Documentació del grup de lectura sobre teoria de categories

Diversos alumnes i exalumnes dels graus de matemàtiques i física de la UB i de la UNED

Curs 2023-2024

Semestre de primavera

Aquesta compilació conté els documents corresponents al grup de lectura sobre teoria de categories,[1] realitzat a la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, durant el semestre de primavera del curs 2023-2024.

Organitzador: Roger Garrido Vilallave.

Participants: Abel Salinas Sellas, Albert Vila Ardiaca, Ash Nova Royo, Carlos Fernández Lorán, Eduardo Martirena Mateo, Elena Solá Cava, Eudald Vilar Pagès, Ferran Gaspà Junyent, Ivan Cuartero Pérez, Irina Espasa Gomis, Isabel Sitjà Castellarnau, Joan Blay Gómez, Joaquim Vives Fornt, Jofre Dolcet Fernandez, Jordi Riu Pont, Júlia Torrent Cortada, Júlia Vilageliu Giró, Júlia Villaró Cañizal, Marc Piquer i Méndez, Martí Batista Obiols, Miquel Barnadas Bargalló, Miquel Martínez Gavagnin-Capoggiani, Nil Salomó Vendrell, Óscar Fernández Acacio, Pau Mac an Mhaoir Guasch, Pol Mas-Griera i Ruiz, Quim Mas Paradís, Rocham Kouidri, Roger Garrido Vilallave, Roger Jové Inglada i Teresa Ferrer de Noguera.

Resum

L'objectiu d'aquest grup de lectura és introduir els conceptes i resultats bàsics de la teoria de categories, en el buit, però tendint a posar exemples propis tant de l'àlgebra com de la topologia. Després de les primeres definicions, s'estudia els límits i colímits i una aplicació seva a la teoria de Galois d'extensions infinites; es prova el lema de Yoneda i se'n dóna conseqüències; i s'estudia l'aplicació a la cohomologia, motivada des de la teoria de feixos.

[1]Podeu contactar amb el grup al correu electrònic grupdelecturamatesub@gmail.com. També podeu trobar totes les memòries a linktr.ee/lectura_mates_ub.
Disseny del logotip: Yaiza Aguilar Carós.

2020 Mathematics Subject Classification: 18-06.

Índex

Introducció

La teoria de categories es pot entendre com un llenguatge per a les matemàtiques: es pot pensar una categoria com un conjunt d'estructures d'una certa mena juntament amb fletxes entre ells que són els morfismes de la tal estructura. Així, podem identificar paral·lelismes entre diverses categories, que vénen descrits pels morfismes de categories: els functors. Com a llenguatge, la teoria de categories permet expressar i unificar conceptes de manera abstracta i pràctica.

Alguns exemples coneguts de functors són el grup fonamental, entre la categoria dels espais topològics i la dels grups; o la teoria de Galois, que construeix un pas de les extensions de cossos als subgrups d'un cert grup

Tanmateix, la teoria de categories és objecte d'estudi també en si mateixa, ja que, de fet, tracta els objectes de les categories com a "capses negres", treballant no amb els objectes que tenen dins, sinó amb els morfismes que relacionen unes amb altres i les seves composicions. Tractem, essencialment, amb punts connectats amb fletxes, sense saber què són aquests punts ni aquestes fletxes.

En aquest grup de lectura, s'intenta estudiar la teoria de categories en si mateixa, però bastint-la d'exemples coneguts d'altres branques de les matemàtiques, així com donar un parell d'aplicacions interessants que fan pal·lesa la seva ubiqüitat en la matemàtica moderna.

Context històric

La teoria de categories va néixer durant l'efervescència de la topologia algebraica de la primera meitat del segle XX.[3] Una primera embranzida va ser l'article de 1942 *Isomorfismes naturals a la teoria de grups*, de Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane.[4] Treballant en el paper de la teoria de grups en l'homologia, van donar una intuició al concepte d'isomorfisme natural, fins llavors definit vagament. Per això, van introduir el concepte de transformació natural i el de functor.

Aquestes idees primerenques van ser desenvolupades al seu article *Teoria general de les equivalències naturals*, de 1945,[5] en què ja introduien la noció de categoria com a tipus d'objecte matemàtic amb una estructura comuna, amb els morfismes de la tal estructura. La gran quantitat d'exemples de categories i functors entre elles que hi van donar ja feia intuir l'abast del nou paradigma.

Cal fer notar tres antecedents rellevants. El primer són els treballs d'Emmy Noether (professora d'Eilenberg) en la formalització dels processos abstractes. El segon és l'àlgebra universal, iniciada unes dècades abans, que ja començava a generalitzar propietats a les categories algebraiques. Per acabar, Stanislaw Ulam afirma que idees semblants a les d'Eilenberg i Mac Lane ja eren presents a Polònia a la primera meitat de la dècada dels anys 30.

[3] Dieudonné, J. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960.* 1ª ed. Boston: Birkhäuser, 1989. Aquesta font és la que seguim per elaborar aquest resum històric.

[4] Eilenberg, S. i Mac Lane, S.: *Natural isomorphisms in group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **28** (1942), 537-543.

[5] Eilenberg, S. i Mac Lane, S.: *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., **58** (1945), 231-294.

Després de la seva fundació, diversos matemàtics van començar a formalitzar dins la teoria diverses idees informals ja presents a les matemàtiques, com ara la de propietat universal. Aquest primer desenvolupament del camp va anar lligat a la teoria de feixos seguint Henri Cartan, i de seguida a la geometria algebraica, on destaquen els treballs d'Alexander Grothendieck.

Els avenços, però, també es van donar a la teoria de categories que podríem anomenar "pura", sobre tot de la mà de Nobuo Yoneda, que va provar el seu famós lema el 1942, i de Daniel Kan, que va introduir els conceptes de límit i colímit, així com les extensions que porten el seu nom.

La generalitat de la teoria de categories va motivar també la seva aplicació a la lògica, o més ben dit, el desenvolupament d'una lògica matemàtica basada en la teoria de categories, iniciat per William Lawvere a 1963. En aquest camp, la teoria de categories s'ha arribat a postular com a alternativa a la teoria de conjunts com a pedra fundacional de les matemàtiques.

La teoria de categories és una disciplina encara en plena ebullició a l'actualitat, amb desenvolupaments tan dins d'ella com en aplicacions, fins i tot a la informàtica i la física. A més, el llenguatge de la teoria de categories és gairebé omnipresent dins la matemàtica moderna, cosa que fa indispensable un coneixement mínim de la matèria per a qualsevol estudiant de matemàtiques.

Consideracions pràctiques

Aquest grup de lectura s'organitza des de la primavera de 2023 a iniciativa d'en Roger Garrido Vilallave. La present edició, la segona, s'ha dut a terme a l'aula S4 de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Per tal d'assolir l'objectiu del grup, s'ha seguit liberalment *Basic Category Theory*, de T. Leinster.[6] S'ha estructurat el contingut en les xerrades que es pot veure a la taula següent.

	Data	Tema
1	23/II	Categories
2	1/III	Functors
3	15/III	Transformacions naturals
4	22/III	Adjuncions
5	12/IV	Conjunts i classes
6	19/IV	Límits i colímits
7	26/IV	Aplicació I
8	3/V	Representables
9	10/V	El lema de Yoneda
10	17/V	Conseqüències del lema de Yoneda
11	24/V	Aplicació II

Taula 1: Calendari de l'activitat del grup. Totes les dates són a 2024.

[6] Leinster, T. *Basic Category Theory.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

CATEGORIES

ROGER GARRIDO VILALLAVE

1. Categories

Definició 1. Una **categoria** $\mathcal{C}$ consisteix en:

- Un conjunt (o classe) $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$, anomenat els **objectes** de $\mathcal{C}$.
- Per cada parell d'objectes $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un conjunt (o classe) $\mathcal{C}(x, y)$ (també denotat $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$), els elements del qual s'anomenen **morfismes** de x a y (i es denoten amb fletxes $x \to y$).
- Per cada triplet d'objectes $x, y, z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, una **regla de composició**
$$\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z).$$
- Per cada element $x \in \mathcal{C}$, el **morfisme identitat** $\mathrm{id}_x \in \mathcal{C}(x, x)$ (també denotat per 1_x).

Tal que se satisfan:

(1) **Identitat**: per cada parell d'elements $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ i cada morfisme $f \in \mathcal{C}(x, y)$, es té que
$$f \circ \mathrm{id}_x = f = \mathrm{id}_y \circ f.$$
(2) **Associativitat** de la composició: donats $f \in \mathcal{C}(x, y)$, $g \in \mathcal{C}(y, z)$, $h \in \mathcal{C}(z, w)$, es té que
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. Exemples bàsics

Exemple 2. La categoria de conjunts **Set** és la categoria formada per:

- **Objectes:** els conjunts. Observem que $\mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ no és un conjunt (per la paradoxa de Russell) però sí que és una classe[1].
- **Morfismes:** donats dos conjunts A i B, els morfismes entre A i B són les aplicacions $f : A \to B$.
- **Composició:** la composició és la composició d'aplicacions entre conjunts.
- **Identitat:** la identitat $\mathrm{id}_A : A \to A \in \mathbf{Set}(A, A)$ és l'aplicació identitat $\mathrm{id}_A(a) := a$.

Date: 23 de Febrer de 2024.

[1] No sé què vol dir això.

Els conjunts de la forma $[n] := \{0, \ldots, n\}$ són objectes de la categoria **Set**. Un exemple de morfisme entre [4] i [5] és

$$f : [4] \to [5], \quad f(x) := x.$$

Un exemple de morfisme entre [5] i [4] és

$$g : [5] \to [4], \quad f(x) := \begin{cases} x, & x \leq 4, \\ 4, & x = 5 \end{cases}.$$

La composició $g \circ f \in \mathbf{Set}([4],[4])$ és la identitat $\mathrm{id}_{[4]}$, però no ho és $f \circ g \in \mathbf{Set}([5],[5])$.

Exemple 3. Sigui $\mathbb{K}$ un cos[2]. La categoria de $\mathbb{K}$-espais vectorials $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ és la categoria que té per objectes els $\mathbb{K}$-espais vectorials, per morfismes les aplicacions $\mathbb{K}$-lineals, per identitat l'aplicació lineal identitat, i per composició la composició d'aplicacions lineals.

Per exemple, $\mathbb{K}^2$ i $M(2;\mathbb{K})$ són dos objectes de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, i l'aplicació lineal donada per

$$f : \mathbb{K}^2 \to M(2;\mathbb{K}), \quad f(a,b) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+b & -b \end{pmatrix}$$

és un morfisme que viu a $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, M(2;\mathbb{K}))$.

Exemple 4. La categoria d'espais topològics **Top** és la categoria que té per objectes els espais topològics, per morfismes les aplicacions contínues, per identitat l'aplicació contínua identitat, i per composició la composició d'aplicacions contínues.

Són objectes de la nostra categoria $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ amb la topologia de Zariski, la recta amb dos orígens, etc.

Exemple 5. Anàlogament podem formar les categories **Rng** d'anells, **Grp** de grups, **Ab** de grups abelians, $\mathbf{Mod}_R$ de R-mòduls (per un anell R), **Met** d'espais mètrics, **Mfld** de varietats topològiques, $\mathbf{Mfld}^\infty$ de varietats diferenciables, **Fld** de cossos, **Hilb** d'espais de Hilbert, **Graph** de grafs, etc. En tots els casos els morfismes són les aplicacions que *respecten l'estructura addicional.* Com veurem, això no té per què ser sempre així.

Exemple 6. Hem vist que hi ha una categoria **Top** d'espais topològics, que és la categoria estudiada a l'assignatura de Topologia. Però a Topo2 s'estudien els espais topològics mòdul homotopia. Vegem com definir la categoria apropiada h**Top**:

- **Objectes:** espais topològics.
- **Morfismes:** els morfismes entre dos espais topològics X i Y són les classes d'homotopia de les aplicacions contínues entre X i Y, és a dir,
$$h\mathbf{Top}(X,Y) := \mathbf{Top}(X,Y)/\text{homotopia}.$$
- **Composició:** ve donada per la composició de representants, és a dir,
$$[g] \circ_{h\mathbf{Top}} [f] := [g \circ_{\mathbf{Top}} f].$$
Evidentment cal comprovar que aquesta definició no depèn dels representants escollits, és a dir, que si $[f] = [f']$ i $[g] = [g']$ aleshores $[g'] \circ_{h\mathbf{Top}} [f'] = [g] \circ_{\mathbf{Top}} [f]$.
- **Identitat:** és la classe de la identitat.

[2]Els físics poden pensar que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Qui vulgui fer-se l'interessant pot pensar que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_2$.

Per exemple, hi ha un únic morfisme entre S^2 i $\mathbb{R}$, ja que $\mathbb{R}$ és contràctil i, per tant, tot $f : S^2 \to \mathbb{R}$ és homotòpicament equivalent a l'aplicació constant $S^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. Això ens fa veure que un morfisme no és, necessàriament, una aplicació (en aquest cas és una classe d'equivalència).

Una curiositat és que $h\mathbf{Top}(S^1, X) = \pi_1(X)$ i, més en general, $h\mathbf{Top}(S^n, X) = \pi_n(X)$.

3. Exemples més esotèrics

Exemple 7. Definim una categoria $[2]$ amb objectes $\mathrm{ob}([2]) = \{0, 1, 2\}$ i morfismes:

- $[2](n, n) = \{\mathrm{id}_n\}$ per tota $n \in \{0, 1, 2\}$.
- $[2](0, 1) = \{f\}$.
- $[2](1, 2) = \{g\}$.
- $[2](0, 2) = \{h\}$.
- $[2](1, 0) = [2](2, 1) = [2](2, 0) = \emptyset$.

Com que hi ha una composició $\circ : [2](1, 2) \times [2](0, 1) \to [2](0, 2)$, la parella (g, f) ha de tenir una imatge $g \circ f \in [2](0, 2) = \{h\}$ que, per força, ha de ser h. Per tant, $g \circ f = h$.

Exemple 8. Sigui $(R, \leq)$ un conjunt amb un preordre (relació binària, reflexiva i transitiva) [3]. Podem definir la categoria $(R, \leq)$ de la següent manera:

- **Objectes:** $\mathrm{ob}(R, \leq) := R$.
- **Morfismes:** si $a \leq b$, $(R, \leq)(a, b) := \{a \leq b\}$ (on $a \leq b$ s'intepreta com un únic símbol formal), mentre que si $a \not\leq b$, $(R, \leq)(a, b) := \emptyset$.
- **Composició:** donats $a \leq b \in (R, \leq)(a, b)$ i $b \leq c \in (R, \leq)(b, c)$, per transitivitat $a \leq c$ així que $(R, \leq)(a, c) = \{a \leq c\}$. Definim
$$(b \leq c) \circ (a \leq b) := a \leq c.$$
- **Identitat:** per reflexivitat sabem que $a \leq a$. Resulta que $\mathrm{id}_a = a \leq a$.

Per exemple, si prenem $R = [2]$ amb la relació d'ordre induïda com a subconjunt de $\mathbb{Z}$, obtenim l'exemple anterior. Això es pot generalitzar per definir una categoria $[n]$ per cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$.

Recíprocament, donada una categoria amb $\#\mathcal{C}(x, y) \leq 1$ per cada $x, y \in \mathcal{C}$, podem definir un preordre $x \leq y$ si, i només si, $\mathcal{C}(x, y) \neq \emptyset$. Per tant, un conjunt preordenat **és** una categoria[4] amb, com a molt, un morfisme entre cada parella d'objectes.

Exemple 9. Alguns casos particulars de categories obtingudes a partir de preordres són:

(1) La categoria d'oberts d'un espai topològic X, que es denota per $\mathbf{Op}(X)$. Sorgeix de la relació d'ordre en la topologia de X donada per $U \leq V$ si, i només si, $U \subseteq V$.

[3] Els físics poden pensar que $(R, \leq)$ és $(\mathbb{Z}, \leq)$ ó $\mathbb{Z}$ amb la relació $a \leq b$ si, i només si, b és un múltiple de a.

[4] Cal demanar que els objectes de la categoria formin un conjunt i no pas una classe general.

(2) La categoria de subgrups d'un grup G, que sorgeix de la relació d'ordre en el conjunt de subgrups de G donada per $H \leq K$ si, i només si, H és un subgrup de K.

(3) Donada una extensió $\mathbb{K}/\mathbb{L}$, la categoria de subextensions de $\mathbb{K}/\mathbb{L}$. Sorgeix de la relació d'ordre en el conjunt de subextensions de $\mathbb{K}/\mathbb{L}$: dues subextensions k i k' satisfan $k \leq k'$ si, i només si, $\mathbb{K}/k'/k/\mathbb{L}$.

El Teorema Fonamental de la Teoria de Galois es pot reformular com una certa equivalència entre les categories (2) i (3) (quan l'extensió és de Galois).

Exemple 10. Sigui $(G, \cdot)$ un grup. Podem definir una categoria $(G, \cdot)$ de la següent manera:

- **Objectes:** hi ha un únic objecte $\mathrm{ob}(G, \cdot) := \{*\}$.
- **Morfismes:** $(G, \cdot)(*, *) := G$.
- **Composició:** ve donada pel producte de G: $g \circ f := g \cdot f$.
- **Identitat:** és la identitat del grup.

El recíproc és cert: una categoria amb un sol element i amb tots els morfismes invertibles dóna lloc a un grup. Per tant, un grup **és** una categoria amb un únic objecte i amb tots els morfismes invertibles.

Exemple 11. Donada una categoria $\mathcal{C}$, podem definir la seva categoria dual $\mathcal{C}^{\vee}$[5], que és la categoria que s'obté de girar totes les fletxes:

- **Objectes:** $\mathrm{ob}(\mathcal{C}^{\vee}) := \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.
- **Morfismes:** $\mathcal{C}^{\vee}(x, y) := \mathcal{C}(y, x)$.
- **Composició:** donats $x, y, z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}^{\vee}) = \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, i $f \in \mathcal{C}^{\vee}(x, y) = \mathcal{C}(y, x)$, $g \in \mathcal{C}^{\vee}(y, z) = \mathcal{C}(z, y)$, definim
$$g \circ_{\mathcal{C}^{\vee}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g.$$
- **Identitat:** $\mathrm{id}_x^{\mathcal{C}^{\vee}} = \mathrm{id}_x^{\mathcal{C}}$.

Es pot veure que $(\mathcal{C}^{\vee})^{\vee} = \mathcal{C}$.

4. Isomorfismes

Els isomorfismes donen la noció d'igualtat en una categoria. Des d'un punt de vista categòric, dos objectes isomorfs són indistingibles.

Definició 12. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria. Un morfisme $f : x \to y \in \mathcal{C}(x, y)$ és un **isomorfisme** si existeix $g : y \to x \in \mathcal{C}(y, x)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_x$ i $f \circ g = \mathrm{id}_y$. Dos objectes $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ són **isomorfs** si existeix algun isomorfisme entre ells.

Exemple 13. En la categoria **Set** un isomorfisme és una bijecció. En les categories $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, **Grp**, **Ab**, $\mathbf{Mod}_R$, etc. també coincideixen els isomorfismes i els morfismes que són bijeccions.

Això no és cert en general, ja que per començar no cal que els morfismes siguin aplicacions (i, per tant, no té sentit parlar de bijeccions).

[5] La categoria dual $\mathcal{C}^{\vee}$ també es pot denotar amb $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Exemple 14. En la categoria **Top** un isomorfisme és un homeomorfisme. No totes les bijeccions contínues són isomorfismes. Per exemple l'aplicació $[0,1) \to S^1$ donada per $t \mapsto e^{2\pi i t}$ és contínua i bijectiva, però no admet inversa contínua.

Exemple 15. En la categoria h**Top** un isomorfisme és una equivalència homotòpica. Siguin X, Y dos espais topològics. Un isomorfisme entre X i Y és un morfisme $[f]$, amb $f : X \to Y$ aplicació contínua, tal que existeix $[g]$, amb $g : Y \to X$ aplicació contínua, que fa que $[g] \circ [f] = \mathrm{id}_X$ i $[f] \circ [g] = \mathrm{id}_Y$. Això és precisament demanar que $[f]$ sigui una equivalència homotòpica.

Exemple 16. Hi ha categories amb pocs isomorfismes. Per exemple, en la categoria **Fld** els únics isomorfismes són les identitats. En canvi, en les categories formades per grups tots els morfismes són isomorfismes.

Exemple 17. Sigui $(R, \leq)$ un conjunt preordenat. Dos elements $a, b \in R$ són isomorfs si, i només si, $a \leq b$ i $b \leq a$. Per exemple, si considerem els enters $\mathbb{Z}$ amb el preordre donat per la divisibilitat $\mid$ ($a \mid b$ si, i només si, a divideix b), $a \mid b$ i $b \mid a$ és equivalent a $a = \pm b$. Per tant, deduïm que $a, b \in \mathbb{Z}$ són isomorfs en la categoria $(\mathbb{Z}, \mid)$ si, i només si, $a = \pm b$.

FUNCTORS

MARC PIQUER I MÉNDEZ - 1 DE MARÇ DE 2024

Les categories són, elles mateixes, objectes matemàtics. D'aquesta manera, no és estrany entendre que podem construir una noció de funció entre categories, els functors, que preserven l'estructura de la categoria. En donarem la definició, exemples i propietats importants.

Històricament, la teoria de categories va néixer en el marc de la topologia algebraica per formalitzar la noció de transformació natural, que tractarem la propera setmana. Per fer-ho, calia definir els functors; i, per definir els functors, calia definir les categories. Aquest document segueix el capítol 1.2 de [1].

