Métodos Numéricos II. Curso 2024-25. Semestre de otoño. Practica 1

Carlos Fernández Lorán

October 2024

1 Sistema lineal a resolver

En esta sección se mostrará el sistema lineal a resolver. Dicho sistema es de la forma $Ax = b$ donde A es una matriz cuadrada y x y b son vectores. Primero mostraremos A y B en el caso $N = 4$ y después el caso general.

1.1 Caso N = 4

La matriz A se muestra en la ecuación 1. Como se puede ver es cuadrada y tiene una estructura característica: una cuadrícula 3 por 3 de matrices 3 por tres, donde las matrices de la diagonal son iguales (llamémoslas T_3 usando la notación introducida más adelante) y las subdiaconales contienen la matriz identidad 3 por 3 multiplicada por a, el resto son todo ceros. Tomaremos $\Delta = 2(a+b)$ para simplificar la notación.

$$A = \frac{1}{N^2}\begin{pmatrix} -\Delta & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -\Delta & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -\Delta & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -\Delta & b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & -\Delta & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b & -\Delta & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -\Delta & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & -\Delta & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & -\Delta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Como se puede observar, la matriz A no depende de las funciones f, g_1, g_2, g_3 y g_4 que caracterizan cada caso concreto del problema. Dicha información aparece en el término independiente (ecuación 2).

$$
b = \begin{pmatrix} f(0.25a, 0.25b) + g_1(0.25b) + g_3(0.25a) \\ f(0.25a, 0.5b) + g_1(0.5b) \\ f(0.25a, 0.75b) + g_1(0.75b) + g_4(0.25a) \\ f(0.5a, 0.25b) + g_3(0.5a) \\ f(0.5a, 0.5b) \\ f(0.5a, 0.75b) + g_4(0.5a) \\ f(0.75a, 0.25b) + g_2(0.25b) + g_3(0.75a) \\ f(0.75a, 0.5b) + g_2(0.5b) \\ f(0.75a, 0.75b) + g_2(0.75b) + g_4(0.75a) \end{pmatrix} \tag{2}
$$

Como podemos ver, la función g_1 aparece en el término independiente para las $N-1$ primeras ecuaciones y g_2 en las $N-1$ últimas. En cambio, g_3 aparece en la primera de cada $N-1$ ecuaciones y g_4 en la última de cada $N-1$ ecuaciones. Teniendo esto en cuenta, podemos generalizar.

1.2 Caso general

Introduciremos la siguiente notación, para $N \geq 1$ definimos T_N como la matriz $N-1$ por $N-1$ de la forma:

$$
T_N = \begin{pmatrix} -\Delta & b & 0 & & & \\ b & -\Delta & b & & & \\ 0 & b & -\Delta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\Delta & b \\ & & & & b & -\Delta \end{pmatrix} \tag{3}
$$

Entonces vemos que la matriz A en el caso general $N \geq 1$, definida a bloques, es de la forma:

$$
A = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} T_N & aI & 0 & & & \\ aI & T_N & aI & & & \\ 0 & aI & T_N & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & T_N & aI \\ & & & & aI & T_N \end{pmatrix} \tag{4}
$$

La matriz tiene $N-1$ bloques de altura y $N-1$ bloques de largo, por tanto, es $N-1$ por $N-1$. Ahora, generalizaremos la expresión del término independiente.

$$b = \begin{pmatrix} f(\frac{a}{N},\frac{b}{N}) + g_1(\frac{b}{N}) + g_3(\frac{a}{N}) \\ f(\frac{a}{N},\frac{2b}{N}) + g_1(\frac{2b}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{a}{N},\frac{(N-1)b}{N}) + g_1(\frac{(N-1)b}{N}) + g_4(\frac{a}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{ai}{N},\frac{b}{N}) + g_3(\frac{ai}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{ai}{N},\frac{bj}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{ai}{N},\frac{(N-1)b}{N}) + g_4(\frac{ai}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{(N-1)a}{N},\frac{b}{N}) + g_2(\frac{b}{N}) + g_3(\frac{(N-1)a}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{(N-1)a}{N},\frac{bj}{N}) + g_2(\frac{bj}{N}) \\ \vdots \\ f(\frac{(N-1)a}{N},\frac{(N-1)b}{N}) + g_2(\frac{(N-1)b}{N}) + g_4(\frac{(N-1)a}{N}) \end{pmatrix}, \quad 1 < i,j < N-1 \quad (5)$$

2 Expresiones explícitas de las iteraciones

En este apartado incluiremos la expresión explícita de las iteraciones tanto para el método de Gauss-Seidel como para el SOR (Successive Over Relaxation).

2.1 Gauss-Seidel

Notaremos como χ_C a la función característica de la condición C, es decir:

$$\chi_C = \begin{cases} 1 & \text{si } C \\ 0 & \text{si } \neg C \end{cases}$$

Por tanto, para $1 \leq i,j \leq N-1$ tenemos la siguiente expresión de la iteración. Se asume que se calcula iterando sobre las i en orden ascendiente y para cada i se itera en orden ascendiente sobre las j.

$$
\begin{aligned}
x_{i,j}^{(k+1)} = \Bigg(&\chi_{i=1} \cdot \frac{g_1\left(\frac{bj}{N}\right)}{a^2} + \chi_{i\neq 1} \cdot \frac{x_{i-1,j}^{(k)}}{a^2} \\
&+ \chi_{i=N-1} \cdot \frac{g_2\left(\frac{bj}{N}\right)}{a^2} + \chi_{i\neq N-1} \cdot \frac{x_{i+1,j}^{(k)}}{a^2} \\
&+ \chi_{j=1} \cdot \frac{g_3\left(\frac{ai}{N}\right)}{b^2} + \chi_{j\neq 1} \cdot \frac{x_{i,j-1}^{(k)}}{b^2} \\
&+ \chi_{j=N-1} \cdot \frac{g_4\left(\frac{ai}{N}\right)}{b^2} + \chi_{j\neq N-1} \cdot \frac{x_{i,j+1}^{(k)}}{b^2} \\
&- \frac{1}{N^2} f\left(\frac{ai}{N}, \frac{bj}{N}\right)\Bigg) \frac{a^2b^2}{2a^2+2b^2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2.1.1 SOR

