cotizaciones. Se sabe que la tasa de error para el ingeniero 1 es tal que la probabilidad de encontrar un error en su trabajo es 0.02; mientras que la probabilidad de encontrar un error en el trabajo del ingeniero 2 es 0.04. Suponga que al revisar una solicitud de cotización se encuentra un error grave en la estimación de los costos. ¿Qué ingeniero supondría usted que hizo los cálculos? Explique su respuesta y muestre todo el desarrollo.

2.122 En el campo del control de calidad a menudo se usa la ciencia estadística para determinar si un proceso está "fuera de control". Suponga que el proceso, de hecho, está fuera de control y que 20 por ciento de los artículos producidos tiene defecto.

a) Si tres artículos salen en serie de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estén defectuosos?

b) Si salen cuatro artículos en serie, ¿cuál es la probabilidad de que tres estén defectuosos?

2.123 En una planta industrial se está realizando un estudio para determinar la rapidez con la que los trabajadores lesionados regresan a sus labores después del percance. Los registros demuestran que 10% de los trabajadores lesionados son llevados al hospital para su tratamiento y que 15% regresan a su trabajo al día siguiente. Además, los estudios demuestran que 2% son llevados al hospital y regresan al trabajo al día siguiente. Si un trabajador se lesiona, ¿cuál es la probabilidad de que sea llevado al hospital, de que regrese al trabajo al día siguiente, o de ambas cosas?

2.124 Una empresa acostumbra capacitar operadores que realizan ciertas actividades en la línea de producción. Se sabe que los operadores que asisten al curso de capacitación son capaces de cumplir sus cuotas de producción 90% de las veces. Los nuevos operarios que no toman el curso de capacitación sólo cumplen con sus cuotas 65% de las veces. Cincuenta por ciento de los nuevos operadores asisten al curso. Dado que un nuevo operador cumple con su cuota de producción, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido al curso?

2.125 Una encuesta aplicada a quienes usan un software estadístico específico indica que 10% no quedó satisfecho. La mitad de quienes no quedaron satisfechos le compraron el sistema al vendedor *A*. También se sabe que 20% de los encuestados se lo compraron al vendedor *A*. Dado que el proveedor del paquete de software fue el vendedor *A*, ¿cuál es la probabilidad de que un usuario específico haya quedado insatisfecho?

2.126 Durante las crisis económicas se despide a obreros y a menudo se les reemplaza con máquinas. Se revisa la historia de 100 trabajadores cuya pérdida del empleo se atribuye a los avances tecnológicos. Para cada uno de ellos se determinó si obtuvieron un empleo alternativo dentro de la misma empresa, si encontraron un empleo en la misma área de otra empresa, si encontraron trabajo en una nueva área o si llevan desempleados más de un año. Además, se registró la situación sindical de cada trabajador. La siguiente tabla resume los resultados.

	Sindicalizado	No sindicalizado
Está en la misma empresa	40	15
Está en otra empresa (misma área)	13	10
Está en una nueva área	4	11
Está desempleado	2	5

a) Si un trabajador seleccionado encontró empleo en la misma área de una nueva empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea miembro de un sindicato?

b) Si el trabajador es miembro de un sindicato, ¿cuál es la probabilidad de que esté desempleado desde hace un año?

2.127 Hay 50% de probabilidad de que la reina tenga el gen de la hemofilia. Si es portadora, entonces cada uno de los príncipes tiene 50% de probabilidad independiente de tener hemofilia. Si la reina no es portadora, el príncipe no tendrá la enfermedad. Suponga que la reina tuvo tres príncipes que no padecen la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la reina sea portadora del gen?

2.128 **Proyecto de equipo:** Entregue a cada estudiante una bolsa de chocolates M&M y forme equipos de 5 o 6 estudiantes. Calcule la distribución de frecuencia relativa del color de los M&M para cada equipo.

a) ¿Cuál es su probabilidad estimada de elegir un chocolate amarillo al azar? ¿Y uno rojo?

b) Ahora haga el mismo cálculo para todo el grupo. ¿Cambiaron las estimaciones?

c) ¿Cree que en un lote procesado existe el mismo número de chocolates de cada color? Comente al respecto.

2.8 Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos

Este capítulo incluye las definiciones, reglas y teoremas fundamentales que convierten a la probabilidad en una herramienta importante para la evaluación de sistemas científicos y de ingeniería. A menudo estas evaluaciones toman la forma de cálculos de probabilidad, como se ilustra en los ejemplos y en los ejercicios. Conceptos como independencia, probabilidad condicional, regla de Bayes y otros suelen ser muy adecuados para resolver problemas prácticos en los que se busca obtener un valor de probabilidad. Abundan las ilustraciones en los ejercicios. Vea, por ejemplo, los ejercicios 2.100 y 2.101. En éstos y en muchos otros ejercicios se realiza una evaluación juiciosa de un sistema científico, a partir de un cálculo de probabilidad, utilizando las reglas y las definiciones que se estudian en el capítulo.

Ahora bien, ¿qué relación existe entre el material de este capítulo y el material de otros capítulos? La mejor forma de responder esta pregunta es dando un vistazo al capítulo 3, ya que en éste también se abordan problemas en los que es importante el cálculo de probabilidades. Ahí se ilustra cómo el desempeño de un sistema depende del valor de una o más probabilidades. De nuevo, la probabilidad condicional y la independencia desempeñan un papel. Sin embargo, surgen nuevos conceptos que permiten tener una mayor estructura basada en el concepto de una variable aleatoria y su distribución de probabilidad. Recuerde que el concepto de las distribuciones de frecuencias se abordó brevemente en el capítulo 1. La distribución de probabilidad muestra, en forma gráfica o en una ecuación, toda la información necesaria para describir una estructura de probabilidad. Por ejemplo, en el ejercicio de repaso 2.122 la variable aleatoria de interés es el número de artículos defectuosos, una medición discreta. Por consiguiente, la distribución de probabilidad revelaría la estructura de probabilidad para el número de artículos defectuosos extraídos del número elegido del proceso. Cuando el lector avance al capítulo 3 y los siguientes, será evidente para él que se requieren suposiciones para determinar y, por lo tanto, utilizar las distribuciones de probabilidad en la resolución de problemas científicos.

CAPÍTULO 3

Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

3.1 Concepto de variable aleatoria

La estadística realiza inferencias acerca de las poblaciones y sus características. Se llevan a cabo experimentos cuyos resultados se encuentran sujetos al azar. La prueba de un número de componentes electrónicos es un ejemplo de **experimento estadístico**, un concepto que se utiliza para describir cualquier proceso mediante el cual se generan varias observaciones al azar. A menudo es importante asignar una descripción numérica al resultado. Por ejemplo, cuando se prueban tres componentes electrónicos, el espacio muestral que ofrece una descripción detallada de cada posible resultado se escribe como

$$S = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD\},$$

donde N denota "no defectuoso", y D, "defectuoso". Es evidente que nos interesa el número de componentes defectuosos que se presenten. De esta forma, a cada punto en el espacio muestral se le *asignará un valor numérico* de 0, 1, 2 o 3. Estos valores son, por supuesto, cantidades aleatorias *determinadas por el resultado del experimento*. Se pueden ver como valores que toma la *variable aleatoria* X, es decir, el número de artículos defectuosos cuando se prueban tres componentes electrónicos.

Definición 3.1: Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

Utilizaremos una letra mayúscula, digamos X, para denotar una variable aleatoria, y su correspondiente letra minúscula, x en este caso, para uno de sus valores. En el ejemplo de la prueba de componentes electrónicos observamos que la variable aleatoria X toma el valor 2 para todos los elementos en el subconjunto

$$E = \{DDN, DND, NDD\}$$

del espacio muestral S. Esto es, cada valor posible de X representa un evento que es un subconjunto del espacio muestral para el experimento dado.

Ejemplo 3.1: De una urna que contiene 4 bolas rojas y 3 negras se sacan 2 bolas de manera sucesiva, sin reemplazo. Los posibles resultados y los valores y de la variable aleatoria Y, donde Y es el número de bolas rojas, son

Espacio muestral	y
RR	2
RN	1
NR	1
NN	0

Ejemplo 3.2: El empleado de un almacén regresa tres cascos de seguridad al azar a tres obreros de un taller siderúrgico que ya los habían probado. Si Smith, Jones y Brown, en ese orden, reciben uno de los tres cascos, liste los puntos muestrales para los posibles órdenes en que el empleado del almacén regresa los cascos, después calcule el valor m de la variable aleatoria M que representa el número de emparejamientos correctos.

***Solución*:** Si S, J y B representan, respectivamente, los cascos que recibieron Smith, Jones y Brown, entonces los posibles arreglos en los cuales se pueden regresar los cascos y el número de emparejamientos correctos son

Espacio muestral	m
SJB	3
SBJ	1
BJS	1
JSB	1
JBS	0
BSJ	0

En cada uno de los dos ejemplos anteriores, el espacio muestral contiene un número finito de elementos. Por el contrario, cuando lanzamos un dado hasta que salga un 5, obtenemos un espacio muestral con una secuencia de elementos interminable,

$$S = \{F, NF, NNF, NNNF, \ldots\},$$

donde F y N representan, respectivamente, la ocurrencia y la no ocurrencia de un 5. Sin embargo, incluso en este experimento el número de elementos se puede igualar a la cantidad total de números enteros, de manera que hay un primer elemento, un segundo, un tercero y así sucesivamente, por lo que se pueden contar.

Hay casos en que la variable aleatoria es categórica por naturaleza en los cuales se utilizan las llamadas variables *ficticias*. Un buen ejemplo de ello es el caso en que la variable aleatoria es binaria por naturaleza, como se indica a continuación.

Ejemplo 3.3: Considere la condición en que salen componentes de la línea de ensamble y se les clasifica como defectuosos o no defectuosos. Defina la variable aleatoria X mediante

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si el componente está defectuoso,} \\ 0, & \text{si el componente no está defectuoso.} \end{cases}$$

Evidentemente la asignación de 1 o 0 es arbitraria, aunque bastante conveniente, lo cual quedará más claro en capítulos posteriores. La variable aleatoria en la que se eligen 0 y 1 para describir los dos posibles valores se denomina **variable aleatoria de Bernoulli**.

En los siguientes ejemplos veremos más casos de variables aleatorias.

Ejemplo 3.4: Los estadísticos utilizan **planes de muestreo** para aceptar o rechazar lotes de materiales. Suponga que uno de los planes de muestreo implica obtener una muestra independiente de 10 artículos de un lote de 100, en el que 12 están defectuosos.

Si X representa a la variable aleatoria, definida como el número de artículos que están defectuosos en la muestra de 10, la variable aleatoria toma los valores 0, 1, 2, . . . , 9, 10.

Ejemplo 3.5: Suponga que un plan de muestreo implica obtener una muestra de artículos de un proceso hasta que se encuentre uno defectuoso. La evaluación del proceso dependerá de cuántos artículos consecutivos se observen. En este caso, sea X una variable aleatoria que se define como el número de artículos observados antes de que salga uno defectuoso. Si N representa un artículo no defectuoso y D uno defectuoso, los espacios muestrales son $S = \{D\}$ dado que $X = 1$, $S = \{ND\}$ dado que $X = 2$, $S = \{NND\}$ dado que $X = 3$, y así sucesivamente.

Ejemplo 3.6: Existe interés por la proporción de personas que responden a cierta encuesta enviada por correo. Sea X tal proporción. X es una variable aleatoria que toma todos los valores de x para los cuales $0 \leq x \leq 1$.

Ejemplo 3.7: Sea X la variable aleatoria definida como el tiempo que pasa, en horas, para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad. La variable aleatoria X toma todos los valores de x para los que $x \geq 0$.

Definición 3.2: Si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades, o una serie interminable con tantos elementos como números enteros existen, se llama **espacio muestral discreto**.

Los resultados de algunos experimentos estadísticos no pueden ser ni finitos ni contables. Éste es el caso, por ejemplo, en una investigación que se realiza para medir las distancias que recorre un automóvil de cierta marca, en una ruta de prueba preestablecida, con cinco litros de gasolina. Si se asume que la distancia es una variable que se mide con algún grado de precisión, entonces salta a la vista que tenemos un número infinito de distancias posibles en el espacio muestral, que no se pueden igualar a la cantidad total de números enteros. Lo mismo ocurre en el caso de un experimento en que se registra el tiempo requerido para que ocurra una reacción química, en donde una vez más los posibles intervalos de tiempo que forman el espacio muestral serían un número infinito e incontable. Vemos ahora que no todos los espacios muestrales necesitan ser discretos.

Definición 3.3: Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades, igual al número de puntos en un segmento de recta, se le denomina **espacio muestral continuo**.

Una variable aleatoria se llama **variable aleatoria discreta** si se puede contar su conjunto de resultados posibles. En los ejemplos 3.1 a 3.5 las variables aleatorias son discretas. Sin embargo, una variable aleatoria cuyo conjunto de valores posibles es un intervalo completo de números no es discreta. Cuando una variable aleatoria puede tomar valores en una escala continua, se le denomina **variable aleatoria continua**. A menudo los posibles valores de una variable aleatoria continua son precisamente los mismos valores incluidos en el espacio muestral continuo. Es evidente que las variables aleatorias descritas en los ejemplos 3.6 y 3.7 son variables aleatorias continuas.

En la mayoría de los problemas prácticos las variables aleatorias continuas representan datos *medidos*, como serían todos los posibles pesos, alturas, temperaturas, distancias o periodos de vida; en tanto que las variables aleatorias discretas representan datos *por conteo*, como el número de artículos defectuosos en una muestra de k artículos o el número de accidentes de carretera por año en una entidad específica. Observe que tanto Y como M, las variables aleatorias de los ejemplos 3.1 y 3.2, representan datos por conteo: Y el número de bolas rojas y M el número de emparejamientos correctos de cascos.

3.2 Distribuciones discretas de probabilidad

Una variable aleatoria discreta toma cada uno de sus valores con cierta probabilidad. Al lanzar una moneda tres veces, la variable X, que representa el número de caras, toma el valor 2 con $3/8$ de probabilidad, pues 3 de los 8 puntos muestrales igualmente probables tienen como resultado dos caras y una cruz. Si se suponen pesos iguales para los eventos simples del ejemplo 3.2, la probabilidad de que ningún obrero reciba el casco correcto, es decir, la probabilidad de que M tome el valor cero, es $1/3$. Los valores posibles m de M y sus probabilidades son

m	0	1	3
$P(M = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Observe que los valores de m agotan todos los casos posibles, por lo tanto, las probabilidades suman 1.

Con frecuencia es conveniente representar todas las probabilidades de una variable aleatoria X usando una fórmula, la cual necesariamente sería una función de los valores numéricos x que denotaremos con $f(x)$, $g(x)$, $r(x)$ y así sucesivamente. Por lo tanto, escribimos $f(x) = P(X = x)$; es decir, $f(3) = P(X = 3)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama **función de probabilidad**, **función de masa de probabilidad** o **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X.

Definición 3.4: El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidad**, una **función de masa de probabilidad** o una **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado x posible,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

Ejemplo 3.8: Un embarque de 20 computadoras portátiles similares para una tienda minorista contiene 3 que están defectuosas. Si una escuela compra al azar 2 de estas computadoras, calcule la distribución de probabilidad para el número de computadoras defectuosas.

Solución: Sea X una variable aleatoria cuyos valores x son los números posibles de computadoras defectuosas compradas por la escuela. Entonces x sólo puede asumir los números 0, 1 y 2. Así,

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{68}{95}, \quad f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{51}{190},$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{190}.$$

Por consiguiente, la distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{68}{95}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

Ejemplo 3.9: Si una agencia automotriz vende 50% de su inventario de cierto vehículo extranjero equipado con bolsas de aire laterales, calcule una fórmula para la distribución de probabilidad del número de automóviles con bolsas de aire laterales entre los siguientes 4 vehículos que venda la agencia.

***Solución*:** Como la probabilidad de vender un automóvil con bolsas de aire laterales es 0.5, los $2^4 = 16$ puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Por lo tanto, el denominador para todas las probabilidades, y también para nuestra función, es 16. Para obtener el número de formas de vender tres automóviles con bolsas de aire laterales necesitamos considerar el número de formas de dividir 4 resultados en 2 celdas, con 3 automóviles con bolsas de aire laterales asignados a una celda, y el modelo sin bolsas de aire laterales asignado a la otra. Esto se puede hacer de $\binom{4}{3} = 4$ formas. En general, el evento de vender x modelos con bolsas de aire laterales y $4 - x$ modelos sin bolsas de aire laterales puede ocurrir de $\binom{4}{x}$ formas, donde x puede ser 0, 1, 2, 3 o 4. Por consiguiente, la distribución de probabilidad $f(x) = P(X = x)$ es

$$f(x) = \frac{1}{16}\binom{4}{x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Existen muchos problemas en los que desearíamos calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X sea menor o igual que algún número real x. Al escribir $F(x) = P(X \le x)$ para cualquier número real x, definimos $F(x)$ como la **función de la distribución acumulativa** de la variable aleatoria X.

Definición 3.5: La **función de la distribución acumulativa** $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t), \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Para la variable aleatoria M, el número de emparejamientos correctos en el ejemplo 3.2, tenemos

$$F(2) = P(M \le 2) = f(0) + f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

La función de la distribución acumulativa de M es

$$F(m) = \begin{cases} 0, & \text{para } m < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{para } 0 \le m < 1, \\ \frac{5}{6}, & \text{para } 1 \le m < 3, \\ 1, & \text{para } m \ge 3. \end{cases}$$

Es necesario observar en particular el hecho de que la función de la distribución acumulativa es una función no decreciente monótona, la cual no sólo se define para los valores que toma la variable aleatoria dada sino para todos los números reales.

Ejemplo 3.10: Calcule la función de la distribución acumulativa de la variable aleatoria X del ejemplo 3.9. Utilice $F(x)$ para verificar que $f(2) = 3/8$.

***Solución*:** El cálculo directo de la distribución de probabilidad del ejemplo 3.9 da $f(0) = 1/16$, $f(1) = 1/4, f(2) = 3/8, f(3) = 1/4$ y $f(4) = 1/16$. Por lo tanto,

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16},$$
$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16},$$
$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16},$$
$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16},$$
$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1.$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{16}, & \text{para } 0 \le x < 1, \\ \frac{5}{16}, & \text{para } 1 \le x < 2, \\ \frac{11}{16}, & \text{para } 2 \le x < 3, \\ \frac{15}{16}, & \text{para } 3 \le x < 4, \\ 1 & \text{para } x \ge 4. \end{cases}$$

Entonces,

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}.$$

A menudo es útil ver una distribución de probabilidad en forma gráfica. Se pueden graficar los puntos $(x, f(x))$ del ejemplo 3.9 para obtener la figura 3.1. Si unimos los puntos al eje x, ya sea con una línea punteada o con una línea sólida, obtenemos una gráfica de función de masa de probabilidad. La figura 3.1 permite ver fácilmente qué valores de X tienen más probabilidad de ocurrencia y, en este caso, también indica una situación perfectamente simétrica.

Sin embargo, en vez de graficar los puntos $(x, f(x))$, lo que hacemos más a menudo es construir rectángulos como en la figura 3.2. Aquí los rectángulos se construyen de manera que sus bases, con la misma anchura, se centren en cada valor x, y que sus alturas igualen a las probabilidades correspondientes dadas por $f(x)$. Las bases se construyen de forma tal que no dejen espacios entre los rectángulos. La figura 3.2 se denomina **histograma de probabilidad**.

Como cada base en la figura 3.2 tiene el ancho de una unidad, $P(X = x)$ es igual al área del rectángulo centrado en x. Incluso si las bases no tuvieran el ancho de una unidad, podríamos ajustar las alturas de los rectángulos para que tengan áreas que igualen las probabilidades de X de tomar cualquiera de sus valores x. Este concepto de utilizar

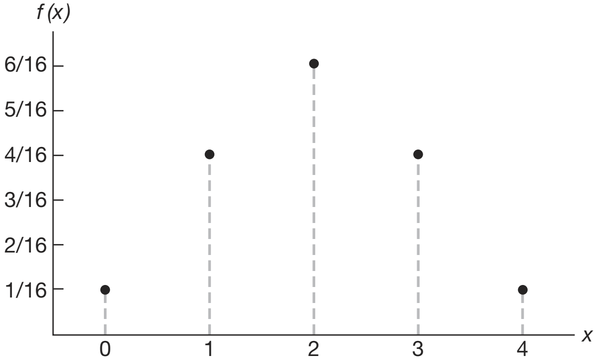

Figura 3.1: Gráfica de función de masa de probabilidad.

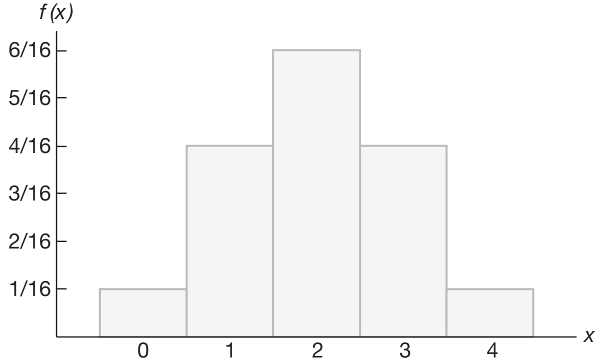

Figura 3.2: Histograma de probabilidad.

áreas para representar probabilidades es necesario para nuestro estudio de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua.

La gráfica de la función de la distribución acumulativa del ejemplo 3.9, que aparece como una función escalonada en la figura 3.3, se obtiene graficando los puntos $(x, F(x))$.

Ciertas distribuciones de probabilidad se aplican a más de una situación física. La distribución de probabilidad del ejemplo 3.9 también se aplica a la variable aleatoria Y, donde Y es el número de caras que se obtienen cuando una moneda se lanza 4 veces, o a la variable aleatoria W, donde W es el número de cartas rojas que resultan cuando se sacan 4 cartas al azar de una baraja de manera sucesiva, se reemplaza cada carta y se baraja antes de sacar la siguiente. En el capítulo 5 se estudiarán distribuciones discretas especiales que se aplican a diversas situaciones experimentales.

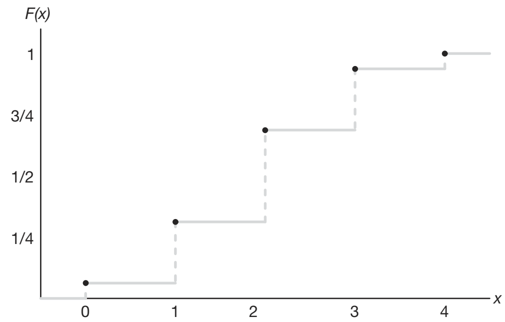

Figura 3.3: Función de distribución acumulativa discreta.

3.3 Distribuciones de probabilidad continua

Una variable aleatoria continua tiene una probabilidad 0 de adoptar *exactamente* cualquiera de sus valores. En consecuencia, su distribución de probabilidad no se puede presentar en forma tabular. En un principio esto parecería sorprendente, pero se vuelve más probable cuando consideramos un ejemplo específico. Consideremos una variable aleatoria cuyos valores son las estaturas de todas las personas mayores de 21 años de edad. Entre cualesquiera dos valores, digamos 163.5 y 164.5 centímetros, o incluso entre 163.99 y 164.01 centímetros, hay un número infinito de estaturas, una de las cuales es 164 centímetros. La probabilidad de seleccionar al azar a una persona que tenga exactamente 164 centímetros de estatura en lugar de una del conjunto infinitamente grande de estaturas tan cercanas a 164 centímetros que humanamente no sea posible medir la diferencia es remota, por consiguiente, asignamos una probabilidad 0 a tal evento. Sin embargo, esto no ocurre si nos referimos a la probabilidad de seleccionar a una persona que mida al menos 163 centímetros pero no más de 165 centímetros de estatura. Aquí nos referimos a un intervalo en vez de a un valor puntual de nuestra variable aleatoria.

Nos interesamos por el cálculo de probabilidades para varios intervalos de variables aleatorias continuas como $P(a < X < b)$, $P(W \geq c)$, etc. Observe que cuando X es continua,

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b).$$

Es decir, no importa si incluimos o no un extremo del intervalo. Sin embargo, esto no es cierto cuando X es discreta.

Aunque la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua no se puede representar de forma tabular, sí es posible plantearla como una fórmula, la cual necesariamente será función de los valores numéricos de la variable aleatoria continua X, y como tal se representará mediante la notación funcional $f(x)$. Cuando se trata con variables continuas, a $f(\mathrm{x})$ por lo general se le llama **función de densidad de probabilidad**, o simplemente **función de densidad** de X. Como X se define sobre un espacio muestral continuo, es posible que $f(x)$ tenga un número finito de discontinuidades. Sin embargo, la mayoría de las funciones de densidad que tienen aplicaciones prácticas en el análisis de datos estadísticos son continuas y sus gráficas pueden tomar cualesquiera de varias formas, algunas de las cuales se presentan en la figura 3.4. Como se utilizarán áreas para representar probabilidades y éstas son valores numéricos positivos, la función de densidad debe caer completamente arriba del eje x.

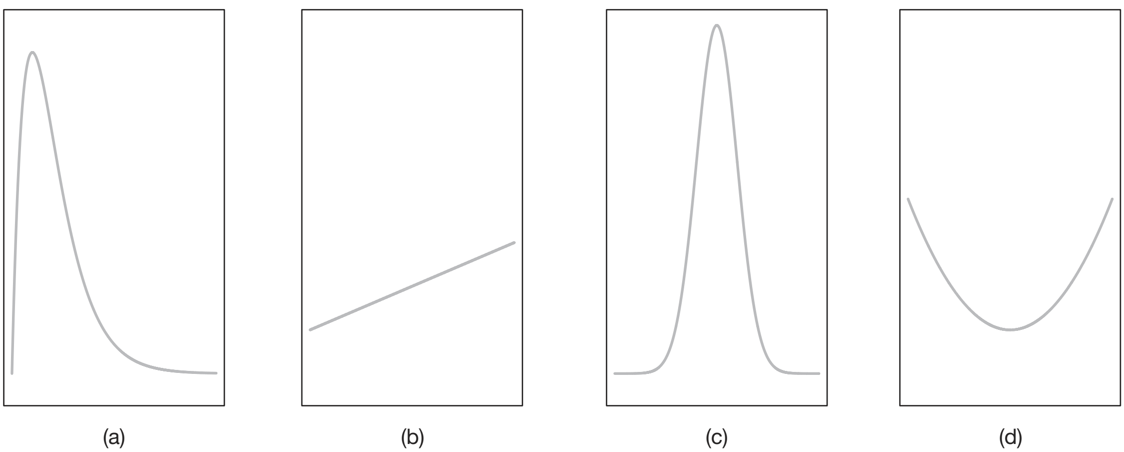

Figura 3.4: Funciones de densidad típicas.

Una función de densidad de probabilidad se construye de manera que el área bajo su curva limitada por el eje x sea igual a 1, cuando se calcula en el rango de X para el que se define $f(x)$. Como este rango de X es un intervalo finito, siempre es posible extender el intervalo para que incluya a todo el conjunto de números reales definiendo $f(x)$ como cero en todos los puntos de las partes extendidas del intervalo. En la figura 3.5 la probabilidad de que X tome un valor entre a y b es igual al área sombreada bajo la función de densidad entre las ordenadas en $x = a$ y $x = b$, y a partir del cálculo integral está dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

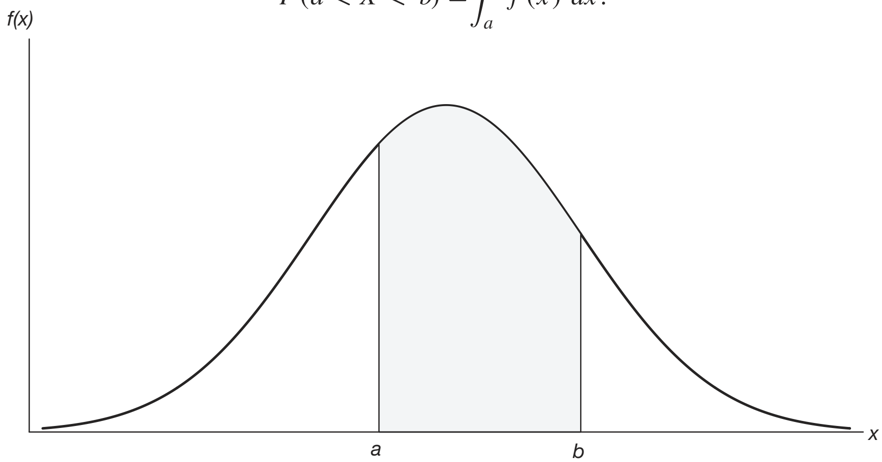

Figura 3.5: $P(a < X < b)$.

Definición 3.6: La función $f(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales, si

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Ejemplo 3.11: Suponga que el error en la temperatura de reacción, en °C, en un experimento de laboratorio controlado, es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que $f(x)$ es una función de densidad.

b) Calcule $P(0 < X \leq 1)$.

***Solución*:** Usamos la definición 3.6.

a) Evidentemente, $f(x) \geq 0$. Para verificar la condición 2 de la definición 3.6 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

b) Si usamos la fórmula 3 de la definición 3.6, obtenemos

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \left.\frac{x^3}{9}\right|_0^1 = \frac{1}{9}.$$

Definición 3.7: La **función de distribución acumulativa** $F(x)$, de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$, es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición 3.7 se pueden escribir los dos resultados,

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \text{ y } f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

si existe la derivada.

Ejemplo 3.12: Calcule $F(x)$ para la función de densidad del ejemplo 3.11 y utilice el resultado para evaluar $P(0 < X \leq 1)$.

***Solución*:** Para $-1 < x < 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}.$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^3+1}{9}, & -1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

La función de la distribución acumulativa $F(x)$ se expresa en la figura 3.6. Entonces,

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9},$$

que coincide con el resultado que se obtuvo al utilizar la función de densidad en el ejemplo 3.11.

Ejemplo 3.13: El Departamento de Energía (DE) asigna proyectos mediante licitación y, por lo general, estima lo que debería ser una licitación razonable. Sea b el estimado. El DE determinó que la función de densidad de la licitación ganadora (baja) es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \leq y \leq 2b, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule $F(y)$ y utilice el resultado para determinar la probabilidad de que la licitación ganadora sea menor que la estimación preliminar b del DE.

***Solución*:** Para $2b/5 \leq y \leq 2b$,

$$F(y) = \int_{2b/5}^{y} \frac{5}{8b} dy = \left.\frac{5t}{8b}\right|_{2b/5}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}.$$

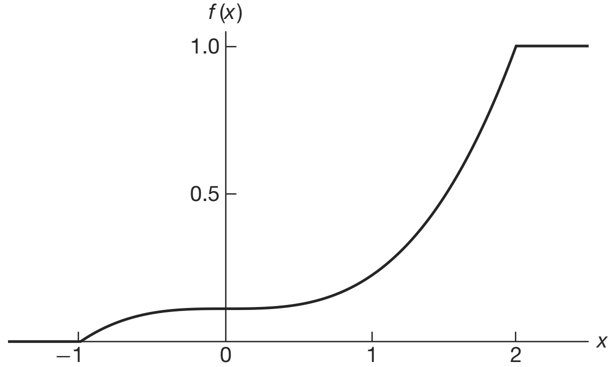

Figura 3.6: Función de distribución acumulativa continua.

Por consiguiente,

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{2}{5}b, \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}, & \frac{2}{5}b \leq y < 2b, \\ 1, & y \geq 2b. \end{cases}$$

Para determinar la probabilidad de que la licitación ganadora sea menor que la estimación preliminar b de la licitación tenemos

$$P(Y \leq b) = F(b) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Ejercicios

3.1 Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

X: el número de accidentes automovilísticos que ocurren al año en Virginia.

Y: el tiempo para jugar 18 hoyos de golf.

M: la cantidad de leche que una vaca específica produce anualmente.

N: el número de huevos que una gallina pone mensualmente.

P: el número de permisos para construcción que los funcionarios de una ciudad emiten cada mes.

Q: el peso del grano producido por acre.

3.2 Un embarque foráneo de 5 automóviles extranjeros contiene 2 que tienen ligeras manchas de pintura. Suponga que una agencia recibe 3 de estos automóviles al azar y liste los elementos del espacio muestral S usando las letras M y N para “manchado” y “sin mancha”, respectivamente; luego asigne a cada punto muestral un valor x de la variable aleatoria X que representa el número de automóviles con manchas de pintura que compró la agencia.

3.3 Sea W la variable aleatoria que da el número de caras menos el número de cruces en tres lanzamientos de una moneda. Liste los elementos del espacio muestral S para los tres lanzamientos de la moneda y asigne un valor w de W a cada punto muestral.

3.4 Se lanza una moneda hasta que se presentan 3 caras sucesivamente. Liste sólo aquellos elementos del espacio muestral que requieren 6 o menos lanzamientos. ¿Es éste un espacio muestral discreto? Explique su respuesta.