1. Definició i exemples genèrics

Definició 1. Sigui $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ categories, un **functor (covariant)** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ és

(1) una funció $F : \operatorname{ob}\mathcal{A} \to \operatorname{ob}\mathcal{B}$ amb,
(2) per a cada $A, A' \in \mathcal{A}$, una funció $F : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$

que compleixen

(1) $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ si $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$, amb $A, A', A'' \in \mathcal{A}$; i
(2) $F(1_A) = 1_{F(A)}$, per a $A \in \mathcal{A}$.

Parlant en plata, un functor porta cada objecte a un objecte i cada morfisme a un morfisme, respectant la composició i les identitats.

Exemple 2. Un primer exemple són els **functors oblidadissos**:[1] els functors que, en una categoria, senzillament "obliden" una part de l'estructura. En posem alguns exemples.

(1) Hi ha un functor $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ definit de manera que, si G és un grup, $U(G)$ és el seu conjunt subjacent; i, si $f : G \to H$ és un morfisme de grups, llavors $U(f) = f$. Així, U senzillament oblida l'estructura dels grups.
(2) Un cas menys extrem és un cas en què el functor no ho fa oblidar tot: podem construir un functor $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ que, senzillament, oblida l'estructura multiplicativa; o un functor $U : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}$ que oblida els punts base dels espais.
(3) Un altre exemple és el cas de les inclusions: oblidem que els objectes compleixen certa propietat. Per exemple, el functor $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ que fa $U(A) = A$ per a cada grup abelià i $U(f) = f$ per a cada morfisme de grups abelians senzillament "oblida" que els grups són abelians.

[1] Francament, no sé com es tradueix *forgetful functor*, o sigui que he triat traduir-ho així. Si no us convenç, digueu "functor amnèsic" o el que volgueu.

Exemple 3. Un exemple més interessant, que veurem que en cert sentit és dual a l'anterior, són els **functors lliures**. Aquests, el que fan és construir l'estructura "més general" d'un cert tipus sobre un conjunt.

(1) Donat un conjunt S, podem construir el grup lliure[2] sobre S, $F(S)$. A més, si $f : S \to S'$ és una funció entre dos conjunts, la funció $F(f) : F(S) \to F(S')$ que canvia cada lletra d'una paraula per la que li assigna f és un morfisme de grups lliures. Així, hem construït un functor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$.
(2) De manera semblant, donat un conjunt S, podem construir les expressions formals sobre elements de S (i els seus oposats) amb suma i producte commutatius. Això vindria a ser, de fet, l'anell de polinomis sobre $\mathbb{Z}$ amb variables x_s per a $s \in S$. Així, tenim un functor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{CRing}$.

Acabem comentant una darrera qüestió: els functors, en el fons, el que fan és preservar les propietats de categoria. D'aquesta manera, un functor no és més que un morfisme de categories.

Definició 4. Denotem **Cat** la categoria que té com a objectes totes les categories i, com a morfismes, tots els functors. És clar que és una categoria: la identitat és un functor i la composició de functors és functor.

2. Exemples importants de functors

Els exemples anteriors els hem anomenat "genèrics" perquè tenen interès, en certa manera, "dins" la teoria de categories. Ara, en altres àrees de les matemàtiques podem identificar alguns functors que reconeixerem com a vells coneguts.

Exemple 5. Donat qualsevol espai topològic amb punt base (X, x), podem prendre el seu **grup fonamental** $\pi_1(X, x)$.[3] A cada morfisme d'espais topològics amb punt base $f : (X, x) \to (Y, y)$ (és a dir, f contínua amb $f(x) = y$), li podem assignar un morfisme de grups $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ de manera que, si $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$,

$$\pi_1(f)([\sigma]) = [f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y);$$

és a dir, movem el llaç a (Y, y) fent servir f i el posem a la seva classe d'homotopia. Caldria veure que estigui ben definit, ja que hem fet servir el representant σ de la classe, però això surt fàcilment de la continuïtat de f.

Ara, hem construït una aplicació d'objectes a objectes i de morfismes a morfismes. A més, es fa evident que $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ i $\pi_1(1_{(X,x)}) = 1_{\pi_1(X,x)}$ de la definició que hem donat. Per tant, prendre el grup fonamental és un functor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$.

A la topologia algebraica, segons tinc entès, hi ha multitud de functors de categories d'espais a categories algebraiques. Com que jo no en sé, ja us busqueu la vida.

Un altre exemple popular ens ve de la geometria algebraica (de la que tampoc no tinc ni idea, o sigui que no feu massa preguntes).

[2]Recordem que és el format per les construccions sobre elements del conjunt fent anar un producte denotat per la juxtaposició; és a dir, les paraules formades per elements del conjunt i els seus inversos formals.

[3]Recordem que és el grup de tots els llaços que comencen (i acaben) a x mòdul homotopia, prenent com a producte seguir primer un llaç i després el següent. Recordem que això de "mòdul homotopia" vol dir que considerem iguals dos llaços si podem deformar-ne un de manera contínua fins a convertir-lo en l'altre.

Exemple 6. Qualsevol sistema d'equacions polinòmiques dóna lloc a un functor **CRing** $\to$ **Set**. Si el sistema té n variables i A és un anell, posem $F(A)$ el conjunt de n-ples $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ que satisfan el sistema. Si $f : A \to B$ és un morfisme d'anells i $(x_1, \ldots, x_n) \in F(A)$, llavors $(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in F(B)$, de manera que també tenim una funció $F(f) : F(A) \to F(B)$. És clar que respecta les identitats i la composició, de manera que tenim un functor $F :$ **CRing** $\to$ **Set**.

A la geometria algebraica, s'anomena **esquema** un functor d'aquest tipus amb certes propietats addicionals, que jo no he entès llegint la definició i per tant no us puc dir.

3. Functors contravariants

Pot passar que estudiem alguna propietat que recordi molt a un functor, però que justament en traslladar els morfismes ens trobem que els gira. Això passa molt amb les relacions d'ordre: tenim un morfisme que preserva les relacions d'ordre però girades respecte l'original.[4] Direm que això és un nou tipus de functors.

Definició 7. Sigui $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categories. Un **functor contravariant** de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ és un functor $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$.

En exemple interessant de functors contravariants són els functors de Galois. Aquí només l'introduïrem, però més endavant veurem que diverses propietats de la teoria de Galois es poden expressar com a propietats dels functors.

Exemple 8. Sigui F, K cossos, de manera que $F \subseteq K$. Posem $\mathrm{Aut}(K/F)$ el grup dels automorfismes de K que fixen F. Ara, si $F \subseteq E \subseteq K$ (i E és un cos), tenim $\mathrm{Aut}(K/E) \subseteq \mathrm{Aut}(K/F)$. Per altra banda, sigui G subgrup de $\mathrm{Aut}(K/F)$. Llavors, definim el cos fix per G segons $K^G = \{x \in K : \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G\}$. És clar que K^G és cos i $F \subseteq K^G \subseteq K$.

Ara, si posem $\mathbf{Ext}_{K/F}$ la categoria de les sub-extensions de K/F i $\mathbf{Sub}_{\mathrm{Aut}(K/F)}$ la categoria dels subgrups de $\mathrm{Aut}(K/F)$,[5] podem definir functors contravariants $\mathcal{G}$ i $\mathcal{F}$ de manera que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ext}_{K/F} & \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{G}}{\rightleftharpoons}} & \mathbf{Sub}_{\mathrm{Aut}(K/F)}, \\ E & \mapsto & \mathrm{Aut}(K/E), \\ K^H & \leftarrow\!\shortmid & H. \end{array}$$

Són functors contravariants perquè giren les relacions d'ordre: si tenim una cadena d'extensions de cossos $F \subseteq E \subseteq E' \subseteq K$, llavors $\mathrm{Aut}(K/E') \subseteq \mathrm{Aut}(K/E)$; i si tenim una cadena de subgrups $G \subseteq G' \subseteq \mathrm{Aut}(K/F)$, llavors $K^{G'} \subseteq K^G$.

D'entre els functors contravariants n'hi ha uns que són prou importants per tenir nom propi: els que acaben a **Set**.

Definició 9. Sigui $\mathcal{A}$ una categoria. Un **prefeix** en $\mathcal{A}$ és un functor $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to$ **Set**.

Es veu que són importants en la geometria moderna.

[4] És clar que, en aquest cas, sempre podríem considerar el conjunt ordenat amb l'ordre invers, però sovint això és confusionari i impràctic.

[5] Ho són amb les relacions d'ordre tal com vam veure el dia passat.

4. Functors fidels i complets, i subcategories

Com amb els morfismes (i les funcions) sovint és important considerar propietats addicionals, donem algunes definicions addicionals per als functors.

Definició 10. Diem que un functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ és **fidel** si, per a cada $A, A' \in \mathcal{A}$, l'aplicació $f \mapsto F(f)$, per a cada $f \in \mathcal{A}(A, A')$ és injectiva. Diem que és **complet** si és exhaustiva.

Noti's que la definició només restringeix les imatges de les aplicacions per als morfismes entre cert parell d'elements de la categoria, no en general.

Definició 11. Sigui una categoria $\mathcal{A}$, diem que $\mathcal{B}$ **és una subcategoria de** $\mathcal{A}$ si $\mathrm{ob}\,\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ i, per a cada $B, B' \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}(B, B') \subseteq \mathcal{A}(B, B')$, i $\mathcal{B}$ conté les identitats i es tancada per la composició. Diem que és una **subcategoria completa** si $\mathcal{B}(B, B') = \mathcal{A}(B, B')$.

Una subcategoria és, doncs, simplement una categoria continguda en una altra. Una subcategoria completa és una categoria continguda en una altra que conté tots els morfismes de l'altra que pot contenir.

Noti's que la imatge d'un functor no necessàriament és una subcategoria, com veiem a l'exemple següent amb un functor F que va de la categoria de l'esquerra a la de la dreta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B & & & Y & \\ & & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & & \\ C \arrow[r, "g"] & D & & X \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "p \circ q"] & & Z \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

Figura 1. Diagrama de dues categories, amb el functor F definit com es descriu a sota.

Si posem $F(A) = X$, $F(B) = F(C) = Y$ i $F(D) = Z$, la imatge del functor F té els morfismes entre X i Y i entre Y i Z, però no el morfisme entre X i Z. Per tant, no té totes les composicions, i no és una categoria.

Referències

[1] Leinster, T. *Basic Category Theory.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

Transformacions Naturals

1. Definició de Transformació Natural

Comencem per un petit recordatori (que en realitat necessito jo però us el imposo).

Definició: Una categoria $\mathscr{A}$ consisteix en:

- Una col·lecció d'objectes $Ob(\mathscr{A})$
- Per cada $A, B \in Ob(\mathscr{A})$, una col·lecció de morfismes $Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$
- Per cada $A, B, C \in Ob(\mathscr{A})$, la funció *composició*

$$\begin{aligned} \phi : Hom_{\mathscr{A}}(B, C) \times Hom_{\mathscr{A}}(A, B) &\longrightarrow Hom_{\mathscr{A}}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

- Per a cada $A \in Ob(\mathscr{A})$, un element identitat $1_A \in Hom_{\mathscr{A}}(A, A)$ tal que:
  ♡ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, per funcions coherents
  ♡ $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f, \ \forall f \in Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$

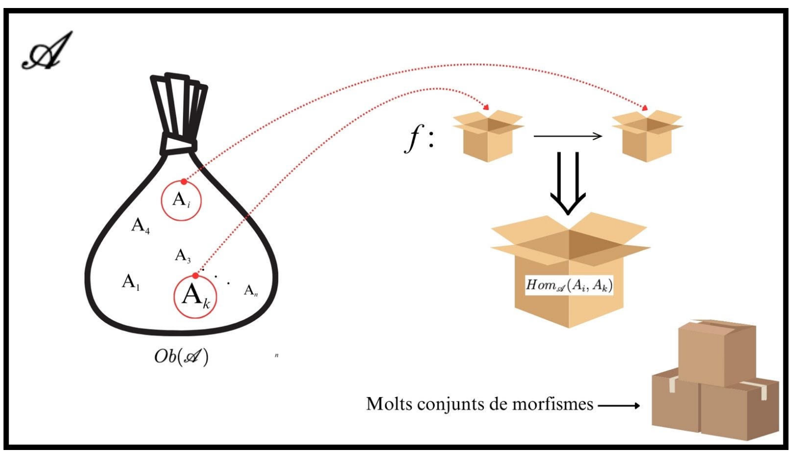


Figure 1: El esquema que no sabies que necessitaves

Definició: Donades $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categories, un functor (covariant) $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ consisteix en:

- Una funció

$$\begin{aligned} Ob(\mathscr{A}) &\to Ob(\mathscr{B}) \\ A &\mapsto F(A) \end{aligned}$$

- Per a cada $A, A' \in \mathscr{A}$, una funció

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{A}}(A, A') &\to Hom_{\mathscr{B}}(F(A), F(A')) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

  que satisfá:
  ♡ $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ quan $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ en $\mathscr{A}$
  ♡ $F(1_A) = 1_{F(A)}$, quan $A \in \mathscr{A}$.

Un functor es doncs una mena de transformació de categories: transforma els objectes i els morfismes.

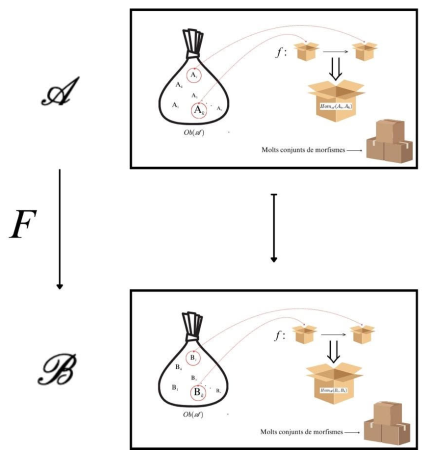


Figure 2: El esquema que no sabies que necessitaves 2

Anem a la part interessant. Hem definit el concepte de de categoria i de transformació de categoria (functor). Ara, farem les transformacions de transformacions de categories: les transformacions naturals (entre functors). Es poden fer transformacions de manera recursiva i anar creant conceptes matemàtics cada cop mes abstractes? No ho sé, les mates són mentida.

Definició: Siguin $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ categories i $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathscr{B}$ functors. Una transformació natural $\tau : F \to G$ és una família $\big(F(A) \to G(A)\big)_{A \in \mathscr{A}}$ d'aplicacions en $\mathscr{B}$ tal que per a tota funció $A \xrightarrow{f} A'$ a $\mathscr{A}$, el següent quadradet commuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & F(A') \arrow[d, "\tau_{A'}"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

Hem arribat un punt en el que fer el esquema és absurd però m'agrada arribar fins al final de les coses.

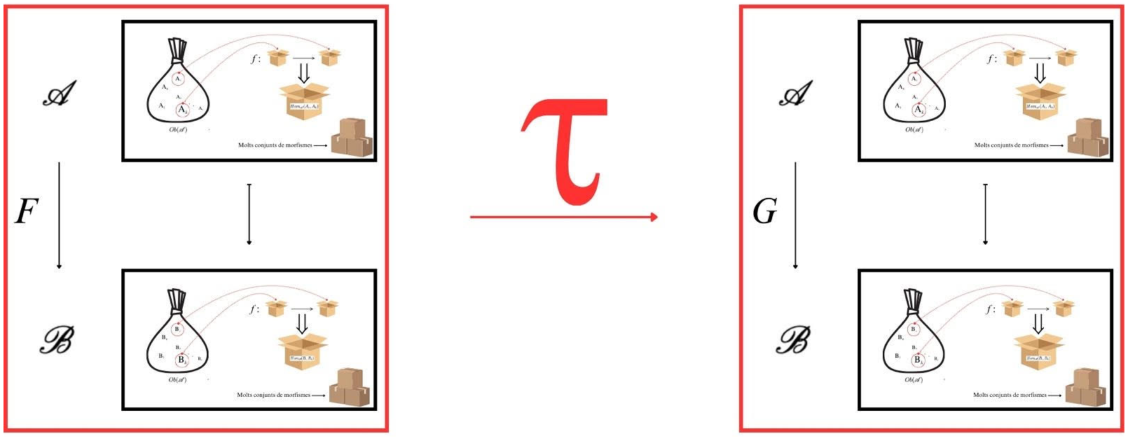


Figure 3: El esquema que no necessites

2. Alguns Exemples de Transformacions Naturals

Pel primer exemple necessitem definir el concepte de *monoide*.

Definició: Anomenem *monoide* a un conjunt S junt amb una operació binària $S \times S \to S$ que denotem per $\clubsuit$ si aquest, satisfà:

$$\heartsuit \quad (a\clubsuit b)\clubsuit c = a\clubsuit(b\clubsuit c), \text{ per } a, b, c \in S$$

$$\heartsuit \quad \exists e \in S : \; ea = a = ae, \; \forall a \in S$$

Bàsicament es com un grup, però amb la diferència de que no tots els seus elements admeten una inversa.

Exemple 1: Comencem fort: en aquest exemple veurem com el determinant d'una matriu $n \times n$ pot ser entès com una transformació natural. Sigui n el vostre enter positiu preferit (és a dir, $n = 73$).

Sabem que tot homomorfisme d'anells $R \to S$ indueix un homomorfisme

$$\mathscr{M}_n(R) \to \mathscr{M}_n(S).$$

Aquests conjunts, són monoides. Així, tenim un functor que ve donat per:

$$\mathscr{M}_n : \textbf{CRing} \to \textbf{Mon}$$

de la categoria d'anells commutatius, a la categoria de monoides. D'altra banda tenim el functor

$$U : \textbf{CRing} \to \textbf{Mon}$$

que descriu com els elements de qualsevol anell R formen un monoide $U(R)$ sota multiplicació.

Ara bé, tota matriu X $n \times n$ té un determinant $det_R(X)$ sota un anell commutatiu R. Donades les propietats de determinants

$$det_R(XY) = det_R(X) \cdot det_R(Y), \quad det_R(I) = 1,$$

ens deixen veure que, per a cada $R \in \mathbf{CRing}$, la funció $det_R : \mathscr{M}_n(R) \to U(R)$ és un homomorfisme de monoides. Per tant, tenim la família d'aplicacions

$$\left(\mathscr{M}_n(R) \overset{det_R}{\to} U(R)\right)_{R \in \mathbf{CRing}},$$

que defineix una transformació natural. El seu esquema será algo així:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f \in Hom_{\mathbf{CRing}}(R,S)"] \arrow[d, dashed] & S \arrow[d, dashed] \\
\mathscr{M}_n(R) \arrow[r, "\mathscr{M}_n(f)"] \arrow[d, "det_R"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathscr{M}_n(S) \arrow[d, "det_S"] \\
U(R) \arrow[r, "U(f)"'] & U(S)
\end{tikzcd}$$

On R, S anells commutatius, f morfisme d'anells i la resta està explicat.

Observació: Les transformacions naturals es poden composar. Per tant, donades dues categories $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$, existeix una categoria que té per objectes els functors de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ i per morfismes, les transformacions naturals entre ells. En el esquema, li direm categoria $\mathscr{C}$ - de categoria collonuda.

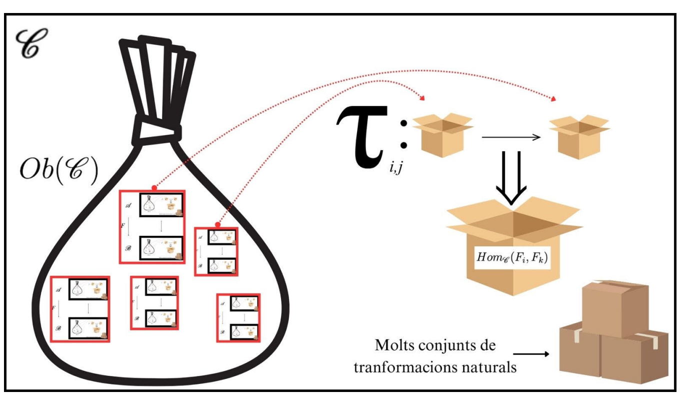


Figure 4: El esquema

Això vol dir que podem fer transformacions naturals de transformacions naturals de $\overset{n)}{\ldots}$ transformacions naturals. *bruh* Aquest functor se li diu *functor categoria de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$* i el denotem $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ o bé $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$.

Exemple 2: Donada 2 la categoria discreta de dos objectes, un functor de 2 a $\mathscr{B}$ és un parell d'objectes de $\mathscr{B}$ i una transformació natural és un parell d'aplicacions. Així, el functor categoria $[2, \mathscr{B}]$ és isomorf al producte de categories $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$, el qual dona el sentit a la notació $\mathscr{B}^2$

3. Equivalència Natural

Definició: Una equivalència entre categories $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ consisteix en un parell de functors amb isomorfismes naturals:

$$\eta : 1_{\mathscr{A}} \to G \circ F, \quad \epsilon : F \circ G \to 1_{\mathscr{B}}.$$

Si existeix una equivalència entre $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$, direm que són equivalents. També direm que els functors F i G són equivalències.

Definició: Direm que un functor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ és essencialment exhaustiu en objectes si, per tot $B \in \mathscr{B}$, existeix $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$.

Proposició: *Un functor és una equivalència si, i només si, és plé, fidel i essencialment exhaustiu en objectes.*

ADJUNCIONS

ROGER GARRIDO VILALLAVE

En aquests apunts se segueix el llibre [1].

