hat{\lambda}}, \quad \text{línea central} = \hat{\lambda}, \quad LCI = \hat{\lambda} - 3\sqrt{\hat{\lambda}}.$$

**Ejemplo 17.5:** La tabla 17.4 representa el número de defectos en 20 muestras sucesivas de rollos de hoja metálica, cada uno con 100 pies de largo. Para controlar el número de defectos en tales muestras se debe desarrollar una gráfica de control a partir de estos datos preliminares. El estimado del parámetro de Poisson  $\lambda$  es dado por  $\hat{\lambda} = 5.95$ . Como resultado, los límites de control sugeridos por estos datos preliminares son

$$LCS = \hat{\lambda} + 3\sqrt{\hat{\lambda}} = 13.2678 \quad \text{y} \quad LCI = \hat{\lambda} - 3\sqrt{\hat{\lambda}} = -1.3678,$$

donde LCI se iguala a cero.



Tabla 17.4: Datos para el ejemplo 17.5; el control implica el número de defectos en rollos de hojas metálicas

Número de muestra	Número de defectos	Número de muestra	Número de defectos
1	8	11	3
2	7	12	7
3	5	13	5
4	4	14	9
5	4	15	7
6	7	16	7
7	6	17	8
8	4	18	6
9	5	19	7
10	6	20	4
		Prom. 5.95	

La figura 17.9 presenta una gráfica de los datos preliminares con los límites de control.

La tabla 17.5 incluye datos adicionales tomados del proceso de producción. Para cada muestra se inspeccionó la unidad en la que se basó la gráfica, a saber, 100 pies del metal. Se incluye la información de 20 muestras. La figura 17.10 muestra una gráfica de los datos adicionales de producción. Es evidente que el proceso está bajo control, o al menos lo estaba en el periodo en el que se tomaron los datos. ■

Tabla 17.5: Datos adicionales del proceso de producción del ejemplo 17.5

Número de muestra	Número de defectos	Número de muestra	Número de defectos
1	3	11	7
2	5	12	5
3	8	13	9
4	5	14	4
5	8	15	6
6	4	16	5
7	3	17	3
8	6	18	2
9	5	19	1
10	2	20	6

En el ejemplo 17.5 dejamos muy claro que la unidad de muestreo o de inspección son 100 pies de metal. En muchos casos en los que el artículo es específico, como en el caso de una computadora personal o el de un tipo específico de dispositivo electrónico, la unidad de inspección podría ser un *conjunto de artículos*. Por ejemplo, el analista decide utilizar 10 computadoras en cada subgrupo y de esta forma observar un conteo del número total de defectos encontrados. Por consiguiente, la muestra preliminar para construir la gráfica de control implica utilizar varias muestras, cada una de 10 computadoras. La elección del tamaño de la muestra puede depender de muchos factores. A menudo deseamos un tamaño de la muestra que asegure un LCI positivo.

El analista podría utilizar el número promedio de defectos por unidad de muestreo como la medida básica de la gráfica de control. Por ejemplo, para el caso de la compu-

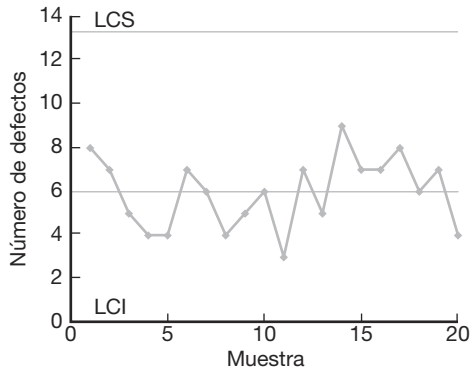


Figura 17.9: Datos preliminares representados en la gráfica de control para el ejemplo 17.5.

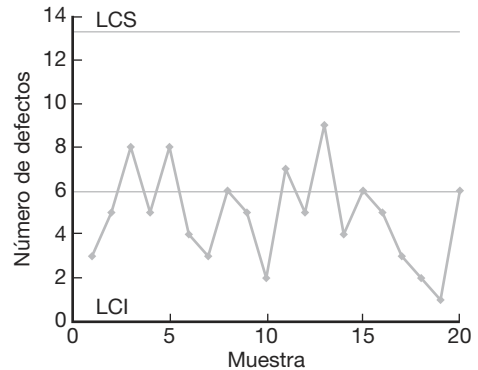


Figura 17.10: Datos adicionales de producción para el ejemplo 17.5.

tadora personal, sea la variable aleatoria el número total de defectos

$$U = \frac{\text{número total de defectos}}{n}$$

que se mide para cada muestra de, digamos,  $n = 10$ . Si suponemos que el número de defectos por unidad de muestreo es de Poisson con parámetro  $\lambda$ , podemos utilizar el método de las funciones generadoras de momento para demostrar que  $U$  es una variable aleatoria de Poisson (véase el ejercicio de repaso 17.1). De esta manera, la gráfica de control para esta situación se caracteriza por lo siguiente:

$$\text{LCS} = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}, \quad \text{línea central} = \bar{U}, \quad \text{LCI} = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}.$$

Aquí, desde luego,  $\bar{U}$  es el promedio de los valores  $U$  en el conjunto de datos preliminares o base. El término  $\bar{U}/n$  se deriva del resultado que

$$E(U) = \lambda, \quad \text{Var}(U) = \frac{\lambda}{n},$$

y por ello  $\bar{U}$  es un estimado no sesgado de  $E(U) = \lambda$  y  $\bar{U}/n$  es un estimado no sesgado de  $\text{Var}(U) = \lambda/n$ . Este tipo de gráfica de control a menudo se denomina **gráfica  $U$** .

En esta sección basamos toda la explicación de las gráficas de control en el modelo de probabilidad de Poisson. Este modelo se ha utilizado en combinación con el concepto  $3\sigma$ . Como explicamos antes en este capítulo, el concepto de límites  $3\sigma$  tiene sus raíces en la aproximación normal, aunque muchos usuarios consideran que el concepto funciona bien como herramienta pragmática incluso si la normalidad no es siquiera aproximadamente correcta. La dificultad, desde luego, radica en el hecho de que, en ausencia de normalidad, no es posible controlar la probabilidad de una especificación incorrecta de un estado fuera de control. En el caso del modelo de Poisson, cuando  $\lambda$  es pequeña la distribución es bastante asimétrica, una condición que puede producir resultados indeseables si se utiliza el método  $3\sigma$ .

## 17.6 Gráficas de control de cusum

La desventaja de las gráficas de control similares a las de Shewhart, que se explicaron y ejemplificaron en las secciones anteriores, radica en su incapacidad para detectar pequeños cambios en la media. Un mecanismo de control de calidad que ha recibido mucha atención en la literatura estadística y que se ha utilizado extensamente en la industria es la **gráfica de suma acumulada (cusum)**. El método de la gráfica de suma acumulada es sencillo y, por lo tanto, atractivo. Para el lector debe ser evidente por qué es más sensible a pequeños cambios en la media. Considere una gráfica de control para la media con un nivel de referencia establecido en el valor  $W$ . Considere las observaciones particulares  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . Las primeras cusum  $r$  son

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1 - W \\ S_2 &= S_1 + (X_2 - W) \\ S_3 &= S_2 + (X_3 - W) \\ &\vdots \\ S_r &= S_{r-1} + (X_r - W). \end{aligned}$$

Es evidente que la cusum es simplemente la acumulación de las diferencias del nivel de referencia. Es decir,

$$S_k = \sum_{i=1}^k (X_i - W), \quad k = 1, 2, \dots$$

La gráfica cusum es, entonces, una gráfica de  $S_k$  contra el tiempo.

Suponga que consideramos que el nivel de referencia  $W$  es un valor aceptable de la media  $\mu$ . Salta a la vista que, si no hay cambio en  $\mu$ , la gráfica cusum debería ser aproximadamente horizontal, con algunas fluctuaciones menores balanceadas alrededor de cero. Ahora, si sólo hay un cambio moderado en la media, debe resultar un cambio más o menos grande en la *pendiente* de la gráfica cusum, dado que cada nueva observación tiene la probabilidad de contribuir a un cambio y la medida que se grafica acumula esos cambios. Desde luego, la señal de que la media ha cambiado reside en la naturaleza de la pendiente de la gráfica cusum. El objetivo de la gráfica es detectar cambios que se alejan del nivel de referencia. Una pendiente diferente de cero (en cualquier dirección) representa un cambio a partir del nivel de referencia. Una pendiente positiva indica un aumento en la media por arriba del nivel de referencia, en tanto que una pendiente negativa señala una disminución.

Las gráficas cusum a menudo se diseñan con un *nivel de calidad aceptable* definido (NCA) y un *nivel de calidad rechazable* (NCR) preestablecido por el usuario. Ambos representan valores de la media. Se podría considerar que éstos desempeñan papeles similares a los de las medias nula y alternativa en la prueba de hipótesis. Considere una situación en la que el analista desea detectar un aumento en el valor de la media del proceso. Usaremos la notación  $\mu_0$  para NCA y  $\mu_1$  para NCR, y  $\mu_1 > \mu_0$ . El nivel de referencia se fija ahora en

$$W = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}.$$

Los valores de  $S_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) tendrán una pendiente negativa si la media del proceso está en  $\mu_0$  y una pendiente positiva si la media del proceso está en  $\mu_1$ .

### Regla de decisión para las gráficas cusum

Como antes se expuso, la pendiente de la gráfica cusum proporciona la señal de acción para el analista de control de calidad. La regla de decisión exige tomar medidas si, en el  $r$ -ésimo periodo de muestreo,

$$d_r > h,$$

donde  $h$  es un valor preestablecido que se denomina **longitud del intervalo de decisión** y

$$d_r = S_r - \min_{1 \leq i \leq r-1} S_i.$$

En otras palabras, se toman medidas si los datos revelan que el valor de la cusum real excede en una cantidad específica al valor previo de la cusum más pequeño.

Una modificación en la mecánica que se describió antes facilita el uso del método. Describimos un procedimiento que grafica las cusum y calcula las diferencias. Una modificación simple implica graficar las diferencias de manera directa y permitir la verificación contra el intervalo de decisión. La expresión general para  $d_r$  es muy sencilla. Para el procedimiento de cusum, con el que se detectan aumentos en la media,

$$d_r = \text{máx}[0, d_{r-1} + (X_r - W)].$$

La elección del valor de  $h$  es, por supuesto, muy importante. En este libro no se proporcionan los detalles que aparecen en la literatura que trata de esta elección. Para una exposición más completa se remite al lector a Ewan y Kemp, 1960, y a Montgomery, 2000b (véase la bibliografía). Una consideración importante es la **longitud esperada de la corrida**. De manera ideal, la longitud esperada de la corrida es bastante grande bajo  $\mu = \mu_0$  y muy pequeña cuando  $\mu = \mu_1$ .

### Ejercicios de repaso

**17.1** Considere  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , como variables aleatorias de Poisson independientes con parámetros  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Utilice las propiedades de las funciones generadoras de momento para demostrar que la variable aleatoria  $\sum_{i=1}^n X_i$  es una variable aleatoria de Poisson con media  $\sum_{i=1}^n \mu_i$  y varianza  $\sum_{i=1}^n \mu_i$ .

**17.2** Considere los siguientes datos tomados en subgrupos de tamaño 5. Los datos contienen 20 promedios y rangos del diámetro (en milímetros) de una parte importante de un motor. Elabore gráficas  $\bar{X}$  y  $R$ . ¿Parecería que el proceso está bajo control?

Muestra	$\bar{X}$	$R$
1	2.3972	0.0052
2	2.4191	0.0117
3	2.4215	0.0062
4	2.3917	0.0089
5	2.4151	0.0095
6	2.4027	0.0101
7	2.3921	0.0091
8	2.4171	0.0059

Muestra	$\bar{X}$	$R$
9	2.3951	0.0068
10	2.4215	0.0048
11	2.3887	0.0082
12	2.4107	0.0032
13	2.4009	0.0077
14	2.3992	0.0107
15	2.3889	0.0025
16	2.4107	0.0138
17	2.4109	0.0037
18	2.3944	0.0052
19	2.3951	0.0038
20	2.4015	0.0017

**17.3** En el ejercicio de repaso 17.2 suponga que el comprador fija especificaciones para la parte. Las especificaciones exigen que el diámetro caiga en el rango cubierto por  $2.40000 \pm 0.0100$  mm. ¿Qué proporción de unidades producidas por este proceso no cumplirán con las especificaciones?

**17.4** Para la situación del ejercicio de repaso 17.2 proporcione estimados numéricos de la media y de la desviación estándar del diámetro para la parte que se fabrica en el proceso.

**17.5** Considere los datos de la tabla 17.1. Suponga que se toman muestras adicionales de tamaño 5 y que se registra la resistencia a la tensión. El muestreo produce los siguientes resultados (en libras por pulgada cuadrada).

Muestra	$\bar{X}$	$R$
1	1511	22
2	1508	14
3	1522	11
4	1488	18
5	1519	6
6	1524	11
7	1519	8
8	1504	7
9	1500	8
10	1519	14

- a) Grafique los datos, utilice las gráficas  $\bar{X}$  y  $R$  para los datos preliminares de la tabla 17.1.  
 b) ¿Parecería que el proceso está bajo control? Si no es así, explique por qué.

**17.6** Considere un proceso bajo control con media  $\mu = 25$  y  $\sigma = 1.0$ . Suponga que se usan subgrupos de tamaño 5 con límites de control  $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$  y línea central en  $\mu$ . Suponga que ocurre un cambio en la media, y que la nueva media es  $\mu = 26.5$ .

- a) ¿Cuál es el número promedio de muestras requeridas (después del cambio) para detectar la situación fuera de control?  
 b) ¿Cuál es la desviación estándar del número de corridas requeridas?

**17.7** Considere la situación del ejemplo 17.2. Se toman los siguientes datos de muestras adicionales de tamaño 5. Grafique los valores  $\bar{X}$  y  $S$  sobre las gráficas  $\bar{X}$  y  $S$  que se dibujaron con los datos en la muestra preliminar. ¿Parecería que el proceso está bajo control? Explique su respuesta.

Muestra	$\bar{X}$	$S_i$
1	62.280	0.062
2	62.319	0.049
3	62.297	0.077
4	62.318	0.042
5	62.315	0.038
6	62.389	0.052
7	62.401	0.059
8	62.315	0.042
9	62.298	0.036
10	62.337	0.068

**17.8** Cada hora se toman muestras de tamaño 50 de un proceso que produce cierto tipo de artículo que se considera que está defectuoso o que no tiene defecto. Se toman 20 muestras.

- a) Construya una gráfica de control para controlar la proporción de artículos defectuosos.  
 b) ¿Parecería que el proceso está bajo control? Explique su respuesta.

Número de artículos defectuosos		Número de artículos defectuosos	
Muestra		Muestra	
1	4	11	2
2	3	12	4
3	5	13	1
4	3	14	2
5	2	15	3
6	2	16	1
7	2	17	1
8	1	18	2
9	4	19	3
10	3	20	1

**17.9** Para la situación del ejercicio de repaso 17.8 suponga que se reúnen los siguientes datos adicionales:

Muestra	Número de artículos defectuosos
1	3
2	4
3	2
4	2
5	3
6	1
7	3
8	5
9	7
10	7

¿Parecería que el proceso está bajo control? Explique su respuesta.

**17.10** Se aplica un programa de control de calidad para un proceso, donde se fabrican grandes placas de acero, con un interés especial por los defectos superficiales. El objetivo es establecer una gráfica de control de calidad para el número de defectos por placa. Los datos se presentan a continuación. Elabore la gráfica de control apropiada utilizando esta información. ¿Parecería que el proceso está bajo control?

Número de defectos		Número de defectos	
Muestra		Muestra	
1	4	11	1
2	2	12	2
3	1	13	2
4	3	14	3
5	0	15	1
6	4	16	4
7	5	17	3
8	3	18	2
9	2	19	1
10	2	20	3



## Capítulo 18

# Estadística bayesiana

---

### 18.1 Conceptos bayesianos

Los métodos clásicos de estimación que hemos estudiado hasta ahora se basan sólo en la información que brinda la muestra aleatoria. Estos métodos en esencia interpretan probabilidades como frecuencias relativas. Por ejemplo, para obtener un intervalo de confianza de 95% para  $\mu$ , interpretamos la aseveración

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

para afirmar que, en experimentos repetidos,  $Z$  caerá 95% de las veces entre  $-1.96$  y  $1.96$ . Dado que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

para una muestra normal con varianza conocida, el enunciado de probabilidad aquí significa que 95% de los intervalos aleatorios  $(\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n})$  contienen la media  $\mu$  verdadera. Otro enfoque de los métodos estadísticos de estimación se denomina **metodología bayesiana**. La idea principal del método proviene de la regla de Bayes, que examinamos en la sección 2.7. La diferencia fundamental entre el enfoque bayesiano y el clásico o frecuente es que en los conceptos bayesianos los parámetros se consideran variables aleatorias.

### Probabilidad subjetiva

La probabilidad subjetiva es el fundamento de los conceptos bayesianos. En el capítulo 2 analizamos dos acercamientos posibles a la probabilidad, es decir, el método de la frecuencia relativa y el método de la indiferencia. El primero determina una probabilidad como una consecuencia de experimentos repetidos. Por ejemplo, para decidir el porcentaje de tiros libres de un jugador de basquetbol, podemos registrar el número de tiros que hace y el número total de intentos que tal jugador ha hecho hasta el momento. La probabilidad de que este jugador acierte un tiro libre se puede calcular como el cociente de estos dos números. Por otro lado, si no sabemos acerca de cualquier sesgo en un dado, la probabilidad de que aparezca un 3 en el siguiente lanzamiento será de  $1/6$ . Dicho enfoque en la interpretación de la probabilidad se basa en la regla de la indiferencia.

Sin embargo, en muchas situaciones no es posible aplicar las interpretaciones de probabilidad anteriores. Por ejemplo, considere las siguientes preguntas: “¿Qué probabilidad hay de que llueva mañana?” “¿Qué tan probable es que el precio de estas acciones aumente a fin de mes?” y “¿Cuál es la probabilidad de que dos empresas se fusionen?”. Estas preguntas difícilmente se podrían interpretar mediante los enfoques anteriores, y las respuestas podrían ser diferentes para distintas personas. No obstante, este tipo de preguntas se plantean constantemente en la vida diaria y el enfoque utilizado para explicar esas probabilidades se llama *probabilidad subjetiva*, ya que refleja opiniones subjetivas.

## Perspectiva condicional

Recuerde que en los capítulos 9 a 17 todas las inferencias estadísticas se basaban en el hecho de que los parámetros se desconocen pero son cantidades fijas, excepto los revisados en la sección 9.14, en donde los parámetros se trataron como variables y los estimados de máxima verosimilitud (EMV) se calcularon con base en la muestra de datos observados. En la estadística bayesiana los parámetros no sólo se manejan como variables, como en los cálculos de EMV, sino que también se manejan como aleatorios.

Puesto que los datos observados son los únicos resultados experimentales para el profesionalista, la inferencia estadística se basa en los datos reales observados a partir de un experimento dado. A esta visión se le llama *perspectiva condicional*. Más aún, en los conceptos bayesianos, dado que los parámetros se manejan como aleatorios, es factible especificar una distribución de probabilidad, por lo general utilizando la *probabilidad subjetiva* para el parámetro. Este tipo de distribución se denomina *distribución previa* y comúnmente refleja la creencia previa del experimentador acerca del parámetro. En la perspectiva bayesiana, una vez que se realiza un experimento y se observan los datos, todo el conocimiento acerca de un parámetro está contenido en los datos reales observados, así como en la información previa.

## Aplicaciones bayesianas

Aunque la regla de Bayes se atribuye a Thomas Bayes, las aplicaciones bayesianas fueron utilizadas por primera vez por el científico francés Pierre Simon Laplace, quien publicó un artículo sobre el uso de la inferencia bayesiana en las proporciones binomiales desconocidas (para revisar la distribución binomial véase la sección 5.2).

A partir de la introducción del paquete para el cálculo de la cadena Markov de Monte Carlo (MCMC) para el análisis bayesiano a principios de la década de 1990, los métodos bayesianos se han vuelto cada vez más populares para los modelos estadísticos y el análisis de datos. Al mismo tiempo, la metodología que utiliza conceptos bayesianos ha avanzado mucho y se aplica en campos como la bioinformática, la biología, los negocios, la ingeniería, las ciencias ambientales y la ecología, así como en la ciencia de la vida y la salud, entre otros.

## 18.2 Inferencias bayesianas

Considere el problema de calcular un estimado puntual del parámetro  $\theta$  para la población con distribución  $f(x|\theta)$ , dado  $\theta$ . Denote con  $\pi(\theta)$  la distribución previa de  $\theta$ . Suponga que se observa una muestra aleatoria de tamaño  $n$  denotada con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



**Definición 18.1:** La distribución de  $\theta$ , dado  $\mathbf{x}$ , que se denomina distribución posterior, es dada por

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{g(\mathbf{x})},$$

donde  $g(\mathbf{x})$  es la distribución marginal de  $\mathbf{x}$ .

