Documentació del grup de lectura sobre representació de grups finits

Diversos alumnes i exalumnes dels graus de matemàtiques i física de la UB i de la UNED

Curs 2024-2025

Semestre de tardor

Aquesta compilació conté els documents corresponents al grup de lectura sobre representació de grups finits,[1] realitzat a la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, durant el semestre de tardor del curs 2024-2025.

Organitzadors:	Abel Salinas Sellas i Carlos Fernández Lorán.
Participants:	Abel Salinas Sellas, Ada Costa López, Berta Homs Bastardas, Carlos Fernández Lorán, Dídac Díaz Funes, Fabián León López, Gael Suñé Ponngiluppi, Gerard Seguí Planes, Isabel Desirée Eriksson, Ivan Cuartero Pérez, Javier Rozalén Sarmiento, Jofre Dolcet Fernandez, Jordi Cardiel Bonilla, Júlia Vilageliu Giró, Marc Piquer i Méndez, Marta Lora Bonastre, Martí Batista Obiols, Miquel Barnadas Bargalló, Miquel Martínez Gavagnin-Capoggiani, Pol Mas-Griera i Ruiz, Teresa Ferrer de Noguera i Varg Brangwin Martín.

Resum

L'objectiu d'aquest grup de lectura és introduir els conceptes i resultats bàsics de la teoria de representació de grups finits. Després de les primeres definicions, es dóna resultats fonamentals com ara el lema de Schur i les condicions d'ortogonalitat de Schur; s'estudia el cas particular de la representació del grup simètric, així com la restricció i inducció de representacions. Com a colofó, es tracta el cas dels grups topològics compactes i s'hi introdueix els teoremes de dualitat, i es presenta les primeres idees de la representació de grups de Lie.

[1] Podeu contactar amb el grup al correu electrònic grupdelecturamatesub@gmail.com. També podeu trobar totes les memòries a linktr.ee/lectura_mates_ub.
Disseny del logotip: Yaiza Aguilar Carós.

2020 Mathematics Subject Classification: 20C99.

Índex

Introducció

Les representacions de grups descriuen els grups en termes de transformacions lineals d'espais vectorials; és a dir, són morfismes de grups del grup en qüestió en el grup lineal de cert espai vectorial.

Es tracta d'un camp de particular utilitat, ja que permet reduir problemes de teoria de grups a problemes d'àlgebra lineal. D'aquesta manera, té l'aplicació dins les matemàtiques de permetre estudiar els grups amb molta més profunditat. Fora de les matemàtiques, la teoria de representació de grups té aplicació a múltiples disciplines, com ara la física, la química i la criptografia.

Tot i que hi ha teories de representació per a grups generals, les que tenen ús més comú són les de representació de grups finits i les de representació de grups de Lie. La primera, més senzilla, és l'objecte d'estudi d'aquest seminari.

Context històric

La teoria de representació de grups finits va néixer gairebé simultàniament de la mà de tres matemàtics diferents, de manera independent: T. Molien i G. Frobenius van publicar-ne els seus primers articles a 1897 i W. Burnside ho va fer a 1898.[3] Tot sembla indicar que els dos primers ho van fer de manera completament independent, mentre que Burnside coneixia alguns resultats anteriors de Frobenius.[4] Tots tres articles presenten els mateixos resultats: que la representació regular d'un grup finit és completament reductible, que cada representació irreductible és equivalent a un dels components de la representació regular, que si una component irreductible té grau n apareix n cops a la representació regular i que el nombre de representacions irreductibles no equivalents és igual al nombre de classes del grup.

Ara, els mètodes que fan servir tots tres són ben diferents: Molien fa servir la teoria d'àlgebres, Frobenius fa servir la teoria dels caràcters d'un grup i Burnside fa servir la teoria de grups de Lie semisimples. Una exposició simplificada i unificada va ser donada per I. Schur al seu article *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*.[5] on ja publicava el seu famós lema i les seves relacions d'ortogonalitat. Ell mateix ja hi admet, però, que el lema ja era als articles de Burnside. Les relacions ja eren a l'article de Molien, però Schur les va generalitzar per a qualsevol cos base.

El cas particular del grup simètric va ser estudiat, inicialment, per A. Young en un seguit de vuit articles publicats entre 1900 i 1934, tots titulats *Quantitative Substitutional Analysis*.[6] En ells, s'introdueix el concepte de taula de caràcters

[3] Waerden, B. L. van der. *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* 1ª ed. Berlin: Springer-Verlag, 1985. Aquesta font és la que seguim per elaborar aquest resum històric.

[4] T. Hawkins. "Hypercomplex Numbers, Lie Groups, and the Creation of Group Representation Theory". *Arch. Hist. Exact Sci.* **8**: 243-287 (1972).

[5] I. Schur. "Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere". *Stzungsberichte Preuss. Akad. Berlin*: 406-432 (1905).

[6] A. Young. "Quantitative Substitutional Analysis". *Proc. London Math. Soc. (1)* **33**:

i es dóna un mètode per trobar les representacions irreductibles d'un grup, al cas particular del grup simètric.

Queda destacar les contribucions d'Emmy Noether, que va ser la primera a desenvolupar una teoria unificada de les àlgebres i de la representació de grups, al seu article *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*.[7]

Consideracions pràctiques

Aquest grup de lectura s'organitza des del semestre de primavera de 2023 a iniciativa d'en Roger Garrido Vilallave. La present edició, la quarta, s'ha dut a terme a la sala 1 de la biblioteca i a l'aula B7 de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Per tal d'assolir l'objectiu del grup, s'ha seguit liberalment apunts del professor Ieke Moerdijk.[8] S'ha estructurat el contingut en les xerrades que es pot veure a la taula següent.

	Data	Tema
1	3/X	Introducció i repàs d'àlgebra lineal
2	10/X	Definicions i primeres construccions
3	17/X	Representacions irreductibles. El lema de Schur
4	24/X	Caràcters. Relacions d'ortogonalitat de Schur
5	31/X	Conseqüències de les relacions d'ortogonalitat
6	14/XI	El grup simètric
7	21/XI	Restricció i inducció
8	28/XI	Categories i adjuncions
9	5/XII	Dualitat de Tannaka
10	12/XII	Introducció als grups de Lie
11	19/XII	Representació de grups de Lie

Taula 1: Calendari de l'activitat del grup. Totes les dates són a 2024.

97-146 (1900) i **34**: 361-397 (1902); *Proc. London Math. Soc. (2)* **28**: 255-292 (1928), **31**: 253-272 (1930), **31**: 272-288 (1930), **34**: 196-230 (1932), **36**: 36 (1933) i **37**: 441 (1934).

[7]E. Noether. "Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie". *Math. Annalen* **30**: 641-692 (1929).

[8]Moerdijk, I. *Representation of Finite Groups. Lecture Notes* (apunts de classe, Universitat de Nijmegen, 2015).

Representacions lineals de grups: per què les necessitem?

Javier Rozalén Sarmiento
Seminari del grau de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

03/10/2024

1 Definicions prèvies

Grup. Un grup $(G, \cdot)$ és una tupla formada per un conjunt G i una operació binària en G, $\cdot$, tals que:

- L'operació $\cdot$ és associativa: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- Element neutre: $\forall g \in G \exists e \in G$ t. q. $e \cdot g = g \cdot e = g$
- Element invers: $\forall g \in G \exists h \in G$ t. q. $g \cdot h = h \cdot g = e$

El fet que G sigui tancat sota el producte (o l'operació binària en qüestió) és el què, sovint, ens permet identificar certes estructures com a grups. Sovint s'utilitza l'abús de llenguatge d'anomenar grup al conjunt, deixant de banda el producte, i és també el què farem durant aquesta introducció.

Per caracteritzar totalment un grup podem fer servir la *taula de Cayley*. Per un grup d'ordre 3, és a dir, amb tres elements, la taula de Cayley seria:

	$\mathbf{g_1}$	$\mathbf{g_2}$	$\mathbf{g_3}$
$\mathbf{g_1}$	g_1	g_2	g_3
$\mathbf{g_2}$	g_2	g_2g_2	g_2g_3
$\mathbf{g_3}$	g_3	g_3g_2	g_3g_3

,

on podem identificar que g_1 és l'element neutre. Aquesta taula pren el nom del famós matemàtic Arthur Cayley (1821-1895).

1.1 Exemples de grups

Un grup comú és el de les aplicacions lineals d'$\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, anomenat $\mathrm{GL}(n)$. Es pot posar com:

$$\mathrm{GL}(n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f(a\vec{x} + b\vec{y}) = af(\vec{x}) + bf(\vec{y}),\, \exists f^{-1} \text{ t.q. } f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1 \right\},$$

on a i b són nombres reals. És fàcil comprovar que això és un grup amb la composició: la composició de dues funcions lineals, és, al seu torn, lineal. L'existència de l'invers està garantida per construcció, així com la de l'element neutre. La propietat associativa és immediata de comprovar.

Quan s'introdueix aquest grup, però, sovint és més comú fer-ho de la següent manera: en el cas $n = 2$:

$$\mathrm{GL}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ t.q. } ad - bc \neq 0 \right\} .$$

En efecte, se sol utilitzar matrius per *representar* aplicacions lineals per comoditat. D'aquesta manera, no només tenim una manera de descriure els elements d'un grup, sinó també de fer-los servir per actuar sobre altres objectes. Això és un exemple de representació d'un grup: hem associat una matriu (aplicació lineal) a cada element del grup, i aquesta matriu pot actuar sobre vectors amb components reals. És el que se'n diu una *representació lineal*.

Com a segon exemple d'aquest apartat tenim el *grup simètric*, S_n, també anomenat grup de permutacions d'n elements. En aquest cas, el mateix nom del grup ens indica com actua el grup sobre seqüències ordenades d'elements: donada una seqüència, actuar amb un element del grup ens retorna una permutació d'aquesta. En el cas $n = 2$, se sol posar:

$$S_n = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

En aquesta notació, en la fila superior de la matriu es posen els nombres d'1 a n en aquest ordre, representant la seqüència d'entrada, i en la fila inferior es posa la seqüència permutada per l'element en qüestió. Malgrat que això sigui notació matricial, això no és ben bé una representació del grup, ja que no ens serveix per actuar sobre vectors. Si volguéssim, per exemple, permutar les coordenades de vectors al pla, podríem emprar el mapa:

$$e \to D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, a \to D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Donat un vector d'$\mathbb{R}^2$, $\vec{x}$:

$$D(a)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} .$$

La relació o mapa entre els elements abstractes d'un grup i una forma matricial d'aquests se'n diu representació lineal del grup. A més, donats dos elements qualssevol del grup G, $g, h \in G$, s'ha de complir que:

$$D(g)D(h) = D(gh)$$

o en altres paraules, el mapa ha de preservar l'estructura de grup.

És important notar que les representacions no són úniques, ni la seva dimensió (el rang de les matrius) tampoc. Per exemple, pel cas de S_2 podríem haver escollit la representació unidimensional:

$$e \to D(e) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \, a \to D(a) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} ,$$

que es coneix com a *representació trivial*, i sempre és una elecció vàlida. Mantenint-nos en el cas unidimensional, una altra elecció seria:

$$e \to D(e) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \, a \to D(a) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} .$$

És fàcil comprovar que aquestes dues eleccions són bones representacions. De la darrera representació se'n sol dir *alternant*, i es pot fer servir per explotar la simetria de reflexió d'algunes funcions de variable escalar. Es deixa com a exercici pensar si existeixen representacions de dimensió 3 o més gran d'S_2, i quin sentit podria tenir utilitzar-les.

2 Necessitat de representacions: rotacions al pla

En aquesta secció curta donem un darrer exemple de representació que s'alinea de manera més clara amb una necessitat real: rotar vectors al pla. Si bé els exemples anteriors serveixen per entendre el concepte de representació, sense veure res més es podria pensar que es tracta d'un exercici matemàtic sense gaire utilitat pràctica. Ara veurem un cas familiar que es fa difícil resoldre sense recórrer a les representacions.

Sigui $\vec{x}$ un vector amb dues components reals. Volem rotar aquest vector per un angle θ. Les rotacions al pla formen un grup de dimensió infinita (ja que podem fer servir angles infinitesimals). Per girar vectors de dues components, la representació típica d'aquest grup fa servir les matrius especials (de determinant unitat) i ortogonals de rang 2, de l'anomenat grup SO(2). Si r_θ és una rotació d'angle θ, aleshores:

$$r_\theta \to R(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

que és la matriu de rotació "de tota la vida", que possiblement hem estat utilitzant fins ara sense conèixer la seva relació amb la teoria de grups. Ara bé, si penséssim les dues components del vector com les components d'un nombre complex, i empréssim la representació polar dels complexos, $re^{i\varphi}$, de seguida veiem que per girar aquest nombre necessitem una representació unidimensional. En aquest cas, podríem fer servir:

$$r_\theta \to (e^{i\theta}) ,$$

que és una representació radicalment diferent. Amb això veiem que la representació d'un grup depèn en gran manera de l'espai vectorial en què vulguem fer actuar les nostres matrius.

3 Aplicacions

La teoria de representació de grups és l'eina d'estudi per defecte de moltes disciplines. De fet, molts dels conjunts d'objectes que s'utilitzen de manera diària en enginyeria, física, computació, etcètera, tenen estructura de grup. En aquests casos, tenir una manera de fer actuar aquests objectes sobre elements d'un espai vectorial, és essencial per poder fer càlculs. En aquesta secció comentem tres disciplines en què la representació de grups juga un paper principal.

3.1 Intel·ligència artificial

L'exemple per excel·lència en aquest camp ho és per la seva rellevància històrica: es tracta de les xarxes neuronals convolucionals (*Convolutional Neural Networks* o *CNNs* en anglès). Aquestes xarxes existeixen des de l'any 1998, però es van tornar especialment rellevants a partir del 2012, amb l'aparició de la xarxa *AlexNet.* Per primera vegada, existia un model computacional capaç de classificar imatges segons el seu contingut gràfic amb un percentatge relativament baix d'error, i computacionalment viable. En aquesta secció comentem breument sobre la importància dels grups en aquestes xarxes.

Una xarxa neuronal és una funció parametritzada, $\phi_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que a més és un aproximador universal de funcions no lineals. "Entrenar" una xarxa neuronal perquè "aprengui" un cert patró consisteix en trobar el conjunt de paràmetres θ que optimitzi un funcional donat, generalment anomenat "funció cost" o "funció error". En el cas de xarxes destinades a la classificació d'imatges, l'entrenament sol consistir en l'optimització iterativa dels paràmetres mitjançant l'avaluació de la xarxa en diferents imatges. A cada iteració, es demana a la xarxa que, donada una imatge, assigni una probabilitat a cada possible resultat. Amb aquestes probabilitats es calcula la funció cost, que sol ser l'anomenada "cross entropy" o "entropia creuada", i s'utilitza aquesta informació per variar els paràmetres de la xarxa de manera òptima.