3.5 Determine el valor c de modo que cada una de las siguientes funciones sirva como distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X:

a) $f(x) = c(x^2 + 4)$, para $x = 0, 1, 2, 3$;

b) $f(x) = c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}$, para $x = 0, 1, 2$.

3.6 La vida útil, en días, para frascos de cierta medicina de prescripción es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20,000}{(x+100)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que un frasco de esta medicina tenga una vida útil de

a) al menos 200 días;
b) cualquier lapso entre 80 y 120 días.

3.7 El número total de horas, medidas en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua X que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que en un periodo de un año una familia utilice su aspiradora

a) menos de 120 horas;
b) entre 50 y 100 horas.

3.8 Obtenga la distribución de probabilidad de la variable aleatoria W del ejercicio 3.3; suponga que la moneda está cargada, de manera que existe el doble de probabilidad de que ocurra una cara que una cruz.

3.9 La proporción de personas que responden a cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua X que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que $P(0 < X < 1) = 1$.
b) Calcule la probabilidad de que más de $1/4$ pero menos de $1/2$ de las personas contactadas respondan a este tipo de encuesta.

3.10 Encuentre una fórmula para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que represente el resultado cuando se lanza un dado una vez.

3.11 Un embarque de 7 televisores contiene 2 unidades defectuosas. Un hotel compra 3 de los televisores al azar. Si x es el número de unidades defectuosas que compra el hotel, calcule la distribución de probabilidad de X. Exprese los resultados de forma gráfica como un histograma de probabilidad.

3.12 Una empresa de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de varios años. Dado que la función de distribución acumulativa de T, el número de años para el vencimiento de un bono que se elige al azar, es

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \le t < 3, \\ \frac{1}{2}, & 3 \le t < 5, \\ \frac{3}{4}, & 5 \le t < 7, \\ 1, & t \ge 7, \end{cases}$$

calcule

a) $P(T = 5)$;
b) $P(T > 3)$;
c) $P(1.4 < T < 6)$;
d) $P(T \le 5 \mid T \ge 2)$;

3.13 La distribución de probabilidad de X, el número de imperfecciones que se encuentran en cada 10 metros de una tela sintética que viene en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Construya la función de distribución acumulativa de X.

3.14 El tiempo que pasa, en horas, para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad es una variable aleatoria continua con una función de distribución acumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-8x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el tiempo que pase para que el radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad sea menor de 12 minutos

a) usando la función de distribución acumulativa de X;
b) utilizando la función de densidad de probabilidad de X.

3.15 Calcule la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X que represente el número de unidades defectuosas en el ejercicio 3.11. Luego, utilice $F(x)$ para calcular

a) $P(X = 1)$;
b) $P(0 < X \le 2)$.

3.16 Construya una gráfica de la función de distribución acumulativa del ejercicio 3.15.

3.17 Una variable aleatoria continua X, que puede tomar valores entre $x = 1$ y $x = 3$, tiene una función de densidad dada por $f(x) = 1/2$.

a) Muestre que el área bajo la curva es igual a 1.
b) Calcule $P(2 < X < 2.5)$.
c) Calcule $P(X \le 1.6)$.

3.18 Una variable aleatoria continua *X,* que puede tomar valores entre $x = 2$ y $x = 5$, tiene una función de densidad dada por $f(x) = 2(1 + x)/27$. Calcule

a) $P(X < 4)$;

b) $P(3 \leq X < 4)$.

3.19 Para la función de densidad del ejercicio 3.17 calcule $F(x)$. Utilícela para evaluar $P(2 < X < 2.5)$.

3.20 Para la función de densidad del ejercicio 3.18 calcule $F(x)$ y utilícela para evaluar $P(3 \leq X < 4)$.

3.21 Considere la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Evalúe k.

b) Calcule $F(x)$ y utilice el resultado para evaluar

$$P(0.3 < X < 0.6).$$

3.22 Se sacan tres cartas de una baraja de manera sucesiva y sin reemplazo. Calcule la distribución de probabilidad para la cantidad de espadas.

3.23 Calcule la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria W del ejercicio 3.8. Use $F(w)$ para calcular

a) $P(W > 0)$;

b) $P(-1 \leq W < 3)$.

3.24 Calcule la distribución de probabilidad para el número de discos compactos de jazz cuando, de una colección que consta de 5 de jazz, 2 de música clásica y 3 de rock, se seleccionan 4 CD al azar. Exprese sus resultados utilizando una fórmula.

3.25 De una caja que contiene 4 monedas de 10 centavos y 2 monedas de 5 centavos se seleccionan 3 monedas al azar y sin reemplazo. Calcule la distribución de probabilidad para el total T de las 3 monedas. Exprese la distribución de probabilidad de forma gráfica como un histograma de probabilidad.

3.26 De una caja que contiene 4 bolas negras y 2 verdes se sacan 3 bolas sucesivamente, cada bola se regresa a la caja antes de sacar la siguiente. Calcule la distribución de probabilidad para el número de bolas verdes.

3.27 El tiempo que pasa, en horas, antes de que una parte importante de un equipo electrónico que se utiliza para fabricar un reproductor de DVD empiece a fallar tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}\exp(-x/2000), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) Calcule $F(x)$.

b) Determine la probabilidad de que el componente (y, por lo tanto, el reproductor de DVD) funcione durante más de 1000 horas antes de que sea necesario reemplazar el componente.

c) Determine la probabilidad de que el componente falle antes de 2000 horas.

3.28 Un productor de cereales está consciente de que el peso del producto varía ligeramente entre una y otra caja. De hecho, cuenta con suficientes datos históricos para determinar la función de densidad que describe la estructura de probabilidad para el peso (en onzas). Si X es el peso, en onzas, de la variable aleatoria, la función de densidad se describe como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & 23.75 \leq x \leq 26.25, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que sea una función de densidad válida.

b) Determine la probabilidad de que el peso sea menor que 24 onzas.

c) La empresa desea que un peso mayor que 26 onzas sea un caso extraordinariamente raro. ¿Cuál será la probabilidad de que en verdad ocurra este caso extraordinariamente raro?

3.29 Un factor importante en el combustible sólido para proyectiles es la distribución del tamaño de las partículas. Cuando las partículas son demasiado grandes se presentan problemas importantes. A partir de datos de producción históricos se determinó que la distribución del tamaño (en micras) de las partículas se caracteriza por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que sea una función de densidad válida.

b) Evalúe $F(x)$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una partícula tomada al azar del combustible fabricado sea mayor que 4 micras?

3.30 Las mediciones en los sistemas científicos siempre están sujetas a variación, algunas veces más que otras. Hay muchas estructuras para los errores de medición y los estadísticos pasan mucho tiempo modelándolos. Suponga que el error de medición X de cierta cantidad física es determinado por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(3 - x^2), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine k, que representa $f(x)$, una función de densidad válida.

b) Calcule la probabilidad de que un error aleatorio en la medición sea menor que ½.

c) Para esta medición específica, resulta indeseable si la *magnitud* del error (es decir, $|x|$) es mayor que 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

3.31 Con base en pruebas extensas, el fabricante de una lavadora determinó que el tiempo Y (en años) para que el electrodoméstico requiera una reparación mayor se obtiene mediante la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Los críticos considerarían que la lavadora es una ganga si no hay probabilidades de que requiera una reparación mayor antes del sexto año. Comente sobre esto determinando $P(Y > 6)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lavadora requiera una reparación mayor durante el primer año?

3.32 Se está revisando qué proporciones de su presupuesto asigna cierta empresa industrial a controles ambientales y de contaminación. Un proyecto de recopilación de datos determina que la distribución de tales proporciones está dada por

$$f(y) = \begin{cases} 5(1-y)^4, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que la función de densidad anterior sea válida.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar gaste menos de 10% de su presupuesto en controles ambientales y de contaminación?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa seleccionada al azar gaste más de 50% de su presupuesto en controles ambientales y de la contaminación?

3.33 Suponga que cierto tipo de pequeñas empresas de procesamiento de datos están tan especializadas que algunas tienen dificultades para obtener utilidades durante su primer año de operación. La función de densidad de probabilidad que caracteriza la proporción Y que obtiene utilidades está dada por

$$f(y) = \begin{cases} ky^4(1-y)^3, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de k que hace de la anterior una función de densidad válida?

b) Calcule la probabilidad de que al menos 50% de las empresas tenga utilidades durante el primer año.

c) Calcule la probabilidad de que al menos 80% de las empresas tenga utilidades durante el primer año.

3.34 Los tubos de magnetrón se producen en una línea de ensamble automatizada. Periódicamente se utiliza un plan de muestreo para evaluar la calidad en la longitud de los tubos; sin embargo, dicha medida está sujeta a incertidumbre. Se considera que la probabilidad de que un tubo elegido al azar cumpla con las especificaciones de longitud es 0.99. Se utiliza un plan de muestreo en el cual se mide la longitud de 5 tubos elegidos al azar.

a) Muestre que la función de probabilidad de Y, el número de tubos de cada 5 que cumplen con las especificaciones de longitud, está dada por la siguiente función de probabilidad discreta:

$$f(y) = \frac{5!}{y!(5-y)!}(0.99)^y(0.01)^{5-y},$$

b) Suponga que se eligen artículos de la línea al azar y 3 no cumplen con las especificaciones. Utilice la $f(y)$ anterior para apoyar o refutar la conjetura de que hay 0.99 de probabilidades de que un solo tubo cumpla con las especificaciones.

3.35 Suponga que a partir de gran cantidad de datos históricos se sabe que X, el número de automóviles que llegan a una intersección específica durante un periodo de 20 segundos, se determina mediante la siguiente función de probabilidad discreta

$$f(x) = e^{-6}\frac{6^x}{x!}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Calcule la probabilidad de que en un periodo específico de 20 segundos más de 8 automóviles lleguen a la intersección.

b) Calcule la probabilidad de que sólo lleguen 2 automóviles.

3.36 En una tarea de laboratorio, si el equipo está funcionando, la función de densidad del resultado observado, X, es

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule $P(X \leq 1/3)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea mayor que 0.5?

c) Dado que $X \geq 0.5$, ¿cuál es la probabilidad de que X sea menor que 0.75?

3.4 Distribuciones de probabilidad conjunta

El estudio de las variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad de la sección anterior se restringió a espacios muestrales unidimensionales, ya que registramos los resultados de un experimento como los valores que toma una sola variable aleatoria. No obstante, habrá situaciones en las que se busque registrar los resultados simultáneos de diversas variables aleatorias. Por ejemplo, en un experimento químico controlado podríamos medir la cantidad del precipitado P y la del volumen V de gas liberado, lo que daría lugar a un espacio muestral bidimensional que consta de los resultados (p, v); o bien, podríamos interesarnos en la dureza d y en la resistencia a la tensión T de cobre estirado en frío que produciría los resultados (d, t). En un estudio realizado con estudiantes universitarios para determinar la probabilidad de que tengan éxito en la universidad, basado en los datos del nivel preparatoria, se podría utilizar un espacio muestral tridimensional y registrar la calificación que obtuvo cada uno en la prueba de aptitudes, el lugar que cada uno ocupó en la preparatoria y la calificación promedio que cada uno obtuvo al final de su primer año en la universidad.

Si X y Y son dos variables aleatorias discretas, la distribución de probabilidad para sus ocurrencias simultáneas se representa mediante una función con valores $f(x, y)$, para cualquier par de valores (x, y) dentro del rango de las variables aleatorias X y Y. Se acostumbra referirse a esta función como la **distribución de probabilidad conjunta** de X y Y.

Por consiguiente, en el caso discreto,

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y);$$

es decir, los valores $f(x, y)$ dan la probabilidad de que los resultados x y y ocurran al mismo tiempo. Por ejemplo, si se le va a dar servicio a los neumáticos de un camión de transporte pesado, y X representa el número de millas que éstos han recorrido y Y el número de neumáticos que deben ser reemplazados, entonces $f(30{,}000, 5)$ es la probabilidad de que los neumáticos hayan recorrido más de 30,000 millas y que el camión necesite 5 neumáticos nuevos.

Definición 3.8: La función $f(x,y)$ es una **distribución de probabilidad conjunta** o **función de masa de probabilidad** de las variables aleatorias discretas X y Y, si

1. $f(x, y) \geq 0$ para toda (x, y),
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$,
3. $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$.

Para cualquier región A en el plano xy, $P[(X, Y) \in A] = \sum\sum_A f(x,y)$.

Ejemplo 3.14: Se seleccionan al azar 2 repuestos para bolígrafo de una caja que contiene 3 repuestos azules, 2 rojos y 3 verdes. Si X es el número de repuestos azules y Y es el número de repuestos rojos seleccionados, calcule

a) la función de probabilidad conjunta $f(x, y)$,

b) $P[(X, Y) \in A]$, donde A es la región $\{(x, y) | x + y \leq 1\}$.

***Solución*:** Los posibles pares de valores (x, y) son (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2) y (2, 0).

a) Ahora bien, $f(0, 1)$, por ejemplo, representa la probabilidad de seleccionar un repuesto rojo y uno verde. El número total de formas igualmente probables de seleccionar cualesquiera 2 repuestos de los 8 es $\binom{8}{2} = 28$. El número de formas de seleccionar 1 rojo de 2 repuestos rojos y 1 verde de 3 repuestos verdes es $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$. En consecuencia, $f(0, 1) = 6/28 = 3/14$. Cálculos similares dan las probabilidades para los otros casos, los cuales se presentan en la tabla 3.1. Observe que las probabilidades suman 1. En el capítulo 5 se volverá evidente que la distribución de probabilidad conjunta de la tabla 3.1 se puede representar con la fórmula

$$f(x, y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}},$$

para $x = 0, 1, 2$; $y = 0, 1, 2$; y $0 \le x + y \le 2$.

b) La probabilidad de que (X,Y) caiga en la región A es

$$P[(X, Y) \in A] = P(X + Y \le 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)$$
$$= \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14}.$$

Tabla 3.1: Distribución de probabilidad conjunta para el ejemplo 3.14

	$f(x, y)$	x = 0	1	2	Totales por renglón
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
Totales por columna		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Cuando X y Y son variables aleatorias continuas, la **función de densidad conjunta** $f(x,y)$ es una superficie que yace sobre el plano xy, y $P[(X,Y) \in A]$, donde A es cualquier región en el plano xy, que es igual al volumen del cilindro recto limitado por la base A y la superficie.

Definición 3.9: La función $f(x,y)$ es una **función de densidad conjunta** de las variables aleatorias continuas X y Y si

1. $f(x, y) \ge 0$, para toda (x, y),
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$,
3. $P[(X, Y) \in A] = \int \int_A f(x, y)\, dx\, dy$, para cualquier región A en el plano xy.

Ejemplo 3.15: Una empresa privada opera un local que da servicio a clientes que llegan en automóvil y otro que da servicio a clientes que llegan caminando. En un día elegido al azar, sean X y Y, respectivamente, las proporciones de tiempo que ambos locales están en servicio, y suponiendo que la función de densidad conjunta de estas variables aleatorias es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique la condición 2 de la definición 3.9.

b) Calcule $P[(X, Y) \in A]$, donde $A = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$.

Solución: *a*) La integración de $f(x,y)$ sobre la totalidad de la región es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x + 3y)\ dx\ dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} + \frac{6y}{5}\right) dy = \left(\frac{2y}{5} + \frac{3y^2}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

b) Para calcular la probabilidad utilizamos

$$P[(X, Y) \in A] = P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2} \frac{2}{5}(2x + 3y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1/2} dy = \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{1}{10} + \frac{3y}{5}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10}\right)\Bigg|_{1/4}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right)\right] = \frac{13}{160}.$$

Dada la distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$ de las variables aleatorias discretas X y Y, la distribución de probabilidad $g(x)$ sólo de X se obtiene sumando $f(x, y)$ sobre los valores de Y. De manera similar, la distribución de probabilidad $h(y)$ de sólo Y se obtiene sumando $f(x, y)$ sobre los valores de X. Definimos $g(x)$ y $h(y)$ como **distribuciones marginales** de X y Y, respectivamente. Cuando X y Y son variables aleatorias continuas, las sumatorias se reemplazan por integrales. Ahora podemos establecer la siguiente definición general.

Definición 3.10: Las **distribuciones marginales** sólo de X y sólo de Y son

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad \text{y} \quad h(y) = \sum_x f(x, y)$$

para el caso discreto, y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy \quad \text{y} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

para el caso continuo.

El término *marginal* se utiliza aquí porque, en el caso discreto, los valores de $g(x)$ y $h(y)$ son precisamente los totales marginales de las columnas y los renglones respectivos, cuando los valores de $f(x, y)$ se muestran en una tabla rectangular.

Ejemplo 3.16: Muestre que los totales de columnas y renglones de la tabla 3.1 dan las distribuciones marginales de sólo X y sólo Y.

***Solución*:** Para la variable aleatoria X vemos que

$$g(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14},$$
$$g(1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28},$$

y

$$g(2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28},$$

que son precisamente los totales por columna de la tabla 3.1. De manera similar podemos mostrar que los valores de $h(y)$ están dados por los totales de los renglones. En forma tabular, estas distribuciones marginales se pueden escribir como sigue:

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

Ejemplo 3.17: Calcule $g(x)$ y $h(y)$ para la función de densidad conjunta del ejemplo 3.15.

***Solución*:** Por definición,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x + 3y)\, dy = \left(\frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{4x + 3}{5},$$

para $0 \leq x \leq 1$, y $g(x) = 0$ en otro caso. De manera similar,

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x + 3y)\, dx = \frac{2(1 + 3y)}{5},$$

para $0 \leq y \leq 1$, y $h(y) = 0$ en otro caso.

El hecho de que las distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$ sean en realidad las distribuciones de probabilidad de las variables individuales X y Y solas se puede verificar mostrando que se satisfacen las condiciones de la definición 3.4 o de la definición 3.6. Por ejemplo, en el caso continuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1,$$

y

$$P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$$
$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

En la sección 3.1 establecimos que el valor x de la variable aleatoria X representa un evento que es un subconjunto del espacio muestral. Si utilizamos la definición de probabilidad condicional que se estableció en el capítulo 2,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) > 0,$$

donde A y B son ahora los eventos definidos por $X = x$ y $Y = y$, respectivamente, entonces,

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \text{ siempre que } g(x) > 0,$$

donde X y Y son variables aleatorias discretas.

No es difícil mostrar que la función $f(x, y)/g(x)$, que es estrictamente una función de y con x fija, satisface todas las condiciones de una distribución de probabilidad. Esto también es cierto cuando $f(x, y)$ y $g(x)$ son la densidad conjunta y la distribución marginal, respectivamente, de variables aleatorias continuas. Como resultado, para poder calcular probabilidades condicionales de manera eficaz es sumamente importante que utilicemos el tipo especial de distribución de la forma $f(x, y)/g(x)$. Este tipo de distribución se llama **distribución de probabilidad condicional** y se define formalmente como sigue:

Definición 3.11: Sean X y Y dos variables aleatorias, discretas o continuas. La **distribución condicional** de la variable aleatoria Y, dado que $X = x$, es

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \text{ siempre que } g(x) > 0.$$

De manera similar, la distribución condicional de la variable aleatoria X, dado que $Y = y$, es

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \text{ siempre que } h(y) > 0.$$

Si deseamos encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X caiga entre a y b cuando sabemos que la variable discreta $Y = y$, evaluamos

$$P(a < X < b \mid Y = y) = \sum_{a<x<b} f(x|y),$$

donde la sumatoria se extiende a todos los valores de X entre a y b. Cuando X y Y son continuas, evaluamos

$$P(a < X < b \mid Y = y) = \int_a^b f(x|y)\, dx.$$

Ejemplo 3.18: Remítase al ejemplo 3.14, calcule la distribución condicional de X, dado que $Y = 1$, y utilice el resultado para determinar $P(X = 0 \mid Y = 1)$.

***Solución*:** Necesitamos encontrar $f(x \mid y)$, donde $y = 1$. Primero calculamos que

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x, 1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}.$$

Ahora calculamos,

$$f(x|1) = \frac{f(x, 1)}{h(1)} = \left(\frac{7}{3}\right) f(x, 1), \quad x = 0, 1, 2.$$

Por lo tanto,

$$f(0|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(0, 1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2},\ f(1|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(1, 1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f(2|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(2, 1) = \left(\frac{7}{3}\right)(0) = 0,$$

y la distribución condicional de X, dado que $Y = 1$, es

x	0	1	2
$f(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Finalmente,

$$P(X = 0 \mid Y = 1) = f(0|1) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, si se sabe que 1 de los 2 repuestos seleccionados es rojo, tenemos una probabilidad igual a $1/2$ de que el otro repuesto no sea azul.

Ejemplo 3.19: La densidad conjunta para las variables aleatorias (X,Y), donde X es el cambio unitario de temperatura y Y es la proporción de desplazamiento espectral que produce cierta partícula atómica es

$$f(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule las densidades marginales $g(x)$, $h(y)$ y la densidad condicional $f(y|x)$.

b) Calcule la probabilidad de que el espectro se desplace más de la mitad de las observaciones totales, dado que la temperatura se incremente en 0.25 unidades.

***Solución*:** *a*) Por definición,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_x^1 10xy^2\, dy$$
$$= \frac{10}{3}xy^3 \Big|_{y=x}^{y=1} = \frac{10}{3}x(1 - x^3),\ 0 < x < 1,$$
$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_0^y 10xy^2\, dx = 5x^2y^2\Big|_{x=0}^{x=y} = 5y^4,\ 0 < y < 1.$$

Entonces,

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1 - x^3)} = \frac{3y^2}{1 - x^3},\ 0 < x < y < 1.$$

b) Por lo tanto,

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \,\Big|\, X = 0.25\right) = \int_{1/2}^1 f(y \mid x = 0.25)\, dy = \int_{1/2}^1 \frac{3y^2}{1 - 0.25^3}\, dy = \frac{8}{9}.$$

Ejemplo 3.20: Dada la función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

calcule $g(x)$, $h(y)$, $f(x|y)$ y evalúe $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3})$.

***Solución*:** Por definición de la densidad marginal, para $0 < x < 2$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{1} \frac{x(1 + 3y^2)}{4} dy$$
$$= \left(\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{2},$$

y para $0 < y < 1$,

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_{0}^{2} \frac{x(1 + 3y^2)}{4} dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1 + 3y^2}{2}.$$

Por lo tanto, usando la definición de la densidad condicional para $0 < x < 2$,

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{x(1 + 3y^2)/4}{(1 + 3y^2)/2} = \frac{x}{2},$$

y

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \;\middle|\; Y = \frac{1}{3} \right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2} dx = \frac{3}{64}.$$

Independencia estadística

Si $f(x|y)$ no depende de y, como ocurre en el ejemplo 3.20, entonces $f(x|y) = g(x)$ y $f(x,y) = g(x)h(y)$. La prueba se realiza sustituyendo

$$f(x, y) = f(x|y)h(y)$$

en la distribución marginal de X. Es decir,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)h(y)\, dy.$$

Si $f(x|y)$ no depende de y, podemos escribir

$$g(x) = f(x|y) \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy.$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy = 1,$$

ya que $h(y)$ es la función de densidad de probabilidad de Y. Por lo tanto,

$$g(x) = f(x|y) \text{ y entonces } f(x, y) = g(x)h(y).$$

Debería tener sentido para el lector que si $f(x|y)$ no depende de y, entonces, por supuesto, el resultado de la variable aleatoria Y no repercute en el resultado de la variable aleatoria X. En otras palabras, decimos que X y Y son variables aleatorias independientes. Ofrecemos ahora la siguiente definición formal de independencia estadística.

Definición 3.12: Sean X y Y dos variables aleatorias, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente. Se dice que las variables aleatorias X y Y son **estadísticamente independientes** si y sólo si

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

para toda (x,y) dentro de sus rangos.

Las variables aleatorias continuas del ejemplo 3.20 son estadísticamente independientes, pues el producto de las dos distribuciones marginales da la función de densidad conjunta. Sin embargo, es evidente que ése no es el caso de las variables continuas del ejemplo 3.19. La comprobación de la independencia estadística de variables aleatorias discretas requiere una investigación más profunda, ya que es posible que el producto de las distribuciones marginales sea igual a la distribución de probabilidad conjunta para algunas, aunque no para todas, las combinaciones de (x,y). Si puede encontrar algún punto (x,y) para el que $f(x, y)$ se define de manera que $f(x, y) \neq g(x)h(y)$, las variables discretas X y Y no son estadísticamente independientes.

Ejemplo 3.21: Demuestre que las variables aleatorias del ejemplo 3.14 no son estadísticamente independientes.

***Prueba*:** Consideremos el punto (0,1). A partir de la tabla 3.1, encontramos que las tres probabilidades $f(0, 1)$, $g(0)$ y $h(1)$ son

$$f(0, 1) = \frac{3}{14},$$

$$g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0, y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14},$$

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x, 1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}.$$

Claramente,

$$f(0, 1) \neq g(0)h(1),$$

por lo tanto, X y Y no son estadísticamente independientes. ▟

Todas las definiciones anteriores respecto a dos variables aleatorias se pueden generalizar al caso de n variables aleatorias. Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$. La distribución marginal de X_1, por ejemplo, es

$$g(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para el caso discreto, y

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n$$

para el caso continuo. Ahora podemos obtener **distribuciones marginales conjuntas** como $g(x_1, x_2)$, donde

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum\limits_{x_3} \cdots \sum\limits_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{(caso discreto),} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_3\, dx_4 \cdots dx_n & \text{(caso continuo).} \end{cases}$$

Podríamos considerar numerosas distribuciones condicionales. Por ejemplo, la **distribución condicional conjunta** de X_1, X_2 y X_3, dado que $X_4 = x_4$, $X_5 = x_5, \ldots, X_n = x_n$, se escribe como

$$f(x_1, x_2, x_3 \mid x_4, x_5, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_4, x_5, \ldots, x_n)},$$

donde $g(x_4, x_5, \ldots, x_n)$ es la distribución marginal conjunta de las variables aleatorias X_4, $X_5, \ldots, X_n$.

Una generalización de la definición 3.12 nos lleva a la siguiente definición para la independencia estadística mutua de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definición 3.13: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y distribuciones marginales $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, respectivamente. Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son recíproca y **estadísticamente independientes** si y sólo si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

para toda $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dentro de sus rangos.

Ejemplo 3.22: Suponga que el tiempo de vida en anaquel de cierto producto comestible perecedero empacado en cajas de cartón, en años, es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Represente los tiempos de vida en anaquel para tres de estas cajas seleccionadas de forma independiente con X_1, X_2 y X_3 y calcule $P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)$.

***Solución*:** Como las cajas se seleccionaron de forma independiente, suponemos que las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 son estadísticamente independientes y que tienen la siguiente densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) = e^{-x_1} e^{-x_2} e^{-x_3} = e^{-x_1 - x_2 - x_3},$$

para $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, y $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ en cualquier otro caso. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2) &= \int_2^{\infty} \int_1^3 \int_0^2 e^{-x_1 - x_2 - x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &= (1 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-3}) e^{-2} = 0.0372. \end{aligned}$$

¿Por qué son importantes las características de las distribuciones de probabilidad y de dónde provienen?

Es importante que este texto ofrezca al lector una transición hacia los siguientes tres capítulos. En los ejemplos y los ejercicios presentamos casos de situaciones prácticas de ingeniería y ciencias, en los cuales las distribuciones de probabilidad y sus propiedades se utilizan para resolver problemas importantes. Estas distribuciones de probabilidad, ya sean discretas o continuas, se presentaron mediante frases como "se sabe que", "suponga que" o incluso, en ciertos casos, "la evidencia histórica sugiere que". Se trata de situaciones en las que la naturaleza de la distribución, e incluso una estimación óptima de la estructura de la probabilidad, se pueden determinar utilizando datos históricos, datos tomados de estudios a largo plazo o incluso de grandes cantidades de datos planeados. El lector debería tener presente lo expuesto en el capítulo 1 respecto al uso de histogramas y, por consiguiente, recordar cómo se estiman las distribuciones de frecuencias a partir de los histogramas. Sin embargo, no todas las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad se derivan de cantidades grandes de datos históricos. Hay un gran número de situaciones en las que la naturaleza del escenario científico sugiere un tipo de distribución. De hecho, varias de ellas se reflejan en los ejercicios del capítulo 2 y en este capítulo. Cuando observaciones repetidas independientes son binarias por naturaleza (es decir, defectuoso o no, funciona o no, alérgico o no) con un valor de 0 o 1, la distribución que cubre esta situación se llama **distribución binomial**. La función de probabilidad de esta distribución se explicará y se demostrará en el capítulo 5. El ejercicio 3.34 de la sección 3.3 y el ejercicio de repaso 3.80 constituyen ejemplos de este tipo de distribución, y hay otros que el lector también debería reconocer. El escenario de una distribución continua del tiempo de operación antes de cualquier falla, como en el ejercicio de repaso 3.69 o en el ejercicio 3.27 de la página 93, a menudo sugiere una clase de distribución denominada **distribución exponencial**. Tales tipos de ejemplos son tan sólo dos de la gran cantidad de las llamadas distribuciones estándar que se utilizan ampliamente en situaciones del mundo real porque el escenario científico que da lugar a cada uno de ellos es reconocible y a menudo se presenta en la práctica. Los capítulos 5 y 6 abarcan muchos de estos tipos de ejemplos, junto con alguna teoría inherente respecto de su uso.

La segunda parte de esta transición al material de los capítulos siguientes tiene que ver con el concepto de **parámetros de la población** o **parámetros de distribución**. Recuerde que en el capítulo 1 analizamos la necesidad de utilizar datos para ofrecer información sobre dichos parámetros. Profundizamos en el estudio de las nociones de **media** y de **varianza**, y proporcionamos ideas sobre esos conceptos en el contexto de una población. De hecho, es fácil calcular la media y la varianza de la población a partir de la función de probabilidad para el caso discreto, o de la función de densidad de probabilidad para el caso continuo. Tales parámetros y su importancia en la solución de muchas clases de problemas de la vida real nos proporcionarán gran parte del material de los capítulos 8 a 17.

Ejercicios

3.37 Determine los valores de c, tales que las siguientes funciones representen distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

a) $f(x, y) = cxy$, para $x = 1, 2, 3$; $y = 1, 2, 3$;

b) $f(x, y) = c\,|x - y|$, para $x = -2, 0, 2$; $y = -2, 3$.

3.38 Si la distribución de probabilidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x, y) = \frac{x + y}{30}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, 3; \; y = 0, 1, 2,$$

calcule

a) $P(X \leq 2, Y = 1)$;
b) $P(X > 2, Y \leq 1)$;
c) $P(X > Y)$;
d) $P(X + Y = 4)$.

3.39 De un saco de frutas que contiene 3 naranjas, 2 manzanas y 3 plátanos se selecciona una muestra aleatoria de 4 frutas. Si X es el número de naranjas y Y el de manzanas en la muestra, calcule
a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y;
b) $P[(X, Y) \in A]$, donde A es la región dada por $\{(x, y) | x + y \leq 2\}$.

3.40 Un restaurante de comida rápida opera tanto en un local que da servicio en el automóvil, como en un local que atiende a los clientes que llegan caminando. En un día elegido al azar, represente las proporciones de tiempo que el primero y el segundo local están en servicio con X y Y, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables aleatorias es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la densidad marginal de X.
b) Calcule la densidad marginal de Y.
c) Calcule la probabilidad de que el local que da servicio a los clientes que llegan en automóvil esté lleno menos de la mitad del tiempo.

3.41 Una empresa dulcera distribuye cajas de chocolates con un surtido de cremas, chiclosos y envinados. Suponga que cada caja pesa 1 kilogramo, pero que los pesos individuales de cremas, chiclosos y envinados varían de una a otra cajas. Para una caja seleccionada al azar, represente los pesos de las cremas y los chiclosos con X y Y, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x + y \leq 1, \\ 0, & \text{en cualquier caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que en una caja dada los envinados representen más de la mitad del peso.
b) Calcule la densidad marginal para el peso de las cremas.
c) Calcule la probabilidad de que el peso de los chiclosos en una caja sea menor que $1/8$ de kilogramo, si se sabe que las cremas constituyen $3/4$ partes del peso.

3.42 Sean X y Y la duración de la vida, en años, de dos componentes en un sistema electrónico. Si la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

calcule $P(0 < X < 1 \mid Y = 2)$.

3.43 Sea X el tiempo de reacción, en segundos, ante cierto estímulo, y Y la temperatura (en °F) a la cual inicia cierta reacción. Suponga que dos variables aleatorias, X y Y, tienen la densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule
a) $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{1}{2})$;
b) $P(X < Y)$.

3.44 Se supone que cada rueda trasera de un avión experimental se llena a una presión de 40 libras por pulgada cuadrada (psi). Sea X la presión real del aire para la rueda derecha y Y la presión real del aire de la rueda izquierda. Suponga que X y Y son variables aleatorias con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2), & 30 \leq x < 50,\ 30 \leq y < 50, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule k.
b) Calcule $P(30 \leq X \leq 40$ y $40 \leq Y < 50)$.
c) Calcule la probabilidad de que ambas ruedas no contengan la suficiente cantidad de aire.

