

Relatório Simulação MAD - Trabalho 3

Carlos Eduardo Valladares - 119062426, Luan Martins Felix - 119022028

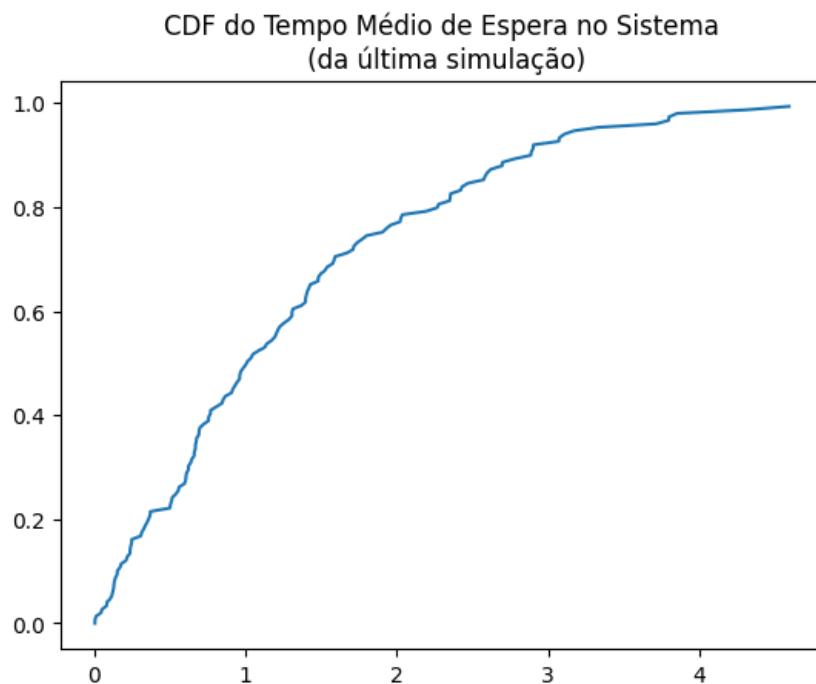
1 M/M/1 Básica e Variantes

Simulações das filas M/M/1 nos 3 diferentes cenários

1.1 Cenário 1 - $\rho = 0.5$; $\lambda = 1$; $\mu = 2$

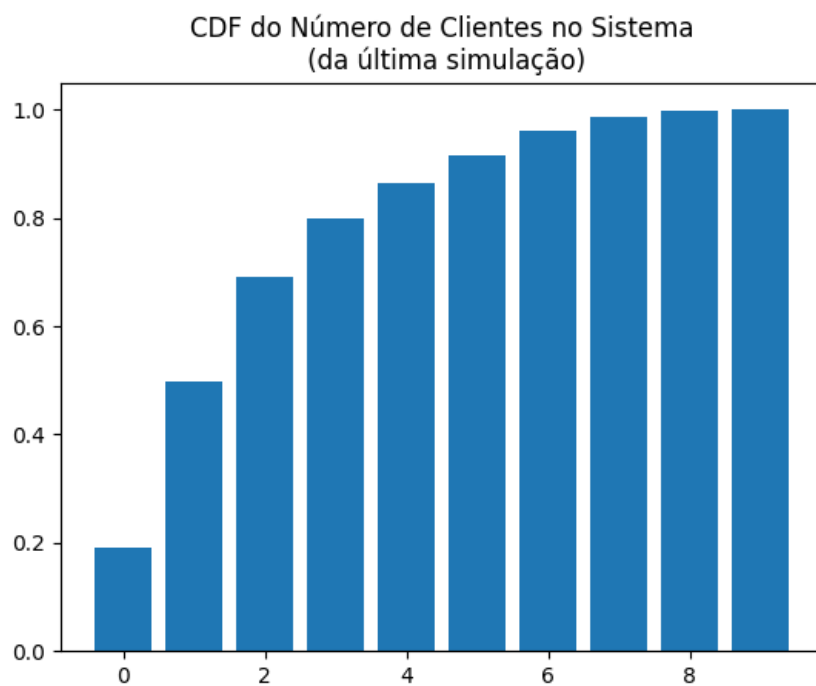
Tempo médio no sistema: 0.979371

Intervalo de confiança do tempo médio: [0.964943, 0.993799]