1. Definició

Exemple 1. Sigui $\mathbb{K}$ un cos. Considerem el functor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ que assigna a cada conjunt A el $\mathbb{K}$-espai vectorial (lliurement) generat per A, i a l'aplicació $f : A \to B$ l'aplicació lineal

$$F(f) : F(A) \to F(B), \quad F(f)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

Per donar una aplicació lineal entre $F(A)$ i un $\mathbb{K}$-espai vectorial arbitrari V n'hi ha prou en donar la imatge dels elements de la base. És a dir, donar una aplicació lineal $F(A) \to V$ és equivalent a donar una aplicació de conjunts $A \to U(V)$ (aquí $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$ és el functor oblidadís, és a dir, $U(V)$ és el conjunt de vectors en V).

Tenim doncs una bijecció

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}(F(A), V) \cong \mathbf{Set}(A, U(V)).$$

Fixem-nos que això ens permet ignorar l'estructura d'espai vectorial i treballar només amb els elements de la base (que són conjunts).

Considerem ara aplicacions lineals $f : F(A) \to V$ i $g : V \to W$. Recordem que f està únicament determinada per una aplicació $\bar{f} : A \to U(V)$ de conjunts. La composició $h := g \circ f$ és una aplicació lineal $F(A) \to W$, així que està únicament determinada per una aplicació $\bar{h}$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & V \arrow[d, "g"] \\
 & W
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & U(V) \arrow[d, "U(g)"] \\
 & U(W)
\end{tikzcd}$$

Encara que a priori no té per què ser cert, el triangle de la dreta commuta. Recíprocament, si fem la mateixa construcció amb conjunts i llavors apliquem el functor lliure F, també obtindrem un triangle commutatiu.

Definició 2. Siguin $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ dues categories, i $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos functors. Diem que F és un **adjunt per l'esquerra** de G, i que G és un **adjunt per la dreta** de F, si es té una bijecció *natural*

$$\mathcal{D}(F(x), y) \cong \mathcal{C}(x, G(y))$$

Date: 22 de Març de 2024.

per cada parell d'elements $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ i $y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.

La naturalitat significa que el triangle de l'esquerra commuta si, i només si, també ho fa el de la dreta.

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & G(y) \arrow[d, "G(g)"] \\ & G(z) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & G(z) \\ y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "F(f)"'] & z \\ F(y) \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Escrivim $F \dashv G$. Una **adjunció** entre F i G és una elecció de bijecció natural.

2. Exemples

Exemple 3. Normalment els functors oblidadissos admeten adjunts per l'esquerra, que són els functors lliures. Per exemple, el functor oblidadís $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ admet l'adjunt per l'esquerra $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ donat per la construcció de grup lliure.

Exemple 4. Sigui G un grup. Definim el seu **grup abelianitzat** com el grup abelià

$$G^{\mathrm{ab}} := \frac{G}{[G,G]},$$

on $[G,G]$ és el subgrup normal de G generat per $\{ghg^{-1}h^{-1}\}_{g,h\in G}$. Moralment, estem matant tots els commutadors, de manera que tots els element de G^{ab} commutaran.

Sigui $f : G \to H$ un morfisme de grups. La composició $G \xrightarrow{f} H \to H^{\mathrm{ab}}$ conté $[G,G]$ al seu nucli, de manera que passa al quocient de manera única com un morfisme $G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$. Anomenem aquest morfisme f^{ab}. Hem definit així un functor $(-)^{\mathrm{ab}} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$, el functor **abelianització**.

Observem que, si G és un grup i A un grup abelià, tot morfisme de grups $f : G \to U(A)$ anul·la el commutador $[G,G]$, de manera que passa al quocient de manera única com un morfisme $G^{\mathrm{ab}} = G/[G,G] \to A$. Per tant, tenim una bijecció

$$\mathbf{Ab}(G^{\mathrm{ab}}, A) \cong \mathbf{Grp}(G, U(A)).$$

Queda comprovar la naturalitat. Deduïm que tenim un parell de functors adjunts $(-)^{\mathrm{ab}} \dashv U$.

Exemple 5. Podem determinar el conjunt de morfismes $\mathbf{Grp}(F_6, \mathbb{Z})$, on F_6 és el sisè grup de Fibonacci

$$F_6 = \langle x_1, \ldots, x_6 \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2} \rangle,$$

amb la convenció que $x_7 = x_1$ i $x_8 = x_2$.

Com que $F_6^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$, per l'adjunció $(-)^{\mathrm{ab}} \dashv U$ deduïm que

$$\mathbf{Grp}(F_6, \mathbb{Z}) \cong \mathbf{Ab}(F_6^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4), \mathbb{Z}) = 0.$$

Exemple 6. Sigui $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ el functor oblidadís, i considerem els functors $D, G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ que assignen la topologia discreta i grollera, respectivament, a un conjunt. Comprovem que $D \dashv U \dashv G$.

Adjunció $D \dashv U$. Siguin A un conjunt i X un espai topològic. Tota aplicació $f : D(A) \to X$ és contínua, ja que l'antiimatge de tot obert de X és oberta en $D(A)$. Per tant, donar una aplicació contínua $D(A) \to X$ és equivalent a donar una aplicació de conjunts $A \to U(X)$. Així doncs,

$$\mathbf{Top}(D(A), X) \cong \mathbf{Set}(A, U(X)).$$

Queda comprovar naturalitat.

Adjunció $U \dashv G$. Siguin A un conjunt i X un espai topològic. Tota aplicació $f : X \to G(A)$ és contínua, ja que els únics oberts de $G(A)$ són $\emptyset$ i A, que tenen preimatge oberta (X i $\emptyset$, respectivament). Per tant, és el mateix donar una aplicació contínua $f : X \to G(A)$ que una aplicació de conjunts $U(X) \to A$. És a dir,

$$\mathbf{Set}(U(X), A) \cong \mathbf{Top}(X, D(A)).$$

Queda comprovar naturalitat.

3. Definició, segona part

3.1. **D'adjuncions a (co)unitats.** Suposem que tenim una adjunció $F \dashv G$ entre les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$.[1]

Sigui $x \in \mathcal{C}$. Aleshores

$$\mathcal{C}(x, GF(x)) \cong \mathcal{D}(F(x), F(x)).$$

Com que $\mathrm{id}_{F(x)}$ és un morfisme de $\mathcal{D}(F(x), F(x))$, passant per la bijecció obtenim un morfisme $\eta_x := \overline{\mathrm{id}_{F(x)}}$ de $\mathcal{C}(x, GF(x))$. Per tant, tenim una família de morfismes $\{\eta_x\}_{x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$ que van de x a $GF(x)$ i que està parametritzada per $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Això és, precisament, una transformació natural, sota la suposició que el diagrama següent commuti per totes $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_x"'] & y \arrow[d, "\eta_y"] \\
GF(x) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(y)
\end{tikzcd}$$

Comprovem aquesta commutativitat. Per fer-ho, veurem que tant el triangle inferior com el superior composen al mateix morfisme.

Triangle inferior. Per una banda, de la definició de morfisme identitat sabem que el triangle següent commuta:

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(x)}"'] \arrow[dr, "F(f)"] & \\
F(x) \arrow[r, "F(f)"'] & F(y)
\end{tikzcd}$$

[1] Comencem amb la teoria de categories de veritat.

La naturalitat de $F \dashv G$ implica que el següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "\eta_x"'] \arrow[dr, "\overline{F(f)}"] & \\ GF(x) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(y) \end{tikzcd}$$

on $\overline{F(f)}$ denota la imatge de $F(f)$ sota la bijecció $\mathcal{D}(F(x), F(y)) \cong \mathcal{C}(x, GF(y))$.

Triangle superior. Per altra banda, també sabem que el següent triangle commuta:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & F(y) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(y)}"] \\ & F(y) \end{tikzcd}$$

Com abans, a partir de la naturalitat de $F \dashv G$ podem deduir que el següent triangle commuta:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\overline{F(f)}"'] & y \arrow[d, "\eta_y"] \\ & GF(y) \end{tikzcd}$$

Quadrat. Hem vist que

$$GF(f) \circ \eta_x = \overline{F(f)} = \eta_y \circ f,$$

així que deduïm la commutativitat del quadrat. Per tant, $\{\eta_x\}_{x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$ és una transformació natural, que s'anomena **unitat**.

De manera dual obtenim una transformació natural $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, que s'anomena **counitat**.

A més, aquestes transformacions naturals satisfan les identitats triangulars, que més endavant veurem què són.

3.2. **De (co)unitats a adjuncions.** Suposem que partim d'una unitat $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ i una counitat $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Quan determinen una adjunció?

Cal construir bijeccions naturals

$$\mathcal{D}(F(x), y) \cong \mathcal{C}(x, G(y)), \quad x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}),$$

de manera que la imatge de $\mathrm{id}_{F(x)} \in \mathcal{D}(F(x), F(x)) \cong \mathcal{C}(x, GF(x))$ sigui η_x, i la imatge de $\mathrm{id}_{G(y)} \in \mathcal{C}(G(y), G(y)) \cong \mathcal{D}(FG(y), y)$ sigui η_y.

Un morfisme $f : F(x) \to y$ el podem enviar a la composició

$$(x \xrightarrow{\eta_x} GF(x) \xrightarrow{G(f)} G(y)) \in \mathcal{D}(x, G(y)),$$

i un morfisme $g : x \to G(y)$, a la composició

$$F(x) \xrightarrow{F(g)} FG(y) \xrightarrow{\varepsilon_y} y.$$

Això dóna aplicacions $\mathcal{C}(F(x), y) \to \mathcal{D}(x, G(y))$ i $\mathcal{D}(x, G(y)) \to \mathcal{C}(F(x), y)$. Si veiem que són inverses, haurem trobat la bijecció (i, per tant, haurem definit una adjunció[2]).

La imatge d'un morfisme $f \in \mathcal{D}(F(x), y)$ sota $\mathcal{D}(F(x), y) \to \mathcal{C}(x, G(y)) \to \mathcal{D}(F(x), y)$ és la composició sòlida del següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "F(\eta_x)"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}_{F(x)}"'] & FGF(x) \arrow[r, "FG(f)"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_{F(x)}"] & FG(y) \arrow[r, "\varepsilon_y"] & y \\
& F(x) \arrow[urr, dashed, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

El quadrat (triangle) de la dreta commuta per la definició de transformació natural. Demanar que el triangle de l'esquerra commuti és equivalent a demanar una de les identitats triangulars. Per tant, si les identitats triangulars són satisfetes per η i ε, la imatge de f és f.

De manera dual podem veure que la imatge de $g \in \mathcal{C}(x, G(y))$ sota $\mathcal{C}(x, G(y)) \to \mathcal{D}(F(x), y) \to \mathcal{C}(x, G(y))$ és g, sempre que les identitats triangulars siguin satisfetes per η i ε.

3.3. **Definició.**

Definició 7. Siguin $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ functors. Una **adjunció** entre F i G és una parella de transformacions naturals $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ (anomenada **unitat**) i $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (anomenada **counitat**) que satisfà les **identitats triangulars**:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Diem que F és un **adjunt per l'esquerra** de G, i que G és un **adjunt per la dreta** de F.

4. Més exemples

Exemple 8. Considerem l'adjunció $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$, $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Set}$.

Considerem el conjunt $\{a, b\}$. Calculem la unitat $\eta_{\{a,b\}} : \{a, b\} \to UF(\{a, b\})$. Com que $\mathrm{id}_{F(\{a,b\})}(\lambda a + \mu b) = \lambda a + \mu b$, per totes $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, deduïm que

$$\eta_{\{a,b\}}(a) := \overline{\mathrm{id}_{F(\{a,b\})}}(a) = a \in UF(\{a, b\}),$$

$$\eta_{\{a,b\}}(b) := \overline{\mathrm{id}_{F(\{a,b\})}}(b) = b \in UF(\{a, b\}).$$

[2]Sota la suposició que se satisfaci la naturalitat. No ho comprovarem, es deixa com a exercici pel lector.

Considerem ara l'espai vectorial $\mathbb{Q}^2$. Calculem la counitat $\varepsilon_{\mathbb{Q}^2} : FU(\mathbb{Q}^2) \to \mathbb{Q}^2$. $FU(\mathbb{Q}^2)$ és l'espai vectorial que té per base el conjunt $U(\mathbb{Q}^2)$, de manera que els seus elements són combinacions lineals finites *formals* d'elements del conjunt $U(\mathbb{Q}^2)$.[3]

Sabem que $\mathrm{id}_{FU(\mathbb{Q}^2)}(\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i, b_i)$, així que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{FU(\mathbb{Q}^2)}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i, b_i)\right) &= \overline{\mathrm{id}_{FU(\mathbb{Q}^2)}}\left(\sum_{i=1}^n{}' \lambda_i(a_i, b_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n{}' \lambda_i(a_i, b_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) \in \mathbb{Q}^2,
\end{aligned}$$

on les sumes decorades amb $'$ són sumes a l'espai vectorial $\mathbb{Q}^2$. Bàsicament, el que fa la counitat $\varepsilon_{\mathbb{Q}^2}$ és convertir les sumes formals en sumes de veritat.

Exemple 9. Sigui X un espai topològic. Considerem la categoria $P(X)$ formada pels subconjunts de X (amb $Y \to Z$ si, i només si, $Y \subseteq Z$), i la categoria $T(X)$ formada pels tancats de X (amb $A \to B$ si, i només si, $A \subseteq B$).

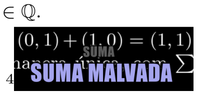
Tenim el functor inclusió $i : T(X) \to P(X)$, i el functor adherència $\mathrm{Ad} : P(X) \to T(X)$ que, donat un subconjunt $Y \subseteq X$, en calcula l'adherència $\mathrm{Ad}(Y) := \bar{X}$. Es pot comprovar que són funtors adjunts $\mathrm{Ad} \dashv i$.

La unitat $\eta : \mathrm{id}_{P(X)} \to i\mathrm{Ad}$ dóna, per cada subconjunt $Y \subseteq X$, un morfisme $\eta_Y : Y \to i\mathrm{Ad}(Y)$, que ve a ser la inclusió canònica de Y en la seva adherència.

References

[1] T. Leinster. *Basic Category Theory.*

[3] És un espai vectorial MOLT gros! Per exemple, $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$ són linealment independents, i no és cert que $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$,[4] ni tampoc $3 \cdot (1, 2) = (3, 6)$. Tot element de $FU(\mathbb{Q}^2)$ es pot expressar, de manera única, com $\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i, b_i)$, amb $(a_i, b_i) \in \mathbb{Q}^2$ diferents dos a dos, i $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.

[4] 

Teoria de conjunts per a teoria de categories

Joaquim Vives Fornt

Abril 2024

L'objectiu d'aquesta sessió és essencialment veure que no tot el que se'ns pugui ocórrer és un conjunt, i que, en particular, moltes categories amb les que tractem no són pròpiament conjunts. Res del que intorduïm aquí és imprescindible, sembla ser, per a la teoria de categories que farem. Val a dir que és també d'interès general saber que no tot és un conjunt i què se'n fa al respecte.

1.1 Teoria axiomàtica de conjunts: conjunts i classes

Començarem donant les nocions amb què actualment es defineix la teoria de conjunts. És tracta d'una aproximació amb axiomes i des del punt de vista de la lògica de primer ordre. La idea és formalitzar en unes quantes fórmules de primer ordre allò que volem que compleixin els objectes amb què tractem, que seran conjunts.

Donem primer els axiomes de ZFC, amb què un pot formalitzar tota la teoria de conjunts habitual i amb què prenen sentit les nocions que s'usen habitualment en matemàtiques.

0 *Existència:* Hi ha algun conjunt.

1 *Extensionalitat:* $A = B \longleftrightarrow \forall\ a \in A(a \in B) \wedge \forall\ b \in B(b \in A)$

2 *Separació:* Per a cada conjunt A i per a cada propietat φ, (fórmula de primer ordre) hi ha un únic conjunt B tal que

$$x \in B \longleftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)$$

Notarem $B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$

3 *Parell*: Per a qualssevol conjunts A, B, hi ha un conjunt C tal que

$$x \in C \longleftrightarrow x = A \vee x = B$$

4 *Unió:* Per a cada conjunt A hi ha un conjunt $B = \bigcup A$ tal que

$$x \in B \longleftrightarrow \exists a \in A(x \in a)$$

5 *Potència:* Per a cada conjunt A hi ha un conjunt $\mathcal{P}(A)$ tal que

$$S \in \mathcal{P}(A) \longleftrightarrow \forall\ s \in S(s \in A)$$

Definició. Un conjunt S és *inductiu* si:

1. $\emptyset \in S$,
2. $n \in S \Rightarrow n \cup \{n\} \in S$.

6 *Infinit:* Hi ha un conjunt inductiu.

Definició. Una *funció d'elecció* per a un conjunt A és una aplicació $f : A \to \bigcup A$ tal que per a cada $x \in A$, $f(x) \in x$.

7 *Elecció:* Per a cada conjunt A tal que $\emptyset \notin A$ hi ha una funció d'elecció per a A.

Fem èmfasis en l'axioma de separació. Cal remarcar que de fet es tracta d'una col·lecció infinita d'axiomes, atès que n'hi ha un per a cada φ. Una tal col·lecció d'axiomes s'anomena *esquema.* En segon lloc, la condició que els elements hagin de ser d'un conjunt a més de complir $\varphi(x)$ és necessària, i fou la solució de Russell a la coneguda *paradoxa de Russell.*
Considerem la següent construcció:

$$R = \{x | x \notin x\}.$$

és immediat que

$$R \in R \longleftrightarrow R \notin R$$

cosa que és una contradicció.

Ara, la solució que el sistema de Zermelo Fraenkel dona és sezillament que això no pot ser un conjunt, i així és assumint els axiomes que hem donat.

Un altre exemple d'objecte que no és un conjunt és la *classe universal*, V:

$$\text{Posem } V = \{x | x = x\}$$

Si V fos un conjunt, tindríem

$$R = \{x | x \notin x\} = \{x \in V | x \notin x\}$$

i per separació R seria un conjunt, perquè és un subconjunt d'un altre conjunt i compleix la propietat $\varphi(x) = x \notin x$.

Així, tenim dos exemples de fórmules de primer ordre que no defineixen conjunts. La solució alternativa a aquest problema fou la donada per Von Newmann-Bërnays-Gödel, en què les variables de la teoria de primer ordre no són conjunts, sinó classes. En aquesta teoria els axiomes enunciats a dalt serien del tipus *Si A és un conjunt, llavors hi ha un conjunt tal que...* Hi ha certes diferències entre NBG i ZF que ometrem; n'hi ha prou en què ens quedem que a ZF les coses que no són conjunts no existeixen com a tal, i que senzillament són abreviacions de les fórmules de primer ordre. Per exemple, escriuríem

$$x \text{ és un conjunt} \longleftrightarrow x \in V$$

Definició. (NBG) Diem que una classe A és un conjunt si hi ha alguna clase B tal que $A \in B$.

Direm que una classe és una *classe pròpia* si no és un conjunt. Per exemple, V i R són classes pròpies.

1.2 Hi ha categories que no són conjunts

Definició. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria. Diem que $\mathcal{C}$ és *petita* si $Ob(\mathcal{C})$ i $\{\mathcal{C}(x,y) \mid x,\, y \in Ob(\mathcal{C}\}$ són conjunts. Altrament diem que es tracta d'una categoria *gran.*

Definició. Diem que una categoria $\mathcal{C}$ és *localment petita* si per a qualssevol objectes x, y, $\mathcal{C}(x,y)$ és un conjunt.

Proposició. **Set** és gran però localment petita.

Demostració. Ja hem vist que $V = Ob(\mathbf{Set})$ no és un conjunt. Ara, donats A i B conjunts, $\mathcal{C}(A,B)$ són les aplicacions que van de A en B. Notarem aquestsa col·lecció $\mathcal{C}(A,B) = B^A$. Es té:

$$\begin{aligned} B^A = \{f \mid f : A \to B\} &= \{X \mid X \subseteq A \times B, \text{ i tal que si } (a,b),(a,b') \in X \text{ aleshores } b = b'\} \\ &= \{X \in P(A \times B) \mid \forall\, a,b,b'((a,b) \in X \wedge (a,b') \in X \to b = b')\} \end{aligned}$$

per separació això és un conjunt.

En vistes de veure que la categoria d'espais vectorials $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ és gran, donem primer dues nocions per a enunciar el teorema de Cantor.

Definició. Donats dos conjunts A i B, definim:

$A \preccurlyeq B$ sii hi ha una aplicació injectiva de A en B.

$A \sim B$ sii hi ha una bijecció de A en B.

$A \prec B$ sii hi ha una aplicació injectiva de A en B i $A \nsim B$

Proposició. (Cantor) Per a tot conjunt A, $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Demostració. La injectivitat de A en $\mathcal{P}(A)$ és clara. Per a veure que no pot haver-hi cap bijecció suposem que n'hi ha una, sigui $f : A \to B$. Posem

$$S = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A.$$

Si f és bijectiva hi ha algún $b \in A$ tal que $S = f(b)$. Ara,

$$b \in S \longleftrightarrow b \notin f(b) = S$$

que és clarament una contradicció.

Exemple. $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ és un classe gran.