3.45 Sea X el diámetro de un cable eléctrico blindado y Y el diámetro del molde cerámico que hace el cable. Tanto X como Y tienen una escala tal que están entre 0 y 1. Suponga que X y Y tienen la siguiente densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule $P(X + Y > 1/2)$.

3.46 Remítase al ejercicio 3.38, calcule
a) la distribución marginal de X;
b) la distribución marginal de Y.

3.47 Al principio de cualquier día la cantidad de queroseno que contiene un tanque, en miles de litros, es una cantidad aleatoria Y, de la que durante el día se vende una cantidad aleatoria X. Suponga que el tanque no se reabastece durante el día, de manera que $x \leq y$, e imagine también que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine si X y Y son independientes.
b) Calcule $P(1/4 < X < 1/2 \mid Y = 3/4)$.

3.48 Remítase al ejercicio 3.39 y calcule

a) $f(y|2)$ para todos los valores de y;

b) $P(Y = 0|X = 2)$.

3.49 Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 o 3 veces en un día dado. Y si Y denota el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia, su distribución de probabilidad conjunta estará dada como

$f(x, y)$		$x=1$	$x=2$	$x=3$
y	1	0.05	0.05	0.10
	3	0.05	0.10	0.35
	5	0.00	0.20	0.10

a) Evalúe la distribución marginal de X.

b) Evalúe la distribución marginal de Y.

c) Calcule $P(Y = 3 \mid X = 2)$.

3.50 Suponga que X y Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$f(x, y)$		$x=2$	$x=4$
y	1	0.10	0.15
	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

a) Calcule la distribución marginal de X.

b) Calcule la distribución marginal de Y.

3.51 De las 12 cartas mayores (jotas, reinas y reyes) de una baraja ordinaria de 52 cartas se sacan tres cartas sin reemplazo. Sea X el número de reyes que se seleccionan y Y el número de jotas. Calcule

a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y;

b) $P[(X,Y) \in A]$, donde A es la región dada por $\{(x,y)|x + y \geq 2\}$.

3.52 Una moneda se lanza dos veces. Sea Z el número de caras en el primer lanzamiento y W el número total de caras en los 2 lanzamientos. Si la moneda no está balanceada y una cara tiene una probabilidad de ocurrencia de 40%, calcule

a) la distribución de probabilidad conjunta de W y Z;

b) la distribución marginal de W;

c) la distribución marginal de Z;

d) la probabilidad de que ocurra al menos 1 cara.

3.53 Dada la función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6-x-y}{8}, & 0 < x < 2,\ 2 < y < 4, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

calcule $P(1 < Y < 3|X = 1)$.

3.54 Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 3.49 son dependientes o independientes.

3.55 Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 3.50 son dependientes o independientes.

3.56 La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que X y Y no son independientes.

b) Calcule $P(X > 0.3|Y = 0.5)$.

3.57 Si X, Y y Z tienen la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxy^2z, & 0 < x, y < 1,\ 0 < z < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule k.

b) Calcule $P(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < Z < 2)$.

3.58 Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 3.43 son dependientes o independientes.

3.59 Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 3.44 son dependientes o independientes.

3.60 La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X, Y y Z es

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4xyz^2}{9}, & 0 < x, y < 1,\ 0 < z < 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule

a) la función de densidad marginal conjunta de Y y Z;

b) la densidad marginal de Y;

c) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2},\ Y > \frac{1}{3},\ 1 < Z < 2)$;

d) $P(0 < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{4},\ Z = 2)$.

Ejercicios de repaso

3.61 Una empresa tabacalera produce mezclas de tabaco. Cada mezcla contiene diversas proporciones de tabaco turco, tabaco de la región y otros. Las proporciones de tabaco turco y de la región en una mezcla son variables aleatorias con una función de densidad conjunta (X = turco y Y = de la región)

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \le x, y \le 1, \; x + y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que en determinada caja el tabaco turco represente más de la mitad de la mezcla.
b) Calcule la función de densidad marginal para la proporción del tabaco de la región.
c) Calcule la probabilidad de que la proporción de tabaco turco sea menor que $1/8$, si se sabe que la mezcla contiene $3/4$ de tabaco de la región.

3.62 Una empresa de seguros ofrece a sus asegurados varias opciones diferentes de pago de la prima. Para un asegurado seleccionado al azar, sea X el número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulada de X es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ 0.4, & \text{si } 1 \le x < 3, \\ 0.6, & \text{si } 3 \le x < 5, \\ 0.8, & \text{si } 5 \le x < 7, \\ 1.0, & \text{si } x \ge 7. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X?
b) Calcule $P(4 < X \le 7)$.

3.63 Dos componentes electrónicos de un sistema de proyectiles funcionan en conjunto para el éxito de todo el sistema. Sean X y Y la vida en horas de los dos componentes. La densidad conjunta de X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-y(1+x)}, & x, y \ge 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine las funciones de densidad marginal para ambas variables aleatorias.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes duren más de dos horas?

3.64 Una instalación de servicio opera con dos líneas telefónicas. En un día elegido al azar, sea X la proporción de tiempo que la primera línea está en uso, mientras que Y es la proporción de tiempo en que la segunda línea está en uso. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para (X,Y) es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \le x, y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que ninguna línea esté ocupada más de la mitad del tiempo.
b) Calcule la probabilidad de que la primera línea esté ocupada más del 75% del tiempo.

3.65 Sea el número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador durante un intervalo de 5 minutos una variable aleatoria X con la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-2}2^x}{x!}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Determine la probabilidad de que X sea igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
b) Grafique la función de masa de probabilidad para estos valores de x.
c) Determine la función de distribución acumulada para estos valores de X.

3.66 Considere las variables aleatorias X y Y con la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \le x, y \le 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule las distribuciones marginales de X y Y.
b) Calcule $P(X > 0.5, Y > 0.5)$.

3.67 En un proceso industrial se elaboran artículos que se pueden clasificar como defectuosos o no defectuosos. La probabilidad de que un artículo esté defectuoso es 0.1. Se realiza un experimento en el que 5 artículos del proceso se eligen al azar. Sea la variable aleatoria X el número de artículos defectuosos en esta muestra de 5. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X?

3.68 Considere la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x - y}{9}, & 1 < x < 3, \; 1 < y < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule las funciones de densidad marginal de X y Y.
b) ¿X y Y son independientes?
c) Calcule $P(X > 2)$.

3.69 La duración en horas de un componente eléctrico es una variable aleatoria con la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{50}}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine su función de densidad de probabilidad.
b) Determine la probabilidad de que la vida útil de tal componente rebase las 70 horas.

3.70 En una fábrica específica de pantalones un grupo de 10 trabajadores los inspecciona tomando aleatoriamente algunos de la línea de producción. A cada inspector se le asigna un número del 1 al 10. Un comprador selecciona un pantalón para adquirirlo. Sea la variable aleatoria X el número del inspector.
a) Determine una función de masa de probabilidad razonable para X.
b) Grafique la función de distribución acumulada para X.

3.71 La vida en anaquel de un producto es una variable aleatoria que se relaciona con la aceptación por parte del consumidor. Resulta que la vida en anaquel Y, en días, de cierta clase de artículo de panadería tiene la siguiente función de densidad:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0 \le y < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Qué fracción de las rebanadas de este producto que hoy están en exhibición se espera que se vendan en 3 días a partir de hoy?

3.72 El congestionamiento de pasajeros es un problema de servicio en los aeropuertos, en los cuales se instalan trenes para reducir la congestión. Cuando se usa el tren, el tiempo X, en minutos, que toma viajar desde la terminal principal hasta una explanada específica tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \le x \le 10, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que la función de densidad de probabilidad anterior es válida.
b) Calcule la probabilidad de que el tiempo que le toma a un pasajero viajar desde la terminal principal hasta la explanada no exceda los 7 minutos.

3.73 Las impurezas en el lote del producto final de un proceso químico a menudo reflejan un grave problema. A partir de una cantidad considerable de datos recabados en la planta se sabe que la proporción Y de impurezas en un lote tiene una función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} 10(1-y)^9, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que la función de densidad anterior sea válida.
b) Se considera que un lote no es vendible y, por consiguiente, no es aceptable si el porcentaje de impurezas es superior a 60%. Con la calidad del proceso actual, ¿cuál es el porcentaje de lotes que no son aceptables?

3.74 El tiempo Z, en minutos, entre llamadas a un sistema de alimentación eléctrica tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-z/10}, & 0 < z < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en un lapso de 20 minutos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada entre en los primeros 10 minutos después de abrir?

3.75 Un sistema químico que surge de una reacción química tiene dos componentes importantes, entre otros, en una mezcla. La distribución conjunta que describe las proporciones X_1 y X_2 de estos dos componentes está dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & 0 < x_1 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine la distribución marginal de X_1.
b) Determine la distribución marginal de X_2.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que las proporciones del componente generen los resultados $X_1 < 0.2$ y $X_2 > 0.5$?
d) Determine la distribución condicional $f_{X_1|X_2}(x_1 \mid x_2)$.

3.76 Considere la situación del ejercicio de repaso 3.75; pero suponga que la distribución conjunta de las dos proporciones está dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 6x_2, & 0 < x_2 < x_1 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine la distribución marginal $f_{X_1}(x_1)$ de la proporción X_1 y verifique que sea una función de densidad válida.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción X_2 sea menor que 0.5, dado que X_1 es 0.7?

3.77 Considere las variables aleatorias X y Y que representan el número de vehículos que llegan a dos esquinas de calles separadas durante cierto periodo de 2 minutos. Estas esquinas de las calles están bastante cerca una de la otra, así que es importante que los ingenieros de tráfico se ocupen de ellas de manera conjunta si fuera necesario. Se sabe que la distribución conjunta de X y Y es

$$f(x, y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4^{(x+y)}},$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$, y para $y = 0, 1, 2, \ldots$
a) ¿Son independientes las dos variables aleatorias X y Y? Explique su respuesta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, durante el periodo en cuestión, lleguen menos de 4 vehículos a las dos esquinas?

3.78 El comportamiento de series de componentes desempeña un papel importante en problemas de confiabilidad científicos y de ingeniería. Ciertamente la confiabilidad de todo el sistema no es mejor que la del componente más débil de las series. En un sistema de series los componentes funcionan de manera independiente unos de otros. En un sistema particular de tres componentes, la probabilidad de cumplir con la especificación para los componentes 1, 2 y 3, respectivamente, son 0.95, 0.99 y 0.92. ¿Cuál es la probabilidad de que todo el sistema funcione?

3.79 Otro tipo de sistema que se utiliza en trabajos de ingeniería es un grupo de componentes en paralelo o un sistema paralelo. En este enfoque más conservador la probabilidad de que el sistema funcione es mayor que la probabilidad de que cualquier componente funcione. El sistema fallará sólo cuando falle todo el sistema. Considere una situación en la que hay 4 componentes independientes en un sistema paralelo, en la que la probabilidad de operación está dada por

Componente 1: 0.95;	Componente 2: 0.94;
Componente 3: 0.90;	Componente 4: 0.97.

¿Cuál es la probabilidad de que no falle el sistema?

3.80 Considere un sistema de componentes en que hay cinco componentes independientes, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de operación de 0.92. De hecho, el sistema tiene una redundancia preventiva diseñada para que no falle mientras 3 de sus 5 componentes estén en funcionamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione todo el sistema?

3.81 **Proyecto de grupo:** Observe el color de los zapatos de los estudiantes en 5 periodos de clases. Suponga que las categorías de color son rojo, blanco, negro, café y otro. Construya una tabla de frecuencias para cada color.

a) Estime e interprete el significado de la distribución de probabilidad.

b) ¿Cuál es la probabilidad estimada de que en el siguiente periodo de clases un estudiante elegido al azar use un par de zapatos rojos o blancos?

3.5 Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos

En los siguientes capítulos será evidente que las distribuciones de probabilidad representan la estructura mediante la cual las probabilidades que se calculan ayudan a evaluar y a comprender un proceso. Por ejemplo, en el ejercicio de repaso 3.65 la distribución de probabilidad que cuantifica la probabilidad de que haya una carga excesiva durante ciertos periodos podría ser muy útil en la planeación de cualquier cambio en el sistema. El ejercicio de repaso 3.69 describe un escenario donde se estudia el periodo de vida útil de un componente electrónico. Conocer la estructura de la probabilidad para el componente contribuirá de manera significativa al entendimiento de la confiabilidad de un sistema mayor del cual éste forme parte. Además, comprender la naturaleza general de las distribuciones de probabilidad reforzará el conocimiento del concepto **valor-*P***, que se estudió brevemente en el capítulo 1 y que desempeñará un papel destacado al inicio del capítulo 10 y en lo que resta del texto.

Los capítulos 4, 5 y 6 dependen mucho del material cubierto en este capítulo. En el capítulo 4 estudiaremos el significado de **parámetros** importantes en las distribuciones de probabilidad. Tales parametros cuantifican las nociones de **tendencia central** y **variabilidad** en un sistema. De hecho, el conocimiento de tales cantidades, al margen de la distribución completa, puede ofrecer información sobre la naturaleza del sistema. En los capítulos 5 y 6 se examinarán escenarios de ingeniería, biológicos y de ciencia en general que identifican tipos de distribuciones especiales. Por ejemplo, la estructura de la función de probabilidad en el ejercicio de repaso 3.65 se identificará fácilmente bajo ciertas suposiciones que se estudiarán en el capítulo 5. Lo mismo ocurre en el contexto del ejercicio de repaso 3.69, que es un caso especial de problema sobre **tiempo de operación antes de la falla**, cuya función de densidad de probabilidad se estudiará en el capítulo 6.

En lo que concierne a los riesgos potenciales de utilizar el material de este capítulo, la advertencia para el lector sería no interpretar el material más allá de lo que sea evidente. La naturaleza general de la distribución de probabilidad para un fenómeno científico determinado no es obvia a partir de lo que se estudió aquí. La finalidad de este capítulo es que los lectores aprendan a manipular una distribución de probabilidad, no que aprendan a identificar un tipo específico. Los capítulos 5 y 6 avanzan un largo trecho hacia la identificación de acuerdo con la naturaleza general del sistema científico.

Capítulo 4

Esperanza matemática

4.1 Media de una variable aleatoria

En el capítulo 1 estudiamos la media muestral, que es la media aritmética de los datos. Ahora considere la siguiente situación: si dos monedas se lanzan 16 veces y X es el número de caras que resultan en cada lanzamiento, entonces los valores de X pueden ser 0, 1 y 2. Suponga que los resultados del experimento son: cero caras, una cara y dos caras, un total de 4, 7 y 5 veces, respectivamente. El número promedio de caras por lanzamiento de las dos monedas es, entonces,

$$\frac{(0)(4) + (1)(7) + (2)(5)}{16} = 1.06.$$

Éste es un valor promedio de los datos, aunque no es un resultado posible de $\{0, 1, 2\}$. Por lo tanto, un promedio no es necesariamente un resultado posible del experimento. Por ejemplo, es probable que el ingreso mensual promedio de un vendedor no sea igual a alguno de sus cheques de pago mensuales.

Reestructuremos ahora nuestro cálculo del número promedio de caras para tener la siguiente forma equivalente:

$$(0)\left(\frac{4}{16}\right) + (1)\left(\frac{7}{16}\right) + (2)\left(\frac{5}{16}\right) = 1.06.$$

Los números 4/16, 7/16 y 5/16 son las fracciones de los lanzamientos totales que dan como resultado 0, 1 y 2 caras, respectivamente. Tales fracciones también son las frecuencias relativas de los diferentes valores de X en nuestro experimento. Entonces, realmente podemos calcular la media, o el promedio de un conjunto de datos, si conocemos los distintos valores que ocurren y sus frecuencias relativas sin tener conocimiento del número total de observaciones en el conjunto de datos. Por lo tanto, si 4/16 o 1/4 de los lanzamientos dan como resultado cero caras, 7/16 de los lanzamientos dan como resultado una cara y 5/16 dan como resultado dos caras, el número medio de caras por lanzamiento sería 1.06, sin importar si el número total de lanzamientos fue 16, 1000 o incluso 10,000.

Este método de frecuencias relativas se utiliza para calcular el número promedio de caras que esperaríamos obtener a largo plazo por el lanzamiento de dos monedas. A este valor promedio se le conoce como **media de la variable aleatoria** X o **media de la distribución de probabilidad de** X, y se le denota como μ_x o simplemente como μ cuando es evidente a qué variable aleatoria se está haciendo referencia. También es común entre los estadísticos referirse a esta media como la esperanza matemática o el valor esperado de la variable aleatoria X y denotarla como $E(X)$.

Suponiendo que una moneda legal se lanza dos veces, encontramos que el espacio muestral para el experimento es

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Como los 4 puntos muestrales son igualmente probables, se deduce que

$$P(X = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 1) = P(TH) + P(HT) = \frac{1}{2},$$

y

$$P(X = 2) = P(HH) = \frac{1}{4},$$

donde un elemento típico, digamos *TH*, indica que el primer lanzamiento dio como resultado una cruz seguida por una cara en el segundo lanzamiento. Así, estas probabilidades son precisamente las frecuencias relativas para los eventos dados a largo plazo. Por lo tanto,

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Este resultado significa que una persona que lance 2 monedas una y otra vez obtendrá, en promedio, 1 cara por cada lanzamiento.

El método descrito antes para calcular el número esperado de caras cada vez que se lanzan 2 monedas sugiere que la media, o el valor esperado de cualquier variable aleatoria discreta, se puede obtener multiplicando cada uno de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable aleatoria X por su probabilidad correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ y sumando los productos. Esto es cierto, sin embargo, sólo si la variable aleatoria es discreta. En el caso de variables aleatorias continuas la definición de un valor esperado es esencialmente la misma, pero las sumatorias se reemplazan con integrales.

Definición 4.1: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La **media** o **valor esperado** de X es

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

si X es discreta, y

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

si X es continua.

El lector debe advertir que la forma para calcular el valor esperado, o media, que se muestra aquí es diferente del método para calcular la media muestral que se describió en el capítulo 1, donde la media muestral se obtuvo usando los datos. En la esperanza matemática el valor esperado se obtiene usando la distribución de probabilidad.

Sin embargo, la media suele considerarse un valor "central" de la distribución subyacente si se utiliza el valor esperado, como en la definición 4.1.

Ejemplo 4.1: Un inspector de calidad obtiene una muestra de un lote que contiene 7 componentes; el lote contiene 4 componentes buenos y 3 defectuosos. El inspector toma una muestra de 3 componentes. Calcule el valor esperado del número de componentes buenos en esta muestra.

***Solución*:** Sea X el número de componentes buenos en la muestra. La distribución de probabilidad de X es

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \qquad x = 0, 1, 2, 3.$$

Unos cálculos sencillos dan $f(0) = 1/35$, $f(1) = 12/35$, $f(2) = 18/35$ y $f(3) = 4/35$. Por lo tanto,

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{12}{7} = 1.7.$$

De esta manera, si de un lote de 4 componentes buenos y 3 defectuosos, se seleccionara al azar, una y otra vez, una muestra de tamaño 3, ésta contendría en promedio 1.7 componentes buenos.

Ejemplo 4.2: Cierto día un vendedor de una empresa de aparatos médicos tiene dos citas. Considera que en la primera cita tiene 70 por ciento de probabilidades de cerrar una venta, por la cual podría obtener una comisión de \$1000. Por otro lado, cree que en la segunda cita sólo tiene 40 por ciento de probabilidades de cerrar el trato, del cual obtendría \$1500 de comisión. ¿Cuál es su comisión esperada con base en dichas probabilidades? Suponga que los resultados de las citas son independientes.

***Solución*:** En primer lugar sabemos que el vendedor, en las dos citas, puede obtener 4 comisiones totales: \$0, \$1000, \$1500 y \$2500. Necesitamos calcular sus probabilidades asociadas. Mediante la independencia obtenemos

$$f(\$0) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18, \quad f(\$2500) = (0.7)(0.4) = 0.28,$$
$$f(\$1000) = (0.7)(1 - 0.4) = 0.42, \text{ y } \quad f(\$1500) = (1 - 0.7)(0.4) = 0.12.$$

Por lo tanto, la comisión esperada para el vendedor es

$$\begin{aligned} E(X) &= (\$0)(0.18) + (\$1000)(0.42) + (\$1500)(0.12) + (\$2500)(0.28) \\ &= \$1300. \end{aligned}$$

Los ejemplos 4.1 y 4.2 se diseñaron para que el lector comprenda mejor lo que queremos decir con la frase valor esperado de una variable aleatoria. En ambos casos las variables aleatorias son discretas. Seguimos con un ejemplo de variable aleatoria continua, donde un ingeniero se interesa en la *vida media* de cierto tipo de dispositivo electrónico. Ésta es una ilustración del problema *tiempo que transcurre antes de que se presente una falla* que se enfrenta a menudo en la práctica. El valor esperado de la vida del dispositivo es un parámetro importante para su evaluación.

Ejemplo 4.3: Sea X la variable aleatoria que denota la vida en horas de cierto dispositivo electrónico. La función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20{,}000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la vida esperada para esta clase de dispositivo.

***Solución*:** Si usamos la definición 4.1, tenemos

$$\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20{,}000}{x^3}\, dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20{,}000}{x^2}\, dx = 200.$$

Por lo tanto, esperamos que este tipo de dispositivo dure *en promedio* 200 horas.

Consideremos ahora una nueva variable aleatoria $g(X)$, la cual depende de X; es decir, cada valor de $g(X)$ es determinado por el valor de X. Por ejemplo, $g(X)$ podría ser X^2 o $3X - 1$, y siempre que X asuma el valor 2, $g(X)$ toma el valor $g(2)$. En particular, si X es una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $f(x)$, para $x = -1, 0, 1, 2$ y $g(X) = X^2$, entonces,

$$\begin{aligned} P[g(X) = 0] &= P(X = 0) = f(0), \\ P[g(X) = 1] &= P(X = -1) + P(X = 1) = f(-1) + f(1), \\ P[g(X) = 4] &= P(X = 2) = f(2), \end{aligned}$$

así que la distribución de probabilidad de $g(X)$ se escribe como

$g(x)$	0	1	4
$P[g(X) = g(x)]$	$f(0)$	$f(-1) + f(1)$	$f(2)$

Por medio de la definición del valor esperado de una variable aleatoria obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_{g(X)} &= E[g(x)] = 0f(0) + 1[f(-1) + f(1)] + 4f(2) \\ &= (-1)^2 f(-1) + (0)^2 f(0) + (1)^2 f(1) + (2)^2 f(2) = \sum_x g(x) f(x). \end{aligned}$$

Este resultado se generaliza en el teorema 4.1 para variables aleatorias discretas y continuas.

Teorema 4.1: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$$

si X es discreta, y

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

si X es continua.

Ejemplo 4.4: Suponga que el número de automóviles X que pasa por un local de lavado de autos entre las 4:00 P.M. y las 5:00 P.M. de cualquier viernes soleado tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sea $g(X) = 2X - 1$ la cantidad de dinero en dólares que el administrador paga al operador. Calcule las ganancias esperadas del operador en este periodo específico.

***Solución*:** Por el teorema 4.1, el operador puede esperar recibir

$$E[g(X)] = E(2X-1) = \sum_{x=4}^{9}(2x-1)f(x)$$
$$=(7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (11)\left(\frac{1}{4}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right) + (15)\left(\frac{1}{6}\right) + (17)\left(\frac{1}{6}\right) = \$12.67.$$

Ejemplo 4.5: Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de $g(X) = 4X + 3$.

***Solución*:** Por el teorema 4.1 tenemos

$$E(4X+3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2)\, dx = 8.$$

Debemos extender ahora nuestro concepto de esperanza matemática al caso de dos variables aleatorias X y Y con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$.

Definición 4.2: Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X, Y)$ es

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y)$$

si X y Y son discretas, y

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\, dx\, dy$$

si X y Y son continuas.

Es evidente la generalización de la definición 4.2 para el cálculo de la esperanza matemática de funciones de varias variables aleatorias.

Ejemplo 4.6: Sean X y Y variables aleatorias con la distribución de probabilidad conjunta que se indica en la tabla 3.1 de la página 96. Calcule el valor esperado de $g(X, Y) = XY$. Por conveniencia se repite aquí la tabla.

	$f(x, y)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	Totales por renglón
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
Totales por columna		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

***Solución*:** Por la definición 4.2, escribimos

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x, y) \\ &= (0)(0)f(0,0) + (0)(1)f(0,1) \\ &\quad + (1)(0)f(1,0) + (1)(1)f(1,1) + (2)(0)f(2,0) \\ &= f(1,1) = \frac{3}{14}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7: Calcule $E(Y/X)$ para la siguiente función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

***Solución*:** Tenemos

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y(1+3y^2)}{4}\,dxdy = \int_0^1 \frac{y+3y^3}{2}\,dy = \frac{5}{8}.$$

Observe que si $g(X, Y) = X$ en la definición 4.2, tenemos

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_x \sum\limits_y x f(x, y) = \sum\limits_x x g(x) & \text{(caso discreto),} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x)\,dx & \text{(caso continuo),} \end{cases}$$

donde $g(x)$ es la distribución marginal de X. Por lo tanto, para calcular $E(X)$ en un espacio bidimensional, se puede utilizar tanto la distribución de probabilidad conjunta de X y Y, como la distribución marginal de X. De manera similar, definimos

$$E(Y) = \begin{cases} \sum\limits_y \sum\limits_x y f(x, y) = \sum\limits_y y h(y) & \text{(caso discreto),} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y)\,dy & \text{(caso continuo),} \end{cases}$$

donde $h(y)$ es la distribución marginal de la variable aleatoria Y.

Ejercicios

4.1 En el ejercicio 3.13 de la página 92 se presenta la siguiente distribución de probabilidad de X, el número de imperfecciones que hay en cada 10 metros de una tela sintética, en rollos continuos de ancho uniforme

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Calcule el número promedio de imperfecciones que hay en cada 10 metros de esta tela.

4.2 La distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X es

$$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

Calcule la media de X.

4.3 Calcule la media de la variable aleatoria T que representa el total de las tres monedas del ejercicio 3.25 de la página 93.

4.4 Una moneda está cargada de manera que la probabilidad de ocurrencia de una cara es tres veces mayor que la de una cruz. Calcule el número esperado de cruces si esta moneda se lanza dos veces.

4.5 En un juego de azar a una mujer se le pagan \$3 si saca una jota o una reina, y \$5 si saca un rey o un as de una baraja ordinaria de 52 cartas. Si saca cualquier otra carta, pierde. ¿Cuánto debería pagar si el juego es justo?

4.6 A un operador de un local de lavado de autos se le paga de acuerdo con el número de automóviles que lava. Suponga que las probabilidades de que entre las 4:00 p.m. y las 5:00 p.m. de cualquier viernes soleado reciba \$7, \$9, \$11, \$13, \$15 o \$17 son: 1/12, 1/12, 1/4, 1/4, 1/6 y 1/6, respectivamente. Calcule las ganancias esperadas del operador para este periodo específico.

4.7 Si una persona invierte en unas acciones en particular, en un año tiene una probabilidad de 0.3 de obtener una ganancia de \$4000 o una probabilidad de 0.7 de tener una pérdida de \$1000. ¿Cuál es la ganancia esperada de esta persona?

4.8 Suponga que un distribuidor de joyería antigua está interesado en comprar un collar de oro para el que tiene 0.22 de probabilidades de venderlo con \$250 de utilidad; 0.36 de venderlo con \$150 de utilidad; 0.28 de venderlo al costo y 0.14 de venderlo con una pérdida de \$150. ¿Cuál es su utilidad esperada?

4.9 Un piloto privado desea asegurar su avión por \$200,000. La aseguradora estima que la probabilidad de pérdida total es de 0.002, que la probabilidad de una pérdida del 50% es de 0.01 y la probabilidad de una pérdida del 25% es de 0.1. Si se ignoran todas las demás pérdidas parciales, ¿qué prima debería cobrar cada año la aseguradora para tener una utilidad promedio de \$500?

4.10 Dos expertos en calidad de neumáticos examinan lotes de éstos y asignan a cada neumático puntuaciones de calidad en una escala de tres puntos. Sea X la puntuación dada por el experto A y Y la dada por el experto B. La siguiente tabla presenta la distribución conjunta para X y Y.

	$f(x, y)$	y = 1	2	3
x	1	0.10	0.05	0.02
	2	0.10	0.35	0.05
	3	0.03	0.10	0.20

Calcule μ_X y μ_Y.

4.11 La función de densidad de las mediciones codificadas del diámetro de paso de los hilos de un encaje es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de X.

4.12 Si la utilidad para un distribuidor de un automóvil nuevo, en unidades de \$5000, se puede ver como una variable aleatoria X que tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la utilidad promedio por automóvil.

4.13 La función de densidad de la variable aleatoria continua X, el número total de horas que una familia utiliza una aspiradora durante un año, en unidades de 100 horas, se da en el ejercicio 3.7 de la página 92 como

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el número promedio de horas por año que las familias utilizan sus aspiradoras.

4.14 Calcule la proporción X de personas que se podría esperar que respondieran a cierta encuesta que se envía por correo, si X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.15 Suponga que dos variables aleatorias (X, Y) están distribuidas de manera uniforme en un círculo con radio a. Entonces, la función de densidad de probabilidad conjunta es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & x^2 + y^2 \leq a^2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule μ_X, el valor esperado de X.

4.16 Suponga que usted inspecciona un lote de 1000 bombillas de luz, entre las cuales hay 20 defectuosas, y elige al azar dos bombillas del lote sin reemplazo. Sean

$$X_1 = \begin{cases} 1, \text{ si la primera bombilla está defectuosa,} \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, \text{ si la segunda bombilla está defectuosa,} \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que al menos una de las bombillas elegidas esté defectuosa. [*Sugerencia*: Calcule $P(X_1 + X_2 = 1)$.]

4.17 Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	-3	6	9
$f(x)$	1/6	1/2	1/3

Calcule $\mu_{g(X)}$, donde $g(X) = (2X + 1)^2$.

4.18 Calcule el valor esperado de la variable aleatoria $g(X) = X^2$, donde X tiene la distribución de probabilidad del ejercicio 4.2.

4.19 Una empresa industrial grande compra varios procesadores de textos nuevos al final de cada año; el número exacto depende de la frecuencia de reparaciones del año anterior. Suponga que el número de procesadores de textos, X, que se compran cada año tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/10	3/10	2/5	1/5

Si el costo del modelo deseado es de $1200 por unidad y al final del año la empresa obtiene un descuento de $50X^2$ dólares, ¿cuánto espera gastar esta empresa en nuevos procesadores de textos durante este año?

4.20 Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de $g(X) = e^{2X/3}$.

4.21 ¿Cuál es la utilidad promedio por automóvil que obtiene un distribuidor, si la utilidad en cada uno está dada por $g(X) = X^2$, donde X es una variable aleatoria que tiene la función de densidad del ejercicio 4.12?

4.22 El periodo de hospitalización, en días, para pacientes que siguen el tratamiento para cierto tipo de trastorno renal es una variable aleatoria $Y = X + 4$, donde X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el número promedio de días que una persona permanece hospitalizada con el fin de seguir el tratamiento para dicha enfermedad.

4.23 Suponga que X y Y tienen la siguiente función de probabilidad conjunta:

$f(x, y)$		$x = 2$	$x = 4$
y	1	0.10	0.15
	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

a) Calcule el valor esperado de $g(X, Y) = XY^2$.
b) Calcule μ_X y μ_Y.

4.24 Remítase a las variables aleatorias cuya distribución de probabilidad conjunta se da en el ejercicio 3.39 de la página 105 y
a) calcule $E(X^2Y - 2XY)$;
b) calcule $\mu_X - \mu_Y$.

4.25 Remítase a las variables aleatorias cuya distribución de probabilidad conjunta se da en el ejercicio 3.51 de la página 106 y calcule la media para el número total de jotas y reyes cuando se sacan 3 cartas, sin reemplazo, de las 12 cartas mayores de una baraja ordinaria de 52 cartas.

4.26 Sean X y Y las siguientes variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x,\ y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

4.27 En el ejercicio 3.27 de la página 93 una función de densidad está dada por el tiempo que tarda en fallar un componente importante de un reproductor de DVD. Calcule el número medio de horas antes de que empiece a fallar el componente y, por lo tanto, el reproductor de DVD.

4.28 Considere la información del ejercicio 3.28 de la página 93. El problema tiene que ver con el peso, en onzas, del producto que contiene una caja de cereal con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & 23.75 \leq x \leq 26.25, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Grafique la función de densidad.
b) Calcule el valor esperado o peso medio en onzas.
c) ¿Se sorprende de su respuesta en *b*)? Explique lo que responda.

4.29 El ejercicio 3.29 de la página 93 se refiere a una importante distribución del tamaño de las partículas caracterizada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Grafique la función de densidad.
b) Determine el tamaño medio de la partícula.