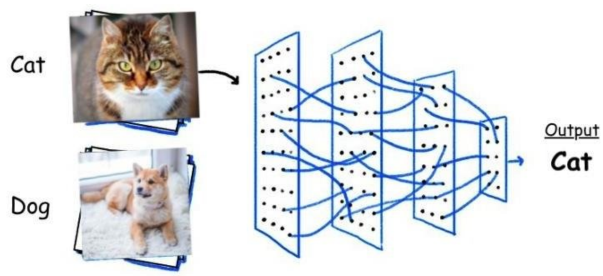


Figura 1: CNN emprada per classificar imatges d'animals.

Si bé una xarxa neuronal qualsevol ja pot, donat un nombre suficient de paràmetres, aprendre qualsevol patró, es pot optimitzar el disseny de les xarxes per tasques específiques. En el cas del processament d'imatge, hi ha condicions sobre l'aprenentatge que es coneixen de manera prèvia. Per exemple, si el que es vol és classificar animals, la predicció ha de ser independent del lloc de la imatge on l'animal es trobi. En altres paraules, la predicció hauria de ser *invariant sota translacions* o, en general, *covariant.* També podríem exigir que la predicció no canviés si la imatge es troba girada o rotada respecte a la seva posició "natural": la predicció hauria de ser invariant sota rotacions. El mateix podem dir de les reflexions envers un cert eix.

Aquí ja ens adonem que les reflexions, les translacions i les rotacions formen el grup de transformacions anomenat *grup Euclidià*, $\mathrm{E}(n)$ En general, podem construir les nostres xarxes neuronals perquè respectin les simetries de tot el grup $\mathrm{E}(n)$.

Les xarxes que se solen fer servir per reconeixement d'imatge són simplement covariants sota translacions. Per aconseguir això, cada capa de la xarxa, és a dir, cada transformació lineal que té lloc durant el càlcul de ϕ_θ, implementa l'operació de *convolució*, generalment en dues dimensions. Donades unes coordenades d'entrada (x_1, x_2) i el resultat procedent de la capa $l-1$, f_{l-1}, la convolució que té lloc a la capa l és:

$$\phi_l(f_{l-1})(x_1, x_2) = \sum_{u_1=1}^{w} \sum_{u_2=1}^{w} f_{l-1}(x_1 - u_1, x_2 - u_2)\chi_l(u_1, u_2)\,,$$

on χ_l és el "nucli" o *kernel* de la capa l, i w és la mida d'aquest kernel. És pot comprovar que, si ara transformem les coordenades (x_1, x_2) per una translació $\vec{t} = (t_1, t_2)$, la funció f_{l-1} variarà de manera similar.

Aquí, el grup en qüestió és el grup de translacions al pla, T(2). La convolució la podem pensar com una suma sobre tots els elements (u_1, u_2) del grup T(2), on a cada terme actuem amb $(u_1, u_2)^{-1}$ amb la representació o acció:

$$T_{(u_1,u_2)}(x_1, x_2) = (x_1 + u_1, x_2 + u_2)\,. \tag{1}$$

La convolució es pot generalitzar per admetre l'acció d'un grup G qualsevol (sota certes condicions), obtenint així l'anomenada "convolució de grup". En general, per un grup G, la convolució de dues funcions f, g sobre el grup s'expressa com:

$$(f * g)(u) = \sum_{v \in G} f(uv^{-1})g(v)\,.$$

Juntament amb la convolució generalitzada, l'existència del teorema de convolució ens suggereix que podem definir la *transformada de Fourier generalitzada*: si ρ_i és una representació de G (ha de ser *irreduïble*, veure els pròxims capítols), aleshores la transformada de Fourier d'una funció f sobre G és:

$$\hat{f}(\rho_i) = \sum_{u \in G} f(u)\rho_i(u)\,, \tag{2}$$

que es pot definir en el cas de grups continus mitjançant integrals. Això ens permet veure que, per exemple, la transformada de Fourier més típica,

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iwt} f(t)dt\,,$$

utilitza les representacions irreduïbles del grup dels reals (amb la suma), e^{-iwt}

3.2 Física

En física, les simetries són una eina imprescindible per identificar els patrons de la natura i, si es coneixen les simetries d'un sistema físic, les seves solucions sovint gaudeixen de certes propietats de transformació sota la simetria. En llenguatge matemàtic, les simetries d'un sistema físic són un grup de transformacions que deixen el sistema invariant. Per exemple, si tenim una pilota en una rampa amb perfil αx^2, el fet que la pilota comenci a la coordenada $x = a$ o a $x = -a$ és indiferent, i només correspon a una elecció del sentit de les coordenades.

Donarem l'exemple de la mecànica quàntica com a teoria que manifesta fortament aquest comportament. Suposem que ara la pilota de l'exemple anterior és una partícula amb propietats quàntiques, i com a tal, l'hem de descriure amb un objecte anomenat *funció d'ona*, $\psi(x)$. En mecànica quàntica, una partícula la podem trobar en diferents nivells d'energia, i en el nostre exemple aquests nivells no són continus, sinó discrets. La partícula amb el nivell més baix d'energia ve descrita per una funció $\psi_0(x)$; pel següent nivell més baix, necessitem $\psi_1(x)$; etcètera.

Donada la simetria del sistema, sabem que: $\psi_0(-x) = \psi_0(x)$, $\psi_1(-x) = -\psi_1(x)$, $\ldots$. Diem que, de manera alternada, les funcions d'ona són simètriques o antisimètriques sota la simetria de reflexió. El grup que representa la reflexió és el d'ordre 2, diguem $\mathbb{Z}/(2)$. Aquí, la teoria de representacions ens dona una eina per construir funcions amb la propietat de transformació sota $\mathbb{Z}/(2)$ desitjada. Donada una funció $\phi(x)$ qualsevol, podem fer:

$$\psi_0(x) = \phi(x) + \phi(-x)\,,$$
$$\psi_1(x) = \phi(x) - \phi(-x)\,.$$

El què hem fet aquí és utilitzar representacions 1-dimensionals per actuar sobre la coordenada de posició, x, i també sobre la funció $\phi(x)$. En el cas de $\psi_0(x)$, hem utilitzat la representació trivial, on tots els elements venen donats per (1), mentre que per $\psi_1(x)$ hem utilitzat l'alternada.

Estrictament parlant, el mateix coneixement de les simetries de les $\psi_n(x)$ ve donat per una anàlisi més profunda del sistema emprant teoria de grups. En general, si es coneix l'anomenat Hamiltonià del sistema, es pot emprar el lema de Schur per estudiar les propietats de transformació de les diferents $\psi_n(x)$.

3.3 Criptografia

L'últim exemple que donarem és del camp de la criptografia. Explicarem breument els codis de correcció d'errors, i comentarem l'aplicació més bàsica de teoria de grups per la construcció d'aquests codis.

En criptografia, quan es vol enviar un missatge a un receptor, sovint s'utilitza el codi binari per codificar el missatge. En altres paraules, el primer que es fa és transformar un missatge, posem, de text, en "uns i zeros". Com a exemple d'això tenim el codi ASCII, que utilitza 7 bits per codificar un total de 128 caràcters ($2^7 = 128$). Per exemple:

$$A = 65_{10} = 1000001_2\,,$$
$$B = 66_{10} = 1000010_2\,,$$

on els subíndexs denoten el sistema decimal (10) o binari (2). Malgrat això, en una comunicació real existeix un canal físic pel qual s'envien els missatges, i podríem esperar que les imperfeccions del canal introdueixin errors en el missatge. En el cas més simple, un error es manifesta com un bit girat. Com podem protegir-nos contra això? La protecció més simple contra errors d'un únic bit consisteix en emprar un bit extra i afegir-lo al principi del missatge:

$$A = 65_{10} = \mathbf{0}1000001_2\,,$$
$$B = 66_{10} = \mathbf{0}1000010_2\,.$$

Aquest bit s'anomena *bit de paritat*, i indica si el nombre d'uns és parell (0) o senar (1). Així, si un únic bit del missatge es veu afectat durant la transmissió, el receptor comprovarà que el valor del bit de paritat no es correspon amb la paritat del missatge (els 7 dígits restants).

Aquest és un cas extremadament simple, però en general es necessiten mètodes per construir tant codis, com sistemes de correcció d'errors en múltiples bits. Sense entrar en detalls, direm que l'estudi formal dels codis passa pel grup d'ordre 2, $\mathbb{Z}/(2)$, o en general, $(\mathbb{Z}/(2))^n$, on n és el nombre de bits. Quan girem un o més bits d'un codi, podem pensar que estem actuant amb un element d'aquest grup. Aquest pas formal va facilitar la creació de codis eficients que encara es fan servir avui en dia.

Àlgebra lineal per a representació de grups finits

Jofre Dolcet

Setembre 2024

1 Espais vectorials i homomorfismes

És donen per sabudes les proposicions estàndards sobre espais vectorials com què són, la existència de base, la definició de dimensió...

En general, pot ser que no s'especifiqui que V i W són espais vectorials, que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ és base de V i $(f_1, ..., f_m)$ de W,...

Definició 1.1. *Un conjunt de vectors $S = \{v_i\}_{i \in I}$ és linealment independent si qualsevol combinació lineal finita d'aquests vectors és igual al vector nul únicament quan tots els coeficients de la combinació són zero.*

Exemple 1. *Prenem en l'espai $C([0,1])$ el conjunt $S = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$*

Tot i haver donat una definició general per la independència, a partir d'ara suposem dimensió finita.

Definició 1.2. *Als morfismes entre espais vectorials els diem aplicacions lineals i com pot ser evident son homomorfismes que conserven les dues operacions dels espais. És a dir, sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial*

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $a, b \in E$
- $f(\lambda a) = \lambda f(a)$, $\lambda \in \mathbb{K}, a \in E$

Aquests morfismes estan unívocament determinats per la imatge de la base i a cada base se li associa una matriu que representa el morfisme.

Proposició 1. *L'espai d'homomorfismes entre dos espais vectorials V, W és un $\mathbb{K}$-espai vectorial (és denota per $Hom(V, W)$)*

Les aplicacions lineals, com hem dit es poden veure com matrius, per tant si la dimensió de V és n i la de W és m. Té sentit pensar que la base de $Hom(V, W)$ està formada per les aplicacions que tenen per matrius associades les matrius $n \times m$ de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ És a dir, les aplicacions

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{i,j} : V & \longrightarrow & W \\ e_k \in \{\text{base de } V\} & \mapsto & \begin{cases} f_j \in \{\text{base de } W\}, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \end{array}$$

2 Suma directa

Definició 2.1. *L'espai $V \oplus W$ és l'espai que té com a vectors els vectors $(v,w), v \in V, w \in W$. La suma és la suma component a component i el producte per escalar també.*

Exemple 2. $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *(com a espais vectorials)*

Proposició 2. $dim(V \oplus W) = dim(V) + dim(W)$

Observació: V i W són subespais de $V \oplus W$ en suma directa com l'hem vist a AL.

Definició 2.2. *Sigui $\phi : V \longrightarrow V'$ i $\psi : W \longrightarrow W'$. La suma directa de dos aplicacions lineals $\phi \oplus \psi$ és defineix:*

$$\begin{aligned} \phi \oplus \psi : V \oplus W &\longrightarrow V' \oplus W' \\ (v,w) &\mapsto (\phi(v), \psi(w)) \end{aligned}$$

Proposició 3.
- $Hom(U \oplus V, W) = Hom(U,W) \oplus Hom(V,W)$
- $Hom(U, V \oplus W) = Hom(U,V) \oplus Hom(U,W)$

3 Producte escalar

Definició 3.1. *Un producte escalar és una aplicació*

$$\begin{aligned} <\cdot,\cdot>: V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v,w) &\mapsto <v,w> \end{aligned}$$

Que és:

1. *Definida positiva*
2. *Bilineal*
3. $<v,w> = \overline{<w,v>}$

Definició 3.2. *Una base ortonormal d'un espai amb producte escalar és una base $(e_1, ..., e_n)$ que compleix:*

1. $<e_i, e_i> = 1, \forall i$
2. $<e_i, e_j> = 0, \forall i,j : i \neq j$

Proposició 4. *Un conjunt de vectors $(e_i, ..., e_n)$ forma una base ortonormal si i només si compleix:*

1. *Si* $<v, e_i> \forall i$, $v = 0$
2. $<e_i, e_i> = 1, \forall i$
3. $<e_i, e_j> = 0, \forall i,j : i \neq j$

Proposició 5. *Siguin V, W espais vectorials, $(e_1, ..., e_n), (f_1, ..., f_m)$ les seves bases i $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicació lineal. Llavors són equivalents:*

1. $\phi = \psi$
2. $<w, \phi(v)> = <w, \psi(v)>, \forall w, v$

3. $< f_j, \phi(e_i) >=< f_j, \psi(e_i) >, \forall i, j$

Proposició 6. $\forall \phi : V \longrightarrow W\ \exists! \psi : W \longrightarrow V\ :\ < v, \psi(w) >=< \phi(v), w > \forall v, w$

Definició 3.3. *ψde la proposició anterior es denota per ϕ^T i s'anomena l'adjunt hamiltonià.*

4 Producte tensorial

Nota: El producte tensorial també és pot definir per a A-mòduls però no és amb el que estem treballant. Per tant, alguna definició o hipòtesi pot no ser aplicable en el cas de A-mòduls.

És un concepte abstracte què en un principi sembla no tindre gaire sentit però ajuda a veure la relació entre tots els objectes de l'àlgebra. (Per exemple, més endavant podrem veure que un producte escalar és un element d'un espai vectorial i que la seva matriu de Gram són les coordenades del producte escalar en una certa base de l'espai al que pertany).

4.1 Què és el producte tensorial?

Definició 4.1. *El producte tensorial de V i W ($V \otimes W$) és l'espai vectorial que té com a base els elements de la forma $e_i \otimes f_j$.*

S'estipula que els elements de $V \otimes W$ compleixen:

- $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$
- $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$
- $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$

Després d'aquesta definició és lògic pensar quina forma tenen els elements aquests, com es sumen, ...

Quina forma tenen? Molts cops ens és igual això però si volguéssim donar alguna forma podríem pensar que la dimensió de $V \otimes W$ és $n \cdot m$ i, per tant, els elements tindran coordenades com un vector de nm components.

Exemple 3. *Prenem $V = \mathbb{R}^2$ i $W = \mathbb{R}^3$. Volem veure quina forma té, per exemple,* $(1, 1) \otimes (2, 0, 0)$. *Aplicant les propietats i la definició:*

$$(1, 1) \otimes (2, 0, 0) = ((1, 0) + (0, 1)) \otimes (2 \cdot (1, 0, 0)) = 2 \cdot ((1, 0) \otimes (1, 0, 0)) + 2 \cdot ((0, 1) \otimes (1, 0, 0))$$

prenent com a base $((1, 0) \otimes (1, 0, 0), (1, 0) \otimes (0, 1, 0), (1, 0) \otimes (0, 0, 1), (0, 1) \otimes (1, 0, 0), (0, 1) \otimes (0, 1, 0), (0, 1) \otimes (0, 0, 1))$,

$$(1, 1) \otimes (2, 0, 0) = (2, 0, 0, 2, 0, 0)$$

Quina suma té associada l'espai $V \otimes W$? Aquesta informació no es dona en la definició ja que es dedueix de les propietats. Usant les dues primeres propietats podem descompondre cada element en elements de la base i agrupar els comuns.