La distribución marginal de  $\mathbf{x}$  en la definición anterior se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta), & \theta \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) d\theta, & \theta \text{ es continua.} \end{cases}$$

**Ejemplo 18.1:** Suponga que la distribución previa para la proporción de artículos defectuosos que produce una máquina es

$p$	0.1	0.2
$\pi(p)$	0.6	0.4

Denote con  $x$  el número de artículos defectuosos en una muestra aleatoria de tamaño 2. Calcule la distribución de probabilidad posterior de  $p$ , dado que se observa  $x$ .

**Solución:** La variable aleatoria  $X$  sigue una distribución binomial

$$f(x|p) = b(x; 2, p) = \binom{2}{x} p^x q^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2.$$

La distribución marginal de  $x$  se puede calcular como

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x|0.1)\pi(0.1) + f(x|0.2)\pi(0.2) \\ &= \binom{2}{x} [(0.1)^x (0.9)^{2-x} (0.6) + (0.2)^x (0.8)^{2-x} (0.4)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $x = 0, 1, 2$  obtenemos las siguientes probabilidades marginales

$x$	0	1	2
$g(x)$	0.742	0.236	0.022

La probabilidad posterior de  $p = 0.1$ , dado  $x$ , es

$$\pi(0.1|x) = \frac{f(x|0.1)\pi(0.1)}{g(x)} = \frac{(0.1)^x (0.9)^{2-x} (0.6)}{(0.1)^x (0.9)^{2-x} (0.6) + (0.2)^x (0.8)^{2-x} (0.4)},$$

y  $\pi(0.2|x) = 1 - \pi(0.1|x)$ .

Suponga que se observa  $x = 0$ .

$$\pi(0.1|0) = \frac{f(0|0.1)\pi(0.1)}{g(0)} = \frac{(0.1)^0 (0.9)^{2-0} (0.6)}{0.742} = 0.6550,$$

y  $\pi(0.2|0) = 0.3450$ . Si se observa  $x = 1$ ,  $\pi(0.1|1) = 0.4576$  y  $\pi(0.2|1) = 0.5424$ . Por último,  $\pi(0.1|2) = 0.2727$  y  $\pi(0.2|2) = 0.7273$ . ▀

La distribución previa del ejemplo 18.1 es discreta, aunque el rango natural de  $p$  va de 0 a 1. Considere el siguiente ejemplo, en el cual tenemos una distribución previa que abarca el espacio completo de  $p$ .

**Ejemplo 18.2:** Suponga que la distribución previa de  $p$  es uniforme, es decir,  $\pi(p) = 1$ , para  $0 < p < 1$ . Use la misma variable aleatoria  $X$  que en el ejemplo 18.1 para calcular la distribución posterior de  $p$ .

**Solución:** Como en el ejemplo 18.1, tenemos

$$f(x|p) = b(x; 2, p) = \binom{2}{x} p^x q^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2.$$

La distribución marginal de  $x$  se puede calcular como

$$g(x) = \int_0^1 f(x|p) \pi(p) dp = \binom{2}{x} \int_0^1 p^x (1-p)^{2-x} dp.$$

La integral anterior se puede evaluar en cada  $x$  directamente como  $g(0) = 1/3$ ,  $g(1) = 1/3$  y  $g(2) = 1/3$ . Por lo tanto, la distribución posterior de  $p$ , dado  $x$ , es

$$\pi(p|x) = \frac{\binom{2}{x} p^x (1-p)^{2-x}}{1/3} = 3 \binom{2}{x} p^x (1-p)^{2-x}, \quad 0 < p < 1.$$

La distribución posterior anterior es en realidad una distribución beta (véase la sección 6.8) con parámetros  $\alpha = x + 1$  y  $\beta = 3 - x$ . Por lo tanto, si se observa  $x = 0$ , la distribución posterior de  $p$  es una distribución beta con parámetros  $(1, 3)$ . La media posterior es  $\mu = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$  y la varianza posterior es  $\sigma^2 = \frac{(1)(3)}{(1+3)^2 (1+3+1)} = \frac{3}{80}$ . ■

Si utilizamos la distribución posterior, podemos estimar directamente el (los) parámetro(s) en una población. Al calcular las distribuciones posteriores es muy útil estar familiarizado con las distribuciones que se estudiaron en los capítulos 5 y 6. Observe que en la definición 18.1 la *variable* en la distribución posterior es  $\theta$ , en tanto se proporcione  $\mathbf{x}$ . Por consiguiente, podemos tratar a  $g(\mathbf{x})$  como una constante cuando calculamos la distribución posterior de  $\theta$ . Entonces, la distribución posterior se puede expresar como

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta) \pi(\theta),$$

donde el símbolo “ $\propto$ ” significa *proporcional a*. En el cálculo que se hizo de la distribución posterior podríamos dejar los factores que no dependen de  $\theta$  fuera de la constante de normalización, esto es, la densidad marginal  $g(\mathbf{x})$ .

**Ejemplo 18.3** Suponga que las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes y provienen de una distribución de Poisson con media  $\lambda$ . Suponga que la distribución previa de  $\lambda$  es exponencial con media 1. Calcule la distribución posterior de  $\lambda$  cuando  $\bar{x} = 3$  con  $n = 10$ .

**Solución:** La función de densidad de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  es

$$f(\mathbf{x}|\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

y la distribución previa es

$$\pi(\theta) = e^{-\lambda}, \text{ para } \lambda > 0.$$

En consecuencia, utilizando la definición 18.1 se obtiene la siguiente distribución posterior de  $\lambda$

$$\pi(\lambda|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\lambda)\pi(\lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-\lambda} \propto e^{-(n+1)\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Si nos remitimos a la distribución gamma en la sección 6.6, concluimos que la distribución posterior de  $\lambda$  sigue una distribución gamma con parámetros  $1 + \sum_{i=1}^n x_i$  y  $\frac{1}{n+1}$ . Por

lo tanto, tenemos la media y la varianza posterior de  $\lambda$  como  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n+1}$  y  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{(n+1)^2}$ .

Así, cuando  $\bar{x} = 3$  con  $n = 10$ , tenemos  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$ . Por lo tanto, la distribución posterior de  $\lambda$  es una distribución gamma con parámetros 31 y 1/11. ─

A partir del ejemplo 18.3 observamos que en ocasiones es muy conveniente usar la técnica “proporcional a” para calcular la distribución posterior, especialmente cuando el resultado se puede formar para una distribución de uso común como las que se describen en los capítulos 5 y 6.

## Estimación puntual mediante la distribución posterior

Una vez que hemos derivado la distribución posterior, fácilmente podemos usar el resumen de la distribución posterior para hacer inferencias sobre los parámetros de la población. Por ejemplo, la media, la mediana y la moda posteriores son útiles para estimar el parámetro.

---

**Ejemplo 18.4:** Suponga que en el ejemplo 18.2 se observa  $x = 1$ . Determine la media y la moda posteriores.

**Solución:** Cuando  $x = 1$ , la distribución posterior de  $p$  se puede expresar como

$$\pi(p|1) = 6p(1-p), \quad \text{para } 0 < p < 1.$$

Para calcular la media de esta distribución necesitamos encontrar

$$\int_0^1 6p^2(1-p) dp = 6 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Para determinar la moda posterior se requiere obtener un valor  $p$  tal que se maximice la distribución posterior. Si tomamos la derivada de  $\pi(p)$  respecto a  $p$ , obtenemos  $6 - 12p$ . Al despejar  $p$  en  $6 - 12p = 0$ , obtenemos  $p = \frac{1}{2}$ . La segunda derivada es  $-12$ , la cual implica que la moda posterior se logra en  $p = \frac{1}{2}$ . ─

Los métodos bayesianos de estimación respecto a la media  $\mu$  de una población normal se basan en el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 18.5:** Si  $\bar{x}$  es la media de una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población normal con varianza conocida  $\sigma^2$ , y la distribución previa de la media poblacional es una distribución normal con media conocida  $\mu_0$  y varianza conocida  $\sigma_0^2$ , demuestre que la distribución

posterior de la media poblacional es también una distribución normal con media  $\mu^*$  y desviación estándar  $\sigma^*$ , donde

$$\mu^* = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \bar{x} + \frac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \mu_0 \quad \text{y} \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}}.$$

**Solución:** La función de densidad de la muestra es

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right],$$

para  $-\infty < x_i < \infty$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ , y la previa es

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right], \quad -\infty < \mu < \infty.$$

Entonces la distribución posterior de  $\mu$  es

$$\begin{aligned} \pi(\mu | \mathbf{x}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 + \left( \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(\mu - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

debido a

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$$

de la sección 8.5. Al completar los cuadrados para  $\mu$  se obtiene la distribución posterior

$$\pi(\mu | \mathbf{x}) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu - \mu^*}{\sigma^*} \right)^2 \right],$$

donde

$$\mu^* = \frac{n\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}, \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}}.$$

Ésta es una distribución normal con media  $\mu^*$  y desviación estándar  $\sigma^*$ . ■

El teorema del límite central nos permite utilizar el ejemplo 18.5 también cuando seleccionamos muestras aleatorias suficientemente grandes ( $n \geq 30$  para muchos casos de experimentación en ingeniería), a partir de poblaciones no normales (la distribución no dista mucho de ser simétrica), y cuando la distribución previa de la media es aproximadamente normal.

Resulta pertinente hacer algunos comentarios acerca del ejemplo 18.5. La media posterior  $\mu^*$  también se puede escribir como

$$\mu^* = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \bar{x} + \frac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n} \mu_0,$$

que es el promedio ponderado de la media muestral  $\bar{x}$  y la media previa  $\mu_0$ . Como ambos coeficientes están entre 0 y 1 y se suman a 1, la media posterior  $\mu^*$  siempre se encuentra

entre  $\bar{x}$  y  $\mu_0$ . Esto significa que tanto  $\bar{x}$  como  $\mu_0$  influyen en la estimación posterior de  $\mu$ . Además, la ponderación de  $\bar{x}$  depende de la varianza previa, así como de la varianza de la media muestral. Para un problema con una muestra grande ( $n \rightarrow \infty$ ), la media posterior  $\mu^* \rightarrow \bar{x}$ . Esto significa que la media previa no desempeña ningún papel en la estimación de la media poblacional  $\mu$  utilizando la distribución posterior. Esto es muy razonable, puesto que indica que cuando una cantidad de datos es sustancial, la información a partir de los datos dominará la información de  $\mu$  proporcionada por la previa. Por otro lado, cuando la varianza previa es grande ( $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$ ), la media posterior  $\mu^*$  también va hacia  $\bar{x}$ . Observe que para una distribución normal, cuanto mayor es la varianza, más plana será la función de densidad. El carácter plano de la distribución normal en este caso significa que casi no hay información previa subjetiva disponible del parámetro  $\mu$  antes de reunir los datos. Por lo tanto, es razonable que la estimación posterior  $\mu^*$  sólo dependa del valor de los datos de  $\bar{x}$ .

Ahora considere la desviación estándar posterior  $\sigma^*$ . Este valor también se escribe como

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \sigma^2 / n}{\sigma_0^2 + \sigma^2 / n}}.$$

Es evidente que el valor  $\sigma^*$  es menor que  $\sigma_0$  y que  $\sigma/\sqrt{n}$ , la desviación estándar previa y la desviación estándar de  $\bar{x}$ , respectivamente. Esto sugiere que la estimación posterior es más precisa que la previa y que los datos muestrales. En consecuencia, la incorporación tanto de los datos como de la información previa produce una mejor información posterior que si se utiliza cualquiera de los datos o la información previa por sí solos. Esto es un fenómeno común en la inferencia bayesiana. Además, para calcular  $\mu^*$  y  $\sigma^*$  mediante las fórmulas del ejemplo 18.5 suponemos que se conoce  $\sigma^2$ . Como por lo general éste no es el caso, deberemos reemplazar  $\sigma^2$  por la varianza de la muestra  $s^2$  siempre que  $n \geq 30$ .

## Estimación del intervalo bayesiano

De manera similar al intervalo de confianza clásico, en el análisis bayesiano podemos calcular un intervalo bayesiano del  $100(1 - \alpha)\%$  empleando la distribución posterior.

**Definición 18.2:** El intervalo  $a < \theta < b$  se denomina **intervalo de Bayes** del  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\theta$  si

$$\int_{-\infty}^a \pi(\theta|x) d\theta = \int_b^{\infty} \pi(\theta|x) d\theta = \frac{\alpha}{2}.$$

Recuerde que, de acuerdo con el enfoque frecuentista, la probabilidad de un intervalo de confianza, digamos de 95%, se interpreta como una probabilidad de cobertura, esto significa que, si un experimento se repite una y otra vez (con considerables datos no observados), la probabilidad de que los intervalos calculados, de acuerdo con la regla, cubran el parámetro verdadero es de 95%. Sin embargo, en la interpretación del intervalo bayesiano, digamos para un intervalo de 95%, podemos decir que la probabilidad de que el parámetro desconocido caiga dentro del intervalo calculado (que sólo depende de los datos observados) es de 95%.

**Ejemplo 18.6:** Suponga que  $X \sim b(x; n, p)$  con  $n = 2$  conocida, y la distribución previa de  $p$  es uniforme  $\pi(p) = 1$  para  $0 < p < 1$ . Calcule el intervalo de Bayes de 95% para  $p$ .

**Solución:** Como en el ejemplo 18.2, cuando  $x = 0$  la distribución posterior es una distribución beta con parámetros 1 y 3, es decir,  $\pi(p|0) = 3(1-p)^2$ , para  $0 < p < 1$ . Por consiguiente, necesitamos despegar  $a$  y  $b$  utilizando la definición 18.2, lo que produce lo siguiente:

$$0.025 = \int_0^a 3(1-p)^2 dp = 1 - (1-a)^3$$

y

$$0.025 = \int_b^1 3(1-p)^2 dp = (1-b)^3.$$

Las soluciones a las ecuaciones anteriores dan como resultado  $a = 0.0084$  y  $b = 0.7076$ . Por lo tanto, la probabilidad de que  $p$  caiga dentro de  $(0.0084, 0.7076)$  es de 95%. ─

Para la población normal y el caso previo normal descrito en el ejemplo 18.5, la media posterior  $\mu^*$  es el estimado de Bayes de la media poblacional  $\mu$ , y se puede construir un **intervalo bayesiano** para  $\mu$  de  $100(1 - \alpha)\%$  calculando el intervalo

$$\mu^* - z_{\alpha/2}\sigma^* < \mu < \mu^* + z_{\alpha/2}\sigma^*,$$

que se centra en la media posterior y contiene  $100(1 - \alpha)\%$  de la probabilidad posterior.

**Ejemplo 18.7:** Una empresa de equipo eléctrico fabrica bombillas con una duración distribuida de forma aproximadamente normal y una desviación estándar de 100 horas. La experiencia previa nos conduce a creer que  $\mu$  es un valor de una variable aleatoria normal con una media  $\mu_0 = 800$  horas y una desviación estándar  $\sigma_0 = 10$  horas. Si una muestra aleatoria de 25 bombillas tiene una duración promedio de 780 horas, calcule un intervalo bayesiano de 95% para  $\mu$ .

**Solución:** De acuerdo con el ejemplo 18.5, la distribución posterior de la media también es una distribución normal con media

$$\mu^* = \frac{(25)(780)(10)^2 + (800)(100)^2}{(25)(10)^2 + (100)^2} = 796$$

y desviación estándar

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(10)^2(100)^2}{(25)(10)^2 + (100)^2}} = \sqrt{80}.$$

El intervalo bayesiano de 95% para  $\mu$  es dado entonces por

$$796 - 1.96\sqrt{80} < \mu < 796 + 1.96\sqrt{80},$$

o

$$778.5 < \mu < 813.5.$$

En consecuencia, estamos 95% seguros de que  $\mu$  estará entre 778.5 y 813.5.

Por otro lado, si desconocemos la información previa acerca de  $\mu$ , procedemos como en la sección 9.4 para construir el intervalo de confianza clásico de 95%.

$$780 - (1.96)\left(\frac{100}{\sqrt{25}}\right) < \mu < 780 + (1.96)\left(\frac{100}{\sqrt{25}}\right),$$

o  $740.8 < \mu < 819.2$ , el cual se ve que es más amplio que el intervalo bayesiano correspondiente. ─

## 18.3 Estimados bayesianos mediante la teoría de decisión

Con la metodología bayesiana se puede obtener la distribución posterior del parámetro. Los estimados bayesianos también se pueden derivar usando la distribución posterior y una función de pérdida cuando se incurre en una pérdida. Una función de pérdida es aquella que describe el costo de una decisión asociada con un suceso de interés. Aquí sólo se citan unas cuantas funciones de pérdida de uso común y sus estimados de Bayes asociados.

### Pérdida del cuadrado del error

**Definición 18.3:** La función de pérdida del cuadrado del error es

$$L(\theta, a) = (\theta - a)^2,$$

donde  $\theta$  es el parámetro (o estado natural) y  $a$  una acción (o estimado).

Un estimado de Bayes minimiza la pérdida posterior esperada dada en los datos muestrales observados.

**Teorema 18.1:** La media de la distribución posterior  $\pi(\theta|x)$ , denotada con  $\theta^*$ , es el **estimado de Bayes de  $\theta$**  bajo la función de pérdida del cuadrado del error.

**Ejemplo 18.8:** Calcule el estimado de Bayes de  $p$  para todos los valores de  $x$  en el ejemplo 18.1 cuando se utiliza la función de pérdida del cuadrado del error.

**Solución:** Cuando  $x = 0$ ,  $p^* = (0.1)(0.6550) + (0.2)(0.3450) = 0.1345$ .

Cuando  $x = 1$ ,  $p^* = (0.1)(0.4576) + (0.2)(0.5424) = 0.1542$ .

Cuando  $x = 2$ ,  $p^* = (0.1)(0.2727) + (0.2)(0.7273) = 0.1727$ .

Observe que el estimado clásico de  $p$  es  $\hat{p} = x/n = 0, 1/2$  y  $1$ , respectivamente, para los valores de  $x$  en  $0, 1$  y  $2$ . Estos estimados clásicos son muy diferentes de los estimados de Bayes correspondientes. ■

**Ejemplo 18.9:** Repita el ejemplo 18.8 en la situación del ejemplo 18.2.

**Solución:** Puesto que la distribución posterior de  $p$  es una distribución  $B(x + 1, 3 - x)$  (véase la sección 6.8 en la página 201), el estimado de Bayes de  $p$  es

$$p^* = E^{\pi(p|x)}(p) = 3 \binom{2}{x} \int_0^1 p^{x+1} (1-p)^{2-x} dp,$$

que produce  $p^* = 1/4$  para  $x = 0$ ,  $p^* = 1/2$  para  $x = 1$ , y  $p^* = 3/4$  para  $x = 2$ , respectivamente. Advierta que cuando se observa  $x = 1$ , el estimado de Bayes y el estimado clásico de  $\hat{p}$  son equivalentes. ■

Para la situación normal que se describe en el ejemplo 18.5 el estimado de Bayes de  $\mu$  bajo la pérdida del cuadrado del error será la media posterior  $\mu^*$ .

**Ejemplo 18.10:** Suponga que la distribución muestral de una variable aleatoria  $X$  es de Poisson con parámetro  $\lambda$ . Suponga que la distribución previa de  $\lambda$  sigue una distribución gamma con

parámetros  $(\alpha, \beta)$ . Calcule el estimado de Bayes de  $\lambda$  bajo la función de pérdida del cuadrado del error.

**Solución:** Si utilizamos el ejemplo 18.3, concluimos que la distribución posterior de  $\lambda$  sigue una distribución gamma con parámetros  $(x + \alpha, (1 + 1/\beta)^{-1})$ . Por medio del teorema 6.4 obtenemos la media posterior

$$\hat{\lambda} = \frac{x + \alpha}{1 + 1/\beta}.$$

Como la media posterior es el estimado de Bayes bajo la pérdida del cuadrado del error,  $\hat{\lambda}$  es nuestro estimado de Bayes. ■

## Pérdida del error absoluto

La pérdida del cuadrado del error descrita antes es similar al concepto de los mínimos cuadrados que se analizó en relación con la regresión en los capítulos 11 y 12. En esta sección presentamos otra función de pérdida como sigue.

**Definición 18.4:** La **función de pérdida del error absoluto** se define como

$$L(\theta, a) = |\theta - a|,$$

donde  $\theta$  es el parámetro y  $a$  una acción.

**Teorema 18.2:** La mediana de la distribución posterior  $\pi(\theta|x)$ , denotada con  $\theta^*$ , es el **estimado de Bayes de  $\theta$**  bajo la función de pérdida del error absoluto.

**Ejemplo 18.11:** Bajo la pérdida del error absoluto calcule el estimador de Bayes para el ejemplo 18.9 cuando se observa  $x = 1$ .

**Solución:** Nuevamente, la distribución posterior de  $p$  es  $B(x + 1, 3 - x)$ . Cuando  $x = 1$  se trata de una distribución beta con densidad  $\pi(p|x = 1) = 6x(1 - x)$  para  $0 < x < 1$  y 0 en otro caso. La mediana de esta distribución es un valor de  $p^*$  tal que

$$\frac{1}{2} = \int_0^{p^*} 6p(1 - p) dp = 3p^{*2} - 2p^{*3},$$

que produce la respuesta  $p^* = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, el estimado de Bayes en este caso es 0.5.

## Ejercicios

**18.1** Estime la proporción de artículos defectuosos que produce la máquina del ejemplo 18.1 si la muestra aleatoria de tamaño 2 produce dos artículos defectuosos.