Considerem primer un conjunt I i una funció $\mathcal{F} : I \to \{V \mid V \text{ és } \mathbb{K}\text{-espai vectorial}\}$ qualsevol. Notarem $\mathcal{F}(i) = V_i$. Veure que $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ és una classe gran equival a veure que hi ha un espai vectorial que no és de la imatge de F mòdul isomorfismes, és a dir que no podem indexar per un conjunt la col·lecció d'espais vectorials. Recordem que teníem els functors oblidadís $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$, i el fuctor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, entre les dues categories. Definim:

$$S = \mathcal{P}(\bigsqcup_{i \in I} U(V_i)), \text{ i pel teorema de Cantor,}$$

$$U(V_k) \preccurlyeq \bigsqcup_{i \in I} U(V_i) \prec S \ \forall\ k \in I$$

Ara, posem $V = F(S)$. Com que l'espai vectorial lliurement generat $F(S)$ conté una còpia de S com a base, $S \preccurlyeq U(FS)$, i per tant, $U(V_k) \prec U(FS)$, i doncs $V_i \prec F(S)\ \forall\ i \in I$, i en particular són no isomorfs.

Referències

[1] Karel Hrbacek, Thomas Jech. *Introduction to Set Theory* Third edition, Taylor and Francis, 1999.

[2] Michael A. Shulman, *Set Theory for Category Theory.* DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0810.1279, 2008.

[3] T. Leinster, *Basic Category Theory*, 2016, capítol 3.

QUÈ ÉS UN DIAGRAMA COMMUTATIU?

ROGER GARRIDO VILALLAVE

En matemàtiques sovint apareix el concepte de *diagrama commutatiu*, però... com es defineix formalment?

En un diagrama commutatiu hi apareixen uns objectes i uns morfismes; per tant, ens cal una categoria $\mathcal{C}$ on hi visquin. L'adjectiu *commutatiu* fa referència al fet que tant és com es composin els morfismes que sempre s'obtindrà el mateix.

Un exemple de diagrama és

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "t \mapsto e^{2\pi i t}"'] & \mathbb{R}^2 \\
S^1 \arrow[ur, "\gamma'"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí els objectes i morfismes viuen a la categoria d'espais topològics, així que $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$. El diagrama commuta si la composició del morfisme vertical amb γ' coincideix amb γ, és a dir, si per cada $t \in [0,1]$ es té que

$$\gamma'(e^{2\pi i t}) = \gamma(t).$$

Això implica, en particular, que $\gamma(0) = \gamma'(1) = \gamma'(e^{2\pi i \cdot 1}) = \gamma(1)$.

Sigui I la categoria $([2], \leq)$, amb objectes $\{0,1,2\}$ i morfismes

$$I(m,n) = \begin{cases} m \leq n, & m \leq n, \\ \emptyset, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Considerem l'assignació $D : I \to \mathbf{Top}$ (diem assignació perquè no és un functor, ja que no estem demanant que $D(g \circ f) = D(g) \circ D(f)$) definida per:

- $D(0) := [0,1]$, $D(1) := S^1$, $D(2) := \mathbb{R}^2$.
- $D(0 \leq 0) := \mathrm{id}_{[0,1]}$, $D(1 \leq 1) := \mathrm{id}_{S^1}$, $D(2 \leq 2) := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
- $D(0 \leq 1) := (t \mapsto e^{2\pi i t})$, $D(1 \leq 2) := \gamma'$, $D(0 \leq 2) := \gamma$.

Es fa evident que l'assignació $D : I \to \mathbf{Top}$ defineix un diagrama d'espais topològics que té la mateixa *forma* que la categoria I. Però... commuta?

Demanar que commuti és demanar que

$$D(1 \leq 2) \circ D(0 \leq 1) = \gamma' \circ (t \mapsto e^{2\pi i t}) \overset{!}{=} \gamma = D(0 \leq 2),$$

és a dir, que D preservi la composició. Això és precisament restringir-se als casos on D és un **functor**!

Date: 22 de Març de 2024.

Definició 1. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i I una categoria petita[1]. Un **diagrama commutatiu** en $\mathcal{C}$ de forma I és un functor $D : I \to \mathcal{C}$.

Exemple 2. Considerem la categoria $I := ([1], \leq) \times ([1], \leq)$. En particular,

- Té objectes $\mathrm{ob}(I) = \mathrm{ob}([1]) \times \mathrm{ob}([1]) = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$.
- Té morfismes

$$I((m,n),\ (m',n')) = I(m,n) \times I(m',n') = \begin{cases} (m \leq n,\ m' \leq n'), & m \leq n \text{ i } m' \leq n', \\ \emptyset, & \text{altrament.} \end{cases}$$

- La composició ve donada per components, és a dir,

$$(m \leq n, m' \leq n') \circ (k \leq \ell, k' \leq \ell') := \Big((m \leq n) \circ (k \leq \ell),\ (m' \leq n') \circ (k' \leq \ell')\Big).$$

Es pot representar (obviant els morfismes identitat) com

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r, "{(0\leq 0,0\leq 1)}"] \arrow[d, "{(0\leq 1,0\leq 0)}"'] \arrow[dr, "{(0\leq 1,0\leq 1)}" description] & (0,1) \arrow[d, "{(0\leq 1,1\leq 1)}"] \\ (1,0) \arrow[r, "{(1\leq 1,0\leq 1)}"'] & (1,1) \end{tikzcd}$$

on el morfisme diagonal és tant la composició dels dos morfismes superiors com dels dos morfismes inferiors, ja que

$$(1 \leq 1, 0 \leq 1)\circ(0 \leq 1, 0 \leq 0) = \Big((1 \leq 1)\circ(0 \leq 1),\ (0 \leq 1)\circ(0 \leq 0)\Big) = (0 \leq 1, 0 \leq 1),$$

$$(0 \leq 1, 1 \leq 1)\circ(0 \leq 0, 0 \leq 1) = \Big((0 \leq 1)\circ(0 \leq 0),\ (1 \leq 1)\circ(0 \leq 1)\Big) = (0 \leq 1, 0 \leq 1).$$

Un diagrama commutatiu en $\mathcal{C}$ de forma I és un functor $D : I \to \mathcal{C}$. Denotem:

- $x_{ij} := D(i,j)$.
- $f := D(0 \leq 0, 0 \leq 1)$, $g := D(0 \leq 1, 1 \leq 1)$, $h := D(0 \leq 1, 0 \leq 0)$, $k := D(1 \leq 1, 0 \leq 1)$.

Podem representar la imatge de D, obviant el morfisme diagonal $D(0 \leq 1, 0 \leq 1)$, ja que està determinada pels morfismes f, g, h, k:

$$\begin{tikzcd} x_{00} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & x_{10} \arrow[d, "k"] \\ x_{01} \arrow[r, "g"'] & x_{11} \end{tikzcd}$$

Com que D és un functor deduïm que

$$g \circ f = D(0 \leq 1, 1 \leq 1) \circ D(0 \leq 0, 0 \leq 1) = D(0 \leq 1, 0 \leq 1) =$$
$$= D(1 \leq 1, 0 \leq 1) \circ D(0 \leq 1, 0 \leq 0) = k \circ h,$$

és a dir, que es tracta d'un diagrama commutatiu (en el sentit intuïtiu).

Exemple 3. Un diagrama commutatiu en $\mathcal{C}$ de forma $([1], \leq) \times \overset{n)}{\cdots} \times ([1], \leq)$ és un n-cub commutatiu en la categoria $\mathcal{C}$.

---

[1]Una categoria petita és una categoria I en la qual $\mathrm{ob}(I)$ és un conjunt.

Finalment, ara que hem definit què és un diagrama commutatiu, ens podem plantejar si aquests formen una categoria. Com que un diagrama commutatiu no és res més que un functor, la resposta és que sí.

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria, i I una categoria petita. Definim la categoria de diagrames en $\mathcal{C}$ de forma I com la categoria de functors $\mathcal{C}^I$, on:

- Els objectes són els diagrames en $\mathcal{C}$ de forma I, és a dir, els functors $D : I \to \mathcal{C}$.
- Els morfismes entre D i D' són les transformacions naturals entre D i D'.
- La composició és la composició de transformacions naturals.
- La identitat en D és la transformació natural identitat $\mathrm{id}_D : D \to D$.

Intentem entendre una mica millor què és un morfisme entre diagrames. Siguin $D, D' : I \to \mathcal{C}$ dos diagrames, i $\alpha : D \to D'$ un morfisme (transformació natural). Consisteix en una família de morfismes $\{\alpha_i : D(i) \to D'(i)\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}$ tal que, per cada $f : i \to j$ en I, el diagrama següent commuta:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "D(f)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & D(j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\ D'(i) \arrow[r, "D'(f)"'] & D'(j) \end{tikzcd}$$

El que fa un morfisme escollir, per cada respectiu element del diagrama $D(i)$ i $D'(i)$, un morfisme $D(i) \to D'(i)$ de manera consistent. La consistència significa que tot segueixi commutant.

Exemple 4. Considerem la categoria de diagrames en $\mathcal{C}$ de forma $[1]^2$, és a dir, $\mathcal{C}^{[1]^2}$. Aquests són els quadrats commutatius en $\mathcal{C}$. Siguin $D, D' : [1]^2 \to \mathcal{C}$ dos quadrats commutatius. Un morfisme $f : D \to D'$ és l'elecció de quatre morfismes $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$ tal que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & x_{00} \arrow[dl] \arrow[drr] \arrow[dd, dashed, "f_{00}"'] & & \\
x_{01} \arrow[drr] \arrow[dd, dashed, "f_{01}"'] & & & x_{10} \arrow[dl] \arrow[dd, dashed, "f_{10}"'] \\
 & y_{00} \arrow[dl] \arrow[drr] & x_{11} \arrow[dd, dashed, "f_{11}"'] & \\
y_{01} \arrow[drr] & & & y_{10} \arrow[dl] \\
 & & y_{11} &
\end{tikzcd}$$

on a la cara superior hi hem posat la imatge de D (en particular, $x_{ij} := D(i,j)$) i a la cara inferior, la imatge de D' ($y_{ij} := D'(i,j)$).

Observem que, de fet donar un morfisme entre quadrats commutatius $D \to D'$ és equivalent a donar un cub commutatiu tal que la cara superior sigui D i la inferior, D'. Aquesta observació és un fet general.

Definim la categoria $I \times [1]$ com la categoria que té

- Objectes: $\mathrm{ob}(I) \times \{0,1\}$.
- Morfismes: $(I \times [1])((i,m),(j,n)) := I(i,j) \times [1](m,n)$.
- Composició: $(g,b) \circ (f,a) := (g \circ f, b \circ a)$.
- Identitat: $\mathrm{id}_{(i,m)} = (\mathrm{id}_i, \mathrm{id}_m)$.

Siguin $D, D' : I \to \mathcal{C}$ dos diagrames commutatius en $\mathcal{C}$ de forma I. Sigui $\alpha : D \to D'$ un morfisme. Definim el functor $\tilde{\alpha} : I \times [1] \to \mathcal{C}$ per

- $\tilde{\alpha}(i,0) := D(i)$, $\tilde{\alpha}(i,1) := D'(i)$.
- $\tilde{\alpha}((i,0) \xrightarrow{(f,0\leq 0)} (j,0)) := D(f)$, $\tilde{\alpha}((i,1) \xrightarrow{(f,1\leq 1)} (j,1)) := D'(f)$.
- $\tilde{\alpha}((i,0) \xrightarrow{(\mathrm{id}_i,0\leq 1)} (i,1)) := \alpha_i$.
- La imatge d'un morfisme $(i,0) \to (j,1)$ s'obté a partir de la composició de la imatge de $(i,0) \to (i,1)$ amb la imatge de $(i,1) \to (j,1)$.

Obtenim, doncs, un diagrama $\tilde{\alpha} : I \times [1] \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ de forma $I \times [1]$ tal que $\tilde{\alpha}|_{I \times \{0\}} : I \to \mathcal{C}$ és el functor D, i $\tilde{\alpha}|_{I \times \{1\}} : I \to \mathcal{C}$ és el functor D'.

Recíprocament, suposem que tenim un diagrama $\tilde{\alpha} : I \times [1] \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ de forma $I \times [1]$ tal que $\tilde{\alpha}|_{I \times \{0\}} : I \to \mathcal{C}$ és el functor D, i $\tilde{\alpha}|_{I \times \{1\}} : I \to \mathcal{C}$ és el functor D'. La família

$$\left\{ \tilde{\alpha}((i,0) \xrightarrow{(\mathrm{id}_i,0\leq 1)} (i,1) \right\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}$$

defineix una transformació natural $D \to D'$.

Per tant,

Proposició 5. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i I una categoria petita. Un morfisme entre dos diagrames $D, D' : I \to \mathcal{C}$ és un diagrama $\tilde{\alpha} : I \times [1] \to \mathcal{C}$ tal que $\tilde{\alpha}|_{I \times \{0\}} = D$ i $\tilde{\alpha}|_{I \times \{1\}} = D'$.*

Límits i co-límits

Jordi Riu Pont

19 d'abril de 2024

1 Un petit recordatori

Siguin $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dues categories, i $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dos functors. Una transformació natural $\alpha : F \to G$ és una família $\{\alpha_A : F(A) \to F(B)\}_{A \in \mathcal{A}}$ de morfismes en $\mathcal{B}$ de manera que per a qualsevol morfisme $f : A \to A$ en $\mathcal{A}$, el següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_B"] \\ G(B) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B') \end{tikzcd}$$

Els morfismes α_A s'anomenen components de α.

Recordem també que es diu que una categoria $\mathcal{A}$ és petita si $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ és un conjunt.

2 Què és un diagrama commutatiu?

Definició 1. Donada una categoria $\mathcal{A}$ i una categoria petita $\mathcal{I}$, un diagrama commutatiu en $\mathcal{A}$ de forma $\mathcal{I}$ és un functor $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$.

Sovint ens referirem als diagrames commutatius com a diagrames.

Com que un diagrama no és res més que un functor, resulta natural preguntar-se si els diagrames commutatius poden formar una categoria. La resposta és que sí, i com a morfismes prendrem les transformacions naturals entre els dos diagrames.

Definició 2. Donada una categoria $\mathcal{A}$ i $\mathcal{I}$ una categoria petita, definim la categoria de diagrames en $\mathcal{A}$ de forma $\mathcal{I}$ com la categoria de functors $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ on:

- Els objectes són els diagrames en $\mathcal{A}$ de forma $\mathcal{I}$; és a dir, els functors $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$.
- Els morfismes entre dos diagrames són les transformacions naturals entre els dos diagrames.
- La regla de composició ve donada per la composició de transformacions naturals.
- El morfisme identitat és la transformació natural identitat $\mathrm{id} : D \to D$, per a cada $D \in \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$.

Exemple 1. Donada una categoria $\mathcal{A}$ podem considerar la categoria de diagrames commutatius en $[1]^2$. Per a dos diagrames $D, D' : [1]^2 \to \mathcal{A}^{[1]^2}$ commutatius. Un morfisme $f : D \to D'$ és l'elecció d'una transformació natural entre D i D'; és a dir, l'elecció de quatre morfismes f_{00}, f_{01}, f_{10} i f_{11}:

$$\begin{tikzcd}
& x_{00} \arrow[dl] \arrow[drr] \arrow[dd, dashed, "f_{00}"] & & \\
x_{01} \arrow[drr] \arrow[dd, dashed, "f_{01}"] & & & x_{10} \arrow[dl] \arrow[dd, dashed, "f_{10}"] \\
& y_{00} \arrow[dl] \arrow[drr] & x_{11} \arrow[dd, dashed, "f_{11}"] & \\
y_{01} \arrow[drr] & & & y_{10} \arrow[dl] \\
& & y_{11} &
\end{tikzcd}$$

3 Què és un límit d'un diagrama?

Vegem ara quina és la definició de límit d'un diagrama. Abans definim la noció de con en un diagrama.

Definició 3 (Con en un diagrama)**.** Sigui $\mathcal{A}$ una categoria, $\mathcal{I}$ una categoria petita i $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un con en D és un objecte $A \in \mathcal{A}$ juntament amb una família $\{f_I : A \to D(I)\}_{I \in \mathcal{I}}$ de morfismes en $\mathcal{A}$ de manera que per a qualsevol morfisme $u : I \to J$ en $\mathcal{I}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D(I) \arrow[dd, "D(u)"] \\
A \arrow[ur, "f_I"] \arrow[dr, "f_J"'] & \\
& D(J)
\end{tikzcd}$$

commuta. L'objecte A s'anomena vèrtex del con.

Definició 4 (Límit d'un diagrama)**.** Un límit d'un diagrama $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ és un con $\{p_I : L \to D(I)\}_{I \in \mathcal{I}}$ en $\mathcal{A}$ de manera que per a qualsevol con en D $\{f_I : A \to D(I)\}_{I \in \mathcal{I}}$, existeix un únic morfisme $\bar{f} : A \to L$ tal que $p_I \circ \bar{f} = f_I$ per a qualsevol $I \in \mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd}
& & D(I) \\
A \arrow[urr, "f_I"] \arrow[drr, "f_J"'] \arrow[r, dashed, "\exists! \bar{f}"] & L \arrow[ur, "p_I"] \arrow[dr, "p_J"'] & \\
& & D(J)
\end{tikzcd}$$

Observació 1.

1. El límit d'un diagrama pot no existir.
2. La definició de límit d'un diagrama pot estendre's a functors, sense la necessitat que el codomini sigui una categoria petita.

3. Es pot definir el límit d'un diagrama D de forma alternativa com l'objecte terminal de la categoria dels cons en D. I un objecte terminal en una categoria $\mathcal{A}$ és un objecte T de manera que per a qualsevol objecte $X \in \mathcal{A}$, existeix un únic morfisme $X \to T$.

4 Vegem-ne alguns exemples

En aquesta última secció exhibim tant alguns exemples concrets de límits d'un diagrama com d'altres que generalitzin construccions que ja hem vist durant el grau.

Exemple 2. Considerem la categoria $\mathcal{I} := (\mathbb{N}, \leq)$. Suposem que tenim una cadena descendent $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ en **Set**. Podem definir un functor contra-variant donat per l'assignació següent: pel que fa als objectes, considerem $D : \mathcal{I}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$ donat per l'assignació $D(i) = X_i$; i pel que fa als morfismes, si $f : m \to n$, aleshores triem que $D(f) = i_{m,n}$, on $i_{m,n} : X_m \hookrightarrow X_n$ és la inclusió. Resulta que un límit del diagrama D és el con $\{p_i : \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j \hookrightarrow D(i)\}_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}}$, on p_i és la inclusió en $D(i)$. Vegem-ho.

Considerem un con en D $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}}$, on $X \in \mathbf{Set}$. En virtut de les propietats de con, per a qualsevol morfisme $u : m \to n$ en $\mathcal{I}$, $f_j = D(u) \circ f_i$; és a dir, s'ha de complir que $f_j = i_{m,n} \circ f_i$. En particular, podem considerar $u : j \to i$. Aleshores, s'ha de satisfer que $f_j = i_{i,j} \circ f_i = f_i$. Per tant, tots els morfismes f_i del con són iguals i les seves imatges estan contingudes en $\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$. Podem escollir $\bar{f} : X \to \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ definida per $\bar{f}(x) = f_1(x)$, que és l'únic morfisme que fa $f_i = p_i \circ \bar{f}$ per a qualsevol $i \in \mathcal{I}^{\text{op}}$.

Definició 5. Siguin X i Y objectes d'una categoria qualsevol $\mathcal{A}$. Un producte de X i Y és un objecte P i un parell de morfismes $p_1 : P \to X$ i $p_2 : P \to Y$ de manera que per a un objecte qualsevol A de $\mathcal{A}$ i per a morfismes $f_1 : A \to X$ i $f_2 : A \to Y$, existeix un únic morfisme $\bar{f} : A \to P$ de manera que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{f}"] \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
& P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Observació 2. Els productes no sempre existeixen. Per exemple, podríem considerar la categoria discreta que té per objectes els elements X i Y.

Podem veure els productes com a límit d'un diagrama. Donada una categoria $\mathcal{A}$ i un diagrama D de forma $\mathbf{T}$ en $\mathcal{A}$, és clar que la condició que imposem al con de vèrtex P amb morfismes $\{p_X : P \to X, p_Y : P \to Y\}$ per tal que sigui un límit és la mateixa que imposem per tal que P, juntament amb p_X i p_Y sigui un límit del diagrama D.[1]

Més en general, si considerem la categoria discreta $\mathcal{I}$, donat el diagrama $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, un límit de D és, precisament, el producte de $\{X_i\}_{i \in I}$, on cada X_i és un objecte de $\mathcal{A}$.

Introduïm ara la noció de forca i d'equalitzador, que també es podran entendre com a límits d'un diagrama.

[1] La categoria $\mathbf{T}$ és formada, només, per dos objectes i els dos morfismes identitat. La categoria $\mathbf{E}$ és formada, només, per dos objectes $\star_1$, $\star_2$, i dos morfismes $h_1, h_2 : \star_1 \to \star_2$.

Definició 6 (Forca en una categoria)**.** Una forca en una categoria $\mathcal{A}$ és una terna A, X i Y d'objectes de $\mathcal{A}$ i de morfismes f, s i t

$$A \xrightarrow{f} X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$$

de manera que $s \circ f = t \circ f$.