4.2 Propietat universal

Una propietat universal és una manera de caracteritzar un objecte (llevat d'isomorfisme) independent a les seves construccions.

Definició 4.2. *El producte tensorial de V i W és un espai vectorial T amb una operació bilineal $\otimes : V \times W \to T$ tal que $\forall$ aplicació bilineal $B : V \times W \to Z$ $\exists! L : T \to Z$ lineal que satisfà $B(v, w) = L(v \otimes w)$*

Es pot comprovar que aquest espai T amb l'operació és únic llevat d'isomorfisme.

4.3 Proposicions i exemples

Comencem amb un exemple per veure de que tracta tot això:

Exemple 4. *Si considerem un producte escalar qualsevol $P : V \times W \to \mathbb{R}$, per la propietat universal, existeix un morfisme lineal $L : V \otimes W \to \mathbb{R}$. Per tant, $L \in (V \otimes W)^*$. És a dir, ara podem veure els productes escalars com a elements d'un espai vectorial.*

Proposició 7. *Donats $\mathbb{K} -$ espais U, V i W:*

1. $U \otimes V \cong V \otimes U$
2. $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$
3. $\mathbb{K} \otimes U \cong U \otimes \mathbb{K} \cong U$
4. $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$
5. $Hom(U \otimes V, W) \cong Hom(U, Hom(V, W))$
6. $Hom(U, V) \cong U^* \otimes V$

Nota/Idea de demostració: Normalment les demostracions passen per la propietat universal i per la correspondència que hi ha entre aplicacions bilineals i lineals.

Demostració. Donaré una idea de demostració de 6 construint el morfisme

$$\begin{array}{rcl} \alpha : U^* \oplus V & \longrightarrow & Hom(U, V) \\ (\phi, v) & \mapsto & \begin{array}{rcl} \alpha_{\phi,v} : U & \longrightarrow & V \\ u & \mapsto & \phi(u) \cdot v \end{array} \end{array}$$

♡

Definició 4.3. *Sigui $\phi : V \longrightarrow V'$ i $\psi : W \longrightarrow W'$. El producte tensorial de dos aplicacions lineals $\phi \otimes \psi$ és defineix:*

$$\begin{array}{rcl} \phi \otimes \psi : V \otimes W & \longrightarrow & V' \otimes W' \\ v \otimes w & \mapsto & \phi(v) \otimes \psi(w) \end{array}$$

Proposició 8. *Donades les matrius de dues aplicacions lineals la matriu de l'aplicació producte tensorial de les dues és el Producte de Kronecker de les matrius. i.e.*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' & ba' & bb' \\ ac' & ad' & bc' & bd' \\ ca' & cb' & da' & db' \\ cc' & cd' & dc' & dd' \end{pmatrix}$$

PRIMERES DEFINICIONS, EXEMPLES I CONSTRUCCIONS

Martí Batista i Obiols

Resum

La Representació de grups finits és una branca de les matemàtiques que busca estudiar grups mitjançant l'anàlisi de les possibles formes en què actua sobre espais vectorials. Com que els espais vectorials i els seus morfismes són objectes ben coneguts, aquesta metodologia pot simplificar-ne l'estudi. En aquesta sessió introduirem les definicions bàsiques i en posarem exemples, a més de veure també algunes primeres construccions.

1. Definició de Representació

Definició 1.1. Una **representació** d'un grup G és un morfisme de grups $\rho : G \to GL(V)$, on V és un espai vectorial. Anomenarem **grau de** ρ la dimensió de V. Usualment usarem la notació $\rho_g : V \to V$, per $g \in G$.

Observació. Per simplificar notació, escriurem que (V, ρ) és una representació de G en lloc de $\rho : G \to GL(V)$. Molts cops escriurem tan sols V.

Els grups rarament apareixen de forma abstracta a la naturalesa matemàtica, usualment apareixen en forma de representació. Vegem-ne alguns exemples:

Exemple 1.2. Ara veurem com, en ocasions, l'estudi d'una representació particular d'un grup ens pot donar informació sobre el grup en abstracte. Prenem $n \in \mathbb{N}$, i el grup simètric S_n. Prenem la representació $(\mathbb{C}^n, \rho)$ on ρ_σ és la matriu de permutació associada, $\forall \sigma \in S_n$ (fàcilment es comprova que ρ és homomorfisme). Volem demostrar que la signatura d'una permutació σ està ben definida.

Suposem que $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k = t_1t_2 \dots t_m$, on k és parell i m és senar. Aleshores, per ser ρ homomorfisme, $\rho_{\tau_1} \circ \rho_{\tau_2} \circ \cdots \circ \rho_{\tau_k} = \rho_{t_1} \circ \rho_{t_2} \circ \cdots \circ \rho_{t_m}$. En particular, per ser aplicacions lineals de $\mathbb{C}^n$, poden ser interpretades com a matrius $n \times n$, amb la qual cosa podem parlar dels seus determinants. Consegüentment:

$$\det(\rho_{\tau_1} \circ \rho_{\tau_2} \circ \cdots \circ \rho_{\tau_k}) = \det(\rho_{t_1} \circ \rho_{t_2} \circ \cdots \circ \rho_{t_m})$$

$$\det(\rho_{\tau_1})\det(\rho_{\tau_2})\dots\det(\rho_{\tau_k}) = \det(\rho_{t_1})\det(\rho_{t_2})\dots\det(\rho_{t_m})$$

$$(-1)^k = (-1)^m, \text{ però això és impossible.}$$

L'última igualtat és perquè les matrius de transposició tenen determinant -1.

Exemple 1.3. Prenem el grup $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Considerem la representació $(\mathbb{R}^2, \rho)$ definida per:

$$\rho_{[m]} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\sin(\frac{2\pi m}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi m}{n}) & \cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix}$$

En altres termes, interpretem $[m]$ com una rotació en el pla de $\frac{2\pi m}{n}$ radiants.

Exemple 1.4. Considerem el grup diedral D_n. Aquest grup està general pels elements s i r satisfent les relacions $r^n = e$, $s^2 = e$ i $rs = sr^{-1}$, on e és el neutre. La manera més natural de representar aquest grup és associar a s la simetria del pla i a r la rotació de $\frac{2\pi m}{n}$ radians, és a dir, la representació $(\mathbb{R}^2, \rho)$ on:

$$\rho_r = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\sin(\frac{2\pi m}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi m}{n}) & \cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix} \qquad \rho_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

No és immediat que això defineixi una representació, s'hauria de veure que se satisfan les identitats $(\rho_r)^n = Id, (\rho_s)^2 = Id$ i $\rho_r\rho_s = \rho_s\rho_r^{-1}$.

Exemple 1.5. Donat un grup G, la seva **representació trivial** és $(\mathbb{C}, \rho)$ on $\rho_g = Id_{\mathbb{C}}$, per a tot $g \in G$.

Exemple 1.6. Donat un grup G, la seva **representació regular** és $(\mathbb{C}[G], \rho)$ on $\mathbb{C}[G]$ és l'espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ de base $\{e_g : g \in G\}$ (un element qualsevol de l'espai és de la forma $\sum_{g\in G} \lambda_g e_g$, per determinats $\lambda_g \in \mathbb{C}$), i ρ és tal que:

$$\rho_h(\sum_{g\in G} \lambda_g e_g) = \sum_{g\in G} \lambda_g \rho_h(e_g) = \sum_{g\in G} \lambda_g e_{hg}$$

En aquesta sessió i les properes, a menys que s'indiqui el contrari, treballarem amb grups finits i espais vectorials de dimensió finita, usualment definits en $\mathbb{C}$.

2. Morfismes de Representacions

Quan es treballa amb estructures algebraiques les funcions que usualment són del nostre interès són aquelles que en respecten l'estructura (per grups, homomorfismes; per espais vectorials, aplicacions lineals...). Entenent les representacions com espais vectorials en què es té una estructura addicional donada per l'acció d'un grup (com bé suggereix la notació (V, ρ)), és natural la següent definició:

Definició 2.1. Un **morfisme de representacions**[1] d'un grup G entre (V, ρ) i (W, σ) és una aplicació lineal $\phi : V \to W$ satisfent que $\phi(\rho_g(v) = \sigma_g(\phi(v))$, per a tot $g \in G$ i tot $v \in V$. En cas de ser ϕ bijectiva, l'anomenarem **isomorfisme de representacions** o **equivalència**.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_g"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\phi"] \\ W \arrow[r, "\sigma_g"'] & W \end{tikzcd}$$

Observació. Fixat un grup G, les representacions de G i els morfismes entre elles defineixen una categoria, $\mathbf{Rep}_G$.

Exemple 2.2. Prenem el grup $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}^2, \rho)$ la representació donada per:

[1]El terme que apareix a [1] és *intertwiner*. M'ha semblat més adequat referir-m'hi com a *morfisme de representacions*.

$$\rho_{[m]} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\sin(\frac{2\pi m}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi m}{n}) & \cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix}$$

Prenem també la representació $(\mathbb{C}^2, \psi)$ donada per:

$$\psi_{[m]} = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi m i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi m i}{n}} \end{bmatrix}$$

Aquestes representacions són isomorfes, ja que prenent $T = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ per a tot $[m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, es té que $T^{-1}\rho_{[m]}T = \psi_{[m]}$, la qual cosa equival a la definició.

3. Suma Directa i Subrepresentacions

Definició 3.1. Sigui (V, ρ) una representació, i W subespai de V. Direm que W és **ρ-estable** si W és invariant per ρ_g, $\forall g \in G$. Observem que en tal cas (W, ψ), on $\psi_g = \rho_{g|W}$, és una representació de G, ja que $\psi_g \in GL(W)$ trivialment i $\psi_{gh} = \rho_{gh|W} = \rho_{g|W} \circ \rho_{h|W} = \psi_g \circ \psi_h$. Sota aquestes condicions, direm que (W, ψ) és una **subrepresentació de** ρ.

Veiem ara el concepte de *suma directa*, que serà fonamental més endavant:

Definició 3.2. Siguin (V, ρ) i (W, ψ) dues representacions d'un grup G. Definim la seva **suma directa** per $(V \oplus W, \rho \oplus \psi)$, on $V \oplus W$ és la suma directa d'espais vectorials i $\rho \oplus \psi$ es defineix per:

$$(\rho \oplus \psi)_g(v + w) = \rho_g(v) + \psi_g(w) \qquad \forall g \in G, \forall v \in V, \forall w \in W$$

Observació. Aquest concepte tindrà rellevància més endavant quan treballem les descomposicions de representacions com a suma directa de subrepresentacions *irreductibles*. Observem que si (V, ρ) és una representació de G i $U, W \subseteq V$ són subespais ρ-estables tals que $U \oplus W = V$, podem considerar les subrepresentacions $(\rho_{|U}, U)$ i $(\rho_{|W}, W)$, que satisfan que $\rho_{|U} \oplus \rho_{|W} = \rho$. Així, podem entendre que (V, ρ) descompon com a suma directa de $(\rho_{|U}, U)$ i $(\rho_{|W}, W)$

Observació. Siguin $(\mathbb{C}^n, \rho)$ i $(\mathbb{C}^m, \psi)$ dues representacions d'un grup G. Observem que $\forall g \in G$ podem interpretar ρ_g com una matriu $n \times n$ amb coeficients a $\mathbb{C}$, i similarment amb ψ_g en dimensió $m \times m$. Per clarificar que ens referim ara a la seva expressió matricial, fem servir la notació $[\rho_g]$ i $[\psi_g]$. Aleshores, tenim que $\rho \oplus \psi$ és una representació de grau $n + m$, i que ve donada per:

$$[(\rho \oplus \psi)_g] = \begin{bmatrix} [\rho_g] & 0 \\ 0 & [\psi_g] \end{bmatrix}$$

4. Altres Construccions

Definició 4.1. Siguin (V,ρ) i (W,ψ) dues representacions d'un grup G. Definim el seu **producte tensorial** per $(V\otimes W,\rho\otimes\psi)$, on $V\otimes W$ és el producte tensorial d'espais vectorials i $\rho\otimes\psi$ es defineix per:

$$(\rho\otimes\psi)_g(v\otimes w)=\rho_g(v)\otimes\psi_g(w)\qquad \forall g\in G,\forall v\in V,\forall w\in W$$

Observació. Utilitzant el Producte de Kronecker descrit a la proposició 8 del repàs d'Àlgebra Lineal de la sessió anterior, es pot donar també una interpretació matricial d'aquesta definició. No en posarem els detalls.

Definició 4.2. Donada una representació (V,ρ) d'un grup G, definim la seva **representació dual** (V^*,ρ^*) on V^* és el dual de V i ρ^* ve definida tal que $(\rho^*)_g=(\rho_{g^{-1}})^*$, la funció dual de $\rho_{g^{-1}}$. En efecte és una representació, ja que $(\rho^*)_{gh}=(\rho_{(gh)^{-1}})^*=(\rho_{h^{-1}g^{-1}})^*=(\rho_{h^{-1}}\rho_{g^{-1}})^*=(\rho_{g^{-1}})^*(\rho_{h^{-1}})^*=(\rho^*)_g(\rho^*)_h$.

Definició 4.3. Donades dues representacions (V,ρ) i (W,ψ) d'un grup G, podem induir una representació $(Hom(V,W),Hom(\rho,\psi))$, que anomenarem **representació de les aplicacions lineals** $V\to W$, on $Hom(\rho,\psi)_g(\varphi)=\psi_g\circ\varphi\circ\rho_{g^{-1}}$, per $\varphi:V\to W$ lineal.

Observació. Aquesta és una forma d'estudiar G mitjançant la seva acció sobre l'espai vectorial d'aplicacions $V\to W$, partint de l'acció de G sobre V i W. En altres termes, demanem que el següent diagrama commuti per a tot $g\in G$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "Hom(\rho,\psi)_g"] \arrow[d, "\rho_{g^{-1}}"'] & W \\
V \arrow[r, "\varphi"'] & W \arrow[u, "\psi_g"']
\end{tikzcd}$$

Observació. Aquesta construcció és una generalització de la representació dual prèviament definida, ja que si prenem (W,ψ) la representació trivial (és a dir, $W=\mathbb{C}$ i $\psi(g)=1,\forall g\in G$) llavors $Hom(V,W)=V^*$ i $Hom(\rho,\psi)_g(\varphi)=\psi_g\circ\varphi\circ\rho_{g^{-1}}=1\circ\varphi\circ\rho_{g^{-1}}=\varphi\circ\rho_{g^{-1}}=(\rho_{g^{-1}})^*(\varphi)$, i per tant $Hom(\rho,\psi)_g=(\rho_{g^{-1}})^*$, per a tot $g\in G$. Notem que això coincideix amb la definició donada.