4.30 En el ejercicio 3.31 de la página 94 la distribución del tiempo que transcurre antes de que una lavadora requiera una reparación mayor fue dada como

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Cuál es la media de población del tiempo que transcurre antes de requerir la reparación?

4.31 Considere el ejercicio 3.32 de la página 94.
a) ¿Cuál es la proporción media del presupuesto asignado para el control ambiental y de la contaminación?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar tenga una proporción asignada para el control ambiental y de la contaminación que exceda la media de la población dada en *a*)?

4.32 En el ejercicio 3.13 de la página 92 la distribución del número de imperfecciones en cada 10 metros de tela sintética fue dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

a) Grafique la función de probabilidad.
b) Calcule el número de imperfecciones esperado $E(X) = \mu$.
c) Calcule $E(X^2)$.

4.2 Varianza y covarianza de variables aleatorias

La media o valor esperado de una variable aleatoria X es de especial importancia en estadística porque describe en dónde se centra la distribución de probabilidad. Sin embargo, la media por sí misma no ofrece una descripción adecuada de la forma de la distribución. También se necesita clasificar la variabilidad en la distribución. En la figura 4.1 tenemos los histogramas de dos distribuciones de probabilidad discretas con la misma media $\mu = 2$, pero que difieren de manera considerable en la variabilidad o dispersión de sus observaciones sobre la media.

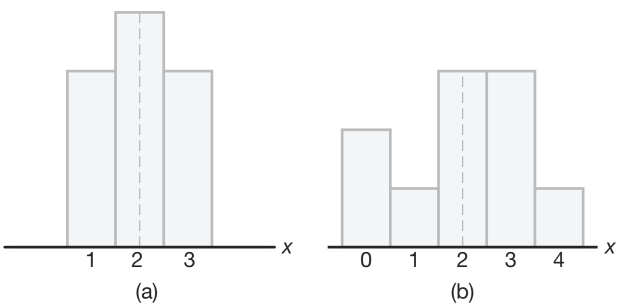

Figura 4.1: Distribuciones con medias iguales y dispersiones diferentes.

La medida de variabilidad más importante de una variable aleatoria X se obtiene aplicando el teorema 4.1 con $g(X) = (X - \mu)^2$. A esta cantidad se le denomina **varianza de la variable aleatoria** X o **varianza de la distribución de probabilidad de** X y se denota como Var(X), o con el símbolo σ_X^2, o simplemente como σ^2 cuando es evidente a qué variable aleatoria se está haciendo referencia.

Definición 4.3: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ. La varianza de X es

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x), \quad \text{si } X \text{ es discreta, y}$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx, \quad \text{si } X \text{ es continua.}$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ, se llama **desviación estándar** de X.

La cantidad $x - \mu$ en la definición 4.3 se llama **desviación de una observación** respecto a su media. Como estas desviaciones se elevan al cuadrado y después se promedian, σ^2 será mucho menor para un conjunto de valores x que estén cercanos a μ, que para un conjunto de valores que varíe de forma considerable de μ.

Ejemplo 4.8: Suponga que la variable aleatoria X representa el número de automóviles que se utilizan con propósitos de negocios oficiales en un día de trabajo dado. La distribución de probabilidad para la empresa A [figura 4.1(a)] es

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

y para la empresa B [figura 4.1(b)] es

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Demuestre que la varianza de la distribución de probabilidad para la empresa B es mayor que la de la empresa A.

***Solución*:** Para la empresa A encontramos que

$$\mu_A = E(X) = (1)(0.3) + (2)(0.4) + (3)(0.3) = 2.0,$$

y entonces

$$\sigma_A^2 = \sum_{x=1}^{3} (x - 2)^2 = (1 - 2)^2(0.3) + (2 - 2)^2(0.4) + (3 - 2)^2(0.3) = 0.6.$$

Para la empresa B tenemos

$$\mu_B = E(X) = (0)(0.2) + (1)(0.1) + (2)(0.3) + (3)(0.3) + (4)(0.1) = 2.0,$$

y entonces

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 &= \sum_{x=0}^{4} (x - 2)^2 f(x)\\ &= (0 - 2)^2(0.2) + (1 - 2)^2(0.1) + (2 - 2)^2(0.3)\\ &\quad + (3 - 2)^2(0.3) + (4 - 2)^2(0.1) = 1.6.\end{aligned}$$

Es evidente que la varianza del número de automóviles que se utilizan con propósitos de negocios oficiales es mayor para la empresa B que para la empresa A.

Una fórmula alternativa que se prefiere para calcular σ^2, que a menudo simplifica los cálculos, se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.2: La varianza de una variable aleatoria X es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

***Prueba*:** Para el caso discreto escribimos

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x).$$

Como $\mu = \sum_x x f(x)$ por definición, y $\sum_x f(x) = 1$ para cualquier distribución de probabilidad discreta, se deduce que

$$\sigma^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Para el caso continuo la demostración es la misma paso a paso, reemplazando las sumatorias por integrales.

Ejemplo 4.9: Suponga que la variable aleatoria X representa el número de partes defectuosas de una máquina cuando de una línea de producción se obtiene una muestra de tres partes y se somete a prueba. La siguiente es la distribución de probabilidad de X.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Utilice el teorema 4.2 y calcule σ^2.

***Solución*:** Primero calculamos

$$\mu = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61.$$

Luego,

$$E(X^2) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87.$$

Por lo tanto,

$$\sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979.$$

Ejemplo 4.10: La demanda semanal de una bebida para una cadena local de tiendas de abarrotes, en miles de litros, es una variable aleatoria continua X que tiene la siguiente densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la media y la varianza de X.

***Solución*:** Al calcular $E(X)$ y $E(X^2)$ tenemos

$$\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)\,dx = \frac{5}{3}$$

y

$$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)\,dx = \frac{17}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Hasta el momento la varianza o la desviación estándar sólo tiene significado cuando comparamos dos o más distribuciones que tienen las mismas unidades de medida. Por lo tanto, podemos comparar las varianzas de las distribuciones de contenido, medido en litros, de botellas de jugo de naranja de dos empresas, y el valor más grande indicaría la empresa cuyo producto es más variable o menos uniforme. No tendría caso comparar la varianza de una distribución de estaturas con la varianza de una distribución de calificaciones de aptitud. En la sección 4.4 mostramos cómo se utiliza la desviación estándar para describir una sola distribución de observaciones.

Extenderemos ahora nuestro concepto de varianza de una variable aleatoria X para incluir también variables aleatorias relacionadas con X. Para la variable aleatoria $g(X)$ la varianza se denotará por $\sigma^2_{g(X)}$ y se calculará empleando el siguiente teorema.

Teorema 4.3: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)$$

si X es discreta, y

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)\,dx$$

si X es continua.

***Prueba*:** Como $g(X)$ es en sí misma una variable aleatoria con media $\mu_{g(X)}$, como se define en el teorema 4.1, de la definición 4.3 se deduce que

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]\}.$$

Ahora bien, la demostración se completa aplicando nuevamente el teorema 4.1 a la variable aleatoria $[g(X) - \mu_{g(X)}]^2$.

Ejemplo 4.11: Calcule la varianza de $g(X) = 2X + 3$, donde X es una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

***Solución*:** Primero se calcula la media de la variable aleatoria $2X + 3$. De acuerdo con el teorema 4.1,

$$\mu_{2X+3} = E(2X + 3) = \sum_{x=0}^{3} (2x + 3)f(x) = 6.$$

Ahora, usando el teorema 4.3, tenemos

$$\sigma^2_{2X+3} = E\{[(2X + 3) - \mu_{2x+3}]^2\} = E[(2X + 3 - 6)^2]$$
$$= E(4X^2 - 12X + 9) = \sum_{x=0}^{3}(4x^2 - 12x + 9)f(x) = 4.$$

Ejemplo 4.12: Sea X una variable aleatoria que tiene la función de densidad dada en el ejemplo 4.5 de la página 115. Calcule la varianza de la variable aleatoria $g(X) = 4X + 3$.

***Solución*:** En el ejemplo 4.5 encontramos que $\mu_{4X+3} = 8$. Ahora bien, usando el teorema 4.3,

$$\sigma^2_{4X+3} = E\{[(4X + 3) - 8]^2\} = E[(4X - 5)^2]$$
$$= \int_{-1}^{2} (4x - 5)^2 \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (16x^4 - 40x^3 + 25x^2)\, dx = \frac{51}{5}.$$

Si $g(X, Y) = (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$, donde $\mu_X = E(X)$ y $\mu_Y = E(Y)$, la definición 4.2 da un valor esperado denominado **covarianza** de X y Y, que se denota por σ_{XY} o $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Definición 4.4: Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La covarianza de X y Y es

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_{x}\sum_{y}(x - \mu_X)(y - \mu_y)f(x, y)$$

si X y Y son discretas, y

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_y)f(x, y)\, dx\, dy$$

si X y Y son continuas.

La covarianza entre dos variables aleatorias es una medida de la naturaleza de la asociación entre ambas. Si valores grandes de X a menudo dan como resultado valores grandes de Y, o valores pequeños de X, dan como resultado valores pequeños de Y, $X - \mu_X$ positiva con frecuencia dará como resultado $Y - \mu_Y$ positiva, y $X - \mu_X$ negativa a menudo dará como resultado $Y - \mu_Y$ negativa. Por consiguiente, el producto $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ tenderá a ser positivo. Por otro lado, si con frecuencia valores grandes de X dan como resultado valores pequeños de Y, entonces el producto $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ tenderá a ser negativo. El *signo* de la covarianza indica si la relación entre dos variables aleatorias dependientes es positiva o negativa. Cuando X y Y son estadísticamente independientes, se puede demostrar que la covarianza es cero (véase el corolario 4.5). Lo opuesto, sin embargo, por lo general no es cierto. Dos variables pueden tener covarianza cero y aun así no ser estadísticamente independientes. Observe que la covarianza sólo describe la relación *lineal* entre dos variables aleatorias. Por consiguiente, si una covarianza entre X y Y es cero, X y Y podrían tener una relación no lineal, lo cual significa que no necesariamente son independientes.

La fórmula alternativa que se prefiere para σ_{XY} se establece en el teorema 4.4.

Teorema 4.4: La covarianza de dos variables aleatorias X y Y, con medias μ_X y μ_Y, respectivamente, está dada por

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y .$$

***Prueba*:** Para el caso discreto escribimos

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\\ &= \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) - \mu_X \sum_x \sum_y y f(x,y)\\ &\quad - \mu_Y \sum_x \sum_y x f(x,y) + \mu_X \mu_Y \sum_x \sum_y f(x,y).\end{aligned}$$

Dado que

$$\mu_X = \sum_x x f(x,y), \quad \mu_Y = \sum_y y f(x,y), \text{ y } \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

para cualquier distribución discreta conjunta se deduce que

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

Para el caso continuo la demostración es idéntica, pero las sumatorias se reemplazan por integrales. ∎

Ejemplo 4.13: En el ejemplo 3.14 de la página 95 se describe una situación acerca del número de repuestos azules X y el número de repuestos rojos Y. Cuando de cierta caja se seleccionan dos repuestos para bolígrafo al azar y la distribución de probabilidad conjunta es la siguiente,

	$f(x, y)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$h(y)$
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
	$g(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Calcule la covarianza de X y Y.

***Solución*:** Del ejemplo 4.6 vemos que $E(XY) = 3/14$. Ahora bien,

$$\mu_X = \sum_{x=0}^{2} xg(x) = (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4},$$

y

$$\mu_Y = \sum_{y=0}^{2} yh(y) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{56}.$$

Ejemplo 4.14: La fracción X de corredores y la fracción Y de corredoras que compiten en carreras de maratón se describen mediante la función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la covarianza de X y Y.

***Solución*:** Primero calculamos las funciones de densidad marginal. Éstas son

$$g(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$h(y) = \begin{cases} 4y(1 - y^2), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

A partir de las funciones de densidad marginal dadas, calculamos

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 4x^4 \, dx = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \mu_Y = \int_0^1 4y^2(1 - y^2) \, dy = \frac{8}{15}.$$

De las funciones de densidad conjunta dadas arriba, tenemos

$$E(XY) = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y^2 \, dx \, dy = \frac{4}{9}.$$

Entonces,

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{225}.$$

Aunque la covarianza entre dos variables aleatorias brinda información respecto de la naturaleza de la relación, la magnitud de σ_{XY} *no indica nada respecto a la fuerza de la relación,* ya que σ_{XY} depende de la escala. Su magnitud dependerá de las unidades que se utilicen para medir X y Y. Hay una versión de la covarianza sin escala que se denomina **coeficiente de correlación** y se utiliza ampliamente en estadística.

Definición 4.5: Sean X y Y variables aleatorias con covarianza σ_{XY} y desviaciones estándar σ_X y σ_Y, respectivamente. El coeficiente de correlación de X y Y es

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Debería quedar claro para el lector que ρ_{XY} no tiene las unidades de X y Y. El coeficiente de correlación satisface la desigualdad $-1 \le \rho_{XY} \le 1$. Toma un valor de cero cuando $\sigma_{XY} = 0$. Donde hay una dependencia lineal exacta, digamos $Y \equiv a + bX$, $\rho_{XY} = 1$ si

$b > 0$ y $\rho_{XY} = -1$ si $b < 0$. (Véase el ejercicio 4.48). En el capítulo 12, donde examinaremos la regresión lineal, analizamos más a fondo el coeficiente de correlación.

Ejemplo 4.15: Calcule el coeficiente de correlación entre X y Y en el ejemplo 4.13.

***Solución*:** Dado que

$$E(X^2) = (0^2)\left(\frac{5}{14}\right) + (1^2)\left(\frac{15}{28}\right) + (2^2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{27}{28}$$

y

$$E(Y^2) = (0^2)\left(\frac{15}{28}\right) + (1^2)\left(\frac{3}{7}\right) + (2^2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{4}{7},$$

obtenemos

$$\sigma_X^2 = \frac{27}{28} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{112} \text{ y } \sigma_Y^2 = \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{28}.$$

Por lo tanto, el coeficiente de correlación entre X y Y es

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-9/56}{\sqrt{(45/112)(9/28)}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ejemplo 4.16: Calcule el coeficiente de correlación entre X y Y en el ejemplo 4.14.

***Solución*:** Dado que

$$E(X^2) = \int_0^1 4x^5\, dx = \frac{2}{3} \text{ y } E(Y^2) = \int_0^1 4y^3(1-y^2)\, dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

concluimos que

$$\sigma_X^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75} \text{ y } \sigma_Y^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}.$$

Por lo tanto,

$$\rho_{XY} = \frac{4/225}{\sqrt{(2/75)(11/225)}} = \frac{4}{\sqrt{66}}.$$

Observe que, aunque la covarianza en el ejemplo 4.15 tiene mayor magnitud (sin importar el signo) que la del ejemplo 4.16, la relación entre las magnitudes de los coeficientes de correlación en estos dos ejemplos es exactamente la inversa. Esto es evidencia de que no debemos basarnos en la magnitud de la covarianza para determinar la fuerza de la relación.

Ejercicios

4.33 Use la definición 4.3 de la página 120 para encontrar la varianza de la variable aleatoria X del ejercicio 4.7 de la página 117.

4.34 Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	-2	3	5
$f(x)$	0.3	0.2	0.5

Calcule la desviación estándar de X.

4.35 La variable aleatoria X, que representa el número de errores por 100 líneas de código de programación, tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.01	0.25	0.4	0.3	0.04

Utilice el teorema 4.2 de la página 121 para calcular la varianza de X.

4.36 Suponga que las probabilidades de que 0, 1, 2 o 3 fallas de energía eléctrica afecten cierta subdivisión en cualquier año dado son 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1, respectivamente. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria X que representa el número de fallas de energía que afectan esta subdivisión.

4.37 La utilidad que obtiene un distribuidor, en unidades de \$5000, al vender un automóvil nuevo es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad que se presenta en el ejercicio 4.12 de la página 117. Calcule la varianza de X.

4.38 La proporción de personas que responden cierta encuesta que se manda por correo es una variable aleatoria X, la cual tiene la función de densidad del ejercicio 4.14 de la página 117. Calcule la varianza de X.

4.39 El número total de horas que una familia utiliza una aspiradora en un año, en unidades de 100 horas, es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad dada en el ejercicio 4.13 de la página 117. Calcule la varianza de X.

4.40 Remítase al ejercicio 4.14 de la página 117 y calcule $\sigma^2_{g(X)}$ para la función $g(X) = 3X^2 + 4$.

4.41 Calcule la desviación estándar de la variable aleatoria $g(X) = (2X + 1)^2$ del ejercicio 4.17 en la página 118.

4.42 Utilice los resultados del ejercicio 4.21 de la página 118 y calcule la varianza de $g(X) = X^2$, donde X es una variable aleatoria que tiene la función de densidad del ejercicio 4.12 de la página 117.

4.43 El tiempo que transcurre, en minutos, para que un avión obtenga vía libre para despegar en cierto aeropuerto es una variable aleatoria $Y = 3X - 2$, donde X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria Y.

4.44 Calcule la covarianza de las variables aleatorias X y Y del ejercicio 3.39 de la página 105.

4.45 Calcule la covarianza de las variables aleatorias X y Y del ejercicio 3.49 de la página 106.

4.46 Calcule la covarianza de las variables aleatorias X y Y del ejercicio 3.44 de la página 105.

4.47 Calcule la covarianza de las variables aleatorias X y Y cuya función de densidad conjunta está dada en el ejercicio 3.40 de la página 105.

4.48 Dada una variable aleatoria X, con desviación estándar σ_X y una variable aleatoria $Y = a + bX$, demuestre que si $b < 0$, el coeficiente de correlación $\rho_{XY} = -1$, y si $b > 0$, $\rho_{XY} = 1$.

4.49 Considere la situación del ejercicio 4.32 de la página 119. La distribución del número de imperfecciones por cada 10 metros de tela sintética está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Calcule la varianza y la desviación estándar del número de imperfecciones.

4.50 En una tarea de laboratorio, si el equipo está funcionando, la función de densidad del resultado observado X es

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la varianza y la desviación estándar de X.

4.51 Determine el coeficiente de correlación entre X y Y para las variables aleatorias X y Y del ejercicio 3.39 de la página 105.

4.52 Las variables aleatorias X y Y tienen la siguiente distribución conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x \le y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine el coeficiente de correlación entre X y Y.

4.3 Medias y varianzas de combinaciones lineales de variables aleatorias

Ahora estudiaremos algunas propiedades útiles que simplificarán los cálculos de las medias y las varianzas de variables aleatorias que aparecen en los siguientes capítulos. Estas propiedades nos permitirán ocuparnos de las esperanzas matemáticas en términos de otros parámetros que ya conocemos o que ya calculamos con facilidad. Todos los resultados que presentamos aquí son válidos para variables aleatorias continuas y discretas. Las demostraciones se dan sólo para el caso continuo. Comenzamos con un teorema y dos corolarios que deberían ser, de forma intuitiva, razonables para el lector.

Teorema 4.5: Si a y b son constantes, entonces,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

***Prueba*:** Por la definición de valor esperado,

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)\, dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

La primera integral de la derecha es $E(X)$ y la segunda integral es igual a 1. Por lo tanto,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Corolario 4.1: Al establecer que $a = 0$ vemos que $E(b) = b$.

Corolario 4.2: Al establecer que $b = 0$ vemos que $E(aX) = aE(X)$.

Ejemplo 4.17: Aplique el teorema 4.5 a la variable aleatoria discreta $f(X) = 2X - 1$ para resolver de nuevo el ejemplo 4.4 de la página 115.

***Solución*:** De acuerdo con el teorema 4.5, escribimos

$$E(2X - 1) = 2E(X) - 1.$$

Ahora,

$$\mu = E(X) = \sum_{x=4}^{9} x f(x)$$
$$= (4)\left(\frac{1}{12}\right) + (5)\left(\frac{1}{12}\right) + (6)\left(\frac{1}{4}\right) + (7)\left(\frac{1}{4}\right) + (8)\left(\frac{1}{6}\right) + (9)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{41}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\mu_{2X-1} = (2)\left(\frac{41}{6}\right) - 1 = \$12.67,$$

como antes.

Ejemplo 4.18: Para resolver de nuevo el ejemplo 4.5 de la página 115 aplique el teorema 4.5 a la variable aleatoria continua $g(X) = 4X + 3$.

***Solución*:** En el ejemplo 4.5 utilizamos el teorema 4.5 para escribir

$$E(4X + 3) = 4E(X) + 3.$$

Ahora,

$$E(X) = \int_{-1}^{2} x\left(\frac{x^2}{3}\right) dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3}\, dx = \frac{5}{4}.$$

Por lo tanto,

$$E(4X + 3) = (4)\left(\frac{5}{4}\right) + 3 = 8,$$

como antes.

Teorema 4.6: El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de una variable aleatoria X es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Es decir,

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)].$$

***Prueba*:** Por definición,

$$\begin{aligned} E[g(X) \pm h(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) \pm h(x)] f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx \\ &= E[g(X)] \pm E[h(X)]. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.19: Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Calcule el valor esperado de $Y = (X - 1)^2$.

***Solución*:** Si aplicamos el teorema 4.6 a la función $Y = (X - 1)^2$, podemos escribir

$$E[(X - 1)^2] = E(X^2 - 2X + 1) = E(X^2) - 2E(X) + E(1).$$

A partir del corolario 4.1, $E(1) = 1$, y por cálculo directo

$$E(X) = (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)(0) + (3)\left(\frac{1}{6}\right) = 1 \text{ y}$$

$$E(X^2) = (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (4)(0) + (9)\left(\frac{1}{6}\right) = 2.$$

En consecuencia,

$$E[(X - 1)^2] = 2 - (2)(1) + 1 = 1.$$

Ejemplo 4.20: La demanda semanal de cierta bebida en una cadena de tiendas de abarrotes, en miles de litros, es una variable aleatoria continua $g(X) = X^2 + X - 2$, donde X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado para la demanda semanal de la bebida.

Solución: Por medio del teorema 4.6, escribimos

$$E(X^2 + X - 2) = E(X^2) + E(X) - E(2).$$

A partir del corolario 4.1, $E(2) = 2$, y por integración directa,

$$E(X) = \int_1^2 2x(x-1)\, dx = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad E(X^2) = \int_1^2 2x^2(x-1)\, dx = \frac{17}{6}.$$

Entonces,

$$E(X^2 + X - 2) = \frac{17}{6} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{2},$$

así que la demanda semanal promedio de la bebida en esta cadena de tiendas de abarrotes es de 2500 litros.

Suponga que tenemos dos variables aleatorias X y Y con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. Dos propiedades adicionales que serán muy útiles en los capítulos siguientes incluyen los valores esperados de la suma, la diferencia y el producto de estas dos variables aleatorias. Sin embargo, comenzaremos por demostrar un teorema sobre el valor esperado de la suma o diferencia de funciones de las variables dadas. Por supuesto, tan sólo se trata de una extensión del teorema 4.6.

Teorema 4.7: El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de las variables aleatorias X y Y es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Es decir,

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)].$$

***Prueba*:** Por la definición 4.2,

$$\begin{aligned} E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [g(x, y) \pm h(x, y)] f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy \pm \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y)\, dx\, dy \\ &= E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]. \end{aligned}$$

Corolario 4.3: Si establecemos que $g(X, Y) = g(X)$ y $h(X, Y) = h(Y)$, vemos que

$$E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)].$$

Corolario 4.4: Si establecemos que $g(X, Y) = X$ y $h(X, Y) = Y$, vemos que

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y].$$

Si X representa la producción diaria de algún artículo de la máquina A y Y la producción diaria del mismo artículo de la máquina B, entonces $X + Y$ representa la cantidad total de artículos que ambas máquinas producen diariamente. El corolario 4.4 establece que la producción diaria promedio para ambas máquinas es igual a la suma de la producción diaria promedio de cada máquina.

Teorema 4.8: Sean X y Y dos variables aleatorias independientes. Entonces,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

***Prueba*:** Por la definición 4.2,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy.$$

Como X y Y son independientes, podemos escribir

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

donde $g(x)$ y $h(y)$ son las distribuciones marginales de X y Y, respectivamente. En consecuencia,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\, dy \\ &= E(X)\, E(Y). \end{aligned}$$

Para variables discretas el teorema 4.8 se ilustra mediante un experimento en el que se lanzan un dado verde y uno rojo. La variable aleatoria X representa el resultado de lanzar el dado verde y la variable aleatoria Y el resultado de lanzar el dado rojo. Entonces XY representa el producto de los números que resultan de lanzar el par de dados. A la larga el promedio de los productos de los números es igual al producto del número promedio que resulta de lanzar el dado verde y el número promedio que resulta de lanzar el dado rojo.

Corolario 4.5: Sean X y Y dos variables aleatorias independientes. Entonces, $\sigma_{XY} = 0$.

***Prueba*:** La demostración se puede realizar utilizando los teoremas 4.4 y 4.8.

Ejemplo 4.21: Se sabe que la proporción de galio y arseniuro no afecta el funcionamiento de las obleas de arseniuro de galio que son los principales componentes de los circuitos integrados. Denotemos con X la proporción de galio a arseniuro y con Y el porcentaje de obleas funcionales producidas durante una hora. X y Y son variables aleatorias independientes con la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demuestre que $E(XY) = E(X)E(Y)$, como sugiere el teorema 4.8.

***Solución*:** Por definición,

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x^2 y(1+3y^2)}{4}\, dxdy = \frac{5}{6},\ E(X) = \frac{4}{3}, \quad \text{y} \quad E(Y) = \frac{5}{8}.$$

Por lo tanto,

$$E(X)E(Y) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{6} = E(XY).$$

Concluimos esta sección con la demostración de un teorema y la presentación de varios corolarios que son útiles para calcular varianzas o desviaciones estándar.

Teorema 4.9: Si X y Y son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$, y a, b y c son constantes, entonces

$$\sigma^2_{aX+bY+c} \quad a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}.$$

***Prueba*:** Por definición, $\sigma^2_{aX+bY+c} = E\{[(aX + bY + c) - \mu_{aX+bY+c}]^2\}$. Entonces,

$$\mu_{aX+bY+c} = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c = a\mu_X + b\mu_Y + c,$$

si utilizamos el corolario 4.4 y después el corolario 4.2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{aX+bY+c} &= E\{[a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y)]^2\} \\
&= a^2 E[(X - \mu_X)^2] + b^2 E[(Y - \mu_Y)^2] + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\
&= a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}.
\end{aligned}$$

Si utilizamos el teorema 4.9, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.6: Si se establece que $b = 0$, vemos que

$$\sigma^2_{aX+c} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$$

Corolario 4.7: Si se establece que $a = 1$ y $b = 0$, vemos que

$$\sigma^2_{X+c} = \sigma^2_X = \sigma^2.$$

Corolario 4.8: Si se establece que $b = 0$ y $c = 0$, vemos que

$$\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$$

Los corolarios 4.6 y 4.7 establecen que la varianza no cambia si se suma o se resta una constante a una variable aleatoria. La suma o resta de una constante simplemente corre los valores de X a la derecha o a la izquierda, pero no cambia su variabilidad. Sin embargo, si una variable aleatoria se multiplica por una constante o se divide entre ésta, entonces los corolarios 4.6 y 4.8 establecen que la varianza se multiplica por el cuadrado de la constante o se divide entre éste.

Corolario 4.9: Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y.$$

El resultado que se establece en el corolario 4.9 se obtiene a partir del teorema 4.9 y recurriendo al corolario 4.5.

Corolario 4.10: Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces,

$$\sigma^2_{aX-bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y.$$

El corolario 4.10 se obtiene reemplazando b por $-b$ en el corolario 4.9. Al generalizar a una combinación lineal de n variables aleatorias independientes, resulta el corolario 4.11.

Corolario 4.11: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma^2_{a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n} = a_1^2\sigma^2_{X_1} + a_2^2\sigma^2_{X_2} + \cdots + a_n^2\sigma^2_{X_n}.$$

Ejemplo 4.22: Si X y Y son variables aleatorias con varianzas $\sigma^2_X = 2$ y $\sigma^2_Y = 4$ y covarianza $\sigma_{XY} = -2$, calcule la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 4Y + 8$.

***Solución*:**

$$\begin{aligned}\sigma^2_Z &= \sigma^2_{3X-4Y+8} = \sigma^2_{3X-4Y} && \text{(por el corolario 4.6)}\\ &= 9\sigma^2_x + 16\sigma^2_y - 24\sigma_{xy} && \text{(por el teorema 4.9)}\\ &= (9)(2) + (16)(4) - (24)(-2) = 130.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.23: Denotemos con X y Y la cantidad de dos tipos diferentes de impurezas en un lote de cierto producto químico. Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes con varianzas $\sigma^2_X = 2$ y $\sigma^2_Y = 3$. Calcule la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 2Y + 5$.

***Solución*:**

$$\begin{aligned}\sigma^2_Z &= \sigma^2_{3X-2Y+5} = \sigma^2_{3X-2Y} && \text{(por el corolario 4.6)}\\ &= 9\sigma^2_x + 4\sigma^2_y && \text{(por el corolario 4.10)}\\ &= (9)(2) + (4)(3) = 30.\end{aligned}$$

¿Qué sucede si la función es no lineal?

En las secciones anteriores estudiamos propiedades de funciones lineales de variables aleatorias por razones muy importantes. En los capítulos 8 a 15 se estudiarán y ejemplificarán problemas de la vida real, en los cuales el analista construye un **modelo lineal** para describir un conjunto de datos y, en consecuencia, describir o explicar el comportamiento de un fenómeno científico. Así que resulta natural que encontremos los valores esperados y las varianzas de combinaciones lineales de variables aleatorias. Sin embargo, hay situaciones en que las propiedades de las funciones **no lineales** de variables aleatorias se vuelven importantes. En efecto, hay muchos fenómenos científicos de naturaleza no lineal, donde el modelado estadístico que utiliza funciones no lineales adquiere gran importancia. De hecho, en el capítulo 12 se estudia el modelado de los que se han convertido en modelos estándar no lineales. En realidad, incluso una función simple de variables aleatorias, como $Z = X/Y$, ocurre con bastante frecuencia en la práctica, y a diferencia del caso del valor esperado de las combinaciones lineales de variables aleatorias, no hay una simple regla general. Por ejemplo,

$$E(Z) = E(X/Y) \neq E(X)/E(Y),$$

excepto en circunstancias muy especiales.

El material dado por los teoremas 4.5 a 4.9 y los diversos corolarios son sumamente útiles, ya que no hay restricciones sobre la forma de la densidad o las funciones de probabilidad, aparte de la propiedad de independencia cuando ésta se requiere, como en los corolarios posteriores al teorema 4.9. Para ilustrar considere el ejemplo 4.23; la varianza de $Z = 3X - 2Y + 5$ no requiere restricciones en las distribuciones de las cantidades X y Y de los dos tipos de impurezas. Sólo se requiere la independencia entre X y Y. Por consiguiente, disponemos de la capacidad de calcular $\mu_{g(X)}$ y $\sigma^2_{g(X)}$ para cualquier función $g(\cdot)$ a partir de los principios iniciales establecidos en los teoremas 4.1 y 4.3, donde se supone que se **conoce** la distribución $f(x)$ correspondiente. Los ejercicios 4.40, 4.41 y 4.42, entre otros, ilustran el uso de tales teoremas. De modo que, si $g(x)$ es una función no lineal y se conoce la función de densidad (o función de probabilidad en el caso discreto), $\mu_{g(X)}$ y $\sigma^2_{g(X)}$ pueden evaluarse con exactitud. No obstante, como en el caso de las reglas dadas para combinaciones lineales, ¿habría reglas para funciones no lineales que se puedan utilizar cuando no se conoce la forma de la distribución de las variables aleatorias pertinentes?

En general, suponga que X es una variable aleatoria y que $Y = g(x)$. La solución general para $E(Y)$ o $\text{Var}(Y)$ puede ser difícil y depende de la complejidad de la función $g(\cdot)$. Sin embargo, hay aproximaciones diponibles que dependen de una aproximación lineal de la función $g(x)$. Por ejemplo, suponga que denotamos $E(X)$ como μ y $\text{Var}(X) = \sigma^2_X$. Entonces, una aproximación a las series de Taylor de $g(x)$ alrededor de $X = \mu_X$ da

$$g(x) = g(\mu_X) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=\mu_X} (x - \mu_X) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=\mu_X} \frac{(x-\mu_X)^2}{2} + \cdots .$$

Como resultado, si truncamos después el término lineal y tomamos el valor esperado de ambos lados, obtenemos $E[g(X)] \approx g(\mu_X)$, que ciertamente es intuitivo y en algunos casos ofrece una aproximación razonable. No obstante, si incluimos el término de segundo orden de la serie de Taylor, entonces tenemos un ajuste de segundo orden para esta *aproximación de primer orden* como sigue:

Aproximación de $E[g(X)]$

$$E[g(X)] \approx g(\mu_X) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=\mu_X} \frac{\sigma^2_X}{2}.$$

Ejemplo 4.24: Dada la variable aleatoria X con media μ_X y varianza σ^2_X, determine la aproximación de segundo orden para $E(e^X)$.