**18.2** Supongamos que la distribución previa para la proporción  $p$  de bebidas de una máquina despachadora que se derraman al servirse es

$p$	0.05	0.10	0.15
$\pi(p)$	0.3	0.5	0.2

Si dos de las siguientes 9 bebidas de esta máquina se derraman, calcule

- la distribución posterior para la proporción  $p$ ;
- el estimado de Bayes de  $p$ .



**18.3** Repita el ejercicio 18.2 cuando una de las siguientes 4 bebidas se derrama y la distribución uniforme previa es

$$\pi(p) = 10, \quad 0.05 < p < 0.15.$$

**18.4** Las llamadas de servicio llegan a un centro de mantenimiento de acuerdo con un proceso de Poisson con  $\lambda$  llamadas por minuto. Un conjunto de datos de 20 periodos de un minuto producen un promedio de 1.8 llamadas. Si la distribución previa de  $\lambda$  sigue una distribución exponencial con media 2, determine la distribución posterior de  $\lambda$ .

**18.5** Un estudio previo indica que el porcentaje de fumadores empedernidos,  $p$ , que tienen cáncer de pulmón sigue una distribución beta (véase la sección 6.8) con media de 70% y desviación estándar de 10%. Suponga que un nuevo conjunto de datos recolectado indica que 81 de 120 fumadores empedernidos tiene cáncer de pulmón.

- Determine la distribución posterior del porcentaje de fumadores empedernidos que tienen cáncer de pulmón combinando los nuevos datos y la información previa.
- ¿Cuál es la probabilidad posterior de que  $p$  sea mayor que 50%?

**18.6** El constructor de un nuevo complejo de condominios afirma que 3 de 5 compradores preferirá un departamento de dos recámaras, mientras que su banquero afirma que sería más correcto decir que 7 de 10 compradores preferirán uno de dos recámaras. En las predicciones previas de este tipo el banquero ha sido dos veces más confiable que el constructor. Si 12 de los siguientes 15 condominios que se venden en este complejo son de dos recámaras, calcule

- las probabilidades posteriores que se asocian con las afirmaciones del constructor y del banquero;
- un estimado puntual de la proporción de compradores que prefieren un condominio de dos recámaras.

**18.7** El tiempo en que se consume la primera etapa de un cohete es una variable aleatoria normal con una desviación estándar de 0.8 minutos. Suponga una distribución previa normal para  $\mu$  con una media de ocho minutos y una desviación estándar de 0.2 minutos. Si se lanzan 10 de estos cohetes y la primera etapa tiene un tiempo de consumo promedio de 9 minutos, calcule un intervalo bayesiano de 95% para  $\mu$ .

**18.8** La utilidad diaria de una máquina despachadora de jugos, ubicada en un edificio de oficinas, es un valor de una variable aleatoria normal, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  desconocidas. Desde luego, la media variará un poco de un edificio a otro, y el distribuidor considera que estas utilidades promedio diarias se pueden describir mejor usando una distribución normal con media

$\mu_0 = \$30.00$  y desviación estándar  $\sigma_0 = \$1.75$ . Si una de estas máquinas despachadoras de jugo, ubicada en cierto edificio, muestra una utilidad promedio diaria de  $\bar{x} = \$24.90$ , durante los primeros 30 días con una desviación estándar de  $s = \$2.10$ , calcule

- un estimado de Bayes de la utilidad promedio diaria verdadera para este edificio;
- un intervalo bayesiano de 95% de  $\mu$  para este edificio;
- la probabilidad de que la utilidad promedio diaria de la máquina en este edificio sea de entre \$24.00 y \$26.00.

**18.9** El departamento de matemáticas de una universidad grande diseña un examen de colocación para aplicarlo a los grupos de nuevo ingreso a primer año. Los miembros del departamento consideran que la calificación promedio para este examen variará de un grupo de primer año a otro. Esta variación de la calificación promedio del grupo se expresa de manera subjetiva mediante una distribución normal, con una media  $\mu_0 = 72$  y una varianza  $\sigma_0^2 = 5.76$ .

- ¿Qué probabilidad previa existe de que la calificación promedio real, que asigna el departamento para los alumnos de nuevo ingreso del siguiente año, caiga entre 71.8 y 73.4?
- Construya un intervalo bayesiano de 95% para  $\mu$  en el caso de que el examen se aplicara a una muestra aleatoria de 100 estudiantes de primer grado del siguiente grupo de nuevo ingreso y tuviera como resultado una calificación promedio de 70 con una varianza de 64.
- ¿Qué probabilidad posterior debería asignar el departamento al evento del inciso a)?

**18.10** Suponga que en el ejemplo 18.7 la empresa de equipo eléctrico no tiene suficiente información previa respecto a la duración media poblacional que le permita suponer una distribución normal para  $\mu$ . La empresa cree, sin embargo, que  $\mu$  seguramente estará entre 770 y 830 horas, y considera que una aproximación bayesiana más realista sería suponer una distribución previa

$$\pi(\mu) = \frac{1}{60}, \quad 770 < \mu < 830.$$

Si una muestra aleatoria de 25 bombillas tiene una vida promedio de 780 horas, siga los pasos de la demostración del ejemplo 18.5 para encontrar la distribución posterior.

$$\pi(\mu \mid x_1, x_2, \dots, x_{25}).$$

**18.11** Suponga que el tiempo  $T$  antes de que falle cierta bisagra es una variable aleatoria exponencial con densidad de probabilidad

$$f(t) = \theta e^{-\theta t}, \quad t > 0.$$

Por experiencia, nos inclinamos a pensar que  $\theta$  es un valor de una variable aleatoria exponencial con densidad de probabilidad

$$\pi(\theta) = 2e^{-2\theta}, \quad \theta > 0.$$

Si tenemos una muestra de  $n$  observaciones de  $T$ , demuestre que la distribución posterior de  $\Theta$  es una distribución gamma

$$\alpha = n + 1 \quad \text{y} \quad \beta = \left( \sum_{i=1}^n t_i + 2 \right)^{-1}.$$

**18.12** Suponga que una muestra consta de 5, 6, 6, 7, 5, 6, 4, 9 y 3, y 6 proviene de una población de Poisson con media  $\lambda$ . Suponga que el parámetro  $\lambda$  sigue una distribución gamma con parámetros (3, 2). Bajo la función de pérdida del cuadrado del error, calcule el estimado de Bayes de  $\lambda$ .

**18.13** Una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución binomial negativa con parámetros  $k = 5$  y  $p$ , es decir,  $b^*(x; 5, p)$ . Además, se sabe que  $p$  sigue una distribución uniforme en el intervalo (0, 1). Calcule el es-

timado de Bayes de  $p$  bajo la función de pérdida del cuadrado del error.

**18.14** Una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución exponencial con media  $1/\beta$ . Suponga que la distribución previa de  $\beta$  es otra distribución exponencial con media 2.5. Determine el estimado de Bayes de  $\beta$  bajo la función de pérdida del error absoluto.

**18.15** Una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una población con distribución uniforme (véase la sección 6.1) con  $\theta$  desconocida. Los datos se presentan a continuación:

0.13, 1.06, 1.65, 1.73, 0.95, 0.56, 2.14, 0.33, 1.22,  
0.20, 1.55, 1.18, 0.71, 0.01, 0.42, 1.03, 0.43, 1.02,  
0.83, 0.88

Suponga que la distribución previa de  $\theta$  tiene la densidad

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}, & \theta > 1, \\ 0, & \theta \leq 1. \end{cases}$$

Determine el estimador de Bayes bajo la función de pérdida del error absoluto.

# Bibliografía

- 1 Bartlett, M. S. y Kendall, D. G. (1946). "The Statistical Analysis of Variance Heterogeneity and Logarithmic Transformation", *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. **8**, 128-138.
- 2 Bowker, A. H. y Lieberman, G. J. (1972). *Engineering Statistics*, 2.a, ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 3 Box, G. E. P. (1988). "Signal to Noise Ratios, Performance Criteria and Transformations (with discussion)", *Technometrics*, **30**, 1-17.
- 4 Box, G. E. P. y Fung, C. A. (1986). "Studies in Quality Improvement: Minimizing Transmitted Variation by Parameter Design", Informe 8. University of Wisconsin-Madison, Center for Quality and Productivity Improvement.
- 5 Box, G. E. P., Hunter, W. G. y Hunter, J. S. (1978). *Statistics for Experimenters*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- 6 Brownlee, K. A. (1984). *Statistical Theory and Methodology: In Science and Engineering*, 2.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 7 Carroll, R. J. y Ruppert, D. (1988). *Transformation and Weighting in Regression*. Nueva York: Chapman y Hall.
- 8 Chatterjee, S., Hadi, A. S. y Price, B. (1999). *Regression Analysis by Example*, 3.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 9 Cook, R. D. y Weisberg, S. (1982). *Residuals and Influence in Regression*. Nueva York: Chapman y Hall.
- 10 Daniel, C. y Wood, F. S. (1999). *Fitting Equations to Data: Computer Analysis of Multifactor Data*, 2.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 11 Daniel, W. W. (1989). *Applied Nonparametric Statistics*, 2.a, ed. Belmont, Calif.: Wadsworth Publishing Company.
- 12 Devore, J. L. (2003). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, 6.a, ed., Belmont, Calif: Duxbury Press.
- 13 Dixon, W. J. (1983). *Introduction to Statistical Analysis*, 4.a, ed., Nueva York: McGraw-Hill.
- 14 Draper, N. R. y Smith, H. (1998). *Applied Regression Analysis*, 3.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.

- 15 Duncan, A. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*, 5.a, ed., Homewood, Ill.: Irwin.
- 16 Dyer, D. D., y Keating, J. P. (1980). "On the Determination of Critical Values for Bartlett's Test", *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 313-319.
- 17 Ewan, W. D. y Kemp, K. W. (1960). "Sampling Inspection of Continuous Processes with No Autocorrelation between Successive Results", *Biometrika*, **47**, 363-380.
- 18 Geary, R. C. (1947). "Testing for Normality", *Biometrika*, **34**, 209-242.
- 19 Gunst, R. F. y Mason, R. L. (1980). *Regression Analysis and Its Application: A Data-Oriented Approach*. Nueva York: Marcel Dekker.
- 20 Guttman, I., Wilks, S. S. y Hunter, J. S. (1971). *Introductory Engineering Statistics*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- 21 Harville, D. A. (1977). "Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems", *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 320-338.
- 22 Hicks, C. R. y Turner, K. V. (1999). *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*, 5.a, ed., Oxford: Oxford University Press.
- 23 Hoaglin, D. C., Mosteller, F. y Tukey, J. W. (1991). *Fundamentals of Exploratory Analysis of Variance*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- 24 Hocking, R. R. (1976). "The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression", *Biometrics*, **32**, 1-49.
- 25 Hodges, J. L. y Lehmann, E. L. (2005). *Basic Concepts of Probability and Statistics*, 2.a, ed. Filadelfia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- 26 Hoerl, A. E. y Wennard, R. W. (1970). "Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems", *Technometrics*, **12**, 55-67.
- 27 Hogg, R. V. y Ledolter, J. (1992). *Applied Statistics for Engineers and Physical Scientists*, 2.a, ed., Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 28 Hogg, R. V., McKean, J. W. y Craig, A. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*, 6.a, ed., Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 29 Hollander, M. y Wolfe, D. (1999). *Nonparametric Statistical Methods*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- 30 Johnson, N. L. y Leone, F. C. (1977). *Statistics and Experimental Design: In Engineering and the Physical Sciences*, 2.a, ed., Vols. I y II, Nueva York: John Wiley & Sons.
- 31 Kackar, R. (1985). "Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Methods", *Journal of Quality Technology*, **17**, 176-188.
- 32 Koopmans, L. H. (1987). *An Introduction to Contemporary Statistics*, 2.a, ed., Boston: Duxbury Press.
- 33 Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J. y Li, W. (2004). *Applied Linear Regression Models*, 5.a, ed., Nueva York: McGraw-Hill/Irwin.

- 34 Larsen, R. J. y Morris, M. L. (2000). *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, 3.a, ed., Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 35 Lehmann, E. L. y D'Abrera, H. J. M. (1998). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*, ed. rev., Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 36 Lentner, M. y Bishop, T. (1986). *Design and Analysis of Experiments*, 2.a, ed., Blacksburg, Va.: Valley Book Co.
- 37 Mallows, C. L. (1973). "Some Comments on  $C_p$ ", *Technometrics*, **15**, 661-675.
- 38 McClave, J. T., Dietrich, F. H. y Sincich, T. (1997). *Statistics*, 7.a, ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- 39 Montgomery, D. C. (2008a). *Design and Analysis of Experiments*, 7.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 40 Montgomery, D. C. (2008b). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 41 Mosteller, F. y Tukey, J. (1977). *Data Analysis and Regression*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.
- 42 Myers, R. H. (1990). *Classical and Modern Regression with Applications*, 2.a, ed., Boston: Duxbury Press.
- 43 Myers, R. H., Khuri, A. I. y Vining, G. G. (1992). "Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach", *The American Statistician*, **46**, 131-139.
- 44 Myers, R. H., Montgomery, D. C. y Anderson-Cook, C. M. (2009). *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, 3.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 45 Myers, R. H., Montgomery, D. C., Vining, G. G. y Robinson, T. J. (2008). *Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences*, 2.a, ed., Nueva York: John Wiley & Sons.
- 46 Noether, G. E. (1976). *Introduction to Statistics: A Nonparametric Approach*, 2.a, ed., Boston: Houghton Mifflin Company.
- 47 Olkin, I., Gleser, L. J. y Derman, C. (1994). *Probability Models and Applications*, 2.a, ed., Nueva York: Prentice Hall.
- 48 Ott, R. L. y Longnecker, M. T. (2000). *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis*, 5.a, ed., Boston: Duxbury Press.
- 49 Pacansky, J., England, C. D. y Wattman, R. (1986). "Infrared Spectroscopic Studies of Poly (perfluoropropyleneoxide) on Gold Substrate: A Classical Dispersion Analysis for the Refractive Index". *Applied Spectroscopy*, **40**, 8-16.
- 50 Plackett, R. L. y Burman, J. P. (1946). "The Design of Multifactor Experiments", *Biometrika*, **33**, 305-325.
- 51 Ross, S. M. (2002). *Introduction to Probability Models*, 9.a, ed., Nueva York: Academic Press, Inc.

- 52 Satterthwaite, F. E. (1946). "An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components", *Biometrics*, **2**, 110-114.
- 53 Schilling, E. G. y Nelson, P. R. (1976). "The Effect of Nonnormality on the Control Limits of X Charts", *Journal of Quality Technology*, **8**, 347-373.
- 54 Schmidt, S. R. y Launsby, R. G. (1991). *Understanding Industrial Designed Experiments*. Colorado Springs, Col. Air Academy Press.
- 55 Shoemaker, A. C., Tsui, K.-L. y Wu, C. F. J. (1991). "Economical Experimentation Methods for Robust Parameter Design", *Technometrics*, **33**, 415-428.
- 56 Snedecor, G. W. y Cochran, W. G. (1989). *Statistical Methods*, 8a ed., Allies, Iowa: The Iowa State University Press.
- 57 Steel, R. G. D., Torrie, J. H. y Dickey, D. A. (1996). *Principles and Procedures of Statistics: A Biometrical Approach*, 3.a, ed., Nueva York: McGraw-Hill.
- 58 Taguchi, G. (1991). *Introduction to Quality Engineering*. White Plains, N.Y.: Unipub/Kraus International.
- 59 Taguchi, G. y Wu, Y. (1985). *Introduction to Off-Line Quality Control*. Nagoya, Japan: Central Japan Quality Control Association.
- 60 Thompson, W. O. y Cady, F. B. (1973). *Proceedings of the University of Kentucky Conference on Regression with a Large Number of Predictor Variables*. Lexington, Ken.: University of Kentucky Press.
- 61 Tukey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.
- 62 Vining, G. G. y Myers, R. H. (1990). "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach", *Journal of Quality Technology*, **22**, 38-45.
- 63 Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M. y Sacks, J. (1990). "Computer Experiments for Quality Control by Parameter Design", *Journal of Quality Technology*, **22**, 15-22.
- 64 Winer, B. J. (1991). *Statistical Principles in Experimental Design*, 3.a, ed., Nueva York: McGraw-Hill.

# Apéndice A

## Tablas y demostraciones estadísticas

---

**Tabla A.1** Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0} b(x; n, p)$

$n$	$r$	$p$									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
1	0	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000	0.1000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400	0.0100
	1	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8400	0.7500	0.6400	0.5100	0.3600	0.1900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080	0.0010
	1	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.6480	0.5000	0.3520	0.2160	0.1040	0.0280
	2	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9360	0.8750	0.7840	0.6570	0.4880	0.2710
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.4752	0.3125	0.1792	0.0837	0.0272	0.0037
	2	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8208	0.6875	0.5248	0.3483	0.1808	0.0523
	3	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9744	0.9375	0.8704	0.7599	0.5904	0.3439
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.2333	0.1094	0.0410	0.0109	0.0016	0.0001
	2	0.9842	0.9011	0.8306	0.7443	0.5443	0.3438	0.1792	0.0705	0.0170	0.0013
	3	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8208	0.6563	0.4557	0.2557	0.0989	0.0159
	4	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9590	0.8906	0.7667	0.5798	0.3446	0.1143
	5	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9959	0.9844	0.9533	0.8824	0.7379	0.4686
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000	
	1	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.1586	0.0625	0.0188	0.0038	0.0004	0.0000
	2	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.4199	0.2266	0.0963	0.0288	0.0047	0.0002
	3	0.9973	0.9667	0.9294	0.8740	0.7102	0.5000	0.2898	0.1260	0.0333	0.0027
	4	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9037	0.7734	0.5801	0.3529	0.1480	0.0257
	5	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9812	0.9375	0.8414	0.6706	0.4233	0.1497
	6		1.0000	0.9999	0.9998	0.9984	0.9922	0.9720	0.9176	0.7903	0.5217
	7			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



**Tabla A.1** (continuación) Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0}^r b(x; n, p)$

<i>n</i>	<i>r</i>	<i>p</i>									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
<b>8</b>	<b>0</b>	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	
	<b>1</b>	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1064	0.0352	0.0085	0.0013	0.0001	
	<b>2</b>	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.3154	0.1445	0.0498	0.0113	0.0012	0.0000
	<b>3</b>	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.5941	0.3633	0.1737	0.0580	0.0104	0.0004
	<b>4</b>	0.9996	0.9896	0.9727	0.9420	0.8263	0.6367	0.4059	0.1941	0.0563	0.0050
	<b>5</b>	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9502	0.8555	0.6846	0.4482	0.2031	0.0381
	<b>6</b>		0.9999	0.9996	0.9987	0.9915	0.9648	0.8936	0.7447	0.4967	0.1869
	<b>7</b>		1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9832	0.9424	0.8322	0.5695
	<b>8</b>				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<b>9</b>	<b>0</b>	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0101	0.0020	0.0003	0.0000		
	<b>1</b>	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.0705	0.0195	0.0038	0.0004	0.0000	
	<b>2</b>	0.9470	0.7382	0.6007	0.4628	0.2318	0.0898	0.0250	0.0043	0.0003	0.0000
	<b>3</b>	0.9917	0.9144	0.8343	0.7297	0.4826	0.2539	0.0994	0.0253	0.0031	0.0001
	<b>4</b>	0.9991	0.9804	0.9511	0.9012	0.7334	0.5000	0.2666	0.0988	0.0196	0.0009
	<b>5</b>	0.9999	0.9969	0.9900	0.9747	0.9006	0.7461	0.5174	0.2703	0.0856	0.0083
	<b>6</b>	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9750	0.9102	0.7682	0.5372	0.2618	0.0530
	<b>7</b>		1.0000	0.9999	0.9996	0.9962	0.9805	0.9295	0.8040	0.5638	0.2252
	<b>8</b>			1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9899	0.9596	0.8658	0.6126
	<b>9</b>					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<b>10</b>	<b>0</b>	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000		
	<b>1</b>	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	
	<b>2</b>	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	
	<b>3</b>	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	<b>4</b>	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0473	0.0064	0.0001
	<b>5</b>	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	<b>6</b>	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	<b>7</b>		0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	<b>8</b>		1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	<b>9</b>				1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	<b>10</b>					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<b>11</b>	<b>0</b>	0.3138	0.0859	0.0422	0.0198	0.0036	0.0005	0.0000			
	<b>1</b>	0.6974	0.3221	0.1971	0.1130	0.0302	0.0059	0.0007	0.0000		
	<b>2</b>	0.9104	0.6174	0.4552	0.3127	0.1189	0.0327	0.0059	0.0006	0.0000	
	<b>3</b>	0.9815	0.8389	0.7133	0.5696	0.2963	0.1133	0.0293	0.0043	0.0002	
	<b>4</b>	0.9972	0.9496	0.8854	0.7897	0.5328	0.2744	0.0994	0.0216	0.0020	0.0000
	<b>5</b>	0.9997	0.9883	0.9657	0.9218	0.7535	0.5000	0.2465	0.0782	0.0117	0.0003
	<b>6</b>	1.0000	0.9980	0.9924	0.9784	0.9006	0.7256	0.4672	0.2103	0.0504	0.0028
	<b>7</b>		0.9998	0.9988	0.9957	0.9707	0.8867	0.7037	0.4304	0.1611	0.0185
	<b>8</b>		1.0000	0.9999	0.9994	0.9941	0.9673	0.8811	0.6873	0.3826	0.0896
	<b>9</b>			1.0000	1.0000	0.9993	0.9941	0.9698	0.8870	0.6779	0.3026
	<b>10</b>					1.0000	0.9995	0.9964	0.9802	0.9141	0.6862
	<b>11</b>						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

