Examen final Matemática Discreta

12/06/23

IMPORTANTE: No es permitido el uso de calculadora en esta prueba

-Enunciados:

1. $En\ una\ muestra\ de\ 100\ pacientes\ se\ han\ encontrado\ que\ 74\ de\ ellos\ presententan\ síntomas\ de\ artritis, 17\ de\ fibromialgia\ y\ 25\ de\ osteoporosis. De\ los\ 100, 4\ en\ concreto\ presentan\ los\ tres\ síntomas. Por\ otra\ parte, cada\ paciente\ presenta\ al\ menos\ una\ de\ las\ tres\ enfermedades. ¿Cuántos\ de\ los\ pacientes\ tienen\ dos\ enfermedades?$ **(2 puntos)**

2. $Sabemos\ que\ la\ palabra\ clave\ de\ un\ ordenador\ está\ formada\ por\ siete\ símbolos\ (tal\ vez, repetidos)\ de\ entre\ los\ 36\ elementos\ del\ alfabeto\ A = \{a, b, \ldots, z, 0,1, \ldots, 9\}. Para\ cada\ inciso, diga\ cuantas\ pruebas\ se\ deberán\ hacer\ hasta\ encontrar\ la\ palabra\ clave.$ **(3 puntos)**

$a)\ El\ peor\ de\ los\ casos.$
$b)\ Si\ la\ palabra\ contiene$ "1979".
$c)\ Si\ está\ formada\ por\ símbolos\ diferentes\ y\ ordenados\ en\ orden\ crenciente, según\ el\ orden\ que\ aparece\ en\ A.$

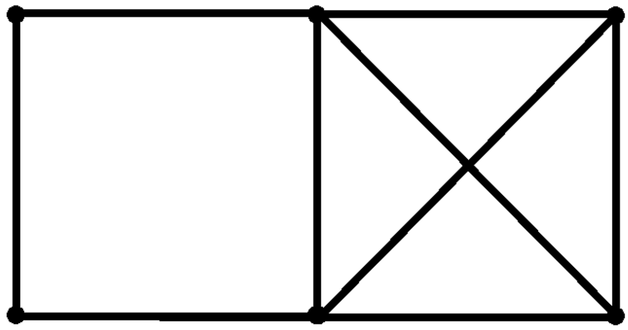
3. $Resuelve\ la\ siguiente\ ecuación\ diofántica:$ **(1,5 puntos)**

$$43x + 64y = 1$$

4. $Sea\ D\ el\ conjunto\ formado\ por\ todos\ los\ subconjuntos\ de\ cardinalidad\ igual\ a\ 2\ del\ conjunto\ S = \{1,2,3,4,5\}:$ **(1,5 puntos)**

$a)\ Construye\ el\ grafo\ G\ cuyos\ vértices\ son\ los\ elementos\ de\ D\ y\ donde\ dos\ vértices\ son\ adyacentes\ si\ tienen\ intersección\ vacía.$
$Ejemplo: \{1,2\}\ y\ \{3,4\} \in D. Además\ los\ vértices\ son\ adyacentes\ en\ G\ porque\ \{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset.$

5. Calcula el polinomio cromático del grafo G: **(2 <u>puntos</u>)**



-Soluciones:

Ejercicio 1:

Primero lo que debemos de hacer es desarrollar las abreviaciones:

$$F = \text{“Pacientes con fibromialgia”}$$

$$A = \text{“Pacientes con artritis”}$$

$$O = \text{“Pacientes con osteoporosis”}$$

Luego presentar los datos:

$|U| = 100$ $|F| = 17$ $|A| = 74$ $|O| = 25$ $|F \cap A \cap O| = 4$

Nos piden calcular los pacientes que tengan 2 enfermedades, es decir:

$$|F \cap A| + |A \cap O| + |A \cap O|$$

Como dice que cada paciente presenta al menos una de las tres enfermedades esto significa que:

$$|U| = |F \cup A \cup O|$$

Por último, desarrollamos el principio de inclusión-exclusión:

$$|F \cup A \cup O| = |F| + |A| + |O| - |F \cap A| - |A \cap O| - |A \cap O| + |F \cap A \cap O|$$

$$100 = 17 + 74 + 25 - |F \cap A| - |A \cap O| - |A \cap O| + 4$$

$$|F \cap A| + |A \cap O| + |A \cap O| = 120 - 100 = 20$$

La cantidad de personas que tienen dos enfermedades es igual a 20.

