Anells de polinomis en diverses variables

Primavera 2025

Laboratori 2: Parametrització de varietats afins.

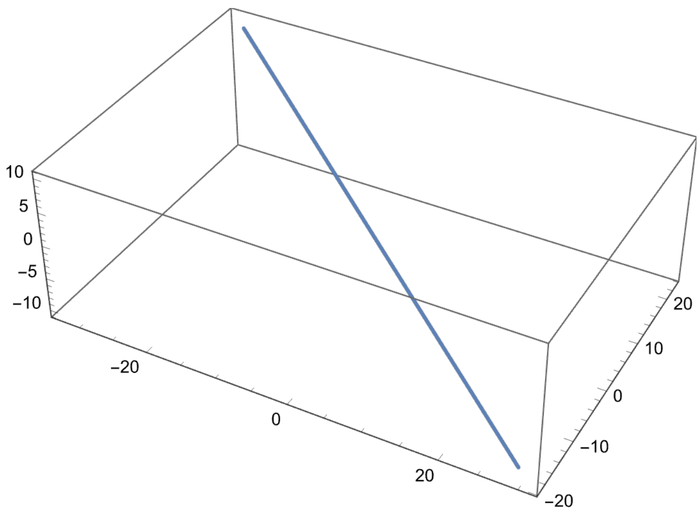
Volem trobar maneres de descriure els punts d'una varietat mitjançant mètodes paramètrics. Començarem amb els sistemes lineals .

Exercici 1. Usant l'ordre Solve podem trobar parametritzacions:

```
In[ ]:= L = Solve[ {x + y + z == 1, x + 2 * y - z == 3}, {x, y}]
Out[ ]=
{{x → -1 - 3 z, y → 2 (1 + z)}}

In[ ]:= W = {x, y} /. L
Out[ ]=
{{-1 - 3 z, 2 (1 + z)}}

In[ ]:= WF = Flatten[W]
Out[ ]=
{-1 - 3 z, 2 (1 + z)}

In[ ]:= WF[[2]]
Out[ ]=
2 (1 + z)
```

Demostreu que una parametrització de la varietat V(x+y+z-1,x+ 2y-z-3) és : x=-3z-1, y=2z+2
Dibuxeu aquesta varietat usant ParametricPLot