Definició 7 (Equalitzador de dos morfismes)**.** Sigui $\mathcal{A}$ una categoria, $X, Y \in \mathcal{A}$ i $s, t : X \to Y$ morfismes. Un equalitzador de s i t és un objecte E juntament amb un morfisme $i : E \to X$ de manera que

$$E \xrightarrow{i} X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$$

és una forca i que per a qualsevol forca

$$A \xrightarrow{f} X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$$

existeix un únic morfisme $\bar{f} : A \to E$ de manera que el següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ E \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Exemple 3. Considerem $s, t : V \to W$ en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. L'equalitzador de s i t en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ és $\ker(t - s)$ juntament amb la inclusió $i : \ker(t - s) \hookrightarrow V$. Per una banda, és clar que

$$\ker(t-s) \overset{i}{\hookrightarrow} V \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} W$$

és una forca. Per altra banda, donada qualsevol forca

$$A \xrightarrow{f} V \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} W$$

com que es verifica que $s \circ f = t \circ f$, resulta que si $\bar{f} \coloneqq f$, $\bar{f}(a) \in \ker(t - s)$ i el diagrama commuta.

De nou, podem interpretar els equalitzadors com a límit d'un diagrama. Donada una categoria $\mathcal{A}$, podem pensar que un diagrama D de forma $\mathbf{E}$ en $\mathcal{A}$ és una parella de morfismes $s, t : X \to Y$ en $\mathcal{A}$. Un con en D consta d'un vèrtex A i de morfismes f i g de manera que el següent diagrama commuta.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "t"'] & & Y \end{tikzcd}$$

És a dir, $s \circ f = g$ i $t \circ f = g$. I com que aquests són els únics morfismes (excepte les identitats), resulta que g ve determinat per f. Tot plegat, la condició anterior es redueix al fet que els següents objectes i morfismes siguin una forca.

$$A \xrightarrow{f} X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$$

Aleshores, el límit de D és una forca; o sigui, un equalitzador de s i t.

Vegem tot seguit una definició dual a la de límit, la de co-límit.

Definició 8. Sigui $\mathcal{A}$ una categoria i $\mathcal{I}$ una categoria petita. Sigui $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ un diagrama en $\mathcal{A}$. Un co-con en D és un con en el diagrama $D^{\mathrm{op}} : \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, i un co-límit de D és un límit de D^{op}.

Explícitament, un co-con en D és un objecte $A \in \mathcal{A}$ juntament amb una família de morfismes $\{f_I : D(I) \to A\}_{I \in \mathcal{I}}$ de manera que per a qualsevol morfisme $u : I \to J$ en $\mathcal{I}$, el diagrama següent commuta

$$\begin{tikzcd} D(I) \arrow[d, "D(u)"'] \arrow[dr, "f_I"] & \\ D(J) \arrow[r, "f_J"'] & A \end{tikzcd}$$

I un co-límit de D és un co-con $\{p_I : D(I) \to C\}_{I \in \mathcal{I}}$ de manera que per a qualsevol co-con $\{f_I : D(I) \to A\}_{I \in \mathcal{I}}$ de D, existeix un únic morfisme $\bar{f} : C \to A$ de manera que $\bar{f} \circ p_I = f_I$ per a qualsevol $I \in \mathcal{I}$.

Observació 3. Anàlogament a l'observació (1), es pot definir el co-límit d'un diagrama D com l'objecte inicial de la categoria dels co-cons en D. I un objecte inicial en una categoria $\mathcal{A}$ és un objecte I de manera que per a qualsevol objecte $X \in \mathcal{A}$, existeix un únic morfisme $I \to X$.

TEORIA DE GALOIS D'EXTENSIONS INFINITES

ÓSCAR FERNÁNDEZ ACACIO - 26 D'ABRIL DE 2024

En aquests apunts tractarem els cossos amb certa naturalitat. Per qui no tingui clara la definició de cos, el podem pensar com un conjunt d'elements amb dues operacions invertibles i que compleixen certes propietats com la commutativitat, l'associativitat i d'altres que fan que tot funcioni bé. Els exemples més naturals poden ser $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$. Notem que tots aquests cossos mencionats tenen un nombre infinit d'elements però no sempre serà el cas, com per exemple $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, amb p primer.

1. Teoria de Galois clàssica

En aquest apartat farem una ràpida passada sobre la Teoria de Galois clàssica que tracta el cas de les extensions de cossos finites. Després mirarem com aplicar la teoria de categories al cas de les extensions infinites.

Definició 1. Siguin K i F cossos, una **extensió de cossos** K/F és una inclusió de cossos $F \subseteq K$. Una **subextensió** de K/F és una extensió L/F amb $F \subseteq L \subseteq K$. Ho escriurem com:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] K \arrow[dd] & & K \arrow[d] \\ & & L \arrow[d] \\ F & & F \end{tikzcd}$$

Per tota extensió de cossos K/F, podem pensar K com un $F-$espai vectorial. Definirem el **grau d'una extensió de cossos** K/F com la dimensió d'una base de l'espai vectorial.

Exemple 2.

- L'extensió $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ té grau 2 ja que $\{1, i\}$ formen una base $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial.
- L'extensió $K(t)/K$ té grau infinit perquè $\{1, t, t^2, \ldots\}$ són linealment independents.

Definició 3. Un **morfisme de cossos** σ és un morfisme d'anells, és a dir una aplicació $\sigma : K \longrightarrow F$ que verifica:

- $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$
- $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$
- $\sigma(1_K) = 1_F$

Observació 4. Tots els morfismes de cossos són injectius.

Observació 5. Els cossos amb els morfismes de cossos formen una categoria.

Definició 6. Siguin K/F i L/F dues extensions de cossos de F, definim un F**-morfisme de cossos** com un morfisme de cossos $\sigma : K \longrightarrow L$ tal que $\sigma|_F = id$. Si $K = L$ parlem d'un F**-automorfisme de cossos**.

Definició 7. Sigui $\alpha \in K$, amb K/F una extensió de cossos; diem que α és **algebraic** sobre F si és arrel d'algun polinomi no nul a F. Si tots els elements de K són algebraics sobre F diem que K/F és una **extensió algebraica**.

Exemple 8.

- $\sqrt{2}$ és algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Per tant, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ és una extensió algebraica.
- π no és algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Per tant $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ no és una extensió algebraica.

Un cop definit el concepte d'algebraicitat, val la pena mencionar la clausura algebraica d'un cos ja que el veurem més endavant:

Definició 9. Sigui K un cos, diem que és **algebraicament tancat** si tot polinomi $f \in K[x]$ té alguna arrel a K.

Definició 10. Sigui K un cos, definim la **clausura algebraica** $\overline{K}$ de K com el cos més petit que conté K i que és algebraicament tancat.

Exemple 11. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ és algebraicament tancat pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra.

Exemple 12. Intentem calcular la clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$:
Per exemple, si posem $p = 2$ llavors $x^2 + x + 1$ no té arrels a $\mathbb{F}_2$. Però sempre existeix un cos $\mathbb{F}_{2^k}$ tal que un polinomi qualsevol té alguna arrel. La pregunta és cap a on convergeix aquesta cadena d'extensions de cossos.
Per això farem servir una aplicació dels colímits: el límit directe i veurem que coincideix amb la clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$.

Sigui $\langle I, \leq \rangle$ un conjunt dirigit, és a dir, amb una relació de preordre. Sigui f_{ij} un homeomorfisme per a tot $i \leq j$ complint:

- $f_{ii} = id_{A_i}$
- $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ si $i \leq j \leq k$

Llavors el límit directe, que es denota com $\varinjlim_i A_i$ es defineix com

$$\varinjlim_i A_i = \bigsqcup_i A_i / \sim$$

on $x_i \sim x_j$ amb $x_i \in A_i,\ x_j \in A_j$, si i només si existeix $k \geq i, j$ tal que $f_{ik}(x_i) = x_k$ i $f_{jk}(x_j) = x_k$.
Intuitivament això vol dir que existeix un punt en que els dos elements es tornaran iguals.

Tornant al nostre cas farem servir una propietat que diu que si tots els morfismes són injectius el límit directe és simplement la unió dels conjunts.

Aplicarem el límit directe al conjunt dels $\mathbb{F}_{p^n}$ a $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i els morfismes f_{ij} quan $i \leq j$:

$$f_{ij} : \mathbb{F}_{p^i} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^j}$$

la inclusió. Clarament els morfismes són injectius així que tindrem:

$$\overline{\mathbb{F}}_p = \varinjlim_n \mathbb{F}_{p^n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$$

Definició

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Aplicació

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_{p^i} \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & \mathbb{F}_{p^j} \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& \overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^n} \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

A continuació definirem conceptes necessaris per enunciar el Teorema Fonamental de la Teoria de Galois.

Definició 13. Denotarem per $\mathrm{Aut}(K/F)$ el conjunt dels automorfismes de K que fixen F. Si $F \subseteq E \subseteq K$ tenim $\mathrm{Aut}(K/E)$ és un subgrup de $\mathrm{Aut}(K/F)$.

Definició 14. Sigui G un subgrup de $\mathrm{Aut}(K/F)$ denotem el cos fix de G per

$$K^G = \{x \in K : \sigma(x) = x \text{ per a tot } \sigma \in G\}.$$

Observem que sempre tenim $F \subseteq K^G \subseteq K$. Si K/F és de Galois denotarem $\mathrm{Aut}(K, F)$ com $\mathrm{Gal}(K, F)$, el grup de Galois de l'extensió.

$$\{\text{subcossos } E \text{ amb } F \subseteq E \subseteq K\} \longleftrightarrow \{\text{subgrups } H \leq \mathrm{Aut}(K, F)\}$$

$$E \xrightarrow{\qquad\qquad \mathcal{G} \qquad\qquad} \mathrm{Aut}(K, E)$$

$$K^H \xleftarrow{\qquad\qquad \mathcal{F} \qquad\qquad} H$$

Teorema 15. *(Teorema fonamental de la Teoria de Galois)*
Sigui K/F una extensió finita de Galois, llavors les aplicacions $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ són bijeccions i inverses una de l'altra. A sobre satisfan les següents propietats:

- *Si els subcossos E_1 i E_2 es corresponen amb els subgrups H_1, H_2, aleshores $E_1 \subseteq E_2$ si i nomes si $H_2 \leq H_1$.*
- *Si H es correspon amb E, aleshores tenim $[K : E] = |H|$ i $[E : F] = [Gal(K/F) : H]$.*
- *Si H es correspon amb E, K/E és de Galois amb $Gal(K/E) = H$.*
- *E és de Galois sobre F si i només si $Gal(K/E) \trianglelefteq Gal(K/F)$ i aleshores*

$$Gal(E/F) \simeq Gal(K/F)/Gal(K/E)$$

- *Si els subcossos E_1 i E_2 es corresponen amb els subgrups H_1, H_2, aleshores $H_1 \cap H_2$ es correspon amb E_1E_2 (la composició de E_1 i E_2), i $E_1 \cap E_2$ es correspon amb H_1H_2 (el subgrup generat per H_1 i H_2).*

Si tenim temps calcularem el grup de Galois del cos de descomposició de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

Exemple 16. Sigui $f = x^3 - 2$, les arrels de f són $\sqrt[3]{2}, \rho\sqrt[3]{2}$ i $\rho^2\sqrt[3]{2}$, on ρ és l'arrel cúbica de la unitat $\rho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$. Per tant, el cos de descomposició K de f

serà $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2})$.
Per determinar $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ només cal tenir en compte les imatges de $\sqrt{-3}$ i de $\sqrt[3]{2}$.

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \sqrt[3]{2} & \longmapsto & \rho\sqrt[3]{2} \\ \sqrt{-3} & \longmapsto & \sqrt{-3} \end{array} \qquad \tau : \begin{array}{ccc} \sqrt[3]{2} & \longmapsto & \sqrt[3]{2} \\ \sqrt{-3} & \longmapsto & -\sqrt{-3} \end{array}$$

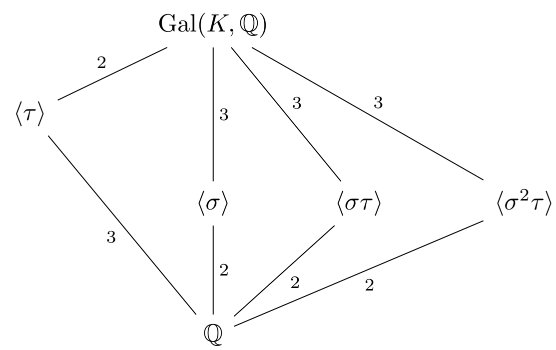
Observem que $\sigma(\rho) = \rho$ i $\tau(\rho) = \rho^2$.
Podem calcular σ^2 i σ^3.

$$\sigma^2 : \begin{array}{ccc} \sqrt[3]{2} & \longmapsto & \rho^2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt{-3} & \longmapsto & \sqrt{-3} \end{array} \qquad \sigma^3 : \begin{array}{ccc} \sqrt[3]{2} & \longmapsto & \rho^3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \\ \sqrt{-3} & \longmapsto & \sqrt{-3} \end{array}$$

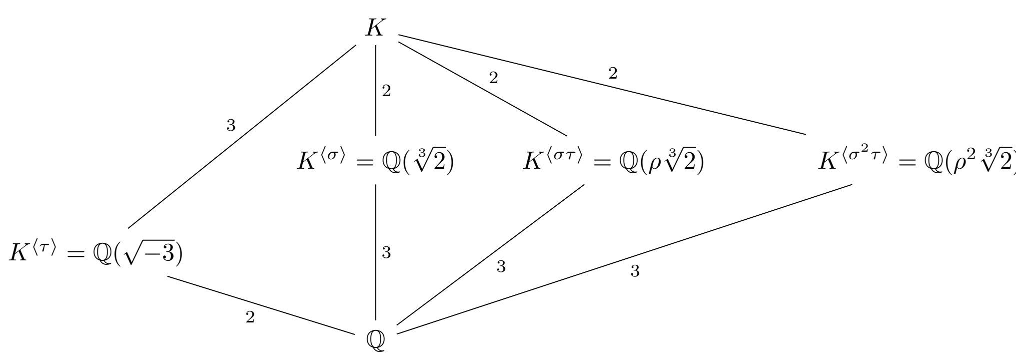
Per tant, $\sigma^3 = id$. Clarament també $\tau^2 = id$. Com també $\sigma\tau = \tau\sigma^2$ tenim:

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau | \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle \simeq D_6 \simeq S_3$$

Ens queda el diagrama de subgrups de $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$:



Segons el Teorema Fonamental de la Teoria de Galois obtenim el diagrama de cossos:



Recordem de la xerrada de functors que aquest operador és un functor contravariant.

Exemple 17. Sigui $\mathbb{F}_p$ el cos de p elements, llavors calcularem $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$. Pel Teorema Fonamental de la Teoria de Galois sabem que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ té n elements. Llavors definim l'automorfisme de Frobenius:

$$\varphi(x) = x^p$$

i l'aplicació φ^k es defineix:

$$\varphi^k(x) = x^{p^k}$$

Sabem que si $0 \leq k < n$ llavors existeix un element tal que $\varphi^k(x) \neq x$.
Llavors conjunt $\{\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}\}$ no conté cap element igual i $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ està generat per $\langle\varphi\rangle$ i $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Teoria de Galois per extensions infinites

Primer mirem un exemple de per què no podem fer servir la teoria de Galois clàssica per extensions infinites.

Exemple 18. Sigui $\mathbb{F}_p$ el cos de p elements, considerem el grup de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. A aquest grup hi pertany l'automorfisme de Frobenius

$$\varphi(x) = x^p, \ \forall x \in \overline{\mathbb{F}}_p$$

El subgrup $\langle\varphi\rangle = \{\varphi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ fixa el cos $\mathbb{F}_p$.
En el cas de les extensions finites, totes les extencions de característica p, són de la forma $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$, amb $q = p^k$. I l'automorfisme de Frobenius genera $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_p)$.
En aquest cas veurem que existeix un element $\psi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_p)$ que no pertany al subgrup $\langle\varphi\rangle$.
Construim una successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que compleix:

$$a_n \equiv a_m \bmod m, \qquad \text{si } m|n$$

però que no existeixi $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \equiv a \bmod n, \qquad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}.$$

Concretament podem constuir una successió que verifiqui les propietats escrivint $n = n' \cdot p^{\mathcal{V}_p(n)}$, on $\mathcal{V}_p(n)$ és el valor p-àdic. Recordem que es defineix com

$$\mathcal{V}_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : p^k | \, n\}$$

Llavors clarament $(n', p) = 1$ i $1 = n'x_n + p^{\mathcal{V}_p(n)}y_n$. Si agafem $a_n = n'x_n$, la successió compleix les propietats. Posem

$$\psi_n = \varphi^{a_n}|_{\mathbb{F}_{p^n}} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p)$$

Si $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, llavors sabem que $m|n$ i, per construcció $a_n \equiv a_m \bmod m$. Per tant,

$$\psi_n|_{\mathbb{F}_{p^m}} = \varphi^{a_n}|_{\mathbb{F}_{p^m}} = \varphi^{a_m}|_{\mathbb{F}_{p^m}} = \psi_m$$

ja que $\varphi|_{\mathbb{F}_{p^m}}$ té ordre m. Llavors el conjunt dels ψ_n defineixen un automorfisme ψ de $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$. ψ no pertany a $\langle\varphi\rangle$ perquè sinó tindríem $\psi = \varphi^a, \ a \in \mathbb{Z}$ i això és una contradicció ja que $\psi|_{\mathbb{F}_{p^n}} = \varphi^{a_n}|_{\mathbb{F}_{p^n}} = \varphi^a|_{\mathbb{F}_{p^n}}$, el que implicaria $a_n \equiv a \bmod n$, per a tot n, i hem arribat a una contradicció.

Teorema 19. *(Teorema de Galois per extensions infinites)*
Sigui Ω/k una extensió (finita o infinita) de Galois. Llavors l'aplicació

$$K \mapsto \mathit{Gal}(\Omega/K)$$

dona una correspondència 1 a 1 entre les subextensions K/k de Ω/k i els subgrups tancats de $\mathit{Gal}(\Omega/k)$. Els subgrups oberts de $\mathit{Gal}(\Omega/k)$ es corresponen amb les subextensions finites de Ω/k.

Observació 20. Quan parlem de subgrups oberts, necessitem una topologia. Aquesta topologia és la topologia de Krull que dona una estructura topològica al grup de Galois d'una extensió de cossos.
Aquesta topologia té per base les classes laterals σH amb $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/k)$, $H \in \mathrm{Gal}(\Omega/K)$ amb K verificant que K/k és una extensió finita.

Exemple 21. Sigui $\mathbb{Z}_p$ el conjunt dels enters p-àdics, on els enters p-àdics són de la forma:

$$a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

amb $0 \leq a_i < p$. Notem que són sèries infinites, si fossin sèries finites obtindríem el conjunt dels nombres enters.
Un $z \in \mathbb{Z}_p$ es sol expressar de la forma $(\ldots, z_k, \ldots, z_1)$ on z_i és el terme que a_i que pertany a $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Llavors es compleix:

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$\varprojlim$ és el límit invers i s'han de complir les mateixes hipòtesis que pel límit directe però els morfismes f_{ij} seran $f_{ij} : A_j \longrightarrow A_i$.
Definirem f_{ij} si $i \leq j$ com:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad f_{ij} \quad} & \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \\ \\ x_j & \longmapsto & x_j \bmod p^i \end{array}$$

Llavors tenim els diagrames:

Definició

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\psi_j"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_i"] & \\ & X \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ X_j \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & X_i \end{tikzcd}$$

Aplicació

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\psi_j"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_i"] & \\ & \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Tenim

$$\varprojlim_{i \in I} A_i = \{\vec{a} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = f_{ij}(a_j),\ \forall i \leq j \in I\}$$

Aplicant aquest resultat al nostre cas obtenim $\varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$. Podem donar una suma i un producte coordenada a coordenada per donar una estructura d'anell.

Finalment calcularem el grup de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. Sota certes condicions tècniques que el grup de Galois compleix, si K/k és una extensió finita llavors val

$$\mathrm{Gal}(\Omega/k) = \varprojlim_{K} \mathrm{Gal}(K/k)$$

Com $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tenim

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}$$

$\hat{\mathbb{Z}}$ és **l'anell de Prüfer**. El podem entendre com un subanell de $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que compleix que si $m|n$ llavors $x_n \equiv x_m$ (mod m).

3. Apèndix

Definició 22. Sigui K/F una extensió de cossos i sigui $\alpha \in K$ algebraic, anomenem $\mathbf{Irr}(\alpha, F)$ al polinomi mònic irreductible amb coeficients a F tal que té α com a arrel.
Aquest polinomi és únic i divideix a tots els polinomis amb coeficients a F que tenen α com a arrel.

Exemple 23. Considerem $\sqrt[4]{2}$. Llavors $\mathbf{Irr}(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}) = x^4 - 2$. Fixem-nos que $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$, per tant $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Ho representem com:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "4"'] \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Si α és algebraic sobre F podem definir el grau de l'extensió $F(\alpha)/F$ com el grau de $\mathbf{Irr}(\alpha, F)$.

Definició 24. Sigui K/F una extensió de cossos, diem que és **normal** si $\mathbf{Irr}(\alpha, F)$ descompon totalment a K per tot $\alpha \in K$.

Exemple 25. Sigui $d \in \mathbb{Q}$ lliure de quadrats, llavors l'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt{d}/)\mathbb{Q}$ és normal. Qualsevol element de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ és de la forma $a + b\sqrt{d}$ amb $a, b \in \mathbb{Q}$. Llavors $a \pm b\sqrt{d}$ és arrel del polinomi $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 d$.

Definició 26. Sigui K/F una extensió de cossos algebraica. Diem que $\alpha \in K$ és separable si $\mathbf{Irr}(\alpha, F)$ només té arrels de multiplicitat 1 a un cos on descompongui totalment. Si tot $\alpha \in K$ és separable llavors K/F és separable.

Exemple 27.

