

Probabilidad y estadística

para ingeniería y ciencias



NOVENA EDICIÓN

Walpole • Myers • Myers

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias

Novena edición

Ronald E. Walpole

Roanoke College

Raymond H. Myers

Virginia Tech

Sharon L. Myers

Radford University

Keying Ye

University of Texas at San Antonio

Traducción

Leticia Esther Pineda Ayala

Traductora especialista en estadística

Revisión técnica

Roberto Hernández Ramírez

Departamento de Física y Matemáticas

División de Ingeniería y Tecnologías

Universidad de Monterrey

Linda Margarita Medina Herrera

Departamento de Física y Matemáticas

Escuela de Diseño, Ingeniería y Arquitectura

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,

Campus Ciudad de México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

RONALD E. WALPOLE, RAYMOND H. MYERS,
SHARON L. MYERS Y KEYING YE

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias
Novena edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1417-9

Área: Ingeniería

Formato: 18.5 × 23.5 cm

Páginas: 816

Authorized translation from the English language edition, entitled *PROBABILITY & STATISTICS FOR ENGINEERS & SCIENTISTS 9th Edition*, by RONALD E. WALPOLE, RAYMOND H. MYERS, SHARON L. MYERS and KEYING YE, published by Pearson Education, Inc., publishing as Pearson, Copyright © 2012. All rights reserved.
ISBN 9780321629111

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS 9ª edición* por RONALD E. WALPOLE, RAYMOND H. MYERS, SHARON L. MYERS y KEYING YE, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Pearson, Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Dirección Educación Superior: Mario Contreras

Editor sponsor: Gabriela López Ballesteros

e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com

Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco

Supervisor de Producción: Juan José García Guzmán

Diseño de portada: Dream Studio/Edgar Maldonado

Gerencia editorial

Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

NOVENA EDICIÓN, 2012

D.R. © 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atlacomulco 500-5o. piso

Col. Industrial Atoto

53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-1417-9

ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-1418-6

ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1419-3

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

AGRADECIMIENTOS

Pearson agradece a los profesores usuarios de esta obra y a los centros de estudio por su apoyo y retroalimentación, elementos fundamentales para esta nueva edición de Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.

COLOMBIA

Escuela Colombiana de Ingeniería
Departamento de Matemáticas
Susana Rondón Troncoso

Pontificia Universidad Javeriana
Calí

Departamento de Ciencias
Naturales y Matemáticas
Daniel Enrique González Gómez
María del Pilar Marín Gaviria
Sandra Milena Ramírez Buelvas

Universidad Católica de Colombia
Departamento de Ciencias Básicas
Queeney Madueño Pinto

Universidad de La Salle
Departamento de Ciencias Básicas
Maribel Méndez Cortés
Martha Tatiana Jiménez Valderrama
Milton Armando Reyes Villamil
Myrian Elena Vergara Morales

COSTA RICA

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería en
Producción Industrial
Ivannia Hasbun Fernández

Universidad de Costa Rica
Escuela de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas
Ana Teresa Garita Salas

MÉXICO

Estado de México

Facultad de Estudios Superiores
Cuautitlán C-4

Armando Aguilar Márquez
Fermín Cervantes Martínez
Héctor Coss Garduño
Juan Carlos Axotla García
Miguel de Nazareth Pineda Becerril
Vicente Vázquez Juárez

Tecnológico de Estudios Superiores
de Coacalco

María de la Luz Dávila Flores
Martha Nieto López
Héctor Feliciano Martínez Osorio
Jeanette López Alanís

Tecnológico de Estudios Superiores
de Ecatepec

Héctor Rodríguez Carmona
Ángel Hernández Estrada
Daniel Jaimes Serrano
Ramón Jordán Rocha

Jalisco

Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías (CUCEI)
Departamento de Matemáticas

Agustín Rodríguez Martínez
Carlos Florentino Melgoza Cañedo
Cecilia Garibay López
Dalmiro García Nava

Deliazar Pantoja Espinoza
Gloria Arroyo Cervantes
Javier Nava Gómez
Jorge Luis Rodríguez Gutiérrez
José Ángel Partida Ibarra
José de Jesús Bernal Casillas
José de Jesús Cabrera Chavarría
José de Jesús Rivera Prado
José Solís Rodríguez
Julieta Carrasco García
Laura Esther Cortés Navarro
Lizbeth Díaz Caldera
Maribel Sierra Fuentes
Mario Alberto Prado Alonso
Osvaldo Camacho Castillo
Rosalía Buenrostro Arceo
Samuel Rosalío Cuevas

Universidad del Valle de México,
Zapopan

Departamento de Ingeniería
Abel Vázquez Pérez
Irene Isabel Navarro González
Jorge Eduardo Aguilar Rosas
Miguel Arturo Barreiro González

Sinaloa

Instituto Tecnológico de Culiacán
Ciencias Básicas
Cecilia Norzagaray Gámez

Instituto Tecnológico de Los Mochis
Ciencias Básicas
Jesús Alberto Báez Torres

Contenido

Prefacio	XV
-----------------------	-----------

1	Introducción a la estadística y al análisis de datos.....	1
----------	--	----------

1.1	Panorama general: inferencia estadística, muestras, poblaciones y el papel de la probabilidad	1
1.2	Procedimientos de muestreo; recolección de los datos.....	7
1.3	Medidas de localización: la media y la mediana de una muestra	11
	Ejercicios.....	13
1.4	Medidas de variabilidad.....	14
	Ejercicios.....	17
1.5	Datos discretos y continuos	17
1.6	Modelado estadístico, inspección científica y diagnósticos gráficos.....	18
1.7	Tipos generales de estudios estadísticos: diseño experimental, estudio observacional y estudio retrospectivo	27
	Ejercicios.....	30

2	Probabilidad	35
----------	---------------------------	-----------

2.1	Espacio muestral	35
2.2	Eventos.....	38
	Ejercicios.....	42
2.3	Conteo de puntos muestrales	44
	Ejercicios.....	51
2.4	Probabilidad de un evento.....	52
2.5	Reglas aditivas	56
	Ejercicios.....	59
2.6	Probabilidad condicional, independencia y regla del producto	62
	Ejercicios.....	69
2.7	Regla de Bayes.....	72
	Ejercicios.....	76
	Ejercicios de repaso	77

2.8	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	79
3	Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad	81
3.1	Concepto de variable aleatoria.....	81
3.2	Distribuciones discretas de probabilidad	84
3.3	Distribuciones de probabilidad continua	87
	Ejercicios.....	91
3.4	Distribuciones de probabilidad conjunta	94
	Ejercicios.....	104
	Ejercicios de repaso	107
3.5	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	109
4	Esperanza matemática.....	111
4.1	Media de una variable aleatoria	111
	Ejercicios.....	117
4.2	Varianza y covarianza de variables aleatorias.....	119
	Ejercicios.....	127
4.3	Medias y varianzas de combinaciones lineales de variables aleatorias	128
4.4	Teorema de Chebyshev	135
	Ejercicios.....	137
	Ejercicios de repaso	139
4.5	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	142
5	Algunas distribuciones de probabilidad discreta	143
5.1	Introducción y motivación	143
5.2	Distribuciones binomial y multinomial	143
	Ejercicios.....	150
5.3	Distribución hipergeométrica.....	152
	Ejercicios.....	157
5.4	Distribuciones binomial negativa y geométrica.....	158
5.5	Distribución de Poisson y proceso de Poisson.....	161
	Ejercicios.....	164
	Ejercicios de repaso	166
5.6	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	169

6	Algunas distribuciones continuas de probabilidad	171
6.1	Distribución uniforme continua	171
6.2	Distribución normal	172
6.3	Áreas bajo la curva normal	176
6.4	Aplicaciones de la distribución normal	182
	Ejercicios.....	185
6.5	Aproximación normal a la binomial	187
	Ejercicios.....	193
6.6	Distribución gamma y distribución exponencial	194
6.7	Distribución chi cuadrada	200
6.8	Distribución beta.....	201
6.9	Distribución logarítmica normal.....	201
6.10	Distribución de Weibull (opcional).....	203
	Ejercicios.....	206
	Ejercicios de repaso	207
6.11	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	209
7	Funciones de variables aleatorias (opcional)	211
7.1	Introducción	211
7.2	Transformaciones de variables	211
7.3	Momentos y funciones generadoras de momentos.....	218
	Ejercicios.....	222
8	Distribuciones de muestreo fundamentales y descripciones de datos.....	225
8.1	Muestreo aleatorio	225
8.2	Algunos estadísticos importantes	227
	Ejercicios.....	230
8.3	Distribuciones muestrales	232
8.4	Distribución muestral de medias y el teorema del límite central.....	233
	Ejercicios.....	241
8.5	Distribución muestral de S^2	243
8.6	Distribución t	246
8.7	Distribución F	251
8.8	Gráficas de cuantiles y de probabilidad.....	254
	Ejercicios.....	259
	Ejercicios de repaso	260

8.9	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	262
-----	--	-----

9 Problemas de estimación de una y dos muestras265

9.1	Introducción	265
9.2	Inferencia estadística	265
9.3	Métodos de estimación clásicos.....	266
9.4	Una sola muestra: estimación de la media.....	269
9.5	Error estándar de una estimación puntual.....	276
9.6	Intervalos de predicción.....	277
9.7	Límites de tolerancia.....	280
	Ejercicios.....	282
9.8	Dos muestras: estimación de la diferencia entre dos medias.....	285
9.9	Observaciones pareadas	291
	Ejercicios.....	294
9.10	Una sola muestra: estimación de una proporción	296
9.11	Dos muestras: estimación de la diferencia entre dos proporciones	300
	Ejercicios	302
9.12	Una sola muestra: estimación de la varianza	303
9.13	Dos muestras: estimación de la proporción de dos varianzas.....	305
	Ejercicios.....	307
9.14	Estimación de la máxima verosimilitud (opcional).....	307
	Ejercicios.....	312
	Ejercicios de repaso	313
9.15	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	316

10 Pruebas de hipótesis de una y dos muestras319

10.1	Hipótesis estadísticas: conceptos generales.....	319
10.2	Prueba de una hipótesis estadística.....	321
10.3	Uso de valores P para la toma de decisiones en la prueba de hipótesis	331
	Ejercicios.....	334
10.4	Una sola muestra: pruebas respecto a una sola media	336
10.5	Dos muestras: pruebas sobre dos medias.....	342
10.6	Elección del tamaño de la muestra para la prueba de medias.....	349
10.7	Métodos gráficos para comparar medias	354
	Ejercicios.....	356
10.8	Una muestra: prueba sobre una sola proporción.....	361
10.9	Dos muestras: pruebas sobre dos proporciones	363
	Ejercicios.....	365
10.10	Pruebas de una y dos muestras referentes a varianzas.....	366
	Ejercicios.....	369

10.11	Prueba de la bondad de ajuste.....	371
10.12	Prueba de independencia (datos categóricos).....	374
10.13	Prueba de homogeneidad.....	376
10.14	Estudio de caso de dos muestras.....	380
	Ejercicios.....	382
	Ejercicios de repaso	384
10.15	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	387
11	Regresión lineal simple y correlación.....	389
11.1	Introducción a la regresión lineal.....	389
11.2	El modelo de regresión lineal simple (RLS).....	390
11.3	Mínimos cuadrados y el modelo ajustado	394
	Ejercicios.....	398
11.4	Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados	400
11.5	Inferencias sobre los coeficientes de regresión.....	403
11.6	Predicción	408
	Ejercicios.....	411
11.7	Selección de un modelo de regresión	414
11.8	El método del análisis de varianza.....	414
11.9	Prueba para la linealidad de la regresión: datos con observaciones repetidas.....	416
	Ejercicios.....	421
11.10	Gráficas de datos y transformaciones	424
11.11	Estudio de caso de regresión lineal simple	428
11.12	Correlación	430
	Ejercicios.....	435
	Ejercicios de repaso	436
11.13	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	442
12	Regresión lineal múltiple y ciertos modelos de regresión no lineal	443
12.1	Introducción	443
12.2	Estimación de los coeficientes	444
12.3	Modelo de regresión lineal en el que se utilizan matrices	447
	Ejercicios.....	450
12.4	Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados	453
12.5	Inferencias en la regresión lineal múltiple	455
	Ejercicios.....	461
12.6	Selección de un modelo ajustado mediante la prueba de hipótesis	462

12.7	Caso especial de ortogonalidad (opcional)	467
	Ejercicios.....	471
12.8	Variables categóricas o indicadoras	472
	Ejercicios.....	476
12.9	Métodos secuenciales para la selección del modelo	476
12.10	Estudio de los residuales y violación de las suposiciones (verificación del modelo)	482
12.11	Validación cruzada, C_p , y otros criterios para la selección del modelo	487
	Ejercicios.....	494
12.12	Modelos especiales no lineales para condiciones no ideales.....	496
	Ejercicios.....	500
	Ejercicios de repaso	501
12.13	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	506

13 Experimentos con un solo factor: generales507

13.1	Técnica del análisis de varianza	507
13.2	La estrategia del diseño de experimentos	508
13.3	Análisis de varianza de un factor: diseño completamente aleatorizado (ANOVA de un factor)	509
13.4	Pruebas de la igualdad de varias varianzas	516
	Ejercicios.....	518
13.5	Comparaciones de un grado de libertad.....	520
13.6	Comparaciones múltiples.....	523
	Ejercicios.....	529
13.7	Comparación de un conjunto de tratamientos en bloques	532
13.8	Diseños de bloques completos aleatorizados.....	533
13.9	Métodos gráficos y verificación del modelo	540
13.10	Transformaciones de datos en el análisis de varianza	543
	Ejercicios.....	545
13.11	Modelos de efectos aleatorios.....	547
13.12	Estudio de caso	551
	Ejercicios.....	553
	Ejercicios de repaso	555
13.13	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	559

14 Experimentos factoriales (dos o más factores)561

14.1	Introducción	561
14.2	Interacción en el experimento de dos factores.....	562
14.3	Análisis de varianza de dos factores	565
	Ejercicios.....	575

14.4	Experimentos de tres factores.....	579
	Ejercicios.....	586
14.5	Experimentos factoriales para efectos aleatorios y modelos mixtos	588
	Ejercicios.....	592
	Ejercicios de repaso	594
14.6	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	596
15	Experimentos factoriales 2^k y fracciones	597
15.1	Introducción	597
15.2	El factorial 2^k : cálculo de efectos y análisis de varianza	598
15.3	Experimento factorial 2^k sin réplicas	604
	Ejercicios.....	609
15.4	Experimentos factoriales en un ajuste de regresión.....	612
15.5	El diseño ortogonal	617
	Ejercicios.....	625
15.6	Experimentos factoriales fraccionarios.....	626
15.7	Análisis de experimentos factoriales fraccionados	632
	Ejercicios.....	634
15.8	Diseños de fracciones superiores y de filtrado	636
15.9	Construcción de diseños de resolución III y IV, con 8, 16 y 32 puntos de diseño.....	637
15.10	Otros diseños de resolución III de dos niveles; los diseños de Plackett-Burman	638
15.11	Introducción a la metodología de superficie de respuesta	639
15.12	Diseño robusto de parámetros.....	643
	Ejercicios.....	652
	Ejercicios de repaso	653
15.13	Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos	654
16	Estadística no paramétrica.....	655
16.1	Pruebas no paramétricas	655
16.2	Prueba de rango con signo.....	660
	Ejercicios.....	663
16.3	Prueba de la suma de rangos de Wilcoxon	665
16.4	Prueba de Kruskal-Wallis	668
	Ejercicios.....	670
16.5	Pruebas de rachas.....	671
16.6	Límites de tolerancia.....	674

16.7 Coeficiente de correlación de rango674

 Ejercicios.....677

 Ejercicios de repaso679

17 Control estadístico de la calidad.....681

 17.1 Introducción681

 17.2 Naturaleza de los límites de control.....683

 17.3 Objetivos de la gráfica de control683

 17.4 Gráficas de control para variables.....684

 17.5 Gráficas de control para atributos697

 17.6 Gráficas de control de cusum.....705

 Ejercicios de repaso706

18 Estadística bayesiana709

 18.1 Conceptos bayesianos709

 18.2 Inferencias bayesianas710

 18.3 Estimados bayesianos mediante la teoría de decisión717

 Ejercicios.....718

Bibliografía721

Apéndice A: Tablas y demostraciones estadísticas.....725

Apéndice B: Respuestas a los ejercicios impares

(no de repaso)769

Índice.....785

Prefacio

Enfoque general y nivel matemático

Al elaborar la novena edición, nuestro interés principal no fue tan sólo agregar material nuevo sino brindar claridad y mejor comprensión. Este objetivo se logró en parte al incluir material nuevo al final de los capítulos, lo cual permite que se relacionen mejor. Con cierto afecto llamamos “contratiempos” a los comentarios que aparecen al final de los capítulos, pues son muy útiles para que los estudiantes recuerden la idea general y la forma en que cada capítulo se ajusta a esa imagen; así como para que entiendan las limitaciones y los problemas que resultarían por el uso inadecuado de los procedimientos. Los proyectos para la clase favorecen una mayor comprensión de cómo se utiliza la estadística en el mundo real, por lo que añadimos algunos proyectos en varios capítulos. Tales proyectos brindan a los estudiantes la oportunidad de trabajar solos o en equipo, y de reunir sus propios datos experimentales para realizar inferencias. En algunos casos, el trabajo implica un problema cuya solución ejemplifica el significado de un concepto, o bien, favorece la comprensión empírica de un resultado estadístico importante. Se ampliaron algunos de los ejemplos anteriores y se introdujeron algunos nuevos para crear “estudios de caso”, los cuales incluyen un comentario para aclarar al estudiante un concepto estadístico en el contexto de una situación práctica.

En esta edición seguimos haciendo énfasis en el equilibrio entre la teoría y las aplicaciones. Utilizamos el cálculo y otros tipos de conceptos matemáticos, por ejemplo, de álgebra lineal, casi al mismo nivel que en ediciones anteriores. Las herramientas analíticas para la estadística se cubren de mejor manera utilizando el cálculo en los casos donde el análisis se centra en las reglas de los conceptos de probabilidad. En los capítulos 2 a 10 se destacan las distribuciones de probabilidad y la inferencia estadística. En los capítulos 11 a 15, en los cuales se estudian la regresión lineal y el análisis de varianza, se aplica un poco de álgebra lineal y matrices. Los estudiantes que utilizan este libro deben haber cursado el equivalente a un semestre de cálculo diferencial e integral. El álgebra lineal es útil aunque no indispensable, siempre y cuando el instructor no cubra la sección sobre regresión lineal múltiple del capítulo 12 utilizando álgebra de matrices. Al igual que en las ediciones anteriores, y con la finalidad de desafiar al estudiante, muchos ejercicios se refieren a aplicaciones científicas y de ingeniería a la vida real. Todos los conjuntos de datos asociados con los ejercicios están disponibles para descargar del sitio web <http://www.pearsonenespañol.com/walpole>.

Resumen de los cambios en la novena edición

- Para brindar una mayor comprensión del uso de la estadística en el mundo real, en varios capítulos se agregaron proyectos para la clase. Los estudiantes tienen que generar o reunir sus propios datos experimentales y realizar inferencias a partir de ellos.
- Se agregaron más estudios de caso y otros se ampliaron para ayudar a los usuarios a comprender los métodos estadísticos que se presentan en el contexto de una situación real. Por ejemplo, la interpretación de los límites de confianza, los límites de predicción y los límites de tolerancia se exponen utilizando situaciones de la vida real.
- Se agregaron “contratiempos” al final de algunos capítulos y en otros se ampliaron los que ya se incluían. El objetivo de dichos comentarios es presentar cada capítulo en el contexto de la idea general y analizar la forma en que los capítulos se relacionan entre sí. Otro objetivo es advertir acerca del uso inadecuado de las técnicas estadísticas examinadas en el capítulo.
- El capítulo 1 se mejoró y ahora incluye más estadísticos de una sola cifra y técnicas gráficas. También se incluyó nuevo material fundamental sobre muestreo y diseño experimental.
- Los ejemplos que se agregaron en el capítulo 8 sobre las distribuciones de muestreo tienen la finalidad de motivar a los estudiantes a realizar las pruebas de hipótesis y de los valores P . Esto los prepara para el material más avanzado sobre los temas que se presentan en el capítulo 10.
- El capítulo 12 contiene más información sobre el efecto que tiene una sola variable de regresión en un modelo que presenta una gran colinealidad con otras variables.
- El capítulo 15 ahora introduce material sobre el importante tema de la metodología de superficie de respuesta (MSR). El uso de las variables del ruido en la MSR permite ejemplificar los modelos de la media y la varianza (superficie de respuesta doble).
- En el capítulo 15 se introduce el diseño compuesto central.
- El capítulo 18 incluye más ejemplos y un mejor análisis de cómo se utilizan los métodos bayesianos para la toma de decisiones estadísticas.

Contenido y planeación del curso

Este libro está diseñado para un curso de uno o dos semestres. Un plan razonable para el curso de un semestre podría incluir los capítulos 1 a 10, lo cual daría como resultado un programa que concluye con los fundamentos de la estimación y la prueba de hipótesis. Los profesores que desean que los estudiantes aprendan la regresión lineal simple podrían incluir una parte del capítulo 11. Para quienes desean incluir el análisis de varianza en vez de la regresión, el curso de un semestre podría incluir el capítulo 13 en vez de los capítulos 11 y 12. El capítulo 13 trata el tema del análisis de varianza de un factor. Otra opción consiste en eliminar partes de los capítulos 5 o 6, así como el capítulo 7. Al hacer esto se omitirían las distribuciones discretas o continuas, mismas que incluyen la binomial negativa, la geométrica, la gamma, la de Weibull, la beta y la logarítmica normal. Otros contenidos que se podrían omitir en un programa de un semestre son la estimación de máxima verosimilitud, la predicción y los límites de tolerancia del

capítulo 9. El programa para un semestre suele ser flexible, dependiendo del interés que el profesor tenga en la regresión, el análisis de varianza, el diseño experimental y los métodos de superficie de respuesta (capítulo 15). Existen varias distribuciones discretas y continuas (capítulos 5 y 6) que tienen aplicaciones en diversas áreas de la ingeniería y las ciencias.

Los capítulos 11 a 18 incluyen una gran cantidad de material que se podría agregar al segundo semestre, en caso de que se eligiera un curso de dos semestres. El material sobre la regresión lineal simple y múltiple se estudia en los capítulos 11 y 12, respectivamente. El capítulo 12 puede ser muy flexible. La regresión lineal múltiple incluye “temas especiales”, como variables categóricas o indicadoras, métodos secuenciales para la selección de modelos, por ejemplo, la regresión por etapas, el estudio de residuales para la detección de violaciones de supuestos, la validación cruzada y el uso de los estadísticos PRESS, así como el de C_p y la regresión logística. Se hace hincapié en el uso de regresores ortogonales, un precursor del diseño experimental en el capítulo 15. Los capítulos 13 y 14 ofrecen hasta cierto grado material abundante sobre el análisis de varianza (ANOVA), con modelos fijos, aleatorios y mixtos. En el capítulo 15 se destaca la aplicación de los diseños con dos niveles en el contexto de los experimentos factoriales fraccionarios y completos (2^k). También se ejemplifican los diseños especiales de selección. En el capítulo 15 se incluye asimismo una nueva sección sobre la metodología de superficie de respuesta (MSR), para ejemplificar el uso del diseño experimental con la finalidad de encontrar condiciones óptimas de proceso. Se analiza el ajuste de un modelo de segundo orden utilizando un diseño complejo central. La MSR se amplía para abarcar el análisis de problemas sobre el diseño de un parámetro robusto. Las variables de ruido se utilizan para ajustar modelos dobles de superficie de respuesta. Los capítulos 16, 17 y 18 incluyen una cantidad moderada de material sobre estadística no paramétrica, control de calidad e inferencia bayesiana.

El capítulo 1 es un bosquejo de la inferencia estadística, presentada a un nivel matemático sencillo, pero de manera más amplia que en la octava edición con el propósito de examinar más detalladamente los estadísticos de una sola cifra y las técnicas gráficas. Este capítulo está diseñado para brindar a los estudiantes una presentación preliminar de los conceptos fundamentales que les permitirán entender los detalles posteriores de mayor complejidad. Se presentan conceptos clave sobre muestreo, recolección de datos y diseño experimental, así como los aspectos rudimentarios de las herramientas gráficas y la información que se obtiene a partir de un conjunto de datos. También se agregaron las gráficas de tallo y hojas, y las de caja y bigotes. Las gráficas están mejor organizadas y etiquetadas. El análisis de la incertidumbre y la variación en un sistema se ilustra de forma detallada. Se incluyen ejemplos de cómo clasificar las características importantes de un sistema o proceso científico, y esas ideas se ilustran en ambientes prácticos, como procesos de manufactura, estudios biomédicos, y estudios de sistemas biológicos y científicos de otros tipos. Se efectúa una comparación entre el uso de los datos discretos y continuos; también se hace un mayor énfasis en el uso de modelos y de la información con respecto a los modelos estadísticos que se logran obtener mediante las herramientas gráficas.

En los capítulos 2, 3 y 4 se estudian los conceptos básicos de probabilidad, así como las variables aleatorias discretas y continuas. Los capítulos 5 y 6 se enfocan en las distribuciones discretas y continuas específicas, así como en las relaciones que existen entre ellas. En estos capítulos también se destacan ejemplos de aplicaciones de las distribuciones en estudios reales científicos y de ingeniería. Los estudios de caso, los ejemplos y una gran cantidad de ejercicios permiten a los estudiantes practicar el uso de tales distribuciones. Los proyectos permiten la aplicación práctica de estas distribuciones en la vida

real mediante el trabajo en equipo. El capítulo 7 es el más teórico del libro; en él se expone la transformación de variables aleatorias, y podría ser que no se utilice a menos que el instructor desee impartir un curso relativamente teórico. El capítulo 8 contiene material gráfico, el cual amplía el conjunto básico de herramientas gráficas presentadas y ejemplificadas en el capítulo 1. Aquí se analizan las gráficas de probabilidad y se ilustran con ejemplos. El muy importante concepto de las distribuciones de muestreo se presenta de forma detallada, y se proporcionan ejemplos que incluyen el teorema del límite central y la distribución de una varianza muestral en una situación de muestreo independiente y normal. También se presentan las distribuciones t y F para motivar a los estudiantes a utilizarlas en los capítulos posteriores. El nuevo material del capítulo 8 ayuda a los estudiantes a conocer la importancia de la prueba de hipótesis mediante la presentación del concepto del valor P .

El capítulo 9 contiene material sobre la estimación puntual y de intervalos de una muestra y dos muestras. Un análisis detallado y con ejemplos destaca las diferencias entre los tipos de intervalos (intervalos de confianza, intervalos de predicción e intervalos de tolerancia). Un estudio de caso ilustra los tres tipos de intervalos estadísticos en el contexto de una situación de manufactura. Este estudio de caso destaca las diferencias entre los intervalos, sus fuentes y los supuestos en que se basan, así como cuáles son los intervalos que requieren diferentes tipos de estudios o preguntas. Se añadió un método de aproximación para las inferencias sobre una proporción. El capítulo 10 inicia con una presentación básica sobre el significado práctico de la prueba de hipótesis, con un énfasis en conceptos fundamentales como la hipótesis nula y la alternativa, el papel que desempeñan la probabilidad y el valor P , así como la potencia de una prueba. Después, se presentan ejemplos de pruebas sobre una o dos muestras en condiciones estándar. También se describe la prueba t de dos muestras con observaciones en pares (apareadas). Un estudio de caso ayuda a los estudiantes a entender el verdadero significado de una interacción de factores, así como los problemas que en ocasiones surgen cuando existen interacciones entre tratamientos y unidades experimentales. Al final del capítulo 10 se incluye una sección muy importante que relaciona los capítulos 9 y 10 (estimación y prueba de hipótesis) con los capítulos 11 a 16, donde se destaca el modelamiento estadístico. Es importante que el estudiante esté consciente de la fuerte relación entre los capítulos mencionados.

Los capítulos 11 y 12 incluyen material sobre la regresión lineal simple y múltiple, respectivamente. En esta edición ponemos mucho más atención en el efecto que tiene la colinealidad entre las variables de regresión. Se presenta una situación que muestra cómo el papel que desempeña una sola variable de regresión depende en gran parte de cuáles son los regresores que la acompañan en el modelo. Después se revisan los procedimientos secuenciales para la selección del modelo (hacia adelante, hacia atrás, por etapas, etcétera) con respecto a este concepto, así como los fundamentos para utilizar ciertos tipos de valores P con tales procedimientos. En el capítulo 12 se estudia material sobre los modelos no lineales con una presentación especial de la regresión logística, la cual tiene aplicaciones en ingeniería y en las ciencias biológicas. El material sobre la regresión múltiple es muy extenso, de manera que, como antes se expuso, plantea una gran flexibilidad. Al final del capítulo 12 se incluye un comentario que lo relaciona con los capítulos 14 y 15. Se agregaron varios elementos para fomentar la comprensión del material en general. Por ejemplo, al final del capítulo se describen algunas dificultades y problemas que podrían surgir. Se indica que existen tipos de respuestas que ocurren de forma natural en la práctica, por ejemplo, respuestas de proporciones, de conteo y muchas otras, con las cuales no se debe utilizar la regresión estándar de mínimos cuadrados

debido a que los supuestos de normalidad no se cumplen, y transgredirlos causaría errores muy graves. Se sugiere utilizar la transformación de datos para reducir el problema en algunos casos. Nuevamente, los capítulos 13 y 14 sobre el tema del análisis de varianza tienen cierta flexibilidad. En el capítulo 13 se estudia el ANOVA de un factor en el contexto de un diseño completamente aleatorio. Algunos temas complementarios incluyen las pruebas sobre las varianzas y las comparaciones múltiples. Se destacan las comparaciones de tratamientos en bloque, junto con el tema de los bloques completos aleatorizados. Los métodos gráficos se extendieron al ANOVA para ayudar al estudiante a complementar la inferencia formal con una inferencia pictórica que facilita la presentación del material a los científicos y a los ingenieros. Se incluye un nuevo proyecto donde los estudiantes incorporan la aleatoriedad adecuada a cada plan, y se utilizan técnicas gráficas y valores P en el informe de los resultados. En el capítulo 14 se amplía el material del capítulo 13 para ajustar dos o más factores dentro de una estructura factorial. La presentación del ANOVA en el capítulo 14 incluye la creación de modelos aleatorios y de efectos fijos. En el capítulo 15 se estudia material relacionado con los diseños factoriales 2^k ; los ejemplos y los estudios de caso plantean el uso de diseños de selección y fracciones especiales de orden superior del factorial 2^k . Dos elementos nuevos y especiales son la metodología de superficie de respuesta (MSR) y el diseño de parámetros robustos. Son temas que se relacionan en un estudio de caso que describe e ilustra un diseño doble de superficie de respuesta, así como un análisis que incluye el uso de superficies de respuesta de la media y la varianza de procesos.

Programa de cómputo

Los estudios de caso, que inician en el capítulo 8, muestran impresiones de listas de resultados por computadora y material gráfico generado con los programas SAS y MINITAB. El hecho de incluir los cálculos por computadora refleja nuestra idea de que los estudiantes deben contar con la experiencia de leer e interpretar impresiones de listas de resultados y gráficas por computadora, incluso si el software que se utiliza en el libro no coincide con el que utiliza el profesor. La exposición a más de un tipo de programas aumentaría la experiencia de los estudiantes. No hay razones para creer que el programa utilizado en el curso coincidirá con el que el estudiante tendrá que utilizar en la práctica después de graduarse. Cuando sea pertinente, los ejemplos y los estudios de caso en el libro se complementarán con diversos tipos de gráficas residuales, cuantilares, de probabilidad normal y de otros tipos. Tales gráficas se incluyen especialmente en los capítulos 11 a 15.

Complementos

Manual de soluciones para el instructor. Este recurso contiene respuestas a todos los ejercicios del libro y se puede descargar del Centro de Recursos para Profesor de Pearson.

Diapositivas de PowerPoint® ISBN-10: 0-321-73731-8; ISBN-13: 978-0-321-73731-1. Las diapositivas incluyen la mayoría de las figuras y las tablas del libro; se pueden descargar del Centro de Recursos para el Profesor de Pearson.

Reconocimientos

Estamos en deuda con los colegas que revisaron las anteriores ediciones de este libro y que nos dieron muchas sugerencias útiles para esta edición. Ellos son David Groggel, de *Miami University*; Lance Hemlow, de *Raritan Valley Community College*; Ying Ji, de *University of Texas at San Antonio*; Thomas Kline, de *University of Northern Iowa*; Sheila Lawrence, de *Rutgers University*; Luis Moreno, de *Broome County Community College*; Donald Waldman, de *University of Colorado-Boulder* y Marlene Will, de *Spalding University*. También queremos agradecer a Delray Schulz, de *Millersville University*, Roxane Burrows, de *Hocking College* y Frank Chmely por asegurarse de la exactitud de este libro.