***Solución*:** Como $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$ y $\frac{\partial^2 e^x}{\partial x^2} = e^x$, obtenemos $E(e^X) \approx e^{\mu_X}(1 + \sigma^2_X/2)$.

De manera similar, podemos desarrollar una aproximación para $\text{Var}[g(x)]$ tomando la varianza de ambos lados de la expansión de la serie de Taylor de primer orden de $g(x)$.

Aproximación de $\text{Var}[g(X)]$

$$\text{Var}[g(X)] \approx \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right]^2_{x=\mu_X} \sigma^2_X .$$

Ejemplo 4.25: Dada la variable aleatoria X, como en el ejemplo 4.24, determine una fórmula aproximada para $\text{Var}[g(x)]$.

***Solución*:** De nuevo, $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$ por lo tanto, $\text{Var}(X) \approx e^{2\mu_X}\,\sigma_X^2$.

Estas aproximaciones se pueden extender a las funciones no lineales de más de una variable aleatoria.

Dado un conjunto de variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_k$ con medias μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_k$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$, respectivamente, sea

$$Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

una función no lineal; entonces tenemos las siguientes aproximaciones para $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$:

$$E(Y) \approx h(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^2}{2} \left[\frac{\partial^2 h(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_i^2}\right]\Bigg|_{x_i=\mu_i,\ 1\le i\le k},$$

$$\text{Var}(Y) \approx \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\partial h(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_i}\right]^2\Bigg|_{x_i=\mu_i,\ 1\le i\le k} \sigma_i^2.$$

Ejemplo 4.26: Considere dos variables aleatorias independientes X y Z, con medias μ_X, μ_Z y varianzas σ_X^2 y σ_Z^2, respectivamente. Considere una variable aleatoria

$$Y = X/Z.$$

Determine aproximaciones para $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.

***Solución*:** Para $E(Y)$, debemos usar $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z}$ y $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}$. Por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2x}{z^3}.$$

Como resultado,

$$E(Y) \approx \frac{\mu_X}{\mu_Z} + \frac{\mu_X}{\mu_Z^3}\sigma_Z^2 = \frac{\mu_X}{\mu_Z}\left(1 + \frac{\sigma_Z^2}{\mu_Z^2}\right),$$

y la aproximación para la varianza de Y está dada por

$$\text{Var}(Y) \approx \frac{1}{\mu_Z^2}\sigma_X^2 + \frac{\mu_X^2}{\mu_Z^4}\sigma_Z^2 = \frac{1}{\mu_Z^2}\left(\sigma_X^2 + \frac{\mu_X^2}{\mu_Z^2}\sigma_Z^2\right).$$

4.4 Teorema de Chebyshev

En la sección 4.2 establecimos que la varianza de una variable aleatoria nos dice algo acerca de la variabilidad de las observaciones con respecto a la media. Si una variable aleatoria tiene una varianza o desviación estándar pequeña, esperaríamos que la mayoría de los valores se agrupen alrededor de la media. Por lo tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor dentro de cierto intervalo alrededor de la media es mayor que para una variable aleatoria similar con una desviación estándar mayor. Si pensamos en la probabilidad en términos de área, esperaríamos una distribución continua con un valor grande de σ para indicar una variabilidad mayor y, por lo tanto, esperaríamos que el área esté más extendida, como en la figura 4.2(a). Una distribución con una desviación estándar pequeña debería tener la mayor parte de su área cercana a μ, como en la figura 4.2(b).

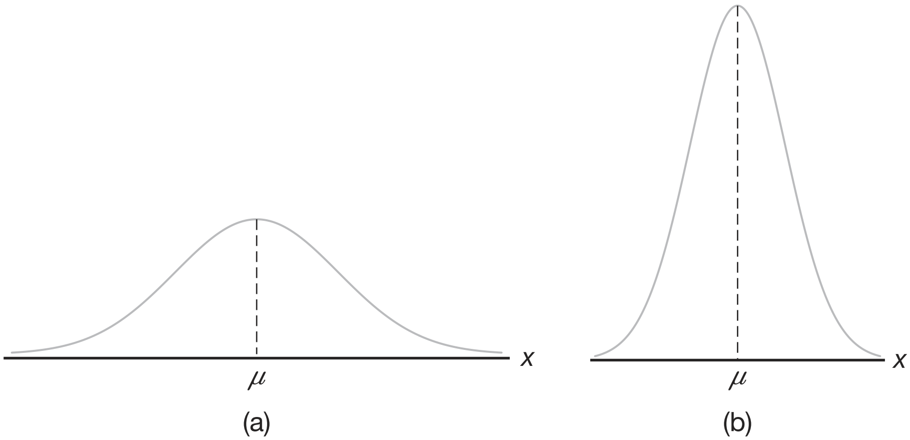

Figura 4.2: Variabilidad de observaciones continuas alrededor de la media.

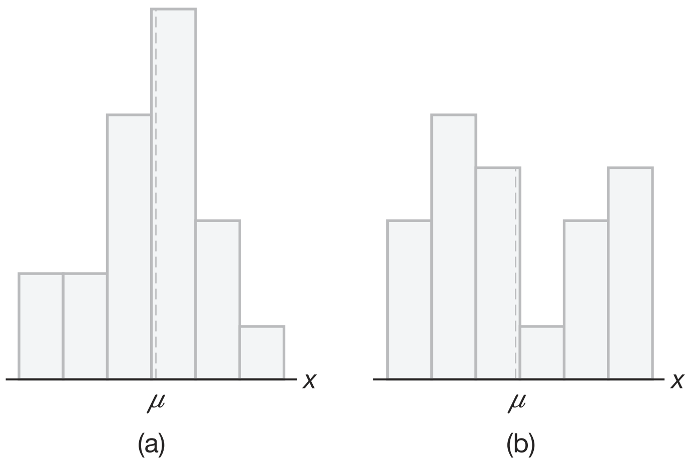

Figura 4.3: Variabilidad de observaciones discretas alrededor de la media.

Podemos argumentar lo mismo para una distribución discreta. En el histograma de probabilidad de la figura 4.3(b) el área se extiende mucho más que en la figura 4.3(a), lo cual indica una distribución más variable de mediciones o resultados.

El matemático ruso P. L. Chebyshev (1821-1894) descubrió que la fracción del área entre cualesquiera dos valores simétricos alrededor de la media está relacionada con la desviación estándar. Como el área bajo una curva de distribución de probabilidad, o la de un histograma de probabilidad, suma 1, el área entre cualesquiera dos números es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre estos números.

El siguiente teorema, planteado por Chebyshev, ofrece una estimación conservadora de la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor dentro de k desviaciones estándar de su media para cualquier número real k.

Teorema 4.10: (**Teorema de Chebyshev**) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria X tome un valor dentro de k desviaciones estándar de la media es de al menos $1 - 1/k^2$. Es decir,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Para $k = 2$ el teorema establece que la variable aleatoria X tiene una probabilidad de al menos $1-1/2^2 = 3/4$ de caer dentro de dos desviaciones estándar a partir de la media; es decir, que tres cuartas partes o más de las observaciones de cualquier distribución se localizan en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$. De manera similar, el teorema afirma que al menos ocho novenos de las observaciones de cualquier distribución caen en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$.

Ejemplo 4.27: Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 8$, una varianza $\sigma^2 = 9$ y una distribución de probabilidad desconocida. Calcule

a) $P(-4 < X < 20)$,

b) $P(|X - 8| \geq 6)$.

Solución: *a*) $P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq \frac{15}{16}$.

b) $P(|X-8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = 1 - P(-6 < X - 8 < 6)$

$$= 1 - P[8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3)] \leq \frac{1}{4}.$$

El teorema de Chebyshev tiene validez para cualquier distribución de observaciones, por lo cual los resultados generalmente son débiles. El valor que proporciona el teorema es sólo un límite inferior, es decir, sabemos que la probabilidad de una variable aleatoria que cae dentro de dos desviaciones estándar de la media *no puede ser menor* que 3/4, pero nunca sabemos cuánto podría ser en realidad. Sólo cuando conocemos la distribución de probabilidad podemos determinar probabilidades exactas. Por esta razón llamamos al teorema resultado de *distribución libre*. Cuando se supongan distribuciones específicas, como ocurrirá en los siguientes capítulos, los resultados serán menos conservadores. El uso del teorema de Chebyshev se restringe a situaciones donde se desconoce la forma de la distribución.

Ejercicios

4.53 Remítase al ejercicio 4.35 de la página 127 y calcule la media y la varianza de la variable aleatoria discreta $Z = 3X - 2$, donde X representa el número de errores por 100 líneas de código.

4.54 Use el teorema 4.5 y el corolario 4.6 para calcular la media y la varianza de la variable aleatoria $Z = 5X + 3$, donde X tiene la distribución de probabilidad del ejercicio 4.36 de la página 127.

4.55 Suponga que una tienda de abarrotes compra 5 envases de leche descremada al precio de mayoreo de \$1.20 por envase y la vende a \$1.65 por envase. Después de la fecha de caducidad, la leche que no se vende se retira de los anaqueles y el tendero recibe un crédito del distribuidor igual a tres cuartas partes del precio de mayoreo. Si la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es X y el número de envases que se venden de este lote es

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$

calcule la utilidad esperada.

4.56 Repita el ejercicio 4.43 de la página 127 aplicando el teorema 4.5 y el corolario 4.6.

4.57 Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Calcule $E(X)$ y $E(X^2)$ y luego utilice estos valores para evaluar $E[(2X + 1)^2]$.

4.58 El tiempo total que una adolescente utiliza su secadora de pelo durante un año, medido en unidades de 100 horas, es una variable aleatoria continua X que tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Utilice el teorema 4.6 para evaluar la media de la variable aleatoria $Y = 60X^2 + 39X$, donde Y es igual al número de kilowatts-hora que gasta al año.

4.59 Si una variable aleatoria X se define de manera que

$$E[(X - 1)^2] = 10 \quad \text{y} \quad E[(X - 2)^2] = 6,$$

calcule μ y σ^2.

4.60 Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes que tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta

	$f(x, y)$	$x = 2$	$x = 4$
y	1	0.10	0.15
	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

Calcule

a) $E(2X - 3Y)$;
b) $E(XY)$.

4.61 Use el teorema 4.7 para evaluar $E(2XY^2 - X^2Y)$ en la distribución de probabilidad conjunta que se muestra en la tabla 3.1 de la página 96.

4.62 Si X y Y son variables aleatorias independientes con varianzas $\sigma_X^2 = 5$ y $\sigma_Y^2 = 3$, calcule la varianza de la variable aleatoria $Z = -2X + 4Y - 3$.

4.63 Repita el ejercicio 4.62 si X y Y no son independientes y $\sigma_{XY} = 1$

4.64 Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes con densidades de probabilidad y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & x > 2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$h(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de $Z = XY$.

4.65 Sea X el número que resulta cuando se lanza un dado rojo y Y el número que resulta cuando se lanza un dado verde. Calcule

a) $E(X + Y)$;
b) $E(X - Y)$;
c) $E(XY)$.

4.66 Sea X el número que resulta cuando se lanza un dado verde y Y el número que resulta cuando se lanza un dado rojo. Calcule la varianza de la variable aleatoria

a) $2X - Y$;
b) $X + 3Y - 5$.

4.67 Si la función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x + 2y), & 0 < x < 1,\ 1 < y < 2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

calcule el valor esperado de $g(X, Y) = \frac{X}{Y^3} + X^2Y$.

4.68 Se sabe que la potencia P en watts que se disipa en un circuito eléctrico con resistencia R está dada por $P = I^2R$, donde I es la corriente en amperes y R es una constante fija en 50 ohms. Sin embargo, I es una variable aleatoria con $\mu_I = 15$ amperes y $\sigma_I^2 = 0.03$ amperes^2. Dé aproximaciones numéricas a la media y a la varianza de la potencia P.

4.69 Considere el ejercicio de repaso 3.77 de la página 108. Las variables aleatorias X y Y representan el número de vehículos que llegan a dos esquinas de calles separadas durante cierto periodo de 2 minutos en el día. La distribución conjunta es

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{4^{(x+y)}}\right)\left(\frac{9}{16}\right),$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots,$ y $y = 0, 1, 2, \ldots$

a) Determine $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ y $\text{Var}(Y)$.
b) Considere que $Z = X + Y$ es la suma de ambas. Calcule $E(Z)$ y $\text{Var}(Z)$.

4.70 Considere el ejercicio de repaso 3.64 de la página 107. Hay dos líneas de servicio. Las variables aleatorias X y Y son las proporciones del tiempo que la línea 1 y la línea 2 están en funcionamiento, respectivamente. La función de densidad de probabilidad conjunta para (X, Y) está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \le x,\ y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine si X y Y son independientes o no.

b) Se tiene interés por saber algo acerca de la proporción de $Z = X + Y$, la suma de las dos proporciones. Calcule $E(X + Y)$. También calcule $E(XY)$.
c) Calcule $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ y $\text{Cov}(X,Y)$.
d) Calcule $\text{Var}(X + Y)$.

4.71 El periodo Y en minutos que se requiere para generar un reflejo humano ante el gas lacrimógeno tiene la siguiente función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & 0 \le y < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el tiempo medio para el reflejo?
b) Calcule $E(Y^2)$ y $\text{Var}(Y)$.

4.72 Una empresa industrial desarrolló una máquina de limpiar alfombras con buen rendimiento de combustible porque limpia más superficie de alfombra en menos tiempo. Se tiene interés por una variable aleatoria Y, la cantidad en galones por minuto que ofrece. Se sabe que la función de densidad está dada por

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 7 \le y \le 8, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine la función de densidad.
b) Calcule $E(Y)$, $E(Y^2)$ y $\text{Var}(Y)$.

4.73 Para la situación del ejercicio 4.72 calcule $E(e^Y)$ utilizando el teorema 4.1, es decir, mediante el uso de

$$E(e^Y) = \int_7^8 e^y f(y)\, dy.$$

Luego, calcule $E(e^Y)$ sin utilizar $f(y)$. En su lugar utilice el ajuste de segundo orden para la aproximación de primer orden de $E(e^Y)$. Comente al respecto.

4.74 Considere nuevamente la situación del ejercicio 4.72, donde se le pide calcular $\text{Var}(e^Y)$. Utilice los teoremas 4.2 y 4.3 y defina $Z = e^Y$. En consecuencia, utilice las condiciones del ejercicio 4.73 para calcular

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2.$$

Luego hágalo sin utilizar $f(y)$. En su lugar utilice la aproximación de primer orden a las series de Taylor para $\text{Var}(e^Y)$. ¡Comente al respecto!

4.75 Una empresa eléctrica fabrica una bombilla de luz de 100 watts que, de acuerdo con las especificaciones escritas en la caja, tiene una vida media de 900 horas con una desviación estándar de 50 horas. A lo sumo, ¿qué porcentaje de las bombillas no duran al menos 700 horas? Suponga que la distribución es simétrica alrededor de la media.

4.76 En una planta de ensamble automotriz se crean 70 nuevos puestos de trabajo y se presentan 1000 aspirantes. Para seleccionar entre los aspirantes a los 70 mejores la armadora aplica un examen que abarca habilidad mecánica, destreza manual y capacidad matemática. La calificación media de este examen resulta ser 60 y las calificaciones tienen una desviación estándar de 6. ¿Una persona que obtiene una calificación de 84 puede obtener uno de los puestos? [*Sugerencia*: Utilice el teorema de Chebyshev]. Suponga que la distribución es simétrica alrededor de la media.

4.77 Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 10$ y una varianza $\sigma^2 = 4$. Utilice el teorema de Chebyshev para calcular

a) $P(|X - 10| \ge 3)$;
b) $P(|X - 10| < 3)$;
c) $P(5 < X < 15)$;
d) el valor de la constante c tal que

$$P(|X - 10| \ge c) \le 0.04.$$

4.78 Calcule $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, donde X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y compare con el resultado dado por el teorema de Chebyshev.

Ejercicios de repaso

4.79 Demuestre el teorema de Chebyshev.

4.80 Calcule la covarianza de las variables aleatorias X y Y que tienen la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.81 Remítase a las variables aleatorias cuya función de densidad de probabilidad conjunta está dada en el ejercicio 3.47 de la página 105 y calcule la cantidad promedio de queroseno que queda en el tanque al final del día.

4.82 Suponga que la duración X en minutos de un tipo específico de conversación telefónica es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine la duración media $E(X)$ de este tipo de conversación telefónica.
b) Calcule la varianza y la desviación estándar de X.
c) Calcule $E[(X + 5)^2]$.

4.83 Remítase a las variables aleatorias cuya función de densidad conjunta está dada en el ejercicio 3.41 de la página 105 y calcule la covarianza entre el peso de las cremas y el peso de los chiclosos en estas cajas de chocolates.

4.84 Remítase a las variables aleatorias cuya función de densidad de probabilidad conjunta está dada en el ejercicio 3.41 de la página 105 y calcule el peso esperado para la suma de las cremas y los chiclosos si uno compra una caja de tales chocolates.

4.85 Suponga que se sabe que la vida de un compresor particular X, en horas, tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{900}e^{-x/900}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la vida media del compresor.
b) Calcule $E(X^2)$.
c) Calcule la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X.

4.86 Remítase a las variables aleatorias cuya función de densidad conjunta está dada en el ejercicio 3.40 de la página 105,
a) calcule μ_X y μ_Y;
b) calcule $E[(X + Y)/2]$.

4.87 Demuestre que $\text{Cov}(aX, bY) = ab\,\text{Cov}(X, Y)$.

4.88 Considere la función de densidad del ejercicio de repaso 4.85. Demuestre que el teorema de Chebyshev es válido para $k = 2$ y $k = 3$.

4.89 Considere la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{16y}{x^3}, & x > 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el coeficiente de correlación ρ_{XY}.

4.90 Considere las variables aleatorias X y Y del ejercicio 4.63 de la página 138. Calcule ρ_{XY}.

4.91 La utilidad de un distribuidor, en unidades de \$5000, por un automóvil nuevo es una variable aleatoria X que tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule la varianza de la utilidad del distribuidor.
b) Demuestre que el teorema de Chebyshev es válido para $k = 2$ con la función de densidad anterior.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la utilidad exceda \$500?

4.92 Considere el ejercicio 4.10 de la página 117. ¿Se puede decir que las calificaciones dadas por los dos expertos son independientes? Explique su respuesta.

4.93 Los departamentos de marketing y de contabilidad de una empresa determinaron que si la empresa comercializa su producto creado recientemente, su contribución a las utilidades de la empresa durante los próximos 6 meses será la siguiente:

Contribución a las utilidades	Probabilidad
−\$5,000	0.2
\$10,000	0.5
\$30,000	0.3

¿Cuál es la utilidad esperada de la empresa?

4.94 En un sistema de apoyo para el programa espacial estadounidense, un componente crucial único funciona sólo 85 por ciento del tiempo. Para aumentar la confiabilidad del sistema se decidió instalar tres componentes paralelos, de manera que el sistema falle sólo si todos fallan. Suponga que los componentes actúan de forma independiente y que son equivalentes en el sentido de que 3 de ellos tienen una tasa de éxito de 85 por ciento. Considere la variable aleatoria X como el número de componentes de cada tres que fallan.
a) Escriba una función de probabilidad para la variable aleatoria X.
b) ¿Cuál es $E(X)$ (es decir, el número medio de componentes de cada tres que fallan)?
c) ¿Cuál es $\text{Var}(X)$?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema completo sea exitoso?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que falle el sistema?
f) Si se desea que el sistema tenga una probabilidad de éxito de 0.99, ¿son suficientes los tres componentes? Si no lo son, ¿cuántos se requerirían?

4.95 En los negocios es importante planear y llevar a cabo investigación para anticipar lo que ocurrirá al final del año. La investigación sugiere que el espectro de utilidades (pérdidas) de cierta empresa, con sus respectivas probabilidades, es el siguiente:

Utilidad	Probabilidad
−\$15,000	0.05
\$0	0.15
\$15,000	0.15
\$25,000	0.30
\$40,000	0.15
\$50,000	0.10
\$100,000	0.05
\$150,000	0.03
\$200,000	0.02

a) ¿Cuál es la utilidad esperada?
b) Determine la desviación estándar de las utilidades.

4.96 Mediante un conjunto de datos, y por la amplia investigación, se sabe que la cantidad de tiempo que cierto empleado de una empresa llega tarde a trabajar, medido en segundos, es una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(4)(50^3)}(50^2 - x^2), & -50 \le x \le 50, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En otras palabras, él no sólo llega ligeramente retrasado a veces, sino que también puede llegar temprano a trabajar.

a) Calcule el valor esperado del tiempo en segundos que llega tarde.
b) Calcule $E(X^2)$.
c) ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo en que llega tarde?

4.97 Un camión de carga viaja desde el punto A hasta el punto B y regresa por la misma ruta diariamente. Hay cuatro semáforos en la ruta. Sea X_1 el número de semáforos en rojo que el camión encuentra cuando va de A a B y X_2 el número de los que encuentra en el viaje de regreso. Los datos recabados durante un periodo largo sugieren que la distribución de probabilidad conjunta para (X_1, X_2) está dada por

	x_2				
x_1	0	1	2	3	4
0	0.01	0.01	0.03	0.07	0.01
1	0.03	0.05	0.08	0.03	0.02
2	0.03	0.11	0.15	0.01	0.01
3	0.02	0.07	0.10	0.03	0.01
4	0.01	0.06	0.03	0.01	0.01

a) Determine la densidad marginal de X_1.
b) Determine la densidad marginal de X_2.
c) Determine la distribución de densidad condicional de X_1 dado que $X_2 = 3$.
d) Determine $E(X_1)$.
e) Determine $E(X_2)$.
f) Determine $E(X_1|X_2 = 3)$.
g) Determine la desviación estándar de X_1.

4.98 Una tienda de abarrotes tiene dos sitios separados en sus instalaciones donde los clientes pueden pagar cuando se marchan. Estos dos lugares tienen dos cajas registradoras y dos empleados que atienden a los clientes que van a pagar. Sea X el número de la caja registradora que se utiliza en un momento específico en el sitio 1 y Y el número de la caja registradora que se utiliza en el mismo momento en el sitio 2. La función de probabilidad conjunta está dada por

	y		
x	0	1	2
0	0.12	0.04	0.04
1	0.08	0.19	0.05
2	0.06	0.12	0.30

a) Determine la densidad marginal de X y de Y, así como la distribución de probabilidad de X, dado que $Y = 2$.
b) Determine $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.
c) Determine $E(X | Y = 2)$ y $\text{Var}(X | Y = 2)$.

4.99 Considere un transbordador que puede llevar tanto autobuses como automóviles en un recorrido a través de una vía fluvial. Cada viaje cuesta al propietario aproximadamente \$10. La tarifa por automóvil es de \$3 y por autobús es de \$8. Sean X y Y el número de autobuses y automóviles, respectivamente, que se transportan en un viaje específico. La distribución conjunta de X y Y está dada por

	x		
y	0	1	2
0	0.01	0.01	0.03
1	0.03	0.08	0.07
2	0.03	0.06	0.06
3	0.07	0.07	0.13
4	0.12	0.04	0.03
5	0.08	0.06	0.02

Calcule la utilidad esperada para el viaje del transbordador.

4.100 Como veremos en el capítulo 12, los métodos estadísticos asociados con los modelos lineal y no lineal son muy importantes. De hecho, a menudo las funciones exponenciales se utilizan en una amplia gama de problemas científicos y de ingeniería. Considere un modelo que se ajusta a un conjunto de datos que implica los valores medidos k_1 y k_2, y una respuesta específica Y a las mediciones. El modelo postulado es

$$\hat{Y} = e^{b_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2},$$

donde $\hat{Y}$ denota el **valor estimado de** $\boldsymbol{Y}$, k_1 y k_2 son valores fijos y b_0, b_1 y b_2 son **estimados** de constantes y, por lo tanto, variables aleatorias. Suponga que tales variables aleatorias son independientes y use la fórmula aproximada para la varianza de una función no lineal de más de una variable. Dé una expresión para $\text{Var}(\hat{Y})$. Suponga que se conocen las medias de b_0, b_1 y b_2 y que son β_0, β_1 y β_2, y también suponga que se conocen las varianzas de b_0, b_1 y b_2 y que son σ_0^2, σ_1^2 y σ_2^2.

4.101 Considere el ejercicio de repaso 3.73 de la página 108, el cual implica Y, la proporción de impurezas en un lote, donde la función de densidad está dada por

$$f(y) = \begin{cases} 10(1-y)^9, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcule el porcentaje esperado de impurezas.

b) Calcule el valor esperado de la proporción de la calidad del material (es decir, calcule $E(1 - Y)$).

c) Calcule la varianza de la variable aleatoria $Z = 1 - Y$.

4.102 **Proyecto:** Sea X = número de horas que cada estudiante del grupo durmió la noche anterior. Cree una variable discreta utilizando los siguientes intervalos arbitrarios:

$X < 3$, $3 \leq X < 6$, $6 \leq X < 9$ y $X \geq 9$.

a) Estime la distribución de probabilidad para X.

b) Calcule la media estimada y la varianza para X.

4.5 Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos

El material que se cubrió en este capítulo es fundamental, como el contenido del capítulo 3. Mientras que en el capítulo 3 nos concentramos en las características generales de una distribución de probabilidad, en el presente capítulo definimos cantidades importantes o *parámetros* que caracterizan la naturaleza general del sistema. La **media** de una distribución refleja una *tendencia central*, en tanto que la **varianza** o la **desviación estándar** reflejan *variabilidad* en el sistema. Además, la covarianza refleja la tendencia de dos variables aleatorias a "moverse juntas" en un sistema. Estos importantes parámetros serán fundamentales en el estudio de los siguientes capítulos.

El lector debería comprender que el tipo de distribución a menudo está determinado por el contexto científico. Sin embargo, los valores del parámetro necesitan estimarse a partir de datos científicos. Por ejemplo, en el caso del ejercicio de repaso 4.85 el fabricante del compresor podría saber (material que se presentará en el capítulo 6), por su experiencia y conocimiento del tipo de compresor, que la naturaleza de la distribución es como se indica en el ejercicio. Pero la media $\mu = 900$ **se estimaría** a partir de la experimentación con la máquina. Aunque aquí se da por conocido el valor del parámetro de 900, en situaciones reales eso no ocurrirá sin el uso de datos experimentales. El capítulo 9 se dedica a la **estimación**.

Capítulo 5

Algunas distribuciones de probabilidad discreta

5.1 Introducción y motivación

La distribución de probabilidad discreta describe el comportamiento de una variable aleatoria, independientemente de si se representa de forma gráfica o mediante un histograma, en forma tabular o con una fórmula. A menudo las observaciones que se generan mediante diferentes experimentos estadísticos tienen el mismo tipo general de comportamiento. En consecuencia, las variables aleatorias discretas asociadas con estos experimentos se pueden describir esencialmente con la misma distribución de probabilidad y, por lo tanto, es posible representarlas usando una sola fórmula. De hecho, se necesitan sólo unas cuantas distribuciones de probabilidad importantes para describir muchas de las variables aleatorias discretas que se encuentran en la práctica.

Este conjunto de distribuciones en realidad describe varios fenómenos aleatorios de la vida real. Por ejemplo, en un estudio en el que se probó la eficacia de un nuevo fármaco, de todos los pacientes que lo utilizaron, el número de pacientes que se curaron se aproximó a una distribución binomial (sección 5.2). En un ejemplo en una industria, cuando se prueba una muestra de artículos seleccionados de un lote de producción, el número de productos defectuosos en la muestra por lo general se puede representar como una variable aleatoria hipergeométrica (sección 5.3). En un problema estadístico de control de calidad el experimentador señalará un cambio en la media del proceso cuando los datos observacionales excedan ciertos límites. El número de muestras requeridas para generar una falsa alarma sigue una distribución geométrica, que es un caso especial de distribución binomial negativa (sección 5.4). Por otro lado, el número de leucocitos de una cantidad fija de una muestra de la sangre de un individuo suele ser aleatorio y podría describirse mediante una distribución de Poisson (sección 5.5). En este capítulo se presentarán esas distribuciones de uso común con varios ejemplos.

5.2 Distribuciones binomial y multinomial

Con frecuencia un experimento consta de pruebas repetidas, cada una con dos resultados posibles que se pueden denominar **éxito** o **fracaso**. La aplicación más evidente tiene que ver con la prueba de artículos a medida que salen de una línea de ensamble, donde cada prueba o experimento puede indicar si un artículo está o no defectuoso. Podemos elegir definir cualquiera de los resultados como éxito. El proceso se conoce como **proceso de Bernoulli** y cada ensayo se denomina **experimento de Bernoulli**. Por ejemplo, si extraemos cartas de una baraja y éstas no se reemplazan, cambian las probabilidades en la repetición de cada ensayo; es decir, la probabilidad de seleccionar una carta de corazones en la primera extracción es 1/4, pero en la segunda es una probabilidad condicional que tiene un valor de 13/51 o 12/51, dependiendo de si resulta un corazón en la primera extracción; entonces éste ya no sería considerado un conjunto de experimentos de Bernoulli.

El proceso de Bernoulli

En términos estrictos el proceso de Bernoulli se caracteriza por lo siguiente:

1. El experimento consta de ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota con p, permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

Considere el conjunto de experimentos de Bernoulli en el que se seleccionan tres artículos al azar de un proceso de producción, luego se inspeccionan y se clasifican como defectuosos o no defectuosos. Un artículo defectuoso se designa como un éxito. El número de éxitos es una variable aleatoria X que toma valores integrales de cero a 3. Los ocho resultados posibles y los valores correspondientes de X son

Resultado	*NNN*	*NDN*	*NND*	*DNN*	*NDD*	*DND*	*DDN*	*DDD*
x	0	1	1	1	2	2	2	3

Como los artículos se seleccionan de forma independiente y se asume que el proceso produce 25% de artículos defectuosos,

$$P(NDN) = P(N)P(D)P(N) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}.$$

Cálculos similares dan las probabilidades para los otros resultados posibles. La distribución de probabilidad de X es, por lo tanto,

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Distribución binomial

El número X de éxitos en n experimentos de Bernoulli se denomina **variable aleatoria binomial**. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama **distribución binomial** y sus valores se denotarán como $b(x; n, p)$, ya que dependen del número de ensayos y de la probabilidad de éxito en un ensayo dado. Por consiguiente, para la distribución de probabilidad de X el número de productos defectuosos es

$$P(X = 2) = f(2) = b\left(2; 3, \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}.$$

Generalicemos ahora la ilustración anterior con el fin de obtener una fórmula para $b(x; n, p)$. Esto significa que deseamos encontrar una fórmula que dé la probabilidad de x éxitos en n ensayos para un experimento binomial. Empiece por considerar la probabilidad de x éxitos y $n - x$ fracasos en un orden específico. Como los ensayos son independientes, podemos multiplicar todas las probabilidades que corresponden a los diferentes resultados. Cada éxito ocurre con probabilidad p y cada fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Por lo tanto, la probabilidad para el orden específico es $p^x q^{n-x}$. Ahora debemos determinar el número total de puntos muestrales en el experimento que tienen x éxitos y $n - x$ fracasos. Este número es igual al número de particiones de n resultados en dos grupos con x en un grupo y $n - x$ en el otro, y se escribe $\binom{n}{x}$ como se presentó en la sección 2.3. Como estas particiones son mutuamente excluyentes, sumamos las probabilidades de todas las diferentes particiones para obtener la fórmula general o simplemente multiplicamos $p^x q^{n-x}$ por $\binom{n}{x}$.

Distribución binomial

Un experimiento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, el número de éxitos en n ensayos independientes, es

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Observe que cuando $n = 3$ y $p = 1/4$, la distribución de probabilidad de X, el número de artículos defectuosos, se escribe como

$$b\left(x; 3, \frac{1}{4}\right) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3,$$

en vez de la forma tabular de la página 144.

Ejemplo 5.1: La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es de 3/4. Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueben.

***Solución*:** Si suponemos que las pruebas son independientes y $p = 3/4$ para cada una de las 4 pruebas, obtenemos

$$b\left(2; 4, \frac{3}{4}\right) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{4!}{2!\,2!}\right)\left(\frac{3^2}{4^4}\right) = \frac{27}{128}.$$

¿De dónde proviene el nombre binomial?

La distribución binomial deriva su nombre del hecho de que los $n + 1$ términos en la expansión binomial de $(q + p)^n$ corresponden a los diversos valores de $b(x; n, p)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Es decir,

$$\begin{aligned}(q+p)^n &= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} p^n \\ &= b(0; n, p) + b(1; n, p) + b(2; n, p) + \cdots + b(n; n, p).\end{aligned}$$

Dado que $p + q = 1$, vemos que

$$\sum_{x=0}^{n} b(x; n, p) = 1,$$

una condición que se debe cumplir para cualquier distribución de probabilidad.