- $x^2 + 1$ és separable. Per tant, $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ és separable.
- $x^p + a$ no és separable sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ja que $x^p + a = (x + a)^p$.

Observació 28. Tota extensió algebraica d'un cos de característica 0 és separable.

Definició 29. Una extensió finita K/F és **de Galois** si és normal i separable.

Representables

Abel Salinas Sellas

3 de maig 2024

1 Functors representables

Sigui A un objecte d'una categoria $\mathcal{C}$. Per tot $B \in \mathcal{C}$ hi ha una classe $\mathcal{C}(A, B)$ de morfismes d'A cap a B. Si $\mathcal{C}(A, B)$ és un conjunt, qualsevol morfisme $B \to B'$ indueix una aplicació $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, B')$. Això ens porta a la Definició 1.1.

Definició 1.1. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria localment petita, i $A \in \mathcal{C}$. Definim un functor

$$H^A = \mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

de la següent manera:

- per objectes $B \in \mathcal{C}$, posem $H^A(B) = \mathcal{C}(A, B)$;
- per morfismes $B \xrightarrow{g} B'$, definim

  $$H^A(g) = \mathcal{C}(A, g) : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, B')$$

  per

  $$p \mapsto g \circ p$$

  per tot $p : A \to B$.

Observació. La hipòtesi que $\mathcal{C}$ sigui localment petita (és a dir, que $\mathcal{C}(A, B)$ sigui un conjunt per tot $A, B \in \mathcal{C}$) és clarament necessària perquè la definició tingui sentit.
A vegades també s'utilitza la notació $g \circ -$ o g_* per denotar $H^A(g)$.

Definició 1.2. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria localment petita. Un functor $X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ és **representable** si $X \cong H^A$ per algun $A \in \mathcal{C}$. Una **representació** de X és la tria d'un objecte $A \in \mathcal{C}$ i d'un isomorfisme entre X i H^A.

Notem que un functor només pot ser representable si el seu codomini és **Set**.

Exemple 1.3. Un objecte inicial en una categoria $\mathcal{C}$ és un objecte A tal que per tot $B \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A, B)$ és el conjunt d'un element. Per tant, A és un objecte inicial de la categoria $\mathcal{C}$ si, i només si, el functor $\mathcal{C}(A, -)$ és isomorf al functor constant $* : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que porta cada objecte al conjunt d'un element. Aleshores, una categoria C té un objecte inicial si, i només si, el functor $*$ és representable. Més endavant definirem què és un functor contravariant representable (informalment, la definició és la mateixa però canviant les fletxes de sentit), i per tant també podríem donar una caracterització anàloga a l'anterior per a objectes terminals.

Exemple 1.4. Considerem $H^1 : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, on 1 és el conjunt d'un element. Clarament, un morfisme de 1 a un conjunt B és el mateix que un element de B. Per tant, tenim un isomorfisme

$$H^1(B) \cong B$$

i és fàcil comprovar que aquest isomorfisme és natural en B. Per tant, $H^1 \cong \mathbf{1_{Set}}$; és a dir, $\mathbf{1_{Set}}$ és representable.

Exemple 1.5. El functor oblidadís $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ és isomorf a $H^1 = \mathbf{Top}(1, -)$, El functor oblidadís $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ és isomorf a $\mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, -)$. En efecte, per qualsevol grup G, hi ha un isomorfisme natural $\mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, G) \cong UG$, que associa cada element $g \in UG$ a l'únic morfisme de grups de $\mathbb{Z}$ a G que envia 1 a g.

Lema 1.6. *Siguin* $\mathcal{C} \mathrel{\underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}}} \mathcal{D}$ *categories localment petites, i sigui $A \in \mathcal{C}$. Aleshores el functor*

$$\mathcal{C}(A, G(-)) : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$$

(és a dir, la composició $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C} \xrightarrow{H^A} \mathbf{Set}$) és representable.

Demostració. Per hipòtesi, tenim

$$\mathcal{C}(A, G(B)) \cong \mathcal{D}(F(A), B)$$

per tot $B \in \mathcal{D}$. Si demostrem que aquest isomorfisme és natural en B, haurem provat que $\mathcal{C}(A, G(-))$ és isomorf a $H^{F(A)}$, i per tant que és representable. Sigui doncs $B \xrightarrow{q} B'$ un morfisme a $\mathcal{D}$. Hem de demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A, G(B)) \arrow[r] \arrow[d, "G(q)\circ -"'] & \mathcal{D}(F(A), B) \arrow[d, "q\circ -"] \\
\mathcal{C}(A, G(B')) \arrow[r] & \mathcal{D}(F(A), B')
\end{tikzcd}$$

commuta. Donat $f : A \to G(B)$, tenim

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \bar{f} \arrow[d, mapsto] \\
 & q \circ \bar{f} \\
G(q) \circ f \arrow[r, mapsto] & \overline{G(q) \circ f}
\end{tikzcd}$$

Però $q \circ \bar{f} = \overline{G(q) \circ f}$ segueix directament de la definició d'adjunt, i per tant el diagrama és commutatiu. $\square$

Tot i que no és esperable que tot functor a **Set** sigui representable, els functors oblidadissos (*forgetful functors*) solen ser-ho:

Proposició 1.7. *Tot functor amb codomini* **Set** *amb un adjunt per l'esquerra és representable.*

Demostració. Sigui $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un functor amb un adjunt per l'esquerra F. Sigui 1 el conjunt d'un element. Aleshores

$$G(A) \cong \mathbf{Set}(1, G(A)),$$

i l'isomorfisme és natural en A, és a dir, $G \cong \mathbf{Set}(1, G(-))$. Pel Lema 1.5, G és representable, i $G \cong H^{F(1)}$. $\square$

Fins ara, hem definit per cada objecte $A \in \mathcal{C}$ un functor $H^A \in [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$. Això podria descriure's com una visió de la categoria $\mathcal{C}$ vista des d'A, que canvia a mesura que A canvia. Tot i això, aquestes han d'estar relacionades d'alguna manera, perquè al final sempre s'està mirant la mateixa categoria. Més formalment, sempre que hi ha un morfisme entre objectes A i A', també n'hi ha un entre H^A i $H^{A'}$. En efecte, un morfisme $A' \xrightarrow{f} A$ indueix una transformació natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "H^A"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "H^{A'}"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "H^f"] \end{tikzcd}$$

cada component de la qual és, per $B \in \mathcal{C}$,

$$H^A(B) = \mathcal{C}(A, B) \to H^{A'}(B) = \mathcal{C}(A', B)$$
$$p \mapsto p \circ f.$$

Altres notacions per H^f són $\mathcal{C}(f, -)$, f^*, i $- \circ f$.
Notem el canvi de direcció: cada functor H^A és covariant, però s'ajunten per formar un functor contravariant, en el sentit de la següent definició.

Definició 1.8. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria localment petita. El functor

$$H^\bullet : \mathcal{C}^{\text{op}} \to [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$$

es defineix en els objectes A per $H^\bullet(A) = H^A$ i en els morfismes f per $H^\bullet(f) = H^f$.

Totes les definicions donades fins ara es poden dualitzar, canviant la direcció dels morfismes de manera que $\mathcal{C}$ passi a ser $\mathcal{C}^{\text{op}}$. De manera intuitiva, ara no demanem què veuen els objectes, sinó com són vistos. Dualitzem primer la definició 1.1.

Definició 1.9. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria localment petita, i $A \in \mathcal{C}$. Definim un functor

$$H_A = \mathcal{C}(-, A) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

de la següent manera:

- per objectes $B \in \mathcal{C}$, posem $H_A(B) = \mathcal{C}(B, A)$;
- per morfismes $B' \xrightarrow{g} B$, definim

  $$H_A(g) = \mathcal{C}(g, A) : \mathcal{C}(B, A) \to \mathcal{C}(B', A)$$

  per

  $$p \mapsto p \circ g$$

  per tot $p : B \to A$.

Com que un functor contravariant de $\mathcal{C}$ és un functor covariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, ja sabem què vol dir que un functor contravariant sigui representable.

Exemple 1.10. Considerem el functor

$$\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

que envia cada conjunt B al seu conjunt de parts $\mathcal{P}(B)$, i definit en els morfismes $g : B' \to B$ per $(\mathcal{P}(g))(U) = g^{-1}U$ per tot $U \in \mathcal{P}(B)$.

Ara, un morfisme $A \xrightarrow{f} A'$ de $\mathcal{C}$ indueix una transformació natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "H_A"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "H_{A'}"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "H_f"] \end{tikzcd}$$

cada component de la qual és, per $B \in \mathcal{C}$,

$$H_A(B) = \mathcal{C}(B, A) \to H_{A'}(B) = \mathcal{C}(B, A')$$
$$p \mapsto f \circ p.$$

Definició 1.11. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria localment petita. La **immersió de Yoneda** de $\mathcal{C}$ és el functor

$$H_\bullet : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$$

definit en objectes A per $H_\bullet(A) = H_A$ i en morfismes f per $H_\bullet(f) = H_f$.

Resumim les definicions que hem fet fins ara:

- Per cada $A \in \mathcal{C}$, tenim un functor $\mathcal{C} \xrightarrow{H^A} \mathbf{Set}$. Ajuntant-los tots s'obté un functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{H^\bullet} [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$.

- Per cada $A \in \mathcal{C}$, tenim un functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{H_A} \mathbf{Set}$. Ajuntant-los tots s'obté un functor $\mathcal{C} \xrightarrow{H_\bullet} [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$

Tot i que no hi ha molta diferència a l'hora de treballar amb una parella de functors o amb l'altre, triem utilitzar la segona: els H_As i $H_\bullet$. Això és perquè, en cert sentit, tenim una inclusió de $\mathcal{C}$ en $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$, que pot ser útil si $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ té propietats que $\mathcal{C}$ potser no té. Per això, però, és important el fet que $H_\bullet$ és injectiu en les classes d'isomorfisme de $\mathcal{C}$.
Finalment, definim un altre functor, que unifica les dues parelles anteriors.

Definició 1.12. Sigui C una categoria localment petita. El functor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

està definit per $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$ i $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g))(p) = g \circ p \circ f$ sempre que $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{g} B'$.

Observació. L'existència del functor Hom_C és similar al fet que, donat un espai mètric (X, d), la mètrica és una funció contínua $d : X \times X \to \mathbb{R}$. (Donats dos punts, si els movem una quantitat petita, la seva distància també varia una quantitat petita).

2 Elements generalitzats

En general, els objectes d'una categoria no tenen elements. Els objectes de **Set**, però, sí que en tenen, i hem vist que un element d'un conjunt A és essencialment el mateix que una aplicació $1 \to A$. Aquest fet motiva la següent definició.

Definició 2.1. Sigui A un objecte d'una categoria. Un **element generalitzat** d'A és un morfisme amb codomini A. Un morfisme $S \to A$ és un element generalitzat d'A de forma S.

Per exemple, quan A és un conjunt, un element generalitzat d'A de forma 1 és un element d'A, i un element generalitzat d'A de forma $\mathbb{N}$ és una successió en A. Altres exemples els trobem a la categoria d'espais topològics: els elements generalitzats de forma 1 són els punts, i els elements generalitzats de forma S^1 són els llaços, per definició.
Fixat un objecte S d'una categoria $\mathcal{C}$, el functor

$$H^S : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

envia un objecte al seu conjunt d'elements generalitzats de forma S. A més, un morfisme $A \to B$ envia S-elements d'A a S-elements de B. Tornant a l'exemple de la categoria **Top** i agafant $S = S^1$, una aplicació contínua $A \to B$ transforma llaços en A a llaços en B.

Lema de Yoneda

Carlos Fernández Lorán

10 de Mayo de 2024

1. El lema de Yoneda

Tomamos una categoría localmente pequeña $\mathcal{A}$. Tomamos un objeto $A \in \mathcal{A}$ y un functor $X : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$. De A podemos obtener el functor $H_A = \mathcal{A}(-, A) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Queremos estudiar los morfismos $H_A \longrightarrow X$.

Como $H_A, X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, estos morfismos son las transformaciones naturales de H_A en X. El conjunto de dichas transformaciones naturales no es más que $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, X)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "H_A"] \arrow[r, bend right, "X"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

De manera informal, si tenemos las aplicaciones $A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$, podemos formar una única aplicación $A_0 \longrightarrow A_n$. Aplicando esto a nuestro caso, dados $A \in \mathcal{A}$ y $X : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, podemos construir $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, X)$ y $X(A)$. Este principio sugiere que $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, X) \cong X(A)$. Esto se cumple y es el lema de Yoneda.

Teorema (Lema de Yoneda)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña. Entonces*

$$[\mathcal{A}^{op}, \boldsymbol{Set}](H_A, X) \cong X(A) \tag{1}$$

de forma natural en $A \in \mathcal{A}$ y $X \in [\mathcal{A}^{op}, \boldsymbol{Set}]$.

El concepto de *natural* aquí hace referencia a que un morfismo $X \longrightarrow X'$ induce un morfismo $[\mathcal{A}^{op}, Set](H_A, X) \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, Set](H_A, X')$ que no solo hace que (1) funcione para todo X y para todo A sino que también se puede dar un isomorfismo compatible con dichos morfismos.

Con lo que podemos ver que el lema dice que el functor compuesto Es iso-

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] & \xrightarrow{H_\bullet^{\mathrm{op}} \times 1} & [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]^{\mathrm{op}} \times [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]}} & \mathbf{Set} \\ (A, X) & \longmapsto & (H_A, X) & \longmapsto & [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, X) \end{array}$$

morfo de manera natural al functor evaluación

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{op} \times [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}] &\longrightarrow Set \\ (A, X) &\longmapsto X(A) \end{aligned}$$

Veamos antes de la demostración un ejemplo de la utilidad de este teorema. Sea $X : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, definimos $X' \coloneqq [\mathcal{A}^{op}, Set](H_\bullet, X) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set$ con $X'(S) = [\mathcal{A}^{op}, Set](H_A, X)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Si suponemos que el lema de Yoneda es cierto, $X'(A) \cong X(A)$. En cambio, si es falso, partiendo de un único X tenemos una secuencia infinita $X', X'', \dots$ de morfismos (que no tiene buena pinta).

Ahora procedemos con la demostración del Lema de Yoneda (1).

Demostración. Tenemos que definir, para toda A y X, una biyección entre los conjuntos $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, X)$ y $X(A)$. Después mostraremos que es natural en A y en X.

Primero, fijamos $A \in \mathcal{A}^{op}$ y $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$. Definimos las funciones

$$\begin{tikzcd} {[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, X)} \arrow[r, shift left, "\hat{(\ )}"] & X(A) \arrow[l, shift left, "\tilde{(\ )}"] \end{tikzcd}$$

y mostraremos que son inversas.

- Dada $\alpha : H_A \longrightarrow X$, definimos $\hat{\alpha} \in X(A)$ como $\hat{\alpha} = \alpha_A(1_A)$.
- Sea $x \in X(A)$, definimos la transformación natural $\hat{x} : H_A \longrightarrow X$, tal que para $B \in \mathcal{A}$,

  $$\hat{x}_B : H_A(B) = \mathcal{A}(B, A) \longrightarrow X(B)$$

  y mostramos que $\hat{x} = (\hat{x}_B)_{B \in \mathcal{A}}$ satisface la condición de naturalidad.

  Dada $B \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{A}(B, A)$, definimos

  $$\hat{x}_B(f) = (X(f))(x) \in X(B)$$

  Para probar la neutralidad hemos de ver que para todo morfismo $B' \xrightarrow{g} B$ de $\mathcal{A}$, el cuadrado siguiente conmuta.

  $$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(B, A) \arrow[r, "H_A(g) = -\circ g"] \arrow[d, "\tilde{x}_B"'] & \mathscr{A}(B', A) \arrow[d, "\tilde{x}_{B'}"] \\ X(B) \arrow[r, "X(g)"'] & X(B') \end{tikzcd}$$

  Cosa que se ve claramente al calcular las dos posibles imágenes de un morfismo f cualquiera.

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \circ g \arrow[d, mapsto] \\
(Xf)(x) \arrow[r, mapsto] & \begin{matrix}(X(f \circ g))(x) \\ (Xg)((Xf)(x)),\end{matrix}
\end{tikzcd}
$$

Dada $x \in X(A)$, queremos ver que $\tilde{\hat{x}} = x$, y claramente

$$\tilde{\hat{x}} = \hat{x}_A(1_A) = (X1_A)(x) = 1_{X(A)}(x) = x$$

Dada $\alpha : H_A \longrightarrow X$, queremos ver que $\tilde{\hat{\alpha}} = \alpha$. Sabemos que dos transformaciones naturales son isomorfas si, y solo si, todas sus componentes lo son; es decir, que hay que ver que $(\tilde{\hat{\alpha}})_B = \alpha_B \quad \forall B \in \mathcal{A}$. Ambas son funciones de $\mathcal{A}(B, A)$ en $X(B)$ y dos funciones son iguales si, y solo si, toman los mismos valores en todo el dominio. Por tanto, hemos de ver que

$$(\tilde{\hat{\alpha}})_B(f) = \alpha_B(f) \quad \forall B \in \mathcal{A}, \quad \forall f : B \longrightarrow A \text{ en A}$$

Por definición

$$(\tilde{\hat{\alpha}})_B(f) = (Xf)(\hat{\alpha}) = (Xf)(\alpha_A(1_A))$$

por lo que hay que probar que

$$(Xf)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(f) \tag{2}$$

Por la naturalidad de α el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(A, A) \arrow[r, "H_A(f) = - \circ f"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \mathscr{A}(B, A) \arrow[d, "\alpha_B"] \\
X(A) \arrow[r, "Xf"'] & X(B)
\end{tikzcd}
$$

cosa que al evaluarlo en $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$ nos da la ecuación 2.

Observación. *Es importante considerar la importancia del hecho de que $\tilde{\hat{\alpha}} = \alpha$. Dado que $\hat{\alpha}$ es el valor de α en 1_A, esto implica que una transformación natural $H_A \longrightarrow X$ queda determinada por su valor en 1_A. Además, la ecuación 2 determina el cómo de esta relación.*

Esto establece la biyección propuesta para toda $A \in \mathcal{A}$ y todo $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$. Ahora hemos de ver que esta biyección es natural en A y en X.

Vamos a utilizar dos resultados que nos ahorraran trabajo:

- En teoría hemos de probar la neutralidad de $(\hat{\ })$ y de $(\tilde{\ })$, por el siguiente lema, es suficiente probar la neutralidad para una de ellas. En este caso, nosotros probaremos la neutralidad de $(\hat{\ })$.

Lema. *Sea* $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \boldsymbol{Set} \end{tikzcd}$ *una transformación natural. Entonces α es un isomorfismo natural si, y solo si, $\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathcal{A}$.*

- Para ver que $(\hat{\ })$ es natural en el par (A, X) si, y solo si, es natural en A para X fijada y es natural en X para A fijada. Por tanto, el problema queda reducido a probar ambos tipos de neutralidad.

La naturalidad en A dice que para todo $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ y $B \xrightarrow{f} A$ en $\mathcal{A}$ el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, X)} \arrow[r, "-\circ H_f"] \arrow[d, "(\hat{\ })"'] & {[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_B, X)} \arrow[d, "(\hat{\ })"] \\
X(A) \arrow[r, "Xf"'] & X(B)
\end{tikzcd}$$

Para $\alpha : H_A \longrightarrow X$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \alpha \circ H_f \arrow[d, mapsto] \\
\alpha_A(1_A) \arrow[r, mapsto] & {\begin{matrix}(\alpha \circ H_f)_B(1_B) \\ (Xf)(\alpha_A(1_A)),\end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

por lo que hemos de probar que $(\alpha \circ H_f)_B(1_B) = (Xf)(\alpha_A(1_A))$. Claramente,

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ H_f)_B(1_B) &= \alpha_B((H_f)_B(1_B)) \\
&= \alpha_B(f \circ 1_B) = \alpha_B(f) \\
&= (Xf)(\alpha_A(1_A))
\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad es por la definición de composición en $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, la segunda es por la definición de H_f, y la última por la ecuación 2.

La naturalidad por X nos dice que para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo morfismo $\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[r, bend right, "X'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$ en $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
{[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, X)} \arrow[r, "\theta\circ-"] \arrow[d, "(\hat{\ })"'] & {[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, X')} \arrow[d, "(\hat{\ })"] \\
X(A) \arrow[r, "\theta_A"'] & X'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para $\alpha : H_A \longrightarrow H$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \theta \circ \alpha \arrow[d, mapsto] \\
\alpha_A(1_A) \arrow[r, mapsto] & (\theta \circ \alpha)_A(1_A) \\[-20pt]
& \theta_A(\alpha_A(1_A)),
\end{tikzcd}$$

y $(\theta \circ \alpha)_A = \theta_A \circ \alpha_A$ por definición de composición en $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, por tanto el cuadrado conmuta. $\square$

CONSEQÜÈNCIES DEL LEMA DE YONEDA

Martí Batista Obiols i Miquel Martínez Gavagnin-Capoggiani

1. Introducció

El lema de Yoneda és un dels resultats més importants de Teoria de Categories. L'objectiu d'aquesta sessió es donar-ne algunes conseqüències i aplicacions. Així, quan algú us pregunti per les aplicacions de les matemàtiques a la vida real, ja sabreu què contestar. Comencem fent alguns recordatoris:

Teorema 1.1. *Sigui $\mathscr{A}$ una categoria localment petita. Aleshores $[\mathscr{A}^{op}, \boldsymbol{Set}](H_A, X) \cong X(A)$ de forma natural en $A \in \mathscr{A}$ i $X \in [\mathscr{A}^{op}, \boldsymbol{Set}]$.*

Observació. Recordem que aquest isomorfisme ve donat de la següent forma:

- Per $\alpha : H_A \to X$, fem $\hat{\alpha} = \alpha_A(1_A)$.
- Per $x \in X(A)$, fem $\tilde{x} : H_A \to X$ tal que, per $B \in \mathscr{A}$, $\tilde{x}_B : H_A(B) \to X(B)$ ve donada per $\tilde{x}_B(f) = (X(f))(x)$.