Nos gustaría agradecer a la editorial y a los servicios de producción suministrados por muchas personas de Pearson/Prentice Hall, sobre todo a Deirdre Lynch, la editora en jefe, a Christopher Cummings, el editor de adquisiciones, a Christine O'Brien, la editora de contenido ejecutivo, a Tracy Patruno, la editora de producción y a Sally Lifland, la editora de producción. Apreciamos los comentarios y sugerencias útiles de Gail Magin, la correctora de estilo. También estamos en deuda con el Centro de Asesoría Estadística de Virginia Tech, que fue nuestra fuente de muchos conjuntos reales de datos.

R.H.M.
S.L.M.
K.Y.

CAPÍTULO 1

Introducción a la estadística y al análisis de datos

1.1 Panorama general: inferencia estadística, muestras, poblaciones y el papel de la probabilidad

Desde inicios de la década de los ochenta del siglo pasado y hasta lo que ha transcurrido del siglo **xxi** la industria estadounidense ha puesto una enorme atención en el *mejoramiento de la calidad*. Se ha dicho y escrito mucho acerca del “milagro industrial” en Japón, que comenzó a mediados del siglo **xx**. Los japoneses lograron el éxito en donde otras naciones fallaron, a saber, en la creación de un entorno que permita la manufactura de productos de alta calidad. Gran parte del éxito de los japoneses se atribuye al uso de *métodos estadísticos* y del pensamiento estadístico entre el personal gerencial.

Empleo de datos científicos

El uso de métodos estadísticos en la manufactura, el desarrollo de productos alimenticios, el software para computadoras, las fuentes de energía, los productos farmacéuticos y muchas otras áreas implican el acopio de información o **datos científicos**. Por supuesto que la obtención de datos no es algo nuevo, ya que se ha realizado por más de mil años. Los datos se han recabado, resumido, reportado y almacenado para su examen cuidadoso. Sin embargo, hay una diferencia profunda entre el acopio de información científica y la **estadística inferencial**. Esta última ha recibido atención legítima en décadas recientes.

La estadística inferencial generó un número enorme de “herramientas” de los métodos estadísticos que utilizan los profesionales de la estadística. Los métodos estadísticos se diseñan para contribuir al proceso de realizar juicios científicos frente a la **incertidumbre** y a la **variación**. Dentro del proceso de manufactura, la densidad de producto de un material específico no siempre será la misma. De hecho, si un proceso es discontinuo en vez de continuo, la densidad de material no sólo variará entre los lotes que salen de la línea de producción (variación de un lote a otro), sino también dentro de los propios lotes. Los métodos estadísticos se utilizan para analizar datos de procesos como el anterior; el objetivo de esto es tener una mejor orientación respecto de cuáles cambios se deben realizar en el proceso para mejorar su **calidad**. En este proceso la calidad bien podría

definirse en relación con su grado de acercamiento a un valor de densidad meta en armonía con *qué parte de las veces* se cumple este criterio de cercanía. A un ingeniero podría interesarle un instrumento específico que se utilice para medir el monóxido de azufre en estudios sobre la contaminación atmosférica. Si el ingeniero dudara respecto de la eficacia del instrumento, tendría que tomar en cuenta dos **fuentes de variación**. La primera es la variación en los valores del monóxido de azufre que se encuentran en el mismo lugar el mismo día. La segunda es la variación entre los valores observados y la cantidad **real** de monóxido de azufre que haya en el aire en ese momento. Si cualquiera de estas dos fuentes de variación es excesivamente grande (según algún estándar determinado por el ingeniero), quizá se necesite remplazar el instrumento. En un estudio biomédico de un nuevo fármaco que reduce la hipertensión, 85% de los pacientes experimentaron alivio; aunque por lo general se reconoce que el medicamento actual o el “viejo” alivia a 80% de los pacientes que sufren hipertensión crónica. Sin embargo, el nuevo fármaco es más caro de elaborar y podría tener algunos efectos colaterales. ¿Se debería adoptar el nuevo medicamento? Éste es un problema con el que las empresas farmacéuticas, junto con la FDA (Federal Drug Administration), se encuentran a menudo (a veces es mucho más complejo). De nuevo se debe tomar en cuenta las necesidades de variación. El valor del “85%” se basa en cierto número de pacientes seleccionados para el estudio. Tal vez si se repitiera el estudio con nuevos pacientes ¿el número observado de “éxitos” sería de 75%! Se trata de una variación natural de un estudio a otro que se debe tomar en cuenta en el proceso de toma de decisiones. Es evidente que tal variación es importante, ya que la variación de un paciente a otro es endémica al problema.

Variabilidad en los datos científicos

En los problemas analizados anteriormente los métodos estadísticos empleados tienen que ver con la variabilidad y en cada caso la variabilidad que se estudia se encuentra en datos científicos. Si la densidad del producto observada en el proceso fuera siempre la misma y siempre fuera la esperada, no habría necesidad de métodos estadísticos. Si el dispositivo para medir el monóxido de azufre siempre diera el mismo valor y éste fuera exacto (es decir, correcto), no se requeriría análisis estadístico. Si entre un paciente y otro no hubiera variabilidad inherente a la respuesta al medicamento (es decir, si el fármaco siempre causara alivio o nunca aliviara), la vida sería muy sencilla para los científicos de las empresas farmacéuticas y de la FDA, y los estadísticos no serían necesarios en el proceso de toma de decisiones. Los investigadores de la estadística han originado un gran número de métodos analíticos que permiten efectuar análisis de datos obtenidos de sistemas como los descritos anteriormente, lo cual refleja la verdadera naturaleza de la ciencia que conocemos como estadística inferencial, a saber, el uso de técnicas que, al permitirnos obtener conclusiones (o inferencias) sobre el sistema científico, nos permiten ir más allá de sólo reportar datos. Los profesionales de la estadística usan leyes fundamentales de probabilidad e inferencia estadística para sacar conclusiones respecto de los sistemas científicos. La información se colecta en forma de **muestras** o conjuntos de **observaciones**. En el capítulo 2 se introduce el proceso de muestreo, el cual se continúa analizando a lo largo de todo el libro.

Las muestras se reúnen a partir de **poblaciones**, que son conjuntos de todos los individuos o elementos individuales de un tipo específico. A veces una población representa un sistema científico. Por ejemplo, un fabricante de tarjetas para computadora podría desear eliminar defectos. Un proceso de muestreo implicaría recolectar información de 50 tarjetas de computadora tomadas aleatoriamente durante el proceso. En este caso la población

sería representada por todas las tarjetas de computadora producidas por la empresa en un periodo específico. Si se lograra mejorar el proceso de producción de las tarjetas para computadora y se reuniera una segunda muestra de tarjetas, cualquier conclusión que se obtuviera respecto de la efectividad del cambio en el proceso debería extenderse a toda la población de tarjetas para computadora que se produzcan en el “proceso mejorado”. En un experimento con fármacos se toma una muestra de pacientes y a cada uno se le administra un medicamento específico para reducir la presión sanguínea. El interés se enfoca en obtener conclusiones sobre la población de quienes sufren hipertensión. A menudo, cuando la planeación ocupa un lugar importante en la agenda, es muy importante el acopio de datos científicos en forma sistemática. En ocasiones la planeación está, por necesidad, bastante limitada. Con frecuencia nos enfocamos en ciertas propiedades o características de los elementos u objetos de la población. Cada característica tiene importancia de ingeniería específica o, digamos, biológica para el “cliente”, el científico o el ingeniero que busca aprender algo acerca de la población. Por ejemplo, en uno de los casos anteriores la calidad del proceso se relacionaba con la densidad del producto al salir del proceso. Un(a) ingeniero(a) podría necesitar estudiar el efecto de las condiciones del proceso, la temperatura, la humedad, la cantidad de un ingrediente particular, etcétera. Con ese fin podría mover de manera sistemática estos **factores** a cualesquiera niveles que se sugieran, de acuerdo con cualquier prescripción o **diseño experimental** que se desee. Sin embargo, un científico silvicultor que está interesado en estudiar los factores que influyen en la densidad de la madera en cierta clase de árbol no necesariamente tiene que diseñar un experimento. Este caso quizá requiera un **estudio observacional**, en el cual los datos se acopian en el campo pero no es posible seleccionar de antemano los **niveles de los factores**. Ambos tipos de estudio se prestan a los métodos de la inferencia estadística. En el primero, la calidad de las inferencias dependerá de la planeación adecuada del experimento. En el segundo, el científico está a expensas de lo que pueda recopilar. Por ejemplo, si un agrónomo se interesara en estudiar el efecto de la lluvia sobre la producción de plantas sería lamentable que recopilara los datos durante una sequía.

Es bien conocida la importancia del pensamiento estadístico para los administradores y el uso de la inferencia estadística para el personal científico. Los investigadores obtienen mucho de los datos científicos. Los datos proveen conocimiento acerca del fenómeno científico. Los ingenieros de producto y de procesos aprenden más en sus esfuerzos fuera de línea para mejorar el proceso. También logran una comprensión valiosa al reunir datos de producción (supervisión en línea) sobre una base regular, lo cual les permite determinar las modificaciones que se requiere realizar para mantener el proceso en el nivel de calidad deseado.

En ocasiones un científico sólo desea obtener alguna clase de resumen de un conjunto de datos representados en la muestra. En otras palabras, no requiere estadística inferencial. En cambio, le sería útil un conjunto de estadísticos o la **estadística descriptiva**. Tales números ofrecen un sentido de la ubicación del centro de los datos, de la variabilidad en los datos y de la naturaleza general de la distribución de observaciones en la muestra. Aunque no se incorporen métodos estadísticos específicos que lleven a la **inferencia estadística**, se puede aprender mucho. A veces la estadística descriptiva va acompañada de gráficas. El software estadístico moderno permite el cálculo de **medias, medianas, desviaciones estándar** y otros estadísticos de una sola cifra, así como el desarrollo de gráficas que presenten una “huella digital” de la naturaleza de la muestra. En las secciones siguientes veremos definiciones e ilustraciones de los estadísticos y descripciones de recursos gráficos como histogramas, diagramas de tallo y hojas, diagramas de dispersión, gráficas de puntos y diagramas de caja.

El papel de la probabilidad

En los capítulos 2 a 6 de este libro se presentan los conceptos fundamentales de la probabilidad. Un estudio concienzudo de las bases de tales conceptos permitirá al lector comprender mejor la inferencia estadística. Sin algo de formalismo en teoría de probabilidad, el estudiante no podría apreciar la verdadera interpretación del análisis de datos a través de los métodos estadísticos modernos. Es muy natural estudiar probabilidad antes de estudiar inferencia estadística. Los elementos de probabilidad nos permiten cuantificar la fortaleza o “confianza” en nuestras conclusiones. En este sentido, los conceptos de probabilidad forman un componente significativo que complementa los métodos estadísticos y ayuda a evaluar la consistencia de la inferencia estadística. Por consiguiente, la disciplina de la probabilidad brinda la transición entre la estadística descriptiva y los métodos inferenciales. Los elementos de la probabilidad permiten expresar la conclusión en el lenguaje que requieren los científicos y los ingenieros. El ejemplo que sigue permite al lector comprender la noción de un valor- P , el cual a menudo proporciona el “fundamento” en la interpretación de los resultados a partir del uso de métodos estadísticos.

Ejemplo 1.1: Suponga que un ingeniero se encuentra con datos de un proceso de producción en el cual se muestrean 100 artículos y se obtienen 10 defectuosos. Se espera y se anticipa que ocasionalmente habrá artículos defectuosos. Obviamente estos 100 artículos representan la muestra. Sin embargo, se determina que, a largo plazo, la empresa sólo puede tolerar 5% de artículos defectuosos en el proceso. Ahora bien, los elementos de probabilidad permiten al ingeniero determinar qué tan concluyente es la información muestral respecto de la naturaleza del proceso. En este caso la **población** representa conceptualmente todos los artículos posibles en el proceso. Suponga que averiguamos que, *si el proceso es aceptable*, es decir, que su producción no excede un 5% de artículos defectuosos, hay una probabilidad de 0.0282 de obtener 10 o más artículos defectuosos en una muestra aleatoria de 100 artículos del proceso. Esta pequeña probabilidad sugiere que, en realidad, a largo plazo el proceso tiene un porcentaje de artículos defectuosos mayor al 5%. En otras palabras, en las condiciones de un proceso aceptable casi nunca se obtendría la información muestral que se obtuvo. Sin embargo, ¡se obtuvo! Por lo tanto, es evidente que la probabilidad de que se obtuviera sería mucho mayor si la tasa de artículos defectuosos del proceso fuera mucho mayor que 5%. ─

A partir de este ejemplo se vuelve evidente que los elementos de probabilidad ayudan a traducir la información muestral en algo concluyente o no concluyente acerca del sistema científico. De hecho, lo aprendido probablemente constituya información inquietante para el ingeniero o administrador. Los métodos estadísticos (que examinaremos con más detalle en el capítulo 10) produjeron un valor- P de 0.0282. El resultado sugiere que es **muy probable que el proceso no sea aceptable**. En los capítulos siguientes se trata detenidamente el concepto de **valor- P** . El próximo ejemplo brinda una segunda ilustración.

Ejemplo 1.2: Con frecuencia, la naturaleza del estudio científico señalará el papel que desempeñan la probabilidad y el razonamiento deductivo en la inferencia estadística. El ejercicio 9.40 en la página 294 proporciona datos asociados con un estudio que se llevó a cabo en el Virginia Polytechnic Institute and State University acerca del desarrollo de una relación entre las raíces de los árboles y la acción de un hongo. Los minerales de los hongos se transfieren a los árboles, y los azúcares de los árboles a los hongos. Se plantaron dos muestras de 10 plántones de roble rojo norteamericano en un invernadero, una de ellas contenía

plantones tratados con nitrógeno y la otra plantones sin tratamiento. Todas las demás condiciones ambientales se mantuvieron constantes. Todos los plantones contenían el hongo *Pisolithus tinctorus*. En el capítulo 9 se incluyen más detalles. Los pesos en gramos de los tallos se registraron después de 140 días y los datos se presentan en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Conjunto de datos del ejemplo 1.2

Sin nitrógeno	Con nitrógeno
0.32	0.26
0.53	0.43
0.28	0.47
0.37	0.49
0.47	0.52
0.43	0.75
0.36	0.79
0.42	0.86
0.38	0.62
0.43	0.46

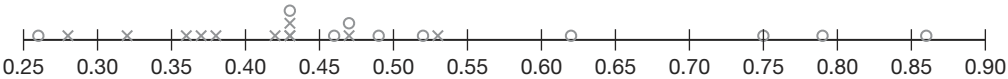


Figura 1.1: Gráfica de puntos de los datos de peso del tallo.

En este ejemplo hay dos muestras tomadas de dos **poblaciones distintas**. El objetivo del experimento es determinar si el uso del nitrógeno influye en el crecimiento de las raíces. Éste es un estudio comparativo (es decir, es un estudio en el que se busca comparar las dos poblaciones en cuanto a ciertas características importantes). Los datos se deben graficar como se indica en el diagrama de puntos de la figura 1.1. Los valores \circ representan los datos “con nitrógeno” y los valores \times los datos “sin nitrógeno”.

Observe que la apariencia general de los datos podría sugerir al lector que, en promedio, el uso del nitrógeno aumenta el peso del tallo. Cuatro observaciones con nitrógeno son considerablemente más grandes que cualquiera de las observaciones sin nitrógeno. La mayoría de las observaciones sin nitrógeno parece estar por debajo del centro de los datos. La apariencia del conjunto de datos parece indicar que el nitrógeno es efectivo. Pero, ¿cómo se cuantifica esto? ¿Cómo se puede resumir toda la evidencia visual aparente de manera que tenga algún significado? Como en el ejemplo anterior, se pueden utilizar los fundamentos de la probabilidad. Las conclusiones se resumen en una declaración de probabilidad o valor- P . Aquí no demostraremos la inferencia estadística que produce la probabilidad resumida. Igual que en el ejemplo 1.1, tales métodos se estudiarán en el capítulo 10. El problema gira alrededor de la “probabilidad de que datos como éstos se puedan observar”, *dado que el nitrógeno no tiene efecto*; en otras palabras, *dado que ambas muestras se generaron a partir de la misma población*. Suponga que esta probabilidad es pequeña, digamos de 0.03; un porcentaje que podría constituir suficiente evidencia de que el uso del nitrógeno en realidad influye en el peso promedio del tallo en los plantones de roble rojo (aparentemente lo aumenta). ■

¿Cómo trabajan juntas la probabilidad y la inferencia estadística?

Es importante para el lector que comprenda claramente la diferencia entre la disciplina de la probabilidad, una ciencia por derecho propio, y la disciplina de la estadística inferencial. Como señalamos, el uso o la aplicación de conceptos de probabilidad permite interpretar la vida cotidiana a partir de los resultados de la inferencia estadística. En consecuencia, se afirma que la inferencia estadística emplea los conceptos de probabilidad. A partir de los dos ejemplos anteriores aprendimos que la información muestral está disponible para el analista y que, con la ayuda de métodos estadísticos y elementos de probabilidad, podemos obtener conclusiones acerca de alguna característica de la población (en el ejemplo 1.1 el proceso al parecer no es aceptable, y en el ejemplo 1.2 parece ser que el nitrógeno en verdad influye en el peso promedio de los tallos). Así, para un problema estadístico, **la muestra, junto con la estadística inferencial, nos permite obtener conclusiones acerca de la población, ya que la estadística inferencial utiliza ampliamente los elementos de probabilidad.** Tal razonamiento es *inductivo* por naturaleza. Ahora, cuando avancemos al capítulo 2 y los siguientes, el lector encontrará que, a diferencia de lo que hicimos en nuestros dos ejemplos actuales, no nos enfocaremos en resolver problemas estadísticos. En muchos de los ejemplos que estudiaremos no utilizaremos muestras. Lo que haremos será describir claramente una población con todas sus características conocidas. Las preguntas importantes se enfocarán en la naturaleza de los datos que hipotéticamente se podrían obtener a partir de la población. Entonces, podríamos afirmar que los **elementos de probabilidad nos permiten sacar conclusiones acerca de las características de los datos hipotéticos que se tomen de la población, con base en las características conocidas de la población.** Esta clase de razonamiento es *deductivo* por naturaleza. La figura 1.2 muestra la relación básica entre la probabilidad y la estadística inferencial.



Figura 1.2: Relación básica entre la probabilidad y la estadística inferencial.

Ahora bien, en términos generales, ¿cuál campo es más importante, el de la probabilidad o el de la estadística? Ambos son muy importantes y evidentemente se complementan. La única certeza respecto de la didáctica de ambas disciplinas radica en el hecho de que, si la estadística se debe enseñar con un nivel mayor al de un simple “libro de cocina”, entonces hay que comenzar por enseñar la disciplina de la probabilidad. Esta regla se basa en el hecho de que un analista no podrá aprender nada sobre una población a partir de una muestra hasta que aprenda los rudimentos de incertidumbre en esa muestra. Considere el ejemplo 1.1; en el que la pregunta se centra en si la población, definida por el proceso, tiene o no más de 5% de elementos defectuosos. En otras palabras, la suposición es que 5 de cada 100 artículos, **en promedio**, salen defectuosos. Ahora bien, la muestra contiene 100 artículos y 10 están defectuosos. ¿Esto apoya o refuta la supo-

sición? Aparentemente la refuta porque 10 artículos de cada 100 parecen ser “un trozo grande”. ¿Pero cómo podríamos saber esto sin tener nociones de probabilidad? La única manera en que podremos aprender las condiciones en las cuales el proceso es aceptable (5% de defectuosos) es estudiando el material de los siguientes capítulos. La probabilidad de obtener 10 o más artículos defectuosos en una muestra de 100 es de 0.0282.

Dimos dos ejemplos en donde los elementos de probabilidad ofrecen un resumen que el científico o el ingeniero pueden usar como evidencia para basar una decisión. El puente entre los datos y la conclusión está, por supuesto, basado en los fundamentos de la inferencia estadística, la teoría de la distribución y las distribuciones de muestreos que se examinarán en capítulos posteriores.

1.2 Procedimientos de muestreo; recolección de los datos

En la sección 1.1 estudiamos muy brevemente el concepto de muestreo y el proceso de muestreo. Aunque el muestreo parece ser un concepto simple, la complejidad de las preguntas que se deben contestar acerca de la población, o las poblaciones, en ocasiones requiere que el proceso de muestreo sea muy complejo. El concepto de muestreo se examinará de manera técnica en el capítulo 8, pero aquí nos esforzaremos por dar algunas nociones de sentido común sobre el muestreo. Ésta es una transición natural hacia el análisis del concepto de variabilidad.

Muestreo aleatorio simple

La importancia del muestreo adecuado gira en torno al grado de confianza con que el analista es capaz de responder las preguntas que se plantean. Supongamos que sólo hay una población en el problema. Recuerde que en el ejemplo 1.2 había dos poblaciones implicadas. El **muestreo aleatorio simple** significa que cierta muestra dada de un *tamaño muestral* específico tiene la misma probabilidad de ser seleccionada que cualquiera otra muestra del mismo tamaño. El término **tamaño muestral** simplemente indica el número de elementos en la muestra. Evidentemente, en muchos casos se puede utilizar una tabla de números aleatorios para seleccionar la muestra. La ventaja del muestreo aleatorio simple radica en que ayuda a eliminar el problema de tener una muestra que refleje una población diferente (quizá más restringida) de aquella sobre la cual se necesitan realizar las inferencias. Por ejemplo, se elige una muestra para contestar diferentes preguntas respecto de las preferencias políticas en cierta entidad de Estados Unidos. La muestra implica la elección de, digamos, 1 000 familias y una encuesta a aplicar. Ahora bien, suponga que no se utiliza el muestreo aleatorio, sino que todas o casi todas las 1 000 familias se eligen de una zona urbana. Se considera que las preferencias políticas en las áreas rurales difieren de las de las áreas urbanas. En otras palabras, la muestra obtenida en realidad confinó a la población y, por lo tanto, las inferencias también se tendrán que restringir a la “población confinada”, y en este caso el confinamiento podría resultar indeseable. Si, de hecho, se necesitara hacer las inferencias respecto de la entidad como un todo, a menudo se diría que la muestra con un tamaño de 1 000 familias aquí descrita es una **muestra sesgada**.

Como antes sugerimos, el muestreo aleatorio simple no siempre es adecuado. El enfoque alternativo que se utilice dependerá de la complejidad del problema. Con frecuencia, por ejemplo, las unidades muestrales no son homogéneas y se dividen naturalmente en grupos que no se traslapan y que son homogéneos. Tales grupos se llaman *estratos*, y

un procedimiento llamado *muestreo aleatorio estratificado* implica la selección al azar de una muestra *dentro* de cada estrato. El propósito de esto es asegurarse de que ninguno de los estratos esté sobrerrepresentado ni subrepresentado. Por ejemplo, suponga que se aplica una encuesta a una muestra para reunir opiniones preliminares respecto de un referéndum que se piensa realizar en determinada ciudad. La ciudad está subdividida en varios grupos étnicos que representan estratos naturales y, para no excluir ni sobrerrepresentar a algún grupo de cada uno de ellos, se eligen muestras aleatorias separadas de cada grupo.

Diseño experimental

El concepto de aleatoriedad o asignación aleatoria desempeña un papel muy importante en el área del **diseño experimental**, que se presentó brevemente en la sección 1.1 y es un fundamento muy importante en casi cualquier área de la ingeniería y de la ciencia experimental. Estudiaremos este tema con detenimiento en los capítulos 13 a 15. Sin embargo, es conveniente introducirlo aquí brevemente en el contexto del muestreo aleatorio. Un conjunto de los llamados **tratamientos** o **combinaciones de tratamientos** se vuelven las poblaciones que se van a estudiar o a comparar en algún sentido. Un ejemplo es el tratamiento “con nitrógeno” *versus* “sin nitrógeno” del ejemplo 1.2. Otro ejemplo sencillo sería “placebo” *versus* “medicamento activo” o, en un estudio sobre la fatiga por corrosión, tendríamos combinaciones de tratamientos que impliquen especímenes con recubrimiento o sin recubrimiento, así como condiciones de alta o de baja humedad, a las cuales se somete el espécimen. De hecho, habrían cuatro combinaciones de factores o de tratamientos (es decir, 4 poblaciones), y se podrían formular y responder muchas preguntas científicas usando los métodos estadísticos e inferenciales. Considere primero la situación del ejemplo 1.2. En el experimento hay 20 plantones enfermos implicados. A partir de los datos es fácil observar que los plantones son diferentes entre sí. Dentro del grupo tratado con nitrógeno (o del grupo que no se trató con nitrógeno) hay **variabilidad** considerable en el peso de los tallos, la cual se debe a lo que por lo general se denomina **unidad experimental**. Éste es un concepto tan importante en la estadística inferencial que no es posible describirlo totalmente en este capítulo. La naturaleza de la variabilidad es muy importante. Si es demasiado grande, debido a que resulta de una condición de excesiva falta de homogeneidad en las unidades experimentales, la variabilidad “eliminará” cualquier diferencia detectable entre ambas poblaciones. Recuerde que en este caso eso no ocurrió.

La gráfica de puntos de la figura 1.1 y el valor-*P* indican una clara distinción entre esas dos condiciones. ¿Qué papel desempeñan tales unidades experimentales en el proceso mismo de recolección de los datos? El enfoque por sentido común y, de hecho, estándar, es asignar los 20 plantones o unidades experimentales **aleatoriamente a las dos condiciones o tratamientos**. En el estudio del medicamento podríamos decidir utilizar un total de 200 pacientes disponibles, quienes serán claramente distinguibles en algún sentido. Ellos son las unidades experimentales. No obstante, tal vez todos tengan una condición crónica que podría ser tratada con el fármaco. Así, en el denominado **diseño completamente aleatorio**, se asignan al azar 100 pacientes al placebo y 100 al medicamento activo. De nuevo, son estas unidades experimentales en el grupo o tratamiento las que producen la variabilidad en el resultado de los datos (es decir, la variabilidad en el resultado medido), digamos, de la presión sanguínea o cualquier valor de la eficacia de un medicamento que sea importante. En el estudio de la fatiga por corrosión las unidades experimentales son los especímenes que se someten a la corrosión.

¿Por qué las unidades experimentales se asignan aleatoriamente?

¿Cuál es el posible efecto negativo de no asignar aleatoriamente las unidades experimentales a los tratamientos o a las combinaciones de tratamientos? Esto se observa más claramente en el caso del estudio del medicamento. Entre las características de los pacientes que producen variabilidad en los resultados están la edad, el género y el peso. Tan sólo suponga que por casualidad el grupo del placebo contiene una muestra de personas que son predominantemente más obesas que las del grupo del tratamiento. Quizá los individuos más obesos muestren una tendencia a tener una presión sanguínea más elevada, lo cual evidentemente sesgará el resultado y, por lo tanto, cualquier resultado que se obtenga al aplicar la inferencia estadística podría tener poco que ver con el efecto del medicamento, pero mucho con las diferencias en el peso de ambas muestras de pacientes.

Deberíamos enfatizar la importancia del término **variabilidad**. La variabilidad excesiva entre las unidades experimentales “disfraza” los hallazgos científicos. En secciones posteriores intentaremos clasificar y cuantificar las medidas de variabilidad. En las siguientes secciones presentaremos y analizaremos cantidades específicas que se calculan en las muestras; las cantidades proporcionan una idea de la naturaleza de la muestra respecto de la ubicación del centro de los datos y la variabilidad de los mismos. Un análisis de varias de tales medidas de un solo número permite ofrecer un preámbulo de que la información estadística será un componente importante de los métodos estadísticos que se utilizarán en capítulos posteriores. Estas medidas, que ayudan a clasificar la naturaleza del conjunto de datos, caen en la categoría de **estadísticas descriptivas**. Este material es una introducción a una presentación breve de los métodos pictóricos y gráficos que van incluso más allá en la caracterización del conjunto de datos. El lector debería entender que los métodos estadísticos que se presentan aquí se utilizarán a lo largo de todo el texto. Para ofrecer una imagen más clara de lo que implican los estudios de diseño experimental se presenta el ejemplo 1.3.

Ejemplo 1.3: Se realizó un estudio sobre la corrosión con la finalidad de determinar si al recubrir una aleación de aluminio con una sustancia retardadora de la corrosión, el metal se corroe menos. El recubrimiento es un protector que los anunciantes afirman que minimiza el daño por fatiga en esta clase de material. La influencia de la humedad sobre la magnitud de la corrosión también es de interés. Una medición de la corrosión puede expresarse en millares de ciclos hasta la ruptura del metal. Se utilizaron dos niveles de recubrimiento: sin recubrimiento y con recubrimiento químico contra la corrosión. También se consideraron dos niveles de humedad relativa, de 20% y 80%, respectivamente.

El experimento implica las cuatro combinaciones de tratamientos que se listan en la siguiente tabla. Se usan ocho unidades experimentales, que son especímenes de aluminio preparados, dos de los cuales se asignan aleatoriamente a cada una de las cuatro combinaciones de tratamiento. Los datos se presentan en la tabla 1.2.

Los datos de la corrosión son promedios de los dos especímenes. En la figura 1.3 se presenta una gráfica con los promedios. Un valor relativamente grande de ciclos hasta la ruptura representa una cantidad pequeña de corrosión. Como se podría esperar, al parecer un incremento en la humedad hace que empeore la corrosión. El uso del procedimiento de recubrimiento químico contra la corrosión parece reducir la corrosión. ■

En este ejemplo de diseño experimental el ingeniero eligió sistemáticamente las cuatro combinaciones de tratamiento. Para vincular esta situación con los conceptos con los que el lector se ha familiarizado hasta aquí, deberíamos suponer que las condiciones

Tabla 1.2: Datos para el ejemplo 1.3

Recubrimiento	Humedad	Promedio de corrosión en miles de ciclos hasta la ruptura
Sin recubrimiento	20%	975
	80%	350
Con recubrimiento químico contra la corrosión	20%	1750
	80%	1550

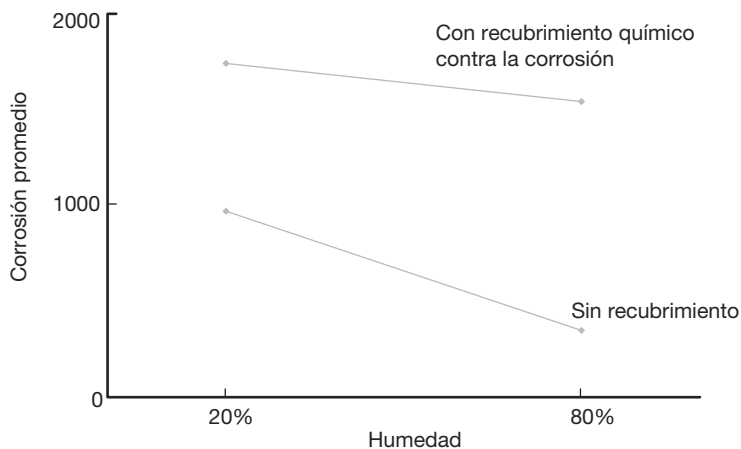


Figura 1.3: Resultados de corrosión para el ejemplo 1.3.

que representan las cuatro combinaciones de tratamientos son cuatro poblaciones separadas y que los dos valores de corrosión observados en cada una de las poblaciones constituyen importantes piezas de información. La importancia del promedio al captar y resumir ciertas características en la población se destacará en la sección 1.3. Aunque a partir de la figura podríamos sacar conclusiones acerca del papel que desempeña la humedad y del efecto de recubrir los especímenes, no podemos evaluar con exactitud los resultados de un punto de vista analítico sin tomar en cuenta la *variabilidad alrededor del promedio*. De nuevo, como señalamos con anterioridad, si los dos valores de corrosión en cada una de las combinaciones de tratamientos son muy cercanos, la imagen de la figura 1.3 podría ser una descripción precisa. Pero si cada valor de la corrosión en la figura es un promedio de dos valores que están ampliamente dispersos, entonces esta variabilidad podría, de hecho, en verdad “eliminar” cualquier información que parezca difundirse cuando tan sólo se observan los promedios. Los siguientes ejemplos ilustran estos conceptos:

1. La asignación aleatoria a las combinaciones de tratamientos (recubrimiento/humedad) de las unidades experimentales (especímenes).
2. El uso de promedios muestrales (valores de corrosión promedio) para resumir la información muestral.
3. La necesidad de considerar las medidas de variabilidad en el análisis de cualquier muestra o conjunto de muestras.

Este ejemplo sugiere la necesidad de estudiar el tema que se expone en las secciones 1.3 y 1.4, es decir, el de las estadísticas descriptivas que indican las medidas de la ubicación del centro en un conjunto de datos, y aquellas con las que se mide la variabilidad.