Utilizaremos la misma notación a la del método anterior, y asumiremos el mismo orden de iteración.

$$
\begin{aligned}
x_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)x_{i,j}^{(k)} + \omega \cdot \frac{a^2b^2}{2a^22b^2} \Bigg(&\chi_{i=0} \frac{g_1\left(\frac{bj}{N}\right)}{a^2} + \chi_{i\neq 0} \frac{x_{i-1,j}^{(k)}}{a^2} \\
&+ \chi_{i=N-1} \frac{g_2\left(\frac{bj}{N}\right)}{a^2} + \chi_{i\neq N-1} \frac{x_{i+1,j}^{(k)}}{a^2} \\
&+ \chi_{j=0} \frac{g_3\left(\frac{ai}{N}\right)}{b^2} + \chi_{j\neq 0} \frac{x_{i,j-1}^{(k)}}{b^2} \\
&+ \chi_{j=N-1} \frac{g_4\left(\frac{ai}{N}\right)}{b^2} + \chi_{j\neq N-1} \frac{x_{i,j+1}^{(k)}}{b^2} - \frac{f\left(\frac{ai}{N}, \frac{bj}{N}\right)}{N^2} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3 Discusión de Resultados

En la tabla 1 podemos ver los resultados del método de Gauss-Seidel en el caso específico propuesto en la práctica. La precisión es la norma del máximo de la diferencia entre los resultados y los valores reales. La tolerancia no tiene un efecto en la precisión del método si se toma suficientemente pequeña, así que se ha tomado 10^{-8} como un valor predefinido.

Los resultados muestran dos tendencias claras: En primer lugar, el número de iteraciones necesarias para la convergencia crece muy rápidamente conforme se incrementa el valor de N, no se ha superado $N = 200$ por cuestiones de tiempo de computación. En segundo lugar, la precisión del método aumenta conforme se aumenta N, pero se reduce ligeramente al superar $N = 100$, esto se puede deber al error acumulado de las operaciones dado que el número de iteraciones es muy grande y el número de iteraciones por iteración también. Por tanto, se ve claramente que para aumentar la precisión del método hay que encontrar la manera de reducir el número de iteraciones.

N	tolerancia	iteraciones	precisión
4	10^{-8}	40	$3.612303 \cdot 10^{-3}$
10	10^{-8}	178	$7.848373 \cdot 10^{-4}$
50	10^{-8}	3016	$3.464847 \cdot 10^{-5}$
100	10^{-8}	10408	$1.628371 \cdot 10^{-6}$
150	10^{-8}	21400	$1.897414 \cdot 10^{-5}$
200	10^{-8}	35571	$3.863359 \cdot 10^{-5}$

Table 1: Resultados Gauss-Seidel

En la tabla 2 se muestran los resultados del método SOR en el mismo caso. Tomamos la tolerancia 10^{-8} por la misma razón al caso anterior, la precisión se calcula de la misma manera. Tomamos un valor de 1.5 para ω para comparar el efecto del factor de relajación, por mucho que no sea óptimo, en contraste con el método anterior. Se aproxima el valor óptimo de ω comprobando que valor de en el intervalo $(0, 2)$ necesita menos iteraciones para converger, se comprueba con un paso de 0.05.

Los resultados muestran un número de iteraciones para la convergencia mucho menor al método anterior, tanto para un valor óptimo de ω como para uno arbitrario. También se puede ver una gran diferencia entre el caso de ω óptima y el caso $\omega = 1.5$, en algún caso llegando a reducirse a menos de un 10% las iteraciones. La tendencia de la precisión es la misma, pero se puede ver como al reducir las iteraciones la precisión sigue subiendo para N mayores.

Por razones de coste de computación, no se ha podido probar a aproximar ω con mayor precisión, pero un valor de ω óptima calculado con más precisión conseguirá reducir aún más las iteraciones y aumentará la precisión, probablemente.

N	tolerancia	ω	iteraciones	precisión
4	10^{-8}	1.5	25	$3.612303 \cdot 10^{-3}$
4	10^{-8}	$1.3*$	18	$3.612303 \cdot 10^{-3}$
10	10^{-8}	1.5	52	$7.849373 \cdot 10^{-4}$
10	10^{-8}	$1.6*$	38	$7.849373 \cdot 10^{-4}$
50	10^{-8}	1.5	1028	$3.534847 \cdot 10^{-5}$
50	10^{-8}	$1.9*$	176	$3.714847 \cdot 10^{-5}$
100	10^{-8}	1.5	3570	$3.135827 \cdot 10^{-6}$
100	10^{-8}	$1.95*$	378	$9.489779 \cdot 10^{-6}$
150	10^{-8}	1.5	7359	$1.322382 \cdot 10^{-5}$
150	10^{-8}	$1.95*$	602	$3.288564 \cdot 10^{-6}$
200	10^{-8}	1.5	12257	$2.836667 \cdot 10^{-5}$
200	10^{-8}	$1.95*$	1093	$1.747754 \cdot 10^{-6}$

Table 2: Resultados Gauss-Seidel. Los valores estimados de ω óptimos están marcado con $*$.