Més endavant farem servir la versió dualitzada del Lema de Yoneda, que seria, sota les mateixes condicions, $[\mathscr{A}, \mathbf{Set}](H^A, X) \cong X(A)$. També farem ús d'un lema que vam veure a l'última sessió, que diu el següent:

Lema 1.2. *Sigui $\alpha : F \to G$ una transformació natural entre dos functors de $[\mathscr{A}, \boldsymbol{Set}]$. Aleshores, α és un isomorfisme natural si, i només si, $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ és un isomorfisme per a tot $A \in \mathscr{A}$*

2. Representacions com a elements universals

Corol·lari 2.1. *Sigui $\mathscr{A}$ una categoria localment petita, i $X : \mathscr{A}^{op} \to \boldsymbol{Set}$ un functor. Aleshores, una representació de X consisteix en un objecte $A \in \mathscr{A}$, junt amb un element $u \in X(A)$ tal que per cada $B \in \mathscr{A}$, $x \in X(B)$, existeix un únic morfisme $\bar{x} : B \to A$ tal que $(X\bar{x})(u) = x$.*

Demostració. Pel lema de Yoneda, només hem d'ensenyar que per tot $A \in \mathscr{A}$, i $u \in X(A)$, la transformació natural $\widetilde{u} : H_A \to X$ és un isomorfime si, i només si, es dona la condició (utilitzem la notació del lema de Yoneda). Recordem que hem demostrat que $\widetilde{u}$ és bijecció (natural), i que això implica el lema de Yoneda. Per tant només hem de veure l'equivalència.

Ara, $\widetilde{u}$ és isomorfisme natural si, i només si, per tots els $B \in \mathscr{A}$, la funció

$$\widetilde{u_B} : H_A(B) = \mathscr{A}(B, A) \to X(B)$$

és una bijecció, pel Lema 1.2. Això és dona si, i només si, per tots els $B \in \mathscr{A}$ i $x \in X(B)$, existeix un únic $\bar{x} \in \mathscr{A}(B, A)$ tal que $\widetilde{u_B}(\bar{x}) = x$. Però recordem que

$$\widetilde{u_B}(\bar{x}) = (X\bar{x})(u)$$

que és la condició que buscàvem.

$\square$

Observacions:

- Recordem que una representació de X és un objecte $A \in \mathscr{A}$ junt amb una isomorfisme natural $\alpha : H_A \to X$. El corol·lari ens diu que aquestes parelles (A, α) estan en bijecció amb les parelles (A, u) satisfent la condició.
- La parella (B, x) amb $B \in \mathscr{A}$ i $x \in X(B)$ normalment es diu els elements del functor X. L'element u del corol·lari es diu que és un element *universal* de x. Per tant, el corol·lari ens està donant una correspondència un a un entre els elements universals i els representables.
- Es pot reescriure exactament el mateix corol·lari amb $X : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$, enlloc de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, per dualitat. En els exemples utilitzarem aquesta variant, més còmoda.

Exemple 2.2. Fixem un conjunt S, i considerem el següent functor:

$$\begin{aligned} X = \mathbf{Set}(S, U(-)) : \mathbf{Vect}_k &\to \mathbf{Set} \\ V &\mapsto \mathbf{Set}(S, U(V)) \end{aligned}$$

el qual ja haviem vist en la xerrada d'adjuncions (U és el functor oblidadís). Sabem dos fets d'aquest functor:

- Primer, el functor induïa una bijecció *natural*, on F era el functor que assignava a cada conjunt el espai vectorial generat (lliurement) pel conjunt:

$$\mathbf{Vect}_k(F(S), V) \cong \mathbf{Set}(S, U(V))$$

- Després, tal com es va comentar, teniem que donat el functor, existeix un espai vectorial $F(S)$, i una funció $u : S \to U(F(S))$ tal que, per cada espai vectorial V i funció $f : S \to U(V)$, aleshores $\exists!\ \bar{f} : F(S) \to V$ tal que el següent diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & U(F(S)) \arrow[d, "U(\bar{f})"] \\ & U(V) \end{tikzcd}$$

Cadascun d'aquests dos fets implica que X és representable. Mirem-ho:

- El primer fet diu que existeix un isomorfisme $X(V) \cong \mathbf{Vect}(F(S), V)$ natural en V, és a dir, un isomorfisme $X \cong H^{F(S)}$, que és la definició de represantabilitat[1].

[1] Aquí no fa falta utilitzar el lema 1.6 de la xerrada de representables, ja que la condició de naturalitat ja ens ve donada

- El segon fet diu que u satisfà la condició del corol·lari, i per tant X és representable. Estem utilitzant X com el functor, $F(S)$ com a A, V com a B, f com a x.

Arribats a aquest punt toca pensar una mica. Ambdues propietats ens estan dient que el functor X és representable, però sembla ser que la segona ens està conferint més informació.De fet, es pot veure que si la segona situació és certa, llavors tindrem una bijecció natural $\mathbf{Vect}_k(F(S),V) \cong \mathbf{Set}(S,U(V))$, definida amb $g \mapsto U(g) \circ u$.[2] Per tant, sembla ser que la segona condició ens podria estar donant més informació, ja que l'isomorfisme natural és d'una determinada forma. El corol·lari ens diu que això és una *il·lusió*.

Exemple 2.3. Es pot generalitzar l'exemple anterior. Donada qualsevol adjunció $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{B}$, si fixem un $A \in \mathscr{A}$ i posem $X = \mathscr{A}(A, G(-)) : \mathscr{B} \to \mathbf{Set}$ aleshores X és representable (que això és aplicar el lema 1.6 de la xerrada de representables), i això es pot expressar en qualsevol d'aquestes dues maneres:

- $\mathscr{A}(A, G(B)) \cong \mathscr{B}(F(A), B)$ natural en B.
- El morfisme unitari $u : A \to G(F(A))$ satisfà la condició del corol·lari.[3]

3. La immersió de Yoneda

Recordem, de la secció de functors, que un functor ple i fidel és un functor exhaustiu i injectiu respectivament, respecte els morfismes de qualsevol parella d'objectes. És a dir, $\mathscr{A}(A, A^{'}) \cong \mathscr{B}(F(A), F(A^{'}))$. Informalment, el següent corol·lari ve a dir que per tot $A, A^{'} \in \mathscr{A}$, un morfisme entre functors $H_A \to H_{A'}$ és el mateix que un morfisme entre $A \to A^{'}$.

Corol·lari 3.1. *Sigui $\mathscr{A}$ una categoria petita localment. Llavors, la immersió de Yoneda $H_\bullet : \mathscr{A} \to [\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ és un functor ple i fidel.*

Demostració. Hem de veure que fixats $A, A^{'} \in \mathscr{A}$, la funció

$$\begin{aligned} g : \mathscr{A}(A, A^{'}) &\to [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, H_{A'}) \\ f &\mapsto H_f \end{aligned}$$

és bijectiva. Utilitzant el lema de Yoneda, si prenem X com a $H_{A'}$, la funció

$$h = (\tilde{\ }) : H_{A'}(A) \to [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](H_A, H_{A'})$$

és bijectiva (era la funció de la demostració), i per tant és suficient provar que h, g són dues funcions idèntiques.

[2] La unicitat de la $\bar{f}$ ens permet establir la bijecció. La part tediosa seria comprovar la naturalitat.

[3] Aquí el llibre introdueix notació de la *categoria de la comma* i *objectes inicials*, però no sembla destacable pel que ens interessa.

Sigui doncs una funció $f \in \mathscr{A}(A, A^{'})$. Llavors, $\widetilde{f} = H_f$ és cert? Això és equivalent a veure $\hat{H}_f = f$ (altre cop, definició de la funció del Lema de Yoneda). I és fàcilment comprovable per definició:

$$\hat{H}_f = (H_f)_A(1_A) = f \circ 1_A = f$$

La primera igualtat és per definició de $(\hat{\ })$, i la segona per definició de $(H_f)_A$. $\square$

Normalment, una 'immersió' en matemàtiques significa un morfisme entre A, B, dos objectes matemàtics qualssevol, tal que A és isomorf a la seva imatge en B. L'exemple que podríem tenir al cap és la inclusió entre conjunts, o en el cas de topologia, quan una aplicació continua entre dos espais topològics és un homeomorfisme entre A i $f(A)$.

El corol·lari ens indica que, en teoria de categories, la immersió de Yoneda és, *justificadament*, una immersió. La immersió de Yoneda $H_\bullet$ submergeix $\mathscr{A}$ en la seva pròpia categoria de functors, $[\mathscr{A}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$. És a dir, $\mathscr{A}$ és equivalent a una subcategoria completa de $[\mathscr{A}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$, els objectes de la qual són representables (pel Lema de Yoneda). Notem, però, que de moment hem submergit només els morfismes de la categoria. Encara no estarem establint relacions entre els objectes.

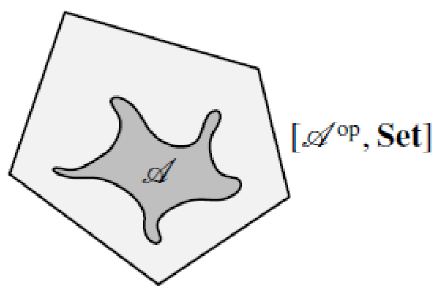


Figura 1: Dibuixet

Així doncs, tirant per aquest camí, hi ha un lema força útil:

Lema 3.2. *Sigui $J : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un functor ple i fidel, i $A, A^{'} \in \mathscr{A}$. Aleshores*

- *Un morfisme f en $\mathscr{A}$ és isomorfisme $\iff$ $J(f)$ és un isomorfisme en $\mathscr{B}$*
- *Per qualsevol isomorfisme $g : J(A) \to J(A^{'})$ en $\mathscr{B}$, existeix un únic isomorfisme $f : A \to A^{'}$ en $\mathscr{A}$ tal que $J(f) = g$*
- *$A \cong A^{'}$ en $\mathscr{A}$ $\iff$ $J(A) \cong J(A^{'})$ en $\mathscr{B}$* [4]

[4]La demostració estava deixada com a exercici pel lector així que potser hi ha errors.

Demostració. Els dos darrers apartats són senzills. Notem que el segon apartat és una conseqüència directa que F sigui injectiu. Notem que el tercer apartat és una conseqüència del primer apartat, ja que preservarem els isomorfismes. Per tant l'únic a demostrar és el primer apartat.

$\Rightarrow$) Sigui $f : A \to A^{'}$ el vostre isomorfisme preferit. Aleshores, existeix un $g : A^{'} \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ i $f \circ g = id_{A'}$. Ara, tindrem que $id_{J(A')} = J(id_{A'}) = J(f \circ g) = J(f) \circ J(g)$, i recíprocament per id_A.

$\Leftarrow$) Sigui $J(f)$ un isomorfisme, amb g el seu morfisme invers. Aleshores, $id_{J(A)} = J(f) \circ g = J(f) \circ J(g') = J(f \circ g')$, on g' existeix per exhaustivitat. Aleshores, per bijectivitat, tenim que ha de ser $f \circ g' = id_A$, i anàlogament $g' \circ f = id_{A'}$. □

Essencialment aquesta demostració ve a dir que quan tenim isomorfismes la immersió de Yoneda (en particular) els preserva bé.

4. Isomorfisme de representables

En aquesta secció veurem una extensió d'un resultat que ja vam veure a la sessió de Representables. Diu el següent:

Corol·lari 4.1. *Sigui $\mathscr{A}$ una categoria localment petita, i siguin $A, A' \in \mathscr{A}$. Aleshores $H_A \cong H_{A'} \iff A \cong A' \iff H^A \cong H^{A'}$.*

Demostració. Per dualitat, només és necessari demostrar el primer '$\iff$'. Del corol·lari 3.1 obtenim que $H_\bullet$ és un functor ple i fidel, i per tant, aplicant el tercer punt del Lema 3.2, tenim $A \cong A' \iff H_A = H_\bullet(A) \cong H_\bullet(A') = H_{A'}$. □

En altres paraules, si $\mathscr{A}(B, A) \cong \mathscr{A}(B, A')$ de forma natural en B, aleshores $A \cong A'$. Entenent $\mathscr{A}(B, A)$ com *A vist des de B*, aquest corol·lari ens diu que dos objectes són iguals (llevat d'isomorfisme) si, i només si, es veuen iguals des de qualsevol punt de vista. Aquest fet és de notable rellevància, ja que ens està dient que un objecte d'una categoria $\mathscr{A}$ està completament determinat pels morfismes $\mathscr{A}(-, A)$ [5].

Exemple 4.2. Considerem $\mathscr{A} = \mathbf{Grp}$. Prenem dos grups A, A' i suposem que se'ns diu que aquests grups *es veuen iguals des de tot grup B* (és a dir, $H_A(B) \cong H_{A'}(B)$). Aplicant aquesta condició a casos particulars, tenim:

- $H_A(\mathbb{Z}) \cong H_{A'}(\mathbb{Z})$. Sabem que, com a conjunts, tenim una bijecció entre $H_{G_1}(\mathbb{Z})$ i G_1 (un morfisme de grups $f : \mathbb{Z} \to G_1$ ve determinat per la imatge de 1), i anàlogament amb G_2. Per tant, tenim una bijecció entre G_1 i G_2, però no podem garantir que aquesta preservi l'estructura.
- Tenim $H_{G_1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H_{G_2}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, per a tot p primer. Consegüentment G_1 i G_2 tenen la mateixa quantitat d'elements de cada ordre primer.

[5] Com diu la dita, *digue'm amb qui vas, i et diré qui ets (llevat d'isomorfisme)*

Aquests isomorfismes, a més d'altres que podríem plantejar, només ens proporcionen informació parcial sobre les similituds de G_1 i G_2. En canvi, si es dona també que $H_A(B) \cong H_{A'}(B)$, per a tot B *de forma natural*, pel corol·lari podem garantir $A \cong A'$, els grups són isomorfs.

Exemple 4.3. Siguin $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categories localment petites, i $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un functor. Suposem que F, F' són functors adjunts per l'esquerra de G. Aleshores, per a tot $A \in \mathscr{A}$, tenim:

$$\mathscr{B}(F(A), B) \cong \mathscr{A}(A, G(B)) \cong \mathscr{B}(F'(A), B)$$

de forma natural en $B \in \mathscr{B}$, i per tant $H^{F(A)} \cong H^{F'(A)}$, i per tant, pel dual del corol·lari 4.1, tenim $F(A) \cong F'(A)$. De fet, aquest isomorfisme és natural en A, i per tant tenim $F \cong F'$. Això ens diu que els adjunts per l'esquerra són únics (anàlogament es demostra que els adjunts per la dreta també).

5. Lema de Yoneda com a generalització del Teorema de Cayley

Siguin $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categories localment petites, i $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un functor. Una possible pregunta que ens pot sorgir és si hi ha cap manera de determinar $[\mathscr{A}, \mathscr{B}](F, F)$, les transformacions naturals de F en si mateix. Aquesta qüestió evidentment és molt general, amb la qual cosa difícilment es pot trobar una resposta satisfactòria. El Lema de Yoneda ens dona un resultat parcial:

Corol·lari 5.1. *Donada $\mathscr{A}$ una categoria localment petita i $A \in \mathscr{A}$, tenim que:*

$$[\mathscr{A}^{op}, \boldsymbol{Set}](H_A, H_A) \cong H_A(A) = \mathscr{A}(A, A)$$

Aquest resultat, aplicat a alguns casos particulars, ens pot proporcionar resultats que ja coneixem. L'exemple més notable és el tractat a continuació.

Exemple 5.2. El Teorema de Cayley afirma que tot grup G és isomorf a un subgrup del grup simètric $Sim(G)$, els elements del qual són les permutacions del conjunt subjacent G. Veurem ara que és conseqüència del Lema de Yoneda[6].

Sigui G un grup. Considerem $\mathscr{A}$ la categoria amb un únic objecte $*$, i que té per morfismes els elements de G, la composició dels quals ve donada pel producte en G. Considerem ara el functor H_*, donat per:

$$\begin{aligned} H_* : \mathscr{A}^{op} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ * &\longmapsto Hom(*, *) = G \\ g &\longmapsto H_g : G \to G \\ &\qquad\qquad x \mapsto gx \end{aligned}$$

[6]La demostració que veurem ara és notablement més enrevessada que la vista en els cursos d'Àlgebra. L'objectiu que perseguim aquí no és veure aquest resultat particular, sinó entendre el Lema de Yoneda com una generalització d'aquest.

Vegem ara les transformacions naturals de H_* en si mateix. Sigui $\alpha : H_* \to H_*$ transformació natural. Notem que, com que $\mathscr{A}$ té un únic objecte $*$, α ve definida per un únic morfisme de conjunts, és a dir $\alpha : Hom(*, *) \to Hom(*, *)$, i per tant, $\alpha : G \to G$; i de tal manera que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g\cdot -"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "g\cdot -"'] & G \end{tikzcd}$$

En altres termes, tenim que $\alpha(gx) = g\alpha(x)$, per a tot $g, x \in G$. En particular, notem que $\alpha(x) = x\alpha(1)$, per a tot $x \in G$. Anomenem $Nat := [\mathscr{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_*, H_*)$, i veiem que té estructura de grup amb la composició:

- Si $\alpha, \beta \in Nat$, fàcilment veiem $\alpha \circ \beta \in Nat$.
- L'associativitat ve donada per ser aplicacions de conjunts.
- La identitat actua com a element neutre.
- Donada $\alpha \in Nat$, volem veure que admet un invers. Tenint present que α ve definida per $\alpha(x) = x\alpha(1)$, podem definir β tal que $\beta(x) = x(\alpha(1))^{-1}$, i observem que β és l'invers de α.

D'aquesta manera, com que tenim Nat està contingut en $Sim(G)$, n'és un subgrup. Pel Lema de Yoneda, $G = Hom(*, *) \cong Nat \subseteq Sim(G)$, però aquest isomorfisme és com a conjunt, no com a grup. Cal veure, per tant, que $(\hat{\ })$ preserva l'estructura de grup, i haurem acabat. Recordem que:

$$\begin{aligned} (\hat{\ }) : Nat &\longrightarrow G \\ \alpha &\longmapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

Donades $\alpha, \beta \in Nat$, tenim $\widehat{\alpha \circ \beta} = (\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(1)\beta(1) = \hat{\alpha}\hat{\beta}$. Consegüentment, $G \cong Nat$ és un isomorfisme de grups, i per tant efectivament G és isomorf a un subgrup de $Sim(G)$.

Chapter 1

Sheaves

1.1 Introduction

Definition 1.1. *Let X be a topological space and consider the category whose objects are the open subsets of X and the morphisms the inclusions of open subsets, we denote it by $\mathcal{C}_X$. A* ***presheaf*** *$\mathcal{F}$ of abelian groups is a functor*

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}_X \longrightarrow Ab$$

Remark 1.2. Explicitly. Let X be a topological space, a **presheaf** $\mathcal{F}$ of abelian groups on X is:

- For every open subset $U \subseteq X$ an abelian group $\mathcal{F}(U)$.
- For every pair of open subsets $V \subseteq U$ a morphism $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ of abelian groups, named **restriction maps**, such that:
  1. $\rho_{UU} = id_{\mathcal{F}(U)}$
  2. For every three open subsets such that $W \subseteq V \subseteq U$ then $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Definition 1.3. *If $\mathcal{F}$ is a presheaf (of abelian groups) on X and $U \subseteq X$ an open subset, the* ***sections*** *of the presheaf over U are the elements of $\mathcal{F}(U)$. If $s \in \mathcal{F}(U)$ is a section over U, and $V \subseteq U$, it is usual to write $s_{|V}$ in spite of $\rho_{UV}(s)$*

Definition 1.4. *A* ***sheaf*** *$\mathcal{F}$ on X (of abelian groups) is a presheaf on X that satisfies the following conditions:*

Aquest document és un extracte del Treball de fi de grau de l'autora.

1. *(Locality axiom) If U is an open subset of X, $\{U_i\}_{i\in I}$ an open covering of U and $s \in \mathcal{F}(U)$. If $s_{|U_i} = 0$ for all $i \in I$, then, $s = 0$.*

2. *(Gluing axiom) If U is an open subset of X, $\{U_i\}_{i\in I}$ an open covering of U and $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ such that $s_{i|U_i\cap U_j} = s_{j|U_i\cap U_j}$ for each i, j. Then, $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ such that $s_{|U_i} = s_i$ for all $i \in I$.*

Notice that the same definition of presheaf of abelian groups can be rewritten to define a presheaf with values in a category $\mathcal{C}$, by replacing, in the definition above, abelian groups elements of $Ob(\mathcal{C})$, and morphism of abelian groups for an element of $Hom(X, Y)$ with $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Sheaves of abelian groups are also named **abelian sheaves**.