Ejercicio 2:

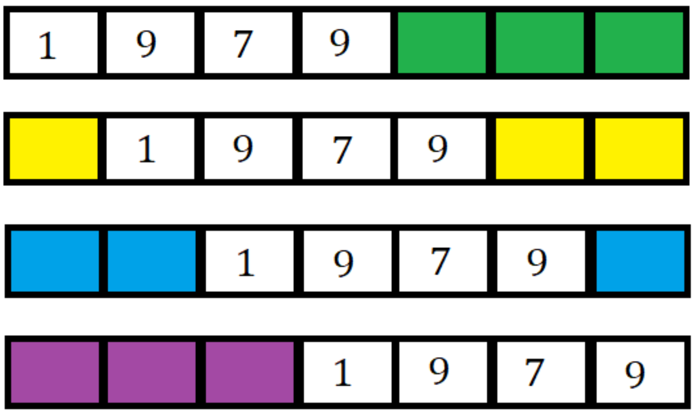
Lo que nos piden en el apartado a, es la cantidad de posibles pruebas que se generan con las condiciones previamente dichas en el enunciado.

Por lo que haciendo análisis combinatorio tenemos que hay una clave (es decir, en las claves hay importancia del orden) con 7 posibles espacios que rellenar con 36 caracteres, donde puede haber repetición como nos dice en el enunciado. Por lo que la fórmula cuando hay repetición e importa el orden es la de las variaciones con repetición:

$$VR(m, n) = m^n$$

$$VR(36{,}7) = 36^7 \text{ pruebas necesarias.}$$

En el apartado b, se nos pide que la clave tiene la secuencia "1979". Es decir, de 7 espacios, no varían 4 de ellos. Entonces son 3 los espacios que varían (según representan los rectángulos de color en el dibujo) por lo que hacemos el mismo estudio de variaciones con repetición, pero solo en 3 de los espacios. Y como hay 4 posibles maneras de representar 1979 a través de un código con importancia de orden, lo multiplicamos por cuatro:



$$4 \cdot VR(36{,}3) = 4 \cdot 36^3 \text{ pruebas necesarias.}$$

En el apartado c, nos piden que estudiemos la cantidad posible de pruebas para obtener códigos con el orden que aparece en A.

Según nos plantea el enunciado, significa que por ejemplo el primer código es correcto mientras que el segundo es incorrecto:

$$\{a, b, c, d, e, f, g\} \qquad \{g, f, e, d, c, b, a\}$$

Esto quiere decir que una vez haya salido un código con unos determinados caracteres, solo puede haber uno correcto (el que esté ordenado).

Visto con un ejemplo más sencillo, si tengo tres espacios que tienen que estar ordenador por orden alfabético, para las letras a, b y c generan todas estas posibilidades:

$$\{a, b, c\} \quad \{a, c, b\} \ \{b, a, c\} \ \{b, c, a\} \ \{c, a, b\} \ \{c, b, a\}$$

Como vemos **NO IMPORTA EL ORDEN** porque con que aparezcan los mismos caracteres en la clave, solo va a ser posible una de todas ellas, ergo hay que realizar el ejercicio con la fórmula donde no importa el orden y sí hay repetición como dice el enunciado: con la fórmula de las combinaciones con repetición.