**Tabla A.1** (continuación) Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0}^r b(x; n, p)$

		$p$									
$n$	$r$	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
12	0	0.2824	0.0687	0.0317	0.0138	0.0022	0.0002	0.0000			
	1	0.6590	0.2749	0.1584	0.0850	0.0196	0.0032	0.0003	0.0000		
	2	0.8891	0.5583	0.3907	0.2528	0.0834	0.0193	0.0028	0.0002	0.0000	
	3	0.9744	0.7946	0.6488	0.4925	0.2253	0.0730	0.0153	0.0017	0.0001	
	4	0.9957	0.9274	0.8424	0.7237	0.4382	0.1938	0.0573	0.0095	0.0006	0.0000
	5	0.9995	0.9806	0.9456	0.8822	0.6652	0.3872	0.1582	0.0386	0.0039	0.0001
	6	0.9999	0.9961	0.9857	0.9614	0.8418	0.6128	0.3348	0.1178	0.0194	0.0005
	7	1.0000	0.9994	0.9972	0.9905	0.9427	0.8062	0.5618	0.2763	0.0726	0.0043
	8		0.9999	0.9996	0.9983	0.9847	0.9270	0.7747	0.5075	0.2054	0.0256
	9		1.0000	1.0000	0.9998	0.9972	0.9807	0.9166	0.7472	0.4417	0.1109
	10				1.0000	0.9997	0.9968	0.9804	0.9150	0.7251	0.3410
	11					1.0000	0.9998	0.9978	0.9862	0.9313	0.7176
12						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
13	0	0.2542	0.0550	0.0238	0.0097	0.0013	0.0001	0.0000			
	1	0.6213	0.2336	0.1267	0.0637	0.0126	0.0017	0.0001	0.0000		
	2	0.8661	0.5017	0.3326	0.2025	0.0579	0.0112	0.0013	0.0001		
	3	0.9658	0.7473	0.5843	0.4206	0.1686	0.0461	0.0078	0.0007	0.0000	
	4	0.9935	0.9009	0.7940	0.6543	0.3530	0.1334	0.0321	0.0040	0.0002	
	5	0.9991	0.9700	0.9198	0.8346	0.5744	0.2905	0.0977	0.0182	0.0012	0.0000
	6	0.9999	0.9930	0.9757	0.9376	0.7712	0.5000	0.2288	0.0624	0.0070	0.0001
	7	1.0000	0.9988	0.9944	0.9818	0.9023	0.7095	0.4256	0.1654	0.0300	0.0009
	8		0.9998	0.9990	0.9960	0.9679	0.8666	0.6470	0.3457	0.0991	0.0065
	9		1.0000	0.9999	0.9993	0.9922	0.9539	0.8314	0.5794	0.2527	0.0342
	10			1.0000	0.9999	0.9987	0.9888	0.9421	0.7975	0.4983	0.1339
	11				1.0000	0.9999	0.9983	0.9874	0.9363	0.7664	0.3787
	12					1.0000	0.9999	0.9987	0.9903	0.9450	0.7458
13						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
14	0	0.2288	0.0440	0.0178	0.0068	0.0008	0.0001	0.0000			
	1	0.5846	0.1979	0.1010	0.0475	0.0081	0.0009	0.0001			
	2	0.8416	0.4481	0.2811	0.1608	0.0398	0.0065	0.0006	0.0000		
	3	0.9559	0.6982	0.5213	0.3552	0.1243	0.0287	0.0039	0.0002		
	4	0.9908	0.8702	0.7415	0.5842	0.2793	0.0898	0.0175	0.0017	0.0000	
	5	0.9985	0.9561	0.8883	0.7805	0.4859	0.2120	0.0583	0.0083	0.0004	
	6	0.9998	0.9884	0.9617	0.9067	0.6925	0.3953	0.1501	0.0315	0.0024	0.0000
	7	1.0000	0.9976	0.9897	0.9685	0.8499	0.6047	0.3075	0.0933	0.0116	0.0002
	8		0.9996	0.9978	0.9917	0.9417	0.7880	0.5141	0.2195	0.0439	0.0015
	9		1.0000	0.9997	0.9983	0.9825	0.9102	0.7207	0.4158	0.1298	0.0092
	10			1.0000	0.9998	0.9961	0.9713	0.8757	0.6448	0.3018	0.0441
	11				1.0000	0.9994	0.9935	0.9602	0.8392	0.5519	0.1584
	12					0.9999	0.9991	0.9919	0.9525	0.8021	0.4154
	13					1.0000	0.9999	0.9992	0.9932	0.9560	0.7712
14						1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

**Tabla A.1** (continuación) Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0}^r b(x; n, p)$

<i>n</i>	<i>r</i>	<i>p</i>									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000				
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000			
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000		
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001		
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0093	0.0007	0.0000	
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0950	0.0152	0.0008	
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8		0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9		0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0022
	10		1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11			1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12				1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13					1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14						1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	0.1853	0.0281	0.0100	0.0033	0.0003	0.0000				
	1	0.5147	0.1407	0.0635	0.0261	0.0033	0.0003	0.0000			
	2	0.7892	0.3518	0.1971	0.0994	0.0183	0.0021	0.0001			
	3	0.9316	0.5981	0.4050	0.2459	0.0651	0.0106	0.0009	0.0000		
	4	0.9830	0.7982	0.6302	0.4499	0.1666	0.0384	0.0049	0.0003		
	5	0.9967	0.9183	0.8103	0.6598	0.3288	0.1051	0.0191	0.0016	0.0000	
	6	0.9995	0.9733	0.9204	0.8247	0.5272	0.2272	0.0583	0.0071	0.0002	
	7	0.9999	0.9930	0.9729	0.9256	0.7161	0.4018	0.1423	0.0257	0.0015	0.0000
	8	1.0000	0.9985	0.9925	0.9743	0.8577	0.5982	0.2839	0.0744	0.0070	0.0001
	9		0.9998	0.9984	0.9929	0.9417	0.7728	0.4728	0.1753	0.0267	0.0005
	10		1.0000	0.9997	0.9984	0.9809	0.8949	0.6712	0.3402	0.0817	0.0033
	11			1.0000	0.9997	0.9951	0.9616	0.8334	0.5501	0.2018	0.0170
	12				1.0000	0.9991	0.9894	0.9349	0.7541	0.4019	0.0684
	13					0.9999	0.9979	0.9817	0.9006	0.6482	0.2108
	14					1.0000	0.9997	0.9967	0.9739	0.8593	0.4853
	15						1.0000	0.9997	0.9967	0.9719	0.8147
	16							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

**Tabla A.1** (continuación) Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0}^r b(x; n, p)$

<i>n</i>	<i>r</i>	<i>p</i>									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
17	0	0.1668	0.0225	0.0075	0.0023	0.0002	0.0000				
	1	0.4818	0.1182	0.0501	0.0193	0.0021	0.0001	0.0000			
	2	0.7618	0.3096	0.1637	0.0774	0.0123	0.0012	0.0001			
	3	0.9174	0.5489	0.3530	0.2019	0.0464	0.0064	0.0005	0.0000		
	4	0.9779	0.7582	0.5739	0.3887	0.1260	0.0245	0.0025	0.0001		
	5	0.9953	0.8943	0.7653	0.5968	0.2639	0.0717	0.0106	0.0007	0.0000	
	6	0.9992	0.9623	0.8929	0.7752	0.4478	0.1662	0.0348	0.0032	0.0001	
	7	0.9999	0.9891	0.9598	0.8954	0.6405	0.3145	0.0919	0.0127	0.0005	
	8	1.0000	0.9974	0.9876	0.9597	0.8011	0.5000	0.1989	0.0403	0.0026	0.0000
	9		0.9995	0.9969	0.9873	0.9081	0.6855	0.3595	0.1046	0.0109	0.0001
	10		0.9999	0.9994	0.9968	0.9652	0.8338	0.5522	0.2248	0.0377	0.0008
	11		1.0000	0.9999	0.9993	0.9894	0.9283	0.7361	0.4032	0.1057	0.0047
	12			1.0000	0.9999	0.9975	0.9755	0.8740	0.6113	0.2418	0.0221
	13				1.0000	0.9995	0.9936	0.9536	0.7981	0.4511	0.0826
	14					0.9999	0.9988	0.9877	0.9226	0.6904	0.2382
	15					1.0000	0.9999	0.9979	0.9807	0.8818	0.5182
	16						1.0000	0.9998	0.9977	0.9775	0.8332
	17							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.1501	0.0180	0.0056	0.0016	0.0001	0.0000				
	1	0.4503	0.0991	0.0395	0.0142	0.0013	0.0001				
	2	0.7338	0.2713	0.1353	0.0600	0.0082	0.0007	0.0000			
	3	0.9018	0.5010	0.3057	0.1646	0.0328	0.0038	0.0002			
	4	0.9718	0.7164	0.5187	0.3327	0.0942	0.0154	0.0013	0.0000		
	5	0.9936	0.8671	0.7175	0.5344	0.2088	0.0481	0.0058	0.0003		
	6	0.9988	0.9487	0.8610	0.7217	0.3743	0.1189	0.0203	0.0014	0.0000	
	7	0.9998	0.9837	0.9431	0.8593	0.5634	0.2403	0.0576	0.0061	0.0002	
	8	1.0000	0.9957	0.9807	0.9404	0.7368	0.4073	0.1347	0.0210	0.0009	
	9		0.9991	0.9946	0.9790	0.8653	0.5927	0.2632	0.0596	0.0043	0.0000
	10		0.9998	0.9988	0.9939	0.9424	0.7597	0.4366	0.1407	0.0163	0.0002
	11		1.0000	0.9998	0.9986	0.9797	0.8811	0.6257	0.2783	0.0513	0.0012
	12			1.0000	0.9997	0.9942	0.9519	0.7912	0.4656	0.1329	0.0064
	13				1.0000	0.9987	0.9846	0.9058	0.6673	0.2836	0.0282
	14					0.9998	0.9962	0.9672	0.8354	0.4990	0.0982
	15					1.0000	0.9993	0.9918	0.9400	0.7287	0.2662
	16						0.9999	0.9987	0.9858	0.9009	0.5497
	17						1.0000	0.9999	0.9984	0.9820	0.8499
	18							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

**Tabla A.1** (*continuación*) Sumas de probabilidad binomial  $\sum_{x=0}^r b(x; n, p)$

<i>n</i>	<i>r</i>	<i>p</i>									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
19	0	0.1351	0.0144	0.0042	0.0011	0.0001					
	1	0.4203	0.0829	0.0310	0.0104	0.0008	0.0000				
	2	0.7054	0.2369	0.1113	0.0462	0.0055	0.0004	0.0000			
	3	0.8850	0.4551	0.2631	0.1332	0.0230	0.0022	0.0001			
	4	0.9648	0.6733	0.4654	0.2822	0.0696	0.0096	0.0006	0.0000		
	5	0.9914	0.8369	0.6678	0.4739	0.1629	0.0318	0.0031	0.0001		
	6	0.9983	0.9324	0.8251	0.6655	0.3081	0.0835	0.0116	0.0006		
	7	0.9997	0.9767	0.9225	0.8180	0.4878	0.1796	0.0352	0.0028	0.0000	
	8	1.0000	0.9933	0.9713	0.9161	0.6675	0.3238	0.0885	0.0105	0.0003	
	9		0.9984	0.9911	0.9674	0.8139	0.5000	0.1861	0.0326	0.0016	
	10		0.9997	0.9977	0.9895	0.9115	0.6762	0.3325	0.0839	0.0067	0.0000
	11		1.0000	0.9995	0.9972	0.9648	0.8204	0.5122	0.1820	0.0233	0.0003
	12			0.9999	0.9994	0.9884	0.9165	0.6919	0.3345	0.0676	0.0017
	13			1.0000	0.9999	0.9969	0.9682	0.8371	0.5261	0.1631	0.0086
	14				1.0000	0.9994	0.9904	0.9304	0.7178	0.3267	0.0352
	15					0.9999	0.9978	0.9770	0.8668	0.5449	0.1150
	16					1.0000	0.9996	0.9945	0.9538	0.7631	0.2946
	17						1.0000	0.9992	0.9896	0.9171	0.5797
	18							0.9999	0.9989	0.9856	0.8649
	19							1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000					
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000				
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002				
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0000			
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003			
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000		
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003		
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	
	10		0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11		0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12		1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13			1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14				1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15					0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16					1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17						0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18						1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19							1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20								1.0000	1.0000	1.0000



**Tabla A.2** (continuación) Sumas de probabilidad de Poisson  $\sum_{x=0} p(x; \mu)$

[illegible]





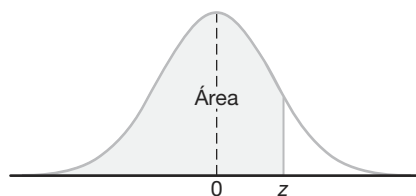


Tabla A.3 Áreas bajo la curva normal

$z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641



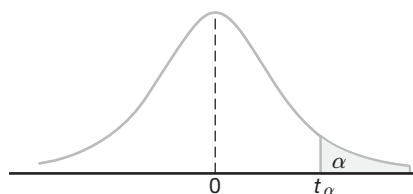


Tabla A.4 Valores críticos de la distribución  $t$

$\nu$	$\alpha$						
	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
$\infty$	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

**Tabla A.4** (continuación) Valores críticos de la distribución  $t$ 

$\nu$	$\alpha$						
	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0005
1	15.894	21.205	31.821	42.433	63.656	127.321	636.578
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.600
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.689
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.660
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
$\infty$	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.290

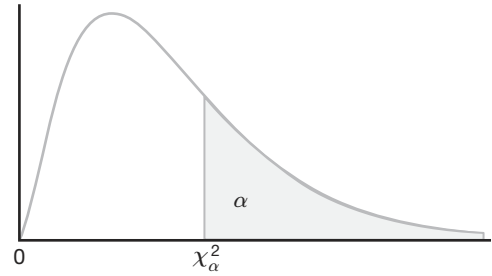
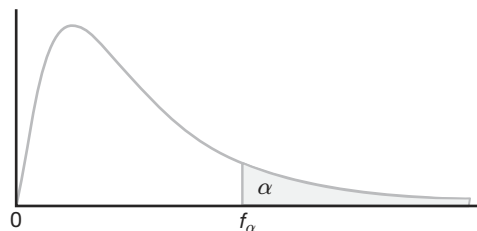


Tabla A.5 Valores críticos de la distribución chi cuadrada

$\nu$	$\alpha$									
	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.75	0.70	0.50
1	0.0 <sup>4</sup> 393	0.0 <sup>3</sup> 157	0.0 <sup>3</sup> 628	0.0 <sup>3</sup> 982	0.00393	0.0158	0.0642	0.102	0.148	0.455
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.575	0.713	1.386
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	1.213	1.424	2.366
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	1.923	2.195	3.357
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	2.675	3.000	4.351
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	5.348
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	6.346
8	1.344	1.647	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	7.344
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	8.343
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	7.267	9.342
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	10.341
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.041	8.634	9.299	9.926	12.340
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.037	11.721	14.339
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	11.912	12.624	15.338
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	12.792	13.531	16.338
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	13.675	14.440	17.338
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	14.562	15.352	18.338
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	15.452	16.266	19.337
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	16.344	17.182	20.337
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	17.240	18.101	21.337
23	9.260	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	17.187	18.137	19.021	22.337
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	19.037	19.943	23.337
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	19.939	20.867	24.337
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	20.843	21.792	25.336
27	11.808	12.878	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	21.749	22.719	26.336
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	22.657	23.647	27.336
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	23.567	24.577	28.336
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	24.478	25.508	29.336
40	20.707	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	33.66	34.872	39.335
50	27.991	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	42.942	44.313	49.335
60	35.534	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	50.641	52.294	53.809	59.335

**Tabla A.5** (continuación) Valores críticos de la distribución chi cuadrada

$\nu$	$\alpha$									
	0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588
11	12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264
12	14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909
13	15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736	25.471	27.688	29.819	34.527
14	16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.124
15	17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.698
16	18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252
17	19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.791
18	20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312
19	21.689	22.718	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.819
20	22.775	23.828	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.314
21	23.858	24.935	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.796
22	24.939	26.039	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268
23	26.018	27.141	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728
24	27.096	28.241	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179
25	28.172	29.339	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.619
26	29.246	30.435	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.051
27	30.319	31.528	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645	55.475
28	31.391	32.620	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.994	56.892
29	32.461	33.711	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.335	58.301
30	33.530	34.800	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.702
40	44.165	45.616	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766	73.403
50	54.723	56.334	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.660
60	65.226	66.981	68.972	74.397	79.082	83.298	84.58	88.379	91.952	99.608


 Tabla A.6 Valores críticos de la distribución  $F$ 

$f_{0.05}(v_1, v_2)$									
$v_2$	$v_1$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Reproducida de la tabla 18 de *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I, con autorización de E.S. Pearson y Biometrika Trustees.

**Tabla A.6** (continuación) Valores críticos de la distribución  $F$ 

$\nu_2$	$f_{0.05}(\nu_1, \nu_2)$									
	$\nu_1$									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
<b>1</b>	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
<b>2</b>	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
<b>3</b>	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
<b>4</b>	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
<b>5</b>	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
<b>6</b>	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
<b>7</b>	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
<b>8</b>	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
<b>9</b>	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
<b>10</b>	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
<b>11</b>	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
<b>12</b>	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
<b>13</b>	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
<b>14</b>	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
<b>15</b>	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
<b>16</b>	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
<b>17</b>	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
<b>18</b>	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
<b>19</b>	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
<b>20</b>	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
<b>21</b>	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
<b>22</b>	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
<b>23</b>	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
<b>24</b>	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
<b>25</b>	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
<b>26</b>	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
<b>27</b>	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
<b>28</b>	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
<b>29</b>	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
<b>30</b>	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
<b>40</b>	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
<b>60</b>	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
<b>120</b>	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
<b><math>\infty</math></b>	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00



**Tabla A.6** (*continuación*) Valores críticos de la distribución  $F$

$v_2$	$f_{0.01}(v_1, v_2)$								
	$v_1$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
<b>2</b>	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
<b>3</b>	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
<b>4</b>	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
<b>5</b>	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
<b>6</b>	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
<b>7</b>	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
<b>8</b>	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
<b>9</b>	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
<b>10</b>	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
<b>11</b>	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
<b>12</b>	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
<b>13</b>	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
<b>14</b>	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
<b>15</b>	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
<b>16</b>	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
<b>17</b>	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
<b>18</b>	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
<b>19</b>	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
<b>20</b>	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
<b>21</b>	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
<b>22</b>	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
<b>23</b>	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
<b>24</b>	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
<b>25</b>	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
<b>26</b>	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
<b>27</b>	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
<b>28</b>	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
<b>29</b>	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
<b>30</b>	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
<b>40</b>	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
<b>60</b>	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
<b>120</b>	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
<b><math>\infty</math></b>	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

**Tabla A.6** (continuación) Valores críticos de la distribución  $F$ 

$\nu_2$	$f_{0.01}(\nu_1, \nu_2)$									
	$\nu_1$									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
$\infty$	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabla A.7 Factores de tolerancia para distribuciones normales

<i>n</i>	Intervalos bilaterales						Intervalos unilaterales					
	$\gamma = 0.05$			$\gamma = 0.01$			$\gamma = 0.05$			$\gamma = 0.01$		
	$1 - \alpha$			$1 - \alpha$			$1 - \alpha$			$1 - \alpha$		
	0.90	0.95	0.99	0.90	0.95	0.99	0.90	0.95	0.99	0.90	0.95	0.99
2	32.019	37.674	48.430	160.193	188.491	242.300	20.581	26.260	37.094	103.029	131.426	185.617
3	8.380	9.916	12.861	18.930	22.401	29.055	6.156	7.656	10.553	13.995	17.170	23.896
4	5.369	6.370	8.299	9.398	11.150	14.527	4.162	5.144	7.042	7.380	9.083	12.387
5	4.275	5.079	6.634	6.612	7.855	10.260	3.407	4.203	5.741	5.362	6.578	8.939
6	3.712	4.414	5.775	5.337	6.345	8.301	3.006	3.708	5.062	4.411	5.406	7.335
7	3.369	4.007	5.248	4.613	5.488	7.187	2.756	3.400	4.642	3.859	4.728	6.412
8	3.136	3.732	4.891	4.147	4.936	6.468	2.582	3.187	4.354	3.497	4.285	5.812
9	2.967	3.532	4.631	3.822	4.550	5.966	2.454	3.031	4.143	3.241	3.972	5.389
10	2.839	3.379	4.433	3.582	4.265	5.594	2.355	2.911	3.981	3.048	3.738	5.074
11	2.737	3.259	4.277	3.397	4.045	5.308	2.275	2.815	3.852	2.898	3.556	4.829
12	2.655	3.162	4.150	3.250	3.870	5.079	2.210	2.736	3.747	2.777	3.410	4.633
13	2.587	3.081	4.044	3.130	3.727	4.893	2.155	2.671	3.659	2.677	3.290	4.472
14	2.529	3.012	3.955	3.029	3.608	4.737	2.109	2.615	3.585	2.593	3.189	4.337
15	2.480	2.954	3.878	2.945	3.507	4.605	2.068	2.566	3.520	2.522	3.102	4.222
16	2.437	2.903	3.812	2.872	3.421	4.492	2.033	2.524	3.464	2.460	3.028	4.123
17	2.400	2.858	3.754	2.808	3.345	4.393	2.002	2.486	3.414	2.405	2.963	4.037
18	2.366	2.819	3.702	2.753	3.279	4.307	1.974	2.453	3.370	2.357	2.905	3.960
19	2.337	2.784	3.656	2.703	3.221	4.230	1.949	2.423	3.331	2.314	2.854	3.892
20	2.310	2.752	3.615	2.659	3.168	4.161	1.926	2.396	3.295	2.276	2.808	3.832
25	2.208	2.631	3.457	2.494	2.972	3.904	1.838	2.292	3.158	2.129	2.633	3.001
30	2.140	2.549	3.350	2.385	2.841	3.733	1.777	2.220	3.064	2.030	2.516	3.447
35	2.090	2.490	3.272	2.306	2.748	3.611	1.732	2.167	2.995	1.957	2.430	3.334
40	2.052	2.445	3.213	2.247	2.677	3.518	1.697	2.126	2.941	1.902	2.364	3.249
45	2.021	2.408	3.165	2.200	2.621	3.444	1.669	2.092	2.898	1.857	2.312	3.180
50	1.996	2.379	3.126	2.162	2.576	3.385	1.646	2.065	2.863	1.821	2.269	3.125
60	1.958	2.333	3.066	2.103	2.506	3.293	1.609	2.022	2.807	1.764	2.202	3.038
70	1.929	2.299	3.021	2.060	2.454	3.225	1.581	1.990	2.765	1.722	2.153	2.974
80	1.907	2.272	2.986	2.026	2.414	3.173	1.559	1.965	2.733	1.688	2.114	2.924
90	1.889	2.251	2.958	1.999	2.382	3.130	1.542	1.944	2.706	1.661	2.082	2.883
100	1.874	2.233	2.934	1.977	2.355	3.096	1.527	1.927	2.684	1.639	2.056	2.850
150	1.825	2.175	2.859	1.905	2.270	2.983	1.478	1.870	2.611	1.566	1.971	2.741
200	1.798	2.143	2.816	1.865	2.222	2.921	1.450	1.837	2.570	1.524	1.923	2.679
250	1.780	2.121	2.788	1.839	2.191	2.880	1.431	1.815	2.542	1.496	1.891	2.638
300	1.767	2.106	2.767	1.820	2.169	2.850	1.417	1.800	2.522	1.476	1.868	2.608
$\infty$	1.645	1.960	2.576	1.645	1.960	2.576	1.282	1.645	2.326	1.282	1.645	2.326

Adaptada de C. Eisenhart, M. W. Hastay y W. A. Wallis, *Techniques of Statistical Analysis*, capítulo 2, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947. Se utiliza con autorización de McGraw-Hill Book Company.