Observació. Donada una representació (V,ρ) d'un grup G i un homomorfisme $\varphi:H\to G$, amb H grup, tenim que $(V,\rho\circ\varphi)$ és una representació de H. El canvi pot ser també en l'espai vectorial, considerant $\psi:GL(V)\to GL(W)$ homomorfisme, i llavors $(W,\psi\circ\rho)$ és representació de G.

5. Referències

[1] *Representations of Finite Groups* (2015), I. Moerdijk

[2] *Linear Representations of Finite Groups* (1977), J.P. Serre

[3] *Representation Theory of Finite Groups* (2012), B. Steinberg

Representacions irreductibles i lema de Schur

Teresa Ferrer de Noguera

Octubre 2024

1 Representacions irreductibles

Trobar totes les representacions d'un grup finit pot ser una tasca força difícil. L'objectiu d'aquest capítol és veure que qualsevol representació es pot descompondre en representacions "atòmiques"respecte a la suma directa que faciliten aquesta feina.

Definició 1.1. Sigui (V, ρ) una representació del grup G. Un subespai $U \subset V$ es diu **invariant** si $g \cdot u \in U$ per tot $u \in U$ i per tot $g \in G$. Aleshores, la representació $(U, \rho_{|U})$ s'anomena **subrepresentació** de (V, ρ)

Definició 1.2. Una representació (V, ρ) no nul·la es diu **irreductible** si els seus únics espais invariants són 0 i V. Equivalentment, V és irreductible si no es pot escriure com la suma directa de dues subrepresentacions (excepte la trivial $0 \bigoplus V$).

Exemple 1.3. Considerem la representació de C_4 a $\mathbb{C}^2$ determinada per

$$\rho(r) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per veure si rho és irreductible, suposem que $U \subset \mathbb{C}^2$ és invariant i $0 \neq U \neq \mathbb{C}^2$. Aleshores U és necessàriament unidimensional. Sigui $u = (u_1, u_2)$ un vector generador. Com que U és invariant, tenim $\rho(r)(u) = \lambda u$ per algun $\lambda \in \mathbb{C}$. Això ens dona l'equació

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

En altres paraules, λ és un valor propi de la matriu, que pot ser $\lambda = \pm i$. El vector propi $(1, -i)$ pertanyent al valor propi i genera un subespai invariant, de manera que ρ no és irreductible.

Les representacions irreductibles compleixen els requisits per ser atòmiques de la manera en què ho hem definit (no contenen subrepresentacions no trivials) i cada representació és la suma directa d'irreductibles, més o menys de manera única. A continuació veurem la clau de tot això, però abans ens cal veure una tècnica força habitual en teoria de representacions que consisteix a calcular el terme mitjà d'un conjunt d'objectes [1].

Interludi: calcular el terme mitjà

- **Calcular el vector mitjà**. Sigui (V, ρ) una representació de G. Ja hem vist que els subespais que ens interessen de V són els invariants. De manera semblant, els vectors que ens interessen són els vectors invariants. Un vector $v \in V$ és **invariant** si $g \cdot v = v \forall g \in G$. Anomenarem el conjunt de vectors invariants V^G. Si $v \in V$ no és invariant, podem convertir-lo en un calculant-ne la mitjana. La definim com:

$$\mathrm{Av}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v$$

En efecte, el vector $\mathrm{Av}(v)$ és invariant ja que per qualsevol $h \in G$ tenim:

$$h \cdot \mathrm{Av}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \cdot (g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (hg) \cdot v = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' \cdot v = \mathrm{Av}(v)$$

Notem que per a la tercera igualtat reanomenem $hg = g'$, de manera que ens trobem de nou en el cas anterior i ens retorna el mateix vector. **Observació:** calcular el vector mitjà d'un vector invariant retorna el mateix vector. Per tant, calcular el vector mitjà es pot veure com una projecció Av: $V \to V^G$ sobre els vectors invariants.

- **Calcular l'aplicació lineal mitjana**. Siguin (V, ρ) i (W, σ) representacions de G, i sigui $\varphi : V \to W$ una aplicació lineal entre els respectius espais vectorials. Pot no ser un morfisme de representacions, però en podem obtenir un mitjançant el càlcul de l'aplicació lineal mitjana:

$$\mathrm{Av}(\varphi) : V \to W,\ \mathrm{Av}(\varphi)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \varphi(g^{-1} \cdot v)$$

Podem considerar això com un cas particular de calcular el vector mitjà, ja que podem considerar les aplicacions lineals entre V i W com a vectors en l'espai vectorial $\mathrm{Hom}(V, W)$. Aquest càlcul en vectors retorna un vector invariant, que en aquest cas equival a una aplicació lineal tal que $(g \cdot \varphi)(v) = \varphi(v)$ per tot $v \in V \iff g \cdot \varphi(g^{-1} \cdot v) = g^{-1} \cdot \varphi(v) \iff \varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$. És a dir, φ és un morfisme de representacions. Notem també que el càlcul de la mitjana d'un morfisme de representacions retorna el mateix morfisme de representacions.

[1] El terme original per descriure la tècnica és "averaging", que també es pot traduir com "prorratejar"per preservar l'estructura gramatical, però trobo que és un verb molt lleig.

Lema 1.4. Sigui (V, ρ) una representació de G, i sigui $U \subset V$ un subespai invariant. Aleshores existeix un subespai invariant $U' \subset V$ tal que $V = U \bigoplus U'$.

Demostració. Sigui $U \subset V$ complementari de $W \subset V$, i sigui $\pi_0 : V \to W$ la projecció donada per la descomposició en suma directa $V = W \bigoplus U$. Aleshores, calculant l'aplicació lineal mitjana sobre G:

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(\pi_0(g^{-1}v)$$

El seu nucli serà, llavors, un subespai de V invariant per G i complementari a W.

□

Teorema 1.5. Qualsevol representació és una suma directa de representacions irreductibles.

Demostració. Sigui (V, ρ) una representació. Pel lema anterior, si V no és irreductible, es pot escriure com $V = V_1 \bigoplus V_2$, on les dimensions de V_1 i V_2 són estrictament més petites que les de V. Iterant aquest procés acabem trobant una descomposició $V = U_1 \bigoplus \cdots \bigoplus U_n$ de manera que ja no es pot seguir iterant. En aquest cas, cada U_i és irreductible.

□

Notem que aquesta demostració només funciona per al cas d'espais vectorials finits. A aquesta propietat se l'anomena **reductibilitat completa** o **semisimplicitat**.

Observation. Aquesta propietat falla en casos concrets, com ara el cas en què l'espai vectorial V és sobre un cos de característica finita (es podria donar el cas que $\pi(v) = 0$ per $v \in W$). Això dona peu a l'anomenada *teoria de representacions modulars*, que presenta més obstacles a l'hora de treballar-hi.

2 Lema de Schur

A continuació veurem fins a quin punt una descomposició d'una representació arbitrària en suma directa d'irreductibles és única. És una de les conseqüències del següent lema:

Lema 2.1. Lema de Schur: Si V i W són representacions irreductibles de G i $\varphi : V \to W$ és un morfisme de representacions[2], aleshores:

1. O bé φ és un isomorfisme, o bé $\varphi = 0$.
2. Si $V = W$, aleshores $\varphi = \lambda \cdot Id$ per algun $\lambda \in \mathbb{C}$.

[2]Usant la terminologia del Martí per a ïntertwiner"

Demostració. 1. El nucli de φ és un subespai invariant de V, perquè si $\varphi(v) = 0$, aleshores $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v) = g \cdot 0 = 0$. Com que V és irreductible, $ker(\varphi)$ és 0 o V. Si $ker(\varphi)$ és 0, aleshores φ és l'aplicació nul·la i ja hem acabat. Si $ker(\varphi) = 0$, llavors φ és injectiva. La imatge és un subespai invariant de W, ja que si $w = \varphi(v)$, aleshores $g \cdot w = g \cdot \varphi(v) = \varphi(g \cdot v) \in im(\varphi)$. Per tant, $im(\varphi)$ és 0 o W. La imatge no pot ser zero, ja que φ és injectiva, de manera que $imm(\varphi) = W$ i φ és injectiva i exhaustiva; és a dir, una equivalència de representacions.

2. Sigui λ un valor propi de φ amb espai propi $U \subset V$. Aleshores U és invariant, ja que per tot $u \in U$ tenim $\varphi(g \cdot u) = g \cdot \varphi(u) = g \cdot \lambda u = \lambda g \cdot u$, de manera que $g \cdot u \in U$. Per tant,U és 0 o V. No pot ser 0 perquè els valors propis tenen associats un espai propi no nul. Per tant $U = V$, la qual cosa vol dir que $\varphi(v) = \lambda v$ per tot $v \in V$. Així doncs, φ és un múltiple escalar de la identitat.

□

Proposició 2.2. Totes les representacions irreductibles d'un grup abelià són unidimensionals.

Demostració. Sigui (V, ρ) una representació irreductible del grup abelià G. Per qualsevol $g \in G$ fixat, l'aplicació $\rho(g) : V \to V$ és un morfisme de representacions. Pel lema de Schur, $\rho(g) = \lambda_g$ per algun escalar. Triem un vector no nul $v \in V$. Prenem un element $\alpha \in \mathbb{C}v$, i obtenim $\rho(g)(\alpha v) = \lambda_g \alpha v \in \mathbb{C}v$. Per tant $\mathbb{C}v$ és invariant i no nul, de manera que és V. Però $\mathbb{C}v$ està generat per un únic vector $\implies V$ és unidimensional.

□

Exemple 2.3. Busquem totes les representacions irreductibles de C_4. Seran unidimensionals, de manera que tenim un homomorfisme $\rho : C_4 \to \mathbb{C}^X$. $r^4 = e \implies \rho$ ha de satisfer $\rho(r)^4 = 1$. Així doncs, $\rho(r)$ pot ser 1, i, -1 o $-i$. Totes són irreductibles.

Exemple 2.4. Això falla a $\mathbb{R}$; per exemple, C_3 té dues representacions irreductibles, una de les quals és de dimensió 2.

Lema 2.5. Per cada morfisme de representacions exhaustiu $p : (V, \rho) \to (W, \sigma$ existeix una secció [3] $s : (W, \sigma) \to (V, \rho)$ que també és un morfisme de representacions.

Proposició 2.6. Cada representació irreductible de G és equivalent a una subrepresentació de la representació regular $\mathbb{C}[G]$.

Demostració. Sigui V una representació irreductible de G. Considerem l'aplicació

[3] Traduït tal qual de "section"; vol dir s tal que $p \circ s = id$.

que envia g a $g \cdot v$, sent $v \in V$ no nul. Els elements de G formen una base de $\mathbb{C}[G]$, de manera que podem estendre l'aplicació de manera única a una aplicació lineal φ de $\mathbb{C}[G]$ a V amb

$$\varphi\left(\sum_g \lambda_g e_g\right) = \sum_g \lambda_g (g \cdot v)$$

. És fàcil comprovar que és un morfisme de representacions. La seva imatge és un subespai invariant de V (que és irreductible) i φ és no nul·la, de manera que també és exhaustiva. El lema anterior dona una secció $\phi : V \to \mathbb{C}[G]$ que és morfisme de representacions. Com que V és irreductible, ϕ és un isomorfisme sobre la seva imatge, que és una subrepresentació de la representació regular. $\square$

3 Referències

1. *Representations of Finite Groups* (2015), I. Moerdijk
2. *Representation Theory: A First Course* (1991), W. Fulton, J. Harris

Caràcters

Abel Salinas Sellas

Octubre de 2024

1 Propietats bàsiques

El nostre objectiu és classificar totes les representacions d'un grup donat, i per això hem de poder determinar si dues representacions són equivalents, trobar totes les representacions irreductibles i descomposar qualsevol representació en irreductibles. Podrem fer tot això estudiant les traces de les aplicacions lineals d'una representació.
Recordem que la traça d'una matriu quadrada A es defineix com la suma dels elements de la diagonal, $\operatorname{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. També es pot definir la traça d'una aplicació lineal $\varphi : V \to V$: si escollim una base de V, i A és la matriu de φ en aquesta base, definim $\operatorname{tr}(\varphi) := \operatorname{tr}(A)$. Aquesta definició és independent de la base triada: per qualsevols matrius quadrades A i B, es compleix $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (*propietat cíclica*), i per tant $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(BAB^{-1})$.

Definició 1.1. El *caràcter* d'una representació $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ és l'aplicació

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C} \qquad g \mapsto \operatorname{tr}(\rho(g))$$

Si ρ és coneguda, a vegades es denota χ_V.

La propietat cíclica de la traça assegura que els caràcters de representacions equivalents són iguals. En efecte, si (V, ρ) i (W, σ) són equivalents, existeix un morfisme invertible $\varphi : V \to W$, que satisfà $\varphi \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ \varphi$ o, equivalentment, $\sigma(g) = \varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1}$. L'objectiu d'aquesta sessió és desenvolupar les eines per demostrar el recíproc: si dues representacions tenen el mateix caràcter, aleshores són equivalents.
Abans, però, ens serà útil enunciar la següent proposició:

Proposició 1.2. *Siguin (V, ρ) i (W, σ) representacions de G.*

1. $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$
2. $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)$
3. $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
4. $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g)$

2 Relacions d'ortogonalitat de Schur

Diem que dos elements g i h d'un grup G són conjugats si existeix $a \in G$ tal que $h = aga^{-1}$. Quan això passa escrivim $g \sim h$. La relació $\sim$ és d'equivalència, i una classe d'aquesta relació s'anomena classe de conjugació. La classe de g s'escriu $(g) = \{h \in G \mid \text{existeix } a \text{ tal que } h = aga^{-1}\}$. El conjunt de classes de conjugació es denota per (G).

Definició 2.1. Una *funció de classe* en un grup G és una funció $\varphi : G \mapsto \mathbb{C}$ tal que $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g)$ per a tot $g, h \in G$.

Una funció de classe es pot pensar com una aplicació $\varphi : (G) \to \mathbb{C}$. Els caràcters en són un exemple. El conjunt de totes les funcions de classe en G formen un espai vectorial $Cl(G)$, amb les operacions definides puntualment. Definim un producte escalar en aquest espai vectorial:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g)$$

Totes les propietats importants dels caràcters es dedueixen del resultat següent.