Número médio de clientes no sistema: 0.987228

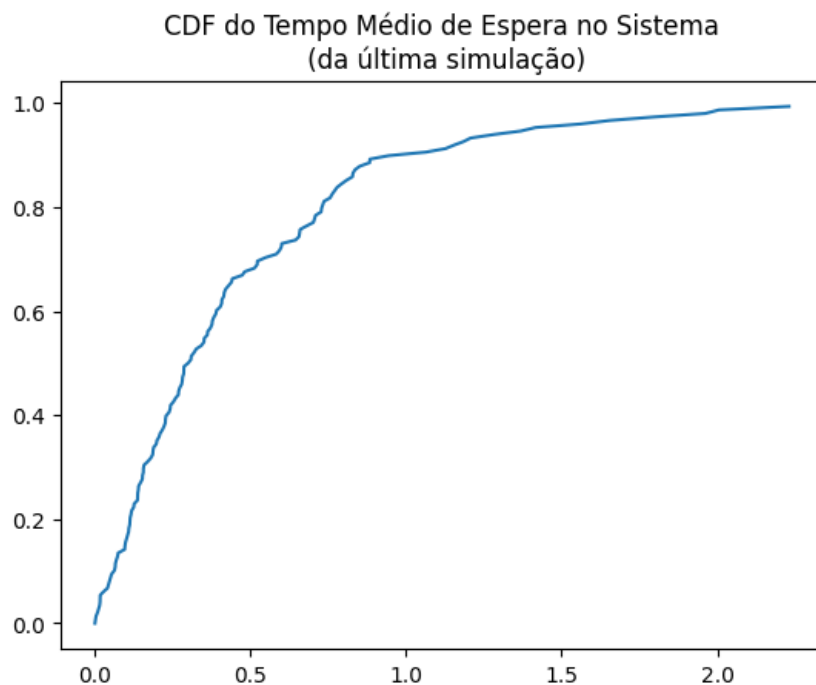
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.970225, 1.004232]



1.2 Cenário 2 - $\rho = 0.5$; $\lambda = 2$; $\mu = 4$

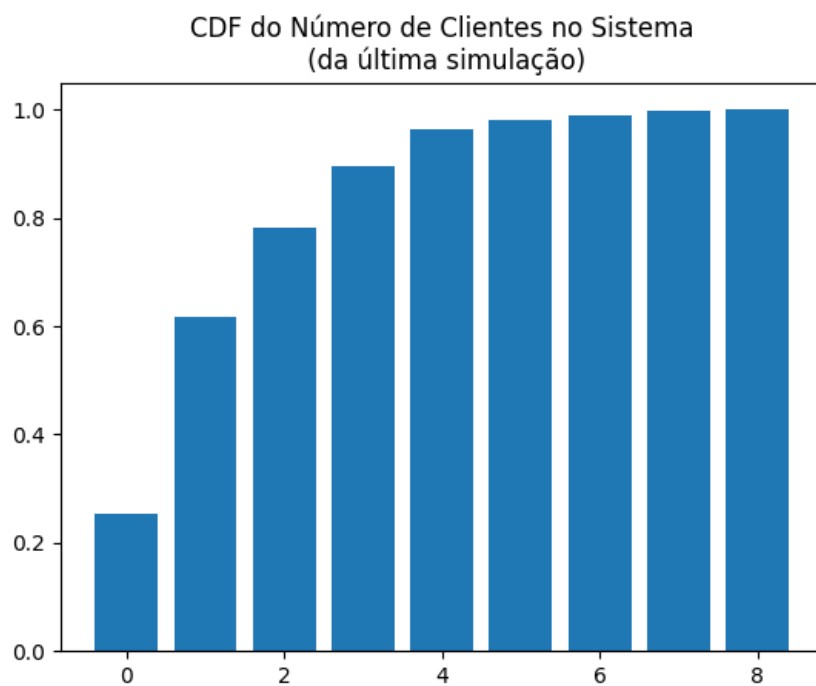
Tempo médio no sistema: 0.488603

Intervalo de confiança do tempo médio: [0.481251, 0.495955]