Tabla A.8 Tamaño muestral para la prueba  $t$  de la media

		Nivel de la prueba $t$																				
Prueba unilateral		$\alpha = 0.005$					$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.025$					$\alpha = 0.05$					
Prueba bilateral		$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.02$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.1$					
$\beta = 0.1$		.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	
Valor de $\Delta =  \delta /\sigma$	0.05																					
	0.10																					
	0.15																					
	0.20										139					99				122		
	0.25					110					90				128	64			139	101	45	
	0.30				134	78					115	63			119	90	45		122	97	71	32
	0.35			125	99	58			109	85	47			109	88	67	34		90	72	52	24
	0.40		115	97	77	45		101	85	66	37	117	84	68	51	26	101	70	55	40	19	
	0.45		92	77	62	37	110	81	68	53	30	93	67	54	41	21	80	55	44	33	15	
	0.50	100	75	63	51	30	90	66	55	43	25	76	54	44	34	18	65	45	36	27	13	
	0.55	83	63	53	42	26	75	55	46	36	21	63	45	37	28	15	54	38	30	22	11	
	0.60	71	53	45	36	22	63	47	39	31	18	53	38	32	24	13	46	32	26	19	9	
	0.65	61	46	39	31	20	55	41	34	27	16	46	33	27	21	12	39	28	22	17	8	
	0.70	53	40	34	28	17	47	35	30	24	14	40	29	24	19	10	34	24	19	15	8	
	0.75	47	36	30	25	16	42	31	27	21	1	35	26	21	16	9	30	21	17	13	7	
	0.80	41	32	27	22	14	37	28	24	19	12	31	22	19	15	9	27	19	15	12	6	
	0.85	37	29	24	20	13	33	25	21	17	11	28	21	17	13	8	24	17	14	11	6	
	0.90	34	26	22	18	12	29	23	19	16	10	25	19	16	12	7	21	15	13	10	5	
	0.95	31	24	20	17	11	27	21	18	14	9	23	17	14	11	7	19	14	11	9	5	
	1.00	28	22	19	16	10	25	19	16	13	9	21	16	13	10	6	18	13	11	8	5	
1.1	24	19	16	14	9	21	16	14	12	8	18	13	11	9	6	15	11	9	7			
1.2	21	16	14	12	8	18	14	12	10	7	15	12	10	8	5	13	10	8	6			
1.3	18	15	13	11	8	16	13	11	9	6	13	10	9	7		11	8	7	6			
1.4	16	13	12	10	7	14	11	10	9	6	12	9	8	7		10	8	7	5			
1.5	15	12	11	9	7	13	10	9	8	6	11	8	7	6		9	7	6				
1.6	13	11	10	8	6	12	10	9	7	5	10	8	7	6		8	6	6				
1.7	12	10	9	8	6	11	9	8	7		9	7	6	5		8	6	5				
1.8	12	10	9	8	6	10	8	7	7		8	7	6			7	6					
1.9	11	9	8	7	6	10	8	7	6		8	6	6			7	5					
2.0	10	8	8	7	5	9	7	7	6		7	6	5			6						
2.1	10	8	7	7		8	7	6	6		7	6				6						
2.2	9	8	7	6		8	7	6	5		7	6				6						
2.3	9	7	7	6		8	6	6			6	5				5						
2.4	8	7	7	6		7	6	6			6											
2.5	8	7	6	6		7	6	6			6											
3.0	7	6	6	5		6	5	5			5											
3.5	6	5	5			5																
4.0	6																					

Reproducida con autorización de O. L. Davies, ed., *Design and Analysis of Industrial Experiments*, Oliver & Boyd, Edimburgo, 1956.

Tabla A.9 Tamaño muestral para la prueba  $t$  de la diferencia entre dos medias

		Nivel de la prueba $t$																				
Prueba unilateral		$\alpha = 0.005$					$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.025$					$\alpha = 0.05$					
Prueba bilateral		$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.02$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.1$					
$\beta = 0.1$		.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	.01	.05	.1	.2	.5	
Valor de $\Delta =  \delta /\sigma$	0.05																					
	0.10																					
	0.15																					
	0.20																				137	
	0.25															124					88	
	0.30										123					87					61	
	0.35					110					90					64			102		45	
	0.40					85					70					100	50		108	78	35	
	0.45					118	68				101	55			105	79	39		108	86	62	28
	0.50					96	55			106	82	45		106	86	64	32		88	70	51	23
	0.55				101	79	46		106	88	68	38		87	71	53	27	112	73	58	42	19
	0.60		101	85	67	39		90	74	58	32	104	74	60	45	23	89	61	49	36	16	
	0.65		87	73	57	34	104	77	64	49	27	88	63	51	39	20	76	52	42	30	14	
	0.70	100	75	63	50	29	90	66	55	43	24	76	55	44	34	17	66	45	36	26	12	
	0.75	88	66	55	44	26	79	58	48	38	21	67	48	39	29	15	57	40	32	23	11	
	0.80	77	58	49	39	23	70	51	43	33	19	59	42	34	26	14	50	35	28	21	10	
	0.85	69	51	43	35	21	62	46	38	30	17	52	37	31	23	12	45	31	25	18	9	
	0.90	62	46	39	31	19	55	41	34	27	15	47	34	27	21	11	40	28	22	16	8	
	0.95	55	42	35	28	17	50	37	31	24	14	42	30	25	19	10	36	25	20	15	7	
	1.00	50	38	32	26	15	45	33	28	22	13	38	27	23	17	9	33	23	18	14	7	
	1.1	42	32	27	22	13	38	28	23	19	11	32	23	19	14	8	27	19	15	12	6	
	1.2	36	27	23	18	11	32	24	20	16	9	27	20	16	12	7	23	16	13	10	5	
	1.3	31	23	20	16	10	28	21	17	14	8	23	17	14	11	6	20	14	11	9	5	
	1.4	27	20	17	14	9	24	18	15	12	8	20	15	12	10	6	17	12	10	8	4	
	1.5	24	18	15	13	8	21	16	14	11	7	18	13	11	9	5	15	11	9	7	4	
1.6	21	16	14	11	7	19	14	12	10	6	16	12	10	8	5	14	10	8	6	4		
1.7	19	15	13	10	7	17	13	11	9	6	14	11	9	7	4	12	9	7	6	3		
1.8	17	13	11	10	6	15	12	10	8	5	13	10	8	6	4	11	8	7	5			
1.9	16	12	11	9	6	14	11	9	8	5	12	9	7	6	4	10	7	6	5			
2.0	14	11	10	8	6	13	10	9	7	5	11	8	7	6	4	9	7	6	4			
2.1	13	10	9	8	5	12	9	8	7	5	10	8	6	5	3	8	6	5	4			
2.2	12	10	8	7	5	11	9	7	6	4	9	7	6	5		8	6	5	4			
2.3	11	9	8	7	5	10	8	7	6	4	9	7	6	5		7	5	5	4			
2.4	11	9	8	6	5	10	8	7	6	4	8	6	5	4		7	5	4	4			
2.5	10	8	7	6	4	9	7	6	5	4	8	6	5	4		6	5	4	3			
3.0	8	6	6	5	4	7	6	5	4	3	6	5	4	4		5	4	3				
3.5	6	5	5	4	3	6	5	4	4	5	4	4	4	3		4	3					
4.0	6	5	4	4		5	4	4	3	4	4	3				4						

Reproducida con autorización de O. L. Davies, ed., *Design and Analysis of Industrial Experiments*, Oliver & Boyd, Edimburgo, 1956.

**Tabla A.10** Valores críticos para la prueba de Bartlett

<i>n</i>	$b_k(0.01; n)$								
	Número de poblaciones, <i>k</i>								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.1411	0.1672							
4	0.2843	0.3165	0.3475	0.3729	0.3937	0.4110			
5	0.3984	0.4304	0.4607	0.4850	0.5046	0.5207	0.5343	0.5458	0.5558
6	0.4850	0.5149	0.5430	0.5653	0.5832	0.5978	0.6100	0.6204	0.6293
7	0.5512	0.5787	0.6045	0.6248	0.6410	0.6542	0.6652	0.6744	0.6824
8	0.6031	0.6282	0.6518	0.6704	0.6851	0.6970	0.7069	0.7153	0.7225
9	0.6445	0.6676	0.6892	0.7062	0.7197	0.7305	0.7395	0.7471	0.7536
10	0.6783	0.6996	0.7195	0.7352	0.7475	0.7575	0.7657	0.7726	0.7786
11	0.7063	0.7260	0.7445	0.7590	0.7703	0.7795	0.7871	0.7935	0.7990
12	0.7299	0.7483	0.7654	0.7789	0.7894	0.7980	0.8050	0.8109	0.8160
13	0.7501	0.7672	0.7832	0.7958	0.8056	0.8135	0.8201	0.8256	0.8303
14	0.7674	0.7835	0.7985	0.8103	0.8195	0.8269	0.8330	0.8382	0.8426
15	0.7825	0.7977	0.8118	0.8229	0.8315	0.8385	0.8443	0.8491	0.8532
16	0.7958	0.8101	0.8235	0.8339	0.8421	0.8486	0.8541	0.8586	0.8625
17	0.8076	0.8211	0.8338	0.8436	0.8514	0.8576	0.8627	0.8670	0.8707
18	0.8181	0.8309	0.8429	0.8523	0.8596	0.8655	0.8704	0.8745	0.8780
19	0.8275	0.8397	0.8512	0.8601	0.8670	0.8727	0.8773	0.8811	0.8845
20	0.8360	0.8476	0.8586	0.8671	0.8737	0.8791	0.8835	0.8871	0.8903
21	0.8437	0.8548	0.8653	0.8734	0.8797	0.8848	0.8890	0.8926	0.8956
22	0.8507	0.8614	0.8714	0.8791	0.8852	0.8901	0.8941	0.8975	0.9004
23	0.8571	0.8673	0.8769	0.8844	0.8902	0.8949	0.8988	0.9020	0.9047
24	0.8630	0.8728	0.8820	0.8892	0.8948	0.8993	0.9030	0.9061	0.9087
25	0.8684	0.8779	0.8867	0.8936	0.8990	0.9034	0.9069	0.9099	0.9124
26	0.8734	0.8825	0.8911	0.8977	0.9029	0.9071	0.9105	0.9134	0.9158
27	0.8781	0.8869	0.8951	0.9015	0.9065	0.9105	0.9138	0.9166	0.9190
28	0.8824	0.8909	0.8988	0.9050	0.9099	0.9138	0.9169	0.9196	0.9219
29	0.8864	0.8946	0.9023	0.9083	0.9130	0.9167	0.9198	0.9224	0.9246
30	0.8902	0.8981	0.9056	0.9114	0.9159	0.9195	0.9225	0.9250	0.9271
40	0.9175	0.9235	0.9291	0.9335	0.9370	0.9397	0.9420	0.9439	0.9455
50	0.9339	0.9387	0.9433	0.9468	0.9496	0.9518	0.9536	0.9551	0.9564
60	0.9449	0.9489	0.9527	0.9557	0.9580	0.9599	0.9614	0.9626	0.9637
80	0.9586	0.9617	0.9646	0.9668	0.9685	0.9699	0.9711	0.9720	0.9728
100	0.9669	0.9693	0.9716	0.9734	0.9748	0.9759	0.9769	0.9776	0.9783

Reproducida de D. D. Dyer y J. P. Keating, "On the Determination of Critical Values for Bartlett's Test", *J. Am. Stat. Assoc.*, **75**, 1980, con autorización del consejo de directores.

**Tabla A.10** (continuación) Valores críticos para la prueba de Bartlett

<i>n</i>	<i>b<sub>k</sub></i> (0.05; <i>n</i> )								
	Número de poblaciones, <i>k</i>								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.3123	0.3058	0.3173	0.3299					
4	0.4780	0.4699	0.4803	0.4921	0.5028	0.5122	0.5204	0.5277	0.5341
5	0.5845	0.5762	0.5850	0.5952	0.6045	0.6126	0.6197	0.6260	0.6315
6	0.6563	0.6483	0.6559	0.6646	0.6727	0.6798	0.6860	0.6914	0.6961
7	0.7075	0.7000	0.7065	0.7142	0.7213	0.7275	0.7329	0.7376	0.7418
8	0.7456	0.7387	0.7444	0.7512	0.7574	0.7629	0.7677	0.7719	0.7757
9	0.7751	0.7686	0.7737	0.7798	0.7854	0.7903	0.7946	0.7984	0.8017
10	0.7984	0.7924	0.7970	0.8025	0.8076	0.8121	0.8160	0.8194	0.8224
11	0.8175	0.8118	0.8160	0.8210	0.8257	0.8298	0.8333	0.8365	0.8392
12	0.8332	0.8280	0.8317	0.8364	0.8407	0.8444	0.8477	0.8506	0.8531
13	0.8465	0.8415	0.8450	0.8493	0.8533	0.8568	0.8598	0.8625	0.8648
14	0.8578	0.8532	0.8564	0.8604	0.8641	0.8673	0.8701	0.8726	0.8748
15	0.8676	0.8632	0.8662	0.8699	0.8734	0.8764	0.8790	0.8814	0.8834
16	0.8761	0.8719	0.8747	0.8782	0.8815	0.8843	0.8868	0.8890	0.8909
17	0.8836	0.8796	0.8823	0.8856	0.8886	0.8913	0.8936	0.8957	0.8975
18	0.8902	0.8865	0.8890	0.8921	0.8949	0.8975	0.8997	0.9016	0.9033
19	0.8961	0.8926	0.8949	0.8979	0.9006	0.9030	0.9051	0.9069	0.9086
20	0.9015	0.8980	0.9003	0.9031	0.9057	0.9080	0.9100	0.9117	0.9132
21	0.9063	0.9030	0.9051	0.9078	0.9103	0.9124	0.9143	0.9160	0.9175
22	0.9106	0.9075	0.9095	0.9120	0.9144	0.9165	0.9183	0.9199	0.9213
23	0.9146	0.9116	0.9135	0.9159	0.9182	0.9202	0.9219	0.9235	0.9248
24	0.9182	0.9153	0.9172	0.9195	0.9217	0.9236	0.9253	0.9267	0.9280
25	0.9216	0.9187	0.9205	0.9228	0.9249	0.9267	0.9283	0.9297	0.9309
26	0.9246	0.9219	0.9236	0.9258	0.9278	0.9296	0.9311	0.9325	0.9336
27	0.9275	0.9249	0.9265	0.9286	0.9305	0.9322	0.9337	0.9350	0.9361
28	0.9301	0.9276	0.9292	0.9312	0.9330	0.9347	0.9361	0.9374	0.9385
29	0.9326	0.9301	0.9316	0.9336	0.9354	0.9370	0.9383	0.9396	0.9406
30	0.9348	0.9325	0.9340	0.9358	0.9376	0.9391	0.9404	0.9416	0.9426
40	0.9513	0.9495	0.9506	0.9520	0.9533	0.9545	0.9555	0.9564	0.9572
50	0.9612	0.9597	0.9606	0.9617	0.9628	0.9637	0.9645	0.9652	0.9658
60	0.9677	0.9665	0.9672	0.9681	0.9690	0.9698	0.9705	0.9710	0.9716
80	0.9758	0.9749	0.9754	0.9761	0.9768	0.9774	0.9779	0.9783	0.9787
100	0.9807	0.9799	0.9804	0.9809	0.9815	0.9819	0.9823	0.9827	0.9830

Tabla A.11 Valores críticos para la prueba de Cochran

$\alpha = 0.01$															
$k$	$n$														
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	17	37	145	$\infty$	
2	0.9999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000	
3	0.9933	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335	0.7107	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333	
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500	
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000	
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667	
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429	
8	0.7945	0.6152	0.5209	0.4627	0.4226	0.3932	0.3704	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250	
9	0.7544	0.5727	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111	
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3572	0.3308	0.3106	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000	
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680	0.2535	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833	
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667	
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500	
24	0.4247	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417	
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333	
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957	0.0898	0.0853	0.0816	0.0668	0.0503	0.0363	0.0250	
60	0.2151	0.1371	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167	
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083	
$\infty$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Reproducida de C. Eisenhart, M. W. Hastay y W. A. Wallis, *Techniques of Statistical Analysis*, capítulo 15, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947. Utilizada con autorización de McGraw-Hill Book Company.



$\alpha = 0.05$ [illegible]

**Tabla A.12** Puntos porcentuales superiores de la distribución de rangos estudentizados: valores de  $q(0.05; k, \nu)$

Grados de libertad, $\nu$	Número de tratamientos, $k$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18.0	27.0	32.8	37.2	40.5	43.1	15.1	47.1	49.1
2	6.09	5.33	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99
3	4.50	5.91	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.06	7.35	7.60	7.83
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.65	4.83	4.99	5.13	5.25
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.05
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56
$\infty$	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47

**Tabla A.13** Rangos estudentizados significativos mínimos  $r_p(0.05; p, v)$ 

$\alpha = 0.05$									
$v$	$p$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.927	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.797	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.461	3.587	3.649	3.68	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.626	3.626	3.626
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.48	3.493	3.501
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470
14	3.033	3.178	3.268	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457
15	3.014	3.160	3.25	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446
16	2.998	3.144	3.235	3.298	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314
$\infty$	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294

Condensada de H. L. Harter, "Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test", *Biometrics*, **16**, núm. 4, 1960, con autorización del autor y del editor.