Teorema 2.2. *Sigui G un grup finit. Els caràcters χ_V de les representacions irreductibles no equivalents V de G formen una base ortonormal de l'espai de funcions de classe $Cl(G)$.*

Separem la demostració del teorema en dues parts. Primer demostrarem que els caràcters χ_V són ortonormals, és a dir:

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = 0$$

quan V i W són irreductibles i no equivalents, i

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} |\chi_V(g)|^2 = 1$$

per a tota representació irreductible V. Les dues igualtats anteriors s'anomenen les *relacions d'ortogonalitat de Schur*. El segon pas serà demostrar que els χ_V generen l'espai $Cl(G)$. Per la demostració de les relacions d'ortogonalitat de Schur necessitem la següent proposició:

Proposició 2.3 (Fórmula de la dimensió)**.** *Per qualsevol representació (V, ρ) de G, la dimensió de l'espai de vectors invariants és*

$$\dim(V^G) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

.

Demostració. Considerem l'aplicació següent (*averaging map*):

$$\mathrm{Av} : V \to V, \quad v \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot v$$

És fàcil comprovar que la imatge per Av de qualsevol vector és invariant, i la de qualsevol vector invariant és ell mateix. Per tant, $\mathrm{Av}^2 = \mathrm{Av}$, que implica que els valors propis d'Av són 0 o 1. Si escollim una base en la qual la matriu d'Av és diagonal, només tindrà zeros i uns a la diagonal. La seva traça serà el nombre d'uns, que coincidirà amb la dimensió de la imatge: $\mathrm{tr}(\mathrm{Av}) = \dim(\mathrm{im}(\mathrm{Av})) = \dim(V^G)$. Finalment, tenim que $\mathrm{tr}(\mathrm{Av}) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$, d'on segueix el resultat. □

Corol·lari 2.4. *Siguin V i W representacions de G. La dimensió de l'espai de morfismes entre V i W és $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$.*

Demostració. Per les proposicions 1.2 i 2.3 tenim

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) \\ &= \dim(\mathrm{Hom}(V, W)^G) \end{aligned}$$

Els vectors invariants a $\mathrm{Hom}(V, W)$ són els morfismes de V a W, cosa que acaba la demostració. □

Ara, el lema de Schur ens diu que l'espai de morfismes entre representacions irreductibles no equivalents té dimensió 0, i que l'espai de morfismes d'una representació irreductible a ella mateixa té dimensió 1. Així obtenim els dos corol·laris següents:

Corol·lari 2.5. *Si V i W són representacions irreductibles no equivalents, aleshores $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$.*

Corol·lari 2.6. *Si V és una representació irreductible de G, aleshores $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Amb això hem acabat la demostració de les relacions d'ortogonalitat, i ja podem acabar la demostració del teorema.

Proposició 2.7. *Les funcions de classe χ_V, per V representació irreductible de G, generen l'espai vectorial $Cl(G)$.*

Demostració. Com que els caràcters χ_V són ortonormals, és suficient demostrar que $\langle f, \chi_V \rangle = 0$ per a tot V implica $f = 0$, per tota $f \in Cl(G)$.
Per una representació (V, ρ) definim el següent morfisme:

$$f_V : V \to V, \quad v \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} g \cdot v$$

Vegem que aquesta aplicació defineix, efectivament, un morfisme:

$$\begin{aligned} f_V(h \cdot v) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} gh \cdot v = \frac{1}{\#G} \sum_{k \in G} \overline{f(hkh^{-1})} hk \cdot v \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{k \in G} \overline{f(k)} hk \cdot v = h \cdot f_V(v) \end{aligned}$$

Si la representació V és irreductible, pel Lema de Schur, $f_V = \lambda \,\mathrm{id}$ per algun escalar λ. Aleshores obtenim $\mathrm{tr}(f_V) = \lambda \dim V$. D'altra banda, per com hem definit f_V, tenim que $\mathrm{tr}(f_V) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \chi_V(g) = \langle f, \chi_V \rangle$, que hem suposat que és 0. Per tant, $\lambda = 0$ i $f_V = 0$.

Qualsevol representació es pot descomposar en representacions irreductibles, i com que $f_{V \oplus W} = f_V + f_W$, l'aplicació f_V és 0 per qualsevol representació, irreductible o no, V. En particular podem considerar la representació regular $V = \mathbb{C}[G]$, amb base $\{e_g \mid g \in G\}$. Per tant, tenim $f_V(e_g) = 0$ per a tot $g \in G$. Podem aplicar aquest resultat a la identitat 1 de G, i obtenim $\sum_g \overline{f(g)} g \cdot e_1 = \sum_g \overline{f(g)} e_g = 0$, on la primera igualtat surt de la definició de la representació regular. Aleshores, $\overline{f(g)} = 0$ per a tot g, i per tant $f = 0$. □

Referències

[1] *Representations of Finite Groups* (2015), L. Moerdijk

CONSEQÜÈNCIES DE LES RELACIONS D'ORTOGONALITAT

MARC PIQUER I MÉNDEZ - 31 D'OCTUBRE DE 2024

Resum. En aquest escrit s'estudia algunes conseqüències de les relacions d'ortogonalitat de Schur, sobre el nombre i les propietats del caràcter d'una representació. En particular, es prova que dues representacions són equivalents si, i només si, tenen el mateix caràcter, i es dóna propietats sobre la dimensió de les representacions irreductibles. Es tanca el tema amb la presentació i un exemple de càlcul de les taules de caràcters. Aquest escrit segueix les seccions 2.3 i 2.4 de [1]

El resultat central de la darrera xerrada és un teorema l'enunciat del qual tot seguit.

Teorema 1. *Sigui G un grup finit. Els caràcters χ_V de les representacions irreductibles no equivalents V de G formen una base ortonormal de l'espai de funcions de classe* $\mathrm{Cl}(G)$.

Aquesta ortonormalitat és respecte al producte escalar definit per

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g),$$

i les igualtats que defineixen l'ortonormalitat dels caràcters s'anomenen "relacions d'ortonormalitat de Schur".

1. Corol·laris del teorema 1

La primera i la segona parts de la xerrada consistiran, essencialment, en anar llançant corol·laris del teorema 1, que són útils per a obtenir propietats de les representacions fent servir els seus caràcters.

Corol·lari 2. *El nombre de representacions irreductibles de G és igual al nombre de classes de conjugació de G.*

Demostració. Com ja vàrem comentar, les funcions de classe es poden entendre com a funcions $(G) \to \mathbb{C}$, de manera que la dimensió de $\mathrm{Cl}(G)$ és el nombre de bases de conjugació. Ara, pel teorema 1, $\mathrm{Cl}(G)$ té com a base els caràcters de les representacions irreductibles, de manera que la seva dimensió és el nombre de representacions irreductibles. □

Des d'aquí, fixem un grup G i representacions irreductibles seves $V_1, \dots, V_k$ de caràcters $\chi_1, \dots, \chi_k$. Així, serà més senzill enunciar tot el reguitzell de corol·laris i proposicions que ve. No crec ni que em molesti a comentar-los.

Corol·lari 3. *Si V és una representació de G, llavors la representació irreductible V_i apareix $\langle \chi_i, \chi_V \rangle$ cops a la descomposició de V.*

Aquest corol·lari té la virtut, a més, que garanteix la unicitat de la descomposició en irreductibles.

Demostració. Escrivim la descomposició $V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_k V_k$. Per les relacions d'ortogonalitat de Schur,

$$\begin{aligned} \langle \chi_i, \chi_V \rangle &= \langle \chi_i, n_1\chi_1 + \cdots + n_k\chi_k \rangle \\ &= n_1 \langle \chi_i, \chi_1 \rangle + \ldots n_k \langle \chi_i, \chi_k \rangle \\ &= n_i, \end{aligned}$$

que és el nombre de cops que V_i apareix a la descomposició. □

Corol·lari 4. *Dues representacions V i W són equivalents si, i només si, $\chi_V = \chi_W$.*

Perquè quedi clar que sóc un mentider, aquesta sí, que la comentaré: és la propietat que va dir l'Abel que estàvem desenvolupant les eines per demostrar.

Demostració. Les representacions equivalents ja vàrem veure que tenen el mateix caràcter. Al revés, si $\chi_V = \chi_W$, llavors cada representació irreductible apareix el mateix nombre de cops a V i a W, pel corol·lari anterior. Per tant, V i W tenen la mateixa descomposició en irreductibles i per tant són equivalents. □

Corol·lari 5. *Una representació V és irreductible si, i només si, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Demostració. Descomposem $V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_k V_k$. Per les relacions d'ortogonalitat,

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_V \rangle &= \langle n_1\chi_1 + \cdots + n_k V_k, n_1\chi_1 + \cdots + n_k V_k \rangle \\ &= {n_1}^2 + \cdots + {n_k}^2. \end{aligned}$$

Això és 1 si, i només si, una de les n_i és 1 i la resta són 0; és a dir, si V és irreductible. □

2. Descomposició de la representació regular i dimensió de les representacions irreductibles

Una aplicació (o més ben dit un exemple de càlcul): donarem la descomposició de la representació regular en irreductibles.

Corol·lari 6. *La representació regular es descompon en*

$$\mathbb{C}[G] = (\dim V_1)V_1 \oplus \cdots \oplus (\dim V_k)V_k.$$

Demostració. Posem $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Un element del grup, g, actua en un vector de la base, e_{g_i}, segons $ge_{g_i} = e_{gg_i}$. Llavors, la matriu $\rho(g)$ té components

$$(\rho(g))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } g_i = gg_j; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Per tant, la diagonal té components

$$(\rho(g))_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{si } g = e; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Per tant, $\operatorname{tr}(\rho(e)) = \#G$ i $\operatorname{tr}(\rho(g)) = 0$ per a $g \neq e$.

Fent servir això, tenim

$$\begin{aligned}\langle \chi_i, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi_{\mathbb{C}[G]}(g) \\ &= \frac{1}{\#G} \overline{\chi_i(e)} \#G \\ &= \operatorname{tr}(\mathrm{id}_{V_i}) \\ &= \dim V_i.\end{aligned}$$

□

Corol·lari 7. *Es té*

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2 = \#G.$$

Demostració. Calcularem el producte $\langle \chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle$ de dues maneres diferents. Primer, directament,

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} |\chi_{\mathbb{C}[G]}(g)|^2 \\ &= \frac{1}{\#G} |\#G|^2 \\ &= \#G.\end{aligned}$$

Per altra banda, a través de la representació en irreductibles,

$$\langle \chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle = \sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2.$$

□

Aquesta fórmula és útil per a trobar les dimensions de les representacions irreductibles, si ja en sabem unes quantes. En general, és molt pràctic saber quantes n'hi ha de dimensió 1, cosa que es pot aconseguir fàcilment.

Proposició 8. *El nombre de representacions de G de dimensió 1 és $\#G^{\mathrm{ab}}$.*[1]

Demostració. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ és una representació de dimensió 1, llavors $[G, G] \subseteq \ker(\rho)$, ja que $\mathrm{GL}(V)$ és abelià. Llavors, ρ factoritza de manera única a través de G^{ab}; és a dir, ρ es pot descomposar en $\rho = \rho^{\mathrm{ab}} \circ \pi$, on $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ és el morfisme de pas al quocient.

Per tant, el nombre de representacions de dimensió 1 de G correspon al de G^{ab}. Com que aquest darrer és abelià, aquest nombre és $\#G^{\mathrm{ab}}$. □

3. Taules de caràcters

Un sil·logisme senzill: totes les representacions vénen determinades pels seus caràcters i totes les representacions es poden descompondre en irreductibles; per tant, sabem tot el que volem sobre les representacions d'un grup si coneixem els caràcters de les seves representacions irreductibles.

[1] Recordem que l'abelianitzat d'un grup G és el grup $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$, on hem definit el commutador $[G, G] = \langle ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in G \rangle$.

Aquesta informació es sol resumir en una taula, la "taula de caràcters" d'un grup, les files de la qual representen els caràcters de les representacions irreductibles i les columnes de les quals representen les classes de conjugació. A cada cel·la posaríem l'aplicació del caràcter a la classe de conjugació.[2]

	(g_1)	$\dots$	(g_k)
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\dots$	$\chi_1(g_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_k	$\chi_k(g_1)$	$\dots$	$\chi_k(g_k)$

TAULA 1. Exemple de taula de caràcters, on $g_1, \dots, g_k \in G$ són representants de les k classes de conjugació.

Fent servir el que hem anat construint, podem trobar la taula de caràcters d'un grup. En general, per a grups petitons, n'hi ha prou de seguir aquesta recepta:

(1) trobem les classes de conjugació del grup (el nombre de representacions irreductibles és el nombre d'aquestes classes),
(2) els caràcters de les representacions de dimensió 1 es poden trobar per càlcul directe o fent servir la proposició 8,
(3) la mida de les altres representacions irreductibles es pot trobar fent servir el corol·lari 7,
(4) les relacions d'ortogonalitat de Schur donen equacions que les representacions desconegudes han de satisfer.

Exemple 9. Com a exemple, calculem la taula de caràcters del diedral $D_3 = \langle r, s | r^3 = e, s^2 = e, rsr = s \rangle$. Les seves classes de conjugació són $(e) = \{e\}$, $(r) = \{r, r^2\}$, $(s) = \{s, rs, r^2s\}$.

Per trobar les representacions de dimensió 1, farem servir que una tal representació ρ ha de complir $\rho(r)^3 = 1$, $\rho(s)^2 = 1$ i $\rho(r)\rho(s) = \rho(s)\rho(r)^{-1}$. D'aquí, $\rho(r) = 1$ i $\rho(s) \in \{\pm 1\}$, de manera que hi ha dues representacions de dimensió 1.

Ara, sabem que el grup D_3 té tres classes de conjugació, de manera que té tres representacions irreductibles. Ens en falta només una! Diguem-li V_3. Pel corol·lari 7, $2 + (\dim V_3)^2 = 6$, de manera que $\dim V_3 = 2$ i $\chi_3(e) = 2$. Així, només ens falta conèixer $\chi_3(r)$ i $\chi_3(s)$.

[2]Tècnicament, a un representant, però no és rellevant perquè els caràcters són constants a les classes de conjugació.

Això ja ho tenim fent servir les relacions d'ortogonalitat,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \chi_1, \chi_3 \rangle \\ &= \frac{1}{\#D_3} \sum_{g \in D_3} \overline{\chi_1(g)} \chi_3(g) \\ &= \frac{2 + 2\chi_1(r) + 3\chi_1(s)}{6}, \\ 0 &= \langle \chi_2, \chi_3 \rangle \\ &= \frac{1}{\#D_3} \sum_{g \in D_3} \overline{\chi_2(g)} \chi_3(g) \\ &= \frac{2 + 2\chi_1(r) - 3\chi_1(s)}{6}. \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema, trobem $\chi_3(r) = -1$, $\chi_3(s) = 0$. Acabem l'escrit escrivint explícitament la taula de caràcters, ara que ja estem.

	(e)	(r)	(s)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

TAULA 2. Taula de caràcters del grup diedral D_3.

REFERÈNCIES

[1] I. Moerdijk. *Representations of Finite Groups. Lecture Notes* (apunts de classe, Universitat de Nijmegen, 2015).

