Relatório Simulação MAD - Trabalho 3

Carlos Eduardo Valladares - 119062426, Luan Martins Felix - 119022028

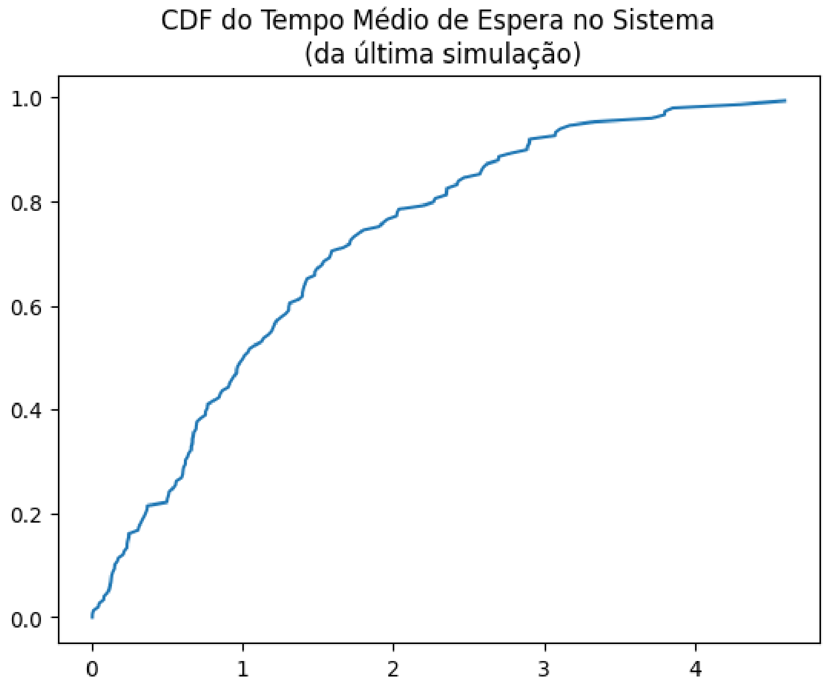
1 M/M/1 Básica e Variantes

Simulações das filas M/M/1 nos 3 diferentes cenários

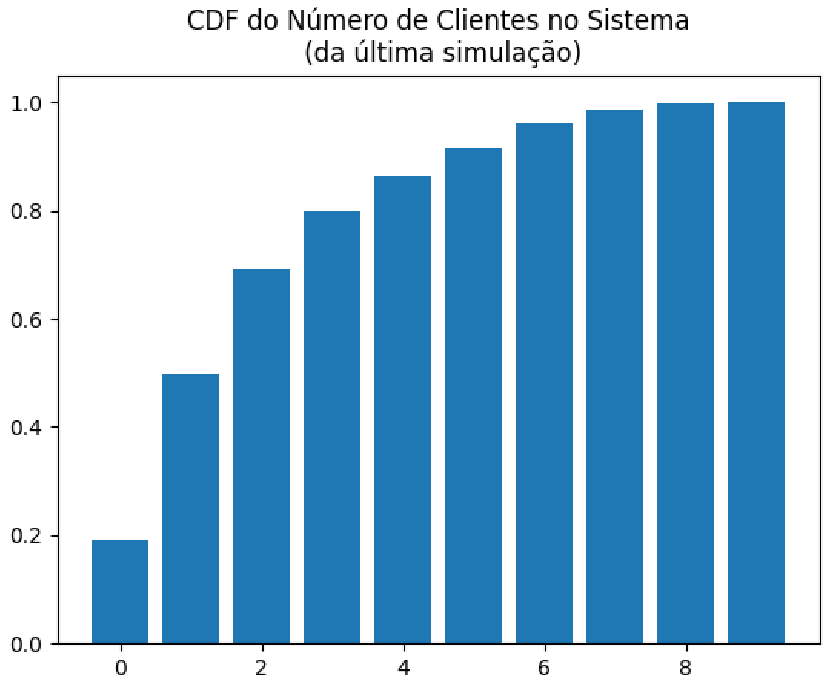
1.1 Cenário 1 - $\rho = 0.5; \lambda = 1; \mu = 2$

Tempo médio no sistema: 0.979371

Intervalo de confiança do tempo médio: [0.964943, 0.993799]

