Anells de polinomis en diverses variables

Primavera 2025

Laboratori 5: Bases de Gröbner

Teorema : Existeix un ordre compatible de $K[X_1, \ldots, X_n]$, p.e. el Lex, tal que per tot ideal I $\subset K[X_1, \ldots, X_n]$ amb Base de Gröbner G, l' ideal J = I $\bigcap K[X_1, \ldots, X_m]$, m < n, té com Base de Grobner G $\bigcap K[X_1, \ldots, X_m]$.

Direm que J és l' ideal obtingut eliminant les variables $X_{m+1}, \ldots, X_n$

Ex 1 : Considerem la parametrització :

t-- > (t, t^2, t^3)

Calculeu l'ideal de la corba definida per aquesta parametrització. Comproveu que

In[∘]:=

```
Eliminate[{x - t == 0, y - t^2 == 0, z - t^3 == 0}, {t}]
```

Out[∘]=

$x^2 - y == 0 \&\& x y - z == 0 \&\& y^2 - x z == 0$

retorna un sistema de generadors de l' ideal de la corba parametrizada . Què observeu?
Calculeu una base de Gröbner de l'ideal a partir d'aquest sistema de generadors respecte l'ordre DegreeReverseLexicographic

Tenemos que el ideal definido por la curva es $(x^2 - y, x^3 - z)$, demostrado en el ejercicio 15. Calculando la base de Gröbner del sistema vemos que coincide con la que nos muestra Eliminate, por tanto los elementos generan el ideal de la curva. Vemos por eso que podríamos reducir el numero de elementos de 3 a 2 si no imponemos que queremos que la base sea de Gröbner.

In[∘]:=

```
GroebnerBasis[{x^2 - y, x^3 - z}, {x, y, z},
 MonomialOrder → DegreeReverseLexicographic]
GroebnerBasis[{x^2 - y, xy - z, y^2 - xz},
 {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeReverseLexicographic]
```

Out[∘]=

$\{y^2 - x z, x y - z, x^2 - y\}$

Out[∘]=

$\{-xy + z, -xz + y^2, x^2 - y\}$

Ex 2: Feu el mateix que en **Ex 1** per la parametrització:

t--> (t^3,t^4,t^5)

Calculeu l'ideal de la corba definida per aquesta parametrització. Comproveu que

In[ ]:=
```
P1 = Eliminate[{x - t^3 == 0, y - t^4 == 0, z - t^5 == 0}, {t}]
G = GroebnerBasis[P1, {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeReverseLexicographic]
```

Out[ ]=

$y^2 - x z == 0 \,\&\&\, x^3 - y z == 0 \,\&\&\, x^2 y - z^2 == 0$

Out[ ]=

$\{y^2 - x z, x^2 y - z^2, x^3 - y z\}$

retorna un sistema de generadors de la corba.

Calculeu una Base de Gröbner de l'ideal respecte l'ordre DegreeReverseLexicographic.

Veamos que los ideales son iguales. Es trivial ver que para todo t se anulan los tres polinomios.

Veamos la inclusion contraria:

Sea $(x, y, z) \in V\left(y^2 - x z, x^2 y - z^2, x^2 - y z\right)$.

Si $x = 0$ tenemos que $y = z = 0$ por tanto el punto es (0, 0, 0) que es la imagen de 0.

Si $x \neq 0$ tenemos que $z = \dfrac{y^2}{x}$ por lo que $x^3 - \dfrac{y^3}{x} = 0$ que nos da $x^4 = y^3$. Si tomamos $t \in K$ una raiz de $t^3 - x = 0$, tenemos $x = t^3$ y $y^3 = t^{12} = \left(t^4\right)^3$ por lo que si tomamos la conjugada correcta de t nos queda $y = t^4$. Finalmente, si sustituimos en la ecuación inicial, $z = \dfrac{t^8}{t^3} = t^5$. Por tanto, el punto es la imagen de t por la parametrización.

Ex 3 : Apliqueu els *Multiplicadors de Lagrange* per trobar el màxim i mínim de x^3 + 2*x*y*z - z^2 sota la condició x^2 + y^2 + z^2 = 1.