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[{-3 z - 1, 2 z + 2, z}, {z, -10, 10}]
Out[ ]=
```

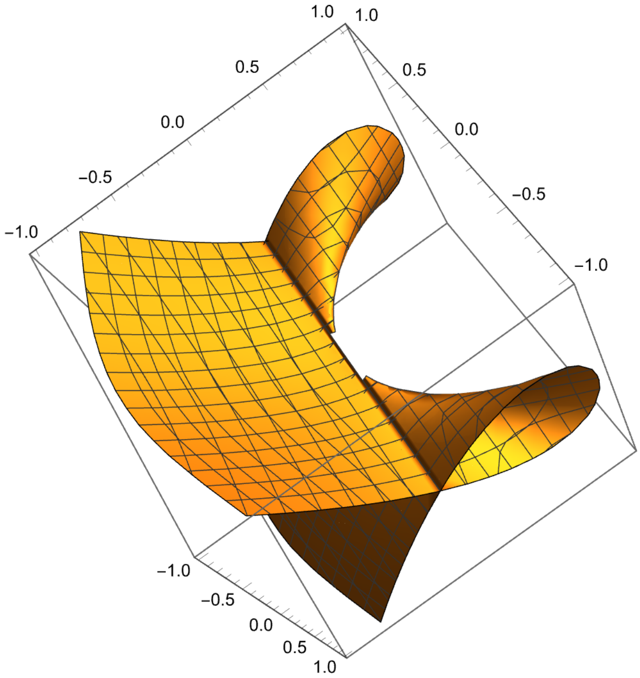


Exercici 2: Varietats no lineals.

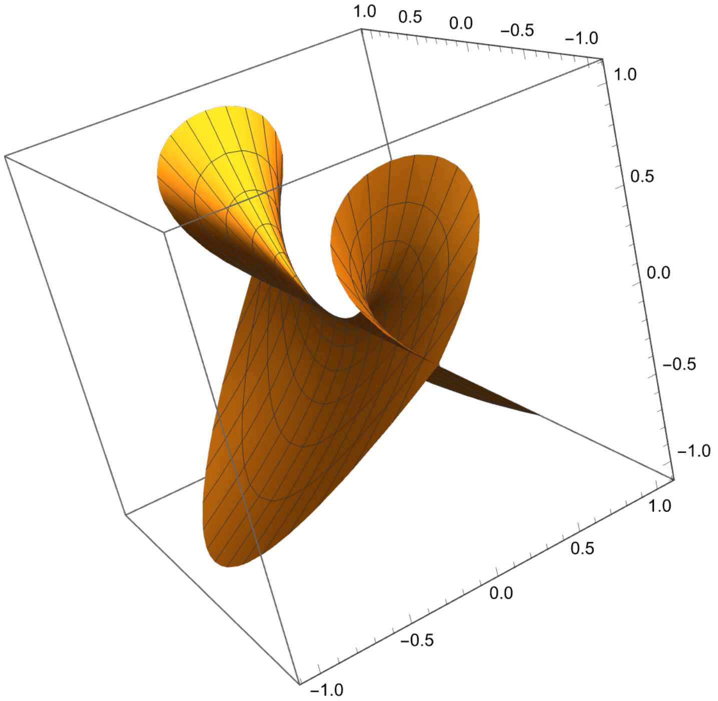
a) Dibuxeu les superfícies definides implícitament per
x^2 - y^2*z^2 + z^3 = 0,
i paramètricament per {x = t (u^2 - t^2), y = u, z = u^2 - t^2}

In[ ]:=
```
ContourPlot3D[x^2 - y^2 * z^2 + z^3 == 0,
 {x, -1., 1.}, {y, -1., 1.} , {z, -1., 1.}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
ParametricPlot3D[{t (u^2 - t^2), u, u^2 - t^2}, {t, -1., 1.}, {u, -1., 1.}]
```
Out[ ]=



b) Demostreu que la corba x^2=cz^2-z^3, c paràmetre, admet com parametrització: x=t(c-t^2), z=(c-t^2)

Veamos que el siguiente morfismo de K- Algegras $\varphi : K \to K^2; t \mapsto \left(t\left(c - t^2\right), c - t^2\right)$ es una parametrización de $V\left(x^2 - c z^2 + z^3\right)$.

Sea $t \in K$, $\left(t\left(c - t^2\right)\right)^2 + \left(c - t^2\right)^3 - c\left(c - t^2\right)^2 = t^2\left(c - t^2\right)^2 + \left(c - t^2\right)\left(c - t^2\right)^2 - c\left(c - t^2\right)^2 = 0$, entonces $\varphi(t) \in V\left(x^2 - c z^2 + z^3\right)$.

Sea $(x, y) \in K^2$,

- Si $z = 0$, entonces $x = 0$, si $c - t^2$ tiene la solución en K, puedes tomar t como una solución y $\varphi(t) = (x, y)$.

- Si $z \neq 0$, sea t una raiz de $t^2 - c + z = 0$ en K, entonces $\varphi(t) = \left(t\left(c - t^2\right), c - t^2\right) = (t z, z)$, que cumple $t^2 z^2 - c z^2 + z^3 = \left(c - t^2\right) - c z^2 + z^3 = 0$.

Entonces si K tiene raices cuadradas, tenemos que φ es una parametrización de $x^2 = c z^2 - z^3$.

c) Substitueix c per y^2 en b), i dedueix que les dues superficies de a) són les mateixa.

In[ ]:=
```
x^2 - c*z^2 + z^3 == 0 /. {c → y^2}
```
Out[ ]=

$x^2 - y^2 z^2 + z^3 == 0$

d) Expliqueu perquè la parametrització cobreix completament la superfície V (x^2 - y^2 z^2 + z^3)

Tenemos que para todo c la parametrización de la curva plana $x^2 - c z^2 + z^3$ tiene parametrización completa como la que se define en el apartado (b). Entonces, si para todo valor concreto de y la parametrización cubre la curva en dicho plano.