Con frecuencia nos interesamos en problemas donde se necesita obtener $P(X < r)$ o $P(a \leq X \leq b)$. Las sumatorias binomiales

$$B(r; n, p) = \sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$$

se presentan en la tabla A.1 del apéndice para $n = 1, 2, ..., 20$, para valores seleccionados de p entre 0.1 y 0.9. Ilustramos el uso de la tabla A.1 con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2: La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que *a*) sobrevivan al menos 10, *b*) sobrevivan de 3 a 8, y *c*) sobrevivan exactamente 5?

***Solución*:** Sea X el número de personas que sobreviven.

a)
$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x; 15, 0.4) = 1 - 0.9662 = 0.0338$$

b)
$$P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} b(x; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^{8} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 15, 0.4) = 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$$

c)
$$P(X = 5) = b(5; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^{5} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{4} b(x; 15, 0.4) = 0.4032 - 0.2173 = 0.1859$$

Ejemplo 5.3: Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3%.

a) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?

b) Suponga que el detallista recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso de entre los 20 seleccionados y probados?

***Solución*:** *a*) Denote con X el número de dispositivos defectuosos de los 20. Entonces X sigue una distribución $b(x; 20, 0.03)$. Por consiguiente,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - b(0; 20, 0.03) = 1 - (0.03)^0(1 - 0.03)^{20-0} = 0.4562.$$

b) En este caso cada cargamento puede o no contener al menos un artículo defectuoso. Por lo tanto, el hecho de probar el resultado de cada cargamento puede considerarse como un experimento de Bernoulli con $p = 0.4562$ del inciso *a*). Si suponemos la independencia de un cargamento a otro, y si se denotamos con Y el número de cargamentos que contienen al menos un artículo defectuoso, Y sigue otra distribución binomial $b(y; 10, 0.4562)$. Por lo tanto,

$$P(Y = 3) = \binom{10}{3} 0.4562^3 (1 - 0.4562)^7 = 0.1602.$$

Áreas de aplicación

A partir de los ejemplos 5.1 a 5.3 debería quedar claro que la distribución binomial tiene aplicaciones en muchos campos científicos. Un ingeniero industrial está muy interesado en "la proporción de artículos defectuosos" en cierto proceso industrial. A menudo las medidas de control de calidad y los esquemas de muestreo para procesos se basan en la distribución binomial, la cual se aplica en cualquier situación industrial donde el resultado de un proceso es dicotómico y los resultados del proceso son independientes, y además la probabilidad de éxito se mantiene constante de una prueba a otra. La distribución binomial también se utiliza mucho en aplicaciones médicas y militares. En ambos casos un resultado de éxito o de fracaso es importante. Por ejemplo, la importancia del trabajo farmacéutico radica en poder determinar si un determinado fármaco "cura" o "no cura"; mientras que si se está probando la eficacia al lanzar un proyectil el resultado se interpretaría como "dar en el blanco" o "fallar".

Como la distribución de probabilidad de cualquier variable aleatoria binomial depende sólo de los valores que toman los parámetros n, p y q, parecería razonable suponer que la media y la varianza de una variable aleatoria binomial también dependen de los valores que toman tales parámetros. En realidad esto es cierto, y en la demostración del teorema 5.1 derivamos fórmulas generales que se pueden utilizar para calcular la media y la varianza de cualquier variable aleatoria binomial como funciones de n, p y q.

Teorema 5.1: La media y la varianza de la distribución binomial $b(x; n, p)$ son

$$\mu = np \text{ y } \sigma^2 = npq.$$

***Prueba*:** Representemos el resultado de la j-ésima prueba mediante una variable aleatoria de Bernoulli I_j, que toma los valores 0 y 1 con probabilidades q y p, respectivamente. Por lo tanto, en un experimento binomial el número de éxitos se escribe como la suma de las n variables indicadoras independientes. De aquí,

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

La media de cualquier I_j es $E(I_j) = (0)(q) + (1)(p) = p$. Por lo tanto, usando el corolario 4.4 de la página 131, la media de la distribución binomial es

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n) = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n \text{ términos}} = np.$$

La varianza de cualquier I_j es $\sigma_{I_j}^2 = E(I_j^2) - p^2 = (0)^2(q) + (1)^2(p) - p^2 = p(1-p) = pq$. Al ampliar el corolario 4.11 al caso de n variables de Bernoulli independientes, la varianza de la distribución binomial resulta como

$$\sigma_X^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \cdots + \sigma_{I_n}^2 = \underbrace{pq + pq + \cdots + pq}_{n \text{ términos}} = npq.$$

Ejemplo 5.4: Se conjetura que hay impurezas en 30% del total de pozos de agua potable de cierta comunidad rural. Para obtener información sobre la verdadera magnitud del problema se determina que debe realizarse algún tipo de prueba. Como es muy costoso probar todos los pozos del área, se eligen 10 al azar para someterlos a la prueba.

a) Si se utiliza la distribución binomial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 pozos tengan impurezas, considerando que la conjetura es correcta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 3 pozos tengan impurezas?

***Solución*:** *a*) Requerimos

$$b(3; 10, 0.3) = \sum_{x=0}^{3} b(x; 10, 0.3) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 10, 0.3) = 0.6496 - 0.3828 = 0.2668.$$

b) En este caso $P(X > 3) = 1 - 0.6496 = 0.3504$.

Ejemplo 5.5: Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria binomial del ejemplo 5.2 y después utilice el teorema de Chebyshev (de la página 137) para interpretar el intervalo $\mu \pm 2\sigma$.

***Solución*:** Como el ejemplo 5.2 fue un experimento binomial con $n = 15$ y $p = 0.4$, por el teorema 5.1 tenemos

$$\mu = (15)(0.4) = 6 \text{ y } \sigma^2 = (15)(0.4)(0.6) = 3.6.$$

Al tomar la raíz cuadrada de 3.6 encontramos que $\sigma = 1.897$. Por lo tanto, el intervalo que se requiere es $6 \pm (2)(1.897)$, o de 2.206 a 9.794. El teorema de Chebyshev establece que el número de pacientes recuperados, de un total de 15 que contrajeron la enfermedad, tiene una probabilidad de al menos 3/4 de caer entre 2.206 y 9.794 o, como los datos son discretos, incluso entre 2 y 10.

Hay soluciones en las que el cálculo de las probabilidades binomiales nos permitirían hacer inferencias científicas acerca de una población después de que se recaban los datos. El siguiente ejemplo es una ilustración de esto.

Ejemplo 5.6: Considere la situación del ejemplo 5.4. La idea de que el 30% de los pozos tienen impurezas es sólo una conjetura del consejo local del agua. Suponga que se eligen 10 pozos de forma aleatoria y resulta que 6 contienen impurezas. ¿Qué implica esto respecto de la conjetura? Utilice un enunciado de probabilidad.

***Solución*:** Primero debemos preguntar: "Si la conjetura es correcta, ¿podríamos haber encontrado 6 o más pozos con impurezas?"

$$P(X \geq 6) = \sum_{x=0}^{10} b(x; 10, 0.3) - \sum_{x=0}^{5} b(x; 10, 0.3) = 1 - 0.9527 = 0.0473.$$

En consecuencia, es poco probable (4.7% de probabilidad) que se encontrara que 6 o más pozos contenían impurezas si sólo 30% de ellos las contienen. Esto pone seriamente en duda la conjetura y sugiere que el problema de la impureza es mucho más grave.

Como podrá darse cuenta el lector ahora, en muchas aplicaciones hay más de dos resultados posibles. Por ejemplo, en el campo de la genética el color de las crías de conejillos de Indias puede ser rojo, negro o blanco. Con frecuencia la dicotomía de "defectuoso" y "sin defectos" en casos de ingeniería es en realidad un simplificación excesiva. De hecho, a menudo hay más de dos categorías que caracterizan los artículos o las partes que salen de una línea de producción.

Experimentos multinomiales y la distribución multinomial

El experimento binomial se convierte en un **experimento multinomial** si cada prueba tiene más de dos resultados posibles. La clasificación de un producto fabricado como ligero, pesado o aceptable, y el registro de los accidentes en cierto crucero de acuerdo con el día de la semana, constituyen experimentos multinomiales. Extraer *con reemplazo* una carta de una baraja también es un experimento multinomial si los 4 palos son los resultados de interés.

En general, si un ensayo dado puede tener como consecuencia cualquiera de los k resultados posibles $E_1, E_2, ..., E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, ..., p_k$, la **distribución multinomial** dará la probabilidad de que E_1 ocurra x_1 veces, E_2 ocurra x_2 veces... y E_k ocurra x_k veces en n ensayos independientes, donde

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Denotaremos esta distribución de probabilidad conjunta como

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n).$$

Salta a la vista que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$, pues el resultado de cada ensayo debe ser uno de los k resultados posibles.

Para derivar la fórmula general procedemos como en el caso binomial. Puesto que los ensayos son independientes, cualquier orden especificado que produzca x_1 resultados para E_1, x_2 para $E_2, \ldots, x_k$ para E_k ocurrirá con probabilidad $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$. El número total de ordenamientos que producen resultados similares para los n ensayos es igual al número de particiones de n artículos en k grupos con x_1 en el primer grupo, x_2 en el segundo grupo,..., y x_k en el k-ésimo grupo. Esto se puede hacer en

$$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}$$

formas. Como todas las particiones son mutuamente excluyentes y tienen la misma probabilidad de ocurrir, obtenemos la distribución multinomial multiplicando la probabilidad para un orden específico por el número total de particiones.

Distribución multinomial

Si un ensayo dado puede producir los k resultados $E_1, E_2, ..., E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_k$, que representa el número de ocurrencias para $E_1, E_2, ..., E_k$ en n ensayos independientes, es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k},$$

con

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

La distribución multinomial deriva su nombre del hecho de que los términos de la expansión multinomial de $(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n$ corresponden a todos los posibles valores de $f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n)$.

Ejemplo 5.7: La complejidad de las llegadas y las salidas de los aviones en un aeropuerto es tal que a menudo se utiliza la simulación por computadora para modelar las condiciones "ideales". Para un aeropuerto específico que tiene tres pistas se sabe que, en el escenario ideal, las probabilidades de que las pistas individuales sean utilizadas por un avión comercial que llega aleatoriamente son las siguientes:

Pista 1: $p_1 = 2/9$
Pista 2: $p_2 = 1/6$
Pista 3: $p_3 = 11/18$

¿Cuál es la probabilidad de que 6 aviones que llegan al azar se distribuyan de la siguiente manera?

Pista 1: 2 aviones
Pista 2: 1 avión
Pista 3: 3 aviones

***Solución*:** Si usamos la distribución multinomial, tenemos

$$f\left(2, 1, 3; \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{11}{18}, 6\right) = \binom{6}{2, 1, 3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3$$
$$= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} \cdot \frac{2^2}{9^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{11^3}{18^3} = 0.1127.$$

Ejercicios

5.1 Una variable aleatoria X que toma los valores x_1, x_2,..., x_k se denomina variable aleatoria discreta uniforme si su función de masa de probabilidad es $f(x) = \frac{1}{k}$ para todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y 0 en cualquier otro caso. Calcule la media y la varianza de X.

5.2 Se entregan dos altavoces idénticos a 12 personas y se les pide que los escuchen para determinar si hay alguna diferencia entre ellos. Suponga que sus respuestas son simplemente conjeturas. Calcule la probabilidad de que tres personas afirmen haber detectado una diferencia entre los dos altavoces.

5.3 De un equipo de 10 empleados, y mediante la selección al azar de una etiqueta contenida en una caja que contiene 10 etiquetas numeradas del 1 al 10, se elige a uno para que supervise cierto proyecto. Calcule la fórmula para la distribución de probabilidad de X que represente el número en la etiqueta que se saca. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que se extrae sea menor que 4?

5.4 En cierto distrito de la ciudad se establece que la causa de 75% de todos los robos es la necesidad de dinero para comprar drogas. Calcule la probabilidad de que entre los siguientes cinco casos de robo que se reporten en este distrito,

a) exactamente 2 sean resultado de la necesidad de dinero para comprar drogas;
b) a lo sumo 3 resulten de la necesidad de dinero para comprar drogas.

5.5 De acuerdo con *Chemical Engineering Progress* (noviembre de 1990), aproximadamente 30% de todas las fallas de operación en las tuberías de plantas químicas son ocasionadas por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de las siguientes 20 fallas en las tuberías al menos 10 se deban a un error del operador?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de 4 de 20 fallas se deban a un error del operador?
c) Suponga que, para una planta específica, de la muestra aleatoria de 20 de tales fallas exactamente 5 son errores de operación. ¿Considera que la cifra de 30% anterior se aplique a esta planta? Comente su respuesta.

5.6 De acuerdo con una encuesta de la *Administrative Management Society*, la mitad de las empresas estadounidenses da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio en la empresa. Calcule la probabilidad de que, de 6 empresas encuestadas al azar, el número que da a sus empleados 4 semanas de vacaciones después de 15 años de servicio es

a) cualquiera entre 2 y 5;
b) menor que 3.

5.7 Un destacado médico afirma que el 70% de las personas con cáncer de pulmón son fumadores empedernidos. Si su aseveración es correcta,

a) calcule la probabilidad de que de 10 de estos pacientes, que ingresaron recientemente a un hospital, menos de la mitad sean fumadores empedernidos;

b) calcule la probabilidad de que de 20 de estos pacientes, que ingresaron recientemente a un hospital, menos de la mitad sean fumadores empedernidos.

5.8 De acuerdo con un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la Universidad de Massachusetts, aproximadamente 60% de los consumidores de Valium en el estado de Massachusetts empezaron a consumirlo a causa de problemas psicológicos. Calcule la probabilidad de que entre los siguientes 8 consumidores entrevistados de este estado,

a) exactamente 3 comenzaron a consumir Valium por problemas psicológicos;
b) al menos 5 comenzaron a consumir Valium por problemas que no fueron psicológicos.

5.9 Al probar cierta clase de neumático para camión en un terreno accidentado, se encuentra que el 25% de los camiones no completan la prueba de recorrido sin ponchaduras. De los siguientes 15 camiones probados, calcule la probabilidad de que

a) de 3 a 6 tengan ponchaduras;
b) menos de 4 tengan ponchaduras;
c) más de 5 tengan ponchaduras.

5.10 Según un informe de la revista *Parade*, una encuesta a nivel nacional, realizada por la Universidad de Michigan con estudiantes universitarios de último año, reveló que casi 70% desaprueban el consumo diario de marihuana. Si se seleccionan 12 estudiantes de último año al azar y se les pide su opinión, calcule la probabilidad de que el número de los que desaprueban el consumo diario de marihuana sea

a) cualquiera entre 7 y 9;
b) 5 a lo sumo;
c) no menos de 8.

5.11 La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de los siguientes 7 pacientes intervenidos sobrevivan?

5.12 Un ingeniero de control de tráfico reporta que 75% de los vehículos que pasan por un punto de verificación son de ese estado. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 4 de los siguientes 9 vehículos sean de otro estado?

5.13 Un estudio a nivel nacional que examinó las actitudes hacia los antidepresivos reveló que aproximadamente 70% de los encuestados cree que “los antidepresivos en realidad no curan nada, sólo disfrazan el problema real”. De acuerdo con este estudio, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de las siguientes 5 personas seleccionadas al azar tengan esta opinión?

5.14 El porcentaje de victorias que consiguió el equipo de baloncesto los Toros de Chicago para pasar a las finales en la temporada 1996-97 fue de 87.7. Redondee 87.7 a 90 para poder utilizar la tabla A.1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los Toros logren una victoria aplastante (4-0) en la serie final de 7 juegos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los Toros ganen la serie inicial?
c) ¿Qué suposición importante se hace al responder los incisos *a*) y *b*)?

5.15 Se sabe que 60% de los ratones inoculados con un suero quedan protegidos contra cierta enfermedad. Si se inoculan 5 ratones, calcule la probabilidad de que

a) ninguno contraiga la enfermedad;
b) menos de 2 contraigan la enfermedad;
c) más de 3 contraigan la enfermedad.

5.16 Suponga que los motores de un avión operan de forma independiente y que tienen una probabilidad de falla de 0.4. Se supone que un avión tiene un vuelo seguro si funcionan al menos la mitad de sus motores. Si un avión tiene 4 motores y otro tiene 2, ¿cuál de los dos tiene la probabilidad más alta de un vuelo exitoso?

5.17 Si X representa el número de personas del ejercicio 5.13 que creen que los antidepresivos no curan sino que sólo disfrazan el problema real, calcule la media y la varianza de X si se seleccionan al azar 5 personas.

5.18 *a*) ¿Cuántos de los 15 camiones del ejercicio 5.9 esperaría que tuvieran ponchaduras?
b) ¿Cuál es la varianza del número de ponchaduras de los 15 camiones? ¿Qué significado tiene eso?

5.19 Un estudiante que conduce hacia su escuela encuentra un semáforo, el cual permanece verde por 35 segundos, amarillo cinco segundos y rojo 60 segundos. Suponga que toda la semana el estudiante recorre el camino a la escuela entre las 8:00 y las 8:30 a.m. Sea X_1 el número de veces que encuentra una luz verde, X_2 el número de veces que encuentra una luz amarilla y X_3 el número de veces que encuentra una luz roja. Calcule la distribución conjunta de X_1, X_2 y X_3.

5.20 Según el diario *USA Today* (18 de marzo de 1997), de 4 millones de integrantes de la fuerza laboral, 5.8% resultó positivo en una prueba de drogas. De los que dieron positivo, 22.5% consumían cocaína y 54.4% consumían marihuana.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, 2 sean usuarios de cocaína, 5 de marihuana y 3 de otras drogas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, todos sean consumidores de marihuana?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, ninguno consuma cocaína?

5.21 La superficie de un tablero circular para dardos tiene un pequeño círculo central llamado diana y 20 regiones en forma de rebanada de pastel numeradas del 1 al 20. Asimismo, cada una de estas regiones está dividida en tres partes, de manera que una persona que lanza un dardo que cae en un número específico obtiene una puntuación igual al valor del número, el doble del número o el triple de éste, dependiendo de en cuál de las tres partes caiga el dardo. Si una persona tiene una probabilidad de 0.01 de acertar a la diana, una probabilidad de 0.10 de acertar un doble, una probabilidad de 0.05 de acertar un triple y una probabilidad de 0.02 de no acertar al tablero, ¿cuál es la probabilidad de que 7 lanzamientos den como resultado ninguna diana, ningún triple, dos dobles y una vez fuera del tablero?

5.22 De acuerdo con la teoría genética, cierta cruza de conejillos de Indias tendrá crías rojas, negras y blancas en la proporción 8:4:4. Calcule la probabilidad de que de 8 crías, 5 sean rojas, 2 negras y 1 blanca.

5.23 Las probabilidades de que un delegado llegue a cierta convención en avión, autobús, automóvil o tren son de 0.4, 0.2, 0.3 y 0.1, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 9 delegados que asisten a esta convención seleccionados al azar, 3 lleguen en avión, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren?

5.24 Un ingeniero de seguridad afirma que sólo 40% de los trabajadores utilizan cascos de seguridad cuando comen en el lugar de trabajo. Suponga que esta afirmación es cierta y calcule la probabilidad de que 4 de 6 trabajadores elegidos al azar utilicen sus cascos mientras comen en el lugar de trabajo.

5.25 Suponga que para un embarque muy grande de circuitos integrados, la probabilidad de que falle cualquiera de ellos es de 0.10. Suponga que se cumplen los supuestos en que se basan las distribuciones binomiales y calcule la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 20 fallen, a lo sumo, 3 chips integrados.

5.26 Suponga que 6 de 10 accidentes automovilísticos se deben principalmente a que no se respeta el límite de velocidad y calcule la probabilidad de que, de 8 accidentes automovilísticos, 6 se deban principalmente a una violación del límite de velocidad

a) mediante el uso de la fórmula para la distribución binomial;

b) usando la tabla A.1.

5.27 Si una bombilla fluorescente tiene una probabilidad de 0.9 de tener una vida útil de al menos 800 horas, calcule las probabilidades de que, de 20 bombillas fluorescentes,

a) exactamente 18 tengan una vida útil de al menos 800 horas;

b) al menos 15 tengan una vida útil de al menos 800 horas;

c) al menos 2 *no* tengan una vida útil de al menos 800 horas.

5.28 Un fabricante sabe que, en promedio, 20% de los tostadores eléctricos producidos requerirá reparaciones durante el primer año posterior a su venta. Suponga que se seleccionan al azar 20 tostadores y calcule los números x y y adecuados tales que

a) la probabilidad de que al menos x de ellos requieran reparaciones sea menor que 0.5;

b) la probabilidad de que al menos y de ellos *no* requieran reparaciones sea mayor que 0.8.

5.3 Distribución hipergeométrica

La manera más simple de ver la diferencia entre la distribución binomial de la sección 5.2 y la distribución hipergeométrica consiste en observar la forma en que se realiza el muestreo. Los tipos de aplicaciones de la distribución hipergeométrica son muy similares a los de la distribución binomial. Nos interesa el cálculo de probabilidades para el número de observaciones que caen en una categoría específica. Sin embargo, la distribución binomial requiere que los ensayos sean independientes. Por consiguiente, si se aplica esta distribución, digamos, tomando muestras de un lote de artículos (barajas, lotes de artículos producidos), el muestreo se debe efectuar **reemplazando** cada artículo después de observarlo. Por otro lado, la distribución hipergeométrica no requiere independencia y se basa en el muestreo que se realiza **sin reemplazo**.

Las aplicaciones de la distribución hipergeométrica se encuentran en muchos campos, sobre todo en el muestreo de aceptación, las pruebas electrónicas y los controles de calidad. Evidentemente, en muchos de estos campos el muestreo se realiza a expensas del artículo que se prueba; es decir, el artículo se destruye, por lo que no se puede reemplazar en la muestra. Por consiguiente, el muestreo sin reemplazo es necesario. Utilizaremos un caso simple con barajas para nuestro primer ejemplo.

Si deseamos calcular la probabilidad de obtener 3 cartas rojas en 5 extracciones de una baraja ordinaria de 52 cartas, la distribución binomial de la sección 5.2 no se aplica a menos que cada carta se reemplace y que el paquete se revuelva antes de extraer la siguiente carta. Para resolver el problema del muestreo sin reemplazo volvamos a plantear el problema. Si se sacan 5 cartas al azar, nos interesa la probabilidad de seleccionar 3 cartas rojas de las 26 disponibles y 2 de las 26 cartas negras de que dispone la baraja. Hay $\binom{26}{3}$ formas de seleccionar 3 cartas rojas, y para cada una de estas formas podemos elegir 2 cartas negras de $\binom{26}{2}$ maneras. Por lo tanto, el número total de formas de seleccionar 3 cartas rojas y 2 negras en 5 extracciones es el producto $\binom{26}{3}\binom{26}{2}$. El número total de formas de seleccionar cualesquiera 5 cartas de las 52 disponibles es $\binom{52}{5}$. En consecuencia, la probabilidad de seleccionar 5 cartas sin reemplazo, de las cuales 3 sean rojas y 2 negras está dada por

$$\frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{(26!/3!\,23!)(26!/2!\,24!)}{52!/5!\,47!} = 0.3251.$$

En general, nos interesa la probabilidad de seleccionar x éxitos de los k artículos considerados éxitos y $n - x$ fracasos de los $N - k$ artículos que se consideran fracasos cuando una muestra aleatoria de tamaño n se selecciona de N artículos. Esto se conoce como un **experimento hipergeométrico**; es decir, aquel que posee las siguientes dos propiedades:

1. De un lote de N artículos se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n sin reemplazo.
2. k de los N artículos se pueden clasificar como éxitos y $N - k$ se clasifican como fracasos.

El número X de éxitos de un experimento hipergeométrico se denomina **variable aleatoria hipergeométrica**. En consecuencia, la distribución de probabilidad de la variable hipergeométrica se conoce como **distribución hipergeométrica**, y sus valores se denotan con $h(x; N, n, k)$, ya que dependen del número de éxitos k en el conjunto N del que seleccionamos n artículos.

Distribución hipergeométrica en el muestreo de aceptación

Como en el caso de la distribución binomial, la distribución hipergeométrica se aplica en el muestreo de aceptación, donde se toman muestras del material o las partes de los lotes con el fin de determinar si se acepta o no el lote completo.

Ejemplo 5.8: Una parte específica que se utiliza como dispositivo de inyección se vende en lotes de 10. El productor considera que el lote es aceptable si no tiene más de un artículo defectuoso. Un plan de muestreo incluye un muestreo aleatorio y la prueba de 3 de cada 10 partes. Si ninguna de las 3 está defectuosa, se acepta el lote. Comente acerca de la utilidad de este plan.

***Solución*:** Supongamos que el lote es verdaderamente **inaceptable** (es decir, que 2 de cada 10 partes están defectuosas). La probabilidad de que el plan de muestreo considere que el lote aceptable es

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 0.467.$$

Por consiguiente, si el lote es realmente inaceptable porque 2 partes están defectuosas, este plan de muestreo permitirá que se acepte aproximadamente 47% de las veces. Como resultado, este plan debería considerarse inadecuado.

Hagamos una generalización para calcular una fórmula para $h(x; N, n, k)$. El número total de muestras de tamaño n elegidas de N artículos es $\binom{N}{n}$. Se supone que estas muestras tienen la misma probabilidad. Hay $\binom{k}{x}$ formas de seleccionar x éxitos de los k disponibles, y por cada una de estas formas podemos elegir $n - x$ fracasos en formas $\binom{N-k}{n-x}$. De esta manera, el número total de muestras favorables entre las $\binom{N}{n}$ muestras posibles, está dado por $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$. En consecuencia, tenemos la siguiente definición.

Distribución hipergeométrica

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica X, el número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n que se selecciona de N artículos, en los que k se denomina **éxito** y $N - k$ **fracaso**, es

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{máx}\{0, n - (N - k)\} \leq x \leq \text{mín}\{n, k\}.$$

El rango de x puede determinarse mediante los tres coeficientes binomiales en la definición, donde x y $n - x$ no son más que k y $N - k$; respectivamente; y ambos no pueden ser menores que 0. Por lo general, cuando tanto k (el número de éxitos) como $N - k$ (el número de fracasos) son mayores que el tamaño de la muestra n, el rango de una variable aleatoria hipergeométrica será $x = 0, 1,..., n$.

Ejemplo 5.9: Lotes con 40 componentes cada uno que contengan 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de, que en la muestra, se encuentre exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?

***Solución*:** Si utilizamos la distribución hipergeométrica con $n = 5$, $N = 40$, $k = 3$ y $x = 1$, encontramos que la probabilidad de obtener un componente defectuoso es

$$h(1; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.3011.$$

De nueva cuenta este plan no es adecuado porque sólo 30% de las veces detecta un lote malo (con 3 componentes defectuosos).

Teorema 5.2: La media y la varianza de la distribución hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ son

$$\mu = \frac{nk}{N} \text{ y } \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

La demostración para la media se muestra en el apéndice A.24.

Ejemplo 5.10: Volvamos a investigar el ejemplo 3.4 de la página 83. La finalidad de este ejemplo fue ilustrar el concepto de una variable aleatoria y el espacio muestral correspondiente. En el ejemplo tenemos un lote de 100 artículos, de los cuales 12 están defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 defectuosos en una muestra de 10?

***Solución*:** Si utilizamos la función de probabilidad hipergeométrica, tenemos

$$h(3;\,100,\,10,\,12) = \frac{\binom{12}{3}\binom{88}{7}}{\binom{100}{10}} = 0.08.$$

Ejemplo 5.11: Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria del ejemplo 5.9, y después utilice el teorema de Chebyshev para interpretar el intervalo $\mu \pm 2\sigma$.

***Solución*:** Como el ejemplo 5.9 fue un experimento hipergeométrico con $N = 40$, $n = 5$ y $k = 3$, usando el teorema 5.2, tenemos

$$\mu = \frac{(5)(3)}{40} = \frac{3}{8} = 0.375,$$

y

$$\sigma^2 = \left(\frac{40-5}{39}\right)(5)\left(\frac{3}{40}\right)\left(1-\frac{3}{40}\right) = 0.3113.$$

Si calculamos la raíz cuadrada de 0.3113, encontramos que $\sigma = 0.558$. Por lo tanto, el intervalo que se requiere es $0.375 \pm (2)(0.558)$, o de -0.741 a 1.491. El teorema de Chebyshev establece que el número de componentes defectuosos que se obtienen cuando, de un lote de 40 componentes, se seleccionan 5 al azar, de los cuales 3 están defectuosos, tiene una probabilidad de al menos 3/4 de caer entre -0.741 y 1.491. Esto es, al menos tres cuartas partes de las veces los 5 componentes incluirán menos de 2 defectuosos.

Relación con la distribución binomial

En este capítulo examinamos varias distribuciones discretas importantes que tienen diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí. El estudiante novato debería tener una clara comprensión de tales relaciones. Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial. Como se esperaría, si n es pequeña comparada con N, la naturaleza de los N artículos cambia muy poco en cada prueba. Así, cuando n es pequeña en comparación con N, se puede utilizar una distribución binomial para aproximar la distribución hipergeométrica. De hecho, por regla general la aproximación es buena cuando $n/N \leq 0.05$.

Por lo tanto, la cantidad k/N desempeña el papel del parámetro binomial p y, como consecuencia, la distribución binomial se podría considerar una versión de población grande de la distribución hipergeométrica. La media y la varianza entonces se obtienen de las fórmulas

$$\mu = np = \frac{nk}{N} \text{ y } \sigma^2 = npq = n \cdot \frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right).$$

Al comparar estas fórmulas con las del teorema 5.2, vemos que la media es la misma, mientras que la varianza difiere por un factor de corrección de $(N - n)/(N - 1)$, que es insignificante cuando n es pequeña en relación con N.

Ejemplo 5.12: Un fabricante de neumáticos para automóvil reporta que de un cargamento de 5000 piezas que se mandan a un distribuidor local, 1000 están ligeramente manchadas. Si se compran al azar 10 de estos neumáticos al distribuidor, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 estén manchados?

***Solución*:** Como $N = 5000$ es grande con respecto a la muestra de tamaño $n = 10$, nos aproximaremos a la probabilidad deseada usando la distribución binomial. La probabilidad de obtener un neumático manchado es 0.2. Por lo tanto, la probabilidad de obtener exactamente 3 manchados es

$$h(3; 5000, 10, 1000) \approx b(3; 10, 0.2) = 0.8791 - 0.6778 = 0.2013.$$

Por otro lado, la probabilidad exacta es $h(3; 5000, 10, 1000) = 0.2015$. ▟

La distribución hipergeométrica se puede extender para tratar el caso donde los N artículos se pueden dividir en k celdas $A_1, A_2,..., A_k$ con a_1 elementos en la primera celda, a_2 en la segunda,..., a_k elementos en la k-ésima celda. Lo que nos interesa ahora es la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño n produzca x_1 elementos de A_1, x_2 elementos de A_2, ... , y x_k elementos de A_k. Representemos esta probabilidad mediante

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n).$$

Para obtener una fórmula general observamos que el número total de muestras de tamaño n que se pueden elegir a partir de N artículos es aún $\binom{N}{n}$. Hay $\binom{a_1}{x_1}$ formas de seleccionar x_1 artículos de los que hay en A_1, y para cada uno de éstos podemos elegir x_2 de los de A_2 en $\binom{a_2}{x_2}$ formas. Por lo tanto, podemos seleccionar x_1 artículos de A_1 y x_2 artículos de A_2 en $\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}$ formas. Si continuamos de esta forma, podemos seleccionar todos los n artículos que constan de x_1 de A_1, x_2 de A_2,..., y x_k de A_k en

$$\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k} \quad \text{formas.}$$

La distribución de probabilidad que se requiere se define ahora como sigue.

Distribución hipergeométrica multivariada Si N artículos se pueden dividir en las k celdas $A_1, A_2,..., A_k$ con $a_1, a_2,..., a_k$ elementos, respectivamente, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2,..., X_k$, que representan el número de elementos que se seleccionan de $A_1, A_2,..., A_k$ en una muestra aleatoria de tamaño n, es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}},$$

con $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ y $\sum_{i=1}^{k} a_i = N$.

Ejemplo 5.13: Se usa un grupo de 10 individuos para un estudio de caso biológico. El grupo contiene 3 personas con sangre tipo O, 4 con sangre tipo A y 3 con tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 5 contenga 1 persona con sangre tipo O, 2 personas con tipo A y 2 personas con tipo B?

***Solución*:** Si se utiliza la extensión de la distribución hipergeométrica con $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $N = 10$ y $n = 5$, vemos que la probabilidad que se desea es

$$f(1, 2, 2; 3, 4, 3, 10, 5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}.$$ ▟

Ejercicios

5.29 El dueño de una casa planta 6 bulbos seleccionados al azar de una caja que contiene 5 bulbos de tulipán y 4 de narciso. ¿Cuál es la probabilidad de que plante 2 bulbos de narciso y 4 de tulipán?