In[ ]:=
```
L = Grad[x^3 + 2*x*y*z  -z^2 + t (x^2 + y^2 + z^2 - 1), {x, y, z, t}]
```

Out[ ]=

$\{2 t x + 3 x^2 + 2 y z, 2 t y + 2 x z, 2 x y - 2 z + 2 t z, -1 + x^2 + y^2 + z^2\}$

In[ ]:=
```
W = Solve[Table[L[[i]] == 0, {i, 1, 4}]]
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{t \to \frac{3}{2}, x \to -1, y \to 0, z \to 0\right\}, \left\{t \to \frac{4}{3}, x \to -\frac{2}{3}, y \to -\frac{1}{3}, z \to -\frac{2}{3}\right\}, \left\{t \to \frac{4}{3}, x \to -\frac{2}{3}, y \to \frac{1}{3}, z \to \frac{2}{3}\right\}, \left\{t \to -\frac{1}{8}, x \to -\frac{3}{8}, y \to \frac{3\sqrt{\frac{11}{2}}}{8}, z \to -\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{8}\right\}, \left\{t \to -\frac{1}{8}, x \to -\frac{3}{8}, y \to -\frac{3\sqrt{\frac{11}{2}}}{8}, z \to \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{8}\right\}, \{t \to 1, x \to 0, y \to 0, z \to -1\}, \{t \to 0, x \to 0, y \to -1, z \to 0\}, \{t \to 0, x \to 0, y \to 1, z \to 0\}, \{t \to 1, x \to 0, y \to 0, z \to 1\}, \left\{t \to -\frac{3}{2}, x \to 1, y \to 0, z \to 0\right\}\right\}$$

In[ ]:=
```
R = x^3 + 2*x*y*z - z^2 //. W
```

Out[ ]=

$$\left\{-1, -\frac{28}{27}, -\frac{28}{27}, \frac{7}{128}, \frac{7}{128}, -1, 0, 0, -1, 1\right\}$$

In[ ]:=
```
maximo = Max[R]
minimo = Min[R]
```

Out[ ]=

1

Out[ ]=

$$-\frac{28}{27}$$

Ex 4: Apliqueu els Multiplicadors de Lagrange per trobar el màxim i mínim de
xy + yz
sota les restriccions
xy - 1 = 0
y^2 + z^2 - 1 = 0

In[ ]:=
```
L = Grad[x*y + y*z + t (x*y - 1) + s (y^2 + z^2 - 1), {x, y, z, t, s}]
W = Solve[Table[L[[i]] == 0, {i, 1, 5}]]
R = x*y + y*z //. W
maximo = Max[R]
minimo = Min[R]
```

Out[ ]=

$$\{y + t\,y,\ x + t\,x + 2\,s\,y + z,\ y + 2\,s\,z,\ -1 + x\,y,\ -1 + y^2 + z^2\}$$

Out[ ]=

$$\left\{\left\{s \to -\frac{1}{2},\ t \to -1,\ x \to -\sqrt{2},\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\right.$$
$$\left\{s \to \frac{1}{2},\ t \to -1,\ x \to -\sqrt{2},\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$
$$\left\{s \to \frac{1}{2},\ t \to -1,\ x \to \sqrt{2},\ y \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ z \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$
$$\left.\left\{s \to -\frac{1}{2},\ t \to -1,\ x \to \sqrt{2},\ y \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ z \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

Out[ ]=

$$\left\{\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right\}$$

Out[ ]=

$$\frac{3}{2}$$

Out[ ]=

$$\frac{1}{2}$$

Ex 5: Usant eliminació de variables i “Solve” resoleu el sistema d' equacions :

```
x + y + z^2 == 0
x + y^2 + z == 0
x^2 + y + z == 0
```

Indicació : elimineu les variables x, y, i després resoleu respecte z. Continueu el procés.