**Tabla A.13** (continuación) Rangos estudentizados significativos mínimos  $r_p(0.01; p, v)$ 

$\alpha = 0.01$									
$v$	$p$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.261	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272
$\infty$	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205

**Tabla A.14** Valores de  $d_{\alpha/2}(k, v)$  para comparaciones bilaterales entre  $k$  tratamientos y un control

$\alpha = 0.05$									
$k = \text{número de medias de tratamiento (no incluye el control)}$									
$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.57	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	3.97
6	2.45	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57	3.64	3.71
7	2.36	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41	3.47	3.53
8	2.31	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29	3.35	3.41
9	2.26	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20	3.26	3.32
10	2.23	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14	3.19	3.24
11	2.20	2.53	2.72	2.84	2.94	3.02	3.08	3.14	3.19
12	2.18	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04	3.09	3.14
13	2.16	2.48	2.65	2.78	2.87	2.94	3.00	3.06	3.10
14	2.14	2.46	2.63	2.75	2.84	2.91	2.97	3.02	3.07
15	2.13	2.44	2.61	2.73	2.82	2.89	2.95	3.00	3.04
16	2.12	2.42	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.97	3.02
17	2.11	2.41	2.58	2.69	2.78	2.85	2.90	2.95	3.00
18	2.10	2.40	2.56	2.68	2.76	2.83	2.89	2.94	2.98
19	2.09	2.39	2.55	2.66	2.75	2.81	2.87	2.92	2.96
20	2.09	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86	2.90	2.95
24	2.06	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81	2.86	2.90
30	2.04	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77	2.82	2.86
40	2.02	2.29	2.44	2.54	2.62	2.68	2.73	2.77	2.81
60	2.00	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77
120	1.98	2.24	2.38	2.47	2.55	2.60	2.65	2.69	2.73
$\infty$	1.96	2.21	2.35	2.44	2.51	2.57	2.61	2.65	2.69

Reproducida de Charles W. Dunnett, "New Tables for Multiple Comparison with a Control", *Biometrics*, **20**, núm. 3, 1964, con autorización del autor y del editor.

**Tabla A.14** (continuación) Valores de  $d_{\alpha/2}(k, v)$  para comparaciones bilaterales entre  $k$  tratamientos y un control

$\alpha = 0.01$									
$k = \text{número de medias de tratamiento (no incluye el control)}$									
$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4.03	4.63	4.98	5.22	5.41	5.56	5.69	5.80	5.89
6	3.71	4.21	4.51	4.71	4.87	5.00	5.10	5.20	5.28
7	3.50	3.95	4.21	4.39	4.53	4.64	4.74	4.82	4.89
8	3.36	3.77	4.00	4.17	4.29	4.40	4.48	4.56	4.62
9	3.25	3.63	3.85	4.01	4.12	4.22	4.30	4.37	4.43
10	3.17	3.53	3.74	3.88	3.99	4.08	4.16	4.22	4.28
11	3.11	3.45	3.65	3.79	3.89	3.98	4.05	4.11	4.16
12	3.05	3.39	3.58	3.71	3.81	3.89	3.96	4.02	4.07
13	3.01	3.33	3.52	3.65	3.74	3.82	3.89	3.94	3.99
14	2.98	3.29	3.47	3.59	3.69	3.76	3.83	3.88	3.93
15	2.95	3.25	3.43	3.55	3.64	3.71	3.78	3.83	3.88
16	2.92	3.22	3.39	3.51	3.60	3.67	3.73	3.78	3.83
17	2.90	3.19	3.36	3.47	3.56	3.63	3.69	3.74	3.79
18	2.88	3.17	3.33	3.44	3.53	3.60	3.66	3.71	3.75
19	2.86	3.15	3.31	3.42	3.50	3.57	3.63	3.68	3.72
20	2.85	3.13	3.29	3.40	3.48	3.55	3.60	3.65	3.69
24	2.80	3.07	3.22	3.32	3.40	3.47	3.52	3.57	3.61
30	2.75	3.01	3.15	3.25	3.33	3.39	3.44	3.49	3.52
40	2.70	2.95	3.09	3.19	3.26	3.32	3.37	3.41	3.44
60	2.66	2.90	3.03	3.12	3.19	3.25	3.29	3.33	3.37
120	2.62	2.85	2.97	3.06	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29
$\infty$	2.58	2.79	2.92	3.00	3.06	3.11	3.15	3.19	3.22

**Tabla A.15** Valores de  $d_{\alpha}(k, v)$  para comparaciones unilaterales entre  $k$  tratamientos y un control

$\alpha = 0.05$									
$k = \text{número de medias de tratamiento (no incluye el control)}$									
$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
6	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
7	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
8	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
9	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
10	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
11	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
12	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
13	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
14	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
15	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
16	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
17	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
18	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
19	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
20	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
24	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
30	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
40	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
60	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
120	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
$\infty$	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42

Reproducida de Charles W. Dunnett, "A Multiple Comparison Procedure for Comparing Several Treatments with a Control", *J. Am. Stat. Assoc.*, **50**, 1955, 1096-1121, con autorización del autor y del editor.

**Tabla A.15** (continuación) Valores de  $d_{\alpha}(k, v)$  para comparaciones unilaterales entre  $k$  tratamientos y un control

$\alpha = 0.01$									
$k = \text{número de medias de tratamiento (no incluye el control)}$									
$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
6	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	2.57	2.86	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
$\infty$	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00



**Tabla A.16** Valores críticos para la prueba de rangos con signo

$n$	Unilateral $\alpha = 0.01$ Bilateral $\alpha = 0.02$	Unilateral $\alpha = 0.025$ Bilateral $\alpha = 0.05$	Unilateral $\alpha = 0.05$ Bilateral $\alpha = 0.1$
5			1
6		1	2
7	0	2	4
8	2	4	6
9	3	6	8
10	5	8	11
11	7	11	14
12	10	14	17
13	13	17	21
14	16	21	26
15	20	25	30
16	24	30	36
17	28	35	41
18	33	40	47
19	38	46	54
20	43	52	60
21	49	59	68
22	56	66	75
23	62	73	83
24	69	81	92
25	77	90	101
26	85	98	110
27	93	107	120
28	102	117	130
29	111	127	141
30	120	137	152

Reproducida de F. Wilcoxon y R. A. Wilcox, *Some Rapid Approximate Statistical Procedures*, American Cyanamid Company, Pearl River, N. Y., 1964, con autorización de la American Cyanamid Company.

**Tabla A.17** Valores críticos para la prueba de suma de rangos de Wilcoxon

Prueba de una cola con $\alpha = 0.001$ o prueba de dos colas con $\alpha = 0.002$																
$n_1$	$n_2$															
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1																
2																
3																
4					0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3	
5		0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	
6	0	1	2	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
7		2	3	3	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16	
8			5	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	
9				7	8	10	12	14	15	17	19	21	23	25	26	
10					10	12	14	17	19	21	23	25	27	29	32	
11						15	17	20	22	24	27	29	32	34	37	
12							20	23	25	28	31	34	37	40	42	
13								26	29	32	35	38	42	45	48	
14									32	36	39	43	46	50	54	
15										40	43	47	51	55	59	
16											48	52	56	60	65	
17												57	61	66	70	
18													66	71	76	
19														77	82	
20															88	

Prueba de una cola con $\alpha = 0.01$ o prueba de dos colas con $\alpha = 0.02$																
$n_1$	$n_2$															
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																
2									0	0	0	0	0	0	1	1
3			0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6		3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7			6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8				10	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9					14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10						19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11							25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12								31	35	38	42	46	49	53	56	60
13									39	43	47	51	55	59	63	67
14										47	51	56	60	65	69	73
15											56	61	66	70	75	80
16												66	71	76	82	87
17													77	82	88	93
18														88	94	100
19															101	107
20																114

Basada en parte en las tablas 1, 3, 5 y 7 de D. Auble, "Extended Tables for the Mann-Whitney Statistic", *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, 1953, con autorización del director.

Prueba de una cola con $\alpha = 0.025$ o prueba de dos colas con $\alpha = 0.05$																		
	$n_2$																	
$n_1$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1																		
2					0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	
3		0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13	
5		2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20	
6			5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27	
7				8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	
8					13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41	
9						17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48	
10							23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55	
11								30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	
12									37	41	45	49	53	57	61	65	69	
13										45	50	54	59	63	67	72	76	
14											55	59	64	67	74	78	83	
15												64	70	75	80	85	90	
16													75	81	86	92	98	
17														87	93	99	105	
18															99	106	112	
19																113	119	
20																	127	

Prueba de una cola con $\alpha = 0.05$ o prueba de dos colas con $\alpha = 0.1$																		
	$n_2$																	
$n_1$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																	0	0
2				0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4
3	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5			4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6				7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7					11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8						15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9							21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10								27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11									34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12										42	47	51	55	60	64	68	72	77
13											51	56	61	65	70	75	80	84
14												61	66	71	77	82	87	92

**Tabla A.18**  $P(V \leq v^*$  cuando  $H_0$  es verdadera) en la prueba de rachas

$(n_1, n_2)$	$v^*$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2, 3)	0.200	0.500	0.900	1.000					
(2, 4)	0.133	0.400	0.800	1.000					
(2, 5)	0.095	0.333	0.714	1.000					
(2, 6)	0.071	0.286	0.643	1.000					
(2, 7)	0.056	0.250	0.583	1.000					
(2, 8)	0.044	0.222	0.533	1.000					
(2, 9)	0.036	0.200	0.491	1.000					
(2, 10)	0.030	0.182	0.455	1.000					
(3, 3)	0.100	0.300	0.700	0.900	1.000				
(3, 4)	0.057	0.200	0.543	0.800	0.971	1.000			
(3, 5)	0.036	0.143	0.429	0.714	0.929	1.000			
(3, 6)	0.024	0.107	0.345	0.643	0.881	1.000			
(3, 7)	0.017	0.083	0.283	0.583	0.833	1.000			
(3, 8)	0.012	0.067	0.236	0.533	0.788	1.000			
(3, 9)	0.009	0.055	0.200	0.491	0.745	1.000			
(3, 10)	0.007	0.045	0.171	0.455	0.706	1.000			
(4, 4)	0.029	0.114	0.371	0.629	0.886	0.971	1.000		
(4, 5)	0.016	0.071	0.262	0.500	0.786	0.929	0.992	1.000	
(4, 6)	0.010	0.048	0.190	0.405	0.690	0.881	0.976	1.000	
(4, 7)	0.006	0.033	0.142	0.333	0.606	0.833	0.954	1.000	
(4, 8)	0.004	0.024	0.109	0.279	0.533	0.788	0.929	1.000	
(4, 9)	0.003	0.018	0.085	0.236	0.471	0.745	0.902	1.000	
(4, 10)	0.002	0.014	0.068	0.203	0.419	0.706	0.874	1.000	
(5, 5)	0.008	0.040	0.167	0.357	0.643	0.833	0.960	0.992	1.000
(5, 6)	0.004	0.024	0.110	0.262	0.522	0.738	0.911	0.976	0.998
(5, 7)	0.003	0.015	0.076	0.197	0.424	0.652	0.854	0.955	0.992
(5, 8)	0.002	0.010	0.054	0.152	0.347	0.576	0.793	0.929	0.984
(5, 9)	0.001	0.007	0.039	0.119	0.287	0.510	0.734	0.902	0.972
(5, 10)	0.001	0.005	0.029	0.095	0.239	0.455	0.678	0.874	0.958
(6, 6)	0.002	0.013	0.067	0.175	0.392	0.608	0.825	0.933	0.987
(6, 7)	0.001	0.008	0.043	0.121	0.296	0.500	0.733	0.879	0.966
(6, 8)	0.001	0.005	0.028	0.086	0.226	0.413	0.646	0.821	0.937
(6, 9)	0.000	0.003	0.019	0.063	0.175	0.343	0.566	0.762	0.902
(6, 10)	0.000	0.002	0.013	0.047	0.137	0.288	0.497	0.706	0.864
(7, 7)	0.001	0.004	0.025	0.078	0.209	0.383	0.617	0.791	0.922
(7, 8)	0.000	0.002	0.015	0.051	0.149	0.296	0.514	0.704	0.867
(7, 9)	0.000	0.001	0.010	0.035	0.108	0.231	0.427	0.622	0.806
(7, 10)	0.000	0.001	0.006	0.024	0.080	0.182	0.355	0.549	0.743
(8, 8)	0.000	0.001	0.009	0.032	0.100	0.214	0.405	0.595	0.786
(8, 9)	0.000	0.001	0.005	0.020	0.069	0.157	0.319	0.500	0.702
(8, 10)	0.000	0.000	0.003	0.013	0.048	0.117	0.251	0.419	0.621
(9, 9)	0.000	0.000	0.003	0.012	0.044	0.109	0.238	0.399	0.601
(9, 10)	0.000	0.000	0.002	0.008	0.029	0.077	0.179	0.319	0.510
(10, 10)	0.000	0.000	0.001	0.004	0.019	0.051	0.128	0.242	0.414

Reproducida de C. Eisenhart y R. Swed, "Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives", *Ann. Math. Stat.*, **14**, 1943, con autorización del editor.

**Tabla A.18** (continuación)  $P(V \leq v^*$  cuando  $H_0$  es verdadera) en la prueba de rachas

$(n_1, n_2)$	$v^*$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2, 3)										
(2, 4)										
(2, 5)										
(2, 6)										
(2, 7)										
(2, 8)										
(2, 9)										
(2, 10)										
(3, 3)										
(3, 4)										
(3, 5)										
(3, 6)										
(3, 7)										
(3, 8)										
(3, 9)										
(3, 10)										
(4, 4)										
(4, 5)										
(4, 6)										
(4, 7)										
(4, 8)										
(4, 9)										
(4, 10)										
(5, 5)										
(5, 6)	1.000									
(5, 7)	1.000									
(5, 8)	1.000									
(5, 9)	1.000									
(5, 10)	1.000									
(6, 6)	0.998	1.000								
(6, 7)	0.992	0.999	1.000							
(6, 8)	0.984	0.998	1.000							
(6, 9)	0.972	0.994	1.000							
(6, 10)	0.958	0.990	1.000							
(7, 7)	0.975	0.996	0.999	1.000						
(7, 8)	0.949	0.988	0.998	1.000	1.000					
(7, 9)	0.916	0.975	0.994	0.999	1.000					
(7, 10)	0.879	0.957	0.990	0.998	1.000					
(8, 8)	0.900	0.968	0.991	0.999	1.000	1.000				
(8, 9)	0.843	0.939	0.980	0.996	0.999	1.000	1.000			
(8, 10)	0.782	0.903	0.964	0.990	0.998	1.000	1.000			
(9, 9)	0.762	0.891	0.956	0.988	0.997	1.000	1.000	1.000		
(9, 10)	0.681	0.834	0.923	0.974	0.992	0.999	1.000	1.000	1.000	
(10, 10)	0.586	0.758	0.872	0.949	0.981	0.996	0.999	1.000	1.000	1.000

**Tabla A.19** Tamaño muestral para límites de tolerancia no paramétricos bilaterales

$1 - \alpha$	$1 - \gamma$					
	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99	0.995
0.995	336	488	777	947	1325	1483
0.99	168	244	388	473	662	740
0.95	34	49	77	93	130	146
0.90	17	24	38	46	64	72
0.85	11	16	25	30	42	47
0.80	9	12	18	22	31	34
0.75	7	10	15	18	24	27
0.70	6	8	12	14	20	22
0.60	4	6	9	10	14	16
0.50	3	5	7	8	11	12

Tabla A-25d de Wilfrid J. Dixon y Frank J. Massey, Jr., *Introduction to Statistical Analysis*, 3a. ed., McGraw-Hill, 1969. Reproducida con autorización de The McGraw-Hill Companies, Inc.

**Tabla A.20** Tamaño muestral para límites de tolerancia no paramétricos unilaterales

$1 - \alpha$	$1 - \gamma$				
	0.50	0.70	0.95	0.99	0.995
0.995	139	241	598	919	1379
0.99	69	120	299	459	688
0.95	14	24	59	90	135
0.90	7	12	29	44	66
0.85	5	8	19	29	43
0.80	4	6	14	21	31
0.75	3	5	11	7	25
0.70	2	4	9	13	20
0.60	2	3	6	10	14
0.50	1	2	5	7	10

Tabla A-25e de Wilfrid J. Dixon y Frank J. Massey, Jr., *Introduction to Statistical Analysis*, 3a. ed., McGraw-Hill, 1969. Reproducida con autorización de The McGraw-Hill Companies, Inc.

**Tabla A.21** Valores críticos del coeficiente de correlación de rangos de Spearman

$n$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
5	0.900			
6	0.829	0.886	0.943	
7	0.714	0.786	0.893	
8	0.643	0.738	0.833	0.881
9	0.600	0.683	0.783	0.833
10	0.564	0.648	0.745	0.794
11	0.523	0.623	0.736	0.818
12	0.497	0.591	0.703	0.780
13	0.475	0.566	0.673	0.745
14	0.457	0.545	0.646	0.716
15	0.441	0.525	0.623	0.689
16	0.425	0.507	0.601	0.666
17	0.412	0.490	0.582	0.645
18	0.399	0.476	0.564	0.625
19	0.388	0.462	0.549	0.608
20	0.377	0.450	0.534	0.591
21	0.368	0.438	0.521	0.576
22	0.359	0.428	0.508	0.562
23	0.351	0.418	0.496	0.549
24	0.343	0.409	0.485	0.537
25	0.336	0.400	0.475	0.526
26	0.329	0.392	0.465	0.515
27	0.323	0.385	0.456	0.505
28	0.317	0.377	0.448	0.496
29	0.311	0.370	0.440	0.487
30	0.305	0.364	0.432	0.478

Reproducida de E. G. Olds, "Distribution of Sums of Squares of Rank Differences for Small Samples", *Ann. Math. Stat.*, **9**, 1938, con autorización del editor.

Tabla A.22 Factores para la elaboración de gráficas de control

Observaciones en la muestra	Gráfica para promedios			Gráfica para desviaciones estándar						Gráfica para rangos			
	Factores para los límites de control			Factores para la línea central			Factores para los límites de control			Factores para la línea central		Factores para los límites de control	
	$A_2$	$A_3$	$c_4$	$1/c_4$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$d_2$	$1/d_2$	$d_3$	$D_3$	$D_4$
2	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.267
3	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	2.574
4	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	2.282
5	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	2.114
6	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	2.004
7	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.076	1.924
8	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.136	1.864
9	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.184	1.816
10	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.223	1.777
11	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.256	1.744
12	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.283	1.717
13	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	0.307	1.693
14	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	0.328	1.672
15	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	0.347	1.653
16	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	0.363	1.637
17	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	0.378	1.622
18	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	0.391	1.608
19	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	0.403	1.597
20	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	0.415	1.585
21	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	0.425	1.575
22	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	0.434	1.566
23	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	0.443	1.557
24	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	0.451	1.548
25	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	0.459	1.541



**Tabla A.23** La función gamma incompleta:  $F(x; \alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ 

$\alpha$										
$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.6320	0.2640	0.0800	0.0190	0.0040	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.8650	0.5940	0.3230	0.1430	0.0530	0.0170	0.0050	0.0010	0.0000	0.0000
3	0.9500	0.8010	0.5770	0.3530	0.1850	0.0840	0.0340	0.0120	0.0040	0.0010
4	0.9820	0.9080	0.7620	0.5670	0.3710	0.2150	0.1110	0.0510	0.0210	0.0080
5	0.9930	0.9600	0.8750	0.7350	0.5600	0.3840	0.2380	0.1330	0.0680	0.0320
6	0.9980	0.9830	0.9380	0.8490	0.7150	0.5540	0.3940	0.2560	0.1530	0.0840
7	0.9990	0.9930	0.9700	0.9180	0.8270	0.6990	0.5500	0.4010	0.2710	0.1700
8	1.0000	0.9970	0.9860	0.9580	0.9000	0.8090	0.6870	0.5470	0.4070	0.2830
9		0.9990	0.9940	0.9790	0.9450	0.8840	0.7930	0.6760	0.5440	0.4130
10		1.0000	0.9970	0.9900	0.9710	0.9330	0.8700	0.7800	0.6670	0.5420
11			0.9990	0.9950	0.9850	0.9620	0.9210	0.8570	0.7680	0.6590
12			1.0000	0.9980	0.9920	0.9800	0.9540	0.9110	0.8450	0.7580
13				0.9990	0.9960	0.9890	0.9740	0.9460	0.9000	0.8340
14				1.0000	0.9980	0.9940	0.9860	0.9680	0.9380	0.8910
15					0.9990	0.9970	0.9920	0.9820	0.9630	0.9300

## A.24 Demostración de la media de la distribución hipergeométrica

Para calcular la media de la distribución hipergeométrica escribimos

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = k \sum_{x=1}^n \frac{(k-1)!}{(x-1)!(k-x)!} \cdot \frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
 &= k \sum_{x=1}^n \frac{\binom{k-1}{x-1} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}.
 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\binom{N-k}{n-1-y} = \binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y} \quad y \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1},$$

y con  $y = x - 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 E(X) &= k \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y} \binom{N-k}{n-1-y}}{\binom{N}{n}} \\
 &= \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y} \binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nk}{N},
 \end{aligned}$$

ya que la sumatoria representa el total de todas las probabilidades en un experimento hipergeométrico cuando

$N - 1$  artículos se seleccionan al azar de  $N - 1$ , de los cuales  $k - 1$  se etiqueta como éxitos.

## A.25 Demostración de la media y la varianza de la distribución de Poisson

Sea  $\mu = \lambda t$ .