Número médio de clientes no sistema: 0.988027

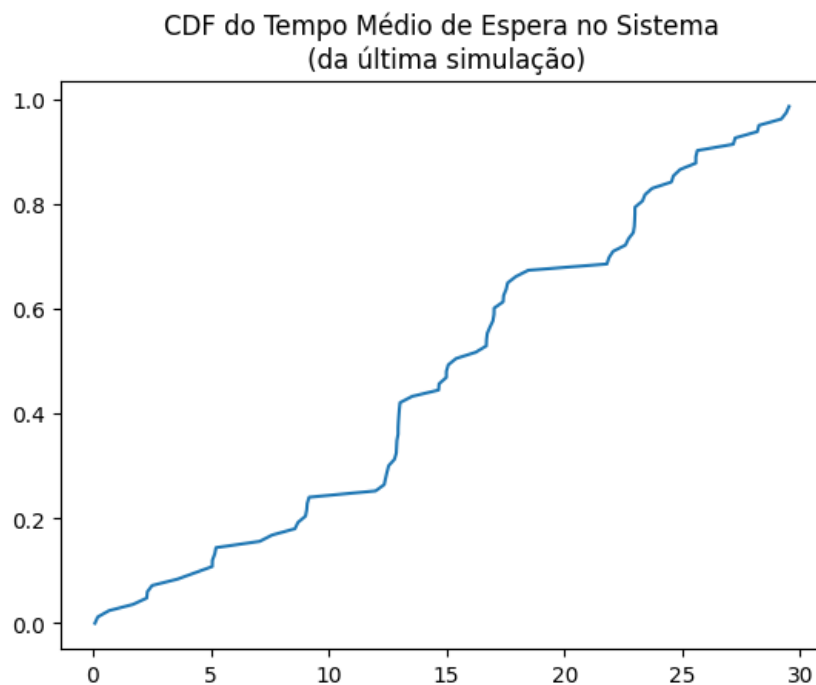
Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.969949, 1.006105]



1.3 Cenário 3 - $\rho = 2$; $\lambda = 4$; $\mu = 2$

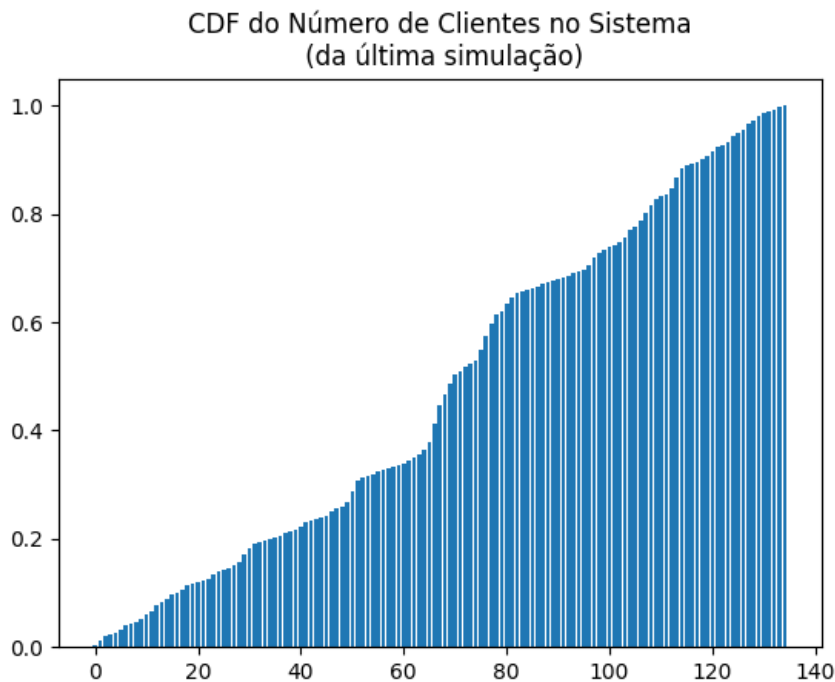
Tempo médio no sistema: 12.734368

Intervalo de confiança do tempo médio: [12.589504, 12.879233]



Número médio de clientes no sistema: 50.500982

Intervalo de confiança do número médio de clientes: [49.938953, 51.063011]



1.4 Simulação para Verificar Resultados Analíticos

Consideramos uma fila M/M/1 com $\lambda = 1$ e $\mu = 10$ ($\rho = 0.1$)

1.4.1 Resultado 1: Construindo a Cadeia de Markov e resolvendo-a

Solução estacionária: $\pi = (0.9, 0.09, 0.009, \dots)$

Número médio de clientes: $\frac{1}{9} = 0.111111\dots$

Tempo médio do cliente no sistema: $\frac{1}{9} = 0.111111\dots$

1.4.2 Resultado 2: Via simulação por eventos discretos

Simulando uma fila M/M/1 com $\lambda = 1$ e $\mu = 10$:

Tempo médio no sistema: 0.110885

Intervalo de confiança do tempo médio: [0.110213, 0.111557]

Número médio de clientes no sistema: 0.111573

Intervalo de confiança do número médio de clientes: [0.110648, 0.112499]

Nosso **Resultado 1** se encontra dentro dos intervalos de confiança!