1.3 Medidas de localización: la media y la mediana de una muestra

Las medidas de localización están diseñadas para brindar al analista algunos valores cuantitativos de la ubicación central o de otro tipo de los datos en una muestra. En el ejemplo 1.2 parece que el centro de la muestra con nitrógeno claramente excede al de la muestra sin nitrógeno. Una medida obvia y muy útil es la **media de la muestra**. La media es simplemente un promedio numérico.

Definición 1.1: Suponga que las observaciones en una muestra son x_1, x_2, \dots, x_n . La **media de la muestra**, que se denota con \bar{x} , es

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Hay otras medidas de tendencia central que se explican con detalle en capítulos posteriores. Una medida importante es la **mediana de la muestra**. El propósito de la mediana de la muestra es reflejar la tendencia central de la muestra de manera que no sea influida por los valores extremos.

Definición 1.2: Dado que las observaciones en una muestra son x_1, x_2, \dots, x_n , acomodadas en **orden de magnitud creciente**, la mediana de la muestra es

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1)/2}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por ejemplo, suponga que el conjunto de datos es el siguiente: 1.7, 2.2, 3.9, 3.11 y 14.7. La media y la mediana de la muestra son, respectivamente,

$$\bar{x} = 5.12, \quad \tilde{x} = 3.9.$$

Es evidente que la media es influida de manera considerable por la presencia de la observación extrema, 14.7; en tanto que el lugar de la mediana hace énfasis en el verdadero “centro” del conjunto de datos. En el caso del conjunto de datos de dos muestras del ejemplo 1.2, las dos medidas de tendencia central para las muestras individuales son

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ (sin nitrógeno)} &= 0.399 \text{ gramos,} \\ \tilde{x} \text{ (sin nitrógeno)} &= \frac{0.38 + 0.42}{2} = 0.400 \text{ gramos,} \\ \bar{x} \text{ (con nitrógeno)} &= 0.565 \text{ gramos,} \\ \tilde{x} \text{ (con nitrógeno)} &= \frac{0.49 + 0.52}{2} = 0.505 \text{ gramos.} \end{aligned}$$

Es evidente que hay una diferencia conceptual entre la media y la mediana. Para el lector con ciertas nociones de ingeniería quizá sea de interés que la media de la muestra

es el **centroide de los datos** en una muestra. En cierto sentido es el punto en el cual se puede colocar un fulcro (apoyo) para equilibrar un sistema de “pesos”, que son las ubicaciones de los datos individuales. Esto se muestra en la figura 1.4 respecto de la muestra “con nitrógeno”.

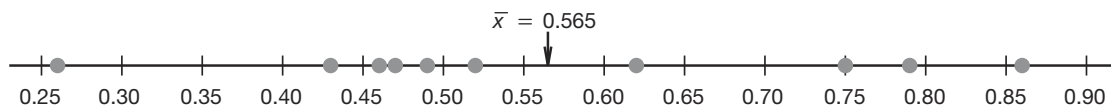


Figura 1.4: Media de la muestra como centroide del peso del tallo con nitrógeno.

En capítulos posteriores la base para el cálculo de \bar{x} es un **estimado** de la **media de la población**. Como antes señalamos, el propósito de la inferencia estadística es obtener conclusiones acerca de las características o **parámetros** y la **estimación** es una característica muy importante de la inferencia estadística.

La mediana y la media pueden ser muy diferentes entre sí. Observe, sin embargo, que en el caso de los datos del peso de los tallos el valor de la media de la muestra para “sin nitrógeno” es bastante similar al valor de la mediana.

Otras medidas de localización

Hay muchos otros métodos para calcular la ubicación del centro de los datos en la muestra. No los trataremos en este momento. Por lo general las alternativas para la media de la muestra se diseñan con el fin de generar valores que representen relación entre la media y la mediana. Rara vez utilizamos alguna de tales medidas. Sin embargo, es aleccionador estudiar una clase de estimadores conocida como **media recortada**, la cual se calcula “quitando” cierto porcentaje de los valores mayores y menores del conjunto. Por ejemplo, la media recortada al 10% se encuentra eliminando tanto el 10% de los valores mayores como el 10% de los menores, y calculando el promedio de los valores restantes. En el caso de los datos del peso de los tallos, eliminaríamos el valor más alto y el más bajo, ya que el tamaño de la muestra es 10 en cada caso. De manera que para el grupo sin nitrógeno la media recortada al 10% está dada por

$$\bar{x}_{\text{rec}(10)} = \frac{0.32 + 0.37 + 0.47 + 0.43 + 0.36 + 0.42 + 0.38 + 0.43}{8} = 0.39750,$$

y para la media recortada al 10% del grupo con nitrógeno tenemos

$$\bar{x}_{\text{rec}(10)} = \frac{0.43 + 0.47 + 0.49 + 0.52 + 0.75 + 0.79 + 0.62 + 0.46}{8} = 0.56625.$$

Observe que en este caso, como se esperaba, las medias recortadas están cerca tanto de la media como de la mediana para las muestras individuales. Desde luego, el enfoque de la media recortada es menos sensible a los valores extremos que la media de la muestra, pero no tan insensible como la mediana. Además, el método de la media recortada utiliza más información que la mediana de la muestra. Advierta que la mediana de la muestra es, de hecho, un caso especial de la media recortada, en el cual se eliminan todos los datos de la muestra y queda sólo el central o dos observaciones.

Ejercicios

1.1 Se registran las siguientes mediciones para el tiempo de secado (en horas) de cierta marca de pintura esmaltada.

3.4	2.5	4.8	2.9	3.6
2.8	3.3	5.6	3.7	2.8
4.4	4.0	5.2	3.0	4.8

Suponga que las mediciones constituyen una muestra aleatoria simple.

- ¿Cuál es el tamaño de la muestra anterior?
- Calcule la media de la muestra para estos datos.
- Calcule la mediana de la muestra.
- Grafique los datos utilizando una gráfica de puntos.
- Calcule la media recortada al 20% para el conjunto de datos anterior.
- ¿La media muestral para estos datos es más o menos descriptiva como centro de localización, que la media recortada?

1.2 Según la revista *Chemical Engineering*, una propiedad importante de una fibra es su absorción del agua. Se toma una muestra aleatoria de 20 pedazos de fibra de algodón y se mide la absorción de cada uno. Los valores de absorción son los siguientes:

18.71	21.41	20.72	21.81	19.29	22.43	20.17
23.71	19.44	20.50	18.92	20.33	23.00	22.85
19.25	21.77	22.11	19.77	18.04	21.12	

- Calcule la media y la mediana muestrales para los valores de la muestra anterior.
- Calcule la media recortada al 10%.
- Elabore una gráfica de puntos con los datos de la absorción.
- Si se utilizan sólo los valores de la media, la mediana y la media recortada, ¿hay evidencia de valores extremos en los datos?

1.3 Se utiliza cierto polímero para los sistemas de evacuación de los aviones. Es importante que el polímero sea resistente al proceso de envejecimiento. Se utilizaron veinte especímenes del polímero en un experimento. Diez se asignaron aleatoriamente para exponerse a un proceso de envejecimiento acelerado del lote, el cual implica la exposición a altas temperaturas durante 10 días. Se hicieron las mediciones de resistencia a la tensión de los especímenes y se registraron los siguientes datos sobre resistencia a la tensión en psi.

Sin envejecimiento: 227 222 218 217 225
218 216 229 228 221

Con envejecimiento: 219 214 215 211 209
218 203 204 201 205

- Elabore la gráfica de puntos de los datos.
- ¿En la gráfica que obtuvo parece que el proceso de envejecimiento tuvo un efecto en la resistencia

a la tensión de este polímero? Explique su respuesta.

- Calcule la resistencia a la tensión de la media de la muestra en las dos muestras.
- Calcule la mediana de ambas. Analice la similitud o falta de similitud entre la media y la mediana de cada grupo.

1.4 En un estudio realizado por el Departamento de Ingeniería Mecánica del Tecnológico de Virginia se compararon las varillas de acero que abastecen dos compañías diferentes. Se fabricaron diez resortes de muestra con las varillas de metal proporcionadas por cada una de las compañías y se registraron sus medidas de flexibilidad. Los datos son los siguientes:

Compañía A:	9.3	8.8	6.8	8.7	8.5
	6.7	8.0	6.5	9.2	7.0
Compañía B:	11.0	9.8	9.9	10.2	10.1
	9.7	11.0	11.1	10.2	9.6

- Calcule la media y la mediana de la muestra para los datos de ambas compañías.
- Grafique los datos para las dos compañías en la misma línea y explique su conclusión respecto de cualquier aparente diferencia entre las dos compañías.

1.5 Veinte hombres adultos de entre 30 y 40 años de edad participaron en un estudio para evaluar el efecto de cierto régimen de salud, que incluye dieta y ejercicio, en el colesterol sanguíneo. Se eligieron aleatoriamente diez para el grupo de control y los otros diez se asignaron para participar en el régimen como el grupo de tratamiento durante un periodo de seis meses. Los siguientes datos muestran la reducción en el colesterol que experimentaron en ese periodo los 20 sujetos:

Grupo de control:	7	3	-4	14	2
	5	22	-7	9	5
Grupo de tratamiento:	-6	5	9	4	4
	12	37	5	3	3

- Elabore una gráfica de puntos con los datos de ambos grupos en la misma gráfica.
- Calcule la media, la mediana y la media recortada al 10% para ambos grupos.
- Explique por qué la diferencia en las medias sugiere una conclusión acerca del efecto del régimen, en tanto que la diferencia en las medianas o las medias recortadas sugiere una conclusión diferente.

1.6 La resistencia a la tensión del caucho de silicio se considera una función de la temperatura de vulcanizado. Se llevó a cabo un estudio en el que se prepararon muestras de 12 especímenes del caucho utilizando temperaturas de vulcanizado de 20°C y 45°C. Los siguientes

Rango y desviación estándar de la muestra

Así como hay muchas medidas de tendencia central o de localización, hay muchas medidas de dispersión o variabilidad. Quizá la más simple sea el **rango de la muestra** $X_{\max} - X_{\min}$. El rango puede ser muy útil y se examina con amplitud en el capítulo 17 sobre *control estadístico de calidad*. La medida muestral de dispersión que se utiliza más a menudo es la **desviación estándar de la muestra**. Nuevamente denotemos con x_1, x_2, \dots, x_n los valores de la muestra.

Definición 1.3: La **varianza de la muestra**, denotada con s^2 , está dada por

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

La **desviación estándar de la muestra**, denotada con s , es la raíz cuadrada positiva de s^2 , es decir,

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Para el lector debería quedar claro que la desviación estándar de la muestra es, de hecho, una medida de variabilidad. Una variabilidad grande en un conjunto de datos produce valores relativamente grandes de $(x - \bar{x})^2$ y, por consiguiente, una varianza muestral grande. La cantidad $n - 1$ a menudo se denomina **grados de libertad asociados con la varianza** estimada. En este ejemplo sencillo los grados de libertad representan el número de piezas de información independientes disponibles para calcular la variabilidad. Por ejemplo, suponga que deseamos calcular la varianza de la muestra y la desviación estándar del conjunto de datos (5, 17, 6, 4). El promedio de la muestra es $\bar{x} = 8$. El cálculo de la varianza implica:

$$(5 - 8)^2 + (17 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (4 - 8)^2 = (-3)^2 + 9^2 + (-2)^2 + (-4)^2.$$

Las cantidades dentro de los paréntesis suman cero. En general, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ (véase el ejercicio 1.16 de la página 31). Entonces, el cálculo de la varianza de una muestra no implica n **desviaciones cuadradas independientes** de la media \bar{x} . De hecho, como el último valor de $x - \bar{x}$ es determinado por los primeros $n - 1$ valores, decimos que éstas son $n - 1$ “piezas de información” que produce s^2 . Por consiguiente, hay $n - 1$ grados de libertad en vez de n grados de libertad para calcular la varianza de una muestra.

Ejemplo 1.4: En un ejemplo que se estudia ampliamente en el capítulo 10, un ingeniero se interesa en probar el “sesgo” en un medidor de pH. Los datos se recaban con el medidor mediante la medición del pH de una sustancia neutra (pH = 7.0). Se toma una muestra de tamaño 10 y se obtienen los siguientes resultados:

7.07 7.00 7.10 6.97 7.00 7.03 7.01 7.01 6.98 7.08.

La media de la muestra \bar{x} está dada por

$$\bar{x} = \frac{7.07 + 7.00 + 7.10 + \dots + 7.08}{10} = 7.0250.$$

La varianza de la muestra s^2 está dada por

$$s^2 = \frac{1}{9}[(7.07 - 7.025)^2 + (7.00 - 7.025)^2 + (7.10 - 7.025)^2 + \cdots + (7.08 - 7.025)^2] = 0.001939.$$

Como resultado, la desviación estándar de la muestra está dada por

$$s = \sqrt{0.001939} = 0.044.$$

Así que la desviación estándar de la muestra es 0.0440 con $n - 1 = 9$ grados de libertad. ■

Unidades para la desviación estándar y la varianza

A partir de la definición 1.3 debería ser evidente que la varianza es una medida de la desviación cuadrática promedio de la media \bar{x} . Empleamos el término *desviación cuadrática promedio* aun cuando la definición utilice una división entre $n - 1$ grados de libertad en vez de n . Desde luego, si n es grande, la diferencia en el denominador es inconsecuente. Por lo tanto, la varianza de la muestra tiene unidades que son el cuadrado de las unidades en los datos observados; aunque la desviación estándar de la muestra se encuentra en unidades lineales. Considere los datos del ejemplo 1.2. Los pesos del tallo se miden en gramos. Como resultado, las desviaciones estándar de la muestra están en gramos y las varianzas se miden en gramos². De hecho, las desviaciones estándar individuales son 0.0728 gramos para el caso sin nitrógeno y 0.1867 gramos para el grupo con nitrógeno. Observe que la desviación estándar en verdad indica una variabilidad mucho más grande en la muestra con nitrógeno. Esta condición se destaca en la figura 1.1.

¿Cuál es la medida de variabilidad más importante?

Como indicamos antes, el rango de la muestra tiene aplicaciones en el área del control estadístico de la calidad. Quizás el lector considere que es redundante utilizar la varianza de la muestra y la desviación estándar de la muestra. Ambas medidas reflejan el mismo concepto en la variabilidad de la medición, pero la desviación estándar de la muestra mide la variabilidad en unidades lineales; en tanto que la varianza muestral se mide en unidades cuadradas. Ambas desempeñan papeles importantes en el uso de los métodos estadísticos. Mucho de lo que se logra en el contexto de la inferencia estadística implica la obtención de conclusiones acerca de las características de poblaciones. Entre tales características son constantes los denominados **parámetros de la población**. Dos parámetros importantes son la **media de la población** y la **varianza de la población**. La varianza de la muestra desempeña un papel explícito en los métodos estadísticos que se utilizan para obtener inferencias sobre la varianza de la población. La desviación estándar de la muestra desempeña un papel importante, junto con la media de la muestra, en las inferencias que se realizan acerca de la media de la población. En general, la varianza se considera más en la teoría inferencial, mientras que la desviación estándar se utiliza más en aplicaciones.

Ejercicios

1.7 Considere los datos del tiempo de secado del ejercicio 1.1 de la página 13. Calcule la varianza de la muestra y la desviación estándar de la muestra.

1.8 Calcule la varianza de la muestra y la desviación estándar para los datos de absorción del agua del ejercicio 1.2 de la página 13.

1.9 El ejercicio 1.3 de la página 13 presentó datos de resistencia a la tensión de dos muestras, una en la que los especímenes se expusieron a un proceso de envejecimiento y otra en la que no se efectuó tal proceso en los especímenes.

- Calcule la varianza de la muestra, así como su desviación estándar, en cuanto a la resistencia a la tensión en ambas muestras.
- ¿Parece haber alguna evidencia de que el envejecimiento afecta la variabilidad en la resistencia a la

tensión? (Véase también la gráfica para el ejercicio 1.3 de la página 13).

1.10 Para los datos del ejercicio 1.4 de la página 13 calcule tanto la media como la varianza de la “flexibilidad” para las compañías A y B. ¿Parece que hay una diferencia de flexibilidad entre la compañía A y la compañía B?

1.11 Considere los datos del ejercicio 1.5 de la página 13. Calcule la varianza de la muestra y la desviación estándar de la muestra para ambos grupos: el de tratamiento y el de control.

1.12 Para el ejercicio 1.6 de la página 13 calcule la desviación estándar muestral de la resistencia a la tensión para las muestras, de forma separada para ambas temperaturas. ¿Parece que un incremento en la temperatura influye en la variabilidad de la resistencia a la tensión? Explique su respuesta.

1.5 Datos discretos y continuos

La inferencia estadística a través del análisis de estudios observacionales o de diseños experimentales se utiliza en muchas áreas científicas. Los datos reunidos pueden ser **discretos** o **continuos**, según el área de aplicación. Por ejemplo, un ingeniero químico podría estar interesado en un experimento que lo lleve a condiciones en que se maximice la producción. Aquí, por supuesto, la producción se expresaría en porcentaje, o gramos/libra, medida en un continuo. Por otro lado, un toxicólogo que realice un experimento de combinación de fármacos quizás encuentre datos que son binarios por naturaleza (es decir, el paciente responde o no lo hace).

En la teoría de la probabilidad se hacen distinciones importantes entre datos discretos y continuos que nos permiten hacer inferencias estadísticas. Con frecuencia las aplicaciones de la inferencia estadística se encuentran cuando se trabaja con *datos por conteo*. Por ejemplo, un ingeniero podría estar interesado en estudiar el número de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en, digamos, 1 milisegundo. Al personal responsable de la eficiencia de una instalación portuaria podría interesarle conocer las características del número de buques petroleros que llegan diariamente a cierta ciudad portuaria. En el capítulo 5 se examinarán varios escenarios diferentes que conducen a distintas formas de manejo de los datos para situaciones con datos por conteo.

Incluso en esta fase inicial del texto se debería poner especial atención a algunos detalles que se asocian con datos binarios. Son muchas las aplicaciones que requieren el análisis estadístico de datos binarios. Con frecuencia la medición que se utiliza en el análisis es la *proporción muestral*. En efecto, la situación binaria implica dos categorías. Si en los datos hay n unidades y x se define como el número que cae en la categoría 1, entonces $n - x$ cae en la categoría 2. Así, x/n es la proporción muestral en la categoría 1 y $1 - x/n$ es la proporción muestral en la categoría 2. En la aplicación biomédica, por ejemplo, 50 pacientes representarían las unidades de la muestra y si, después de que se les suministra el medicamento, 20 de los 50 experimentaran mejoría en sus malestares estomacales (que son comunes en los 50), entonces $\frac{20}{50} = 0.4$ sería la proporción muestral

para la cual el medicamento tuvo éxito, y $1 - 0.4 = 0.6$ sería la proporción muestral para la cual el fármaco no tuvo éxito. En realidad, la medición numérica fundamental para datos binarios por lo general se denota con 0 o con 1. Éste es el caso de nuestro ejemplo médico, en el que un resultado exitoso se denota con un 1 y uno no exitoso con un 0. Entonces, la proporción muestral es en realidad una media muestral de unos y ceros. Para la categoría de éxitos,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}}{50} = \frac{1 + 1 + 0 + \cdots + 0 + 1}{50} = \frac{20}{50} = 0.4.$$

¿Qué clases de problemas se resuelven en situaciones con datos binarios?

Los tipos de problemas que enfrentan científicos e ingenieros que usan datos binarios no son muy difíciles, a diferencia de aquellos en los que las mediciones de interés son las continuas. Sin embargo, se utilizan técnicas diferentes debido a que las propiedades estadísticas de las proporciones muestrales son bastante diferentes de las medias muestrales que resultan de los promedios tomados de poblaciones continuas. Considere los datos del ejemplo en el ejercicio 1.6 de la página 13. El problema estadístico subyacente en este caso se enfoca en si una intervención, digamos un incremento en la temperatura de vulcanizado, alterará la resistencia a la tensión de la media de la población que se asocia con el proceso del caucho de silicio. Por otro lado, en el área de control de calidad, suponga que un fabricante de neumáticos para automóvil informa que en un embarque con 5000 neumáticos, seleccionados aleatoriamente del proceso, hay 100 defectuosos. Aquí la proporción muestral es $\frac{100}{5000} = 0.02$. Luego de realizar un cambio en el proceso diseñado para reducir los neumáticos defectuosos, se toma una segunda muestra de 5000 y se encuentran 90 defectuosos. La proporción muestral se redujo a $\frac{90}{5000} = 0.018$. Entonces, surge una pregunta: “¿La disminución en la proporción muestral de 0.02 a 0.018 es suficiente para sugerir una mejoría real en la proporción de la población?” En ambos casos se requiere el uso de las propiedades estadísticas de los promedios de la muestra: uno de las muestras de poblaciones continuas y el otro de las muestras de poblaciones discretas (binarias). En ambos casos la media de la muestra es un **estimado** de un parámetro de la población, una media de la población en el primer caso (es decir, la media de la resistencia a la tensión) y una proporción de la población (o sea, la proporción de neumáticos defectuosos en la población) en el segundo caso. Así que aquí tenemos estimados de la muestra que se utilizan para obtener conclusiones científicas respecto de los parámetros de la población. Como indicamos en la sección 1.3, éste es el tema general en muchos problemas prácticos en los que se usa la inferencia estadística.

1.6 Modelado estadístico, inspección científica y diagnósticos gráficos

A menudo, el resultado final de un análisis estadístico es la estimación de los parámetros de un **modelo postulado**. Éste es un proceso natural para los científicos y los ingenieros, ya que con frecuencia usan modelos. Un modelo estadístico no es determinista, es más bien un modelo que conlleva algunos aspectos probabilísticos. A menudo una forma de modelo es la base de las **suposiciones** que hace el analista. En el ejemplo 1.2 el científico podría desear determinar, a través de la información de la muestra, algún nivel de distinción entre las poblaciones tratadas con nitrógeno y las poblaciones no tratadas. El análisis podría requerir cierto modelo para los datos; por ejemplo, que las dos muestras

proviengan de **distribuciones normales** o **gaussianas**. Véase el capítulo 6 para el estudio de la distribución normal.

Es evidente que quienes utilizan métodos estadísticos no pueden generar la información o los datos experimentales suficientes para describir a la totalidad de la población. Pero es frecuente que se utilicen los conjuntos de datos para aprender sobre ciertas propiedades de la población. Los científicos y los ingenieros están acostumbrados a manejar conjuntos de datos. Debería ser obvia la importancia de describir o *resumir* la naturaleza de los conjuntos de datos. Con frecuencia el resumen gráfico de un conjunto de datos puede proporcionar información sobre el sistema del que se obtuvieron los datos. Por ejemplo, en las secciones 1.1 y 1.3 mostramos gráficas de puntos.

En esta sección se estudia con detalle el papel del muestreo y de la graficación de los datos para mejorar la **inferencia estadística**. Nos limitamos a presentar algunas gráficas sencillas, pero a menudo efectivas, que complementan el estudio de poblaciones estadísticas.

Diagrama de dispersión

A veces el modelo postulado puede tener una forma algo más compleja. Por ejemplo, considere a un fabricante de textiles que diseña un experimento en donde se producen especímenes de tela que contienen diferentes porcentajes de algodón. Considere los datos de la tabla 1.3.

Tabla 1.3: Resistencia a la tensión

Porcentaje del algodón	Resistencia a la tensión
15	7, 7, 9, 8, 10
20	19, 20, 21, 20, 22
25	21, 21, 17, 19, 20
30	8, 7, 8, 9, 10

Se fabrican cinco especímenes de tela para cada uno de los cuatro porcentajes de algodón. En este caso tanto el modelo para el experimento como el tipo de análisis que se utiliza deberían tomar en cuenta el objetivo del experimento y los insumos importantes del científico textil. Algunas gráficas sencillas podrían mostrar la clara distinción entre las muestras. Véase la figura 1.5; las medias y la variabilidad muestrales se describen bien en el diagrama de dispersión. El objetivo de este experimento podría ser simplemente determinar cuáles porcentajes de algodón son verdaderamente distintos de los otros. En otras palabras, como en el caso de los datos con nitrógeno y sin nitrógeno, ¿para cuáles porcentajes de algodón existen diferencias claras entre las poblaciones o, de forma más específica, entre las medias de las poblaciones? En este caso quizás un modelo razonable es que cada muestra proviene de una distribución normal. Aquí el objetivo es muy semejante al de los datos con nitrógeno y sin nitrógeno, excepto que se incluyen más muestras. El formalismo del análisis implica nociones de prueba de hipótesis, los cuales se examinarán en el capítulo 10. A propósito, quizás este formalismo no sea necesario a la luz del diagrama de diagnóstico. Pero, ¿describe éste el objetivo real del experimento y, por consiguiente, el enfoque adecuado para el análisis de datos? Es probable que el científico anticipe la existencia de una *resistencia a la tensión máxima de la media de la población* en el rango de concentración de algodón en el experimento. Aquí el análisis de los datos debería girar en torno a un tipo diferente de modelo, es decir, uno

que postule un tipo de estructura que relacione la resistencia a la tensión de la media de la población con la concentración de algodón. En otras palabras, un modelo se puede escribir como

$$\mu_{t,c} = \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 C^2,$$

en donde $\mu_{t,c}$ es la resistencia a la tensión de la media de la población, que varía con la cantidad de algodón en el producto C . La implicación de este modelo es que, para un nivel fijo de algodón, hay una población de mediciones de resistencia a la tensión y la media de la población es $\mu_{t,c}$. Este tipo de modelo, que se denomina **modelo de regresión**, se estudiará en los capítulos 11 y 12. La forma funcional la elige el científico. A veces el análisis de datos puede sugerir que se cambie el modelo. Entonces el analista de datos “considera” un modelo que se pueda alterar después de hacer cierto análisis. El uso de un modelo empírico va acompañado por la **teoría de estimación**, donde β_0 , β_1 y β_2 se estiman a partir de los datos. Además, la inferencia estadística se puede, entonces, utilizar para determinar lo adecuado del modelo.

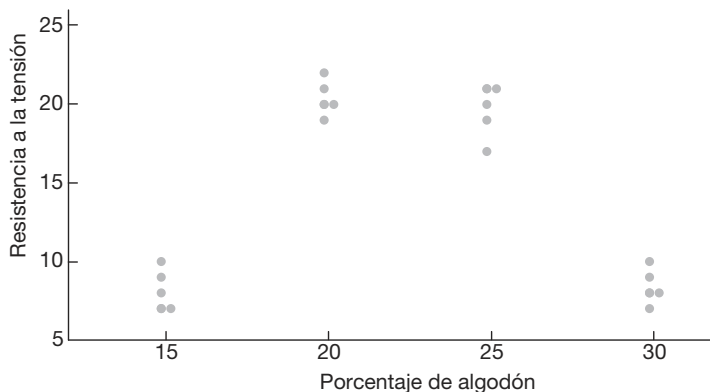


Figura 1.5: Diagrama de dispersión de la resistencia a la tensión y los porcentajes de algodón.

Aquí se hacen evidentes dos puntos de las dos ilustraciones de datos: 1) el tipo de modelo que se emplea para describir los datos a menudo depende del objetivo del experimento, y 2) la estructura del modelo debería aprovechar el insumo científico no estadístico. La selección de un modelo representa una **suposición fundamental** sobre la que se basa la inferencia estadística resultante. A lo largo del libro se hará evidente la importancia que las gráficas pueden llegar a tener. A menudo las gráficas ilustran información que permite que los resultados de la inferencia estadística formal se comuniquen mejor al científico o al ingeniero. A veces las gráficas o el **análisis exploratorio de los datos** pueden enseñar al analista información que no se obtiene del análisis formal. Casi cualquier análisis formal requiere suposiciones que se desarrollan a partir del modelo de datos. Las gráficas pueden resaltar la **violación de suposiciones** que de otra forma no se notarían. A lo largo del libro las gráficas se utilizarán de manera extensa para complementar el análisis formal de los datos. En las siguientes secciones se presentan algunas herramientas gráficas que son útiles para el análisis exploratorio o descriptivo de los datos.

Diagrama de tallo y hojas

Los datos estadísticos obtenidos de poblaciones grandes pueden ser muy útiles para estudiar el comportamiento de la distribución si se presentan en una combinación tabular y gráfica conocida como **diagrama de tallo y hojas**.

Para ejemplificar la elaboración de un diagrama de tallo y hojas considere los datos de la tabla 1.4, que especifican la “vida” de 40 baterías para automóvil similares, registradas al décimo de año más cercano. Las baterías se garantizan por tres años. Comience por dividir cada observación en dos partes: una para el tallo y otra para las hojas, de manera que el tallo represente el dígito entero que antecede al decimal y la hoja corresponda a la parte decimal del número. En otras palabras, para el número 3.7 el dígito 3 se designa al tallo y el 7 a la hoja. Para nuestros datos los cuatro tallos 1, 2, 3 y 4 se listan verticalmente del lado izquierdo de la tabla 1.5, en tanto que las hojas se registran en el lado derecho correspondiente al valor del tallo adecuado. Entonces, la hoja 6 del número 1.6 se registra enfrente del tallo 1; la hoja 5 del número 2.5 enfrente del tallo 2; y así sucesivamente. El número de hojas registrado junto a cada tallo se anota debajo de la columna de frecuencia.

Tabla 1.4: Vida de las baterías para automóvil

2.2	4.1	3.5	4.5	3.2	3.7	3.0	2.6
3.4	1.6	3.1	3.3	3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6	2.9	3.3	3.9	3.1
3.3	3.1	3.7	4.4	3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6	3.9	3.0	4.2	3.5

Tabla 1.5: Diagrama de tallo y hojas de la vida de las baterías

Tallo	Hoja	Frecuencia
1	69	2
2	25669	5
3	0011112223334445567778899	25
4	11234577	8

El diagrama de tallo y hojas de la tabla 1.5 contiene sólo cuatro tallos y, en consecuencia, no ofrece una representación adecuada de la distribución. Para solucionar este problema es necesario aumentar el número de tallos en nuestro diagrama. Una manera sencilla de hacerlo consiste en escribir dos veces cada valor del tallo y después registrar las hojas 0, 1, 2, 3 y 4 enfrente del valor del tallo adecuado, donde aparezca por primera vez; y las hojas 5, 6, 7, 8 y 9 enfrente de este mismo valor del tallo, donde aparece la segunda vez. El diagrama doble de tallo y hojas modificado se ilustra en la tabla 1.6, donde los tallos que corresponden a las hojas 0 a 4 fueron codificados con el símbolo ★ y los tallos correspondientes a las hojas 5 a 9 con el símbolo •.

En cualquier problema dado debemos decidir cuáles son los valores del tallo adecuados. Esta decisión se toma hasta cierto punto de manera arbitraria, aunque debemos guiarnos por el tamaño de nuestra muestra. Por lo general elegimos entre 5 y 20 tallos. Cuanto más pequeña sea la cantidad de datos disponibles, más pequeña será nuestra elección del número de tallos. Por ejemplo, si los datos constan de números del 1 al 21,

los cuales representan el número de personas en la fila de una cafetería en 40 días laborales seleccionados al azar, y elegimos un diagrama doble de tallo y hojas, los tallos serían 0★, 0•, 1★, 1• y 2★, de manera que la observación de 1 más pequeña tiene tallo 0★ y hoja 1, el número 18 tiene tallo 1• y hoja 8, y la observación de 21 más grande tiene tallo 2★ y hoja 1. Por otro lado, si los datos constan de números de \$18,800 a \$19,600, que representan las mejores ventas posibles de 100 automóviles nuevos, obtenidos de cierto concesionario, y elegimos un diagrama sencillo de tallo y hojas, los tallos serían 188, 189, 190, ..., 196 y las hojas contendrían ahora dos dígitos cada una. Un automóvil que se vende en \$19,385 tendría un valor de tallo de 193 y 85 en los dos dígitos de la hoja. En el diagrama de tallo y hojas, las hojas de dígitos múltiples que pertenecen al mismo tallo por lo regular están separadas por comas. En los datos generalmente se ignoran los puntos decimales cuando todos los números a la derecha del punto decimal representan hojas, como en el caso de las tablas 1.5 y 1.6. Sin embargo, si los datos constaran de números que van de 21.8 a 74.9, podríamos elegir los dígitos 2, 3, 4, 5, 6 y 7 como los tallos, de manera que un número como 48.3 tendría un valor de tallo de 4 y un valor de hoja de 8.3.