e) Esbrineu què fa *Eliminate* i calcula:

In[ ]:=
```
Eliminate[{ x == t ( u^2 - t^2), y == u, z == ( u^2 - t^2)}, {t, u}]
```
Out[ ]=

$-x^2 + y^2 z^2 - z^3 == 0$

Treball personal :

Cosidereu la parametrització

x =t/(1+ t)

y =1- 1 /t^2

a) Calculeu l'equació de la varietat V definida per la parametrització anterior,

b) Demostreu que la parametrizació cobreix tota V excepte el punt (1,1).

Tenemos $\varphi : K \to K^2; t \mapsto \left(\frac{t}{1+t}, 1 - \frac{1}{t^2}\right)$, veamos que su imagen es exactamente $V(-2x + x^2 y + 1)$ excepto el punto (1, 1).

Sea $t \in K$, diferente de 0 y -1., veamos que $\varphi(t) \in V\left(-2x + x^2 y + 1\right)$.

$$-2\frac{t}{1+t} + \left(\frac{t}{1+t}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + 1 = \frac{-2t}{1+t} + \frac{t^2(t^2-1)}{(1+t)^2 t^2} + 1 = \frac{-2t}{1+t} + \frac{t-1}{t+1} + 1 = \frac{1}{t+1}(-2t + t - 1 + t + 1) = 0$$

Por tanto, hemos visto que pertenece a la variedad. Y claramente no es (1, 1) dado que no hay t tal que $1 - 1/t^2$ sea igual a 1.

Sea $(x, y) \in V\left(-2x + x^2 y + 1\right)$, tenemos que $-2x + x^2 y + 1 = 0$, de donde vemos, para $x \neq 0$ que no pertenece a la variedad, que $y = \frac{2x-1}{x^2}$.

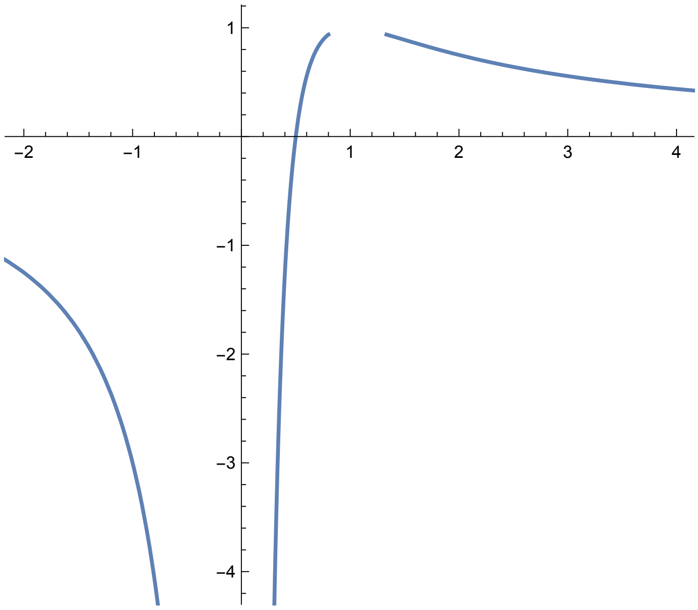
Si $x = 1$, tenemos $y = 1$, que nos da el punto (1, 1).

Si $x \neq 1$, veremos que si $t = \frac{x}{1-x}$, entonces $\varphi(t) = (x, y)$:

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) = \left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}}, 1 - \frac{1}{\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}\right)$$

$$\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{x}{1} = x, 1 - \frac{1}{\left(\frac{x}{1-x}\right)^2} = \frac{\frac{x^2}{(1-x)^2} - 1}{\frac{x^2}{(1-x)^2}} = \frac{x^2 - (x-1)^2}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2} = y$$

In[∘]:=
```
ParametricPlot[{t / (1 + t), 1 - 1 / t^2}, {t, -4., 4.}]
```
Out[∘]=



In[1]:=
```
Eliminate[{x == t / (1 + t), y == 1 - 1 / t^2}, {t}]
```
Out[1]= $-2\,x + x^2\,y == -1$

In[∘]:=
```
ContourPlot[-2 x + x^2 * y + 1 == 0, {x, -10., 10.}, {y, -10, 10.}]
```
Out[∘]=