5.30 Para evitar la detección en la aduana, un viajero coloca 6 comprimidos con narcóticos en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina que aparentemente son similares. Si el oficial de la aduana selecciona 3 de las tabletas al azar para su análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos?

5.31 Se selecciona al azar un comité de 3 personas a partir de 4 médicos y 2 enfermeras. Escriba una fórmula para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que representa el número de médicos en el comité. Calcule $P(2 \leq X \leq 3)$.

5.32 De un lote de 10 misiles, se seleccionan 4 al azar y se disparan. Si el lote contiene 3 misiles defectuosos que no pueden dispararse, ¿cuál es la probabilidad de que

a) los 4 puedan dispararse?
b) a lo sumo fallen 2?

5.33 Si de una baraja ordinaria de 52 cartas, se toman 7 y se reparten, ¿cuál es la probabilidad de que

a) exactamente 2 de ellas sean cartas de figuras?
b) al menos 1 de ellas sea una reina?

5.34 ¿Cuál es la probabilidad de que una camarera se rehúse a servir bebidas alcohólicas a sólo 2 menores si verifica al azar 5 identificaciones de 9 estudiantes, de los cuales 4 son menores de edad?

5.35 Una empresa está interesada en evaluar su procedimiento de inspección actual para embarques de 50 artículos idénticos. El procedimiento consiste en tomar una muestra de 5 artículos y aceptar el embarque si no se encuentran más de 2 defectuosos. ¿Qué proporción de embarques con 20% de artículos defectuosos se aceptará?

5.36 Una empresa de manufactura utiliza un esquema de aceptación para los artículos de una línea de producción antes de que se embarquen. El plan tiene dos etapas. Se preparan cajas de 25 artículos para su embarque y se prueba una muestra de 3 en busca de defectuosos. Si se encuentra alguno defectuoso, se regresa toda la caja para verificar el 100% de ellos. Si no se encuentran artículos defectuosos, la caja se embarca.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se embarque una caja que contiene 3 defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se regrese para su revisión una caja que contenga sólo un artículo defectuoso?

5.37 Suponga que la empresa fabricante del ejercicio 5.36 decide cambiar su esquema de aceptación. Con el nuevo esquema un inspector toma un artículo al azar, lo inspecciona y después lo regresa a la caja; un segundo inspector hace lo mismo. Finalmente, un tercer inspector lleva a cabo el mismo procedimiento. Si cualquiera de los tres encuentra un artículo defectuoso, la caja no se embarca. Responda los incisos del ejercicio 5.36 con este nuevo plan.

5.38 De los 150 empleados de hacienda en una ciudad grande, sólo 30 son mujeres. Suponga que se eligen al azar 10 de los empleados para que proporcionen asesoría gratuita sobre declaraciones de impuestos a los residentes de esta ciudad; utilice la aproximación binomial a la distribución hipergeométrica para calcular la probabilidad de que se seleccionen al menos 3 mujeres.

5.39 Una ciudad vecina considera entablar una demanda de anexión en contra de una subdivisión del condado de 1200 residencias. Si los ocupantes de la mitad de las residencias objetan la anexión, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 10 residencias al menos 3 estén a favor de la anexión?

5.40 Se estima que 4000 de los 10,000 residentes con derecho al voto de una ciudad están en contra de un nuevo impuesto sobre las ventas. Si se seleccionan al azar 15 votantes y se les pide su opinión, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 7 estén a favor del nuevo impuesto?

5.41 Una encuesta a nivel nacional, realizada por la Universidad de Michigan a 17,000 estudiantes universitarios de último año, revela que casi 70% desaprueba el consumo diario de marihuana. Si se seleccionan al azar 18 de tales estudiantes y se les pide su opinión, ¿cuál es la probabilidad de que más de 9 pero menos de 14 desaprueben el consumo de marihuana?

5.42 Calcule la probabilidad de que si le toca una mano de bridge de 13 cartas, ésta incluya 5 espadas, 2 corazones, 3 diamantes y 3 tréboles.

5.43 Un club de estudiantes extranjeros tiene como miembros a 2 canadienses, 3 japoneses, 5 italianos y 2 alemanes. Si se selecciona al azar un comité de 4, calcule la probabilidad de que

a) todas las nacionalidades estén representadas;
b) todas las nacionalidades estén representadas, excepto la italiana.

5.44 Una urna contiene 3 bolas verdes, 2 azules y 4 rojas. Calcule la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de 5 bolas, se seleccionen las 2 bolas azules y al menos una roja.

5.45 A menudo los biólogos que estudian un ambiente específico etiquetan y liberan a sujetos con el fin de estimar el tamaño de la población o la prevalencia de ciertas características en ella. Los biólogos capturan a 10 animales de una especie que se piensa extinta (o casi extinta), los etiquetan y los liberan en cierta región. Después de un periodo seleccionan en la región una muestra aleatoria de 15 animales de ese tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 de los animales seleccionados estén etiquetados, si hay 25 animales de este tipo en la región?

5.46 Una empresa grande tiene un sistema de inspección para los lotes de compresores pequeños que compra a los vendedores. Un lote típico contiene 15 compresores. En el sistema de inspección se selecciona una muestra aleatoria de 5 compresores para someterlos a prueba. Suponga que en el lote de 15 hay 2 defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra determinada haya un compresor defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la inspección descubra los 2 compresores defectuosos?

5.47 Una fuerza de tareas gubernamental sospecha que algunas fábricas infringen los reglamentos federales contra la contaminación ambiental en lo que se refiere a la descarga de cierto tipo de producto. Veinte empresas están bajo sospecha pero no todas se pueden inspeccionar. Suponga que 3 de las empresas infringen los reglamentos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que si se inspeccionan 5 empresas no se encuentre ninguna infracción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la inspección de 5 empresas descubra a 2 que infringen el reglamento?

5.48 Una máquina llena 10,000 latas de bebida gaseosa por hora, de entre las cuales 300 resultan con el líquido incompleto. Cada hora se elige al azar una muestra de 30 latas y se verifica el número de onzas de gaseosa que contiene cada una. Denote con X el número de latas seleccionadas con llenado insuficiente. Encuentre la probabilidad de encontrar al menos una de las latas muestreadas con llenado insuficiente.

5.4 Distribuciones binomial negativa y geométrica

Consideremos un experimento con las mismas propiedades de un experimento binomial, sólo que en este caso las pruebas se repetirán hasta que ocurra un número *fijo* de éxitos. Por lo tanto, en vez de encontrar la probabilidad de x éxitos en n pruebas, donde n es fija, ahora nos interesa la probabilidad de que ocurra el k-ésimo éxito en la x-ésima prueba. Los experimentos de este tipo se llaman **experimentos binomiales negativos**.

Como ejemplo, considere el uso de un medicamento que se sabe que es eficaz en el 60% de los casos en que se utiliza. El uso del medicamento se considerará un éxito si proporciona algún grado de alivio al paciente. Nos interesa calcular la probabilidad de que el quinto paciente que experimente alivio sea el séptimo paciente en recibir el medicamento en una semana determinada. Si designamos un éxito con E y un fracaso con F, un orden posible para alcanzar el resultado que se desea es *EFEEEFE*, que ocurre con la siguiente probabilidad

$$(0.6)\,(0.4)\,(0.6)\,(0.6)\,(0.6)\,(0.4)\,(0.6) = (0.6)^5\,(0.4)^2.$$

Podríamos listar todos los posibles ordenamientos reacomodando las F y las E, con excepción del último resultado, que debe ser el quinto éxito. El número total de ordenamientos posibles es igual al número de particiones de los primeros 6 ensayos en 2 grupos con dos fracasos asignados a un grupo y 4 éxitos asignados al otro grupo. Esto se puede realizar en $\binom{6}{4} = 15$ formas mutuamente excluyentes. Por lo tanto, si X representa el resultado en el que ocurre el quinto éxito, entonces

$$P(X = 7) = \binom{6}{4}(0.6)^5(0.4)^2 = 0.1866.$$

¿Cuál es la variable aleatoria binomial negativa?

El número X de ensayos necesarios para generar k éxitos en un experimento binomial negativo se denomina **variable aleatoria binomial negativa** y su distribución de probabilidad se llama **distribución binomial negativa**. Dado que sus probabilidades dependen del número de éxitos deseados y de la probabilidad de un éxito en un ensayo dado, denotaremos ambas probabilidades con el símbolo $b^*(x; k, p)$. Para obtener la fórmula general para $b^*(x; k, p)$, considere la probabilidad de un éxito en el x-ésimo ensayo precedido por $k - 1$ éxitos y $x - k$ fracasos en un orden específico. Como los ensayos son independientes podemos multiplicar todas las probabilidades que corresponden a cada resultado deseado. La probabilidad de que ocurra un éxito es p y la probabilidad de que ocurra un fracaso es $q = 1 - p$. Por lo tanto, la probabilidad para el orden específico, que termina en un éxito, es

$$p^{k-1}q^{x-k}p = p^k q^{x-k}.$$

El número total de puntos muestrales en el experimento que termina en un éxito, después de la ocurrencia de $k - 1$ éxitos y $x - k$ fracasos en cualquier orden, es igual al número de particiones de $x - 1$ ensayos en dos grupos con $k - 1$ éxitos, que corresponden a un grupo, y $x - k$ fracasos, que corresponden al otro grupo. Este número se especifica con el término $\binom{x-1}{k-1}$, cada uno es mutuamente excluyente y tiene las mismas probabilidades de ocurrir p^kq^{x-k}. Obtenemos la fórmula general multiplicando p^kq^{x-k} por $\binom{x-1}{k-1}$.

Distribución binomial negativa

Si ensayos independientes repetidos pueden dar como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número del ensayo en el que ocurre el k-ésimo éxito, es

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

Ejemplo 5.14: En la serie de campeonato de la NBA (National Basketball Association), el equipo que gane 4 de 7 juegos será el ganador. Suponga que los equipos A y B se enfrentan en los juegos de campeonato y que el equipo A tiene una probabilidad de 0.55 de ganarle al equipo B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie en 6 juegos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie?

c) Si ambos equipos se enfrentaran en la eliminatoria de una serie regional y el triunfador fuera el que ganara 3 de 5 juegos, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie?

Solución: *a*) $b^*(6; 4, 0.55) = \binom{5}{3}0.55^4(1 - 0.55)^{6-4} = 0.1853.$

b) P(el equipo A gana la serie de campeonato) es

$$\begin{aligned} &b^*(4; 4, 0.55) + b^*(5; 4, 0.55) + b^*(6; 4, 0.55) + b^*(7; 4, 0.55) \\ &\quad = 0.0915 + 0.1647 + 0.1853 + 0.1668 = 0.6083. \end{aligned}$$

c) P(el equipo A gana la eliminatoria) es

$$\begin{aligned} &b^*(3; 3, 0.55) + b^*(4; 3, 0.55) + b^*(5; 3, 0.55) \\ &\quad = 0.1664 + 0.2246 + 0.2021 = 0.5931. \end{aligned}$$

La distribución binomial negativa deriva su nombre del hecho de que cada término de la expansión de $p^k(1 - q)^{-k}$ corresponde a los valores de $b^*(x; k, p)$ para $x = k$, $k + 1$, $k + 2$,.... Si consideramos el caso especial de la distribución binomial negativa, donde $k = 1$, tenemos una distribución de probabilidad para el número de ensayos que se requieren para un solo éxito. Un ejemplo sería lanzar una moneda hasta que salga una cara. Nos podemos interesar en la probabilidad de que la primera cara resulte en el cuarto lanzamiento. En este caso la distribución binomial negativa se reduce a la forma

$$b^*(x; 1, p) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Como los términos sucesivos constituyen una progresión geométrica, se acostumbra referirse a este caso especial como **distribución geométrica** y denotar sus valores con $g(x; p)$.

Distribución geométrica

Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito, es

$$g(x; p) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Ejemplo 5.15: Se sabe que en cierto proceso de fabricación uno de cada 100 artículos, en promedio, resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona, en un grupo de 100, sea el primer defectuoso que se encuentra?

***Solución*:** Si utilizamos la distribución geométrica con $x = 5$ y $p = 0.01$, tenemos

$$g(5; 0.01) = (0.01)(0.99)^4 = 0.0096.$$

Ejemplo 5.16: En "momentos ajetreados" un conmutador telefónico está muy cerca de su límite de capacidad, por lo que los usuarios tienen dificultad para hacer sus llamadas. Sería interesante saber cuántos intentos serían necesarios para conseguir un enlace telefónico. Suponga que la probabilidad de conseguir un enlace durante un momento ajetreado es $p = 0.05$. Nos interesa conocer la probabilidad de que se necesiten 5 intentos para enlazar con éxito una llamada.

***Solución*:** Si utilizamos la distribución geométrica con $x = 5$ y $p = 0.05$, obtenemos

$$P(X = x) = g(5; 0.05) = (0.05)(0.95)^4 = 0.041.$$

Muy a menudo, en aplicaciones que tienen que ver con la distribución geométrica, la media y la varianza son importantes. Se puede ver esto en el ejemplo 5.16, en donde el número *esperado* de llamadas necesario para lograr un enlace es muy importante. A continuación se establecen, sin demostración, la media y la varianza de la distribución geométrica.

Teorema 5.3: La media y la varianza de una variable aleatoria que sigue la distribución geométrica son

$$\mu = \frac{1}{p} \text{ y } \sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Aplicaciones de las distribuciones binomial negativa y geométrica

Las áreas de aplicación de las distribuciones binomial negativa y geométrica serán evidentes cuando nos enfoquemos en los ejemplos de esta sección y en los ejercicios que se dedican a tales distribuciones al final de la sección 5.5. En el caso de la distribución geométrica, el ejemplo 5.16 describe una situación en que los ingenieros o administradores intentan determinar cuán ineficiente es un sistema de conmutación telefónica durante periodos ajetreados. En este caso es evidente que los ensayos que ocurren antes de un éxito representan un costo. Si hay una alta probabilidad de que se requieran varios intentos antes de lograr conectarse, entonces se debería rediseñar el sistema.

Las aplicaciones de la distribución binomial negativa son similares por naturaleza. Supongamos que los intentos son costosos en algún sentido y que *ocurren en secuencia*. La alta probabilidad de que se requiera un número "grande" de intentos para experimentar un número fijo de éxitos no es benéfica ni para el científico ni para el ingeniero. Considere los escenarios de los ejercicios de repaso 5.90 y 5.91. En el ejercicio 5.91 el perforador define cierto nivel de éxitos perforando diferentes sitios en secuencia para encontrar petróleo. Si sólo se han hecho 6 intentos en el momento en que se experimenta el segundo éxito, parecería que las utilidades superan de forma considerable la inversión en que se incurre para la perforación.

5.5 Distribución de Poisson y proceso de Poisson

Los experimentos que producen valores numéricos de una variable aleatoria X, el número de resultados que ocurren durante un intervalo de tiempo determinado o en una región específica, se denominan **experimentos de Poisson**. El intervalo de tiempo puede ser de cualquier duración, como un minuto, un día, una semana, un mes o incluso un año. Por ejemplo, un experimento de Poisson podría generar observaciones para la variable aleatoria X que representa el número de llamadas telefónicas por hora que recibe una oficina, el número de días que una escuela permanece cerrada debido a la nieve durante el invierno o el número de juegos suspendidos debido a la lluvia durante la temporada de béisbol. La región específica podría ser un segmento de recta, una área, un volumen o quizá una pieza de material. En tales casos X podría representar el número de ratas de campo por acre, el número de bacterias en un cultivo dado o el número de errores mecanográficos por página. Un experimento de Poisson se deriva del **proceso de Poisson** y tiene las siguientes propiedades:

Propiedades del proceso de Poisson

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo o región específica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo de tiempo o región del espacio disjunto. De esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria.
2. La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región, y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo de tiempo o región.
3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo de tiempo corto o que caiga en tal región pequeña es insignificante.

El número X de resultados que ocurren durante un experimento de Poisson se llama **variable aleatoria de Poisson** y su distribución de probabilidad se llama **distribu-**

ción de Poisson. El número medio de resultados se calcula a partir de $\mu = \lambda t$, donde t es el "tiempo", la "distancia", el "área" o el "volumen" específicos de interés. Como las probabilidades dependen de λ, denotaremos la tasa de ocurrencia de los resultados con $p(x; \lambda t)$. La derivación de la fórmula para $p(x; \lambda t)$, que se basa en las tres propiedades de un proceso de Poisson que se listaron antes, está fuera del alcance de este texto. La siguiente fórmula se utiliza para calcular probabilidades de Poisson.

Distribución de Poisson

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, la cual representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o región específicos y se denota con t, es

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde λ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área o volumen y $e = 2.71828\ldots$

La tabla A.2 contiene las sumatorias de la probabilidad de Poisson

$$P(r; \lambda t) = \sum_{x=0}^{r} p(x; \lambda t),$$

para valores selectos de λt que van de 0.1 a 18.0 Ilustramos el uso de esta tabla con los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 5.17: Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo dado?

***Solución*:** Al usar la distribución de Poisson con $x = 6$ y $\lambda t = 4$, y al remitirnos a la tabla A.2, tenemos que

$$p(6; 4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = \sum_{x=0}^{6} p(x; 4) - \sum_{x=0}^{5} p(x; 4) = 0.8893 - 0.7851 = 0.1042.$$

Ejemplo 5.18: El número promedio de camiones-tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden alojar a lo sumo 15 camiones-tanque por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado lleguen más de 15 camiones y se tenga que rechazar algunos?

***Solución*:** Sea X el número de camiones-tanque que llegan cada día. Entonces, usando la tabla A.2, tenemos

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 10) = 1 - 0.9513 = 0.0487.$$

Como la distribución binomial, la distribución de Poisson se utiliza para control de calidad, aseguramiento de calidad y muestreo de aceptación. Además, ciertas distribuciones continuas importantes que se usan en la teoría de confiabilidad y en la teoría de colas dependen del proceso de Poisson. Algunas de estas distribuciones se analizan y desarrollan en el capítulo 6. El siguiente teorema acerca de la variable aleatoria de Poisson se presenta en el apéndice A.25.

Teorema 5.4: Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson $p(x; \lambda t)$ son λt.

Naturaleza de la función de probabilidad de Poisson

Al igual que muchas distribuciones discretas y continuas, la forma de la distribución de Poisson se vuelve cada vez más simétrica, incluso con forma de campana, a medida que la media se hace más grande. Una ilustración de esto son las gráficas de la función de probabilidad para $\mu = 0.1$, $\mu = 2$ y finalmente $\mu = 5$ que se muestran en la figura 5.1. Observe cómo se acercan a la simetría cuando μ se vuelve tan grande como 5. Con la distribución binomial ocurre algo parecido, como se ilustrará más adelante en este texto.

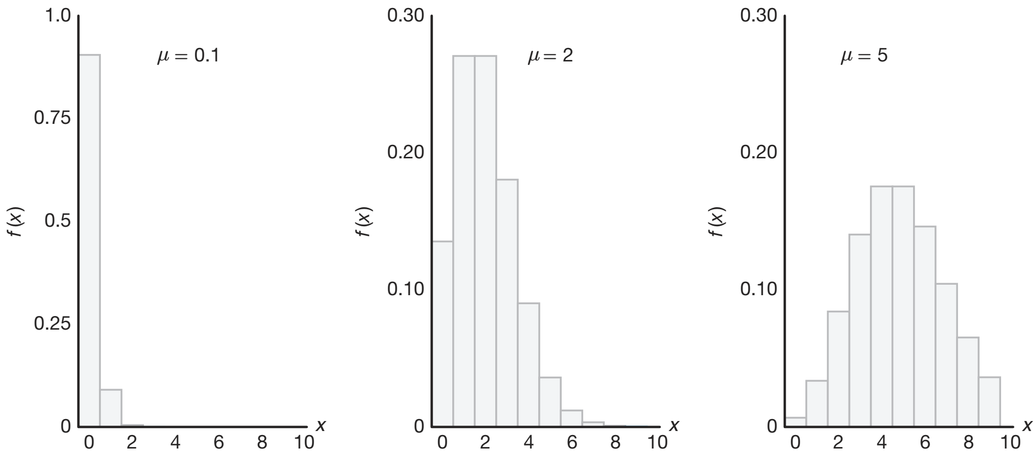

Figura 5.1: Funciones de densidad de Poisson para diferentes medias.

Aproximación de una distribución binomial por medio de una distribución de Poisson

A partir de los tres principios del proceso de Poisson debería ser evidente que la distribución de Poisson se relaciona con la distribución binomial. Aunque la de Poisson por lo general se aplica en problemas de espacio y tiempo, como se ilustra con los ejemplos 5.17 y 5.18, se podría considerar como una forma limitante de la distribución binomial. En el caso de la distribución binomial, si n es bastante grande y p es pequeña, las condiciones comienzan a simular las implicaciones *de espacio* o *tiempo continuos* del proceso de Poisson. La independencia entre las pruebas de Bernoulli en el caso binomial es consistente con la segunda propiedad del proceso de Poisson. Permitir que el parámetro p se acerque a cero se relaciona con la tercera propiedad del proceso de Poisson. De hecho, si n es grande y p es cercana a 0, se puede usar la distribución de Poisson, con $\mu = np$, para aproximar probabilidades binomiales. Si p es cercana a 1, aún podemos utilizar la distribución de Poisson para aproximar probabilidades binomiales intercambiando lo que definimos como éxito y fracaso, por lo tanto, cambiando p a un valor cercano a 0.

Teorema 5.5: Sea X una variable aleatoria binomial con distribución de probabilidad $b(x; n, p)$. Cuando $n \longrightarrow \infty$, $p \longrightarrow 0$, y $np \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ permanece constante,

$$b(x; n, p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x; \mu).$$

Ejemplo 5.19: En cierta fábrica los accidentes ocurren con muy poca frecuencia. Se sabe que la probabilidad de un accidente en cualquier día dado es de 0.005, y que los accidentes son independientes entre sí.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día de cualquier periodo determinado de 400 días ocurra un accidente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente a lo sumo en tres días de tal periodo?

***Solución*:** Sea X una variable aleatoria binomial con $n = 400$ y $p = 0.005$. Por consiguiente, $np = 2$. Si utilizamos la aproximación de Poisson,

a) $P(X = 1) = e^{-2}2^1 = 0.271$ y

b) $P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-2}2^x/x! = 0.857$.

Ejemplo 5.20: En un proceso de fabricación donde se manufacturan productos de vidrio ocurren defectos o burbujas, lo cual ocasionalmente hace que la pieza ya no se pueda vender. Se sabe que, en promedio, 1 de cada 1000 artículos producidos tiene una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 8000 tenga menos de 7 artículos con burbujas?

***Solución*:** Se trata básicamente de un experimento binomial con $n = 8000$ y $p = 0.001$. Como p es muy cercana a cero y n es bastante grande, haremos la aproximación con la distribución de Poisson utilizando

$$\mu = (8000)(0.001) = 8.$$

Por lo tanto, si X representa el número de burbujas, tenemos

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^{6} b(x; 8000, 0.001) \approx p(x; 8) = 0.3134.$$

Ejercicios

5.49 La probabilidad de que una persona que vive en cierta ciudad tenga un perro es de 0.3. Calcule la probabilidad de que la décima persona entrevistada al azar en esa ciudad sea la quinta que tiene un perro.

5.50 Calcule la probabilidad de que una persona que lanza una moneda obtenga

a) la tercera cara en el séptimo lanzamiento;

b) la primera cara en el cuarto lanzamiento.

5.51 Tres personas lanzan una moneda legal y el disparejo paga los cafés. Si todas las monedas tienen el mismo resultado, se lanzan de nuevo. Calcule la probabilidad de que se necesiten menos de 4 lanzamientos.

5.52 Un científico inocula a varios ratones, uno a la vez, el virus que produce una enfermedad, hasta que encuentra a 2 que contraen la enfermedad. Si la probabilidad de contraer la enfermedad es de 1/6, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que inocular a 8 ratones?

5.53 Un estudio de un inventario determina que, en promedio, el número de veces al día que se solicita un artículo específico en un almacén es 5. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado este artículo se pida

a) más de 5 veces?

b) ninguna vez?

5.54 De acuerdo con un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la Universidad de Massachusetts, Estados Unidos, casi dos terceras partes de los 20 millones de personas que consumen Valium son mujeres. Suponga que esta cifra es una estimación válida y calcule la probabilidad de que en un determinado día la quinta prescripción de Valium que da un médico sea

a) la primera prescripción de Valium para una mujer;

b) la tercera prescripción de Valium para una mujer.

5.55 La probabilidad de que una persona que estudia la carrera de piloto privado apruebe el examen escrito para obtener la licencia es de 0.7. Calcule la probabilidad de que cierto estudiante apruebe el examen

a) en el tercer intento;
b) antes del cuarto intento.

5.56 En cierto crucero ocurren, en promedio, 3 accidentes de tránsito al mes. ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier determinado mes en este crucero

a) ocurran exactamente 5 accidentes?
b) ocurran menos de 3 accidentes?
c) ocurran al menos 2 accidentes?

5.57 Un escritor de libros comete, en promedio, dos errores de procesamiento de texto por página en el primer borrador de su libro. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente página cometa

a) 4 o más errores?
b) ningún error?

5.58 Cierta área del este de Estados Unidos resulta afectada, en promedio, por 6 huracanes al año. Calcule la probabilidad de que para cierto año esta área resulte afectada por

a) menos de 4 huracanes;
b) cualquier cantidad entre 6 y 8 huracanes.

5.59 Suponga que la probabilidad de que una determinada persona crea un rumor acerca de las transgresiones de cierta actriz famosa es de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) la sexta persona que escuche este rumor sea la cuarta en creerlo?
b) la tercera persona que escuche este rumor sea la primera en creerlo?

5.60 Se estima que el número promedio de ratas de campo por acre, en un campo de 5 acres de trigo, es 12. Calcule la probabilidad de que se encuentren menos de 7 ratas de campo

a) en un acre dado;
b) en 2 de los siguientes 3 acres que se inspeccionen.

5.61 Suponga que, en promedio, una persona en 1000 comete un error numérico al preparar su declaración de impuestos. Si se seleccionan 10,000 formas al azar y se examinan, calcule la probabilidad de que 6, 7 u 8 de las formas contengan un error.

5.62 Se sabe que la probabilidad de que un estudiante de preparatoria no pase la prueba de escoliosis (curvatura de la espina dorsal) es de 0.004. De los siguientes 1875 estudiantes que se revisan en búsqueda de escoliosis, calcule la probabilidad de que

a) menos de 5 no pasen la prueba;
b) 8, 9 o 10 no pasen la prueba.

5.63 Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria X del ejercicio 5.58, que representa el número de huracanes que afectan cada año a cierta área del este de Estados Unidos.

5.64 Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria X del ejercicio 5.61, que representa el número de personas, de cada 10,000, que comete un error al preparar su declaración de impuestos.

5.65 Un fabricante de automóviles se preocupa por una falla en el mecanismo de freno de un modelo específico. En raras ocasiones la falla puede causar una catástrofe al manejarlo a alta velocidad. La distribución del número de automóviles por año que experimentará la catástrofe es una variable aleatoria de Poisson con $\lambda = 5$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 automóviles por año de ese modelo específico sufran una catástrofe?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de un automóvil por año experimente una catástrofe?

5.66 Los cambios en los procedimientos de los aeropuertos requieren una planeación considerable. Los índices de llegadas de los aviones son factores importantes que deben tomarse en cuenta. Suponga que los aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto, de acuerdo con un proceso de Poisson, con una frecuencia de 6 por hora. De esta manera, el parámetro de Poisson para las llegadas en un periodo de horas es $\mu = 6t$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 4 aviones pequeños durante un periodo de una hora?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 4 durante un periodo de una hora?
c) Si definimos un día laboral como de 12 horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 75 aviones pequeños lleguen durante un día laboral?

5.67 Se supone que el número de clientes que llegan por hora a ciertas instalaciones de servicio automotriz sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 7$.

a) Calcule la probabilidad de que lleguen más de 10 clientes en un periodo de dos horas.
b) ¿Cuál es el número medio de llegadas durante un periodo de 2 horas?

5.68 Considere el ejercicio 5.62. ¿Cuál es el número promedio de estudiantes que no pasan la prueba?

5.69 La probabilidad de que una persona muera al contraer una infección viral es de 0.001. De los siguientes 4000 infectados con el virus, ¿cuál es el número promedio que morirá?

5.70 Una empresa compra lotes grandes de cierta clase de dispositivo electrónico. Utiliza un método que rechaza el lote completo si en una muestra aleatoria de 100 unidades se encuentran 2 o más unidades defectuosas.

a) ¿Cuál es el número promedio de unidades defectuosas que se encuentran en una muestra de 100 unidades si el lote tiene 1% de unidades defectuosas?

b) ¿Cuál es la varianza?

5.71 Se sabe que para cierto tipo de alambre de cobre ocurren, en promedio, 1.5 fallas por milímetro. Si se supone que el número de fallas es una variable aleatoria de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurran fallas en cierta parte de un alambre que tiene 5 milímetros de longitud? ¿Cuál es el número promedio de fallas en alguna parte de un alambre que tiene 5 milímetros de longitud?

5.72 Los baches en ciertas carreteras pueden ser un problema grave y requieren reparación constantemente. Con un tipo específico de terreno y mezcla de concreto la experiencia sugiere que hay, en promedio, 2 baches por milla después de cierta cantidad de uso. Se supone que el proceso de Poisson se aplica a la variable aleatoria "número de baches".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no aparezca más de un bache en un tramo de una milla?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no aparezcan más de 4 baches en un tramo determinado de 5 millas?

5.73 En ciudades grandes los administradores de los hospitales se preocupan por el flujo de personas en las salas de urgencias. En un hospital específico de una ciudad grande el personal disponible no puede alojar el flujo de pacientes cuando hay más de 10 casos de emergencia en una hora determinada. Se supone que la llegada de los pacientes sigue un proceso de Poisson y los datos históricos sugieren que, en promedio, llegan 5 emergencias cada hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora determinada el personal no pueda alojar el flujo de pacientes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, durante un turno de 3 horas, lleguen más de 20 emergencias?

5.74 Se sabe que 3% de las personas a las que se les revisa el equipaje en un aeropuerto lleva objetos cuestionables. ¿Cuál es la probabilidad de que una serie de 15 personas cruce sin problemas antes de que se atrape a una con un objeto cuestionable? ¿Cuál es el número esperado de personas que pasarán antes de que se detenga a una?

5.75 La tecnología cibernética ha generado un ambiente donde los "robots" funcionan con el uso de microprocesadores. La probabilidad de que un robot falle durante cualquier turno de 6 horas es de 0.10. ¿Cuál es la probabilidad de que un robot funcione a lo sumo 5 turnos antes de fallar?

5.76 Se sabe que la tasa de rechazo en las encuestas telefónicas es de aproximadamente 20%. Un reportaje del periódico indica que 50 personas respondieron a una encuesta antes de que una se rehusara a participar.

a) Comente acerca de la validez del reportaje. Utilice una probabilidad en su argumento.

b) ¿Cuál es el número esperado de personas encuestadas antes de que una se rehúse a responder?

Ejercicios de repaso

5.77 Durante un proceso de producción, cada día se seleccionan al azar 15 unidades de la línea de ensamble para verificar el porcentaje de artículos defectuosos. A partir de información histórica se sabe que la probabilidad de tener una unidad defectuosa es de 0.05. Cada vez que se encuentran dos o más unidades defectuosas en la muestra de 15, el proceso se detiene. Este procedimiento se utiliza para proporcionar una señal en caso de que aumente la probabilidad de unidades defectuosas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado se detenga el proceso de producción? (Suponga 5% de unidades defectuosas).

b) Suponga que la probabilidad de una unidad defectuosa aumenta a 0.07. ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier día no se detenga el proceso de producción?

5.78 Se considera utilizar una máquina automática de soldadura para un proceso de producción. Antes de comprarla se probará para verificar si tiene éxito en 99% de sus soldaduras. Si no es así, se considerará que no es eficiente. La prueba se llevará a cabo con un prototipo que requiere hacer 100 soldaduras. La máquina se aceptará para la producción sólo si no falla en más de 3 soldaduras.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se rechace una buena máquina?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte una máquina ineficiente que solde bien el 95% de las veces?

5.79 Una agencia de renta de automóviles en un aeropuerto local tiene 5 Ford, 7 Chevrolet, 4 Dodge, 3 Honda y 4 Toyota disponibles. Si la agencia selecciona al azar 9 de estos automóviles para transportar delegados desde el aeropuerto hasta el centro de convenciones de la ciudad, calcule la probabilidad de que rente 2 Ford, 3 Chevrolet, 1 Dodge, 1 Honda y 2 Toyota.

5.80 En un centro de mantenimiento que recibe llamadas de servicio de acuerdo con un proceso de Poisson entran, en promedio, 2.7 llamadas por minuto. Calcule la probabilidad de que

a) no entren más de 4 llamadas en cualquier minuto;
b) entren menos de 2 llamadas en cualquier minuto;
c) entren más de 10 llamadas en un periodo de 5 minutos.