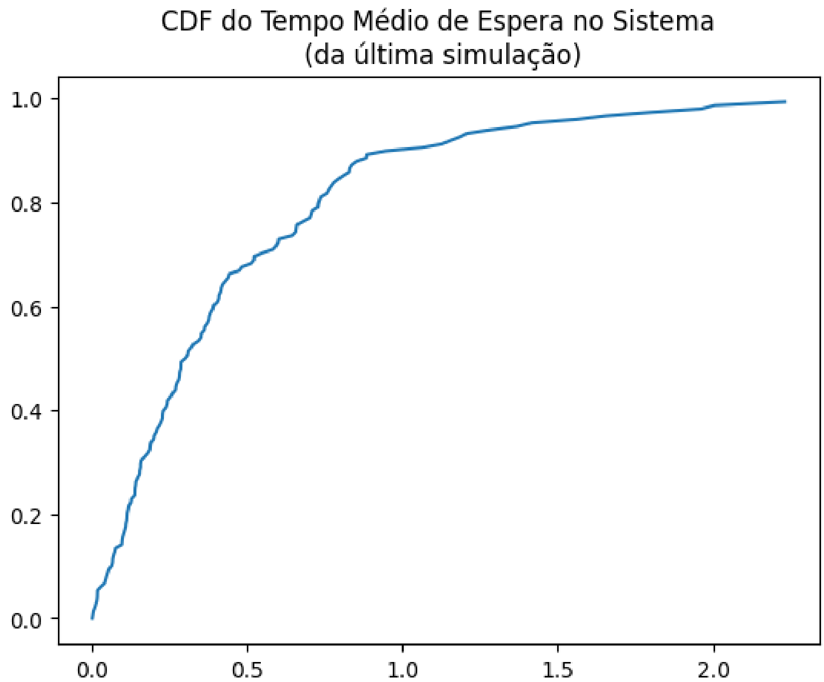


Número médio de clientes no sistema: 0.987228
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.970225, 1.004232]

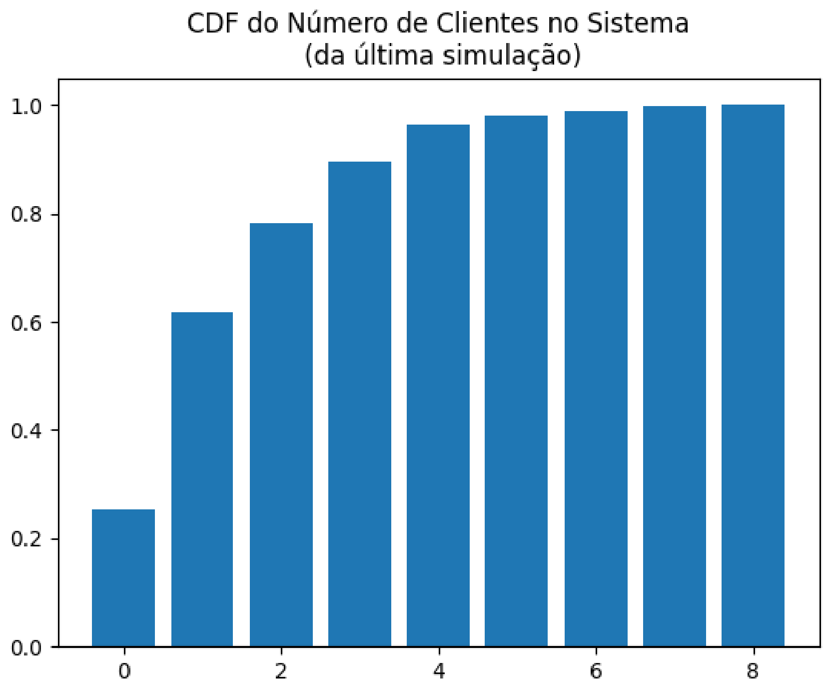


1.2 Cenário 2 - $\rho = 0.5; \lambda = 2; \mu = 4$

Tempo médio no sistema: 0.488603
Intervalo de confiança do tempo médio: [0.481251, 0.495955]