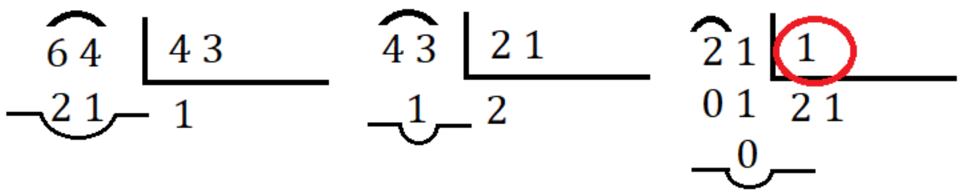
$$CR(m, n) = \binom{m + n - 1}{n} = \frac{m!}{(m - 1)! \cdot (n)!}$$

$$CR(7,36) = \binom{42}{36} = \frac{42!}{6! \cdot 36!}$$

Ejercicio 3:

Nos piden resolver la ecuación diofántica $43x + 64y = 1$

Primero tenemos que obtener el máximo común divisor de 43 y 64.



$$mcd(64{,}43) = 1 \qquad\qquad 1|1$$

Al ser divisible entre el resultado (1), se puede hacer la ecuación diofántica:

$$(43)\cdot(3) + (64)\cdot(-2) = 1$$

Solución particular: $(x_0, y_0) = (3, -2)$

Solución general:

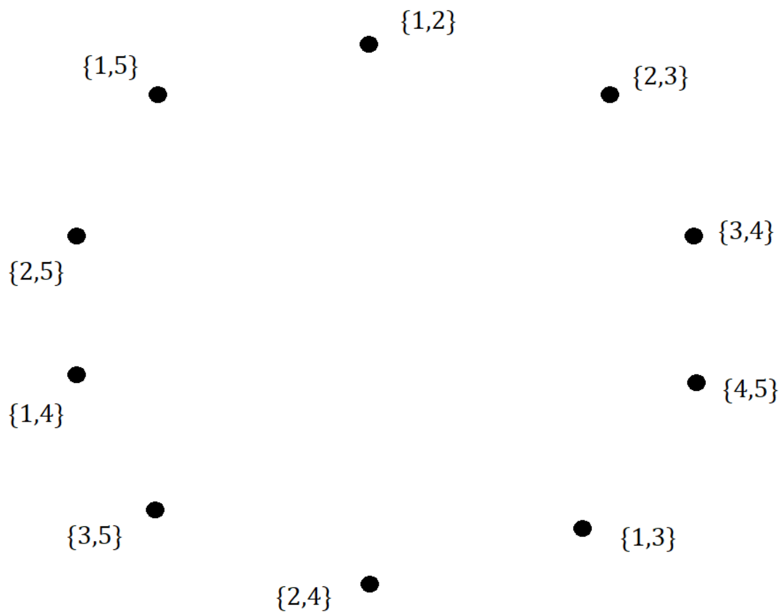
$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b\cdot k}{mcd(a,b)} = 3 + \dfrac{64k}{1} & \rightarrow \qquad x = 64k + 3 \\ y = y_0 - \dfrac{a\cdot k}{mcd(a,b)} = -2 - \dfrac{43k}{1} & \rightarrow \qquad y = -43k - 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4:

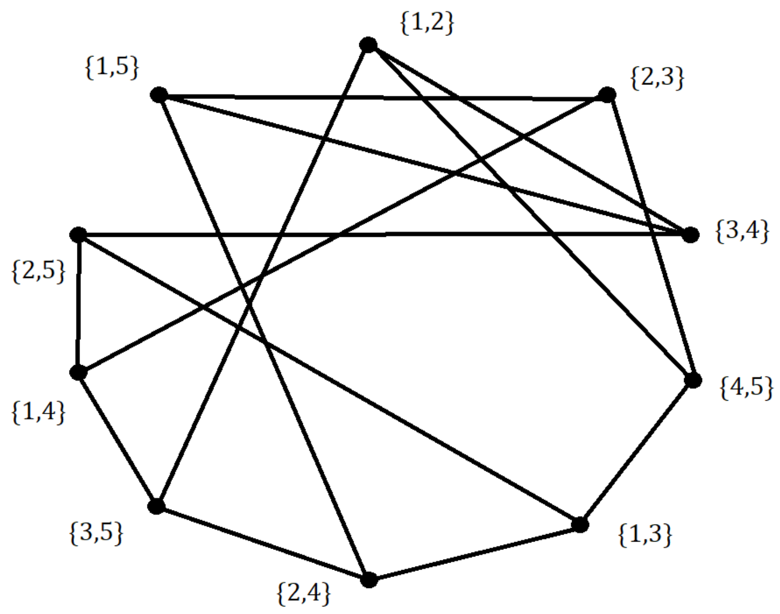
Nos definen el conjunto D como los subconjuntos de cardinalidad 2 de S= {1,2,3,4,5}. Es decir, el grafo D está formado por los vértices:

$$D = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{1,4\},\{2,5\},\{1,5\}\}$$