Tabla 1.6: Diagrama doble de tallo y hojas para la vida de las baterías

Tallo	Hoja	Frecuencia
1•	69	2
2★	2	1
2•	5669	4
3★	001111222333444	15
3•	5567778899	10
4★	11234	5
4•	577	3

El diagrama de tallo y hojas representa una manera eficaz de resumir los datos. Otra forma consiste en el uso de la **distribución de frecuencias**, donde los datos, agrupados en diferentes clases o intervalos, se pueden construir contando las hojas que pertenecen a cada tallo y considerando que cada tallo define un intervalo de clase. En la tabla 1.5 el tallo 1 con 2 hojas define el intervalo 1.0-1.9, que contiene 2 observaciones; el tallo 2 con 5 hojas define el intervalo 2.0-2.9, que contiene 5 observaciones; el tallo 3 con 25 hojas define el intervalo 3.0-3.9, con 25 observaciones; y el tallo 4 con 8 hojas define el intervalo 4.0-4.9, que contiene 8 observaciones. Para el diagrama doble de tallo y hojas de la tabla 1.6 los tallos definen los siete intervalos de clase 1.5-1.9, 2.0-2.4, 2.5-2.9, 3.0-3.4, 3.5-3.9, 4.0-4.4 y 4.5-4.9, con frecuencias 2, 1, 4, 15, 10, 5 y 3, respectivamente.

Histograma

Al dividir cada frecuencia de clase entre el número total de observaciones, obtenemos la proporción del conjunto de observaciones en cada una de las clases. Una tabla que lista las frecuencias relativas se denomina **distribución de frecuencias relativas**. En la tabla 1.7 se presenta la distribución de frecuencias relativas para los datos de la tabla 1.4, que muestra los puntos medios de cada intervalo de clase.

La información que brinda una distribución de frecuencias relativas en forma tabular es más fácil de entender si se presenta en forma gráfica. Con los puntos medios de

Tabla 1.7: Distribución de frecuencias relativas de la vida de las baterías

Intervalo de clase	Punto medio de la clase	Frecuencia, f	Frecuencia relativa
1.5–1.9	1.7	2	0.050
2.0–2.4	2.2	1	0.025
2.5–2.9	2.7	4	0.100
3.0–3.4	3.2	15	0.375
3.5–3.9	3.7	10	0.250
4.0–4.4	4.2	5	0.125
4.5–4.9	4.7	3	0.075

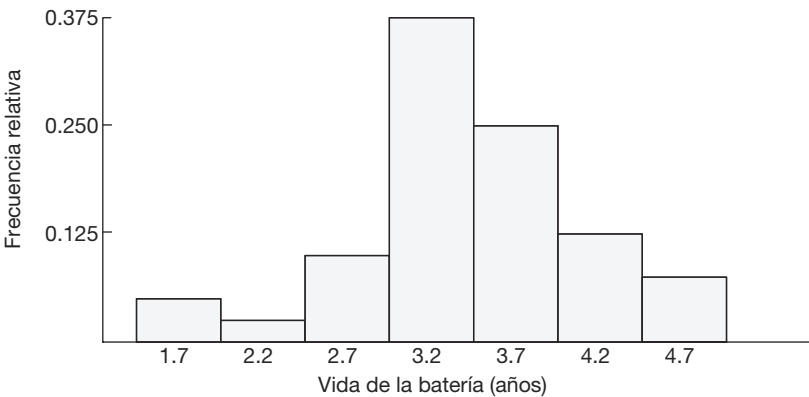


Figura 1.6: Histograma de frecuencias relativas.

cada intervalo y las frecuencias relativas correspondientes construimos un **histograma de frecuencias relativas** (figura 1.6).

Muchas distribuciones de frecuencias continuas se pueden representar gráficamente mediante la curva en forma de campana característica de la figura 1.7. Herramientas gráficas como las de las figuras 1.6 y 1.7 ayudan a comprender la naturaleza de la población. En los capítulos 5 y 6 examinaremos una propiedad de la población que se conoce como **distribución**. Aunque más adelante en este texto se proporcionará una definición más precisa de una distribución o de una **distribución de probabilidad**, aquí podemos visualizarla como la que se podría haber visto en el límite de la figura 1.7 cuando el tamaño de la muestra aumentara.

Se dice que una distribución es **simétrica** si se puede doblar a lo largo de un eje vertical de manera que ambos lados coincidan. Si una distribución carece de simetría respecto de un eje vertical, se dice que está **sesgada**. La distribución que se ilustra en la figura 1.8a se dice que está sesgada a la derecha porque tiene una cola derecha larga y una cola izquierda mucho más corta. En la figura 1.8b observamos que la distribución es simétrica; mientras que en la figura 1.8c está sesgada a la izquierda.

Al girar un diagrama de tallo y hojas en dirección contraria a la de las manecillas del reloj en un ángulo de 90° , vemos que las columnas de hojas que resultan forman una imagen parecida a un histograma. Por lo tanto, si nuestro objetivo principal al observar los datos es determinar la forma general o la forma de la distribución, rara vez será necesario construir un histograma de frecuencias relativas.

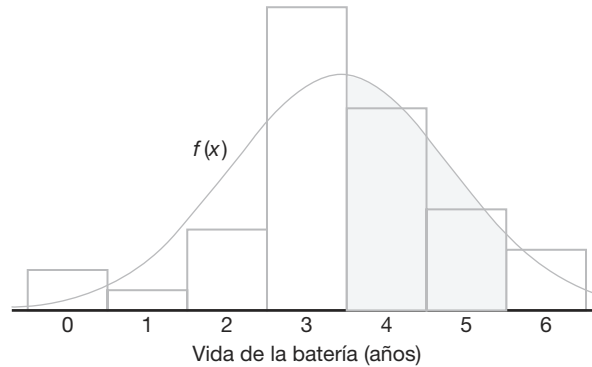


Figura 1.7: Estimación de la distribución de frecuencias.

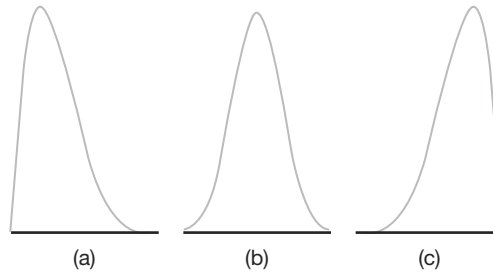


Figura 1.8: Sesgo de los datos.

Gráfica de caja y bigote o gráfica de caja

Otra presentación que es útil para reflejar propiedades de una muestra es la **gráfica de caja y bigote**, la cual encierra el *rango intercuartil* de los datos en una caja que contiene la mediana representada. El rango intercuartil tiene como extremos el percentil 75 (cuartil superior) y el percentil 25 (cuartil inferior). Además de la caja se prolongan “bigotes”, que indican las observaciones alejadas en la muestra. Para muestras razonablemente grandes la presentación indica el centro de localización, la variabilidad y el grado de asimetría.

Además, una variación denominada **gráfica de caja** puede ofrecer al observador información respecto de cuáles observaciones son **valores extremos**. Los valores extremos son observaciones que se consideran inusualmente alejadas de la masa de datos. Existen muchas pruebas estadísticas diseñadas para detectar este tipo de valores. Técnicamente se puede considerar que un valor extremo es una observación que representa un “evento raro” (existe una probabilidad pequeña de obtener un valor que esté lejos de la masa de datos). El concepto de valores extremos volverá a surgir en el capítulo 12 en el contexto del análisis de regresión.

La información visual en las gráficas de caja y bigote o en las de caja no intenta ser una prueba formal de valores extremos, más bien se considera una herramienta de diagnóstico. Aunque la determinación de cuáles observaciones son valores extremos varía de acuerdo con el tipo de software que se emplee, un procedimiento común para determinarlo consiste en utilizar un **múltiplo del rango intercuartil**. Por ejemplo, si la distancia desde la caja excede 1.5 veces el rango intercuartil (en cualquier dirección), la observación se podría considerar un valor extremo.

Ejemplo 1.5: Se midió el contenido de nicotina en una muestra aleatoria de 40 cigarrillos. Los datos se presentan en la tabla 1.8.

Tabla 1.8: Valores de nicotina para el ejemplo 1.5

1.09	1.92	2.31	1.79	2.28	1.74	1.47	1.97
0.85	1.24	1.58	2.03	1.70	2.17	2.55	2.11
1.86	1.90	1.68	1.51	1.64	0.72	1.69	1.85
1.82	1.79	2.46	1.88	2.08	1.67	1.37	1.93
1.40	1.64	2.09	1.75	1.63	2.37	1.75	1.69

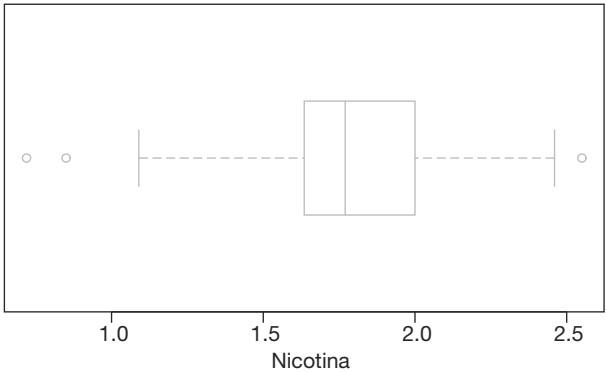


Figura 1.9: Gráfica de caja y bigote para el ejemplo 1.5.

La figura 1.9 muestra la gráfica de caja y bigote de los datos, la cual describe las observaciones 0.72 y 0.85 como valores extremos moderados en la cola inferior; en tanto que la observación 2.55 es un valor extremo moderado en la cola superior. En este ejemplo el rango intercuartil es 0.365, y 1.5 veces el rango intercuartil es 0.5475. Por otro lado, la figura 1.10 presenta un diagrama de tallo y hojas.

Ejemplo 1.6: Considere los datos de la tabla 1.9, que constan de 30 muestras que miden el grosor de las “asas” de latas de pintura (véase el trabajo de Hogg y Ledolter de 1992 en la bibliografía). La figura 1.11 describe una gráfica de caja y bigote para este conjunto asimétrico de datos. Observe que el bloque izquierdo es considerablemente más grande que el bloque de la derecha. La mediana es 35. El cuartil inferior es 31, mientras que el superior es 36. Advierta también que la observación alejada de la derecha está más lejos de la caja que la observación extrema de la izquierda. No hay valores extremos en este conjunto de datos.

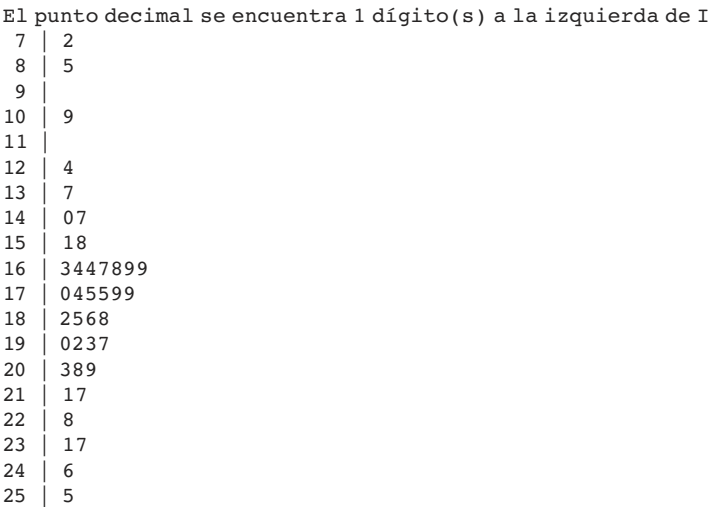


Figura 1.10: Diagrama de tallo y hojas para los datos de nicotina.

Tabla 1.9: Datos para el ejemplo 1.6

Muestra	Mediciones	Muestra	Mediciones
1	29 36 39 34 34	16	35 30 35 29 37
2	29 29 28 32 31	17	40 31 38 35 31
3	34 34 39 38 37	18	35 36 30 33 32
4	35 37 33 38 41	19	35 34 35 30 36
5	30 29 31 38 29	20	35 35 31 38 36
6	34 31 37 39 36	21	32 36 36 32 36
7	30 35 33 40 36	22	36 37 32 34 34
8	28 28 31 34 30	23	29 34 33 37 35
9	32 36 38 38 35	24	36 36 35 37 37
10	35 30 37 35 31	25	36 30 35 33 31
11	35 30 35 38 35	26	35 30 29 38 35
12	38 34 35 35 31	27	35 36 30 34 36
13	34 35 33 30 34	28	35 30 36 29 35
14	40 35 34 33 35	29	38 36 35 31 31
15	34 35 38 35 30	30	30 34 40 28 30

Existen otras formas en las que las gráficas de caja y bigote, y otras presentaciones gráficas, pueden ayudar al analista. Las muestras múltiples se pueden comparar de forma gráfica. Los diagramas de los datos pueden sugerir relaciones entre las variables y las gráficas ayudan a detectar anomalías u observaciones extremas en las muestras.

Existen otros tipos diferentes de diagramas y herramientas gráficas, los cuales se estudiarán en el capítulo 8 después de presentar otros detalles teóricos.

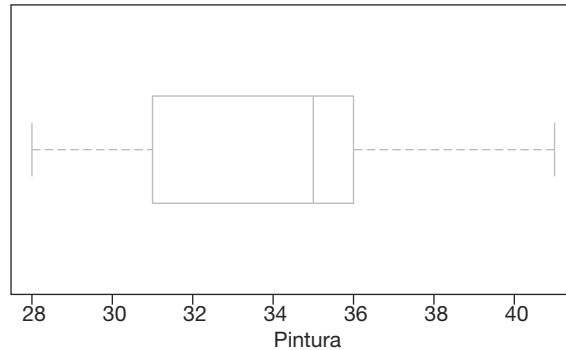


Figura 1.11: Gráfica de caja y bigote del grosor de las “asas” de latas de pintura.

Otras características distintivas de una muestra

Hay características de la distribución o de la muestra, además de las medidas del centro de localización y variabilidad, que definen aún más su naturaleza. Por ejemplo, en tanto que la mediana divide los datos (o su distribución) en dos partes, existen otras medidas que dividen partes o segmentos de la distribución que pueden ser muy útiles. Una separación en cuatro partes se hace mediante *cuartiles*, donde el tercer cuartil separa el cuarto (25%) superior del resto de los datos, el segundo cuartil es la mediana y el primer cuartil separa el cuarto (25%) inferior del resto de los datos. La distribución puede dividirse incluso más detalladamente calculando los percentiles. Tales cantidades dan al analista una noción de las denominadas *colas* de la distribución (es decir, los valores que son relativamente extremos, ya sean pequeños o grandes). Por ejemplo, el percentil 95 separa el 5% superior del 95% inferior. Para los extremos en la parte inferior o *cola inferior* de la distribución prevalecen definiciones similares. El primer percentil separa el 1% inferior del resto de la distribución. El concepto de percentiles desempeñará un papel significativo en buena parte de lo que estudiaremos en los siguientes capítulos.

1.7 Tipos generales de estudios estadísticos: diseño experimental, estudio observacional y estudio retrospectivo

En las siguientes secciones destacaremos el concepto de muestreo de una población y el uso de los métodos estadísticos para aprender o quizá para reafirmar la información relevante acerca de una población. La información que se busca y que se obtiene mediante el uso de tales métodos estadísticos a menudo influye en la toma de decisiones, así como en la resolución de problemas en diversas áreas importantes de ingeniería y científicas. Como ilustración, el ejemplo 1.3 describe un experimento sencillo, en el cual los resultados brindan ayuda para determinar los tipos de condiciones en los que no se recomienda utilizar una aleación de aluminio específica que podría ser muy vulnerable a la corrosión. Los resultados serían útiles no sólo para quienes fabrican la aleación, sino también para los clientes que consideren adquirirla. Este caso, y muchos otros que se incluyen en los capítulos 13 a 15, resaltan el concepto de condiciones experimentales diseñadas o controladas (combinaciones de condiciones de recubrimiento y humedad), que son de interés para aprender sobre algunas características o mediciones (nivel de corrosión) que

surgen de tales condiciones. En las mediciones de la corrosión se emplean métodos estadísticos que utilizan tanto medidas de tendencia central como de variabilidad. Como usted verá más adelante en este texto, tales métodos con frecuencia nos guían hacia un modelo estadístico como el que se examinó en la sección 1.6. En este caso el modelo se puede usar para estimar (o predecir) las medidas de la corrosión como una función de la humedad y el tipo de recubrimiento utilizado. De nuevo, para desarrollar este tipo de modelos es muy útil emplear las estadísticas descriptivas que destacan las medidas de tendencia central y de variabilidad.

La información que se ofrece en el ejemplo 1.3 ilustra de manera adecuada los tipos de preguntas de ingeniería que se plantean y se responden aplicando los métodos estadísticos que se utilizan en un diseño experimental y se presentan en este texto. Tales preguntas son las siguientes:

- i. ¿Cuál es la naturaleza del efecto de la humedad relativa sobre la corrosión de la aleación de aluminio dentro del rango de humedad relativa en este experimento?
- ii. ¿El recubrimiento químico contra la corrosión reduce los niveles de corrosión y existe alguna manera de cuantificar el efecto?
- iii. ¿Hay alguna **interacción** entre el tipo de recubrimiento y la humedad relativa que influya en la corrosión de la aleación? Si es así, ¿cómo se podría interpretar?

¿Qué es interacción?

La importancia de las preguntas i. y ii. debería quedar clara para el lector, ya que ambas tienen que ver con aspectos importantes tanto para los productores como para los usuarios de la aleación. ¿Pero qué sucede con la pregunta iii.? El concepto de *interacción* se estudiará con detalle en los capítulos 14 y 15. Considere la gráfica de la figura 1.3, la cual ejemplifica la detección de la interacción entre dos **factores** en un diseño experimental simple. Observe que las líneas que conectan las medias de la muestra no son paralelas. El **paralelismo** habría indicado que el efecto (visto como un resultado de la pendiente de las líneas) de la humedad relativa es igual, es decir, negativo, tanto en la condición sin recubrimiento como en la condición con recubrimiento químico contra la corrosión. Recuerde que la pendiente negativa implica que la corrosión se vuelve más pronunciada a medida que aumenta la humedad. La ausencia de paralelismo implica una interacción entre el tipo de recubrimiento y la humedad relativa. La línea casi “horizontal” para el recubrimiento contra la corrosión, opuesta a la pendiente más pronunciada para la condición sin recubrimiento, sugiere que *el recubrimiento químico contra la corrosión no sólo es benéfico (observe el desplazamiento entre las líneas), sino que la presencia del recubrimiento revela que el efecto de la humedad es despreciable*. Salta a la vista que todas estas cuestiones son muy importantes para el efecto de los dos factores individuales y para la interpretación de la interacción, si está presente.

Los modelos estadísticos son muy útiles para responder preguntas como las descritas en i, ii y iii, en donde los datos provienen de un diseño experimental. Sin embargo, no siempre se cuenta con el tiempo o los recursos que permiten usar un diseño experimental. Por ejemplo, hay muchos casos en los que las condiciones de interés para el científico o el ingeniero simplemente no se pueden implementar *debido a que es imposible controlar los factores importantes*. En el ejemplo 1.3 la humedad relativa y el tipo de recubrimiento (o la ausencia de éste) son bastante fáciles de controlar. Desde luego, se trata del rasgo distintivo de un diseño experimental. En muchos campos los factores a estudiar no pueden ser controlados por diversas razones. Un control riguroso como el del ejemplo 1.3 permite al analista confiar en que las diferencias encontradas (como en los niveles de

corrosión) se deben a los factores que se pueden controlar. Considere el ejercicio 1.6 de la página 13 como otro ejemplo. En este caso suponga que se eligen 24 especímenes de caucho de silicio y que se asignan 12 a cada uno de los niveles de temperatura de vulcanizado. Las temperaturas se controlan cuidadosamente, por lo que éste es un ejemplo de diseño experimental con **un solo factor**, que es la temperatura de vulcanizado. Se podría suponer que las diferencias encontradas en la media de la resistencia a la tensión son atribuibles a las diferentes temperaturas de vulcanizado.

¿Qué sucede si no se controlan los factores?

Suponga que los factores no se controlan y que *no hay asignación aleatoria* a los tratamientos específicos para las unidades experimentales, y que se necesita obtener información a partir de un conjunto de datos. Como ejemplo considere un estudio donde el interés se centra en la relación entre los niveles de colesterol sanguíneo y la cantidad de sodio medida en la sangre. Durante cierto periodo se revisó el colesterol sanguíneo y el nivel de sodio de un grupo de individuos. En efecto, es posible obtener alguna información útil de tal conjunto de datos. Sin embargo, debería quedar claro que no es posible hacer un control estricto de los niveles de sodio. De manera ideal, los sujetos deberían dividirse aleatoriamente en dos grupos, donde uno fuera el asignado a un nivel alto específico de sodio en la sangre, y el otro a un nivel bajo específico de sodio en la sangre, pero es obvio que esto no es posible. Evidentemente los cambios en los niveles de colesterol se deben a cambios en uno o diversos factores que no se controlaron. Este tipo de estudio, sin control de factores, se denomina **estudio observacional**, el cual la mayoría de las veces implica una situación en que los sujetos se observan a través del tiempo.

Los estudios biológicos y biomédicos a menudo tienen que ser observacionales. Sin embargo, este tipo de estudios no se restringen a dichas áreas. Por ejemplo, considere un estudio diseñado para determinar la influencia de la temperatura ambiental sobre la energía eléctrica que consumen las instalaciones de una planta química. Es evidente que los niveles de la temperatura ambiental no se pueden controlar, por lo tanto, la única manera en que se puede supervisar la estructura de los datos es a partir de los datos de la planta a través del tiempo.

Es importante destacar que una diferencia básica entre un experimento bien diseñado y un estudio observacional es la dificultad para determinar la causa y el efecto verdaderos con este último. Asimismo, las diferencias encontradas en la reacción fundamental (por ejemplo, niveles de corrosión, colesterol sanguíneo, consumo de energía eléctrica en una planta) podrían deberse a otros factores subyacentes que no se controlaron. De manera ideal, en un diseño experimental los *factores perturbadores* serían compensados mediante el proceso de aleatoriedad. En realidad, los cambios en los niveles de colesterol sanguíneo podrían deberse a la ingestión de grasa, a la realización de actividad física, etc. El consumo de energía eléctrica podría estar afectado por la cantidad de bienes producidos o incluso por la pureza de éstos.

Otra desventaja de los estudios observacionales, que a menudo se ignora cuando éstos se comparan con experimentos cuidadosamente diseñados, es que, a diferencia de estos últimos, los observacionales están a merced de circunstancias no controladas, naturales, ambientales o de otros tipos, que repercuten en los niveles de los factores de interés. Por ejemplo, en el estudio biomédico acerca de la influencia de los niveles de sodio en la sangre sobre el colesterol sanguíneo es posible que haya, de hecho, una influencia significativa, pero el conjunto de datos específico usado no involucró la suficiente variación observada en los niveles de sodio debido a la naturaleza de los sujetos elegidos. Desde luego, en un diseño experimental el analista elige y controla los niveles de los factores.

Un tercer tipo de estudio estadístico que podría ser muy útil, pero que tiene notables desventajas cuando se le compara con un diseño experimental, es el **estudio retrospectivo**. Esta clase de estudio emplea estrictamente **datos históricos**, que se obtienen durante un periodo específico. Una ventaja evidente de los datos retrospectivos es el bajo costo de la recopilación de datos. Sin embargo, como se podría esperar, también tiene desventajas claras:

- i. La validez y la confiabilidad de los datos históricos a menudo son cuestionables.
- ii. Si el tiempo es un aspecto relevante en la estructura de los datos, podría haber datos faltantes.
- iii. Podrían existir errores en la recopilación de los datos que no se conocen.
- iv. De nuevo, como en el caso de los datos observacionales, no hay control en los rangos de las variables a medir (es decir, en los factores a estudiar). De hecho, las variaciones que se encuentran en los datos históricos a menudo no son significativas para estudios actuales.

En la sección 1.6 se puso cierto énfasis en los modelos de las relaciones entre variables. Presentamos el concepto de análisis de regresión, el cual se estudia en los capítulos 11 y 12, y se considera como una forma del análisis de datos para los diseños experimentales que se examinarán en los capítulos 14 y 15. En la sección 1.6 se utilizó a modo de ejemplo un modelo que relaciona la media poblacional de la resistencia a la tensión de la tela con los porcentajes de algodón, en el cual 20 especímenes de tela representaban las unidades experimentales. En este caso, los datos provienen de un diseño experimental simple, en el que los porcentajes de algodón individuales fueron seleccionados por el científico.

Con frecuencia, tanto los datos observacionales como los retrospectivos se utilizan para observar las relaciones entre variables a través de los procedimientos de construcción de modelos que se estudiarán en los capítulos 11 y 12. Aunque las ventajas de los diseños experimentales se pueden aplicar cuando la finalidad es la construcción de un modelo estadístico, hay muchas áreas en las que no es posible diseñar experimentos, de manera que *habrá que utilizar los datos históricos u observacionales*. Aquí nos referimos al conjunto de datos históricos que se incluye en el ejercicio 12.5 de la página 450. El objetivo es construir un modelo que dé como resultado una ecuación o relación que vincule el consumo mensual de energía eléctrica con la temperatura ambiental promedio, x_1 , el número de días en el mes, x_2 , la pureza promedio del producto, x_3 y las toneladas de bienes producidos, x_4 . Se trata de los datos históricos del año anterior.

Ejercicios

1.13 Un fabricante de componentes electrónicos se interesa en determinar el tiempo de vida de cierto tipo de batería. Una muestra, en horas de vida, es como la siguiente:

123, 116, 122, 110, 175, 126, 125, 111, 118, 117.

- a) Calcule la media y la mediana de la muestra.
- b) ¿Qué característica en este conjunto de datos es la responsable de la diferencia sustancial entre ambas?

1.14 Un fabricante de neumáticos quiere determinar el diámetro interior de un neumático de cierto grado de calidad. Idealmente el diámetro sería de 570 mm. Los datos son los siguientes:

572, 572, 573, 568, 569, 575, 565, 570.

- a) Calcule la media y la mediana de la muestra.
- b) Obtenga la varianza, la desviación estándar y el rango de la muestra.
- c) Con base en los estadísticos calculados en los incisos a) y b), ¿qué comentarías acerca de la calidad de los neumáticos?

1.15 Cinco lanzamientos independientes de una moneda tienen como resultado *cinco caras*. Resulta que si la moneda es legal, la probabilidad de este resultado es $(1/2)^5 = 0.03125$. ¿Proporciona esto evidencia sólida

de que la moneda no es legal? Comente y utilice el concepto de valor- P que se analizó en la sección 1.1.

1.16 Muestre que las n piezas de información en $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ no son independientes; es decir, demuestre que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

1.17 Se realiza un estudio acerca de los efectos del tabaquismo sobre los patrones de sueño. La medición que se observa es el tiempo, en minutos, que toma quedar dormido. Se obtienen los siguientes datos:

Fumadores:	69.3	56.0	22.1	47.6
	53.2	48.1	52.7	34.4
	60.2	43.8	23.2	13.8
No fumadores:	28.6	25.1	26.4	34.9
	29.8	28.4	38.5	30.2
	30.6	31.8	41.6	21.1
	36.0	37.9	13.9	

- Calcule la media de la muestra para cada grupo.
- Calcule la desviación estándar de la muestra para cada grupo.
- Elabore una gráfica de puntos de los conjuntos de datos A y B en la misma línea.
- Comente qué clase de efecto parece tener el hecho de fumar sobre el tiempo que se requiere para quedarse dormido.

1.18 Las siguientes puntuaciones representan la calificación en el examen final para un curso de estadística elemental:

23	60	79	32	57	74	52	70	82
36	80	77	81	95	41	65	92	85
55	76	52	10	64	75	78	25	80
98	81	67	41	71	83	54	64	72
88	62	74	43	60	78	89	76	84
48	84	90	15	79	34	67	17	82
69	74	63	80	85	61			

- Elabore un diagrama de tallo y hojas para las calificaciones del examen, donde los tallos sean 1, 2, 3, ..., 9.
- Elabore un histograma de frecuencias relativas, trace un estimado de la gráfica de la distribución y analice la asimetría de la distribución.
- Calcule la media, la mediana y la desviación estándar de la muestra.

1.19 Los siguientes datos representan la duración de vida, en años, medida al entero más cercano, de 30 bombas de combustible similares.

2.0	3.0	0.3	3.3	1.3	0.4
0.2	6.0	5.5	6.5	0.2	2.3
1.5	4.0	5.9	1.8	4.7	0.7

4.5	0.3	1.5	0.5	2.5	5.0
1.0	6.0	5.6	6.0	1.2	0.2

- Construya un diagrama de tallo y hojas para la vida, en años, de las bombas de combustible, utilizando el dígito a la izquierda del punto decimal como el tallo para cada observación.
- Determine una distribución de frecuencias relativas.
- Calcule la media, el rango y la desviación estándar de la muestra.

1.20 Los siguientes datos representan la duración de la vida, en segundos, de 50 moscas de la fruta que se someten a un nuevo aerosol en un experimento de laboratorio controlado.

17	20	10	9	23	13	12	19	18	24
12	14	6	9	13	6	7	10	13	7
16	18	8	3	3	32	9	7	10	11
13	7	18	7	10	4	27	19	16	8
7	10	5	14	15	10	9	6	7	15

- Elabore un diagrama doble de tallo y hojas para el periodo de vida de las moscas de la fruta usando los tallos 0★, 0•, 1★, 1•, 2★, 2• y 3★ de manera que los tallos codificados con los símbolos ★ y • se asocien, respectivamente, con las hojas 0 a 4 y 5 a 9.
- Determine una distribución de frecuencias relativas.
- Construya un histograma de frecuencias relativas.
- Calcule la mediana.

1.21 La duración de fallas eléctricas, en minutos, se presenta en la siguiente tabla.

22	18	135	15	90	78	69	98	102
83	55	28	121	120	13	22	124	112
70	66	74	89	103	24	21	112	21
40	98	87	132	115	21	28	43	37
50	96	118	158	74	78	83	93	95

- Calcule la media y la mediana muestrales de las duraciones de la falla eléctrica.
- Calcule la desviación estándar de las duraciones de la falla eléctrica.

1.22 Los siguientes datos son las mediciones del diámetro de 36 cabezas de remache en centésimos de una pulgada.

6.72	6.77	6.82	6.70	6.78	6.70	6.62	6.75
6.66	6.66	6.64	6.76	6.73	6.80	6.72	6.76
6.76	6.68	6.66	6.62	6.72	6.76	6.70	6.78
6.76	6.67	6.70	6.72	6.74	6.81	6.79	6.78
6.66	6.76	6.76	6.72				

- Calcule la media y la desviación estándar de la muestra.
- Construya un histograma de frecuencias relativas para los datos.

- c) Comente si existe o no una indicación clara de que la muestra proviene de una población que tiene una distribución en forma de campana.

1.23 En 20 automóviles elegidos aleatoriamente, se tomaron las emisiones de hidrocarburos en velocidad en vacío, en partes por millón (ppm), para modelos de 1980 y 1990.

Modelos 1980:

141 359 247 940 882 494 306 210 105 880
200 223 188 940 241 190 300 435 241 380

Modelos 1990:

140 160 20 20 223 60 20 95 360 70
220 400 217 58 235 380 200 175 85 65

- a) Construya una gráfica de puntos como la de la figura 1.1.
b) Calcule la media de la muestra para los dos años y sobreponga las dos medias en las gráficas.
c) Comente sobre lo que indica la gráfica de puntos respecto de si cambiaron o no las emisiones poblacionales de 1980 a 1990. Utilice el concepto de variabilidad en sus comentarios.

1.24 Los siguientes son datos históricos de los sueldos del personal (dólares por alumno) en 30 escuelas seleccionadas de la región este de Estados Unidos a principios de la década de 1970.

3.79 2.99 2.77 2.91 3.10 1.84 2.52 3.22
2.45 2.14 2.67 2.52 2.71 2.75 3.57 3.85
3.36 2.05 2.89 2.83 3.13 2.44 2.10 3.71
3.14 3.54 2.37 2.68 3.51 3.37

- a) Calcule la media y la desviación estándar de la muestra.
b) Utilice los datos para elaborar un histograma de frecuencias relativas.
c) Construya un diagrama de tallo y hojas con los datos.

1.25 El siguiente conjunto de datos se relaciona con el ejercicio 1.24 y representa el porcentaje de las familias que se ubican en el nivel superior de ingresos en las mismas escuelas individuales y con el mismo orden del ejercicio 1.24.

72.2 31.9 26.5 29.1 27.3 8.6 22.3 26.5
20.4 12.8 25.1 19.2 24.1 58.2 68.1 89.2
55.1 9.4 14.5 13.9 20.7 17.9 8.5 55.4
38.1 54.2 21.5 26.2 59.1 43.3

- a) Calcule la media de la muestra.
b) Calcule la mediana de la muestra.
c) Construya un histograma de frecuencias relativas con los datos.
d) Determine la media recortada al 10%. Compárela con los resultados de los incisos a) y b) y exprese su comentario.