5.81 Una empresa de electrónica afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto proceso es de 5%. Un comprador sigue el procedimiento estándar de inspeccionar 15 unidades elegidas al azar de un lote grande. En una ocasión específica el comprador encuentra 5 unidades defectuosas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra, si es correcta la afirmación de que el 5% de los productos son defectuosos?
b) ¿Cómo reaccionaría usted si fuera el comprador?

5.82 Un dispositivo electrónico de conmutación falla ocasionalmente, pero se considera que es satisfactorio si, en promedio, no comete más de 0.20 errores por hora. Se elige un periodo particular de 5 horas para probarlo. Si durante este periodo no ocurre más de un error, se considera que el funcionamiento del dispositivo es satisfactorio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, con base en la prueba, se considere que un dispositivo no funciona satisfactoriamente cuando en realidad sí lo hace? Suponga que se trata de un proceso de Poisson.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un dispositivo se considere satisfactorio cuando, de hecho, el número medio de errores que comete es 0.25? De nuevo suponga que se trata de un proceso de Poisson.

5.83 Una empresa por lo general compra lotes grandes de cierta clase de dispositivo electrónico. Utiliza un método que rechaza el lote completo si encuentra 2 o más unidades defectuosas en una muestra aleatoria de 100 unidades.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el método rechace un lote que tiene un 1% de unidades defectuosas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que acepte un lote que tiene 5% de unidades defectuosas?

5.84 El propietario de una farmacia local sabe que, en promedio, llegan a su farmacia 100 personas por hora.

a) Calcule la probabilidad de que en un periodo determinado de 3 minutos nadie entre a la farmacia.
b) Calcule la probabilidad de que en un periodo dado de 3 minutos entren más de 5 personas a la farmacia.

5.85 a) Suponga que lanza 4 dados. Calcule la probabilidad de obtener al menos un 1.

b) Suponga que lanza 2 dados 24 veces. Calcule la probabilidad de obtener al menos uno (1, 1), es decir, un “ojos de serpiente”.

5.86 Suponga que de 500 billetes de lotería que se venden, 200 le dan a ganar al comprador al menos el costo del billete. Ahora suponga que usted compra 5 billetes. Calcule la probabilidad de ganar al menos el costo de 3 billetes.

5.87 Las imperfecciones en los tableros de circuitos y los microcircuitos de computadora se prestan para un análisis estadístico. Un tipo particular de tablero contiene 200 diodos y la probabilidad de que falle alguno es de 0.03.

a) ¿Cuál es el número promedio de fallas en los diodos?
b) ¿Cuál es la varianza?
c) El tablero funciona si no tiene diodos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que un tablero funcione?

5.88 El comprador potencial de un motor particular requiere (entre otras cosas) que éste encienda 10 veces consecutivas. Suponga que la probabilidad de que encienda es de 0.990. Suponga que los resultados de intentos de encendido son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el posible comprador acepte el motor después de sólo 10 encendidos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que intentar encenderlo 12 veces durante el proceso de aceptación?

5.89 El esquema de aceptación para comprar lotes que contienen un número grande de baterías consiste en probar no más de 75 baterías seleccionadas al azar y rechazar el lote completo si falla una sola batería. Suponga que la probabilidad de encontrar una que falle es de 0.001.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte un lote?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se rechace un lote en la vigésima prueba?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se rechace en 10 o menos pruebas?

5.90 Una empresa que perfora pozos petroleros opera en varios sitios y su éxito o fracaso es independiente de un sitio a otro. Suponga que la probabilidad de éxito en cualquier sitio específico es de 0.25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un perforador barrene 10 sitios y tenga un éxito?
b) El perforador se declarará en bancarrota si tiene que perforar 10 veces antes de que ocurra el primer éxito. ¿Cuáles son las perspectivas de bancarrota del perforador?

5.91 Considere la información del ejercicio de repaso 5.90. El perforador cree que "dará en el clavo" si logra el segundo éxito durante o antes del sexto intento. ¿Cuál es la probabilidad de que el perforador "dé en el clavo"?

5.92 Una pareja decide que continuará procreando hijos hasta tener dos hombres. Suponiendo que $P(\text{hombre}) = 0.5$, ¿cuál es la probabilidad de que su segundo niño sea su cuarto hijo?

5.93 Por los investigadores se sabe que una de cada 100 personas es portadora de un gen que lleva a la herencia de cierta enfermedad crónica. En una muestra aleatoria de 1000 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 7 individuos porten el gen? Utilice la aproximación de Poisson. Nuevamente con la aproximación de Poisson, determine cuál es el número promedio aproximado de personas, de cada 1000, que portan el gen.

5.94 Un proceso de fabricación produce piezas para componentes electrónicos. Se supone que la probabilidad de que una pieza salga defectuosa es de 0.01. Durante una prueba de esta suposición se obtiene una muestra al azar de 500 artículos y se encuentran 15 defectuosos.

a) ¿Cuál es su respuesta ante la suposición de que 1% de las piezas producidas salen defectuosas? Asegúrese de acompañar su comentario con un cálculo de probabilidad.

b) Suponiendo que 1% de las piezas producidas salen con defecto, ¿cuál es la probabilidad de que sólo se encuentren 3 defectuosas?

c) Resuelva de nueva cuenta los incisos *a*) y *b*) utilizando la aproximación de Poisson.

5.95 Un proceso de manufactura produce artículos en lotes de 50. Se dispone de planes de muestreo en los cuales los lotes se apartan periódicamente y se someten a cierto tipo de inspección. Por lo general se supone que la proporción de artículos defectuosos que resultan del proceso es muy pequeña. Para la empresa también es importante que los lotes que contengan artículos defectuosos sean un evento raro. El plan actual de inspección consiste en elegir lotes al azar, obtener muestras periódicas de 10 en 50 artículos de un lote y, si ninguno de los muestreados está defectuoso, no se realizan acciones.

a) Suponga que se elige un lote al azar y 2 de cada 50 artículos tienen defecto. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno en la muestra de 10 del lote esté defectuoso?

b) A partir de su respuesta en el inciso *a*), comente sobre la calidad de este plan de muestreo.

c) ¿Cuál es el número promedio de artículos defectuosos encontrados por cada 10 artículos de la muestra?

5.96 Considere la situación del ejercicio de repaso 5.95. Se ha determinado que el plan de muestreo debería ser lo suficientemente amplio como para que haya una probabilidad alta, digamos de 0.9, de que si hay tantos como 2 artículos defectuosos en el lote de 50 que se muestrea, al menos uno se encuentre en el muestreo. Con tales restricciones, ¿cuántos de los 50 artículos deberían muestrearse?

5.97 La seguridad nacional requiere que la tecnología de defensa sea capaz de detectar proyectiles o misiles ofensivos. Para que este sistema de defensa sea exitoso, se requieren múltiples pantallas de radar. Suponga que se usarán tres pantallas independientes y que la probabilidad de que cualquiera detecte un misil ofensivo es de 0.8. Es evidente que si ninguna pantalla detecta un misil ofensivo, el sistema no funciona y requiere mejorarse.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las pantallas detecte un misil ofensivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de las pantallas detecte el misil?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de las 3 pantallas detecten el misil?

5.98 Suponga que es importante que el sistema general de defensa contra misiles sea lo más perfecto posible.

a) Suponga que la calidad de las pantallas es la que se indica en el ejercicio de repaso 5.97. ¿Cuántas se requieren, entonces, para asegurar que la probabilidad de que el misil pase sin ser detectado sea de 0.0001?

b) Suponga que se decide utilizar sólo 3 pantallas e intentar mejorar la capacidad de detección de las mismas. ¿Cuál debe ser la eficacia individual de las pantallas (es decir, la probabilidad de detección), para alcanzar la eficacia que se requiere en el inciso *a*?

5.99 Regrese al ejercicio de repaso 5.95*a*. Vuelva a calcular la probabilidad usando la distribución binomial. Comente su respuesta.

5.100 En cierto departamento universitario de estadística hay dos vacantes. Cinco personas las solicitan; dos de ellas tienen experiencia con modelos lineales y una tiene experiencia con probabilidad aplicada. Al comité de selección se le indicó elegir a los 2 aspirantes aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 2 elegidos sean los que tienen experiencia con modelos lineales?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, de los 2 elegidos, uno tenga experiencia con modelos lineales y el otro con probabilidad aplicada?

5.101 El fabricante de un triciclo para niños ha recibido quejas porque su producto tiene defecto en los frenos. De acuerdo con el diseño del producto y muchas pruebas preliminares, se determinó que la probabilidad del tipo de defecto reportado era 1 en 10,000 (es decir, de 0.0001). Después de una minuciosa investigación de las quejas se determinó que durante cierto periodo se eligieron aleatoriamente 200 artículos de la producción, de los cuales 5 tuvieron frenos defectuosos.

a) Comente sobre la afirmación de "uno en 10,000" del fabricante. Utilice un argumento probabilístico. Use la distribución binomial para sus cálculos.

b) Repita el inciso *a* utilizando la aproximación de Poisson.

5.102 **Proyecto de grupo:** Separe la clase en dos grupos aproximadamente del mismo tamaño. Cada uno de los estudiantes del grupo 1 lanzará una moneda 10 veces (n_1) y contará el número de caras resultantes. Cada uno de los estudiantes del grupo 2 lanzará una moneda 40 veces (n_2) y también contará el número de caras obtenidas. Los miembros de cada grupo deben calcular de manera individual la proporción de caras observadas, que es una estimación de p, la probabilidad de obtener una cara. De esta manera, habrá un conjunto de valores de p_1 (del grupo 1) y un conjunto de valores de p_2 (del grupo 2). Todos los valores de p_1 y p_2 son estimaciones de 0.5, que es el valor verdadero de la probabilidad de obtener una cara de una moneda legal.

a) ¿Cuál conjunto de valores se acerca con mayor consistencia a 0.5, el de p_1 o el de p_2? Considere la demostración del teorema 5.1 de la página 147 con respecto a las estimaciones del parámetro $p = 0.5$. Los valores de p_1 se obtuvieron con $n = n_1 = 10$ y los valores de p_2 se obtuvieron con $n = n_2 = 40$. Si se utiliza la notación de la demostración, las estimaciones están dadas por

$$p_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{I_1 + \cdots + I_{n_1}}{n_1},$$

donde $I_1,..., I_{n_1}$ son ceros y unos y $n_1 = 10$, y

$$p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{I_1 + \cdots + I_{n_2}}{n_2},$$

donde $I_1,...,I_{n_2}$ son nuevamente ceros y unos y $n_2 = 40$.

b) Remítase nuevamente al teorema 5.1 y demuestre que

$$E(p_1) = E(p_2) = p = 0.5.$$

c) Demuestre que $\sigma^2_{p_1} = \frac{\sigma^2_{X_1}}{n_1}$ es 4 veces el valor de $\sigma^2_{p_2} = \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_2}$. Explique, además, por qué los valores de p_2 del grupo 2 se acercan con mayor consistencia al valor verdadero, $p = 0.5$, que los valores de p_1 del grupo 1.

Aprenderá mucho más sobre la estimación de parámetros a partir del capítulo 9. Ahí pondremos más énfasis en la importancia de la media y la varianza de un estimador de un parámetro.

5.6 Posibles riesgos y errores conceptuales; relación con el material de otros capítulos

Las distribuciones discretas estudiadas en este capítulo ocurren con mucha frecuencia en los escenarios de la ingeniería, así como en los de las ciencias biológicas y físicas. Es evidente que los ejemplos y los ejercicios sugieren esto. Los planes de muestreo industrial y muchas de las decisiones en ingeniería se basan en las distribuciones binomial y de Poisson, así como en la distribución hipergeométrica. Mientras que las distribuciones binomial negativa y geométrica se utilizan en menor grado, también tienen aplicaciones. En específico, una variable aleatoria binomial negativa se puede ver como una mezcla de variables aleatorias gamma y de Poisson (la distribución gamma se estudiará en el capítulo 6).

A pesar de las múltiples aplicaciones que estas distribuciones tienen en la vida real, podrían utilizarse de manera incorrecta, a menos que el científico sea prudente y cuidadoso. Desde luego, cualquier cálculo de probabilidad para las distribuciones que se estudiaron en este capítulo se realiza bajo el supuesto de que se conoce el valor del parámetro. Las aplicaciones en el mundo real a menudo resultan en un valor del parámetro que se puede "desplazar" debido a factores que son difíciles de controlar en el proceso, o debido a intervenciones en el proceso que no se han tomado en cuenta. Por ejemplo, en el ejercicio de repaso 5.77 se utilizó “información histórica”; sin embargo, ¿el proceso actual es el mismo que aquel en que se recabaron los datos históricos? El uso de la distribución de Poisson tiene incluso más posibilidades de enfrentar esta dificultad. Por ejemplo, en el ejercicio de repaso 5.80 las preguntas de los incisos *a*, *b* y *c* se basan en el uso de $\mu = 2.7$ llamadas por minuto. Con base en los registros históricos éste es el número de llamadas que se reciben “en promedio”. Pero en ésta y muchas otras aplicaciones de la distribución de Poisson hay momentos desocupados y momentos ajetreados, de manera que se espera que haya momentos en que las condiciones para el proceso de Poisson parezcan cumplirse, cuando en realidad no lo hacen. Por consiguiente, los cálculos de probabilidad podrían ser incorrectos. En el caso de la distribución binomial, la condición que podría fallar en ciertas aplicaciones (además de la falta de constancia de p) es la suposición de independencia, estipulando que los experimentos de Bernoulli son independientes.

Una de las aplicaciones incorrectas más célebres de la distribución binomial ocurrió en la temporada de béisbol de 1961, cuando Mickey Mantle y Roger Maris se enfrascaron en una batalla amistosa por romper el récord de todos los tiempos de 60 jonrones establecido por Babe Ruth. Un famoso artículo de una revista predijo, con base en la teoría de la probabilidad, que Mantle rompería el récord. La predicción estaba fundamentada en un cálculo de probabilidad en el que se utilizó la distribución binomial. El error clásico cometido fue la estimación del parámetro p (uno para cada jugador) con base en la frecuencia histórica relativa de jonrones a lo largo de la carrera de los 2 jugadores. Maris, a diferencia de Mantle, no había sido un jonronero prodigioso antes de 1961, de manera que su estimado de p fue bastante bajo. Como resultado de esto se determinó que Mantle tenía más probabilidades que Maris de romper el récord, pero quien logró romperlo al final fue este último.

Capítulo 6

Algunas distribuciones continuas de probabilidad

6.1 Distribución uniforme continua

Una de las distribuciones continuas más simples de la estadística es la **distribución uniforme continua**. Esta distribución se caracteriza por una función de densidad que es "plana", por lo cual la probabilidad es uniforme en un intervalo cerrado, digamos $[A, B]$. Aunque las aplicaciones de la distribución uniforme continua no son tan abundantes como las de otras distribuciones que se presentan en este capítulo, es apropiado para el principiante que comience esta introducción a las distribuciones continuas con la distribución uniforme.

Distribución uniforme

La función de densidad de la variable aleatoria uniforme continua X en el intervalo $[A, B]$ es

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de densidad forma un rectángulo con base $B - A$ y **altura constante** $\frac{1}{B-A}$. Como resultado, la distribución uniforme a menudo se conoce como **distribución rectangular**. Sin embargo, observe que el intervalo no siempre es cerrado: $[A, B]$; también puede ser (A, B). En la figura 6.1 se muestra la función de densidad para una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[1, 3]$.

Resulta sencillo calcular las probabilidades para la distribución uniforme debido a la naturaleza simple de la función de densidad. Sin embargo, observe que la aplicación de esta distribución se basa en el supuesto de que la probabilidad de caer en un intervalo de longitud fija dentro de $[A, B]$ es constante.

Ejemplo 6.1: Suponga que el tiempo máximo que se puede reservar una sala de conferencias grande de cierta empresa son cuatro horas. Con mucha frecuencia tienen conferencias extensas y breves. De hecho, se puede suponer que la duración X de una conferencia tiene una distribución uniforme en el intervalo $[0, 4]$.

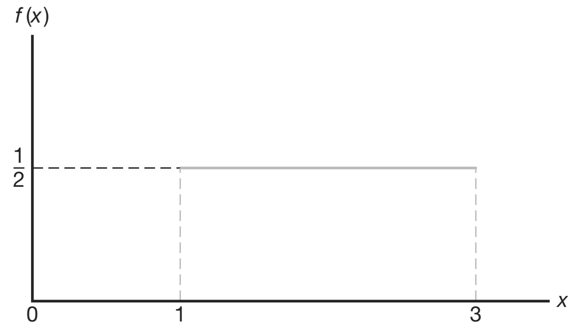

Figura 6.1: Función de densidad para una variable aleatoria en el intervalo [1, 3].

a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier conferencia determinada dure al menos 3 horas?

***Solución*:** *a*) La función de densidad apropiada para la variable aleatoria X distribuida uniformemente en esta situación es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x \le 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) $P[X \ge 3] = \int_3^4 \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4}$.

Teorema 6.1: La media y la varianza de la distribución uniforme son

$$\mu = \frac{A+B}{2} \text{ y } \sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}.$$

Las demostraciones de los teoremas se dejan al lector. Véase el ejercicio 6.1 de la página 185.

6.2 Distribución normal

La distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo de la estadística es la **distribución normal**. Su gráfica, denominada **curva normal**, es la curva con forma de campana de la figura 6.2, la cual describe de manera aproximada muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación. Por ejemplo, las mediciones físicas en áreas como los experimentos meteorológicos, estudios de la precipitación pluvial y mediciones de partes fabricadas a menudo se explican más que adecuadamente con una distribución normal. Además, los errores en las mediciones científicas se aproximan muy bien mediante una distribución normal. En 1733, Abraham DeMoivre desarrolló la ecuación matemática de la curva normal, la cual sentó las bases sobre las que descansa gran parte de la teoría de la estadística inductiva. La distribución normal a menudo se denomina **distribución gaussiana** en honor de Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien también derivó su ecuación a partir de un estudio de errores en mediciones repetidas de la misma cantidad.

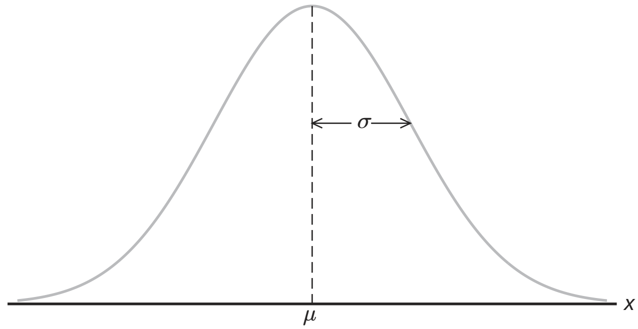

Figura 6.2: La curva normal.

Una variable aleatoria continua X que tiene la distribución en forma de campana de la figura 6.2 se denomina **variable aleatoria normal**. La ecuación matemática para la distribución de probabilidad de la variable normal depende de los dos parámetros μ y σ, su media y su desviación estándar, respectivamente. Por ello, denotamos los valores de la densidad de X por $n(x; \mu, \sigma)$.

Distribución normal

La densidad de la variable aleatoria normal X, con media μ y varianza σ^2, es

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

donde $\pi = 3.14159\ldots$ y $e = 2.71828\ldots$

Una vez que se especifican μ y σ, la curva normal queda determinada por completo. Por ejemplo, si $\mu = 50$ y $\sigma = 5$, entonces se pueden calcular las ordenadas $n(x; 50, 5)$ para diferentes valores de x y dibujar la curva. En la figura 6.3 aparecen dos curvas normales que tienen la misma desviación estándar pero diferentes medias. Las dos curvas son idénticas en forma, pero están centradas en diferentes posiciones a lo largo del eje horizontal.

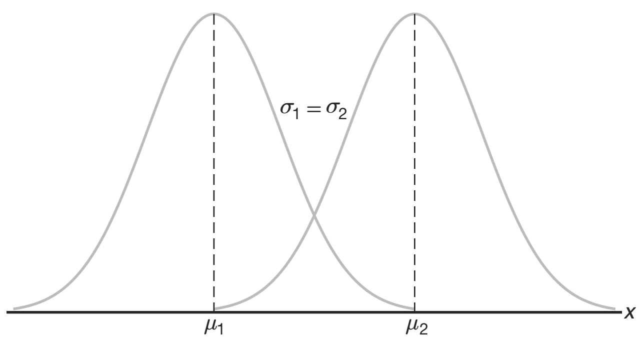

Figura 6.3: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$.

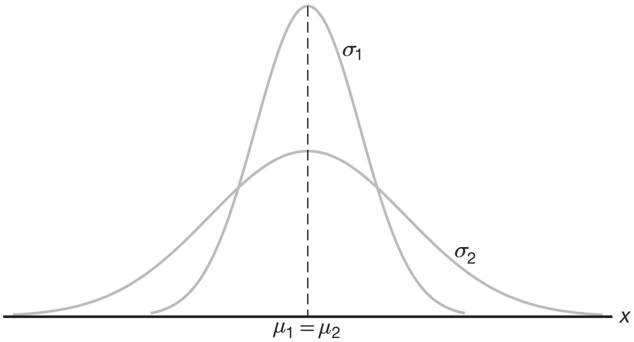

Figura 6.4: Curvas normales con $\mu_1 = \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

En la figura 6.4 se muestran dos curvas normales con la misma media pero con desviaciones estándar diferentes. Aquí se observa que las dos curvas están centradas exactamente en la misma posición sobre el eje horizontal; sin embargo, la curva con la mayor desviación estándar es más baja y más extendida. Recuerde que el área bajo una curva de probabilidad debe ser igual a 1 y, por lo tanto, cuanto más variable sea el conjunto de observaciones, más baja y más ancha será la curva correspondiente.

La figura 6.5 muestra dos curvas normales que tienen diferentes medias y diferentes desviaciones estándar. Evidentemente, están centradas en posiciones diferentes sobre el eje horizontal y sus formas reflejan los dos valores diferentes de σ.

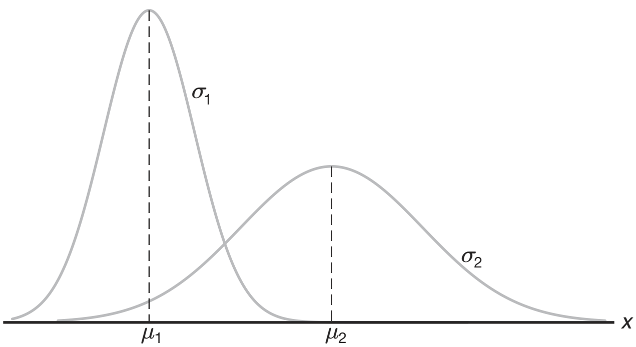

Figura 6.5: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

Con base en lo que observamos en las figuras 6.2 a 6.5, y en el examen de la primera y la segunda derivadas de $n(x; \mu, \sigma)$, listamos las siguientes propiedades de la curva normal:

1. La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su punto máximo, ocurre en $x = \mu$.
2. La curva es simétrica alrededor de un eje vertical a través de la media μ.
3. La curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$, es cóncava hacia abajo si $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, y es cóncava hacia arriba en otro caso.

4. La curva normal se aproxima al eje horizontal de manera asintótica, conforme nos alejamos de la media en cualquier dirección.
5. El área total bajo la curva y sobre el eje horizontal es igual a uno.

Teorema 6.2: La media y la varianza de $n(x; \mu, \sigma)$ son μ y σ^2, respectivamente. Por lo tanto, la desviación estándar es σ.

***Prueba*:** Para evaluar la media primero calculamos

$$E(X - \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Al establecer que $z = (x - \mu)/\sigma$ y $dx = \sigma\, dz$, obtenemos

$$E(X - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 0,$$

dado que la integral anterior es una función impar de z. Al aplicar el teorema 4.5 de la página 128 concluimos que

$$E(X) = \mu$$

La varianza de la distribución normal es dada por

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} dx.$$

De nuevo, al establecer que $z = (x - \mu)/\sigma$ y $dx = \sigma\, dz$, obtenemos

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Al integrar por partes con $u = z$ y $dv = ze^{-z^2/2} dz$ de modo que $du = dz$ y $v = -e^{-z/2}$, encontramos que

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-ze^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz \right) = \sigma^2(0+1) = \sigma^2.$$

Muchas variables aleatorias tienen distribuciones de probabilidad que se pueden describir de forma adecuada mediante la curva normal, una vez que se especifiquen μ y σ^2. En este capítulo supondremos que se conocen estos dos parámetros, quizás a partir de investigaciones anteriores. Más adelante haremos inferencias estadísticas cuando se desconozcan μ y σ^2 y se estimen a partir de los datos experimentales disponibles.

Anteriormente señalamos el papel que desempeña la distribución normal como una aproximación razonable de variables científicas en experimentos de la vida real. Hay otras aplicaciones de la distribución normal que el lector apreciará a medida que avance en el estudio de este libro. La distribución normal tiene muchas aplicaciones como *distribución limitante*. En ciertas condiciones, la distribución normal ofrece una buena aproximación continua a las distribuciones binomial e hipergeométrica. El caso de la aproximación a la distribución binomial se examina en la sección 6.5. En el capítulo 8 el lector aprenderá acerca de las **distribuciones muestrales**. Resulta que la distribución limitante de promedios muestrales es normal, lo que brinda una base amplia para la inferencia estadística, que es muy valiosa para el analista de datos interesado en la estimación y prueba de hipótesis. Las teorías de áreas importantes como el análisis de varianza (capítulos 13, 14 y 15) y el control de calidad (capítulo 17) se basan en suposiciones que utilizan la distribución normal.

En la sección 6.3 se ofrecen ejemplos para demostrar cómo se utilizan las tablas de la distribución normal. En la sección 6.4 continúan los ejemplos de aplicaciones de la distribución normal.

6.3 Áreas bajo la curva normal

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad o función de densidad se construye de manera que el área bajo la curva limitada por las dos ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ sea igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre $x = x_1$ y $x = x_2$. Por consiguiente, para la curva normal de la figura 6.6,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx,$$

es representada por el área de la región sombreada.

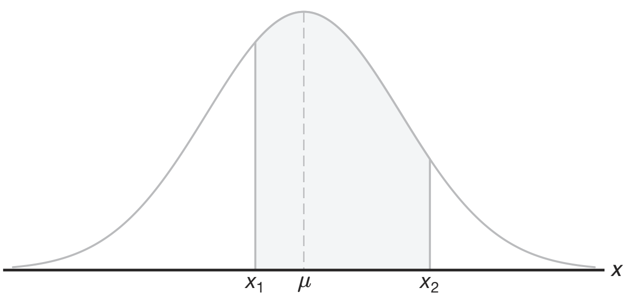

Figura 6.6: $P(x_1 < X < x_2)$ = área de la región sombreada.

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 vimos cómo la curva normal depende de la media y de la desviación estándar de la distribución que se está estudiando. El área bajo la curva entre cualesquiera dos ordenadas también debe depender de los valores μ y σ. Esto es evidente en la figura 6.7, donde sombreamos las regiones que corresponden a $P(x_1 < X < x_2)$ para dos curvas con medias y varianzas diferentes. $P(x_1 < X < x_2)$, donde X es la variable aleatoria que describe la distribución A, se indica por el área sombreada más oscura debajo de la curva de A. Si X es la variable aleatoria que describe la distribución B, entonces $P(x_1 < X < x_2)$ es dada por toda la región sombreada. Evidentemente, las dos regiones sombreadas tienen tamaños diferentes; por lo tanto, la probabilidad asociada con cada distribución será diferente para los dos valores dados de X.

Existen muchos tipos de programas estadísticos que sirven para calcular el área bajo la curva normal. La dificultad que se enfrenta al resolver las integrales de funciones de densidad normal exige tabular las áreas de la curva normal para una referencia rápida. Sin embargo, sería inútil tratar de establecer tablas separadas para cada posible valor de μ y σ. Por fortuna, podemos transformar todas las observaciones de cualquier variable

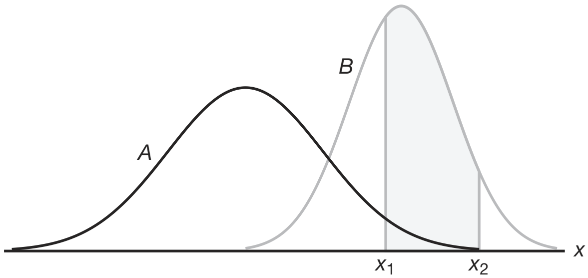

Figura 6.7: $P(x_1 < X < x_2)$ para diferentes curvas normales.

aleatoria normal X en un nuevo conjunto de observaciones de una variable aleatoria normal Z con media 0 y varianza 1. Esto se puede realizar mediante la transformación

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Siempre que X tome un valor x, el valor correspondiente de Z es dado por $z = (x - \mu)/\sigma$. Por lo tanto, si X cae entre los valores $x = x_1$ y $x = x_2$, la variable aleatoria Z caerá entre los valores correspondientes $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ y $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$. En consecuencia, podemos escribir

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} n(z; 0, 1)\,dz = P(z_1 < Z < z_2),$$

donde Z se considera una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1.

Definición 6.1: La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar**.

Las distribuciones original y transformada se ilustran en la figura 6.8. Como todos los valores de X que caen entre x_1 y x_2 tienen valores z correspondientes entre z_1 y z_2, el área bajo la curva X entre las ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ de la figura 6.8 es igual al área bajo la curva Z entre las ordenadas transformadas $z = z_1$ y $z = z_2$.

Ahora hemos reducido el número requerido de tablas de áreas de curva normal a una, la de la distribución normal estándar. La tabla A.3 indica el área bajo la curva normal estándar que corresponde a $P(Z < z)$ para valores de z que van de –3.49 a 3.49. Para ilustrar el uso de esta tabla calculemos la probabilidad de que Z sea menor que 1.74. Primero, localizamos un valor de z igual a 1.7 en la columna izquierda, después nos movemos a lo largo del renglón hasta la columna bajo 0.04, donde leemos 0.9591. Por lo tanto, $P(Z < 1.74) = 0.9591$. Para calcular un valor z que corresponda a una probabilidad dada se invierte el proceso. Por ejemplo, se observa que el valor z que deja un área de 0.2148 bajo la curva a la izquierda de z es –0.79.

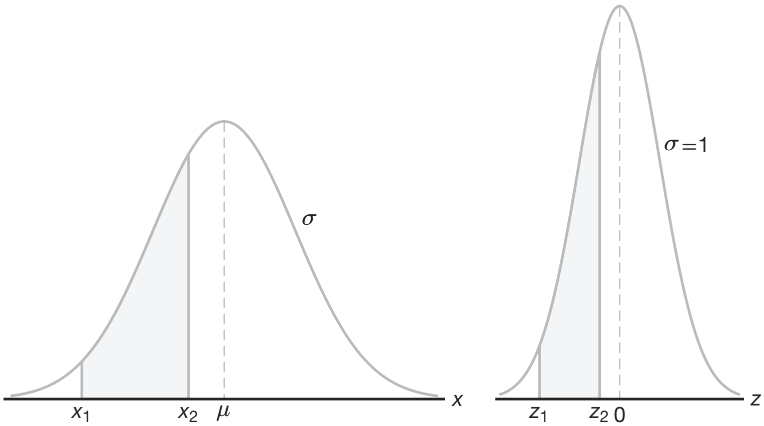

Figura 6.8: Distribuciones normales original y transformada.

Ejemplo 6.2: Dada una distribución normal estándar, calcule el área bajo la curva que se localiza

a) a la derecha de $z = 1.84$, y

b) entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$.

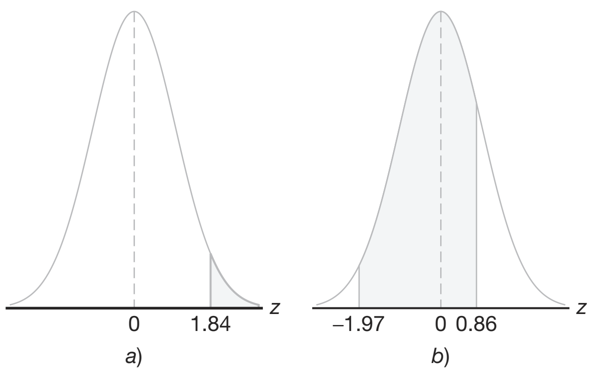

Figura 6.9: Áreas para el ejemplo 6.2.

***Solución*:** Véase la figura 6.9 para las áreas específicas.

a) El área en la figura 6.9*a* a la derecha de $z = 1.84$ es igual a 1 menos el área en la tabla A.3 a la izquierda de $z = 1.84$, a saber, $1 - 0.9671 = 0.0329$.

b) El área en la figura 6.9*b* entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$ es igual al área a la izquierda de $z = 0.86$ menos el área a la izquierda de $z = -1.97$. A partir de la tabla A.3 encontramos que el área que se desea es $0.8051 - 0.0244 = 0.7807$.