Anells de polinomis en diverses variables

Primavera 2025

Laboratori 3: Teorema de divisió d'Hironaka

Sigui $\geqslant$ un ordre compatible en el conjunt de monomis de S=K[X_1,...,X_n].
Donat un polinomi F=$\sum$ a_α X^α de S definim el terme *leader* de F, que denotarem per Lt(F), com el
factor no nul a_α X^α de F tal que α sigui el més gran respecte l'ordre $\geqslant$.

Exemples d'ordres compatibles:
Lexicogràfic (Lex): $\alpha > \beta$ sí i només el primer coeficient per l'esquerra no nul de α -β és positiu.
Lexicogràfic graduat (DegLex): $\alpha > \beta$ sí i només si |α|>|β|,o |α|=|β|i α es més gran que β respecte l'ordre lexicogràfic.
Lexicogràfic graduat reverse (DegRevLex): $\alpha > \beta$ sí i només si |α|>|β|,o |α|=|β|i el primer coeficient per la dreta no nul de α -β és negatiu.

Teorema de Divisió d'Hironaka: Donat un ordre compatible $\geqslant$ de **N**^n i donat un conjunt ordenat de polinomis
{f_1,...,f_s} de K[X_1,...,X_n].
Per tot polinomi f existeixen polinomis a_1,...,a_s tals que

f=a_1 f_1 +...+ a_s f_s + r

r=0 o bé r és un combinació lineal de monomis a coeficients en K cap d'ells multiple de Lt(f_1),...,Lt(f_s).

El polinomi r s'anomena reste de la divisió de f respecte {f_1,...,f_s}
El Mathematica permet calcular els coeficients a_1,...,a_s i r mitjançant **PolynomialReduce**

Ejercici 1: executeu les següents instruccions.

In[172]:=

```
sol = PolynomialReduce[x^3 + 2*y^2,
  {x^2 +y, x^2* x* y}, {x, y}, MonomialOrder → Lexicographic]
```

Out[172]=

$\{\{x, 0\}, -x\,y + 2\,y^2\}$

In[173]:=

```
f1 = x^2 + y
f2 = x^2*x*y
{{a1, a2}, r} = sol
FullSimplify[a1 * f1 + a2 * f2 + r]
```

Out[173]=

$x^2 + y$

Out[174]=

$x^3\ y$

Out[175]=

$\{\{x,\ 0\},\ -x\ y + 2\ y^2\}$

Out[176]=

$x^3 + 2\ y^2$

In[177]:=

```
sol = PolynomialReduce[x^5 + 2*y^2,
  {x^2 + y, x - 2* x* y}, {x, y}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

Out[177]=

$\left\{\left\{x^3 - x\ y,\ -\frac{1}{4} - \frac{y}{2}\right\},\ \frac{x}{4} + 2\ y^2\right\}$

In[178]:=

```
f1 = x^2 + y
f2 = x - 2*x*y
{{a1, a2}, r} = sol
FullSimplify[a1 * f1 + a2 * f2 + r]
```

Out[178]=

$x^2 + y$

Out[179]=

$x - 2\ x\ y$

Out[180]=

$\left\{\left\{x^3 - x\ y,\ -\frac{1}{4} - \frac{y}{2}\right\},\ \frac{x}{4} + 2\ y^2\right\}$

Out[181]=

$x^5 + 2\ y^2$

In[182]:=

```
sol = PolynomialReduce[x^3 + 2*y^3, {x^3 + y^5, x + 2* x* y},
  {x, y}, MonomialOrder → DegreeReverseLexicographic]
```

Out[182]=

$\{\{0,\ 0\},\ x^3 + 2\ y^3\}$

In[183]:=

```
f1 = x³ + y⁵
f2 = x + 2*x*y
{{a1, a2}, r} = sol
FullSimplify[a1 * f1 + a2 * f2 + r]
```

Out[183]=

$x^3 + y^5$

Out[184]=

$x + 2 x y$

Out[185]=

$\{\{0, 0\}, x^3 + 2 y^3\}$

Out[186]=

$x^3 + 2 y^3$

Recupereu els polinomis originals calculant   a_1 f_1 + a_2 f_2 + r

Exercici 2: Veurem que l’orde dels **f_i** és important. Considerem els polinomis:

In[187]:=

```
f = x*y^2 - x;
f1 = x* y+ 1;
f2 = y^2- 1;
```

a) Feu la divisió de **f** respecte **{f1, f2}** usant l’ordre Lexicogràfic. Observeu que el reste no és zero.

In[190]:=

```
PolynomialReduce[f, {f1, f2}, {x, y}]
```

Out[190]=

$\{\{y, 0\}, -x - y\}$

b) Feu la divisió de **f** respecte **{f2, f1}** usant l' ordre Lexicogràfic . Observeu que el reste és zero .

In[191]:=

```
PolynomialReduce[f, {f2, f1}, {x, y}]
```

Out[191]=

$\{\{x, 0\}, 0\}$

Exercici 2 : Escollint un ordre adequat i una ordenació adequada de les variables demostreu que **f=z^2-x^4*y** pertany a l’ideal generat per **y-x^2, z-x^3**

In[192]:=

```
PolynomialReduce[z^2 - x^4*y, { y - x^2, z - x^3},
 {y, x, z}, MonomialOrder → Lexicographic]
```

Out[192]=

$\{\{-x^4, x^3 + z\}, 0\}$

Exercici 3 : Calculeu la divisió de **f** respecte **{f1,f2,f3}** usant els tres ordres compatibles. Què observeu?

f = x* y^2* z^2+ x* y- y* z
f1= x- y^2
f2 =y- z^3
f3 =z^2 -1

In[193]:=

```
f = x * y^2 * z^2 + x * y - y * z;
f1 = x - y^2;
f2 = y - z^3;
f3 = z^2 - 1;

PolynomialReduce[f, {f1, f2, f3}, {x, y, z}, MonomialOrder → Lexicographic]
PolynomialReduce[f, {f1, f2, f3}, {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
PolynomialReduce[f, {f1, f2, f3}, {x, y, z},
 MonomialOrder → DegreeReverseLexicographic]
```

Out[197]=

$$\{\{y + y^2 z^2,\ y^2 - z + y^3 z^2 + y z^3 + y^2 z^5 + z^6 + y z^8 + z^{11},\ z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^{10} + z^{12}\},\ z\}$$

Out[198]=

$$\{\{-x z^2,\ 0,\ x^2\},\ x^2 + x y - y z\}$$

Out[199]=

$$\{\{-x z^2,\ 0,\ x^2\},\ x^2 + x y - y z\}$$