El Grupo Simétrico

Carlos Fernández Lorán i Abel Salinas Sellas*

November 2024

1 Elementos Idempotentes

El objetivo de esta sesión es describir todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_n. Pero esto requiere primero ver la relación que hay entre las representaciones de S_n y los ideales de cierto anillo.

Sea G un grupo, $\mathbb{C}[G]$ el espacio vectorial de base G. Todo elemento de $\mathbb{C}[G]$ es de la forma $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ donde los $\alpha_g \in \mathbb{C}$. Podemos dotar de estructura de anillo a $\mathbb{C}[G]$ si se considera la multiplicación siguiente:

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\alpha_g\beta_h(gh) = \sum_{k\in G}\gamma_k k$$

$$\gamma_k = \sum_{g,h:gh=k}\alpha_g\beta_h = \sum_{g\in G}\alpha_g\beta_{g^{-1}k}$$

Definición 1.1. *Llamaremos a $\mathbb{C}[G]$ con dicho producto **anillo del grupo**.*

Podemos establecer algunas relaciones entre conceptos de teoría de representaciones y teoría de anillos:

- Las sub representaciones de la representación regular $\mathbb{C}[G]$ son los ideales por la izquierda del anillo del grupo.
- Toda sub representación V de $\mathbb{C}[G]$ tiene un complemento $V^{\perp}$ que también es sub representación. En términos de ideales, para todo ideal $I \subseteq \mathbb{C}[G]$, existe un ideal complementario I' con $I + I' = \mathbb{C}[G]$ y $I \cap I' = \{0\}$.
- Sea $1 \in \mathbb{C}[G]$ el elemento unitario de $\mathbb{C}[G]$, entonces 1 descompone de forma única como $1 = e + e'$ con $e \in I$ y $e' \in I'$. Nos centraremos en el caso $e, e' \neq 1$.

Lema 1.2. *Sea I un ideal por la izquierda de $\mathbb{C}[G]$ y sea I' su ideal complementario. Escribimos $1 \in \mathbb{C}[G]$ como $1 = e + e'$, con $e \in I$ y $e' \in I'$. Entonces*

*L'escrit és del primer i la xerrada la va fer el segon.

1. *e y e' son idempotentes, es decir, que $e^2 = e$ y $(e')^2 = e'$.*

2. *e y e' son disjuntos: $ee' = e'e = 0$.*

3. *Los ideales I y I' son generados por e y e' respectivamente. $I = (e)$ y $I' = (e')$.*

Prueba. Todo elemento de $\mathbb{C}[G]$ se puede descomponer de manera única como $x + y$, donde $x \in I$ y $y \in I'$. Como $1 = e + e'$, tenemos que $e = e^2 + ee'$, para $e^2 \in I$ y $ee' \in I$ dado que son ideales por la izquierda. Al mismo tiempo tenemos $e = e + 0$ con $e \in I$ y $0 \in I'$. Como la descomposición es única tenemos $e^2 = e$ y $ee' = 0$. El argumento anterior es simétrico en e y e', por lo que tenemos (1) y (2).

Sea $x \in I$, entonces $x = x \cdot 1 = x(e + e') = xe + xe'$. Pero también $x = x + 0$, así que $xe = x$ y $xe' = 0$, con lo que obtenemos $I \subseteq (e)$. La inclusión contraria es trivial, por tanto, tenemos (3).

□

Corolario 1.3. *ay una correspondencia uno-a-uno entre los ideales por la izquierda en el anillo del grupo y elementos idempotentes $e \in \mathbb{C}[G]$. De hecho, si e es un elemento idempotente que pertenece al ideal por la izquierda I, entonces $I = (e)$ y además*

$$x \in I \iff x = xe$$

Consideramos I una representación, no irreducible, podemos escribirla como $I = J \oplus J'$ para ciertas ideales J y J'. Sea e un elemento idempotente tal que $I = (e)$. Entonces $e = f + f'$ con $f \in J$ y $f' \in J'$. Estos satisfacen que $f = fe = f(f+f') = f^2 + ff'$ y, por tanto, $f^2 = f$ y $ff' = 0$. Obteniendo así un elemento idempotente de "menor tamaño". Lo que nos da una caracterización de las representaciones irreducibles en términos de los elementos idempotentes del anillo del grupo.

Corolario 1.4. *La representación $I = (e)$ es irreducible si, y solo si, e no se puede descomponer en elementos idempotentes disjuntos. Es decir, que si $e = f + f'$ con $f^2 = f$, $(f')^2 = f'$ y $ff' = f'f = 0$, entonces o bien $f = 0$ o bien $f' = 0$.*

Definición 1.5. *Un elemento idempotente con estas propiedades se le llama* ***elemento idempotente primitivo****.*

Corolario 1.6. *En $\mathbb{C}[G]$, la unidad 1 se puede escribir como $1 = e_1 + \cdots + e_k$, donde e_i son elementos idempotentes primitivos, disjuntos dos a dos. Es decir, que $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.*

Ahora veremos como se caracterizan los morfismos de representaciones.

Proposición 1.7. *Sea $I = (e)$ y $I' = (e')$ sub representaciones de la representación regular $\mathbb{C}[G]$. Sea $\varphi : I \to I'$ un morfismo de representaciones, entonces corresponde a un elemento $x_0 \in I'$ con la propiedad de que $ex_0e' = x_0$.*

Prueba. Sea $\varphi : I \to I'$ morfismo de representaciones, sea $x_0 = \varphi(e)$. Veamos que x_0 satisface la propiedad requerida. Como $x_0 \in I'$ entonces $x_0 e' = x_0$. Como φ es un morfismo de representaciones y e es independiente $x_0 = \varphi(e) = \varphi(e^2) = e\varphi(e) = ex_0$. Entonces, sustituyendo obtenemos $ex_0e' = ex_0 = x_0$.

Dada x_0, definimos φ como $\varphi(y) = yx_0$. Claramente, es un morfismo de representaciones y como $ex_0 = x_0$ vemos que las construcciones son inversas.

□

Corolario 1.8. *Una representación $I = (e)$ es irreducible si, y solo si, para todo x_0 con $ex_0e' = x_0$ tenemos que $x_0 = \lambda e$ para algún escalar $\lambda \in \mathbb{C}$.*

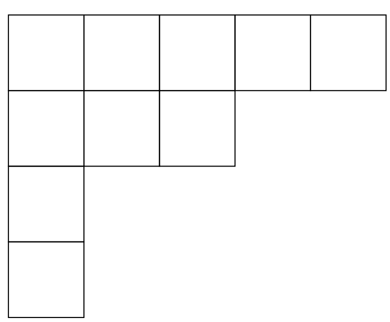
Prueba. La representación I es irreducible si, y solo si, todo morfismo de representaciones $I \to I'$ es un isomorfismo con la imagen. Por el Lema de Schur, ese isomorfismo es un producto por escalar.

□

Corolario 1.9. *Dos representaciones irreducibles $I = (e)$ y $I' = (e')$ (no tienen por qué ser una, la complementaria de la otra) son equivalentes si, y solo si, existe $x_0 \neq 0$ tal que $ex_0e' = x_0$.*

2 Diagramas de Young

En esta sección construiremos una biyección explícita entre las clases de conjugación y las representaciones irreducibles de S_n. Sabemos que dos permutaciones de S_n son conjugadas si, y solo si, tienen la misma estructura de ciclos (o *cycle type* en inglés). La estructura de ciclo es la partición de n como suma $n = n_1 + \ldots n_k$ donde los n_i son las longitudes de los ciclos en los que descompone la permutación. Podemos asumir que $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$. Por ejemplo, 10 se puede descomponer como $10 = 5 + 3 + 1 + 1$. Podemos representar una estructura de ciclos por medio de un **diagrama de Young**, donde hay k filas y n_i elementos por fila. El diagrama del ejemplo se encuentra a continuación:



Si añadimos los números de la permutación a cada una de las celdas, obtenemos una **tabla de Young**, la siguiente figura es una tabla de Young del diagrama anterior.

5	1	6	4	3
2	7	8		
10				
9				

S_n actúa sobre la colección de tablas de Young permutando los números de los cuadrados. Es decir, si T es una tabla de Young y $p \in S_n$, $p \cdot T$ consiste en cambiar i en T por $p(i)$. Como ejemplo, si tomamos $p = (3, 1, 7, 10, 5, 2, 9, 4, 6, 8)$ y T la tabla definida antes, obtenemos que $p \cdot T$ sería:

5	3	2	10	7
1	9	4		
8				
6				

Definición 2.1. *Diremos que dos tablas de Young T y T' son* ***equivalentes*** *si $\exists p \in S_n$ tal que $T = p \cdot T$. Esto es equivalente a decir que T y T' tienen el mismo diagrama.*

Por tanto, tenemos correspondencias uno-a-uno entre:

- Representaciones irreducibles de S_n.
- Clases de conjugación de elementos de S_n
- Clases de equivalencia de tablas de Young.
- Diagramas de Young.

Además, en la sección anterior hemos visto que hay una equivalencia entre las representaciones irreducibles de S_n y las clases de equivalencia de elementos idempotentes primitivos en el anillo del grupo $\mathbb{C}[G]$. Ahora queremos establecer una biyección entre las clases de equivalencias de tablas de Young y las clases de equivalencia de los elementos idempotentes primitivos de $\mathbb{C}[G]$.

Construcción del elemento idempotente primitivo

Dada una tabla T, definimos los dos subgrupos de S_n:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_T = \{p \in S_n | p \text{ fija las filas de } T\}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_T = \{q \in S_n | q \text{ fija las columnas de } T\}$$

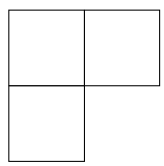
Definimos dos elementos de $\mathbb{C}$

$$P = P_T = \sum_{p \in \mathbf{P}_T} p, \quad Q = Q_T = \sum_{q \in \mathbf{Q}_T} q$$

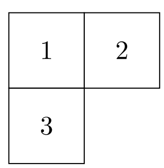
y finalmente tomamos $e = e_T = P_T Q_T$.

Afirmación. El elemento e es idempotente excepto, como mucho, por multiplicación por escalar. Es decir, $e^2 = \lambda e$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Entonces $\frac{e}{\lambda}$ es idempotente, esto da una biyección entre tablas y los elementos idempotentes primitivos de $\mathbb{C}[S_n]$. La demostración la haremos en la siguiente sección, ahora veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.2. *Queremos construir la representación irreducible de S_3 asociada al diagrama*



Primero, hemos de añadir los números al diagrama para obtener una tabla. Tablas equivalentes tienen representaciones equivalentes, entonces no importa que tabla de Young escojamos. Sea T la tabla



El subgrupo $\boldsymbol{P}_T \subseteq S_3$ contiene las permutaciones que dejan las filas invariantes. Para la tabla T esto implica que el 3 se quede fijo. Entonces

$$\boldsymbol{P}_T = \{id, (1\ 2)\}$$

de forma similar

$$\boldsymbol{Q}_T = \{id, (1\ 3)\}$$

Ahora computamos

$$P_T = \sum_{p \in \boldsymbol{P}_T} p = id + (1\ 2) \in \mathbb{C}[S_3]$$

$$Q_T = \sum_{q \in \boldsymbol{Q}_T} sgn(q) q = id - (1\ 3) \in \mathbb{C}[S_3]$$

$$e_T = P_T Q_T = id + (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 2)(1\ 3) = id + (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 3\ 2)$$

El ideal $(e_T) \subseteq \mathbb{C}[S_3]$ *una representación de* S_3*. Podemos encontrar una descripción de la representación encontrando una base de* (e_T)*. Tomamos* $e = e_T$ *y definimos*

$$f = (1\ 3)e = (1\ 3) + (1\ 2\ 3) - id - (2\ 3) \in (e)$$

Cualquier acción de S_3 *sobre* (e) *nos da una combinación de* e *y* f*. Además,* e *y* f *son linealmente independientes, así que forman base de* (e)*. Para describir la representación, es suficiente escribir la acción de* $(1\ 2)$ *y* $(1\ 3)$ *en* e *y* f*, dado que generan* S_3*. Las acciones dadas son*

$$\begin{array}{ll} (1\ 2) \cdot e = e & (1\ 3) \cdot e = f \\ (1\ 2) \cdot f = -e - f & (1\ 3) \cdot f = e \end{array}$$

Por ejemplo:

$$(1\ 2)\cdot f = (1\ 2)\left((1\ 3) + (1\ 2\ 3) - \mathrm{id} - (2\ 3)\right) = (1\ 3\ 2)+(2\ 3)-(1\ 2)-(1\ 2\ 3) = -e-f$$

Para comprobar que la representación es irreducible utilizaremos el siguiente corolario de una sesión anterior.

Corolario 2.3. *Una representación* V *es irreducible si, y solo si,* $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$

Primero reescribimos las representaciones en términos de matrices, la aplicación $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$

$$\rho\left((1\ 2)\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \rho\left((1\ 3)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como ρ *es un morfismo de grupos y* $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)$ *tenemos*

$$\rho\left((1\ 2)\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el carácter de ρ *queda determinado por*

$$\chi_\rho(id) = 2, \quad \chi_\rho((1\ 2)) = 0, \quad \chi_\rho((1\ 2\ 3)) = -1$$

Entonces ρ *es irreducible dado que*

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{\#S_3} \sum_{\sigma \in S_3} |\chi_\rho(\sigma)|^2 = \frac{1}{6}(2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

3 Tablas de Young y elementos idempotentes primitivos

En esta sección probaremos las afirmaciones de la sección anterior. Para ello, introduciremos unos resultados previos.

Empezaremos por un lema sobre descomposiciones de permutaciones respecto una tabla T.

Lema 3.1. *1. Un $r \in S_n$ puede ser escrita como $pq = r$ para $p \in \boldsymbol{P}_T$, $q \in \boldsymbol{Q}_T$ en como mucho una forma.*

2. Esto se puede hacer solo si la cuando la siguiente condición se cumple: para todo par de números i y j en T con $i \neq j$, si i y j están en la misma fila de T, entonces i y j no están en la misma columna de rT.

Orden en las Tablas de Young. Definiremos un orden parcial en la colección de diagramas de Young. Sean D y D' diagramas de Young. Entonces D es una secuencia de números $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k$ con $m_1 + \cdots + m_k = n$. De forma similar, D' es la secuencia de números $m'_1 \geq m'_2 \geq \cdots \geq m'_l$. Diremos que $D > D'$ si, y solo si, $m_i > m'_i$ para el primer i tal que $m_i \neq m'_i$. Usaremos la misma noción para las tablas, diremos que $T > T'$ si se ordenan de esta forma como diagramas. Entonces para $r, s \in S_n$, $T > T'$ si y solo si $rT > sT'$.

