Laboritorio 7: aplicaciones de la eliminacion de variables

1.

In[97]:=
```
Invertible[f_, T_, vars_] := Module[{GB, r},
   GB = GroebnerBasis[Union[{f}, T], vars];
   r = PolynomialReduce[1, GB, vars][[2]];
   r == 0
  ];
```

In[102]:=
```
T = {x^2 + y^2 + 1, x^2 * y + 2*x*y + x};
Invertible[y^2, T, {x, y}]
Invertible[x, T, {x, y}]
Invertible[2 + x + y^2, T, {x, y}]
```

Out[103]=
```
True
```

Out[104]=
```
False
```

Out[105]=
```
True
```

2.

In[106]:=
```
T = {x^2 + y, x + y^2};
a = 0 ;
Invertible[x*y + a, T, {x, y}]
a = -1;
Invertible[x*y + a, T, {x, y}]
```

Out[108]=
```
False
```

Out[110]=
```
False
```

```
Remove[a]
GB = GroebnerBasis[{x^2 + y, x + y^2, x*y + a}, {x, y}]
```

Out[112]=

$\{a + a^2, y + a y, -a + y^3, x + y^2\}$

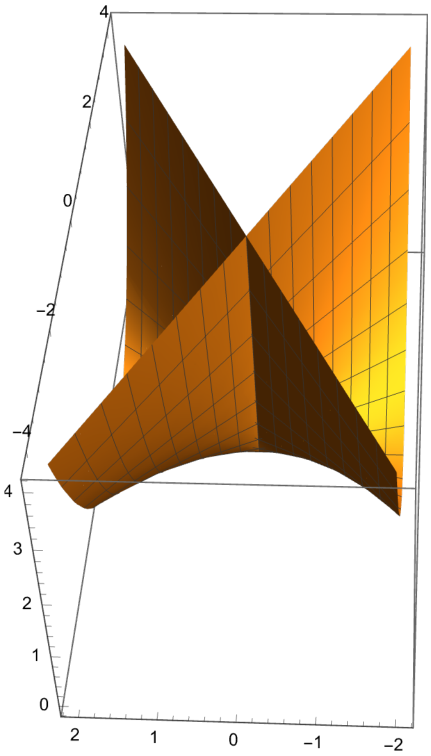
Entonces si a es diferente a 0 y -1, la base de Gröbner contiene una unidad, y por tanto el ideal es el total. Por tanto tenemos la implicación contraria.

3.

In[113]:=

```
ParametricPlot3D[{u*v, v, u^2}, {u, -2., 2.}, {v, -2., 2.}]
```

Out[113]=



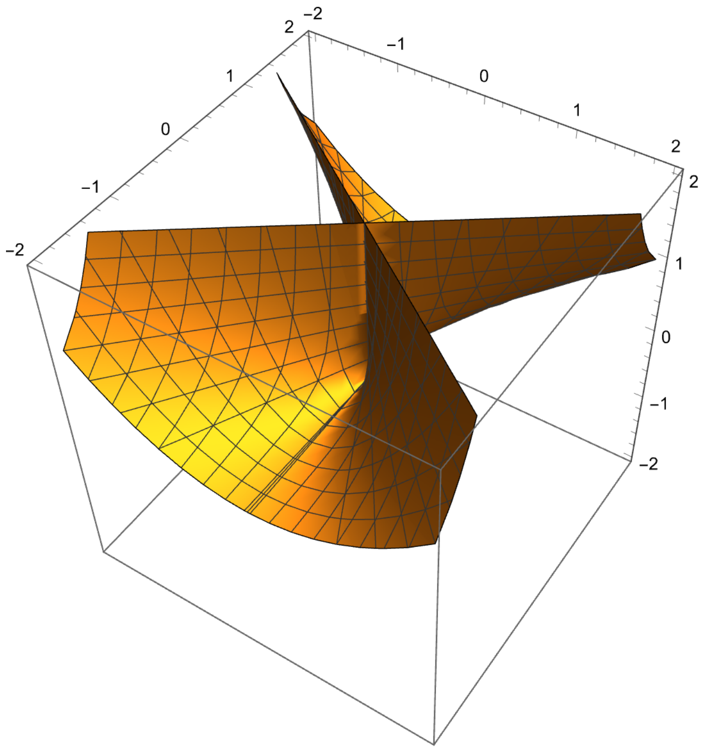
In[119]:=

```
q = Eliminate[{x == u*v, y == v, z == u^2}, {u, v}]
ContourPlot3D[q, {x, -2., 2.}, {y, -2., 2.}, {z, -2., 2.}]
```

Out[119]=

$-x^2 + y^2 z == 0$

Out[120]=



Tenemos la parametrización $\phi : K^2 \to K^3$; $(u, v) \mapsto (u\, v, v, u^2)$, queremos ver que esta cubre la variedad generada por el ideal $I = (-x^2 + y^2 z)$ cuando K son los complejos, pero la inclusion es no estricta cuando trabajamos con los reales.

Primero veremos que la imagen de ϕ esta incluida en la variedad. Esto es trivial dado que todo punto de la imagen se anula en el polinomio generador del ideal, da igual el cuerpo en el que se trabaje.

Ahora veremos la inclusion contraria:
Sea $(x, y, z) \in V(I)$, tenemos que $-x^2 + y^2 z = 0$.
Si $y \neq 0$, entonces podemos tomar $v = y$, $u = \frac{x}{y}$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos $z = u^2$ como queríamos, por tanto $\phi\left(\frac{x}{y}, y\right) = (x, y, z)$.
Si $y = 0$, entonces tenemos que $x = 0$ por la ecuación del ideal, lo que nos deja con $u^2 - z = 0$, por tanto, salvo que $z = 0$ que entonces $u = 0$, tendremos que tomar $u$como una raiz cuadrada de z.
Con esto hemos visto la igualdad sobre los complejos. En el caso de los reales, esto nos muestra que la desigualdad es estricta dado que solo pertenecen a la imagen aquellos puntos con $z \geq 0$

dado que para el resto no existe la raiz cuadrada.

Además, hemos visto que la unicidad de los parametros u y v falla en los puntos de la forma $(0, 0, z)$ con $z \neq 0$.