1.26 Suponga que le interesa emplear los conjuntos de datos de los ejercicios 1.24 y 1.25 para derivar un modelo

que prediga los salarios del personal como una función del porcentaje de familias en un nivel alto de ingresos para los sistemas escolares actuales. Comente sobre cualquier desventaja de llevar a cabo este tipo de análisis.

1.27 Se realizó un estudio para determinar la influencia del desgaste, y , de un cojinete como una función de la carga, x , sobre el cojinete. Para este estudio se utilizó un diseño experimental con tres niveles de carga: 700 lb, 1000 lb y 1300 lb. En cada nivel se utilizaron cuatro especímenes y las medias muestrales fueron 210, 325 y 375, respectivamente.

- a) Grafique el promedio de desgaste contra la carga.
b) A partir de la gráfica del inciso a), ¿consideraría que hay una relación entre desgaste y carga?
c) Suponga que tenemos los siguientes valores individuales de desgaste para cada uno de los cuatro especímenes en los respectivos niveles de carga. (Vea los datos que siguen). Grafique los resultados de desgaste para todos los especímenes contra los tres valores de carga.
d) A partir de la gráfica del inciso c), ¿consideraría que hay una relación clara? Si su respuesta difiere de la del inciso b), explique por qué.

	x		
	700	1000	1300
y_1	145	250	150
y_2	105	195	180
y_3	260	375	420
y_4	330	480	750
	$\bar{y}_1 = 210$	$\bar{y}_2 = 325$	$\bar{y}_3 = 375$

1.28 En Estados Unidos y otros países muchas compañías de manufactura utilizan partes moldeadas como componentes de un proceso. La contracción a menudo es un problema importante. Por consiguiente, un dado de metal moldeado para una parte se construye más grande que el tamaño nominal con el fin de permitir su contracción. En un estudio de moldeado por inyección se descubrió que en la contracción influyen múltiples factores, entre los cuales están la velocidad de la inyección en pies/segundo y la temperatura de moldeado en °C. Los dos conjuntos de datos siguientes muestran los resultados del diseño experimental, en donde la velocidad de inyección se mantuvo a dos niveles (bajo y alto) y la temperatura de moldeado se mantuvo constante en un nivel bajo. La contracción se midió en $\text{cm} \times 10^4$. Los valores de contracción a una velocidad de inyección baja fueron:

72.68 72.62 72.58 72.48 73.07
72.55 72.42 72.84 72.58 72.92

Los valores de contracción a una velocidad de inyección alta fueron:

71.62 71.68 71.74 71.48 71.55
71.52 71.71 71.56 71.70 71.50

- a) Construya una gráfica de puntos para ambos conjuntos de datos en la misma gráfica. Sobre ésta indique ambas medias de la contracción, tanto para la velocidad de inyección baja como para la velocidad de inyección alta.
- b) Con base en los resultados de la gráfica del inciso a), y considerando la ubicación de las dos medias y su sentido de variabilidad, ¿cuál es su conclusión respecto del efecto de la velocidad de inyección sobre la contracción a una temperatura de moldeo baja?

1.29 Utilice los datos del ejercicio 1.24 para elaborar una gráfica de caja.

1.30 A continuación se presentan los tiempos de vida, en horas, de 50 lámparas incandescentes, con esmerilado interno, de 40 watts y 110 voltios, los cuales se tomaron de pruebas forzadas de vida:

919	1196	785	1126	936	918
1156	920	948	1067	1092	1162
1170	929	950	905	972	1035
1045	855	1195	1195	1340	1122
938	970	1237	956	1102	1157
978	832	1009	1157	1151	1009
765	958	902	1022	1333	811
1217	1085	896	958	1311	1037
702	923				

Elabore una gráfica de puntos para estos datos.

1.31 Considere la situación del ejercicio 1.28, pero ahora utilice el siguiente conjunto de datos, en el cual la contracción se mide de nuevo a una velocidad de inyección baja y a una velocidad de inyección alta. Sin embargo, esta vez la temperatura de moldeo se aumenta a un nivel “alto” y se mantiene constante.

Los valores de la contracción a una velocidad de inyección baja fueron:

76.20	76.09	75.98	76.15	76.17
75.94	76.12	76.18	76.25	75.82

Los valores de la contracción a una velocidad de inyección alta fueron:

93.25	93.19	92.87	93.29	93.37
92.98	93.47	93.75	93.89	91.62

- a) Igual que en el ejercicio 1.28, elabore una gráfica de puntos con ambos conjuntos de datos en la misma gráfica e identifique las dos medias (es decir, la contracción media para la velocidad de inyección baja y para la velocidad de inyección alta).
- b) Igual que en el ejercicio 1.28, comente sobre la influencia de la velocidad de inyección en la contracción para la temperatura de moldeo alta. Tome en cuenta la posición de las dos medias y la variabilidad de cada media.
- c) Compare su conclusión en el inciso b) actual con la del inciso b) del ejercicio 1.28, en el cual la temperatura de moldeo se mantuvo a un nivel bajo. ¿Diría que hay interacción entre la velocidad de inyección y la temperatura de moldeo? Explique su respuesta.

1.32 Utilice los resultados de los ejercicios 1.28 y 1.31 para crear una gráfica que ilustre la interacción evidente entre los datos. Use como guía la gráfica de la figura 1.3 del ejemplo 1.3. ¿El tipo de información que se encontró en los ejercicios 1.28 y 1.31 se habría encontrado en un estudio observacional en el que el analista no hubiera tenido control sobre la velocidad de inyección ni sobre la temperatura de moldeo? Explique su respuesta.

1.33 Proyecto de grupo: Registre el tamaño de calzado que usa cada estudiante de su grupo. Utilice las medias y las varianzas muestrales, así como los tipos de gráficas que se estudiaron en este capítulo, para resumir cualquier característica que revele una diferencia entre las distribuciones del tamaño del calzado de hombres y mujeres. Haga lo mismo con la estatura de cada estudiante de su grupo.

Capítulo 2

Probabilidad

2.1 Espacio muestral

En el estudio de la estadística tratamos básicamente con la presentación e interpretación de **resultados fortuitos** que ocurren en un estudio planeado o en una investigación científica. Por ejemplo, en Estados Unidos, y con la finalidad de justificar la instalación de un semáforo, se podría registrar el número de accidentes que ocurren mensualmente en la intersección de Driftwood Lane y Royal Oak Drive; en una fábrica se podrían clasificar los artículos que salen de la línea de ensamble como “defectuosos” o “no defectuosos”; en una reacción química se podría revisar el volumen de gas que se libera cuando se varía la concentración de un ácido. Por ello, quienes se dedican a la estadística a menudo manejan datos numéricos que representan conteos o mediciones, o **datos categóricos** que se podrían clasificar de acuerdo con algún criterio.

En este capítulo, al referirnos a cualquier registro de información, ya sea numérico o categórico, utilizaremos el término **observación**. Por consiguiente, los números 2, 0, 1 y 2, que representan el número de accidentes que ocurrieron cada mes, de enero a abril, durante el año pasado en la intersección de Driftwood Lane y Royal Oak Drive, constituyen un conjunto de observaciones. Lo mismo ocurre con los datos categóricos N , D , N , N y D , que representan los artículos defectuosos o no defectuosos cuando se inspeccionan cinco artículos y se registran como observaciones.

Los estadísticos utilizan la palabra **experimento** para describir cualquier proceso que genere un conjunto de datos. Un ejemplo simple de experimento estadístico es el lanzamiento de una moneda al aire. En tal experimento sólo hay dos resultados posibles: cara o cruz. Otro experimento podría ser el lanzamiento de un misil y la observación de la velocidad a la que se desplaza en tiempos específicos. Las opiniones de los votantes respecto de un nuevo impuesto sobre las ventas también se pueden considerar como observaciones de un experimento. En estadística nos interesan, en particular, las observaciones que se obtienen al repetir varias veces un experimento. En la mayoría de los casos los resultados dependerán del azar, por lo tanto, no se pueden predecir con certeza. Si un químico realizara un análisis varias veces en las mismas condiciones, obtendría diferentes medidas, las cuales indicarían un elemento de probabilidad en el procedimiento experimental. Aun cuando lancemos una moneda al aire repetidas veces, no podemos tener la certeza de que en un lanzamiento determinado obtendremos cara como resultado. Sin embargo, conocemos el conjunto completo de posibilidades para cada lanzamiento.

Dado lo expuesto en la sección 1.7, en la que se revisaron tres tipos de estudios estadísticos y se dieron varios ejemplos de cada uno, ya deberíamos estar familiarizados con el alcance del término experimento. En cada uno de los tres casos, *diseños experimentales*, *estudios observacionales* y *estudios retrospectivos*, el resultado final fue un conjunto

de datos que, por supuesto, está sujeto a la **incertidumbre**. Aunque sólo uno de ellos tiene la palabra *experimento* en su descripción, el proceso de generar los datos o el proceso de observarlos forma parte de un experimento. El estudio de la corrosión expuesto en la sección 1.2 ciertamente implica un experimento en el que los datos son representados por las mediciones de la corrosión. El ejemplo de la sección 1.7, en el que se observó el colesterol y el sodio en la sangre de un conjunto de individuos, representó un estudio observacional (como lo opuesto a un *diseño* experimental) en el que el proceso incluso generó datos y un resultado sujeto a la incertidumbre; por lo tanto, se trata de un experimento. Un tercer ejemplo en la sección 1.7 consistió en un estudio retrospectivo, en el cual se observaron datos históricos sobre el consumo de energía eléctrica por mes y el promedio mensual de la temperatura ambiental. Aun cuando los datos pueden haber estado archivados durante décadas, el proceso se seguirá considerando un experimento.

Definición 2.1: Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se le llama **espacio muestral** y se representa con el símbolo S .

A cada resultado en un espacio muestral se le llama **elemento** o **miembro** del espacio muestral, o simplemente **punto muestral**. Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos, podemos *listar* los miembros separados por comas y encerrarlos entre llaves. Por consiguiente, el espacio muestral S , de los resultados posibles cuando se lanza una moneda al aire, se puede escribir como

$$S = \{H, T\},$$

en donde H y T corresponden a “caras” y “cruces”, respectivamente.

Ejemplo 2.1: Considere el experimento de lanzar un dado. Si nos interesara el número que aparece en la cara superior, el espacio muestral sería

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si sólo estuviéramos interesados en si el número es par o impar, el espacio muestral sería simplemente

$$S_2 = \{\text{par}, \text{impar}\}$$

El ejemplo 2.1 ilustra el hecho de que se puede usar más de un espacio muestral para describir los resultados de un experimento. En este caso, S_1 brinda más información que S_2 . Si sabemos cuál elemento ocurre en S_1 , podremos indicar cuál resultado tiene lugar en S_2 ; no obstante, saber lo que pasa en S_2 no ayuda mucho a determinar qué elemento ocurre en S_1 . En general, lo deseable sería utilizar un espacio muestral que proporcione la mayor información acerca de los resultados del experimento. En algunos experimentos es útil listar los elementos del espacio muestral de forma sistemática utilizando un **diagrama de árbol**.

Ejemplo 2.2: Un experimento consiste en lanzar una moneda y después lanzarla una segunda vez si sale cara. Si en el primer lanzamiento sale cruz, entonces se lanza un dado una vez. Para listar los elementos del espacio muestral que proporciona la mayor información construimos el diagrama de árbol de la figura 2.1. Las diversas trayectorias a lo largo de las ramas del árbol dan los distintos puntos muestrales. Si empezamos con la rama superior izquierda y nos movemos a la derecha a lo largo de la primera trayectoria, obtenemos el punto muestral HH , que indica la posibilidad de que ocurran caras en dos lanzamientos sucesivos de la moneda. De igual manera, el punto muestral $T3$ indica la posibilidad de que la moneda muestre una cruz seguida por un 3 en el lanzamiento del dado. Al seguir todas las trayectorias, vemos que el espacio muestral es

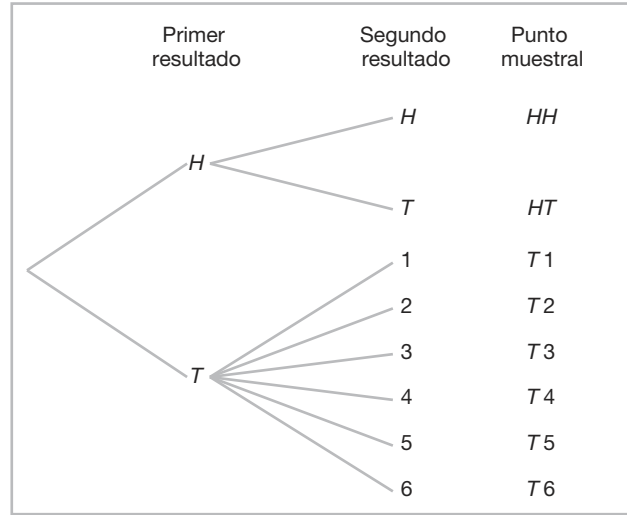


Figura 2.1: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.2.

$$S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}.$$

Muchos de los conceptos de este capítulo se ilustran mejor con ejemplos que involucren el uso de dados y cartas. Es particularmente importante utilizar estas aplicaciones al comenzar el proceso de aprendizaje, ya que facilitan el flujo de esos conceptos nuevos en ejemplos científicos y de ingeniería como el siguiente.

Ejemplo 2.3: Suponga que se seleccionan, de forma aleatoria, tres artículos de un proceso de fabricación. Cada artículo se inspecciona y se clasifica como defectuoso, D , o no defectuoso, N . Para listar los elementos del espacio muestral que brinde la mayor información, construimos el diagrama de árbol de la figura 2.2, de manera que las diversas trayectorias a lo largo de las ramas del árbol dan los distintos puntos muestrales. Al comenzar con la primera trayectoria, obtenemos el punto muestral DDD , que indica la posibilidad de que los tres artículos inspeccionados estén defectuosos. Conforme continuamos a lo largo de las demás trayectorias, vemos que el espacio muestral es

$$S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}.$$

Los espacios muestrales con un número grande o infinito de puntos muestrales se describen mejor mediante un **enunciado** o **método de la regla**. Por ejemplo, si el conjunto de resultados posibles de un experimento fuera el conjunto de ciudades en el mundo con una población de más de un millón de habitantes, nuestro espacio muestral se escribiría como

$$S = \{x \mid x \text{ es una ciudad con una población de más de un millón de habitantes}\},$$

que se lee “ S es el conjunto de todas las x , tales que x es una ciudad con una población de más de un millón de habitantes”. La barra vertical se lee como “tal que”. De manera similar, si S es el conjunto de todos los puntos (x, y) sobre los límites o el interior de un círculo de radio 2 con centro en el origen, escribimos la **regla**

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

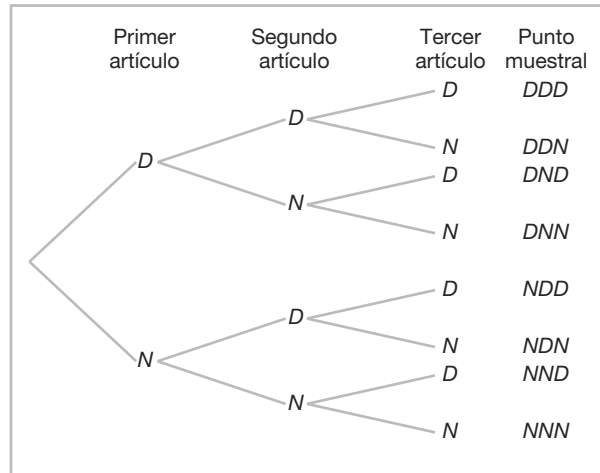


Figura 2.2: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.3.

Nuestra elección respecto a describir el espacio muestral utilizando el método de la regla o listando los elementos dependerá del problema específico en cuestión. El método de la regla tiene ventajas prácticas, sobre todo en el caso de muchos experimentos en los que listar se vuelve una tarea tediosa.

Considere la situación del ejemplo 2.3, en el que los artículos que salen del proceso de fabricación están defectuosos, D , o no defectuosos, N . Hay muchos procedimientos estadísticos importantes llamados planes de muestreo, que determinan si un “lote” de artículos se considera o no satisfactorio. Este tipo de planes implican tomar muestras hasta obtener k artículos defectuosos. Suponga que el experimento consiste en tomar muestras de artículos, de forma aleatoria, hasta que salga uno defectuoso. En este caso el espacio muestral sería

$$S = \{D, ND, NND, NNND, \dots\}.$$

2.2 Eventos

En cualquier experimento dado, podríamos estar interesados en la ocurrencia de ciertos **eventos**, más que en la ocurrencia de un elemento específico en el espacio muestral. Por ejemplo, quizás estemos interesados en el evento A , en el cual el resultado de lanzar un dado es divisible entre 3. Esto ocurrirá si el resultado es un elemento del subconjunto $A = \{3, 6\}$ del espacio muestral S_1 del ejemplo 2.1. Otro ejemplo: podríamos estar interesados en el evento B de que el número de artículos defectuosos sea mayor que 1 en el ejemplo 2.3. Esto ocurrirá si el resultado es un elemento del subconjunto

$$B = \{DDN, DND, NDD, DDD\}$$

del espacio muestral S .

Para cada evento asignamos un conjunto de puntos muestrales, que constituye un subconjunto del espacio muestral. Este subconjunto representa la totalidad de los elementos para los que el evento es cierto.

Definición 2.2: Un **evento** es un subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo 2.4: Dado el espacio muestral $S = \{t \mid t \geq 0\}$, donde t es la vida en años de cierto componente electrónico, el evento A de que el componente falle antes de que finalice el quinto año es el subconjunto $A = \{t \mid 0 \leq t < 5\}$. ─

Es posible concebir que un evento puede ser un subconjunto que incluye todo el espacio muestral S , o un subconjunto de S que se denomina **conjunto vacío** y se denota con el símbolo ϕ , que no contiene ningún elemento. Por ejemplo, si en un experimento biológico permitimos que A sea el evento de detectar un organismo microscópico a simple vista, entonces $A = \phi$. También, si

$$B = \{x \mid x \text{ es un factor par de } 7\},$$

entonces B debe ser el conjunto vacío, pues los únicos factores posibles de 7 son los números nones 1 y 7.

Considere un experimento en el que se registran los hábitos de tabaquismo de los empleados de una empresa industrial. Un posible espacio muestral podría clasificar a un individuo como no fumador, fumador ocasional, fumador moderado o fumador empedernido. Si se determina que el subconjunto de los fumadores sea un evento, entonces la totalidad de los no fumadores corresponderá a un evento diferente, también subconjunto de S , que se denomina **complemento** del conjunto de fumadores.

Definición 2.3: El **complemento** de un evento A respecto de S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A . Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A' .

Ejemplo 2.5: Sea R el evento de que se seleccione una carta roja de una baraja ordinaria de 52 cartas, y sea S toda la baraja. Entonces R' es el evento de que la carta seleccionada de la baraja no sea una roja sino una negra. ─

Ejemplo 2.6: Considere el espacio muestral

$$S = \{\text{libro, teléfono celular, mp3, papel, papelería, computadora}\}.$$

Sea $A = \{\text{libro, papelería, computadora, papel}\}$. Entonces, el complemento de A es $A' = \{\text{teléfono celular, mp3}\}$. ─

Consideremos ahora ciertas operaciones con eventos que darán como resultado la formación de nuevos eventos. Estos eventos nuevos serán subconjuntos del mismo espacio muestral que los eventos dados. Suponga que A y B son dos eventos que se asocian con un experimento. En otras palabras, A y B son subconjuntos del mismo espacio muestral S . Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado podríamos hacer que A sea el evento de que ocurra un número par y B el evento de que aparezca un número mayor que 3. Entonces, los subconjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ son subconjuntos del mismo espacio muestral

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Observe que *tanto* A como B ocurrirán en un lanzamiento dado si el resultado es un elemento del subconjunto $\{4, 6\}$, el cual es precisamente la **intersección** de A y B .

Definición 2.4: La **intersección** de dos eventos A y B , que se denota con el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B .

Ejemplo 2.7: Sea E el evento de que una persona seleccionada al azar en un salón de clases sea estudiante de ingeniería, y sea F el evento de que la persona sea mujer. Entonces $E \cap F$ es el evento de todas las estudiantes mujeres de ingeniería en el salón de clases. ─

Ejemplo 2.8: Sean $V = \{a, e, i, o, u\}$ y $C = \{l, r, s, t\}$; entonces, se deduce que $V \cap C = \emptyset$. Es decir, V y C no tienen elementos comunes, por lo tanto, no pueden ocurrir de forma simultánea. ─

Para ciertos experimentos estadísticos no es nada extraño definir dos eventos, A y B , que no pueden ocurrir de forma simultánea. Se dice entonces que los eventos A y B son **mutuamente excluyentes**. Expresado de manera más formal, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5: Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$; es decir, si A y B no tienen elementos en común.

Ejemplo 2.9: Una empresa de televisión por cable ofrece programas en ocho diferentes canales, tres de los cuales están afiliados con ABC, dos con NBC y uno con CBS. Los otros dos son un canal educativo y el canal de deportes ESPN. Suponga que un individuo que se suscribe a este servicio enciende un televisor sin seleccionar de antemano el canal. Sea A el evento de que el programa pertenezca a la cadena NBC y B el evento de que pertenezca a la cadena CBS. Como un programa de televisión no puede pertenecer a más de una cadena, los eventos A y B no tienen programas en común. Por lo tanto, la intersección $A \cap B$ no contiene programa alguno y, en consecuencia, los eventos A y B son mutuamente excluyentes. ─

A menudo nos interesamos en la ocurrencia de al menos uno de dos eventos asociados con un experimento. Por consiguiente, en el experimento del lanzamiento de un dado, si

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ y } B = \{4, 5, 6\},$$

podríamos estar interesados en que ocurran A o B , o en que ocurran tanto A como B . Tal evento, que se llama **unión** de A y B , ocurrirá si el resultado es un elemento del subconjunto $\{2, 4, 5, 6\}$.

Definición 2.6: La **unión** de dos eventos A y B , que se denota con el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos.

Ejemplo 2.10: Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$; entonces, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. ─

Ejemplo 2.11: Sea P el evento de que un empleado de una empresa petrolera seleccionado al azar fume cigarrillos. Sea Q el evento de que el empleado seleccionado ingiera bebidas alcohólicas. Entonces, el evento $P \cup Q$ es el conjunto de todos los empleados que beben o fuman, o que hacen ambas cosas. ─

Ejemplo 2.12: Si $M = \{x \mid 3 < x < 9\}$ y $N = \{y \mid 5 < y < 12\}$, entonces,

$$M \cup N = \{z \mid 3 < z < 12\}. \quad \text{─}$$

La relación entre eventos y el correspondiente espacio muestral se puede ilustrar de forma gráfica utilizando **diagramas de Venn**. En un diagrama de Venn representamos el espacio muestral como un rectángulo y los eventos con círculos trazados dentro del rectángulo. De esta forma, en la figura 2.3 vemos que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{regiones 1 y 2,} \\ B \cap C &= \text{regiones 1 y 3,} \end{aligned}$$

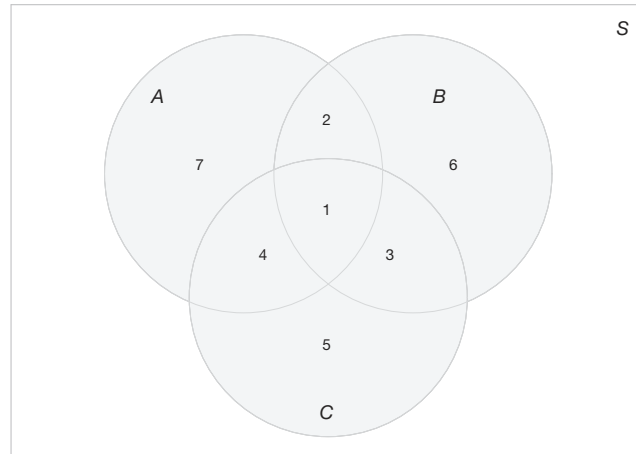


Figura 2.3: Eventos representados por varias regiones.

$$\begin{aligned}
 A \cup C &= \text{regiones 1, 2, 3, 4, 5 y 7,} \\
 B' \cap A &= \text{regiones 4 y 7,} \\
 A \cap B \cap C &= \text{región 1,} \\
 (A \cup B) \cap C' &= \text{regiones 2, 6 y 7,}
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

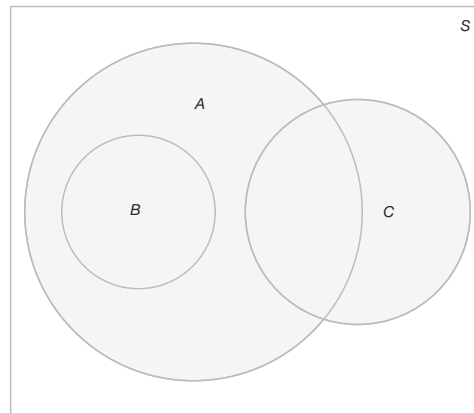


Figura 2.4: Eventos del espacio muestral S .

En la figura 2.4 vemos que los eventos A , B y C son subconjuntos del espacio muestral S . También es claro que el evento B es un subconjunto del evento A ; el evento $B \cap C$ no tiene elementos, por lo tanto, B y C son mutuamente excluyentes; el evento $A \cap C$ tiene al menos un elemento; y el evento $A \cup B = A$. Por consiguiente, la figura 2.4 podría representar una situación en la que se selecciona una carta al azar de una baraja ordinaria de 52 cartas y se observa si ocurren los siguientes eventos:

A : la carta es roja,

B : la carta es la jota, la reina o el rey de diamantes,

C : la carta es un as.

Claramente, el evento $A \cap C$ consta sólo de los dos ases rojos.

Varios resultados que se derivan de las definiciones precedentes, y que se pueden verificar de forma sencilla empleando diagramas de Venn, son como los que siguen:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1. $A \cap \phi = \phi$. | 6. $\phi' = S$. |
| 2. $A \cup \phi = A$. | 7. $(A')' = A$. |
| 3. $A \cap A' = \phi$. | 8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$. |
| 4. $A \cup A' = S$. | 9. $(A \cup B)' = A' \cap B'$. |
| 5. $S' = \phi$. | |

Ejercicios

2.1 Liste los elementos de cada uno de los siguientes espacios muestrales:

- el conjunto de números enteros entre 1 y 50 que son divisibles entre 8;
- el conjunto $S = \{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\}$;
- el conjunto de resultados cuando se lanza una moneda al aire hasta que aparecen una cruz o tres caras;
- el conjunto $S = \{x \mid x \text{ es un continente}\}$;
- el conjunto $S = \{x \mid 2x - 4 \geq 0 \text{ y } x < 1\}$.

2.2 Utilice el método de la regla para describir el espacio muestral S , que consta de todos los puntos del primer cuadrante dentro de un círculo de radio 3 con centro en el origen.

2.3 ¿Cuáles de los siguientes eventos son iguales?

- $A = \{1, 3\}$;
- $B = \{x \mid x \text{ es un número de un dado}\}$;
- $C = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$;
- $D = \{x \mid x \text{ es el número de caras cuando se lanzan seis monedas al aire}\}$.

2.4 Un experimento implica lanzar un par de dados, uno verde y uno rojo, y registrar los números que resultan. Si x es igual al resultado en el dado verde y y es el resultado en el dado rojo, describa el espacio muestral S

- mediante la lista de los elementos (x, y) ;
- por medio del método de la regla.

2.5 Un experimento consiste en lanzar un dado y después lanzar una moneda una vez si el número en el dado es par. Si el número en el dado es impar, la moneda se lanza dos veces. Use la notación $4H$, por ejemplo, para denotar el resultado de que el dado muestre 4 y después la moneda caiga en cara, y $3HT$ para denotar el resultado de que el dado muestre 3, seguido por una cara y después una cruz en la moneda; construya un

diagrama de árbol para mostrar los 18 elementos del espacio muestral S .

2.6 De un grupo de cuatro suplentes se seleccionan dos jurados para servir en un juicio por homicidio. Utilice la notación $A_1 A_3$, por ejemplo, para denotar el evento simple de que se seleccionen los suplentes 1 y 3, liste los 6 elementos del espacio muestral S .

2.7 De un grupo de estudiantes de química se seleccionan cuatro al azar y se clasifican como hombre o mujer. Liste los elementos del espacio muestral S_1 usando la letra H para hombre y M para mujer. Defina un segundo espacio muestral S_2 donde los elementos representen el número de mujeres seleccionadas.

2.8 Para el espacio muestral del ejercicio 2.4,

- liste los elementos que corresponden al evento A de que la suma sea mayor que 8;
- liste los elementos que corresponden al evento B de que ocurra un 2 en cualquiera de los dos dados;
- liste los elementos que corresponden al evento C de que salga un número mayor que 4 en el dado verde;
- liste los elementos que corresponden al evento $A \cap C$;
- liste los elementos que corresponden al evento $A \cap B$;
- liste los elementos que corresponden al evento $B \cap C$;
- construya un diagrama de Venn para ilustrar las intersecciones y uniones de los eventos A , B y C .

2.9 Para el espacio muestral del ejercicio 2.5,

- liste los elementos que corresponden al evento A en el que el dado salga un número menor que 3;
- liste los elementos que corresponden al evento B de que resulten 2 cruces;
- liste los elementos que corresponden al evento A' ;

- d) liste los elementos que corresponden al evento $A' \cap B$;
- e) liste los elementos que corresponden al evento $A \cup B$.

2.10 Se contrata a una empresa de ingenieros para que determine si ciertas vías fluviales en Virginia, Estados Unidos, son seguras para la pesca. Se toman muestras de tres ríos.

- a) Liste los elementos de un espacio muestral S y utilice las letras P para “seguro para la pesca” y N para “inseguro para la pesca”.
- b) Liste los elementos de S que correspondan al evento E de que al menos dos de los ríos son seguros para la pesca.
- c) Defina un evento que tiene como elementos a los puntos

$$\{PPP, NPP, PPN, NPN\}$$

2.11 El currículum de dos aspirantes masculinos para el puesto de profesor de química en una facultad se coloca en el mismo archivo que el de dos aspirantes mujeres. Hay dos puestos disponibles y el primero, con el rango de profesor asistente, se cubre seleccionando al azar a uno de los cuatro aspirantes. El segundo puesto, con el rango de profesor titular, se cubre después mediante la selección aleatoria de uno de los tres aspirantes restantes. Utilice la notación $H_i M_j$, por ejemplo, para denotar el evento simple de que el primer puesto se cubra con el segundo aspirante hombre y el segundo puesto se cubra después con la primera aspirante mujer,

- a) liste los elementos de un espacio muestral S ;
- b) liste los elementos de S que corresponden al evento A en que el puesto de profesor asistente se cubre con un aspirante hombre;
- c) liste los elementos de S que corresponden al evento B en que exactamente 1 de los 2 puestos se cubre con un aspirante hombre;
- d) liste los elementos de S que corresponden al evento C en que ningún puesto se cubre con un aspirante hombre;
- e) liste los elementos de S que corresponden al evento $A \cap B$;
- f) liste los elementos de S que corresponden al evento $A \cup C$;
- g) construya un diagrama de Venn para ilustrar las intersecciones y las uniones de los eventos A , B y C .

2.12 Se estudian el ejercicio y la dieta como posibles sustitutos del medicamento para bajar la presión sanguínea. Se utilizarán tres grupos de individuos para estudiar el efecto del ejercicio. Los integrantes del grupo uno son sedentarios, los del dos caminan y los del tres nadan una hora al día. La mitad de cada uno de los tres grupos de ejercicio tendrá una dieta sin sal. Un gru-

po adicional de individuos no hará ejercicio ni restringirá su consumo de sal, pero tomará el medicamento estándar. Use Z para sedentario, C para caminante, S para nadador, Y para sal, N para sin sal, M para medicamento y F para sin medicamento.

- a) Muestre todos los elementos del espacio muestral S .
- b) Dado que A es el conjunto de individuos sin medicamento y B es el conjunto de caminantes, liste los elementos de $A \cup B$.
- c) Liste los elementos de $A \cap B$.

2.13 Construya un diagrama de Venn para ilustrar las posibles intersecciones y uniones en los siguientes eventos relativos al espacio muestral que consta de todos los automóviles fabricados en Estados Unidos.

C : cuatro puertas, T : techo corredizo, D : dirección hidráulica

2.14 Si $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D = \{1, 6, 7\}$, liste los elementos de los conjuntos que corresponden a los siguientes eventos:

- a) $A \cup C$;
- b) $A \cap B$;
- c) C' ;
- d) $(C' \cap D) \cup B$;
- e) $(S \cap C)'$;
- f) $A \cap C \cap D'$.

2.15 Considere el espacio muestral $S = \{\text{cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, oxígeno, cinc}\}$ y los eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{cobre, sodio, cinc}\}, \\ B &= \{\text{sodio, nitrógeno, potasio}\} \\ C &= \{\text{oxígeno}\}. \end{aligned}$$

Liste los elementos de los conjuntos que corresponden a los siguientes eventos:

- a) A' ;
- b) $A \cup C$;
- c) $(A \cap B') \cup C'$;
- d) $B' \cap C'$;
- e) $A \cap B \cap C$;
- f) $(A' \cup B') \cap (A' \cap C)$.