Lema 3.2. *Si T y T' son tablas tal que para todo par i, j en la misma fila de T aparecen en diferentes columnas de T', entonces $T \leq T'$.*

Lema 3.3. *Sean T y T' dos tablas. Supongamos que existen $i \neq j$ en la misma fila de T y en la misma columna de T'. (Esto ocurre si $T > T'$) Entonces $Q_{T'} P_T = 0$.*

Ahora volvamos a los elementos $e = e_T \in \mathbb{C}[S_n]$ asignados a las tablas T:

$$e = e_T = P_T Q_T = \sum_{p \in \mathbf{P}_T,\, q \in \mathbf{Q}_T} sgn(q) pq$$

Observamos las siguientes propiedades de e:

1. Las permutaciones $pq \in S_n$ de la suma son todas diferentes por el Lema 3.1.

2. Si $T > T'$, entonces $e'e = 0$, por los Lemas 3.2 y 3.3.

3. Para una tabla T y $p_0 \in \mathbf{P}$, $q_0 \in \mathbf{Q}$,

$$p_0 e q_0 = sgn(q_0) e$$

Esta última propiedad, para una tabla T fijada y sus P, Q y e asociados, es una propiedad característica del elemento e, en el sentido siguiente.

Lema 3.4. *Sea $x \in \mathbb{C}[S_n]$ tal que cumple la propiedad de que*

$$p_0 x q_0 = sgn(q_0) x \text{ para todo } p_0 \in \boldsymbol{P},\ q_0 \in \boldsymbol{Q}$$

Entonces, escribiendo $x = \sum_s x_s s$, tenemos que $x = x_{id} e$.

Ahora tenemos las herramientas para probar la afirmación del capitulo anterior.

Proposición 3.5. *Para cualquier tabla T, el elemento asociado $e = e_T$ satisface $e^2 = \lambda e$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo.*

Prueba. El elemento e^2 claramente satisface las hipótesis del Lema 3.4, entonces $e^2 = \lambda e$, donde λ es la coordenada de $e^2 \in \mathbb{C}[S_n]$ en la unidad. Para calcular λ, consideramos la aplicación multiplicar por la derecha

$$R_e : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n];\ x \mapsto xe$$

Entonces R_e proyecta $\mathbb{C}[S_n]$ sobre el ideal $I = (e)$, sobre el cual la aplicación R_e es la multiplicación por λ. Entonces la traza de la aplicación R_e es

$$tr(R_e) = \lambda dim(I) = \lambda dim((e))$$

Por otro lado, podemos calcular la traza de R_e de forma sencilla, dado que para un vector de la base $s \in \mathbb{C}[S_n]$,

$$R_e(s) = se = \sum sgn(q)spq$$

y $spq = s$ si, y solo si, $p = q = id$, entonces $tr(R_e) = \#S_n = n!$. Finalmente

$$\lambda = \frac{n!}{dim((e))}$$

□

Ahora que hemos encontrado el elemento idempotente $\frac{e}{\lambda}$ asignado a una tabla T. Queda ver:

1. $(e) = (e/\lambda)$ es irreducible.
2. Para tablas T y T', las representaciones (e) y (e') son equivalentes si, y solo si, T y T' son equivalentes.

Prueba.

1. Sabemos que cualquier morfismo de representaciones $\varphi : (e) \to (e)$ debe ser de la forma $\varphi(y) = yx_0$ para algun x_0 con $(e/\lambda)x_0(e/\lambda) = x_0$ o en otras palabras que $ex_0e = \lambda^2 x_0$. Pero dicho x_0 satisface la hipótesis del Lema 3.4 por lo que x_0 es un múltiplo de e y entonces φ es un isomorfismo. Esto prueba que (e) es irreducible.

2. Supongamos que T y T' son equivalentes. Entonces $T = sT'$ para alguna permutación s, entonces $e_T = se_{T'}s^{-1}$. Pero entonces (e_T) y $(se_{T'}s^{-1})$ son obviamente equivalentes. Por otro lado, asumimos que T y T' tienen formas diferentes, digamos que $T > T'$. Sea $\varphi : (e') \to (e)$ un morfismo de representaciones. Entonces φ es de la forma $\varphi(y) = yx_0$ para algun $x_0 \in \mathbb{C}[S_n]$ con $e'x_0e = \lambda\lambda' x_0$. Afirmamos que $x_0 = 0$. Escribimos $x_0 = \sum_s x_s s$. Entonces $e'x_0e = \sum_s x_s e'se$. Ya sabemos por el Lema 3.3 que $e'e = 0$ dado que $T > T'$. Pero tambien tenemos $T > s^{-1}T'$ para todo s, entonces $(s^{-1}e's)e = 0$, y en consecuencia $e'se = 0$. Entonces $e'x_0e = 0$, por lo que $x_0 = 0$ dado que λ y λ' son no nulos.

□

Restricció I Inducció

Varg Brangwin Martín

Novembre 2024

1 Mòduls sobre un anell

Una manera de generalitzar les representacions de grups és mitjançant els mòduls sobre un anell. Com a repàs, començarem amb la seva definició:

Definició 1.1. Sigui R un anell. Un *mòdul* sobre R, també anomenat *R-mòdul*, és un grup abelià M i una acció externa de R sobre M: $R \times M \to M, (r, m) \mapsto r \cdot m$ amb les següents propietats:

- $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$
- $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
- $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$
- $1m = m$

Un *homomorfisme de R-mòduls* és un homomorfisme de grups $\phi : M \to N$ compatible amb l'acció de R. És a dir, $\phi(r \cdot m) = r \cdot \phi(m)$. A continuació, veiem alguns exemples de mòduls sobre anells:

Exemple 1.2.

1. Si R és un cos, un mòdul sobre R és un espai vectorial sobre R. Els homomorfismes de mòduls sobre un cos són les aplicacions lineals entre espais vectorials. Per tant, els mòduls també es poden considerar com a generalitzacions dels espais vectorials sobre anells arbitraris.
2. Sigui G un grup. Un mòdul sobre $\mathbb{C}[G]$ és una representació de G. Els homomorfismes de $\mathbb{C}[G] - \textit{mòduls}$ són els *intertwiners*.
3. Si I és un ideal per l'esquerra de l'anell R, també és un *R-mòdul*, ja que és tancat sota suma i multiplicació per elements d'R.
4. Un $\mathbb{Z} - \textit{mòdul}$ és precisament un grup abelià additiu.
5. Si R és un anell i $n \geq 1$, llavors R^n és un $R - \textit{mòdul}$.

Els mòduls sobre anells diferents es poden relacionar mitjançant homomorfismes d'anells.

Definició 1.3. Sigui $f : S \to R$ un homorfisme d'anells. Una *restricció* per *f*, denotada $f * (M), Res_S^R(M)$ o simplement $Res(M)$ és la transformació d'un *R-mòdul* en un *S-mòdul* on l'acció de S sobre M ve donada per la relació $s \cdot m = f(s) \cdot m$.

Un cas especial és quan S és un subanell de R. En aquest cas, f és l'homomorfisme d'inclusió i *f*(M)* és la restricció d'una acció de R a una acció de S. Conversament, podem construir un *R-mòdul* denotat $R \otimes_S N$ o $f_!(N)$ a partir d'un homomorfisme d'anells $f : S \to R$ i un *S-mòdul N*. Els elements de $R \otimes_S N$ són de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} k_i r_i \underset{S}{\otimes} x_i \tag{1}$$

on $k_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R, x_i \in N$. Donada la bilinealitat de $\otimes$, és compatible amb l'acció de S sobre N, i $R \otimes_S N$ és un grup abelià. Per transformar-ho en un *R-mòdul*, definim $t \cdot (r \otimes x) = (tr) \otimes x$ $\forall r, t \in R, \forall x \in N$. És caracteritzada per la següent proposició:

Proposició 1.4. Existeix una bijecció entre els homomorfismes de *S-mòduls* $N \to f^*(M)$ i els homomorfismes de *R-mòduls* $R \otimes_S N \to M$.

Demostració: Sigui $\alpha : N \to f^*(M)$ un homomorfisme de *S-mòduls*. Definim $\beta : R \otimes_S N \to M$ per $\beta(r \otimes s) = r \cdot \alpha(n)$. Si α respecta l'acció de S:

$$\beta(rf(s) \otimes x) = rf(s) \cdot \alpha(x) = r\alpha(s \cdot x) = \beta(r \otimes s \cdot x)$$

I β està ben definit i respecta l'acció de R. D'altra banda, donat $\beta : R \otimes_S N \to M$, només cal definir $\alpha : N \to f^*(M)$ com $\alpha(x) = \beta(1 \otimes x)$ $\square$

2 Representacions induïdes

Donat un homomorfisme de grups $f : H \to G$, també podem construir una representació de G a partir d'una representació d'H, donant pas a la següent definició:

Definició 2.1. Sigui W una representació de H. La representació de G donada per

$$f_!(W) = \mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} W \tag{2}$$

es coneix com a *representació induïda*. També es pot escriure com $Ind_H^G W$, o $\operatorname{Ind} W$.

Efectivament és una representació de G, ja que és un $\mathbb{C}[G] - mòdul$.

Anàlogament a les restriccions, un cas particularment interessant passa quan H és un subgrup de G i f és la inclusió de H en G. Llavors, les inducci ons permeten construir una representació d'un grup a partir de la representació d'un grup més petit i generalment més fàcil de trobar. A més a més, amb la definició 2.1. es pot expressar la proposició 1.4. com

$$Hom(IndW, V)^H \cong Hom(W, ResV)^G \tag{3}$$

Ara, a partir de la fòrmula de les dimensions, obtenim la següent relació amb els caràcters:

Proposició 2.2. (Reciprocitat de Frobenius). Sigui $f : H \to G$ un homomorfisme de grups, V una representació de G i W una representació de H. Llavors,

$$\langle \chi_{Ind\,W}, \chi_V \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{Res\,V} \rangle_H \tag{4}$$

A continuació, veiem un exemple simple d'inducció:

Exemple 2.3. Sigui $f : C_3 \to D_3$ l'homomorfisme inclusió, sigui (W, ρ) la representació de C_3 donada per $\rho(r) = \omega = e^{2\pi i/3}$. Per trobar $V = IndW$, considerem la taula de caràcters de les 3 representacions irreductibles de D_3:

	(e)	(r)	(s)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Cada representació V_i té multiplicitat $\langle \chi_V, \chi_i \rangle_{D_3}$, o $\langle \chi_W, \chi_{Res\,V_i} \rangle_{C_3}$ per la reciprocitat de Frobenius. Ara bé, per ortogonalitat aquest producte escalar és 0 per i=1, 2, i per i=3

$$\langle \chi_W, \chi_{Res\,V_i} \rangle = \frac{2 - \omega - \omega^2}{3} = 1$$

Així que $V = V_3$. És a dir, la representació induïda és la representació estàndar de D_3.

Una altra aplicació de la reciprocitat de Frobenius és que es pot fer servir per demostrar la transitivitat de la inducció:

Proposició 2.4. Si $K \subseteq H \subseteq G$, llavors $Ind_K^G W \cong Ind_H^G(Ind_K^H W)$.

Demostració: Cada representació irreductible V de G apareix $\langle \chi_V, \chi_{Ind_H^G(Ind_K^H W)} \rangle$ vegades en $Ind_H^G(Ind_K^H W)$, o $\langle \chi_{Res_K^H(Ind_H^G V)}, \chi_W \rangle$ vegades aplicant la reciprocitat de Frobenius 2 cops. Com la restricció és transitiva (exercici), això equival a $\langle \chi_{Res_K^G V}, \chi_W \rangle$, o $\langle \chi_V, \chi_{Ind_K^G W} \rangle$ novament per la reciprocitat de Frobenius. Com tota representació irreductible arbitrària V apareix el mateix nombre de vegades en les 2 representacions, necessàriament són equivalents. $\square$

3 Caràcters de representacions induïdes

En aquesta secció, estudiarem en més detall les representacions induïdes donades per l'homomorfisme inclusió, a partir d'aquí denotat $i : H \to G$.

Serà convenient fixar un conjunt $R \subseteq G$ de representants de $G/H = \{\xi H \mid \xi \in R\}$. És a dir, $\forall g \in G \quad \exists!\ \xi \in R : gH = \xi H$. O equivalentment, $\forall g \in G \quad \exists!\ \xi \in R : g^{-1}\xi \in H$. Assumim que $e \in R$, on e és la unitat.

Donada una representació W de H, els elements de $i_!(W)$ són combinacions lineals de $g \otimes w$ per certs $g \in G$ identificats amb vectors base de $\mathbb{C}[G]$. Com que considerem una inclusió, el producte tensorial es pot simplificar per $g \in G, h \in H, w, w' \in W$ de la següent manera:

$$g \otimes (w + w') = g \otimes w + g \otimes w' \qquad gh \otimes w = g \otimes (h \cdot w) \tag{5}$$

A més a més, els tensors representants $g \otimes w$ es poden escriure en termes de representants d'R. És a dir, si $\xi \in R, \xi H = gH$, llavors

$$g \otimes w = g(g^{-1}\xi)(g^{-1}\xi)^{-1} \otimes w = gg^{-1}\xi \otimes (g^{-1}\xi)^{-1}w = \xi \otimes (g^{-1}\xi)^{-1}w \tag{6}$$

Ara bé, $(g^{-1}\xi)^{-1}w = w' \in W$, així que tots els elements de $IndW$ són combinacions lineals d'elements de la forma $\xi \otimes w'$ amb $\xi \in R, w' \in W$.

Això permet obtenir una descripció alternativa de $IndW$. L'espai vectorial $\bigoplus_{\xi \in R} W$ té com a elements combinacions lineals de $(\xi, w) := (0, \cdots, 0, w, 0, \cdots, 0)$, on l'únic element no nul ve indexat per $\xi \in R$. $\bigoplus_{\xi \in R} W$ pot ser una representació de G si G actua sobre el conjunt de classes laterals per l'esquerra G/H mitjançant $g \cdot g'H = gg'H$. Així, G també actua sobre R, i per distingir aquesta acció del producte en G, la denotarem per $\star$. Per tant, $g \star \xi \in R$ ve determinat completament per l'equació $(g \star \xi)^{-1} g\xi \in H$. Definim l'acció de G sobre $\bigoplus_{\xi \in R} W$ com

$$g \cdot (\xi, w) = (g \star \xi, (g \star \xi)^{-1} g\xi w) \tag{7}$$

Proposició 3.1. $\bigoplus_{\xi \in R} W$ és equivalent a la representació induïda $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$.