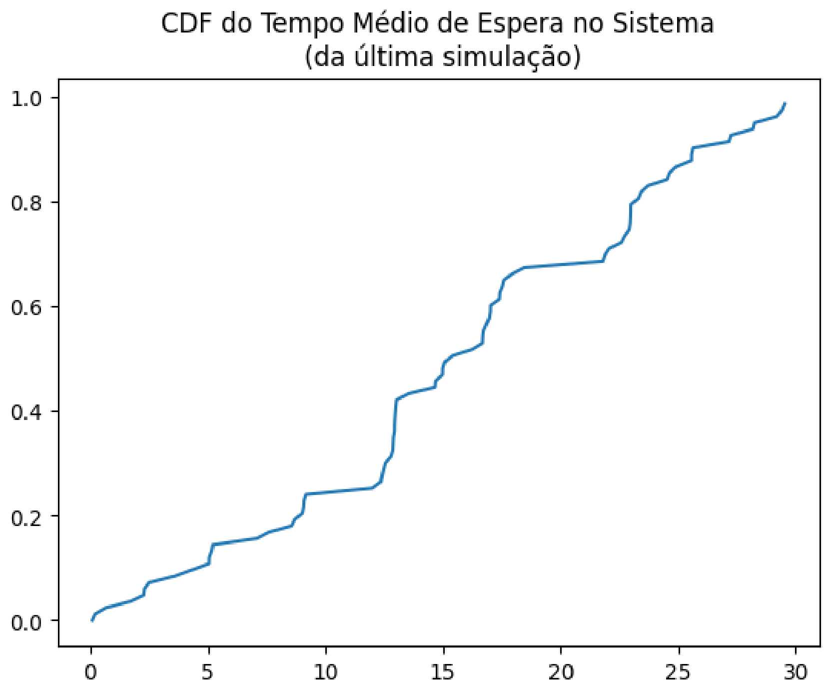


Número médio de clientes no sistema: 0.988027
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.969949, 1.006105]

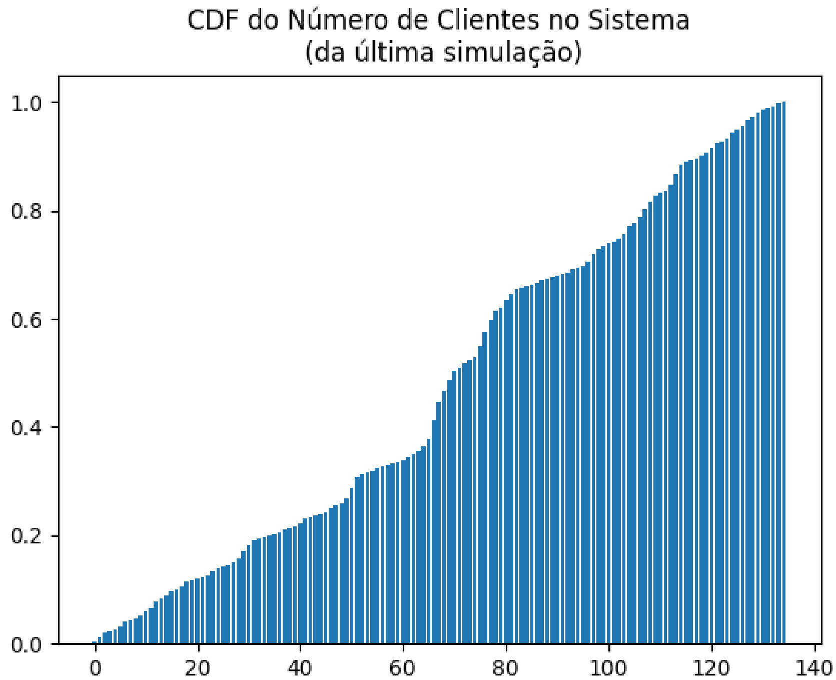


1.3 Cenário 3 - $\rho = 2; \lambda = 4; \mu = 2$

Tempo médio no sistema: 12.734368
Intervalo de confiança do tempo médio: [12.589504, 12.879233]



Número médio de clientes no sistema: 50.500982
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [49.938953, 51.063011]



1.4 Simulação para Verificar Resultados Analíticos

Consideramos uma fila M/M/1 com $\lambda = 1$ e $\mu = 10$ ($\rho = 0.1$)

1.4.1 Resultado 1: Construindo a Cadeia de Markov e resolvendo-a

Solução estacionária: $\pi = (0.9, 0.09, 0.009, ...)$

Número médio de clientes: $\frac{1}{9} = 0.111111...$
Tempo médio do cliente no sistema: $\frac{1}{9} = 0.111111...$

1.4.2 Resultado 2: Via simulação por eventos discretos

Simulando uma fila M/M/1 com $\lambda = 1$ e $\mu = 10$:

Tempo médio no sistema: 0.110885
Intervalo de confiança do tempo médio: [0.110213, 0.111557]

Número médio de clientes no sistema: 0.111573
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.110648, 0.112499]

Nosso **Resultado 1** se encontra dentro dos intervalos de confiança!

1.4.3 Resultado 3: Via Cadeia de Markov Finita

Solução estacionária:
$\pi = (0.8999999999999951, 0.08999999999999958, 0.008999999999999952,$
$0.0008999999999999956, 8.999999999999954e-05, \ldots, 8.99999999999997e-20)$

1.5 Comentários e Observações

Podemos perceber que para $\rho < 1$ (cenários 1 e 2) a fila se mantém estável. Quando dobramos $\lambda e \mu$, apesar do número médio de clientes no sistema se manter o mesmo, o tempo médio que cada cliente permanece no sistema cai pela metade. Já no caso 3, onde $\rho > 1$, a fila fica instável, e tende a crescer para o infinito ao longo do tempo.