1.4.3 Resultado 3: Via Cadeia de Markov Finita

Solução estacionária:

$\pi = (0.8999999999999951, 0.08999999999999958, 0.008999999999999952, 0.0008999999999999956, 8.999999999999954e-05, \dots, 8.99999999999997e-20)$

1.5 Comentários e Observações

Podemos perceber que para $\rho < 1$ (cenários 1 e 2) a fila se mantém estável. Quando dobramos $\lambda\mu$, apesar do número médio de clientes no sistema se manter o mesmo, o tempo médio que cada cliente permanece no sistema cai pela metade. Já no caso 3, onde $\rho > 1$, a fila fica instável, e tende a crescer para o infinito ao longo do tempo.

Na seção 1.4, podemos observar que todos os 3 métodos de resolução do problema apresentam informações que estão condizentes umas com as outras. A solução estacionária da Cadeia de Markov Finita está quase idêntica à solução analítica, assim como as médias geradas pela simulação.

Os detalhes matemáticos das resoluções dos itens 1.4.1 e 1.4.3 estão no Notebook.

2 Epidemias - Branching Process

Heurística utilizada para determinação de árvores infinitas: Mais de 50 períodos ocupados consecutivos na fila será considerado que a árvore é infinita.

2.1 Análise do Cenário 1 - $\lambda = 1; \mu = 2$

Árvores Finitas: 75237; Árvores Infinitas: 5

Fração de árvore finitas: $75237/75242 = 0.999934$

Intervalo de confiança da fração de árvores: $[0.999866, 1.000001]$

2.2 Análise do Cenário 2 - $\lambda = 2; \mu = 4$

Árvores Finitas: 75637; Árvores Infinitas: 3

Fração de árvore finitas: $75637/75640 = 0.999960$

Intervalo de confiança da fração de árvores: $[0.999889, 1.000032]$

2.3 Análise do Cenário 3 - $\lambda = 4; \mu = 2$

Árvores Finitas: 990; Árvores Infinitas: 1000

Fração de árvores finitas: $990/1990 = 0.497487$

Intervalo de confiança da fração de árvores: $[0.475027, 0.519948]$

2.4 Relação com $s = G(s)$

Os cenários 1 e 2 têm $\rho = 0.5$, que são casos subcríticos ($\rho \leq 1$). Logo a probabilidade de extinção é igual a 1, o que está de acordo com o resultado e o intervalo de confiança das 2 primeiras simulações.

No cenário 3, temos $\rho = 2$, e portanto estamos no caso supercrítico ($\rho > 1$). Logo, vamos calcular $s = G(s)$ para encontrarmos a menor raiz da equação e determinarmos a probabilidade de eventual extinção.

$$G(s) = \exp\left(\frac{\lambda}{\mu}(s-1)\right); \lambda = 4, \mu = 2$$

$$s = e^{2(s-1)}$$

A menor raiz é $s = 0.203188 \approx 20.31\%$, o que não está de acordo com nossa simulação... (não sei ao certo o porquê).

2.5 Comentários e Observações

Os cenários 1 e 2 representam epidemias onde cada pessoa infectada espalha a doença para, em média, 0.5 pessoa (ρ). Podemos perceber que, nestes casos, a epidemia tende a se extinguir rapidamente. E, apesar das simulações mostrarem alguns casos que a epidemia se estende indefinidamente, analiticamente sabemos que haverá a eventual extinção da epidemia com probabilidade 1 (estamos no caso subcrítico), resultado esse que está dentro dos intervalos de confiança.

Já no cenário 3, temos uma epidemia em que cada pessoa infectada espalha a doença para 2 outras pessoas, em média. Portanto, o comportamento da epidemia é de que, se não extinguida logo nas suas primeiras infecções, onde a probabilidade de extinção é maior, a epidemia irá se estender indefinidamente.

Infelizmente nossa simulação não está de acordo com o resultado analítico, mas ambas mostram que a fração de árvores finitas está longe de ser tão grande como nos casos estáveis.

Uma hipótese que poderia explicar esta diferença está na forma como a simulação calcula a fração de árvores finitas, o resultado analítico e o que queremos dizer com "fração de árvores finitas". A ideia da contagem na simulação é calcular "quantas são as árvores finitas em relação ao total de árvore observadas no sistema", calculando a quantidade de períodos ocupados da fila em relação ao total de períodos (ocupados e ociosos).

Uma outra hipótese que poderia explicar a discrepância dos resultados é a interpretação do que é a árvore, que a simulação considera como tendo início no instante que a fila fica ocupada, e término no instante em que a fila passa a ficar ociosa.