Example 1.5. Let X be a topological space. We define the **sheaf of continuous functions** $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ as follows:

1. For all $U \subseteq X$ open subset $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})(U) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuous }\}$

2. Take the usual restriction maps of continuous functions.

Any continuous function that restricts to zero on an open covering of X is the zero function so the locality axiom holds. If we have a family of continuous functions $\{f_i : U_i \to \mathbb{R}\}$ that matches on the overlaps (ie: $f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$) we can define a continuous function f as $f(x) = f_i(x)$ if $x \in U_i$, so the gluing axiom also holds. Hence we have defined a sheaf of rings on X.

Notice that for the same reason we can define the sheaves $\mathcal{C}^m(X, \mathbb{R})$ of functions m-times continuously differentiable on a differentiable manifold X.

Example 1.6. Let V be an algebraic variety over a field k (the set of solutions of a system of polynomial equations). Considering Zariski topology, for each $U \subseteq V$ open subset let $\mathcal{O}(U)$ be the ring of regular functions from U to k (functions defined locally by rational functions as a well defined quotient of polynomials), and take the restriction maps as usual. It is clear that $\mathcal{O}$ is a presheaf of rings on V, this is indeed a sheaf: it satisfies the locality axiom: given that a function that is the 0 function locally is the 0 function, and it satisfies the gluing axiom since a function that is locally regular is indeed regular by definition.

Example 1.7. Let X be a topological space and A an abelian group. If one wants to define a **constant sheaf** on X the first attempt to do it will be to define $A(U) = A$. The matter is that in general it is not a sheaf. For example if $X = U_1 \sqcup U_2$ a disjoint union, for any choice of $s_1 \neq s_2$ elements of A they always match on the intersections since it is $\emptyset$ so they cannot be glued. This problem can be solved by defining $A_X(U) = \{f : U \to A \mid f \text{ locally constant }\}$, this is f continuous taking on A the discrete topology. With this we have $A_X(U) = A$ if U is connected, indeed we have $A_X(U)$ is the product of copies of A one for each connected component of U. It is easy to check that this is a sheaf.

Definition 1.8. *Let $\mathcal{F}$ be a presheaf on X, a* ***presubsheaf*** *$\mathcal{G}$ of $\mathcal{F}$ is a presheaf on X such that for every $U \subseteq X$ open subset, $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$, and the restriction maps are the induced by the restriction maps of $\mathcal{F}$. If $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are sheaves then $\mathcal{G}$ is called a* ***subsheaf*** *of $\mathcal{F}$.*

Definition 1.9. *Let X be a topological space and $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ (pre)sheaves on X. A* ***morphism of (pre)sheaves*** *$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ is, for every open set $U \subseteq X$, a morphism $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatible with the restriction maps. This is, for every pair of open subsets $V \subseteq U \subseteq X$ the following is commutative:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Example 1.10. Let X be an open subset of $\mathbb{R}^m$ and take the sheaves $\mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$ and $\mathcal{C}^{n-1}(X, \mathbb{R})$ (see 1.5). The morphism $D : \mathcal{C}^n(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{n-1}(X, \mathbb{R})$ defined by the operator $D = \frac{d}{dx}$ is a morphism of sheaves.

Definition 1.11. *A map $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ between (pre)sheaves is an* ***isomorphism*** *if there exists a map $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ such that $\phi \circ \psi = id_{\mathcal{G}}$ and $\psi \circ \phi = id_{\mathcal{F}}$*

Definition 1.12. *We denote by $Sh(-)$ the* ***category of sheaves*** *(of abelian groups) on a topological space.*

1.2 Sheafification

When one has a presheaf $\mathcal{F}$ on X a topological space there is a natural way to associate to it a sheaf $\mathcal{F}^{sh}$ that approximates $\mathcal{F}$ the best possible way as a sheaf. This procedure is known as sheafification.

Definition 1.13. *Let $\mathcal{F}$ be a presheaf on X. A* ***sheafification*** *of $\mathcal{F}$ is a sheaf $\mathcal{F}^{sh}$ on X and a presheaves morphism $sh : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{sh}$ such that:*

(a) For every $\mathcal{G}$ presheaf on X and $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ presheaves morphism there is an induced

sheaf morphism $\phi^{sh} : \mathcal{F}^{sh} \to \mathcal{G}^{sh}$ in which:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "sh"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "sh"] \\ \mathcal{F}^{sh} \arrow[r, "\phi^{sh}"'] & \mathcal{G}^{sh} \end{tikzcd}$$

(b) *Universal property: If $\mathcal{G}$ is a sheaf on X and $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ presheaves morphism then:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "sh"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^{sh} \arrow[ur, dashed, "!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(c) *The morphism sh induces an isomorphism on the stalks:*

$$\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}^{sh}_x \qquad \forall x \in X$$

Proposition 1.14. *Assuming the existence of the sheafification. Given a presheaf $\mathcal{F}$ presheaf on X, $\mathcal{F}^{sh}$ is unique up to isomorphism.*

Proof. In general, objects with a universal property are unique up to isomorphism. Nevertheless, let us see the proof in this case.

Let $\mathcal{F}$ be a presheaf on X a topological space, and $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ two sheafifications of $\mathcal{F}$, let sh_1, sh_2 denote the morphisms of sheafification.

$$sh_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1 \qquad sh_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2$$

Applying the second property of sh_1 with $\mathcal{F}_2$ sheaf on X and the morphism of presheaves $sh_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2$, there exists a unique $\varphi_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ such that $\varphi_1 \circ sh_1 = sh_2$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "sh_2"] \arrow[d, "sh_1"'] & \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_1 \arrow[ur, dashed, "!\varphi_1"'] & \end{tikzcd}$$

By symmetry, there exists a unique $\varphi_2 : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$, such that, $\varphi_2 \circ sh_2 = sh_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "sh_1"] \arrow[d, "sh_2"'] & \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \arrow[ur, dashed, "!\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Therefore, $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ sh_2) = sh_2$ and $\varphi_2 \circ (\varphi_1 \circ sh_1) = sh_1$, so φ_1 is an isomorphism from $\mathcal{F}_1$ to $\mathcal{F}_2$. $\square$

Theorem 1.15. *Given a presheaf $\mathcal{F}$ presheaf on X there exists the sheafification.*

Proof. See [2, pg 31-34] □

1.3 Stalks

1.3.1 Direct limit

Definition 1.16. *Consider a directed set $(I, \leq)$, a non-empty set I with a preorder $\leq$ with the property that for every pair $i, j \in I$ there exists $k \in I$ such that $i \leq k$ and $j \leq k$. A* ***directed system*** *over I is a pair (A_i, f_{ij}) where:*

1. *$\{A_i : i \in I\}$ is a family of objects indexed by I.*

2. *For every pair $i \leq j$ there is a morphism $f_{ij} : A_i \to A_j$ with the following properties:*

   (a) $f_{ii} = id_{Ai}$

   (b) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ *for every* $i \leq j \leq k$

Definition 1.17. *With the previous notation we define the* ***direct limit*** *of the direct system (A_i, f_{ij}) to be:*

$$\varinjlim A_i := \bigsqcup_i A_i / \sim$$

With $\sim$ being the following equivalence relation: for $x_i \in A_i$ and $x_j \in A_j$ then $x_i \sim x_j$ if, and only if, $\exists k \in I$ with $i, j \leq k$ such that $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. And a family of canonical functions $\phi_i : A_i \to \varinjlim A_i$ that maps each element to its class.

The direct limit has a universal property. If one has $(A_i, f_{i,j})$ a direct system of objects of an algebraic category $\mathcal{C}$, $A \in Ob(\mathcal{C})$ and morphisms $\{\phi_i : A_i \to A\}$ such that $\phi_j \circ f_{ij} = \phi_i$. For each $Y \in Ob(\mathcal{C})$ and $\{\psi_i : A_i \to Y\}$ such that $\psi_j \circ f_{ij} = \psi_i$, there exists a unique $\varphi : X \to Y$ morphism such that the following commutes:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

1.3.2 Stalks

Definition 1.18. *Let $\mathcal{F}$ be a (pre-)sheaf (of abelian groups) on X and $x \in X$. We define the **stalk** of X at x to be:*

$$\mathcal{F}_x = \bigsqcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U)/\sim$$

where we consider $(s_1, U_1) \sim (s_2, U_2)$, with $s_1 \in U_1$, $s_2 \in U_2$, if $\exists V \subseteq U_1 \cap U_2$ open subset such that $x \in V$ and $s_{1|V} = s_{2|V}$.

Remark 1.19. Indeed we are taking $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ indexed by the open neighborhoods of x with $U \leq V$ if $V \subseteq U$.

The previous definition can be understood as follows: to each $x \in X$, we associate to it an abelian group $\mathcal{F}_x$. To do this, we take a kind of limit over all of those $\mathcal{F}(U)$ associated with each open neighborhood U of x, gradually making them smaller. Thus, the stalks encode information about how the sheaf $\mathcal{F}$ behaves locally.

Example 1.20. Take $X = \mathbb{C}$ and $\mathcal{O}_X$ the sheaf of holomorphic functions defined similarly to the example 1.5. Take $x \in X$, if f, g are holomorphic functions such that are equal on a neighbourhood of x, since both of them can be written as a convergent series (Taylor's expression on x) then $f = g$ there. Hence $O_{X,x}$ can be identified with the ring of power series convergent in a neighborhood of x.

This is a particular behaviour of holomorphic functions. In general it is not easy to give such an easy intuition of the stalks. Given a sheaf on a topological space X and $x \in X$, one has, for each neighborhood U of x, a natural map sending a section $s \in U$ to the class on the stalk where it belongs. This classes are called **germs** and are denoted as s_x.

Definition 1.21. *Given a map of presheaves $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ for any $x \in X$ there is an induced map between the stalks $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ defined by sending the class of (s, U) to the class of $(\phi_U(s), U)$. This is named the **map of stalks**.*

Remark 1.22. As ϕ is compatible with the restriction maps, since it is a map of presheaves, the following diagram commutes for any pair $V \subseteq U$ open subsets. Hence, ϕ_x is well defined.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\rho_{UV}"] & & \mathcal{G}(U) \arrow[dr] \arrow[dd, "\rho_{UV}"] & \\
& \mathcal{F}_x \arrow[rr] & & \mathcal{G}_x \\
\mathcal{F}(V) \arrow[rr, "\phi_V"] \arrow[ur] & & \mathcal{G}(V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

1.4 Kernels and images

In this section we will work on abelian sheaves (ie: sheaves of abelian groups).

Definition 1.23. *Given a morphism $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ of sheaves the **kernel** of ϕ, denoted by* $\operatorname{Ker}\phi$ *is the subsheaf of $\mathcal{F}$ defined as follows:*

$$\operatorname{Ker}\phi(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) : \phi_U(s) = 0\}.$$

Proposition 1.24. *Given a morphism $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ of sheaves for any $x \in X$ forming stalks commutes with the kernel,* $(\operatorname{Ker}\phi)_x = \operatorname{Ker}\phi_x$.

Proof. Take s a section of $\mathcal{F}$ over an open neighbourhood of x such that locally lies in $\operatorname{Ker}\phi$, that is that exists $V \subseteq U$ containing x such that $\phi(s_{|V}) = 0$ that is that s_x lies in $\operatorname{Ker}\phi_x$. That proves $(\operatorname{Ker}\phi)_x \subseteq \operatorname{Ker}\phi_x$.

For the other inclusion, take $s_x \in \operatorname{Ker}\phi_x \subseteq \mathcal{F}_x$. By definition, $\phi_x(s_x) = 0$ in $\mathcal{G}_x$, so $\exists U$ an open neighbourhood of x and $s \in \mathcal{F}(U)$ such that $s_x = s_{|U}$, so $(\phi(s))_x = \phi_x(s_x) = 0$. Therefore, there exists V an open subset containing x such that $\phi(s)_{|V} = 0$, and for ϕ being a morphism of sheaves $0 = \phi(s)_{|V} = \phi(s_{|V})$. Hence, $s_{|V} \in \operatorname{Ker}\phi_{|V}$, so $s_x = (s_{|V})_x \in (\operatorname{Ker}\phi)_x$. □

Definition 1.25. *Given a morphism $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ of sheaves the **image** of ϕ, denoted by* $\operatorname{Im}\phi$ *is the subsheaf of $\mathcal{G}$ defined as the sheafification of the subpresheaf of $\mathcal{G}$ defined as follows:*

$$\operatorname{Im}\phi(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) : s \in \operatorname{Im}\phi_U\}$$

Proposition 1.26. *Given a morphism $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ of sheaves for any $x \in X$ forming stalks commutes with the image,* $(\operatorname{Im}\phi)_x = \operatorname{Im}\phi_x$.

Proof. Take t a section of $\mathcal{G}$ over an open neighbourhood of x such that locally lies in $\operatorname{Im}\phi$ as a presheaf, that is that there exists $V \subseteq U$ containing x such that $t_{|V} \in \operatorname{Im}\phi_{|V}$, hence, $t_x \in \operatorname{Im}\phi_x$ as it is known that the stalks are preserved by sheafification.

Take $t_x \in \operatorname{Im}\phi_x$, by definition there exists $s_x \in \mathcal{F}_x$ such that $\phi_x(s_x) = t_x$. So we can take U an open neighbourhood of x such that $\phi_{|U}(s) = t$. Using the commutativity of the diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\phi_x"] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

$\phi(s)_x = \phi_s(s_x) = t_x \in (\operatorname{Im}\phi)_x$, using again that the stalks are preserved by sheafifications we get the remaining inclusion.

□

Definition 1.27. *A morphism of sheaves $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ is said to be* ***injective*** *if* $\operatorname{Ker}\phi = 0$ *and is said to be* ***surjective*** *if* $\operatorname{Im}\phi = \mathcal{G}$.

Remark 1.28. From 1.24 and 1.26 one has that checking the injectivity and surjectivity of a map ϕ of sheaves is equivalent to checking it for ϕ_x for every $x \in X$.

It is important to notice that the injectivity of ϕ is also equivalent to ϕ_U being injective for all U open sets, this is a direct consequence of the definition of $\operatorname{Ker}\phi$. However it is not true that the surjectivity of ϕ implies all of those ϕ_U to be surjective. Let us give an example.

Take $X = \mathbb{C}^*$ and the sheaves $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ defined on U open subset to be

$$\mathcal{F}(U) = \{\text{holomorphic functions on } U\}(\text{as an additive group})$$

$$\mathcal{G}(U) = \{\text{non-zero holomorphic functions on } U\}(\text{as a multiplicative group})$$

Take the morphism of sheaves ϕ that maps $f \in \mathcal{F}(U)$ to $\phi(f) = \exp 2\pi i f \in \mathcal{G}(U)$. Notice that $\phi(\mathbb{C}^*)$ is not surjective since the function $z \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^*)$ is not image of any function, is well-known that $\log(z)$ is not an holomorphic function in $\mathbb{C}^*$. However, ϕ is surjective, indeed locally there exists a branch of logarithm so ϕ_x is surjective for all $x \in \mathbb{C}^*$ and this is equivalent to ϕ being surjective.

Definition 1.29. *Given two sheaves $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ such that $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ we can define the quotient presheaf as follows:*

1. *For U open set $(\mathcal{F}/\mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$.*

2. *The restriction maps are those induced by the passing to the quotients $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ since the restriction maps of both $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ preserves the inclusions $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$.*

We define the ***quotient sheaf*** *$\mathcal{F}/\mathcal{G}$ to be the sheafification of the previous presheaf.*

Chapter 2

Cohomology

2.1 Exact sequences

Definition 2.1. *Let $\mathcal{C}$ be an abelian category*[1]*. A* ***exact sequence*** *, of objects of the category, is a collection $\{f_i\}_i$, with $f_i \in Hom_{\mathcal{C}}(A_i, A_{i+1})$, $A_i \in Ob(\mathcal{C})$, such that, $\forall i$, one has,* $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$.

A special case of exact sequences is when one has a sequence of this type

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

This are called **short exact sequence**. Notice that asking this sequence to be exact is asking for:

- $\operatorname{Ker} f = 0$, this is f to be injective.
- $\operatorname{Im} g = A''$, this is g to be surjective.

2.2 Motivational example of cohomology

One of the main problems one has when working with sheaves is the fact that a surjective morphism of sheaves may not preserve its surjectivity when taking global sections. That is, when one has a short exact sequence of sheaves

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0 \tag{2.2}$$

when taking the global section functor (ie: $\Gamma(X, -) : Sh(X) \to Ab$ defined as $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$), one obtains:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \tag{2.3}$$

[1]One can think an abelian category is a category in which make sense talking about kernels, images, cokernels,...

In general we lose the exactness on the right. An example of this behaviour is given in 1.28.

In this chapter we will introduce a first steps in sheaves cohomology. This is defining a family of additive functors

$$\begin{array}{rccc} H^p(X,-): & Sh(X) & \longrightarrow & Ab \\ & \mathcal{F} & \mapsto & H^p(X,\mathcal{F}) \end{array}$$

with the following properties:

1. $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$
2. Functoriality: for any map of sheaves $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, and for any $p \geq 0$, the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "H^p(X,-)"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "H^p(X,-)"] \\ H^p(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^p"'] & H^p(X,\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

3. There are connection morphisms: for any short exact sequence of sheaves as 2.2, there is a family of morphisms $\{\delta^p : H^p(X,\mathcal{F}'') \to H^{p+1}(X,\mathcal{F}')\}_{p\geq 0}$, named **connection morphisms**, such that we have a long exact sequence that extends 2.3:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}'') \arrow[dll, "\delta^0"'] \\ & H^1(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}'') \arrow[dll, "\delta^1"'] \\ & H^2(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{F}'') \arrow[r] & \dots \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Cohomology groups will control the behaviour of $\mathcal{F}$ while being an important family of geometric invariants.

2.3 First definitions in cohomology

We are going to give all the definitions in the category of abelian groups, in order to make definitions more approachable, but the same definitions can be rewritten with values in an abelian category $\mathcal{C}$, by replacing, in the definition above, abelian groups for elements of $Ob(\mathcal{C})$, and morphism of abelian groups for an element of $Hom(X,Y)$ with $X,Y \in Ob(\mathcal{C})$.

Definition 2.2. *A **complex of abelian groups** is a collection $\{A_i\}_{i\geq 0}$ of abelian groups, together with a collection of abelian groups morphisms $\{d^i : A_i \longrightarrow A_{i+1}\}_{i\geq 0}$, such that, $d^i \circ d^{i+1} = 0$ for every $i \geq 0$. It is written as $(A^\bullet, d^\bullet)$.*

$$\dots \xrightarrow{d^{i-1}} A_i \xrightarrow{d^i} A_{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A_{i+2} \xrightarrow{d^{i+2}} \dots \tag{2.5}$$

Definition 2.3. *Given two complex of abelian groups $(A^\bullet, d^\bullet)$, $(B^\bullet, d'^\bullet)$, a **morphism of complex** is a collection of abelian groups morphisms $f^\bullet = \{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i\geq 0}$, such that, for every $i \geq 0$ the following commutes:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d^{i-1}"] & A_i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_{i+2} \arrow[r, "d^{i+2}"] \arrow[d, "f_{i+2}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d^{i-1}"] & B_i \arrow[r, "d^i"] & B_{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & B_{i+2} \arrow[r, "d^{i+2}"] & \dots
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Definition 2.4. *Let $(A^\bullet, d^\bullet)$ be a complex of abelian groups. For each $i \geq 0$ we define the following subgroups of A_i:*

- *(Cocycles) $Z^i(A^\bullet, d^\bullet) := \operatorname{Ker} d^i$. Its elements are named **cocycles**.*
- *(Coboundaries) $B^i(A^\bullet, d^\bullet) = \operatorname{Im} d^{i-1}$. Its elements are named **coboundaries**.*

Now, since $d^i \circ d^{i+1} = 0$ we have that $B^i \subseteq Z^i$. Hence, the following is well defined.

Definition 2.5. *Let $(A^\bullet, d^\bullet)$ be a complex of abelian groups. **The i-th cohomology group** of the complex is:*

$$H^i(A^\bullet, d^\bullet) := {Z^i(A^\bullet, d^\bullet)}\Big/{B^i(A^\bullet, d^\bullet)} = {\operatorname{Ker} d^i}\Big/{\operatorname{Im} d^{i-1}}$$

One can think that cohomology groups control the failure of the sequence of the complex to be exact at each step. Indeed, the sequence is exact at the step i if, and only if, $H^i(A^\bullet, d^\bullet) = 0$.

Proposition 2.6. *Given three complex of abelian groups $(A^\bullet, d'^\bullet)$, $(B^\bullet, d^\bullet)$, $(C^\bullet, d''^\bullet)$, and a short exact sequence[2],*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0$$

[2]This is the short sequence for i being exact for each i.

there is a long exact sequence induced in the cohomology groups,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(A^\bullet, d'^\bullet) \arrow[r] & H^0(B^\bullet, d^\bullet) \arrow[r] & H^0(C^\bullet, d''^\bullet) \arrow[dll, "\delta^0"'] & \\ & H^1(A^\bullet, d'^\bullet) \arrow[r] & H^1(B^\bullet, d^\bullet) \arrow[r] & H^1(C^\bullet, d''^\bullet) \arrow[dll, "\delta^1"'] & \\ & H^2(A^\bullet, d'^\bullet) \arrow[r] & H^2(B^\bullet, d^\bullet) \arrow[r] & H^2(C^\bullet, d''^\bullet) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Bibliography

[1] A. Hatcher, *Alegbaric topology*, Cambridge University Press (2002)

[2] G. Ellingsrud and J. Christian Ottem, *Introduction to schemes*, University of Oslo.

[3] V. Navarro, *Topologia Algebraica*, Universitat de Barcelona (1999).