```
In[•]:= S = {x + y + z^2 == 0, x + y^2 + z == 0, x^2 + y + z == 0};
P = Eliminate[S, {x, y}]
Rz = Solve[P, {z}]
S = S //. Rz
P = Table[Eliminate[S[[i]], {x}], {i, 1, 6}]
Ry = Table[Solve[P[[i]], {y}], {i, 1, 6}]
S = Table[S[[i]] //. Ry[[i]], {i, 1, 6}]
Rx = Table[
   Table[
    Solve[S[[i]][[j]], {x}],
    {j, 1, Length[S[[i]]]}
   ],
   {i, 1, 6}
  ]
solutions = Flatten[
   Table[
    Table[
     Table[
      {x, y, z} /. {
        x → Rx[[i]][[j]][[k, 1, 2]],
        y → Ry[[i]][[j, 1, 2]],
        z → Rz[[i, 1, 2]]
       },
      {k, 1, Length[Rx[[i]][[j]]]}
     ],
     {j, 1, Length[Rx[[i]]]}
    ],
    {i, 1, Length[Rx]}
   ],
   2
  ]
```

Out[•]=

$$4 z - 2 z^2 + 4 z^3 - z^4 + z^6 == 0$$

Out[•]=

$$\{\{z \to -2\}, \{z \to 0\}, \{z \to -i\}, \{z \to i\}, \{z \to 1 - i\}, \{z \to 1 + i\}\}$$

Out[•]=

$$\{\{4 + x + y == 0, -2 + x + y^2 == 0, -2 + x^2 + y == 0\},$$
$$\{x + y == 0, x + y^2 == 0, x^2 + y == 0\}, \{-1 + x + y == 0, -i + x + y^2 == 0, -i + x^2 + y == 0\},$$
$$\{-1 + x + y == 0, i + x + y^2 == 0, i + x^2 + y == 0\},$$
$$\{-2 i + x + y == 0, (1 - i) + x + y^2 == 0, (1 - i) + x^2 + y == 0\},$$
$$\{2 i + x + y == 0, (1 + i) + x + y^2 == 0, (1 + i) + x^2 + y == 0\}\}$$

Out[•]=

$$\{2 + y == 0, y == 0, (1 - i) - y + y^2 == 0, (1 + i) - y + y^2 == 0, -i + y == 0, i + y == 0\}$$

Out[ ] =

```
{{{y → -2}}, {{y → 0}}, {{y → -ⅈ}, {y → 1 + ⅈ}},
 {{y → ⅈ}, {y → 1 - ⅈ}}, {{y → ⅈ}}, {{y → -ⅈ}}}
```

Out[ ] =

```
{{{2 + x == 0, 2 + x == 0, -4 + x^2 == 0}}, {{x == 0, x == 0, x^2 == 0}},
 {{(-1 - ⅈ) + x == 0, (-1 - ⅈ) + x == 0, -2 ⅈ + x^2 == 0}, {ⅈ + x == 0, ⅈ + x == 0, 1 + x^2 == 0}},
 {{(-1 + ⅈ) + x == 0, (-1 + ⅈ) + x == 0, 2 ⅈ + x^2 == 0}, {-ⅈ + x == 0, -ⅈ + x == 0, 1 + x^2 == 0}},
 {{-ⅈ + x == 0, -ⅈ + x == 0, 1 + x^2 == 0}}, {{ⅈ + x == 0, ⅈ + x == 0, 1 + x^2 == 0}}}
```

Out[ ] =

```
{{{{x → -2}}}, {{{x → 0}}}, {{{x → 1 + ⅈ}}, {{x → -ⅈ}}},
 {{{x → 1 - ⅈ}}, {{x → ⅈ}}}, {{{x → ⅈ}}}, {{{x → -ⅈ}}}}
```

Out[ ] =

```
{{-2, -2, -2}, {0, 0, 0}, {1 + ⅈ, -ⅈ, -ⅈ}, {-ⅈ, 1 + ⅈ, -ⅈ},
 {1 - ⅈ, ⅈ, ⅈ}, {ⅈ, 1 - ⅈ, ⅈ}, {ⅈ, ⅈ, 1 - ⅈ}, {-ⅈ, -ⅈ, 1 + ⅈ}}
```