2.16 Si $S = \{x \mid 0 < x < 12\}$, $M = \{x \mid 1 < x < 9\}$ y $N = \{x \mid 0 < x < 5\}$, encuentre

- a) $M \cup N$;
- b) $M \cap N$;
- c) $M' \cap N'$.

2.17 Sean A , B y C eventos relativos al espacio muestral S . Utilice diagramas de Venn para sombrear las áreas que representan los siguientes eventos:

- a) $(A \cap B)'$;
- b) $(A \cup B)'$;
- c) $(A \cap C) \cup B$.

2.18 ¿Cuál de los siguientes pares de eventos son mutuamente excluyentes?

- a) Un golfista que se clasifica en último lugar en la vuelta del hoyo 18, en un torneo de 72 hoyos, y pierde el torneo.
- b) Un jugador de póquer que tiene flor (todas las cartas del mismo palo) y 3 del mismo palo en la misma mano de 5 cartas.
- c) Una madre que da a luz a una niña y a un par de gemelas el mismo día.
- d) Un jugador de ajedrez que pierde el último juego y gana el torneo.

2.19 Suponga que una familia sale de vacaciones de verano en su casa rodante y que M es el evento de que sufrirán fallas mecánicas, T es el evento de que recibirán una infracción por cometer una falta de tránsito y V es el evento de que llegarán a un lugar para acampar que esté lleno. Remítase al diagrama de Venn de la figura 2.5 y exprese con palabras los eventos representados por las siguientes regiones:

- a) región 5;
- b) región 3;
- c) regiones 1 y 2 juntas;
- d) regiones 4 y 7 juntas;
- e) regiones 3, 6, 7 y 8 juntas.

2.20 Remítase al ejercicio 2.19 y al diagrama de Venn de la figura 2.5, liste los números de las regiones que representan los siguientes eventos:

- a) La familia no experimentará fallas mecánicas y no será multada por cometer una infracción de tránsito, pero llegará a un lugar para acampar que está lleno.
- b) La familia experimentará tanto fallas mecánicas como problemas para localizar un lugar disponible para acampar, pero no será multada por cometer una infracción de tránsito.
- c) La familia experimentará fallas mecánicas o encontrará un lugar para acampar lleno, pero no será multada por cometer una infracción de tránsito.
- d) La familia no llegará a un lugar para acampar lleno.

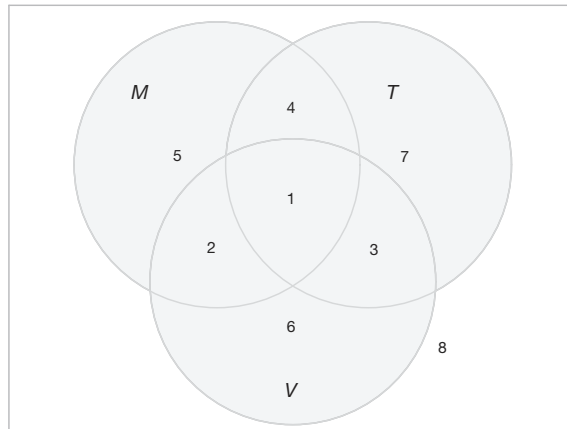


Figura 2.5: Diagrama de Venn para los ejercicios 2.19 y 2.20.

2.3 Conteo de puntos muestrales

Uno de los problemas que el estadístico debe considerar e intentar evaluar es el elemento de aleatoriedad asociado con la ocurrencia de ciertos eventos cuando se realiza un experimento. Estos problemas pertenecen al campo de la probabilidad, un tema que se estudiará en la sección 2.4. En muchos casos debemos ser capaces de resolver un problema de probabilidad mediante el conteo del número de puntos en el espacio muestral, sin listar realmente cada elemento. El principio fundamental del conteo, a menudo denominado **regla de multiplicación**, se establece en la regla 2.1.

Regla 2.1: Si una operación se puede llevar a cabo en n_1 formas, y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en n_2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de $n_1 n_2$ formas.

Ejemplo 2.13: ¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral cuando se lanza un par de dados una vez?

Solución: El primer dado puede caer en cualquiera de $n_1 = 6$ maneras. Para cada una de esas 6 maneras el segundo dado también puede caer en $n_2 = 6$ formas. Por lo tanto, el par de dados puede caer en $n_1 n_2 = (6)(6) = 36$ formas posibles. ─

Ejemplo 2.14: Un urbanista de una nueva subdivisión ofrece a los posibles compradores de una casa elegir entre Tudor, rústica, colonial y tradicional el estilo de la fachada, y entre una planta, dos pisos y desniveles el plano de construcción. ¿En cuántas formas diferentes puede un comprador ordenar una de estas casas?

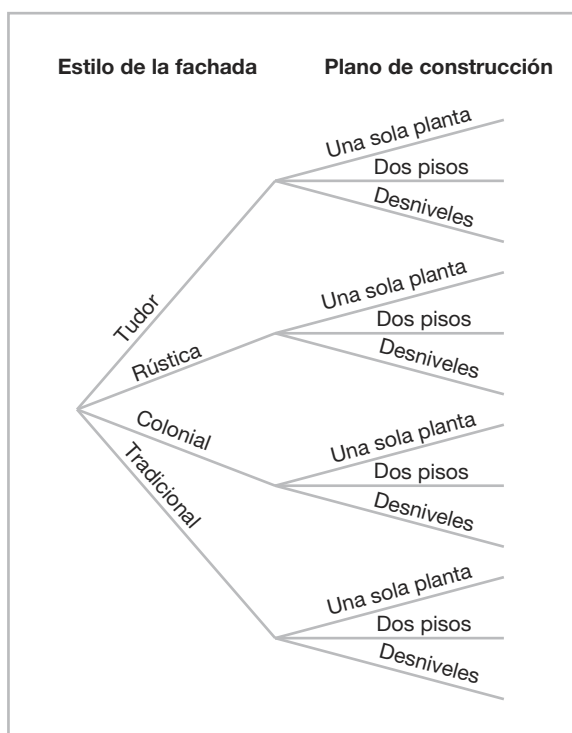


Figura 2.6: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.14.

Solución: Como $n_1 = 4$ y $n_2 = 3$, un comprador debe elegir entre

$$n_1 n_2 = (4)(3) = 12 \text{ casas posibles.} \quad \text{─}$$

Las respuestas a los dos ejemplos anteriores se comprueban construyendo diagramas de árbol y contando las diversas trayectorias a lo largo de las ramas. Así, en el

ejemplo 2.14 habrá $n_1 = 4$ ramas que corresponden a los diferentes estilos de la fachada, y después habrá $n_2 = 3$ ramas que se extienden de cada una de estas 4 ramas para representar los diferentes planos de plantas. Este diagrama de árbol, como se ilustra en la figura 2.6, proporciona las $n_1 n_2 = 12$ opciones de casas dadas por las trayectorias a lo largo de las ramas.

Ejemplo 2.15: Si un miembro de un club que tiene 22 integrantes necesitara elegir un presidente y un tesorero, ¿de cuántas maneras diferentes se podría elegir a ambos?

Solución: Para el puesto de presidente hay 22 posibilidades en total. Para cada una de esas 22 posibilidades hay 21 posibilidades de elegir al tesorero. Si utilizamos la regla de la multiplicación, obtenemos $n_1 \times n_2 = 22 \times 21 = 462$ maneras diferentes. ─

La regla de la multiplicación (regla 2.1) se puede extender para abarcar cualquier número de operaciones. Por ejemplo, suponga que un cliente desea comprar un nuevo teléfono celular y que puede elegir entre $n_1 = 5$ marcas, $n_2 = 5$ tipos de capacidad y $n_3 = 4$ colores. Estas tres clasificaciones dan como resultado $n_1 n_2 n_3 = (5)(5)(4) = 100$ diferentes formas en las que un cliente puede ordenar uno de estos teléfonos. A continuación se formula la **regla de multiplicación generalizada** que cubre k operaciones.

Regla 2.2: Si una operación se puede ejecutar en n_1 formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación en n_2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n_3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en $n_1 n_2 \dots n_k$ formas.

Ejemplo 2.16: Sam va a armar una computadora y para comprar las partes tiene que elegir entre las siguientes opciones: dos marcas de circuitos integrados, cuatro marcas de discos duros, tres marcas de memorias y cinco tiendas locales en las que puede adquirir un conjunto de accesorios. ¿De cuántas formas diferentes puede Sam comprar las partes?

Solución: Como $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$ y $n_4 = 5$, hay

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$$

formas diferentes de comprar las partes. ─

Ejemplo 2.17: ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 5, 6 y 9, si cada dígito se puede usar sólo una vez?

Solución: Como el número debe ser par, tenemos sólo $n_1 = 3$ opciones para la posición de las unidades. Sin embargo, para un número de cuatro dígitos la posición de los millares no puede ser 0. Por lo tanto, consideramos la posición de las unidades en dos partes: 0 o diferente de 0. Si la posición de las unidades es 0 (es decir, $n_1 = 1$), tenemos $n_2 = 5$ opciones para la posición de los millares, $n_3 = 4$ para la posición de las centenas y $n_4 = 3$ para la posición de las decenas. Por lo tanto, en este caso tenemos un total de

$$n_1 n_2 n_3 n_4 = (1)(5)(4)(3) = 60$$

números pares de cuatro dígitos. Por otro lado, si la posición de las unidades no es 0 (es decir, $n_1 = 2$), tenemos $n_2 = 4$ opciones para la posición de los millares, $n_3 = 4$ para la posición de las centenas y $n_4 = 3$ para la posición de las decenas. En esta situación tenemos un total de

$$n_1 n_2 n_3 n_4 = (2)(4)(4)(3) = 96$$

números pares de cuatro dígitos.

Puesto que los dos casos anteriores son mutuamente excluyentes, el número total de números pares de cuatro dígitos se puede calcular usando $60 + 96 = 156$. ─

Con frecuencia nos interesamos en un espacio muestral que contiene como elementos a todas las posibles ordenaciones o arreglos de un grupo de objetos. Por ejemplo, cuando queremos saber cuántos arreglos diferentes son posibles para sentar a seis personas alrededor de una mesa, o cuando nos preguntamos cuántas ordenaciones diferentes son posibles para sacar dos billetes de lotería de un total de 20. En este caso los diferentes arreglos se llaman **permutaciones**.

Definición 2.7: Una **permutación** es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos.

Considere las tres letras a, b y c . Las permutaciones posibles son abc, acb, bac, bca, cab y cba , por lo tanto, vemos que hay 6 arreglos distintos. Si utilizamos la regla 2.2 podemos llegar a la respuesta 6 sin listar realmente las diferentes ordenaciones. Hay $n_1 = 3$ opciones para la primera posición. Sin importar cuál letra se elija, siempre habrá $n_2 = 2$ opciones para la segunda posición. Por último, independientemente de cuál de las dos letras se elija para las primeras dos posiciones, sólo hay $n_3 = 1$ elección para la última posición, lo que da un total de

$$n_1 n_2 n_3 = (3)(2)(1) = 6 \text{ permutaciones}$$

mediante la regla 2.2. En general, n objetos distintos se pueden arreglar en

$$n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1) \text{ formas.}$$

Existe una notación para una cifra como ésta.

Definición 2.8 Para cualquier entero no negativo n , $n!$, denominado “ n factorial” se define como

$$N! = n(n-1) \dots (2)(1),$$

con el caso especial de $0! = 1$.

Si utilizamos el argumento anterior llegamos al siguiente teorema.

Teorema 2.1: El número de permutaciones de n objetos es $n!$

El número de permutaciones de las cuatro letras a, b, c y d será $4! = 24$. Consideremos ahora el número de permutaciones que son posibles tomando dos de las cuatro letras a la vez. Éstas serían $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db$ y dc . De nuevo, si utilizamos la regla 2.1, tenemos dos posiciones para llenar con $n_1 = 4$ opciones para la primera y después $n_2 = 3$ opciones para la segunda, para un total de

$$n_1 n_2 = (4)(3) = 12$$

permutaciones. En general, n objetos distintos tomados de r a la vez se pueden arreglar en

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

formas. Representamos este producto mediante

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Como resultado tenemos el teorema que sigue.

Teorema 2.2: El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo 2.18: En un año se otorgará uno de tres premios (a la investigación, la enseñanza y el servicio) a algunos de los estudiantes, de un grupo de 25, de posgrado del departamento de estadística. Si cada estudiante puede recibir un premio como máximo, ¿cuántas selecciones posibles habría?

Solución: Como los premios son distinguibles, se trata de un problema de permutación. El número total de puntos muestrales es

$${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = (25)(24)(23) = 13,800.$$

Ejemplo 2.19: En un club estudiantil compuesto por 50 personas se va a elegir a un presidente y a un tesorero. ¿Cuántas opciones diferentes de funcionarios son posibles si

- a) no hay restricciones;
- b) A participará sólo si él es el presidente;
- c) B y C participarán juntos o no lo harán;
- d) D y E no participarán juntos?

Solución: a) El número total de opciones de funcionarios, si no hay restricciones, es

$${}_{50}P_2 = \frac{50!}{48!} = (50)(49) = 2450.$$

- b) Como A participaría sólo si es el presidente, tenemos dos situaciones: i) A se elige como presidente, lo cual produce 49 resultados posibles para el puesto de tesorero; o ii) los funcionarios se eligen de entre las 49 personas restantes sin tomar en cuenta a A, en cuyo caso el número de opciones es ${}_{49}P_2 = (49)(48) = 2352$. Por lo tanto, el número total de opciones es $49 + 2352 = 2401$.
- c) El número de selecciones cuando B y C participan juntos es 2. El número de selecciones cuando ni B ni C se eligen es ${}_{48}P_2 = 2256$. Por lo tanto, el número total de opciones en esta situación es $2 + 2256 = 2258$.
- d) El número de selecciones cuando D participa como funcionario pero sin E es $(2)(48) = 96$, donde 2 es el número de puestos que D puede ocupar y 48 es el número de selecciones de los otros funcionarios de las personas restantes en el club, excepto E. El número de selecciones cuando E participa como funcionario pero sin D también es $(2)(48) = 96$. El número de selecciones cuando tanto D como E no son elegidos es ${}_{48}P_2 = 2256$. Por lo tanto, el número total de opciones es $(2)(96) + 2256 = 2448$. Este problema también tiene otra solución rápida: como D y E sólo pueden participar juntos de dos maneras, la respuesta es $2450 - 2 = 2448$. ■

Las permutaciones que ocurren al arreglar objetos en un círculo se llaman **permutaciones circulares**. Dos permutaciones circulares no se consideran diferentes a menos que los objetos correspondientes en los dos arreglos estén precedidos o seguidos por un objeto diferente, conforme avancemos en la dirección de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si cuatro personas juegan *bridge*, no tenemos una permutación nueva si se mueven una posición en la dirección de las manecillas del reloj. Si consideramos a una persona en una posición fija y arreglamos a las otras tres de $3!$ formas, encontramos que hay seis arreglos distintos para el juego de *bridge*.

Teorema 2.3: El número de permutaciones de n objetos ordenados en un círculo es $(n - 1)!$.

Hasta ahora hemos considerado permutaciones de objetos distintos. Es decir, todos los objetos fueron por completo diferentes o distinguibles. Evidentemente, si tanto la letra b como la c son iguales a x , entonces las 6 permutaciones de las letras a, b y c se convierten en axx, axx, xax, xax, xxa y xxa , de las cuales sólo 3 son diferentes. Por lo tanto, con 3 letras, en las que 2 son iguales, tenemos $3!/2! = 3$ permutaciones distintas. Con 4 letras diferentes a, b, c y d tenemos 24 permutaciones distintas. Si permitimos que $a = b = x$ y $c = d = y$, podemos listar sólo las siguientes permutaciones distintas: $xyxy, xyxy, yxyx, yxyx, xyyx$ y $xyyx$. De esta forma tenemos $4!/(2!2!) = 6$ permutaciones distintas.

Teorema 2.4: El número de permutaciones distintas de n objetos, en el que n_1 son de una clase, n_2 de una segunda clase, ..., n_k de una k -ésima clase es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Ejemplo 2.20: Durante un entrenamiento de fútbol americano colegial, el coordinador defensivo necesita tener a 10 jugadores parados en una fila. Entre estos 10 jugadores hay 1 de primer año, 2 de segundo año, 4 de tercer año y 3 de cuarto año, respectivamente. ¿De cuántas formas diferentes se pueden arreglar en una fila si lo único que los distingue es el grado en el cual están?

Solución: Usando directamente el teorema 2.4, el número total de arreglos es

$$\frac{10!}{1! 2! 4! 3!} = 12,600.$$

Con frecuencia nos interesa el número de formas de dividir un conjunto de n objetos en r subconjuntos denominados **celdas**. Se consigue una partición si la intersección de todo par posible de los r subconjuntos es el conjunto vacío ϕ , y si la unión de todos los subconjuntos da el conjunto original. El orden de los elementos dentro de una celda no tiene importancia. Considere el conjunto $\{a, e, i, o, u\}$. Las particiones posibles en dos celdas en las que la primera celda contenga 4 elementos y la segunda 1 son

$$\{(a, e, i, o), (u)\}, \{(a, i, o, u), (e)\}, \{(e, i, o, u), (a)\}, \{(a, e, o, u), (i)\}, \{(a, e, i, u), (o)\}.$$

Vemos que hay 5 formas de partir un conjunto de 4 elementos en dos subconjuntos o celdas que contengan 4 elementos en la primera celda y 1 en la segunda.

El número de particiones para esta ilustración se denota con la expresión

$$\binom{5}{4, 1} = \frac{5!}{4! 1!} = 5,$$

en la que el número superior representa el número total de elementos y los números inferiores representan el número de elementos que van en cada celda. Establecemos esto de forma más general en el teorema 2.5.

Teorema 2.5: El número de formas de partir un conjunto de n objetos en r celdas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 elementos en la segunda, y así sucesivamente, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!},$$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Ejemplo 2.21: Un hotel va a hospedar a siete estudiantes de posgrado que asisten a una conferencia, ¿en cuántas formas los puede asignar a una habitación triple y a dos dobles?

Solución: El número total de particiones posibles sería

$$\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3! 2! 2!} = 210.$$

En muchos problemas nos interesamos en el número de formas de seleccionar r objetos de n sin importar el orden. Tales selecciones se llaman **combinaciones**. Una combinación es realmente una partición con dos celdas, donde una celda contiene los r objetos seleccionados y la otra contiene los $(n - r)$ objetos restantes. El número de tales combinaciones se denota con

$$\binom{n}{r, n - r}, \text{ que por lo general se reduce a } \binom{n}{r},$$

debido a que el número de elementos en la segunda celda debe ser $n - r$.

Teorema 2.6: El número de combinaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}.$$

Ejemplo 2.22: Un niño le pide a su madre que le lleve cinco cartuchos de Game-Boy™ de su colección de 10 juegos recreativos y 5 de deportes. ¿De cuántas maneras podría su madre llevarle 3 juegos recreativos y 2 de deportes?

Solución: El número de formas de seleccionar 3 cartuchos de 10 es

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! (10 - 3)!} = 120.$$

El número de formas de seleccionar 2 cartuchos de 5 es

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = 10.$$

Si utilizamos la regla de la multiplicación (regla 2.1) con $n_1 = 120$ y $n_2 = 10$, tenemos que hay $(120)(10) = 1200$ formas. ─

Ejemplo 2.23: ¿Cuántos arreglos diferentes de letras se pueden hacer con las letras de la palabra *STATISTICS*?

Solución: Si utilizamos el mismo argumento expuesto en el teorema 2.6, en este ejemplo podemos realmente aplicar el teorema 2.5 para obtener

$$\binom{10}{3, 3, 2, 1, 1} = \frac{10!}{3! 3! 2! 1! 1!} = 50,400.$$

Aquí tenemos 10 letras en total, donde 2 letras (*S*, *T*) aparecen tres veces cada una, la letra *I* aparece dos veces, y las letras *A* y *C* aparecen una vez cada una. Por otro lado, el resultado se puede obtener directamente usando el teorema 2.4. ─

Ejercicios

2.21 A los participantes de una convención se les ofrecen seis recorridos, cada uno de tres días, a sitios de interés. ¿De cuántas maneras se puede acomodar una persona para que vaya a uno de los recorridos planeados por la convención?

2.22 En un estudio médico los pacientes se clasifican en 8 formas de acuerdo con su tipo sanguíneo: AB^+ , AB^- , A^+ , A^- , B^+ , B^- , O^+ u O^- ; y también de acuerdo con su presión sanguínea: baja, normal o alta. Encuentre el número de formas en las que se puede clasificar a un paciente.

2.23 Si un experimento consiste en lanzar un dado y después extraer una letra al azar del alfabeto inglés, ¿cuántos puntos habrá en el espacio muestral?

2.24 Los estudiantes de humanidades de una universidad privada se clasifican como estudiantes de primer año, de segundo año, de penúltimo año o de último año, y también de acuerdo con su género (hombres o mujeres). Calcule el número total de clasificaciones posibles para los estudiantes de esa universidad.

2.25 Cierta marca de calzado existe en 5 diferentes estilos y cada estilo está disponible en 4 colores distintos. Si la tienda deseara mostrar la cantidad de pares de zapatos que incluya todos los diversos estilos y colores, ¿cuántos pares diferentes tendría que mostrar?

2.26 Un estudio en California concluyó que siguiendo siete sencillas reglas para la salud un hombre y una mujer pueden prolongar su vida 11 y 7 años en promedio, respectivamente. Estas 7 reglas son: no fumar, hacer ejercicio de manera habitual, moderar su consumo de alcohol, dormir siete u ocho horas, mantener el peso adecuado, desayunar y no ingerir alimentos entre comi-

das. De cuántas formas puede una persona adoptar cinco de estas reglas:

- ¿Si la persona actualmente infringe las siete reglas?
- ¿Si la persona nunca bebe y siempre desayuna?

2.27 Un urbanista de un nuevo fraccionamiento ofrece a un posible comprador de una casa elegir entre 4 diseños, 3 diferentes sistemas de calefacción, un garaje o cobertizo, y un patio o un porche cubierto. ¿De cuántos planos diferentes dispone el comprador?

2.28 Un medicamento para aliviar el asma se puede adquirir en 5 diferentes laboratorios y en forma de líquido, comprimidos o cápsulas, todas en concentración normal o alta. ¿De cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente que sufre de asma?

2.29 En un estudio económico de combustibles, cada uno de 3 autos de carreras se prueba con 5 marcas diferentes de gasolina en 7 lugares de prueba que se localizan en diferentes regiones del país. Si en el estudio se utilizan 2 pilotos y las pruebas se realizan una vez en cada uno de los distintos grupos de condiciones, ¿cuántas pruebas se necesita realizar?

2.30 ¿De cuántas formas distintas se puede responder una prueba de falso-verdadero que consta de 9 preguntas?

2.31 Un testigo de un accidente automovilístico le dijo a la policía que la matrícula del culpable, que huyó, contenía las letras RLH seguidas por 3 dígitos, de los cuales el primero era un 5. Si el testigo no recuerda los 2 últimos dígitos, pero está seguro de que los 3 eran distintos, calcule la cantidad máxima de registros de automóviles que la policía tendría que revisar.

- 2.32** a) ¿De cuántas maneras se pueden formar 6 personas para abordar un autobús?
 b) ¿Cuántas maneras son posibles si, de las 6, 3 personas específicas insisten en formarse una después de la otra?
 c) ¿De cuántas maneras se pueden formar si, de las 6, 2 personas específicas se rehúsan a formarse una detrás de la otra?
- 2.33** Si una prueba de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 4 respuestas posibles, de las cuales sólo 1 es correcta,
 a) ¿de cuántas formas diferentes puede un estudiante elegir una respuesta a cada pregunta?
 b) ¿de cuántas maneras puede un estudiante elegir una respuesta a cada pregunta y obtener todas las respuestas incorrectas?
- 2.34** a) ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden hacer con las letras de la palabra *COLUMNA*?
 b) ¿Cuántas de estas permutaciones comienzan con la letra *M*?
- 2.35** Un contratista desea construir 9 casas, cada una con diferente diseño. ¿De cuántas formas puede ubicarlas en la calle en la que las va a construir si en un lado de ésta hay 6 lotes y en el lado opuesto hay 3?
- 2.36** a) ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si cada dígito se puede usar sólo una vez?
 b) ¿Cuántos de estos números son impares?
 c) ¿Cuántos son mayores que 330?
- 2.37** ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 niños y 5 niñas en una fila, si se deben alternar unos y otras?
- 2.38** Cuatro parejas compran 8 lugares en la misma fila para un concierto. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar...
 a) sin restricciones?
 b) si cada pareja se sienta junta?
 c) si todos los hombres se sientan juntos a la derecha de todas las mujeres?
- 2.39** En un concurso regional de ortografía, los 8 finalistas son 3 niños y 5 niñas. Encuentre el número de puntos muestrales en el espacio muestral S para el número de ordenamientos posibles al final del concurso para
 a) los 8 finalistas;
 b) los 3 primeros lugares.
- 2.40** ¿De cuántas formas se pueden cubrir las 5 posiciones iniciales en un equipo de baloncesto con 8 jugadores que pueden jugar cualquiera de las posiciones?
- 2.41** Encuentre el número de formas en que se puede asignar 6 profesores a 4 secciones de un curso introductorio de psicología, si ningún profesor se asigna a más de una sección.
- 2.42** De un grupo de 40 boletos se sacan 3 billetes de lotería para el primero, segundo y tercer premios. Encuentre el número de puntos muestrales en S para dar los 3 premios, si cada concursante sólo tiene un boleto.
- 2.43** ¿De cuántas maneras se pueden plantar 5 árboles diferentes en un círculo?
- 2.44** ¿De cuántas formas se puede acomodar en círculo una caravana de ocho carretas de Arizona?
- 2.45** ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden hacer con las letras de la palabra *INFINITO*?
- 2.46** ¿De cuántas maneras se pueden colocar 3 robles, 4 pinos y 2 arces a lo largo de la línea divisoria de una propiedad, si no se distingue entre árboles del mismo tipo?
- 2.47** ¿De cuántas formas se puede seleccionar a 3 de 8 candidatos recién graduados, igualmente calificados, para ocupar las vacantes de un despacho de contabilidad?
- 2.48** ¿Cuántas formas hay en que dos estudiantes no tengan la misma fecha de cumpleaños en un grupo de 60?

2.4 Probabilidad de un evento

Quizá fue la insaciable sed del ser humano por el juego lo que condujo al desarrollo temprano de la teoría de la probabilidad. En un esfuerzo por aumentar sus triunfos, algunos pidieron a los matemáticos que les proporcionaran las estrategias óptimas para los diversos juegos de azar. Algunos de los matemáticos que brindaron tales estrategias fueron Pascal, Leibniz, Fermat y James Bernoulli. Como resultado de este desarrollo inicial de la teoría de la probabilidad, la inferencia estadística, con todas sus predicciones y generalizaciones, ha rebasado el ámbito de los juegos de azar para abarcar muchos otros campos asociados con los eventos aleatorios, como la política, los negocios, el pronóstico del clima y la

investigación científica. Para que estas predicciones y generalizaciones sean razonablemente precisas, resulta esencial la comprensión de la teoría básica de la probabilidad.

¿A qué nos referimos cuando hacemos afirmaciones como “Juan probablemente ganará el torneo de tenis”, o “tengo 50% de probabilidades de obtener un número par cuando lanzo un dado”, o “la universidad no tiene posibilidades de ganar el juego de fútbol esta noche”, o “la mayoría de nuestros graduados probablemente estarán casados dentro de tres años”? En cada caso expresamos un resultado del cual no estamos seguros, pero con base en la experiencia, o a partir de la comprensión de la estructura del experimento, confiamos hasta cierto punto en la validez de nuestra afirmación.

En el resto de este capítulo consideraremos sólo aquellos experimentos para los cuales el espacio muestral contiene un número finito de elementos. La probabilidad de la ocurrencia de un evento que resulta de tal experimento estadístico se evalúa utilizando un conjunto de números reales denominados **pesos o probabilidades**, que van de 0 a 1. Para todo punto en el espacio muestral asignamos una probabilidad tal que la suma de todas las probabilidades es 1. Si tenemos razón para creer que al llevar a cabo el experimento es bastante probable que ocurra cierto punto muestral, le tendríamos que asignar a éste una probabilidad cercana a 1. Por el contrario, si creemos que no hay probabilidades de que ocurra cierto punto muestral, le tendríamos que asignar a éste una probabilidad cercana a cero. En muchos experimentos, como lanzar una moneda o un dado, todos los puntos muestrales tienen la misma oportunidad de ocurrencia, por lo tanto, se les asignan probabilidades iguales. A los puntos fuera del espacio muestral, es decir, a los eventos simples que no tienen posibilidades de ocurrir, les asignamos una probabilidad de cero.

Para encontrar la probabilidad de un evento A sumamos todas las probabilidades que se asignan a los puntos muestrales en A . Esta suma se denomina **probabilidad** de A y se denota con $P(A)$.

Definición 2.9: La **probabilidad** de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A . Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad P(S) = 1.$$

Además, si A_1, A_2, A_3, \dots es una serie de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Ejemplo 2.24 Una moneda se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una cara (H)?

Solución: El espacio muestral para este experimento es

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Si la moneda está balanceada, cada uno de estos resultados tendrá las mismas probabilidades de ocurrir. Por lo tanto, asignamos una probabilidad de ω a cada uno de los puntos muestrales. Entonces, $4\omega = 1$ o $\omega = 1/4$. Si A representa el evento de que ocurra al menos una cara (H), entonces

$$A = \{HH, HT, TH\} \text{ y } P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 2.25: Se carga un dado de forma que exista el doble de probabilidades de que salga un número par que uno impar. Si E es el evento de que ocurra un número menor que 4 en un solo lanzamiento del dado, calcule $P(E)$.

Solución: El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Asignamos una probabilidad de w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Como la suma de las probabilidades debe ser 1, tenemos $9w = 1$ o $w = 1/9$. Por lo tanto, asignamos probabilidades de $1/9$ y $2/9$ a cada número impar y par, respectivamente. Por consiguiente,

$$E = \{1, 2, 3\} \text{ y } P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ejemplo 2.26: En el ejemplo 2.25, sea A el evento de que resulte un número par y sea B el evento de que resulte un número divisible entre 3. Calcule $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

Solución: Para los eventos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 6\}$, tenemos

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \text{ y } A \cap B = \{6\}.$$

Al asignar una probabilidad de $1/9$ a cada número impar y de $2/9$ a cada número par, tenemos

$$P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

Si el espacio muestral para un experimento contiene N elementos, todos los cuales tienen las mismas probabilidades de ocurrir, asignamos una probabilidad igual a $1/N$ a cada uno de los N puntos. La probabilidad de que cualquier evento A contenga n de estos N puntos muestrales es entonces el cociente del número de elementos en A y el número de elementos en S .

Regla 2.3: Si un experimento puede dar como resultado cualquiera de N diferentes resultados que tienen las mismas probabilidades de ocurrir, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A , entonces la probabilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Ejemplo 2.27: A una clase de estadística para ingenieros asisten 25 estudiantes de ingeniería industrial, 10 de ingeniería mecánica, 10 de ingeniería eléctrica y 8 de ingeniería civil. Si el profesor elige al azar a un estudiante para que conteste una pregunta, ¿qué probabilidades hay de que el elegido sea a) estudiante de ingeniería industrial, b) estudiante de ingeniería civil o estudiante de ingeniería eléctrica?

Solución: Las especialidades de los estudiantes de ingeniería industrial, mecánica, eléctrica y civil se denotan con I , M , E y C , respectivamente. El grupo está integrado por 53 estudiantes y todos tienen las mismas probabilidades de ser seleccionados.

a) Como 25 de los 53 individuos estudian ingeniería industrial, la probabilidad del evento I , es decir, la de elegir al azar a alguien que estudia ingeniería industrial, es

$$P(I) = \frac{25}{53}.$$

b) Como 18 de los 53 estudiantes son de las especialidades de ingeniería civil o eléctrica, se deduce que

$$P(C \cup E) = \frac{18}{53}.$$

Ejemplo 2.28: En una mano de póquer que consta de 5 cartas encuentre la probabilidad de tener 2 ases y 3 jotas.