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-1}}{(x-1)!}.$$

Puesto que la sumatoria en el último término de la expresión anterior es la probabilidad total de una variable aleatoria de Poisson con media  $\mu$ , la cual puede verse con facilidad con  $y = x - 1$ , es igual a 1. Por lo tanto,  $E(X) = \mu$ . Para calcular la varianza de  $X$  observe que

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-2}}{(x-2)!}.$$

Nuevamente, sea  $y = x - 2$ , la sumatoria en el último término de la expresión anterior es la probabilidad total de una variable aleatoria de Poisson con media  $\mu$ . En consecuencia, obtenemos

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu = \lambda t.$$

## A.26 Prueba de la media y la varianza de la distribución gamma

Para calcular la media y la varianza de la distribución gamma comenzamos por calcular

$$E(X^k) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+k-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^{k+\alpha} \Gamma(\alpha+k)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha+k-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{k+\alpha} \Gamma(\alpha+k)} dx,$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Puesto que el integrando en el último término de la expresión anterior es una función de densidad gamma, con parámetros  $\alpha + k$  y  $\beta$ , es igual a 1. Por lo tanto,

$$E(X^k) = \beta^k \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Si utilizamos la fórmula de recursividad de la función gamma de la página 194, obtenemos

$$\mu = \beta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta \quad \text{y} \quad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \beta^2 \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} - \mu^2 = \beta^2 \alpha(\alpha+1) - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

# Apéndice B

## Respuestas a los ejercicios impares (no de repaso)

---

### Capítulo 1

- 1.1** a) Tamaño de la muestra = 15  
 b) Media de la muestra = 3.787  
 c) Mediana de la muestra = 3.6  
 e)  $\bar{x}_{tr(20)} = 3.678$   
 f) Son casi iguales.
- 1.3** b) Sí, el proceso de envejecimiento redujo la resistencia a la tensión.  
 c)  $\bar{x}_{\text{Con envejecimiento}} = 209.90$ ,  
 $\bar{x}_{\text{Sin envejecimiento}} = 222.10$   
 d)  $\bar{x}_{\text{Con envejecimiento}} = 210.00$ ,  
 $\bar{x}_{\text{Sin envejecimiento}} = 221.50$   
 Las medias y las medianas son similares en cada grupo.
- 1.5** b) Control  $\bar{x} = 5.60$ ,  $\bar{x} = 5.00$ ,  $\bar{x}_{tr(10)} = 5.13$ .  
 Tratamiento:  $\bar{x} = 7.60$ ,  $\bar{x} = 4.50$ ,  $\bar{x}_{tr(10)} = 5.63$ .  
 c) El valor extremo de 37 en el grupo de tratamiento desempeña un papel significativo en el cálculo de la media.
- 1.7** Varianza de la muestra = 0.943  
 Desviación estándar de la muestra = 0.971
- 1.9** a) Sin envejecimiento: varianza de la muestra = 23.66,  
 desviación estándar de la muestra = 4.86.  
 Con envejecimiento: varianza de la muestra = 42.10,  
 desviación estándar de la muestra = 6.49.  
 b) Con base en las cifras del inciso a), la variación en la situación “con envejecimiento” es menor que en la situación “sin envejecimiento”, aunque la diferencia no sea evidente en la gráfica.

- 1.11** Control: varianza de la muestra = 69.38,  
 desviación estándar de la muestra = 8.33.  
 Tratamiento: varianza de la muestra = 128.04,  
 desviación estándar de la muestra = 11.32.
- 1.13** a) Media = 124.3, mediana = 120  
 b) 175 es una observación extrema.
- 1.15** Sí, el valor  $P = 0.03125$ ; probabilidad de obtener  $HHHHH$  con una moneda legal.
- 1.17** a) Las medias muestrales de no fumadores y fumadores son 30.32 y 43.70, respectivamente.  
 b) Las desviaciones estándar de la muestra de no fumadores y fumadores son 7.13 y 16.93, respectivamente.  
 d) Parece que a los fumadores les toma más tiempo quedarse dormidos. El tiempo que tardan los fumadores en quedarse dormidos es más variable.

**1.19** a)

Tallo	Hojas	Frecuencia
0	22233457	8
1	023558	6
2	035	3
3	03	2
4	057	3
5	0569	4
6	0005	4

b)

Intervalo de clase	Punto medio de la clase	Frecuencia	Frecuencia relativa
0.0 – 0.9	0.45	8	0.267
1.0 – 1.9	1.45	6	0.200
2.0 – 2.9	2.45	3	0.100
3.0 – 3.9	3.45	2	0.067
4.0 – 4.9	4.45	3	0.100
5.0 – 5.9	5.45	4	0.133
6.0 – 6.9	6.45	4	0.133

- c) Media muestral = 2.7967  
 Rango muestral = 6.3  
 Desviación estándar de la muestra = 2.2273

- 1.21 a)  $\bar{x} = 74.02$  y  $\bar{y} = 78$   
 b)  $s = 39.26$

- 1.23 b)  $\bar{x}_{1980} = 395.10$ ,  $\bar{x}_{1990} = 160.15$   
 c) Las emisiones medias cayeron entre 1980 y 1990; la variabilidad también disminuyó porque no hubo emisiones mucho más grandes.

- 1.25 a) Media muestral = 33.31  
 b) Mediana muestral = 26.35  
 d)  $\bar{x}_{tr(10)} = 30.97$

## Capítulo 2

- 2.1 a)  $S = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$   
 b)  $S = \{-5, 1\}$   
 c)  $S = \{T, HT, HHT, HHH\}$   
 d)  $S = \{\text{África, Antártida, Asia, Australia, Europa, Norteamérica, Sudamérica}\}$   
 e)  $S = \phi$
- 2.3  $A = C$
- 2.5 Si utilizamos un diagrama de árbol, obtenemos  
 $S = \{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T\}$
- 2.7  $S_1 = \{HHHH, HHHM, HHMH, HMHH, MHHH, HHMM, HMHM, HMMH, MHMH, MMHH, MHHM, HMMM, MHMM, MMHM, MMMH, MMMM\}$ ;  
 $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 2.9 a)  $A = \{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T\}$   
 b)  $B = \{1TT, 3TT, 5TT\}$   
 c)  $A' = \{3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T\}$   
 d)  $A' \cap B = \{3TT, 5TT\}$   
 e)  $A \cup B = \{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3TT, 5TT\}$
- 2.11 a)  $S = \{H_1H_2, H_1M_1, H_1M_2, H_2H_1, H_2M_1, H_2M_2, M_1H_1, M_1H_2, M_1M_2, M_2H_1, M_2H_2, M_2M_1\}$

- b)  $A = \{H_1H_2, H_1M_1, H_1M_2, H_2H_1, H_2M_1, H_2M_2\}$   
 c)  $B = \{H_1M_1, H_1M_2, H_2M_1, H_2M_2, M_1H_1, M_1H_2, M_2H_1, M_2H_2\}$   
 d)  $C = \{M_1M_2, M_2M_1\}$   
 e)  $A \cap B = \{H_1M_1, H_1M_2, H_2M_1, H_2M_2\}$   
 f)  $A \cup B = \{H_1H_2, H_1M_1, H_1M_2, H_2H_1, H_2M_1, H_2M_2, M_1M_2, M_2M_1\}$

- 2.15 a) {nitrógeno, potasio, uranio, oxígeno}  
 b) {cobre, sodio, zinc, oxígeno}  
 c) {cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, zinc}  
 d) {cobre uranio, zinc}  
 e)  $\phi$   
 f) {oxígeno}

- 2.19 a) La familia experimentará fallas mecánicas, pero no recibirá una infracción por cometer una falta de tránsito, y no llegará a un lugar para acampar que esté lleno.  
 b) La familia recibirá una infracción por cometer una falta de tránsito y llegará a un lugar para acampar que esté lleno, pero no experimentará fallas mecánicas.  
 c) La familia experimentará fallas mecánicas y llegará a un lugar para acampar que esté lleno.  
 d) La familia recibirá una infracción por cometer una falta de tránsito, pero no llegará a un lugar para acampar que esté lleno.  
 e) La familia no experimentará fallas mecánicas.

2.21 18

2.23 156

2.25 20

2.27 48

2.29 210

2.31 72

2.33 a) 1024; b) 243

2.35 362,880

2.37 2880

2.39 a) 40,320; b) 336

2.41 360

- 2.43** 24
- 2.45** 3360
- 2.47** 56
- 2.49** a) La suma de las probabilidades excede a 1.  
b) La suma de las probabilidades es menor que 1.  
c) Una probabilidad negativa.  
d) La probabilidad de un corazón y de una carta negra es cero.
- 2.51**  $S = \{\$10, \$25, \$100\}$ ;  $P(10) = \frac{11}{20}$ ,  $P(25) = \frac{3}{10}$ ,  
 $P(100) = \frac{15}{100}$ ;  $\frac{17}{20}$
- 2.53** a) 0.3; b) 0.2
- 2.55** 10/117
- 2.57** a) 5/26; b) 9/26; c) 19/26
- 2.59** a) 94/54,145; b) 143/39,984
- 2.61** a) 22/25; b) 3/25; c) 17/50
- 2.63** a) 0.32; b) 0.68; vc) oficina o estudio
- 2.65** a) 0.8; b) 0.45; c) 0.55
- 2.67** a) 0.31; b) 0.93; c) 0.31
- 2.69** a) 0.009; b) 0.999; c) 0.01
- 2.71** a) 0.048; b) \$50,000; c) \$12,500
- 2.73** a) La probabilidad de que un convicto que vende drogas también cometa un robo a mano armada.  
b) La probabilidad de que un convicto que comete un robo a mano armada no venda drogas.  
c) La probabilidad de que un convicto que no vende drogas tampoco cometa un robo a mano armada.
- 2.75** a) 14/39; b) 95/112
- 2.77** a) 5/34; b) 3/8
- 2.79** a) 0.018; b) 0.614; c) 0.166; d) 0.479
- 2.81** a) 0.35; b) 0.875; c) 0.55
- 2.83** a) 9/28; b) 3/4; c) 0.91
- 2.85** 0.27
- 2.87** 5/8
- 2.89** a) 0.0016; b) 0.9984
- 2.91** a) 91/323; b) 91/323

**2.93** a) 0.75112; b) 0.2045

**2.95** 0.0960

**2.97** 0.40625

**2.99** 0.1124

**2.101** 0.857

## Capítulo 3

**3.1** Discreta; continua; continua; discreta; discreta; continua.

<b>3.3</b> Espacio muestral	<i>w</i>
HHH	3
HHT	1
HTH	1
THH	1
HTT	-1
THT	-1
TTH	-1
TTT	-3

**3.5** a) 1/30; b) 1/10

**3.7** a) 0.68; b) 0.375

**3.9** b) 19/80

<b>3.11</b> <i>x</i>	0	1	2
<i>f(x)</i>	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$\mathbf{3.13} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ 0.41, & \text{para } 0 \leq x < 1, \\ 0.78, & \text{para } 1 \leq x < 2, \\ 0.94, & \text{para } 2 \leq x < 3, \\ 0.99, & \text{para } 3 \leq x < 4, \\ 1, & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\mathbf{3.15} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ \frac{2}{7}, & \text{para } 0 \leq x < 1, \\ \frac{6}{7}, & \text{para } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

a) 4/7; b) 5/7

**3.17** b) 1/4; c) 0.3

$$\mathbf{3.19} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x < 3; 1/4 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$3.21 \quad a) 3/2; b) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{3/2}, & 0 \leq x < 1; 0.3004 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$3.23 \quad F(w) = \begin{cases} 0, & \text{para } w < -3, \\ \frac{1}{27}, & \text{para } -3 \leq w < -1, \\ \frac{7}{27}, & \text{para } -1 \leq w < 1, \\ \frac{19}{27}, & \text{para } 1 \leq w < 3, \\ 1, & \text{para } w \geq 3 \end{cases}$$

a) 20/27; b) 2/3

$$3.25 \quad \begin{array}{c|ccc} t & 20 & 25 & 30 \\ \hline P(T=t) & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

$$3.27 \quad a) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp(-x/2000), & x \geq 0 \end{cases}$$

b) 0.6065; c) 0.6321

$$3.29 \quad b) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - x^{-3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

c) 0.0156

3.31 a) 0.2231; b) 0.2212

3.33 a)  $k = 280$ ; b) 0.3633; c) 0.0563

3.35 a) 0.1528; b) 0.0446

3.37 a) 1/36; b) 1/15

$$3.39 \quad a) \begin{array}{c|cccc} & f(x, y) & \begin{matrix} x \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{matrix} \\ \hline y & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \frac{3}{70} & \frac{9}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{2}{70} & \frac{18}{70} & \frac{18}{70} & \frac{2}{70} \\ \frac{3}{70} & \frac{9}{70} & \frac{3}{70} & 0 \end{matrix} \end{array}$$

b) 1/2

3.41 a) 1/16; b)  $g(x) = 12x(1-x)^2$ , para  $0 \leq x \leq 1$ ; c) 1/4

3.43 a) 3/64; b) 1/2

3.45 0.6534

3.47 a) Dependiente; b) 1/3

$$3.49 \quad a) \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline g(x) & 0.10 & 0.35 & 0.55 \end{array}$$

$$b) \begin{array}{c|ccc} y & 1 & 2 & 3 \\ \hline h(y) & 0.20 & 0.50 & 0.30 \end{array}$$

c) 0.2857

$$3.51 \quad a) \begin{array}{c|cccc} & f(x, y) & \begin{matrix} x \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{matrix} \\ \hline y & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{55} & \frac{6}{55} & \frac{6}{55} & \frac{1}{55} \\ \frac{6}{55} & \frac{16}{55} & \frac{6}{55} & 0 \\ \frac{6}{55} & \frac{6}{55} & 0 & 0 \\ \frac{1}{55} & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

b) 42/55

3.53 5/8

3.55 Independiente

3.57 a) 3; b) 21/512

3.59 Dependiente

## Capítulo 4

4.1 0.88

4.3 25 centavos

4.5 \$1.23

4.7 \$500

4.9 \$6900

4.11  $(\ln 4)/\pi$

4.13 100 horas

4.15 0

4.17 209

4.19 \$1855

4.21 \$833.33

4.23 a) 35.2; b)  $\mu_x = 3.20$ ;  $\mu_y = 3.00$

4.25 2

4.27 2000 horas

4.29 b) 3/2

4.31 a) 1/6; b)  $(5/6)^5$

4.33 \$5,250,000

4.35 0.74

4.37 1/18; en términos de utilidad real la varianza es  $\frac{1}{18}(5000)^2$

4.39 1/6

4.41 118.9

4.43  $\mu_y = 10$ ;  $\sigma_y^2 = 144$

4.45 0.01

4.47  $-0.0062$

4.49  $\sigma_x^2 = 0.8456, \sigma_x = 0.9196$

4.51  $-1/\sqrt{5}$

4.53  $\mu_{g(X)} = 10.33, \sigma_{g(X)} = 6.66$

4.55 \$0.80

4.57 209

4.59  $\mu = 7/2, \sigma^2 = 15/4$

4.61  $3/14$

4.63 52

4.65 a) 7; b) 0; c) 12.25

4.67  $46/63$

4.69 a)  $E(X) = E(Y) = 1/3$  y  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 4/9$ ; b)  $E(Z) = 2/3$  y  $\text{Var}(Z) = 8/9$

4.71 a) 4; b) 32; 16

4.73 Mediante cálculo directo,  $E(e^Y) = 1884.32$ . Si usamos la aproximación de ajuste de segundo orden,  $E(e^Y) \approx 1883.38$ , que se acerca mucho al valor real.

4.75 0.03125

4.77 a) A lo sumo  $4/9$ ; b) al menos  $5/9$ ; c) al menos  $21/25$ ; d) 10

## Capítulo 5

5.1  $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2$

5.3  $f(x) = \frac{1}{10}$  para  $x = 1, 2, \dots, 10$  y  $f(x) = 0$  en otro caso;  $3/10$

5.5 a) 0.0480; b) 0.2375; c)  $P(X = 5 | p = 0.3) = 0.1789$ ,  $P = 0.3$  es razonable.

5.7 a) 0.0474; b) 0.0171

5.9 a) 0.7073; b) 0.4613; c) 0.1484

5.11 0.1240

5.13 0.8369

5.15 a) 0.0778; b) 0.3370; c) 0.0870

5.17  $\mu = 3.5, \sigma^2 = 1.05$

5.19  $f(x_1, x_2, x_3) = \binom{n}{x_1, x_2, x_3} 0.35^{x_1} 0.05^{x_2} 0.60^{x_3}$

5.21 0.0095

5.23 0.0077

5.25 0.8670

5.27 a) 0.2852; b) 0.9887; c) 0.6083

5.29  $5/14$

5.31  $h(x; 6, 3, 4) = \frac{\binom{4}{x} \binom{2}{3-x}}{\binom{6}{3}}, \text{ para } x = 1, 2, 3;$   
 $P(2 \leq X \leq 3) = 4/5$

5.33 a) 0.3246; b) 0.4496

5.35 0.9517

5.37 a) 0.6815; b) 0.1153

5.39 0.9453

5.41 0.6077

5.43 a)  $4/33$ ; b)  $8/165$

5.45 0.2315

5.47 a) 0.3991; b) 0.1316

5.49 0.0515

5.51  $63/64$

5.53 a) 0.3840; b) 0.0067

5.55 a) 0.0630; b) 0.9730

5.57 a) 0.1429; b) 0.1353

5.59 a) 0.1638; b) 0.032

5.61 0.2657

5.63  $\mu = 6, \sigma^2 = 6$

5.65 a) 0.2650; b) 0.9596

5.67 a) 0.8243; b) 14

5.69 4

5.71  $5.53 \times 10^{-4}; \mu = 7.5$

5.73 a) 0.0137; b) 0.0830

5.75 0.4686

## Capítulo 6

- 6.3 a) 0.6; b) 0.7; c) 0.5
- 6.5 a) 0.0823; b) 0.0250; c) 0.2424; d) 0.9236; e) 0.8133; f) 0.6435
- 6.7 a) 0.54; b) -1.72; c) 1.28
- 6.9 a) 0.1151; b) 16.1; c) 20.275; d) 0.5403
- 6.11 a) 0.0548; b) 0.4514; c) 23 tazas d) 189.95 mililitros
- 6.13 a) 0.8980; b) 0.0287; c) 0.6080
- 6.15 a) 0.0571; b) 99.11%; c) 0.3974; d) 27.952 minutos; e) 0.0092
- 6.17 6.24 años
- 6.19 a) 51%; b) \$18.37
- 6.21 a) 0.0401; b) 0.0244
- 6.23 26 estudiantes
- 6.25 a) 0.3085; b) 0.0197
- 6.27 a) 0.9514; b) 0.0668
- 6.29 a) 0.1171; b) 0.2049
- 6.31 0.1357
- 6.33 a) 0.0778; b) 0.0571; c) 0.6811
- 6.35 a) 0.8749; b) 0.0059
- 6.37 a) 0.0228; b) 0.3974
- 6.41  $2.8e^{-1.8} - 3.4e^{-2.4} = 0.1545$
- 6.43 a)  $\mu = 6$ ;  $\sigma^2 = 18$ ;  
b) entre 0 y 14.485 millones de litros
- 6.45  $\sum_{x=4}^6 \binom{6}{x} (1 - e^{-3/4})^x (e^{-3/4})^{6-x} = 0.3968$
- 6.47 a)  $\sqrt{\pi/2} = 1.2533$  años; b)  $e^{-2}$
- 6.49 a) Media = 0.25, mediana = 0.206; b) varianza = 0.0375; c) 0.2963
- 6.51  $e^{-4} = 0.0183$
- 6.53 a)  $\mu = \alpha\beta = 50$ ; b)  $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = 500$ ;  $\sigma = \sqrt{500}$   
c) 0.815
- 6.55 a) 0.1889; b) 0.0357

6.57 Media =  $e^6$ , varianza =  $e^{12}(e^4 - 1)$

6.59 a)  $e^{-5}$ ; b)  $\beta = 0.2$

## Capítulo 7

7.1  $g(y) = 1/3$ , para  $y = 1, 3, 5$

7.3 
$$g(y_1, y_2) = \left( \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}, 2 - y_1 \right) \\ \times \left( \frac{1}{4} \right)^{(y_1 + y_2)/2} \left( \frac{1}{3} \right)^{(y_1 - y_2)/2} \left( \frac{5}{12} \right)^{2 - y_1};$$
  
para  $y_1 = 0, 1, 2$ ;  $y_2 = -2, -1, 0, 1, 2$ ;  
 $y_2 \leq y_1$ ;  $y_1 + y_2 = 0, 2, 4$

7.7 Distribución gamma con  $\alpha = 3/2$  y  $\beta = m/2b$

7.9 a)  $g(y) = 32/y^3$ , para  $y > 4$ ; b)  $1/4$

7.11  $h(z) = 2(1 - z)$ , para  $0 < z < 1$

7.13  $h(w) = 6 + 6w - 12w^{1/2}$ , para  $0 < w < 1$

7.15 
$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{9\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}}, & 1 < y < 4 \end{cases}$$

7.19 Ambas son iguales a  $\mu$ .

7.23 a) Gamma(2, 1); b) Uniforme(0, 1)

## Capítulo 8

- 8.1 a) Las respuestas de todas las personas en Richmond que tienen teléfono;  
b) Resultados para un número grande o infinito de lanzamientos de una moneda;  
c) Periodo de vida de tal calzado deportivo cuando es utilizado en el torneo profesional;  
d) Todos los posibles intervalos de tiempo para esta abogada que maneja desde su casa hasta su oficina.