Na seção 1.4, podemos observar que todos os 3 métodos de resolução do problema apresentam informações que estão condizentes umas com as outras. A solução estacionária da Cadeia de Markov Finita está quase idêntica à solução analítica, assim como as médias geradas pela simulação.

Os detalhes matemáticos das resoluções dos itens 1.4.1 e 1.4.3 estão no Notebook.

O simulador foi implementado utilizando uma fila de prioridades. A fila começa com um evento de chegada agendado. Cada evento de chegada agenda um próximo evento de chegada e o insere na fila. Caso haja apenas 1 pessoa no sistema, agenda-se uma saída e esta é colocada na fila. Quando um evento de saída é tratado, um novo evento de saída é agendado e colocado na fila. Existem também trechos no simulador que printam o trace da simulação, que podem ser ou não exibidos, o que é definido de acordo com o parâmetro *printTrace*.

Uma das dificuldades iniciais foi saber, exatamente, quais valores de interesse deveriam ser retornados pela simulação para que as métricas solicitadas no trabalho fossem calculadas. Devido a isso, o simulador retorna inúmeros valores após sua execução, ainda que nem todos sejam utilizados por outras partes do código.

2 Epidemias - Branching Process

Heurística utilizada para determinação de árvores infinitas: Mais de 50 períodos ocupados consecutivos na fila será considerado que a árvore é infinta.

2.1 Análise do Cenário 1 - $\lambda = 1; \mu = 2$

Árvores Finitas: 75237; Árvores Infinitas: 5

Fração de árvore finitas: 75237/75242 = 0.999934

Intervalo de confiança da fração de árvores: [0.999866, 1.000001]

2.2 Análise do Cenário 2 - $\lambda = 2; \mu = 4$

Árvores Finitas: 75637; Árvores Infinitas: 3

Fração de árvore finitas: 75637/75640 = 0.999960

Intervalo de confiança da fração de árvores: [0.999889, 1.000032]

2.3 Análise do Cenário 3 - $\lambda = 4; \mu = 2$

Árvores Finitas: 990; Árvores Infinitas: 1000

Fração de árvores finitas: 990/1990 = 0.497487

Intervalo de confiança da fração de árvores: [0.475027, 0.519948]

2.4 Relação com $s = G(s)$

Os cenários 1 e 2 têm $\rho = 0.5$, que são casos subcríticos ($\rho \leq 1$). Logo a probabilidade de extinção é igual a 1, o que está de acordo com o resultado e o intervalo de confiança das 2 primeiras simulações.

No cenário 3, temos $\rho = 2$, e portanto estamos no caso supercrítico ($\rho > 1$). Logo, vamos calcular $s = G(s)$ para encontrarmos a menor raíz da equação e determinarmos a probabilidade de eventual extinção.

$$G(s) = exp(\frac{\lambda}{\mu}(s-1)); \lambda = 4, \mu = 2$$

$$s = e^{2(s-1)}$$

A menor raiz é $s = 0.203188 \approx 20.31\%$, o que não está de acordo com nossa simulação... (não sei ao certo o porquê).

2.5 Comentários e Observações

Os cenários 1 e 2 representam epidemias onde cada pessoa infectada espalha a doença para, em média, 0.5 pessoa (ρ). Podemos perceber que, nestes casos, a epidemia tende a se extinguir rapidamente. E, apesar das simulações mostrarem alguns casos que a epidemia se estende indefinidamente, analiticamente sabemos que haverá a eventual extinção da epidemia com probabilidade 1 (estamos no caso subcrítico), resultado esse que está dentro dos intervalos de confiança.

Já no cenário 3, temos uma epidemia em que cada pessoa infectada espalha a doença para 2 outras pessoas, em média. Portanto, o comportamento da epidemia é de que, se não extinguida logo nas suas primeiras infecções, onde a probabilidade de extinção é maior, a epidemia irá se extender indefinidamente.

Infelizmente nossa simulação não está de acordo com o resultado analítico, mas ambas mostram que a fração de árvores finitas está longe de ser tão grande como nos casos estáveis.

Uma hipótese que poderia explicar esta diferença está na forma como a simulação calcula a fração de árvores finitas, o resultado analítico e o que queremos dizer com "fração de árvores finitas". A ideia da contagem na simulação é calcular "quantas são as árvores finitas em relação ao total de árvore observadas no sistema", calculando a quantidade de períodos ocupados da fila em relação ao total de períodos (ocupados e ociosos).

Uma outra hipótese que poderia explicar a discrepância dos resultados é a interpretação do que é a árvore, que a simulação considera como tendo inicio no instante que a fila fica ocupada, e término no instante em que a fila passa a ficar ociosa.