Solución: El número de formas de tener 2 ases de 4 cartas es

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! 2!} = 6,$$

y el número de formas de tener 3 jotas de 4 cartas es

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! 1!} = 4.$$

Mediante la regla de multiplicación (regla 2.1), obtenemos $n = (6)(4) = 24$ manos con 2 ases y 3 jotas. El número total de manos de póquer de 5 cartas, todas las cuales tienen las mismas probabilidades de ocurrir, es

$$N = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! 47!} = 2,598,960.$$

Por lo tanto, la probabilidad del evento C de obtener 2 ases y 3 jotas en una mano de póquer de 5 cartas es

$$P(C) = \frac{24}{2,598,960} = 0.9 \times 10^{-5}.$$

Si los resultados de un experimento no tienen las mismas probabilidades de ocurrir, las probabilidades se deben asignar con base en el conocimiento previo o en la evidencia experimental. Por ejemplo, si una moneda no está balanceada, podemos estimar las probabilidades de caras y cruces lanzándola muchas veces y registrando los resultados. De acuerdo con la definición de **frecuencia relativa** de la probabilidad, las probabilidades verdaderas serían las fracciones de caras y cruces que ocurren a largo plazo. Otra forma intuitiva de comprender la probabilidad es el método de la **indiferencia**. Por ejemplo, si usted tiene un dado que cree que está balanceado, el método con el que podría determinar que hay $1/6$ de probabilidades de que resulte cada una de las seis caras después de lanzarlo una vez es el método de la indiferencia.

Para encontrar un valor numérico que represente de forma adecuada la probabilidad de ganar en el tenis, dependemos de nuestro desempeño previo en el juego, así como también del de nuestro oponente y, hasta cierto punto, de la capacidad de ganar que creemos tener. De manera similar, para calcular la probabilidad de que un caballo gane una carrera, debemos llegar a una probabilidad basada en las marcas anteriores de todos los caballos que participan en la carrera, así como de las marcas de los jinetes que los montan. La intuición, sin duda, también participa en la determinación del monto que estemos dispuestos a apostar. El uso de la intuición, las creencias personales y otra información indirecta para llegar a probabilidades se conoce como la definición **subjetiva** de la probabilidad.

En la mayoría de las aplicaciones de probabilidad de este libro la que opera es la interpretación de frecuencia relativa de probabilidad, la cual se basa en el experimento estadístico en vez de en la subjetividad y es considerada, más bien, como **frecuencia relativa limitante**. Como resultado, muchas aplicaciones de probabilidad en ciencia e ingeniería se deben basar en experimentos que se puedan repetir. Cuando asignamos probabilidades que se basan en información y opiniones previas, como en la afirmación: “hay grandes probabilidades de que los Gigantes pierdan el Súper Tazón”, se encuentran

conceptos menos objetivos de probabilidad. Cuando las opiniones y la información previa difieren de un individuo a otro, la probabilidad subjetiva se vuelve el recurso pertinente. En la estadística bayesiana (véase el capítulo 18) se usará una interpretación más subjetiva de la probabilidad, la cual se basará en obtener información previa de probabilidad.

2.5 Reglas aditivas

A menudo resulta más sencillo calcular la probabilidad de algún evento a partir de las probabilidades conocidas de otros eventos. Esto puede ser cierto si el evento en cuestión se puede representar como la unión de otros dos eventos o como el complemento de algún evento. A continuación se presentan varias leyes importantes que con frecuencia simplifican el cálculo de las probabilidades. La primera, que se denomina **regla aditiva**, se aplica a uniones de eventos.

Teorema 2.7: Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

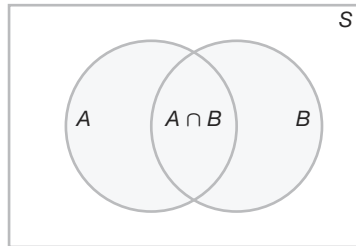


Figura 2.7: Regla aditiva de probabilidad.

Prueba: Considere el diagrama de Venn de la figura 2.7. $P(A \cup B)$ es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en $(A \cup B)$. Así, $P(A) + P(B)$ es la suma de todas las probabilidades en A más la suma de todas las probabilidades en B . Por lo tanto, sumamos dos veces las probabilidades en $(A \cap B)$. Como estas probabilidades se suman a $P(A \cap B)$, debemos restar esta probabilidad una vez para obtener la suma de las probabilidades en $A \cup B$. ─

Corolario 2.1: Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

El corolario 2.1 es un resultado inmediato del teorema 2.7, pues si A y B son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \emptyset$ y entonces $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. En general, podemos anotar el corolario 2.2.

Corolario 2.2: Si A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Un conjunto de eventos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de un espacio muestral S se denomina **partición** de S si A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente excluyentes y $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$. Por lo tanto, tenemos

Corolario 2.3: Si A_1, A_2, \dots, A_n es una partición de un espacio muestral S , entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

Como se esperaba, el teorema 2.7 se extiende de forma análoga.

Teorema 2.8: Para tres eventos A, B y C ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Ejemplo 2.29: Al final del semestre John se va a graduar en la facultad de ingeniería industrial de una universidad. Después de tener entrevistas en dos empresas en donde quiere trabajar, determina que la probabilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en la empresa A es 0.8, y que la probabilidad de obtenerla en la empresa B es 0.6. Si, por otro lado, considera que la probabilidad de recibir ofertas de ambas empresas es 0.5, ¿qué probabilidad tiene de obtener al menos una oferta de esas dos empresas?

Solución: Si usamos la regla aditiva tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.30: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados?

Solución: Sea A el evento de que resulte 7 y B el evento de que salga 11. Ahora bien, para 6 de los 36 puntos muestrales ocurre un total de 7 y sólo para 2 de ellos ocurre un total de 11. Como todos los puntos muestrales tienen la misma probabilidad, tenemos $P(A) = 1/6$ y $P(B) = 1/18$. Los eventos A y B son mutuamente excluyentes, ya que un total de 7 y uno de 11 no pueden ocurrir en el mismo lanzamiento. Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}.$$

Este resultado también se podría obtener contando el número total de puntos para el evento $A \cup B$, es decir, 8 y escribir

$$P(A \cup B) = \frac{n}{N} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

El teorema 2.7 y sus tres corolarios deberían ayudar al lector a comprender mejor la probabilidad y su interpretación. Los corolarios 2.1 y 2.2 sugieren el resultado muy intuitivo tratando con la probabilidad de que ocurra al menos uno de varios eventos, sin que puedan ocurrir dos de ellos simultáneamente. La probabilidad de que al menos ocurra uno es la suma de las probabilidades de ocurrencia de los eventos individuales. El tercer corolario simplemente establece que el valor mayor de una probabilidad (unidad) se asigna a todo el espacio muestral S .

Ejemplo 2.31: Las probabilidades de que un individuo que compra un automóvil nuevo elija uno de color verde, uno blanco, uno rojo o uno azul son 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que un comprador dado adquiera un automóvil nuevo que tenga uno de esos colores?

Solución: Sean V , B , R y A los eventos de que un comprador seleccione, respectivamente, un automóvil verde, blanco, rojo o azul. Como estos cuatro eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad es

$$\begin{aligned} P(V \cup B \cup R \cup A) &= P(V) + P(B) + P(R) + P(A) \\ &= 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68. \end{aligned}$$

A menudo es más difícil calcular la probabilidad de que ocurra un evento que calcular la probabilidad de que el evento no ocurra. Si éste es el caso para algún evento A , simplemente calculamos primero $P(A')$ y, después, mediante el teorema 2.7, calculamos $P(A)$ por sustracción.

Teorema 2.9: Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$P(A) + P(A') = 1$$

Prueba: Como $A \cup A' = S$, y los conjuntos A y A' son disjuntos, entonces

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

Ejemplo 2.32: Si las probabilidades de que un mecánico automotriz dé servicio a 3, 4, 5, 6, 7, 8 o más vehículos en un día de trabajo dado son 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10 y 0.07, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que dé servicio al menos a 5 vehículos el siguiente día de trabajo?

Solución: Sea E el evento de que al menos 5 automóviles reciban servicio. Ahora bien, $P(E) = 1 - P(E')$, donde E' es el evento de que menos de 5 automóviles reciban servicio. Como

$$P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31.$$

del teorema 2.9 se deduce que

$$P(E) = 1 - 0.31 = 0.69.$$

Ejemplo 2.33: Suponga que las especificaciones del fabricante para la longitud del cable de cierto tipo de computadora son 2000 ± 10 milímetros. En esta industria se sabe que el cable pequeño tiene la misma probabilidad de salir defectuoso (de no cumplir con las especificaciones) que el cable grande. Es decir, la probabilidad de que aleatoriamente se produzca un

cable con una longitud mayor que 2010 milímetros es igual a la probabilidad de producirlo con una longitud menor que 1990 milímetros. Se sabe que la probabilidad de que el procedimiento de producción cumpla con las especificaciones es 0.99.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cable elegido al azar sea muy largo?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cable elegido al azar sea más grande que 1990 milímetros?

Solución: Sea E el evento de que un cable cumpla con las especificaciones. Sean P y G los eventos de que el cable sea muy pequeño o muy grande, respectivamente. Entonces,

- a) $P(E) = 0.99$ y $P(P) = P(G) = (1 - 0.99)/2 = 0.005$.
- b) Si la longitud de un cable seleccionado al azar se denota con X , tenemos

$$P(1990 \leq X \leq 2010) = P(E) = 0.99.$$

$$\text{Como } P(X \geq 2010) = P(G) = 0.005,$$

$$P(X \geq 1990) = P(E) + P(G) = 0.995$$

Esto también se resuelve utilizando el teorema 2.9:

$$P(X \geq 1990) + P(X < 1990) = 1.$$

$$\text{Así, } P(X \geq 1990) = 1 - P(P) = 1 - 0.005 = 0.995.$$



Ejercicios

2.49 Encuentre los errores en cada una de las siguientes aseveraciones:

- a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda 0, 1, 2 o 3 unidades en un día dado de febrero son 0.19, 0.38, 0.29 y 0.15, respectivamente.
- b) La probabilidad de que llueva mañana es 0.40 y la probabilidad de que no llueva es 0.52.
- c) Las probabilidades de que una impresora cometa 0, 1, 2, 3 o 4 o más errores al imprimir un documento son 0.19, 0.34, -0.25, 0.43 y 0.29, respectivamente.
- d) Al sacar una carta de una baraja en un solo intento la probabilidad de seleccionar un corazón es $1/4$, la probabilidad de seleccionar una carta negra es $1/2$, y la probabilidad de seleccionar una carta de corazones y negra es $1/8$.

2.50 Suponga que todos los elementos de S en el ejercicio 2.8 de la página 42 tienen la misma probabilidad de ocurrencia y calcule

- a) la probabilidad del evento A ;
- b) la probabilidad del evento C ;
- c) la probabilidad del evento $A \cap C$.

2.51 Una caja contiene 500 sobres, de los cuales 75 contienen \$100 en efectivo, 150 contienen \$25 y 275 contienen \$10. Se puede comprar un sobre en \$25. ¿Cuál es el espacio muestral para las diferentes cantidades de dinero? Asigne probabilidades a los puntos muestrales y después calcule la probabilidad de que el primer sobre que se compre contenga menos de \$100.

2.52 Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de último año, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

- a) fume pero no consuma bebidas alcohólicas;
- b) coma entre comidas y consuma bebidas alcohólicas pero no fume;
- c) no fume ni coma entre comidas.

2.53 La probabilidad de que una industria estadounidense se ubique en Shanghai, China, es 0.7, la probabilidad de que se ubique en Beijing, China, es 0.4 y la

probabilidad de que se ubique en Shamghái o Beijing, o en ambas ciudades, es 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que la industria se ubique...

- a) en ambas ciudades?
- b) en ninguna de esas ciudades?

2.54 Basado en su experiencia, un agente bursátil considera que en las condiciones económicas actuales la probabilidad de que un cliente invierta en bonos libres de impuestos es 0.6, la de que invierta en fondos comunes de inversión es 0.3 y la de que invierta en ambos es 0.15. En esta ocasión encuentre la probabilidad de que un cliente invierta

- a) en bonos libres de impuestos o en fondos comunes de inversión;
- b) en ninguno de esos dos instrumentos.

2.55 Si cada artículo codificado en un catálogo empieza con 3 letras distintas seguidas por 4 dígitos distintos de cero, calcule la probabilidad de seleccionar aleatoriamente uno de estos artículos codificados que tenga como primera letra una vocal y el último dígito sea par.

2.56 Un fabricante de automóviles está preocupado por el posible retiro de su sedán de cuatro puertas con mayor venta. Si fuera retirado habría 0.25 de probabilidad de que haya un defecto en el sistema de frenos, 0.18 de que haya un defecto en la transmisión, 0.17 de que esté en el sistema de combustible y 0.40 de que esté en alguna otra área.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el defecto esté en los frenos o en el sistema de combustible, si la probabilidad de que haya defectos en ambos sistemas de manera simultánea es 0.15?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defecto en los frenos o en el sistema de combustible?

2.57 Si se elige al azar una letra del alfabeto inglés, encuentre la probabilidad de que la letra

- a) sea una vocal excepto y;
- b) esté listada en algún lugar antes de la letra j;
- c) esté listada en algún lugar después de la letra g.

2.58 Se lanza un par de dados. Calcule la probabilidad de obtener

- a) un total de 8;
- b) máximo un total de 5.

2.59 En una mano de póquer que consta de 5 cartas, encuentre la probabilidad de tener

- a) 3 ases;
- b) 4 cartas de corazones y 1 de tréboles.

2.60 Si se toman 3 libros al azar, de un librero que contiene 5 novelas, 3 libros de poemas y 1 diccionario, ¿cuál es la probabilidad de que...

- a) se seleccione el diccionario?
- b) se seleccionen 2 novelas y 1 libro de poemas?

2.61 En un grupo de 100 estudiantes graduados de preparatoria, 54 estudiaron matemáticas, 69 estudiaron historia y 35 cursaron matemáticas e historia. Si se selecciona al azar uno de estos estudiantes, calcule la probabilidad de que

- a) el estudiante haya cursado matemáticas o historia;
- b) el estudiante no haya llevado ninguna de estas materias;
- c) el estudiante haya cursado historia pero no matemáticas.

2.62 La empresa Dom's Pizza utiliza pruebas de sabor y el análisis estadístico de los datos antes de comercializar cualquier producto nuevo. Considere un estudio que incluye tres tipos de pastas (delgada, delgada con ajo y orégano, y delgada con trozos de queso). Dom's también está estudiando tres salsas (estándar, una nueva salsa con más ajo y una nueva salsa con albahaca fresca).

- a) ¿Cuántas combinaciones de pasta y salsa se incluyen?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un juez reciba una pasta delgada sencilla con salsa estándar en su primera prueba de sabor?

2.63 A continuación se listan los porcentajes, proporcionados por *Consumer Digest* (julio/agosto de 1996), de las probables ubicaciones de las PC en una casa:

Dormitorio de adultos:	0.03
Dormitorio de niños:	0.15
Otro dormitorio:	0.14
Oficina o estudio:	0.40
Otra habitación:	0.28

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una PC esté en un dormitorio?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté en un dormitorio?
- c) Suponga que de entre las casas que tienen una PC se selecciona una al azar, ¿en qué habitación esperaríamos encontrar una PC?

2.64 Existe interés por la vida de un componente electrónico. Suponga que se sabe que la probabilidad de que el componente funcione más de 6000 horas es 0.42. Suponga, además, que la probabilidad de que el componente *no dure más de 4000 horas* es 0.04.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea menor o igual a 6000 horas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea mayor que 4000 horas?

2.65 Considere la situación del ejercicio 2.64. Sea *A* el evento de que el componente falle en una prueba específica y *B* el evento de que se deforme pero no falle. El evento *A* ocurre con una probabilidad de 0.20 y el evento *B* ocurre con una probabilidad de 0.35.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el componente no falle en la prueba?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el componente funcione perfectamente bien (es decir, que ni se deforme ni falle en la prueba)?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el componente falle o se deforme en la prueba?

2.66 A los obreros de las fábricas se les motiva constantemente a practicar la tolerancia cero para prevenir accidentes en el lugar de trabajo. Los accidentes pueden ocurrir porque el ambiente o las condiciones laborales son inseguros. Por otro lado, los accidentes pueden ocurrir por negligencia o fallas humanas. Además, los horarios de trabajo de 7:00 A.M. a 3:00 P.M. (turno matutino), de 3:00 P.M. a 11:00 P.M. (turno vespertino) y de 11:00 P.M. a 7:00 A.M. (turno nocturno) podría ser un factor. El año pasado ocurrieron 300 accidentes. Los porcentajes de los accidentes por la combinación de condiciones son los que siguen:

Turno	Condiciones inseguras	Fallas humanas
Matutino	5%	32%
Vespertino	6%	25%
Nocturno	2%	30%

Si se elige aleatoriamente un reporte de accidente de entre los 300 reportes,

- ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente haya ocurrido en el turno nocturno?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente haya ocurrido debido a una falla humana?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente haya ocurrido debido a las condiciones inseguras?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente haya ocurrido durante los turnos vespertino o nocturno?

2.67 Considere la situación del ejemplo 2.32 de la página 58.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el número de automóviles que recibirán servicio del mecánico no sea mayor de 4?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el mecánico dé servicio a menos de 8 automóviles?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el mecánico dé servicio a 3 o 4 automóviles?

2.68 Existe interés por el tipo de horno, eléctrico o de gas, que se compra en una tienda departamental específica. Considere la decisión que al respecto toman seis clientes distintos.

- Suponga que hay 0.40 de probabilidades de que como máximo dos de esos clientes compren un horno eléctrico. ¿Cuál será la probabilidad de que al menos tres compren un horno eléctrico?

- Suponga que se sabe que la probabilidad de que los seis compren el horno eléctrico es 0.007, mientras que la probabilidad de que los seis compren el horno de gas es 0.104. ¿Cuál es la probabilidad de vender, por lo menos, un horno de cada tipo?

2.69 En muchas áreas industriales es común que se utilicen máquinas para llenar las cajas de productos. Esto ocurre tanto en la industria de comestibles como en otras que fabrican productos de uso doméstico, como los detergentes. Dichas máquinas no son perfectas y, de hecho, podrían cumplir las especificaciones de llenado de las cajas (A), llenarlas por debajo del nivel especificado (B) o rebasar el límite de llenado (C). Por lo general, lo que se busca evitar es la práctica del llenado insuficiente. Sea $P(B) = 0.001$, mientras que $P(A) = 0.990$.

- Determine $P(C)$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina no llene de manera suficiente?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina llene de más o de menos?

2.70 Considere la situación del ejercicio 2.69. Suponga que se producen 50,000 cajas de detergente por semana, y que los clientes “devuelven” las cajas que no están suficientemente llenas y solicitan que se les reembolse lo que pagaron por ellas. Suponga que se sabe que el “costo” de producción de cada caja es de \$4.00 y que se venden a \$4.50.

- ¿Cuál es la utilidad semanal cuando no hay devoluciones de cajas defectuosas?
- ¿Cuál es la pérdida en utilidades esperada debido a la devolución de cajas insuficientemente llenadas?

2.71 Como podría sugerir la situación del ejercicio 2.69, a menudo los procedimientos estadísticos se utilizan para control de calidad (es decir, control de calidad industrial). A veces el *peso* de un producto es una variable importante que hay que controlar. Se dan especificaciones de peso para ciertos productos empacados, y si un paquete no las cumple (está muy ligero o muy pesado) se rechaza. Los datos históricos sugieren que la probabilidad de que un producto empacado cumpla con las especificaciones de peso es 0.95; mientras que la probabilidad de que sea demasiado ligero es 0.002. El fabricante invierte \$20.00 en la producción de cada uno de los productos empacados y el consumidor los adquiere a un precio de \$25.00.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al azar de la línea de producción sea demasiado pesado?
- Si todos los paquetes cumplen con las especificaciones de peso, ¿qué utilidad recibirá el fabricante por cada 10,000 paquetes que venda?

- c) Suponga que todos los paquetes defectuosos fueron rechazados y perdieron todo su valor, ¿a cuánto se reduciría la utilidad de la venta de 10,000 paquetes debido a que no se cumplieron las especificaciones de peso?

2.72 Demuestre que

$$P(A' \cap B') = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B).$$

2.6 Probabilidad condicional, independencia y regla del producto

Un concepto muy importante en la teoría de probabilidad es la probabilidad condicional. En algunas aplicaciones el profesional se interesa por la estructura de probabilidad bajo ciertas restricciones. Por ejemplo, en epidemiología, en lugar de estudiar las probabilidades de que una persona de la población general tenga diabetes, podría ser más interesante conocer esta probabilidad en un grupo distinto, como el de las mujeres asiáticas cuya edad está en el rango de 35 a 50 años, o como el de los hombres hispanos cuya edad está entre los 40 y los 60 años. A este tipo de probabilidad se le conoce como probabilidad condicional.

Probabilidad condicional

La probabilidad de que ocurra un evento B cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama **probabilidad condicional** y se denota con $P(B|A)$. El símbolo $P(B|A)$ por lo general se lee como “la probabilidad de que ocurra B , dado que ocurrió A ”, o simplemente, “la probabilidad de B , dado A ”.

Considere el evento B de obtener un cuadrado perfecto cuando se lanza un dado. El dado se construye de modo que los números pares tengan el doble de probabilidad de ocurrencia que los números nones. Con base en el espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en el que a los números impares y a los pares se les asignaron probabilidades de $1/9$ y $2/9$, respectivamente, la probabilidad de que ocurra B es de $1/3$. Suponga ahora que se sabe que el lanzamiento del dado tiene como resultado un número mayor que 3. Tenemos ahora un espacio muestral reducido, $A = \{4, 5, 6\}$, que es un subconjunto de S . Para encontrar la probabilidad de que ocurra B , en relación con el espacio muestral A , debemos comenzar por asignar nuevas probabilidades a los elementos de A , que sean proporcionales a sus probabilidades originales de modo que su suma sea 1. Al asignar una probabilidad de w al número non en A y una probabilidad de $2w$ a los dos números pares, tenemos $5w = 1$ o $w = 1/5$. En relación con el espacio A , encontramos que B contiene sólo el elemento 4. Si denotamos este evento con el símbolo $B|A$, escribimos $B|A = \{4\}$ y, en consecuencia,

$$P(B|A) = \frac{2}{5}.$$

Este ejemplo ilustra que los eventos pueden tener probabilidades diferentes cuando se consideran en relación con diferentes espacios muestrales.

También podemos escribir

$$P(B|A) = \frac{2}{5} = \frac{2/9}{5/9} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

donde $P(A \cap B)$ y $P(A)$ se calculan a partir del espacio muestral original S . En otras palabras, una probabilidad condicional relativa a un subespacio A de S se puede calcular en forma directa de las probabilidades que se asignan a los elementos del espacio muestral original S .

Definición 2.10: La probabilidad condicional de B , dado A , que se denota con $P(B|A)$, se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) > 0.$$

Un ejemplo más: suponga que tenemos un espacio muestral S constituido por la población de adultos de una pequeña ciudad que cumplen con los requisitos para obtener un título universitario. Debemos clasificarlos de acuerdo con su género y situación laboral. Los datos se presentan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Clasificación de los adultos de una pequeña ciudad

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

Se seleccionará al azar a uno de estos individuos para que realice un viaje a través del país con el fin de promover las ventajas de establecer industrias nuevas en la ciudad. Nos interesaremos en los eventos siguientes:

M : se elige a un hombre,

E : el elegido tiene empleo.

Al utilizar el espacio muestral reducido E , encontramos que

$$P(M|E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}.$$

Sea $n(A)$ el número de elementos en cualquier conjunto A . Podemos utilizar esta notación, puesto que cada uno de los adultos tiene las mismas probabilidades de ser elegido, para escribir

$$P(M|E) = \frac{n(E \cap M)}{n(E)} = \frac{n(E \cap M)/n(S)}{n(E)/n(S)} = \frac{P(E \cap M)}{P(E)},$$

en donde $P(E \cap M)$ y $P(E)$ se calculan a partir del espacio muestral original S . Para verificar este resultado observe que

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(E \cap M) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}.$$

Por lo tanto,

$$P(M|E) = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30},$$

como antes.

Ejemplo 2.34: La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a tiempo es $P(D) = 0.83$, la probabilidad de que llegue a tiempo es $P(A) = 0.82$ y la probabilidad de que

salga y llegue a tiempo es $P(D \cap A) = 0.78$. Calcule la probabilidad de que un avión
 a) llegue a tiempo, dado que salió a tiempo; y b) salió a tiempo, dado que llegó a tiempo.

Solución: Al utilizar la definición 2.10 tenemos lo que sigue:

a) La probabilidad de que un avión llegue a tiempo, dado que salió a tiempo es

$$P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94.$$

b) La probabilidad de que un avión haya salido a tiempo, dado que llegó a tiempo es

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95.$$

La noción de probabilidad condicional brinda la capacidad de reevaluar la idea de probabilidad de un evento a la luz de la información adicional; es decir, cuando se sabe que ocurrió otro evento. La probabilidad $P(A|B)$ es una actualización de $P(A)$ basada en el conocimiento de que ocurrió el evento B . En el ejemplo 2.34 es importante conocer la probabilidad de que el vuelo llegue a tiempo. Tenemos la información de que el vuelo no salió a tiempo. Con esta información adicional, la probabilidad más pertinente es $P(A|D')$, esto es, la probabilidad de que llegue a tiempo, dado que no salió a tiempo. A menudo las conclusiones que se obtienen a partir de observar la probabilidad condicional más importante cambian drásticamente la situación. En este ejemplo, el cálculo de $P(A|D')$ es

$$P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{0.82 - 0.78}{0.17} = 0.24.$$

Como resultado, la probabilidad de una llegada a tiempo disminuye significativamente ante la presencia de la información adicional.

Ejemplo 2.35: El concepto de probabilidad condicional tiene innumerables aplicaciones industriales y biomédicas. Considere un proceso industrial en el ramo textil, en el que se producen listones de una tela específica. Los listones pueden resultar con defectos en dos de sus características: la longitud y la textura. En el segundo caso el proceso de identificación es muy complicado. A partir de información histórica del proceso se sabe que 10% de los listones no pasan la prueba de longitud, que 5% no pasan la prueba de textura y que sólo 0.8% no pasan ninguna de las dos pruebas. Si en el proceso se elige un listón al azar y una medición rápida identifica que no pasa la prueba de longitud, ¿cuál es la probabilidad de que la textura esté defectuosa?

Solución: Considere los eventos

L : defecto en longitud,

T : defecto en textura.

Dado que el listón tiene una longitud defectuosa, la probabilidad de que este listón tenga una textura defectuosa está dada por

$$P(T|L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08.$$

Eventos independientes

En el experimento del lanzamiento de un dado de la página 62 señalamos que $P(B|A) = 2/5$, mientras que $P(B) = 1/3$. Es decir, $P(B|A) \neq P(B)$, lo cual indica que B depende de A . Consideremos ahora un experimento en el que se sacan 2 cartas, una después de la otra, de una baraja ordinaria, con reemplazo. Los eventos se definen como

A : la primera carta es un as,

B : la segunda carta es una espada.

Como la primera carta se reemplaza, nuestro espacio muestral para la primera y segunda cartas consta de 52 cartas, que contienen 4 ases y 13 espadas. Entonces,

$$P(B|A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Es decir, $P(B|A) = P(B)$. Cuando esto es cierto, se dice que los eventos A y B son **independientes**.

Aunque la probabilidad condicional permite alterar la probabilidad de un evento a la luz de material adicional, también nos permite entender mejor el muy importante concepto de **independencia** o, en el contexto actual, de eventos independientes. En el ejemplo 2.34 del aeropuerto, $P(A|D)$ difiere de $P(A)$. Esto sugiere que la ocurrencia de D influye en A y esto es lo que, de hecho, se espera en este caso. Sin embargo, considere la situación en donde tenemos los eventos A y B , y

$$P(A|B) = P(A).$$

En otras palabras, la ocurrencia de B no influye en las probabilidades de ocurrencia de A . Aquí la ocurrencia de A es independiente de la ocurrencia de B . No podemos dejar de resaltar la importancia del concepto de independencia, ya que desempeña un papel vital en el material de casi todos los capítulos de este libro y en todas las áreas de la estadística aplicada.

Definición 2.11: Dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{o} \quad P(A|B) = P(A),$$

si se asume la existencia de probabilidad condicional. De otra forma, A y B son **dependientes**.

La condición $P(B|A) = P(B)$ implica que $P(A|B) = P(A)$, y viceversa. Para los experimentos de extracción de una carta, donde mostramos que $P(B|A) = P(B) = 1/4$, también podemos ver que $P(A|B) = P(A) = 1/13$.

La regla de producto o regla multiplicativa

Al multiplicar la fórmula de la definición 2.10 por $P(A)$, obtenemos la siguiente **regla multiplicativa** importante (o **regla de producto**), que nos permite calcular la probabilidad de que ocurran dos eventos.

Teorema 2.10: Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B , entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \text{ siempre que } P(A) > 0.$$

Por consiguiente, la probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de que ocurra A multiplicada por la probabilidad condicional de que ocurra B , dado que ocurre A . Como los eventos $A \cap B$ y $B \cap A$ son equivalentes, del teorema 2.10 se deduce que también podemos escribir

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B).$$

En otras palabras, no importa qué evento se considere como A ni qué evento se considere como B .

Ejemplo 2.36: Suponga que tenemos una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales 5 están defectuosas. Si se seleccionan 2 fusibles al azar y se retiran de la caja, uno después del otro, sin reemplazar el primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fusibles estén defectuosos?

Solución: Sean A el evento de que el primer fusible esté defectuoso y B el evento de que el segundo esté defectuoso; entonces, interpretamos $A \cap B$ como el evento de que ocurra A , y entonces B ocurre después de que haya ocurrido A . La probabilidad de sacar primero un fusible defectuoso es $1/4$; entonces, la probabilidad de separar un segundo fusible defectuoso de los restantes 4 es $4/19$. Por lo tanto,

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}.$$

Ejemplo 2.37: Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?

Solución: N_1 , N_2 y B_1 representan, respectivamente, la extracción de una bola negra de la bolsa 1, una bola negra de la bolsa 2 y una bola blanca de la bolsa 1. Nos interesa la unión de los eventos mutuamente excluyentes $N_1 \cap N_2$ y $B_1 \cap N_2$. Las diversas posibilidades y sus probabilidades se ilustran en la figura 2.8. Entonces

$$\begin{aligned} P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap N_2)] &= P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2) \\ &= P(N_1)P(N_2|N_1) + P(B_1)P(N_2|B_1) \\ &= \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}. \end{aligned}$$

Si, en el ejemplo 2.36, el primer fusible se reemplaza y los fusibles se acomodan por completo antes de extraer el segundo, entonces la probabilidad de que se extraiga un fusible defectuoso en la segunda selección sigue siendo $1/4$; es decir, $P(B|A) = P(B)$, y los eventos A y B son independientes. Cuando esto es cierto podemos sustituir $P(B)$ por $P(B|A)$ en el teorema 2.10 para obtener la siguiente regla multiplicativa especial.

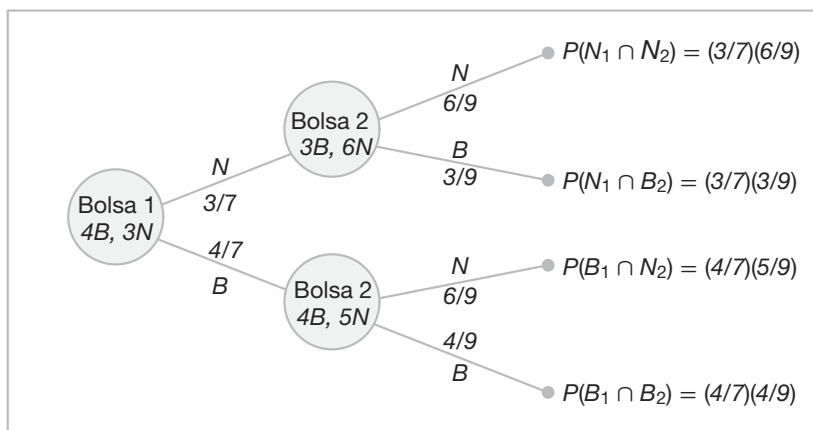


Figura 2.8: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.37.

Teorema 2.11: Dos eventos A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por lo tanto, para obtener la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes simplemente calculamos el producto de sus probabilidades individuales.

Ejemplo 2.38: Una pequeña ciudad dispone de un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0.98 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se le requiera es 0.92. En el evento de un herido en un incendio, calcule la probabilidad de que tanto la ambulancia como el carro de bomberos estén disponibles, suponiendo que operan de forma independiente.

Solución: Sean A y B los respectivos eventos de que estén disponibles el carro de bomberos y la ambulancia. Entonces,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016.$$

Ejemplo 2.39: Un sistema eléctrico consta de cuatro componentes, como se ilustra en la figura 2.9. El sistema funciona si los componentes A y B funcionan, y si funciona cualquiera de los componentes C o D . La confiabilidad (probabilidad de que funcionen) de cada uno de los componentes también se muestra en la figura 2.9. Calcule la probabilidad de $a)$ que el sistema completo funcione y de $b)$ que el componente C no funcione, dado que el sistema completo funciona. Suponga que los cuatro componentes funcionan de manera independiente.