8.3 a)  $\bar{x} = 3.2$  segundos; b)  $\tilde{x} = 3.1$  segundos

8.5 a)  $\bar{x} = 2.4$ ; b)  $\tilde{x} = 2$ ; c)  $m = 3$

8.7 a) 53.75; b) 75 y 100

8.9 a) El rango es 10; b)  $s = 3.307$

8.11 a) 2.971; b) 2.971



- 8.13**  $s = 0.585$
- 8.15** a) 45.9; b) 5.1
- 8.17** 0.3159
- 8.19** a) La varianza se reduce de 0.49 a 0.16;  
b) La varianza se incrementa de 0.04 a 0.64.
- 8.21** Sí.
- 8.23** a)  $\mu = 5.3$ ;  $\sigma^2 = 0.81$ ;  
b)  $\mu_{\bar{x}} = 5.3$ ;  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.0225$ ;  
c) 0.9082
- 8.25** a) 0.6898; b) 7.35
- 8.29** 0.5596
- 8.31** a) La probabilidad de que el tiempo promedio de secado sea mayor que 1.0 es 0.0013; b) 13
- 8.33** a)  $1/2$ ; b) 0.3085
- 8.35**  $P(\bar{X} \leq 775 | \mu = 760) = 0.9332$
- 8.37** a) 27.488; b) 18.475; c) 36.415
- 8.39** a) 0.297; b) 32.852; c) 46.928
- 8.41** a) 0.05; b) 0.94
- 8.45** a) 0.975; b) 0.10; c) 0.875; d) 0.99
- 8.47** a) 2.500; b) 1.319; c) 1.714
- 8.49** No;  $\mu > 20$
- 8.51** a) 2.71; b) 3.51; c) 2.92; d) 0.47; e) 0.34
- 8.53** La razón  $F$  es 1.44. Las varianzas no son significativamente diferentes.
- 9.15** (13,075, 33,925)
- 9.17** (6.05, 16.55)
- 9.19** 323.946 a 326.154
- 9.21** Límite superior de predicción: 9.42;  
límite superior de tolerancia: 11.72
- 9.25** Sí, el valor de 6.9 está fuera del intervalo de predicción.
- 9.27** a) (0.9876, 1.0174);  
b) (0.9411, 1.0639);  
c) (0.9334, 1.0716)
- 9.35**  $2.9 < \mu_1 - \mu_2 < 7.1$
- 9.37**  $2.80 < \mu_1 - \mu_2 < 3.40$
- 9.39**  $1.5 < \mu_1 - \mu_2 < 12.5$
- 9.41**  $0.70 < \mu_1 - \mu_2 < 3.30$
- 9.43**  $-6536 < \mu_1 - \mu_2 < 2936$
- 9.45** (-0.74, 6.30)
- 9.47** (-6.92, 36.70)
- 9.49**  $0.54652 < \mu_B - \mu_A < 1.69348$
- 9.51** Método 1:  $0.194 < p < 0.262$ ; método 2:  $0.1957 < p < 0.2639$
- 9.53** a)  $0.498 < p < 0.642$ ; b) error  $\leq 0.072$
- 9.55** a)  $0.739 < p < 0.961$ ; b) no
- 9.57** a)  $0.644 < p < 0.690$ ; b) error  $\leq 0.023$
- 9.59** 2576
- 9.61** 160
- 9.63** 9604
- 9.65**  $-0.0136 < p_F - p_M < 0.0636$
- 9.67**  $0.0011 < p_1 - p_2 < 0.0869$
- 9.69** (-0.0849, 0.0013); no es significativamente diferente.
- 9.71**  $0.293 < \sigma^2 < 6.736$ ; la afirmación es válida
- 9.73**  $3.472 < \sigma^2 < 12.804$
- 9.75**  $9.27 < \sigma < 34.16$
- 9.77**  $0.549 < \sigma_1 / \sigma_2 < 2.690$
- 9.79**  $0.016 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 0.454$ ; no

## Capítulo 9

- 9.1** 56
- 9.3**  $0.3097 < \mu < 0.3103$
- 9.5** a)  $22,496 < \mu < 24,504$ ; b) error  $\leq 1004$
- 9.7** 35
- 9.9**  $10.15 < \mu < 12.45$
- 9.11**  $0.978 < \mu < 1.033$
- 9.13**  $47.722 < \mu < 49.278$
- 9.15** (13,075, 33,925)
- 9.17** (6.05, 16.55)
- 9.19** 323.946 a 326.154
- 9.21** Límite superior de predicción: 9.42;  
límite superior de tolerancia: 11.72
- 9.25** Sí, el valor de 6.9 está fuera del intervalo de predicción.
- 9.27** a) (0.9876, 1.0174);  
b) (0.9411, 1.0639);  
c) (0.9334, 1.0716)
- 9.35**  $2.9 < \mu_1 - \mu_2 < 7.1$
- 9.37**  $2.80 < \mu_1 - \mu_2 < 3.40$
- 9.39**  $1.5 < \mu_1 - \mu_2 < 12.5$
- 9.41**  $0.70 < \mu_1 - \mu_2 < 3.30$
- 9.43**  $-6536 < \mu_1 - \mu_2 < 2936$
- 9.45** (-0.74, 6.30)
- 9.47** (-6.92, 36.70)
- 9.49**  $0.54652 < \mu_B - \mu_A < 1.69348$
- 9.51** Método 1:  $0.194 < p < 0.262$ ; método 2:  $0.1957 < p < 0.2639$
- 9.53** a)  $0.498 < p < 0.642$ ; b) error  $\leq 0.072$
- 9.55** a)  $0.739 < p < 0.961$ ; b) no
- 9.57** a)  $0.644 < p < 0.690$ ; b) error  $\leq 0.023$
- 9.59** 2576
- 9.61** 160
- 9.63** 9604
- 9.65**  $-0.0136 < p_F - p_M < 0.0636$
- 9.67**  $0.0011 < p_1 - p_2 < 0.0869$
- 9.69** (-0.0849, 0.0013); no es significativamente diferente.
- 9.71**  $0.293 < \sigma^2 < 6.736$ ; la afirmación es válida
- 9.73**  $3.472 < \sigma^2 < 12.804$
- 9.75**  $9.27 < \sigma < 34.16$
- 9.77**  $0.549 < \sigma_1 / \sigma_2 < 2.690$
- 9.79**  $0.016 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 0.454$ ; no

$$9.81 \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$9.83 \quad \hat{\beta} = \bar{x}/5$$

$$9.85 \quad \hat{\theta} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$9.87 \quad x \ln p + (1-x) \ln(1-p). \text{ Sea la derivada con respecto a } p = 0; \hat{p} = x = 1.0$$

## Capítulo 10

- 10.1** a) Concluya que menos de 30% del público es alérgico a ciertos productos de queso cuando, de hecho, 30% o más es alérgico.  
b) Concluya que al menos 30% del público es alérgico a ciertos productos de queso cuando, de hecho, menos de 30% es alérgico.
- 10.3** a) La empresa no es culpable;  
b) la empresa es culpable.
- 10.5** a) 0.0559;  
b)  $\beta = 0.0017$ ;  $\beta = 0.00968$ ;  $\beta = 0.5557$
- 10.7** a) 0.1286;  
b)  $\beta = 0.0901$ ;  $\beta = 0.0708$ .  
c) La probabilidad de un error tipo I es algo grande.
- 10.9** a)  $\alpha = 0.0850$ ; b)  $\beta = 0.3410$
- 10.11** a)  $\alpha = 0.1357$ ; b)  $\beta = 0.2578$
- 10.13**  $\alpha = 0.0094$ ;  $\beta = 0.0122$
- 10.15** a)  $\alpha = 0.0718$ ; b)  $\beta = 0.1151$
- 10.17** a)  $\alpha = 0.0384$ ; b)  $\beta = 0.5$ ;  $\beta = 0.2776$
- 10.19**  $z = -2.76$ ; sí,  $\mu < 40$  meses; valor  $P = 0.0029$
- 10.21**  $z = -1.64$ ; valor  $P = 0.10$
- 10.23**  $t = 0.77$ ; no rechace  $H_0$ .
- 10.25**  $z = 8.97$ ; sí,  $\mu > 20,000$  kilómetros; valor  $P < 0.001$
- 10.27**  $t = 12.72$ ; valor  $P < 0.0005$ ; rechace  $H_0$ .
- 10.29**  $t = -1.98$ ; valor  $P = 0.0312$ ; rechace  $H_0$ .
- 10.31**  $z = -2.60$ ; concluya que  $\mu_A - \mu_B \leq 12$  kilogramos.
- 10.33**  $t = 1.50$ ; no hay evidencia suficiente para concluir que el incremento en la concentración de sustrato causaría un incremento en la velocidad media de más de 0.5 micromoles por 30 minutos.
- 10.35**  $t = 0.70$ ; no hay suficiente evidencia que apoye la conclusión de que el suero es efectivo.
- 10.37**  $t = 2.55$ ; rechace  $H_0$ ;  $\mu_1 - \mu_2 > 4$  kilómetros.
- 10.39**  $t' = 0.22$ ; no rechace  $H_0$ .
- 10.41**  $t' = 2.76$ ; rechace  $H_0$ .
- 10.43**  $t = -2.53$ ; rechace  $H_0$ ; la afirmación es válida.
- 10.45**  $t = 2.48$ ; valor  $P < 0.02$ ; rechace  $H_0$ .
- 10.47**  $n = 6$
- 10.49**  $78.28 \approx 79$
- 10.51** 5
- 10.53** a)  $H_0: M_{\text{caliente}} - M_{\text{frío}} = 0$ ,  
 $H_1: M_{\text{caliente}} - M_{\text{frío}} \neq 0$ ;  
b)  $t$  apareada,  $t = 0.99$ ; valor  $P > 0.30$ ; no rechace  $H_0$ .
- 10.55** valor  $P = 0.4044$  (con una prueba de una cola); no se refuta la afirmación.
- 10.57**  $z = 1.44$ ; no rechace  $H_0$ .
- 10.59**  $z = -5.06$  con valor  $P \approx 0$ ; concluya que menos de una quinta parte de los hogares se calienta con petróleo.
- 10.61**  $z = 0.93$  con valor  $P = P(Z > 0.93) = 0.1762$ ; no hay evidencia suficiente para concluir que la nueva medicina es eficaz.
- 10.63**  $z = 2.36$  con valor  $P = 0.0182$ ; sí, la diferencia es significativa.
- 10.65**  $z = 1.10$  con valor  $P = 0.1357$ ; no tenemos evidencia suficiente para concluir que el cáncer de mama es más frecuente en las comunidades urbanas.
- 10.67**  $\chi^2 = 18.13$  con valor  $P = 0.0676$  (de los resultados por computadora); no rechace  $H_0$ ;  $\sigma^2 = 0.03$ .
- 10.69**  $\chi^2 = 63.75$  con valor  $P = 0.8998$  (de los resultados por computadora); no rechace  $H_0$ .
- 10.71**  $\chi^2 = 42.37$  con valor  $P = 0.0117$  (de los resultados por computadora); la máquina está fuera de control.
- 10.73**  $f = 1.33$  con valor  $P = 0.3095$  (de los resultados por computadora); no rechace  $H_0$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

**10.75**  $f = 0.086$  con valor  $P = 0.0328$  (de los resultados por computadora); rechace  $H_0$ :  $\sigma_1 = \sigma_2$  a un nivel mayor que 0.0328.

**10.77**  $f = 19.67$  con valor  $P = 0.0008$  (de los resultados por computadora); rechace  $H_0$ :  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

**10.79**  $\chi^2 = 10.14$ ; rechace  $H_0$ , la razón no es 5:2:2:1.

**10.81**  $\chi^2 = 4.47$ ; no hay evidencia suficiente para afirmar que el dado esté cargado.

**10.83**  $\chi^2 = 3.125$ ; no rechace  $H_0$ : distribución geométrica.

**10.85**  $\chi^2 = 5.19$ ; no rechace  $H_0$ : distribución normal.

**10.87**  $\chi^2 = 5.47$ ; no rechace  $H_0$ .

**10.89**  $\chi^2 = 124.59$ ; sí, la ocurrencia de estos tipos de delitos depende del distrito de la ciudad.

**10.91**  $\chi^2 = 5.92$  con valor  $P = 0.4332$ ; no rechace  $H_0$ .

**10.93**  $\chi^2 = 31.17$  con valor  $P < 0.0001$ ; las actitudes no son homogéneas.

**10.95**  $\chi^2 = 1.84$ ; no rechace  $H_0$ .

b)  $4.324 < \beta_0 < 8.503$ ;

c)  $0.446 < \beta_1 < 3.172$

**11.19** a)  $s^2 = 6.626$ ;

b)  $2.684 < \beta_0 < 8.968$ ;

c)  $0.498 < \beta_1 < 0.637$

**11.21**  $t = -2.24$ ; rechace  $H_0$  y concluya  $\beta < 6$

**11.23** a)  $24.438 < \mu_{Y|24.5} < 27.106$ ;

b)  $21.88 < y_0 < 29.66$

**11.25**  $7.81 < \mu_{Y|1.6} < 10.81$

**11.27** a) 17.1812 mpg;

b) no, el intervalo de confianza de 95% sobre la media mpg es (27.95, 29.60);

c) las millas por galón probablemente excederán a 18.

**11.29** b)  $\hat{y} = 3.4156x$

**11.31** El valor  $f$  para probar la falta de ajuste es 1.58 y se concluye que no se rechaza  $H_0$ . Por lo tanto, la prueba de falta de ajuste es insignificante.

**11.33** a)  $\hat{y} = 2.003x$ ;

b)  $t = 1.40$ , no rechace  $H_0$ .

**11.35**  $f = 1.71$  y valor  $P = 0.2517$ ; la regresión es lineal.

**11.37** a)  $b_0 = 10.812$ ,  $b_1 = -0.3437$ ;

b)  $f = 0.43$ ; la regresión es lineal.

**11.39** a)  $\hat{P} = -11.3251 - 0.0449T$ ;

b) sí;

c)  $R^2 = 0.9355$ ;

d) sí

**11.41** b)  $\hat{N} = -175.9025 + 0.0902Y$ ;  $R^2 = 0.3322$

**11.43**  $r = 0.240$

**11.45** a)  $r = -0.979$ ;

b) Valor  $P = 0.0530$ ; no rechace  $H_0$  a un nivel de 0.025;

c) 95.8%

**11.47** a)  $r = 0.784$ ;

b) rechace  $H_0$  y concluya que  $\rho > 0$ ;

c) 61.5%.

## Capítulo 11

**11.1** a)  $b_0 = 64.529$ ,  $b_1 = 0.561$ ;

b)  $\hat{y} = 81.4$

**11.3** a)  $\hat{y} = 5.8254 + 0.5676x$ ;

c)  $\hat{y} = 34.205$  a  $50^\circ\text{C}$

**11.5** a)  $\hat{y} = 6.4136 + 1.8091x$ ;

b)  $\hat{y} = 9.580$  a temperatura 1.75

**11.7** b)  $\hat{y} = 31.709 + 0.353x$

**11.9** b)  $\hat{y} = 343.706 + 3.221x$ ;

c)  $\hat{y} = \$456$  con costos de publicidad = \$35

**11.11** b)  $\hat{y} = -1847.633 + 3.653x$

**11.13** a)  $\hat{y} = 153.175 - 6.324x$ ;

b)  $\hat{y} = 123$  para  $x = 4.8$  unidades

**11.15** a)  $s^2 = 176.4$ ;

b)  $t = 2.04$ ; no rechace  $H_0$ :  $\beta_1 = 0$

**11.17** a)  $s^2 = 0.40$ ;

## Capítulo 12

- 12.1**  $\hat{y} = 0.5800 + 2.7122x_1 + 2.0497x_2$
- 12.3** a)  $\hat{y} = 27.547 + 0.922x_1 + 0.284x_2$ ;  
b)  $\hat{y} = 84$  para  $x_1 = 64$  y  $x_2 = 4$
- 12.5** a)  $\hat{y} = -102.7132 + 0.6054x_1 + 8.9236x_2 + 1.4374x_3 + 0.0136x_4$ ;  
b)  $\hat{y} = 287.6$
- 12.7**  $\hat{y} = 141.6118 - 0.2819x + 0.0003x^2$
- 12.9** a)  $\hat{y} = 56.4633 + 0.1525x - 0.00008x^2$ ;  
b)  $\hat{y} = 86.7\%$  cuando la temperatura es de  $225^\circ\text{C}$
- 12.11**  $\hat{y} = -6.5122 + 1.9994x_1 - 3.6751x_2 + 2.5245x_3 + 5.1581x_4 + 14.4012x_5$
- 12.13** a)  $\hat{y} = 350.9943 - 1.2720x_1 - 0.1539x_2$ ;  
b)  $\hat{y} = 140.9$
- 12.15**  $\hat{y} = 3.3205 + 0.4210x_1 - 0.2958x_2 + 0.0164x_3 + 0.1247x_4$
- 12.17** 0.1651
- 12.19** 242.72
- 12.21** a)  $\hat{\sigma}_{B_2}^2 = 28.0955$ ; b)  $\hat{\sigma}_{B_1 B_2} = -0.0096$
- 12.23**  $t = 5.91$  con valor  $P = 0.0002$ . Rechaza  $H_0$  y asevere que  $\beta_1 \neq 0$ .
- 12.25**  $0.4516 < \mu_Y | x_1 = 900, x_2 = 1 < 1.2083$   
y  $-0.1640 < y_0 < 1.8239$
- 12.27**  $263.7879 < \mu_Y | x_1 = 75, x_2 = 24, x_3 = 90, x_4 = 98 < 311.3357$  y  $243.7175 < y_0 < 331.4062$
- 12.29** a)  $t = -1.09$  con valor  $P = 0.3562$ ;  
b)  $t = -1.72$  con valor  $P = 0.1841$ ;  
c) sí; no hay suficiente evidencia que demuestre que los valores de  $x_1$  y  $x_2$  son significativos.
- 12.31**  $R^2 = 0.9997$
- 12.33**  $f = 5.106$  con valor  $P = 0.0303$ ; la regresión no es significativa en el nivel 0.01.
- 12.35**  $f = 34.90$  con valor  $P = 0.0002$ ; rechaza  $H_0$  y concluya que  $\beta_1 > 0$ .
- 12.37**  $f = 10.18$  con valor  $P < 0.01$ ;  $x_1$  y  $x_2$  son significativos en la presencia de  $x_3$  y  $x_4$ .
- 12.39** El modelo de dos variables es mejor.
- 12.41** Primer modelo:  $R_{\text{adj}}^2 = 92.7\%$ , C.V. = 9.0385.  
Segundo modelo:  $R_{\text{adj}}^2 = 98.1\%$ , C.V. = 4.6287.  
La prueba  $F$  parcial revela un valor  $P = 0.0002$ ; el modelo 2 es mejor.
- 12.43** No hay mucha diferencia entre utilizar  $x_2$  solo y usar  $x_1$  y  $x_2$  juntos, ya que  $R_{\text{adj}}^2$  constituye 0.7696 en comparación con 0.7591, respectivamente.
- 12.45** a)  $\widehat{\text{mpg}} = 5.9593 - 0.00003773 \text{ odómetro} + 0.3374 \text{ octanaje} - 12.6266z_1 - 12.9846z_2$ ;  
b) sedán  
c) no son significativamente diferentes.
- 12.47** b)  $\hat{y} = 4.690$  segundos;  
c)  $4.450 < \mu_{Y|180,260} < 4.930$
- 12.49**  $\hat{y} = 2.1833 + 0.9576x_2 + 3.3253x_3$
- 12.51** a)  $\hat{y} = -587.211 + 428.433x$ ;  
b)  $\hat{y} = 1180 - 191.691x + 35.20945x^2$ ;  
c) modelo cuadrático
- 12.53**  $\hat{\sigma}_{B_1}^2 = 20,588$ ;  $\hat{\sigma}_{B_{11}}^2 = 62.6502$ ;  
 $\hat{\sigma}_{B_1, B_{11}} = -1103.5$
- 12.55** a) Es mejor el modelo de intersección.
- 12.57** a)  $\hat{y} = 3.1368 + 0.6444x_1 - 0.0104x_2 + 0.5046x_3 - 0.1197x_4 - 2.4618x_5 + 1.5044x_6$ ;  
b)  $\hat{y} = 4.6563 + 0.5133x_3 - 0.1242x_4$ ;  
c) Criterio  $C_p$ : variables  $x_1$  y  $x_2$  con  $s^2 = 0.7317$  y  $R^2 = 0.6476$ ; criterio  $s^2$ : variables  $x_1, x_3$  y  $x_4$  con  $s^2 = 0.7251$  y  $R^2 = 0.6726$ ;  
d)  $\hat{y} = 4.6563 + 0.5133x_3 - 0.1242x_4$ ; éste no pierde mucho en  $s^2$  y  $R^2$ .  
e) dos observaciones tienen valores grandes de  $R$  de Student y deben verificarse.
- 12.59** a)  $\hat{y} = 125.8655 + 7.7586x_1 + 0.0943x_2 - 0.0092x_1x_2$ ;  
b) el modelo que sólo contiene  $x_2$  es el mejor.
- 12.61** a)  $\hat{p} = (1 + e^{2.9949 - 0.0308x})^{-1}$ ;  
b) 1.8515

## Capítulo 13

- 13.1**  $f = 0.31$ ; no hay evidencia suficiente para apoyar la hipótesis de que existen diferencias entre las 6 máquinas.
- 13.3**  $f = 14.52$ ; sí, la diferencia es significativa.