Construimos el grafo:



En el apartado a nos dicen que los vértices son adyacentes si la intersección de estos es el conjunto vacío por lo que lo desarrollamos:

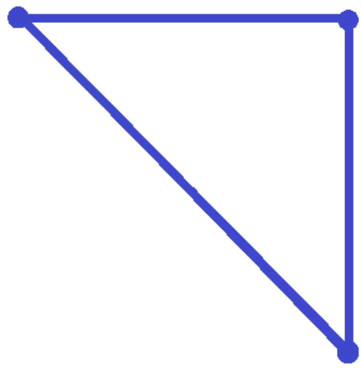


Cada vértice es de grado 3, por lo que es un grafo 3-regular.

Ejercicio 5:

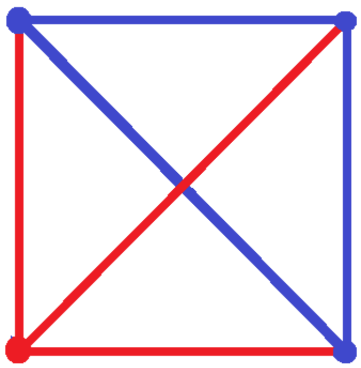
Según dice el enunciado, debemos calcular el polinomio cromático de la figura.

Para ello deberemos de escoger primero un triángulo del grafo, por lo que tendrá la forma:



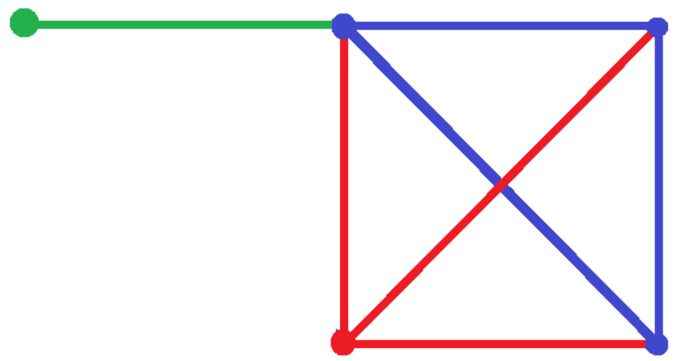
$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)$$

Vamos añadiendo vértices al grafo. El próximo al tener tres aristas se multiplica a $P_G(k)$ como $(k-3)$



$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

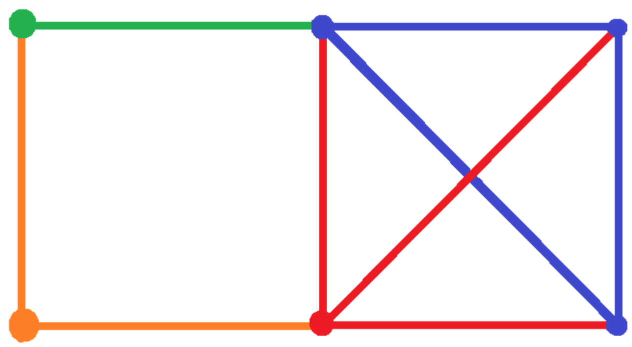
Como el siguiente solo se une a través de una arista con el subgrafo pensado, se multiplica por $(k-1)$:



$$P_G(k) = k(k-1)^2(k-2)(k-3)$$

Y el último vértice se une a través de dos aristas con el subgrafo anterior, por lo que se multiplica por $(k-2)$

:



$$P_G(k) = k(k-1)^2(k-2)^2(k-3)$$

Y este sería el polinomio cromático del grafo del ejercicio 5.