Solución: En esta configuración del sistema, A , B y el subsistema C y D constituyen un sistema de circuitos en serie; mientras que el subsistema C y D es un sistema de circuitos en paralelo.

- a) Es evidente que la probabilidad de que el sistema completo funcione se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P[A \cap B \cap (C \cup D)] &= P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)[1 - P(C' \cap D')] \\ &= P(A)P(B)[1 - P(C')P(D')] \\ &= (0.9)(0.9)[1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] = 0.7776. \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son válidas debido a la independencia entre los cuatro componentes.

- b) Para calcular la probabilidad condicional en este caso, observe que

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(\text{el sistema funciona pero } C \text{ no funciona})}{P(\text{el sistema funciona})} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C' \cap D)}{P(\text{el sistema funciona})} = \frac{(0.9)(0.9)(1 - 0.8)(0.8)}{0.7776} = 0.1667. \end{aligned}$$

■

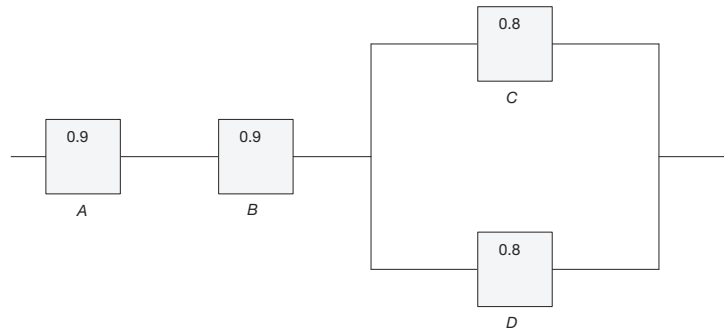


Figura 2.9: Un sistema eléctrico para el ejemplo 2.39.

La regla multiplicativa se puede extender a situaciones con más de dos eventos.

Teorema 2.12: Si, en un experimento, pueden ocurrir los eventos A_1, A_2, \dots, A_k , entonces

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}). \end{aligned}$$

Si los eventos A_1, A_2, \dots, A_k son independientes, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k)$$

Ejemplo 2.40: Se sacan tres cartas seguidas, sin reemplazo, de una baraja ordinaria. Encuentre la probabilidad de que ocurra el evento $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, donde A_1 es el evento de que la primera carta sea un as rojo, A_2 el evento de que la segunda carta sea un 10 o una jota y A_3 el evento de que la tercera carta sea mayor que 3 pero menor que 7.

Solución: Primero definimos los eventos:

A_1 : la primera carta es un as rojo,

A_2 : la segunda carta es un 10 o una jota,

A_3 : la tercera carta es mayor que 3 pero menor que 7.

Ahora bien,

$$P(A_1) = \frac{2}{52}, P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}, P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50},$$

por lo tanto, por medio del teorema 2.12,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \left(\frac{2}{52}\right) \left(\frac{8}{51}\right) \left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525}. \end{aligned}$$

La propiedad de independencia establecida en el teorema 2.11 se puede extender a situaciones con más de dos eventos. Considere, por ejemplo, el caso de los tres eventos A , B y C . No basta con tener $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ como una definición de independencia entre los tres. Suponga que $A = B$ y $C = \emptyset$, el conjunto vacío. Aunque $A \cap B \cap C = \emptyset$, que da como resultado $P(A \cap B \cap C) = 0 = P(A)P(B)P(C)$, los eventos A y B no son independientes. En consecuencia, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.12: Un conjunto de eventos $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ son mutuamente independientes si para cualquier subconjunto de \mathcal{A} , A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , para $k \leq n$, tenemos

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

Ejercicios

2.73 Si R es el evento de que un convicto cometa un robo a mano armada y D es el evento de que el convicto venda drogas, exprese en palabras lo que en probabilidades se indica como

- $P(R|D)$;
- $P(D'|R)$;
- $P(R'|D')$.

2.74 Un grupo de estudiantes de física avanzada se compone de 10 alumnos de primer año, 30 del último año y 10 graduados. Las calificaciones finales muestran que 3 estudiantes de primer año, 10 del último año y 5 de los graduados obtuvieron 10 en el curso. Si se elige un estudiante al azar de este grupo y se descubre que es uno de los que obtuvieron 10 de calificación, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de último año?

2.75 La siguiente es una clasificación, según el género y el nivel de escolaridad, de una muestra aleatoria de 200 adultos.

Escolaridad	Hombre	Mujer
Primaria	38	45
Secundaria	28	50
Universidad	22	17

Si se elige una persona al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que...

- la persona sea hombre, dado que su escolaridad es de secundaria?;
- la persona no tenga un grado universitario, dado que es mujer?

2.76 En un experimento para estudiar la relación que existe entre el hábito de fumar y la hipertensión arterial se reúnen los siguientes datos para 180 individuos:

	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos
H	21	36	30
SH	48	26	19

donde las letras H y SH de la tabla representan *Hipertensión* y *Sin hipertensión*, respectivamente. Si se selecciona uno de estos individuos al azar, calcule la probabilidad de que la persona...

- sufra hipertensión, dado que es una fumadora empedernida;
- no fume, dado que no padece hipertensión.

2.77 En un grupo de 100 estudiantes de bachillerato que están cursando el último año, 42 cursaron matemáticas, 68 psicología, 54 historia, 22 matemáticas e historia, 25 matemáticas y psicología, 7 historia pero ni matemáticas ni psicología, 10 las tres materias y 8 no cursaron ninguna de las tres. Seleccione al azar a un

estudiante de este grupo y calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

- Una persona inscrita en psicología y cursa las tres materias;
- Una persona que no está inscrita en psicología y esté cursando historia y matemáticas.

2.78 Un fabricante de una vacuna para la gripe está interesado en determinar la calidad de su suero. Con ese fin tres departamentos diferentes procesan los lotes de suero y tienen tasas de rechazo de 0.10, 0.08 y 0.12, respectivamente. Las inspecciones de los tres departamentos son secuenciales e independientes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sobreviva a la primera inspección departamental pero sea rechazado por el segundo departamento?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sea rechazado por el tercer departamento?

2.79 En *USA Today* (5 de septiembre de 1996) se listaron los siguientes resultados de una encuesta sobre el uso de ropa para dormir mientras se viaja:

	Hombre	Mujer	Total
Ropa interior	0.020	0.024	0.244
Camisón	0.002	0.180	0.182
Nada	0.160	0.018	0.178
Pijama	0.102	0.073	0.175
Camiseta	0.046	0.088	0.134
Otros	0.084	0.003	0.087

- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea una mujer que duerme desnuda?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea hombre?
- Si el viajero fuera hombre, ¿cuál sería la probabilidad de que duerma con pijama?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea hombre si duerme con pijama o con camiseta?

2.80 La probabilidad de que cuando se tenga que llenar el tanque de gasolina de un automóvil también se necesite cambiarle el aceite es 0.25, la probabilidad de que también se le tenga que cambiar el filtro de aceite es 0.40, y la probabilidad de que se necesite cambiarle el aceite y el filtro es 0.14.

- Si se le tiene que cambiar el aceite, ¿cuál es la probabilidad de que también se necesite cambiarle el filtro?
- Si se le tiene que cambiar el filtro de aceite, ¿cuál es la probabilidad de que también se le tenga que cambiar el aceite?

2.81 La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0.4 y la probabilidad de que lo vea una mujer casada es 0.5. La proba-

bilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo ve, es 0.7. Calcule la probabilidad de que

- una pareja casada vea el programa;
- una esposa vea el programa dado que su esposo lo ve;
- al menos uno de los miembros de la pareja casada vea el programa.

2.82 Para parejas casadas que viven en cierto suburbio, la probabilidad de que el esposo vote en un referéndum es 0.21, la probabilidad de que vote la esposa es 0.28 y la probabilidad de que ambos voten es 0.15. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- al menos uno de los miembros de la pareja casada vote?
- una esposa vote, dado que su esposo vota?
- un esposo vote, dado que su esposa no vota?

2.83 La probabilidad de que un vehículo que entra a las Cavernas Luray tenga matrícula de Canadá es 0.12, la probabilidad de que sea una casa rodante es 0.28 y la probabilidad de que sea una casa rodante con matrícula de Canadá es 0.09. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- una casa rodante que entra a las Cavernas Luray tenga matrícula de Canadá?
- un vehículo con matrícula de Canadá que entra a las Cavernas Luray sea una casa rodante?
- un vehículo que entra a las Cavernas Luray no tenga matrícula de Canadá o no sea una casa rodante?

2.84 La probabilidad de que el jefe de familia esté en casa cuando llame el representante de marketing de una empresa es 0.4. Dado que el jefe de familia está en casa, la probabilidad de que la empresa le venda un producto es 0.3. Encuentre la probabilidad de que el jefe de familia esté en casa y compre productos de la empresa.

2.85 La probabilidad de que un doctor diagnostique de manera correcta una enfermedad específica es 0.7. Dado que el doctor hace un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que el paciente entable una demanda legal es 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de que el doctor haga un diagnóstico incorrecto y el paciente lo demande?

2.86 En 1970, 11% de los estadounidenses completaron cuatro años de universidad; de ese porcentaje 43 % eran mujeres. En 1990, 22% de los estadounidenses completaron cuatro años de universidad, un porcentaje del cual 53 % fueron mujeres. (*Time*, 19 de enero de 1996).

- Dado que una persona completó cuatro años de universidad en 1970, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea mujer?

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer haya terminado cuatro años de universidad en 1990?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que en 1990 un hombre no haya terminado la universidad?

2.87 Un agente de bienes raíces tiene 8 llaves maestras para abrir varias casas nuevas. Sólo 1 llave maestra abrirá cualquiera de las casas. Si 40% de estas casas por lo general se dejan abiertas, ¿cuál es la probabilidad de que el agente de bienes raíces pueda entrar en una casa específica, si selecciona 3 llaves maestras al azar antes de salir de la oficina?

2.88 Antes de la distribución de cierto software estadístico se prueba la precisión de cada cuarto disco compacto (CD). El proceso de prueba consiste en correr cuatro programas independientes y verificar los resultados. La tasa de falla para los 4 programas de prueba son 0.01, 0.03, 0.02 y 0.01, respectivamente.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los CD que se pruebe no pase la prueba?
- b) Dado que se prueba un CD, ¿cuál es la probabilidad de que falle el programa 2 o 3?
- c) En una muestra de 100, ¿cuántos CD esperarías que se rechazaran?
- d) Dado que un CD está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se pruebe?

2.89 Una ciudad tiene dos carros de bomberos que operan de forma independiente. La probabilidad de que un carro específico esté disponible cuando se le necesite es 0.96.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se necesite?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un carro de bomberos esté disponible cuando se le necesite?

2.90 La contaminación de los ríos de Estados Unidos ha sido un problema por muchos años. Considere los siguientes eventos:

A: el río está contaminado.

B: al probar una muestra de agua se detecta contaminación.

C: se permite pescar.

Suponga que $P(A) = 0.3$, $P(B|A) = 0.75$, $P(B|A') = 0.20$, $P(C|A \cap B) = 0.20$, $P(C|A' \cap B) = 0.15$, $P(C|A \cap B') = 0.80$ y $P(C|A' \cap B') = 0.90$.

- a) Calcule $P(A \cap B \cap C)$.
- b) Calcule $P(B' \cap C)$.
- c) Calcule $P(C)$.
- d) Calcule la probabilidad de que el río esté contaminado, dado que está permitido pescar y que la muestra probada no detectó contaminación.

2.91 Encuentre la posibilidad de seleccionar aleatoriamente 4 litros de leche en buenas condiciones sucesivamente de un refrigerador que contiene 20 litros, de los cuales 5 están echados a perder, utilizando

- a) la primera fórmula del teorema 2.12 de la página 68;
- b) las fórmulas del teorema 2.6 y la regla 2.3 de las páginas 50 y 54, respectivamente.

2.92 Imagine el diagrama de un sistema eléctrico como el que se muestra en la figura 2.10. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione? Suponga que los componentes fallan de forma independiente.

2.93 En la figura 2.11 se muestra un sistema de circuitos. Suponga que los componentes fallan de manera independiente.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema completo funcione?
- b) Dado que el sistema funciona, ¿cuál es la probabilidad de que el componente A no funcione?

2.94 En la situación del ejercicio 2.93 se sabe que el sistema no funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el componente A tampoco funcione?

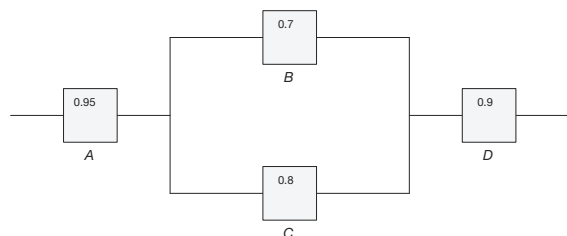


Figura 2.10: Diagrama para el ejercicio 2.92.

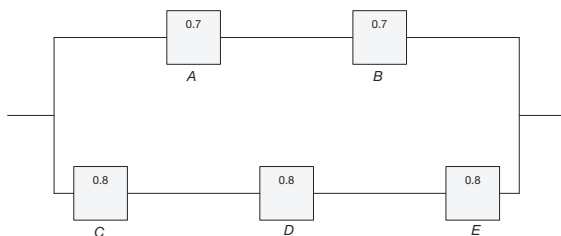


Figura 2.11: Diagrama para el ejercicio 2.93.

2.7 Regla de Bayes

La estadística bayesiana es un conjunto de herramientas que se utiliza en un tipo especial de inferencia estadística que se aplica en el análisis de datos experimentales en muchas situaciones prácticas de ciencia e ingeniería. La regla de Bayes es una de las normas más importantes de la teoría de probabilidad, ya que es el fundamento de la inferencia bayesiana, la cual se analizará en el capítulo 18.

Probabilidad total

Regresemos al ejemplo de la sección 2.6, en el que se selecciona un individuo al azar de entre los adultos de una pequeña ciudad para que viaje por el país promoviendo las ventajas de establecer industrias nuevas en la ciudad. Suponga que ahora se nos da la información adicional de que 36 de los empleados y 12 de los desempleados son miembros del Club Rotario. Deseamos encontrar la probabilidad del evento A de que el individuo seleccionado sea miembro del Club Rotario. Podemos remitirnos a la figura 2.12 y escribir A como la unión de los dos eventos mutuamente excluyentes $E \cap A$ y $E' \cap A$. Por lo tanto, $A = (E \cap A) \cup (E' \cap A)$, y mediante el corolario 2.1 del teorema 2.7 y luego mediante el teorema 2.10, podemos escribir

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(E \cap A) \cup (E' \cap A)] = P(E \cap A) + P(E' \cap A) \\ &= P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E'). \end{aligned}$$

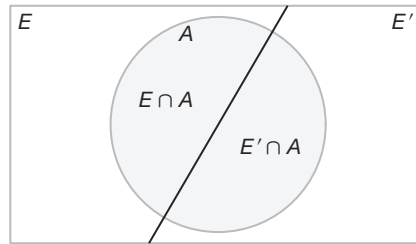


Figura 2.12: Diagrama de Venn para los eventos A , E y E' .

Los datos de la sección 2.6, junto con los datos adicionales antes dados para el conjunto A , nos permiten calcular

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}, \quad P(A|E) = \frac{36}{600} = \frac{3}{50},$$

y

$$P(E') = \frac{1}{3}, \quad P(A|E') = \frac{12}{300} = \frac{1}{25}.$$

Si mostramos estas probabilidades mediante el diagrama de árbol de la figura 2.13, donde la primera rama da la probabilidad $P(E)P(A|E)$ y la segunda rama da la probabilidad

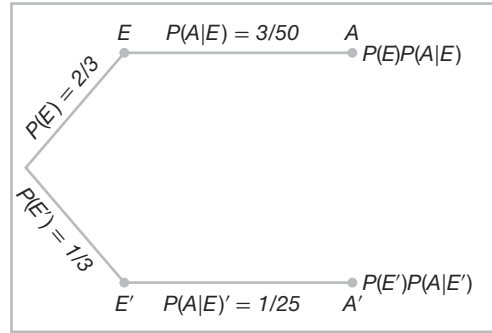


Figura 2.13: Diagrama de árbol para los datos de la página 63 con información adicional de la página 72.

la probabilidad $P(E')P(A|E')$, deducimos que

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{50}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{25}\right) = \frac{4}{75}.$$

Una generalización del ejemplo anterior para el caso en donde el espacio muestral se parte en k subconjuntos se cubre mediante el siguiente teorema, que algunas veces se denomina **teorema de probabilidad total** o **regla de eliminación**.

Teorema 2.13: Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una partición del espacio muestral S , tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces, para cualquier evento A de S ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i).$$

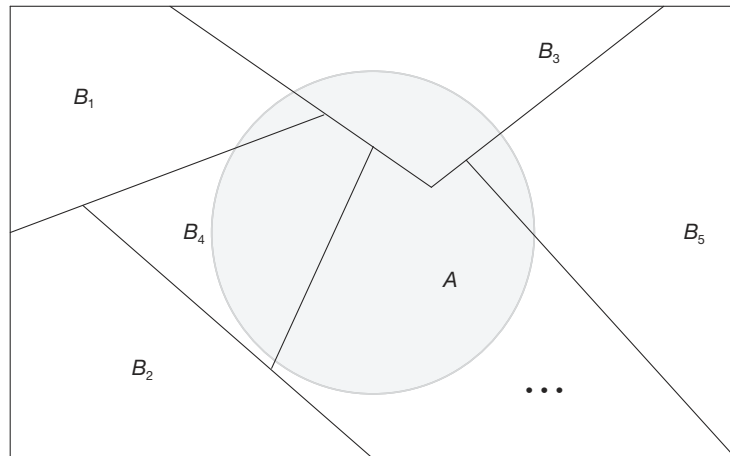


Figura 2.14: Partición del espacio muestral s .

Prueba: Considere el diagrama de Venn de la figura 2.14. Se observa que el evento A es la unión de los eventos mutuamente excluyentes

$$B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_k \cap A;$$

es decir,

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)$$

Por medio del corolario 2.2 del teorema 2.7 y el teorema 2.10 obtenemos

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)] \\ &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_k \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.41: Tres máquinas de cierta planta de ensamble, B_1 , B_2 y B_3 , montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Ahora bien, suponga que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

Solución: Considere los siguientes eventos:

A : el producto está defectuoso,

B_1 : el producto fue ensamblado con la máquina B_1 ,

B_2 : el producto fue ensamblado con la máquina B_2 ,

B_3 : el producto fue ensamblado con la máquina B_3 .

Podemos aplicar la regla de eliminación y escribir

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3).$$

Si nos remitimos al diagrama de árbol de la figura 2.15 encontramos que las tres ramas dan las probabilidades

$$P(B_1)P(A|B_1) = (0.3)(0.02) = 0.006,$$

$$P(B_2)P(A|B_2) = (0.45)(0.03) = 0.0135,$$

$$P(B_3)P(A|B_3) = (0.25)(0.02) = 0.005,$$

en consecuencia,

$$P(A) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245.$$

■

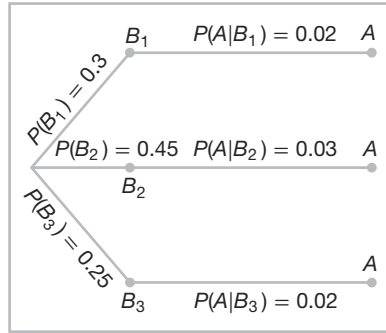


Figura 2.15: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.41.

Regla de Bayes

Suponga que en lugar de calcular $P(A)$ mediante la regla de eliminación en el ejemplo 2.41, consideramos el problema de obtener la probabilidad condicional $P(B_i|A)$. En otras palabras, suponga que se selecciona un producto de forma aleatoria y que éste resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto haya sido ensamblado con la máquina B_i ? Las preguntas de este tipo se pueden contestar usando el siguiente teorema, denominado **regla de Bayes**:

Teorema 2.14:

(Regla de Bayes) Si los eventos B_1, B_2, \dots, B_k constituyen una partición del espacio muestral S , donde $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces, para cualquier evento A en S , tal que $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)} \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, k.$$

Prueba: Mediante la definición de probabilidad condicional,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)},$$

y después usando el teorema 2.13 en el denominador, tenemos

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)},$$

que completa la demostración. ┘

Ejemplo 2.42: Con referencia al ejemplo 2.41, si se elige al azar un producto y se encuentra que está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido ensamblado con la máquina B_3 ?

Solución: Podemos utilizar la regla de Bayes para escribir

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)},$$

y después al sustituir las probabilidades calculadas en el ejemplo 2.41, tenemos

$$P(B_3|A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49}.$$

En vista del hecho de que se seleccionó un producto defectuoso, este resultado sugiere que probablemente no fue ensamblado con la máquina B_3 . ─

Ejemplo 2.43: Una empresa de manufactura emplea tres planos analíticos para el diseño y desarrollo de un producto específico. Por razones de costos los tres se utilizan en momentos diferentes. De hecho, los planos 1, 2 y 3 se utilizan para 30%, 20% y 50% de los productos, respectivamente. La tasa de defectos difiere en los tres procedimientos de la siguiente manera,

$$P(D|P_1) = 0.01, \quad P(D|P_2) = 0.03, \quad P(D|P_3) = 0.02,$$

en donde $P(D|P_j)$ es la probabilidad de que un producto esté defectuoso, dado el plano j . Si se observa un producto al azar y se descubre que está defectuoso, ¿cuál de los planos tiene más probabilidades de haberse utilizado y, por lo tanto, de ser el responsable?

Solución: A partir del planteamiento del problema

$$P(P_1) = 0.30, \quad P(P_2) = 0.20 \quad \text{y} \quad P(P_3) = 0.50,$$

debemos calcular $P(P_j|D)$ para $j = 1, 2, 3$. La regla de Bayes (teorema 2.14) muestra

$$\begin{aligned} P(P_1|D) &= \frac{P(P_1)P(D|P_1)}{P(P_1)P(D|P_1) + P(P_2)P(D|P_2) + P(P_3)P(D|P_3)} \\ &= \frac{(0.30)(0.01)}{(0.3)(0.01) + (0.20)(0.03) + (0.50)(0.02)} = \frac{0.003}{0.019} = 0.158. \end{aligned}$$

De igual manera,

$$P(P_2|D) = \frac{(0.03)(0.20)}{0.019} = 0.316 \quad \text{y} \quad P(P_3|D) = \frac{(0.02)(0.50)}{0.019} = 0.526.$$

La probabilidad condicional de un defecto, dado el plano 3, es la mayor de las tres; por consiguiente, un defecto en un producto elegido al azar tiene más probabilidad de ser el resultado de haber usado el plano 3. ─

La regla de Bayes, un método estadístico llamado método bayesiano, ha adquirido muchas aplicaciones. En el capítulo 18 estudiaremos una introducción al método bayesiano.

Ejercicios

2.95 En cierta región del país se sabe por experiencia que la probabilidad de seleccionar un adulto mayor de 40 años de edad con cáncer es 0.05. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique de forma correcta que una persona con cáncer tiene la enfermedad es 0.78, y la probabilidad de que diagnostique de forma incorrecta que una persona sin cáncer tiene la enfermedad es 0.06, ¿cuál es la probabilidad de que a un adulto mayor de 40 años se le diagnostique cáncer?

2.96 La policía planea hacer respetar los límites de velocidad usando un sistema de radar en 4 diferentes puntos a las orillas de la ciudad. Las trampas de radar en cada uno de los sitios L_1 , L_2 , L_3 y L_4 operarán 40%, 30 %, 20% y 30% del tiempo. Si una persona que excede el límite de velocidad cuando va a su trabajo tiene probabilidades de 0.2, 0.1, 0.5 y 0.2, respectivamente, de pasar por esos lugares, ¿cuál es la probabilidad de que reciba una multa por conducir con exceso de velocidad?

2.97 Remítase al ejercicio 2.95. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona a la que se le diagnostica cáncer realmente tenga la enfermedad?

2.98 Si en el ejercicio 2.96 la persona es multada por conducir con exceso de velocidad en su camino al trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el sistema de radar que se ubica en L_2 ?

2.99 Suponga que los cuatro inspectores de una fábrica de película colocan la fecha de caducidad en cada paquete de película al final de la línea de montaje. John, quien coloca la fecha de caducidad en 20% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 200 paquetes; Tom, quien la coloca en 60% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 100 paquetes; Jeff, quien la coloca en 15% de los paquetes, no lo hace una vez en cada 90 paquetes; y Pat, que fecha 5% de los paquetes, falla en uno de cada 200 paquetes. Si un cliente se queja de que su paquete de película no muestra la fecha de caducidad, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido inspeccionado por John?

2.100 Una empresa telefónica regional opera tres estaciones de retransmisión idénticas en diferentes sitios. A continuación se muestra el número de desperfectos en cada estación reportados durante un año y las causas de éstos.

	Estación	A	B	C
Problemas con el suministro de electricidad	2	1	1	
Falla de la computadora	4	3	2	
Fallas del equipo eléctrico	5	4	2	
Fallas ocasionadas por otros errores humanos	7	5	5	

Suponga que se reporta una falla y que se descubre que fue ocasionada por otros errores humanos. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la estación C?

2.101 Una cadena de tiendas de pintura produce y vende pintura de látex y semiesmaltada. De acuerdo con las ventas a largo plazo, la probabilidad de que un cliente compre pintura de látex es 0.75. De los que compran pintura de látex, 60 % también compra rodillos. Sin embargo, sólo 30 % de los que compran pintura semiesmaltada compra rodillos. Un comprador que se selecciona al azar adquiere un rodillo y una lata de pintura. ¿Cuál es la probabilidad de que sea pintura de látex?

2.102 Denote como A , B y C a los eventos de que un gran premio se encuentra detrás de las puertas A , B y C , respectivamente. Suponga que elige al azar una puerta, por ejemplo la A . El presentador del juego abre una puerta, por ejemplo la B , y muestra que no hay un premio detrás de ella. Ahora, el presentador le da la opción de conservar la puerta que eligió (A) o de cambiarla por la puerta que queda (C). Utilice la probabilidad para explicar si debe o no hacer el cambio.

Ejercicios de repaso

2.103 Un suero de la verdad tiene la propiedad de que 90% de los sospechosos culpables se juzgan de forma adecuada, mientras que, por supuesto, 10% de los sospechosos culpables erróneamente se consideran inocentes. Por otro lado, a los sospechosos inocentes se les juzga de manera errónea 1% de las veces. Si se aplica el suero a un sospechoso, que se selecciona de un grupo de sospechosos en el cual sólo 5% ha cometido un delito, y éste indica que es culpable, ¿cuál es la probabilidad de que sea inocente?

2.104 Un alergólogo afirma que 50% de los pacientes que examina son alérgicos a algún tipo de hierba. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- exactamente 3 de sus 4 pacientes siguientes sean alérgicos a hierbas?
- ninguno de sus 4 pacientes siguientes sea alérgico a hierbas?

2.105 Mediante la comparación de las regiones apropiadas en un diagrama de Venn, verifique que

- $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$;
- $A' \cap (B' \cup C) = (A' \cap B') \cup (A' \cap C)$.

2.106 Las probabilidades de que una estación de servicio bombee gasolina en 0, 1, 2, 3, 4, 5 o más automóviles durante cierto periodo de 30 minutos son, respectivamente, 0.03, 0.18, 0.24, 0.28, 0.10 y 0.17. Calcule la probabilidad de que en este periodo de 30 minutos

- más de 2 automóviles reciban gasolina;
- a lo sumo 4 automóviles reciban gasolina;
- 4 o más automóviles reciban gasolina.

2.107 ¿Cuántas manos de *bridge* que contengan 4 espadas, 6 diamantes, 1 trébol y 2 corazones son posibles?

2.108 Si la probabilidad de que una persona cometa un error en su declaración de impuestos sobre la renta es 0.1, calcule la probabilidad de que

- cada una de cuatro personas no relacionadas cometa un error;
- el señor Jones y la señora Clark cometan un error, y el señor Roberts y la señora Williams no cometan errores.

2.109 Una empresa industrial grande usa tres moteles locales para ofrecer hospedaje nocturno a sus clientes. Se sabe por experiencia que a 20% de los clientes se le asigna habitaciones en el Ramada Inn, a 50% en el Sheraton y a 30% en el Lakeview Motor Lodge. Si hay una falla en la plomería en 5% de las habitaciones del Ramada Inn, en 4% de las habitaciones del Sheraton y en 8% de las habitaciones del Lakeview Motor Lodge, ¿cuál es la probabilidad de que...

- a) a un cliente se le asigne una habitación en la que falle la plomería?
- b) a una persona que ocupa una habitación en la que falla la plomería se le haya hospedado en el Lakeview Motor Lodge?

2.110 La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- a) exactamente 2 de los siguientes 3 pacientes a los que se somete a esta operación sobrevivan?
- b) los siguientes 3 pacientes que tengan esta operación sobrevivan?

2.111 Se sabe que $\frac{2}{3}$ de los reclusos en cierta prisión federal son menores de 25 años de edad. También se sabe que $\frac{3}{5}$ de los reos son hombres y que $\frac{5}{8}$ son mujeres de 25 años de edad o mayores. ¿Cuál es la probabilidad de que un prisionero seleccionado al azar de esta prisión sea mujer y tenga al menos 25 años de edad?

2.112 Si se tienen 4 manzanas rojas, 5 verdes y 6 amarillas, ¿cuántas selecciones de 9 manzanas se pueden hacer si se deben seleccionar 3 de cada color?

2.113 De una caja que contiene 6 bolas negras y 4 verdes se extraen 3 bolas sucesivamente y cada bola se reemplaza en la caja antes de extraer la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- a) las 3 sean del mismo color?
- b) cada color esté representado?

2.114 Un cargamento de 12 televisores contiene tres defectuosos. ¿De cuántas formas puede un hotel comprar 5 de estos aparatos y recibir al menos 2 defectuosos?

2.115 Cierta organismo federal emplea a tres empresas consultoras (A, B y C) con probabilidades de 0.40, 0.35 y 0.25, respectivamente. Se sabe por experiencia que las probabilidades de que las empresas rebasen los costos son 0.05, 0.03 y 0.15, respectivamente. Suponga que el organismo experimenta un exceso en los costos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa consultora implicada sea la C?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea la A?

2.116 Un fabricante estudia los efectos de la temperatura de cocción, el tiempo de cocción y el tipo de aceite para la cocción al elaborar papas fritas. Se utilizan 3 diferentes temperaturas, 4 diferentes tiempos de cocción y 3 diferentes aceites.

- a) ¿Cuál es el número total de combinaciones a estudiar?
- b) ¿Cuántas combinaciones se utilizarán para cada tipo de aceite?
- c) Analice por qué las permutaciones no intervienen en este ejercicio.

2.117 Considere la situación del ejercicio 2.116 y suponga que el fabricante puede probar sólo dos combinaciones en un día.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que elija cualquier conjunto dado de 2 corridas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la temperatura más alta en cualquiera de estas 2 combinaciones?

2.118 Se sabe que existe una probabilidad de 0.07 de que las mujeres de más de 60 años desarrollen cierta forma de cáncer. Se dispone de una prueba de sangre que, aunque no es infalible, permite detectar la enfermedad. De hecho, se sabe que 10 % de las veces la prueba da un falso negativo (es decir, la prueba da un resultado negativo de manera incorrecta) y 5 % de las veces la prueba da un falso positivo (es decir, la prueba da un resultado positivo de manera incorrecta). Si una mujer de más de 60 años se somete a la prueba y recibe un resultado favorable (es decir, negativo), ¿qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad?

2.119 Un fabricante de cierto tipo de componente electrónico abastece a los proveedores en lotes de 20. Suponga que 60% de todos los lotes no contiene componentes defectuosos, que 30% contiene un componente defectuoso y que 10% contiene dos componentes defectuosos. Si se elige un lote del que se extraen aleatoriamente dos componentes, los cuales se prueban y ninguno resulta defectuoso,

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya cero componentes defectuosos en el lote?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya un componente defectuoso en el lote?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos componentes defectuosos en el lote?

2.120 Existe una extraña enfermedad que sólo afecta a uno de cada 500 individuos. Se dispone de una prueba para detectarla, pero, por supuesto, ésta no es infalible. Un resultado correcto positivo (un paciente que realmente tiene la enfermedad) ocurre 95% de las veces; en tanto que un resultado falso positivo (un paciente que no tiene la enfermedad) ocurre 1% de las veces. Si un individuo elegido al azar se somete a prueba y se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad?

2.121 Una empresa constructora emplea a dos ingenieros de ventas. El ingeniero 1 hace el trabajo de estimar costos en 70% de las cotizaciones solicitadas a la empresa. El ingeniero 2 hace lo mismo en 30% de las