Demostració: Definim l'aplicació

$$\sigma : \bigoplus_{\xi \in R} W \to \mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} W, \quad (\xi, w) \mapsto \xi \otimes w$$

σ és un *intertwiner* de representacions de G, ja que

$$\sigma(g \cdot (\xi, w)) = \sigma(g \star \xi, (g \star \xi)^{-1} g\xi w) = (g \star \xi) \otimes ((g \star \xi)^{-1} g\xi w) = g\xi \otimes w = g \cdot \sigma(\xi, w)$$

D'altra banda, definim

$$\tau : \mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} W \to \bigoplus_{\xi \in R} W, \quad g \otimes w \mapsto (\xi, (g^{-1}\xi)^{-1} w)$$

On $gH = \xi H$. Ja que $ghH = gH$, gh i h tenen el mateix representant ξ en R, així que τ està ben definida. A més, es té que

$$\tau(gh \otimes w) = (\xi, ((gh)^{-1}\xi)^{-1}w) = (\xi, \xi^{-1}ghw) = (\xi, (g^{-1}\xi)^{-1}hw = \tau(g \otimes hw)$$

Amb el que podem concloure que $\tau = \sigma^{-1}$ i per tant l'equivalència de representacions, ja que

$$\tau\sigma(\xi, w) = \tau(\xi \otimes w) = (\xi, (\xi\xi^{-1})^{-1}w) = (\xi, w)$$
$$\sigma\tau(g \otimes w) = \sigma(\xi, (g^{-1}\xi)^{-1}w) = \xi \otimes (g^{-1}\xi)^{-1}w = \xi(g^{-1}\xi)^{-1} \otimes w = g \otimes w$$

□

Amb aquesta proposició, podem calcular el caràcter d'una representació induïda:

Proposició 3.2. Si $H \subseteq G$, llavors

$$\chi_{Ind_H^G W}(g) = \sum_{\xi \in R:\ g\star\xi=\xi} \chi_W(\xi^{-1}g\xi) \tag{8}$$

Demostració: Si $e_1, \cdots, e_n$ és una base de W, $(\xi, e_i$ amb $\xi \in R$ formen una base de Ind W segons la proposició anterior. La traça de $\rho_{IndW}(g)$ en aquesta base només involucra els $\xi \in R$ pels quals $g \star \xi = \xi$ per la definició de l'acció de G sobre $\bigoplus_{\xi \in R} W$. Llavors,

$$\chi_{Ind_H^G W}(g) = \sum_{\xi \in R:\ g\star\xi=\xi} \chi_W((g \star \xi)^{-1}g\xi) = \sum_{\xi \in R:\ g\star\xi=\xi} \chi_W(\xi^{-1}g\xi)$$

□

Nota: $\chi_W(\xi^{-1}g\xi)$ està ben definit perquè $\xi^{-1}g\xi \in H$.

4 Criteri d'irreductibilitat de Mackey

En aquesta secció, considerarem $H \subseteq G$, i W, R com en la secció anterior. Aplicant les proposicions 3.1 i 3.2 al criteri d'irreductibilitat en funció dels caràcters i tenint en compte que $h \star \xi = \xi \Leftrightarrow \xi^{-1}h\xi \in H \Leftrightarrow h \in \xi H \xi^{-1}$, obtenim:

$$Ind\, W\ irreductible \Leftrightarrow \langle \chi_{IndW}, \chi_{IndW} \rangle_G = 1 \Leftrightarrow \langle \chi_W, \chi_{ResIndW} \rangle_H = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \sum_{\xi : h\star\xi=\xi} \overline{\chi_W(h)}\chi_W(\xi^{-1}h\xi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\#H} \sum_{\xi \in R} \sum_{h \in H \cap \xi H \xi^{-1}} \overline{\chi_W(h)}\chi_W(\xi^{-1}h\xi) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle \chi_W, \chi_W \rangle + \sum_{\xi \neq e} \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H \cap \xi H \xi^{-1}} \overline{\chi_W(h)}\chi_W(\xi^{-1}h\xi) = 1$$

Primer estudiarem el segon terme de la suma. Per qualsevol $\xi \in R$ diferent de la unitat, $\xi H \xi^{-1}$ és un subgrup d'H (exercici). Per tant, podem obtenir representacions del grup restringint representacions d'H. Ho farem a partir de 2 homomorfismes, la inclusió i la conjugació:

$$i_\xi : H \cap \xi H \xi^{-1} \to H, \;\; i_\xi(h) = h, \quad c_\xi : H \cap \xi H \xi^{-1} \to H, \;\; c_\xi(h) = \xi^{-1} h \xi. \tag{9}$$

Denotem les respectives representacions restringides de $\xi H \xi^{-1}$ com $i_\xi^*(W)$ i $c_\xi^*(W)$. Observem que el seu producte escalar és

$$\langle i_\xi^*(W), c_\xi^*(W) \rangle = \frac{1}{\#(H \cap \xi H \xi^{-1})} \sum_{h \in H \cap \xi H \xi^{-1}} \overline{\chi_W(h)} \chi_W(\xi^{-1} h \xi)$$

Així que

$$\langle \chi_{IndW}, \chi_{IndW} \rangle = \langle \chi_W, \chi_W \rangle + \sum_{\xi \neq e} \frac{\#(H \cap \xi H \xi^{-1})}{\#H} \langle \chi_{i_\xi^*(W)}, \chi_{c_\xi^*(W)} \rangle$$

Com $\langle \chi_W, \chi_W \rangle \geq 1$ i els altres termes són tots no negatius, concloem que $\langle \chi_{IndW}, \chi_{IndW} \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle \chi_{i_\xi^*(W)}, \chi_{c_\xi^*(W)} \rangle = 0 \;\; \forall \xi \neq e$. Per enunciar el teorema desitjat, solament falta una última definició.

Definició 4.1. Siguin V, V' representacions de G. Aleshores, V i V' són representacions *disjuntes* si cap representació irreductible de G apareix tant en V com en V'.

Equivalentment, V i V' són representacions disjuntes si $\langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle = 0$ per les relacions d'ortogonalitat de Schur. Per tant, aquests càlculs demostren el següent criteri d'irreductibilitat:

Teorema 4.2. (Mackey). Sigui $H \subseteq G$, sigui W una representació d'H. Aleshores $Ind_H^G W$ és irreductible si i només si W és irreductible i $\forall \xi H \in G/H$ tal que $\xi \notin H$ les representacions $i_\xi^*(W)$ i $c_\xi^*(W)$ de $H \cap \xi H \xi^{-1}$ són disjuntes.

Finalment, veiem un exemple d'aplicació d'aquest teorema.

Exemple 4.3. Sigui (W, ρ) la representació estàndard de C_n. És a dir, $W = \mathbb{C}$, $\rho(r) = e^{2\pi i/n}$. Com $C_n \subseteq D_n$, considerem $IndW$ per mitjà de la inclusió. Com W és de dimensió 1, és irreductible $\forall n \geq 1$ i per tant sempre se satisfà la primera condició del criteri de Mackey. Pel que fa a la segona, observem que $H = C_n$ és un subgrup normal de D_n i la seva única classe lateral no trivial és sH, on s és la reflexió. D'altra banda, $C_n \cup sC_n s^{-1} = C_n \cup C_n = C_n$, així que $i_s^*(W) = W$, mentre que $i_s^*(W)$ té $\mathbb{C}$ com a espai vectorial, junt amb l'homomorfisme $\rho_s(r) = \rho(s^{-1} r s = \rho(r^{-1} = e^{-2\pi i/n}$. Per tant, $IndW$ és irreductible si i només si $e^{2\pi i/n} \neq e^{-2\pi i/n} \Leftrightarrow n \neq 1, 2$.

BIBLIOGRAFIA. [1] I. Moerdijk. *Representations of Finite Groups. Lecture Notes* (Universitat de Nijmegen, 2015).
[2] S. Siksek. *Algebra 3. Lecture Notes* (Universitat de Warwick, 2023)

Teoria de categories

Jofre Dolcet

Novembre 2024

1 Categories

Definició 1.1. *Una categoria consisteix en les següents parts:*

1. *Una classe d'objectes Ob(C).*
2. *Un conjunt $Hom(X,Y), \forall X,Y \in Ob(C)$.*
3. *Una operació composició:*

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) & \to & Hom(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

4. *Un morfisme $id_X \in Hom(X,X) \forall X \in Ob(C)$*

Aquests elements han de satisfer dues propietats

1. *Associativitat de la composició*
2. *id_X és la unitat per la composició.*

Exemple 1.1. 1. ***Sets***. *Si considerem tots els conjunts i les aplicacions entre ells, això defineix una categoria.*

2. ***Grp***, ***Ab***, ***Ring***, ***Vect***$_{\mathbb{K}}$. *Qualsevol estructura algebraica amb els seus homomorfismes ens proporciona una categoria.*
3. ***Rep***$_G$. *També podem prendre les representacions i els morfismes de representacions. En aquest cas, sovint estem fixant que les representacions són $\mathbb{C}$-espais vectorials.*
4. *Un grup $(G, \cdot_G)$ el podem veure com una categoria **G** tal que Ob(**G**)=$\{*\}$, $Hom(*,*) = G$ i $\circ = \cdot_G$ (això, si es vol visualitzar, segueix una mica la idea del grup fonamental fixat un punt base).*

Definició 1.2. *Siguin C i D categories. Un functor de C a D és una aplicació F que assigna a cada objecte X de C un objecte $F(X)$ de D, i a cada morfisme $f : X \to Y$ a C un morfisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$. L'assignació ha de satisfer les següents condicions:*

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \quad i \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Exemple 1.2. 1. *Functor d'oblit o despistat. Aquest functor es pot veure com una mena d'inclusió. Es tracta de ignorar una part d'una estructura algebraica. Per exemple, donat un anell el podem enviar al* *grup que es forma ignorant l'operació producte de l'anell. El mateix podem fer per passar d'un grup a un conjunts, d'espais vectorials a grups,...*

2. *Abelianització. Definirem un functor* $(-)^{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$*, anomenat* abelianització*. Per a un objecte* G *a* $\mathbf{Grp}$*, definim* $G^{ab} = G/[G,G]$*, on* $[G,G]$ *és el subgrup dels commutadors de* G*. Un homomorfisme* $f : G \to H$ *dóna lloc a una aplicació*

$$\begin{array}{rcl} f^{ab} : G/[G,G] & \to & H/[H,H] \\ f^{ab}([g]_G) & \mapsto & [f(g)]_H \end{array}$$

   L'assignació $(-)_{ab}$ *compleix les condicions per ser un functor.*

3. *Producte tensorial. Donada una representació d'un grup* G (U)*, definim el següent functor:*

$$\begin{array}{rcl} U \otimes (\cdot) : \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} & \to & \boldsymbol{Rep}_G \\ V & \mapsto & U \otimes V (\textit{amb l'acció: } g \cdot (u \otimes v) = (g \cdot u) \otimes v) \\ f & \mapsto & \begin{array}{rcl} U \otimes f : U \otimes V & \to & U \otimes W \\ u \otimes v & \mapsto & u \otimes f(v) \end{array} \end{array}$$

4. *La categoria* $\boldsymbol{Cat}$*. Podem considerar la categoria de les categories i els functors donen els morfismes entre elles.*

5. *El functor*

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{Rep} : \boldsymbol{Grp} & \to & \boldsymbol{Cat} \\ \\ G & \mapsto & \boldsymbol{Rep}_G \\ \\ f : H \to G & \mapsto & \begin{array}{rcl} f^* : \boldsymbol{Rep}_G & \to & \boldsymbol{Rep}_H \\ (V,\rho) & \mapsto & (V, \rho \circ f) \\ \phi : (V,\rho) \to (W,\sigma) & \mapsto & \phi : (V, \rho \circ f) \to (W, \sigma \circ f) \end{array} \end{array}$$

   Observem que f^* *és un functor també.*

Definició 1.3. *Un functor contravariant és un functor que ("gira") els morfismes. És a dir sigui* F *és un functor contravariant i* $f : U \to V$ *un morfisme. Llavors,* $F(f) \in Hom(F(V), F(U))$*. I, per tant* $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$*.*

Exemple 1.3. *El functor* $\boldsymbol{Rep}$ *és contravariant.*

Definició 1.4. *Suposem que* F *i* G *són dos functors de* C *a* D*. Una transformació natural* σ *de* F *a* G $(\sigma : F \Rightarrow G)$ *és una família de morfismes* $\sigma_X : F(X) \to G(X)$ *a* D*, indexada per objectes* $X \in C$*, subjecta a la següent condició: per a cada morfisme* $f : X \to Y$ *a* C*, tenim que*

$$\sigma_Y \circ F(f) = G(f) \circ \sigma_X.$$

Dit d'una altra manera, el següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\sigma_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Es pot veure com una espècie d'homotopia de functors.

Exemple 1.4. *Si per a cada grup* G *prenem en morfisme de projecció* $\pi_G : G \to [G,G]$*. La família d'aquests morfismes forma una transformació natural* $\pi : Id \Rightarrow (-)^{ab}$*.*

2 Adjuncions

Definició 2.1. *Es diu que un functor* $F : C \to D$ *és adjunt per l'esquerra d'un functor* $G : D \to C$ *(denotat per* $F \dashv G$*) si, per a cada* $X \in C$ *i* $Y \in D$*, existeix una bijecció* $\Phi_{X,Y} : Hom(F(X), Y) \to Hom(X, G(Y))$ *tal que si* $f : X' \to X$ *i* $g : Y \to Y'$ *són morfismes a* C *i* D*, respectivament, llavors per a tot* $h : F(X) \to Y$ *a* D*, tenim que:*

$$\Phi_{X',Y'}(g \circ h \circ F(f)) = G(g) \circ \Phi_{X,Y}(h) \circ f.$$

Exemple 2.1.

1. *Veiem que el functor d'abelianització* $(-)^{ab}$: $\boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Ab}$ *és adjunt per l'esquerra del funtor d'oblit* $\boldsymbol{Ab} \to \boldsymbol{Grp}$*.*

   Donats $h : G \to A \in Hom(G, A)$ *definim i* $k : G/[G, G] \to A \in Hom(G^{ab}, A)$

$$\begin{aligned} \Phi(h) : G/[G,G] &\to A \\ \Phi(h)(g[G,G]) &\mapsto h(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(k) : G &\to A \\ \Phi^{-1}(k)(g) &\mapsto k(g[G,G]) \end{aligned}$$

2. $U \otimes (-)$ *és adjunt per l'esquerra de* $Hom(U, -)$*. Sabem que donat* $f : U \otimes V \to W$ *podem construir* $g : V \to Hom(U, W)$ *amb la igualtat* $f(u \otimes v) = g(v)(u)$ *i viceversa.*

3. *Sigui* $f : H \to G$ *un homomorfisme de grups. Apliquem el functor Rep de l'Exemple 5.5 per obtenir un functor* $f^* : Rep_G \to Rep_H$*. El functor adjunt a l'esquerra de* f^* *és el functor d'inducció de representacions* $V \mapsto \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$*, i l'adjunt a la dreta de* f^* *és el functor de coinducció de representacions* $V \mapsto Hom_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], V)$*.*

   L'espai $Hom_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], V)$ *consisteix en aplicacions lineals* $f : \mathbb{C}[G] \to V$ *tals que* $f(ax) = af(x)$ *per a tot* $a \in \mathbb{C}[H]$ *i* $x \in \mathbb{C}[G]$*. L'afirmació que la representació induïda és adjunta a l'esquerra del functor de restricció* f^* *és una reformulació categòrica de la reciprocitat de Frobenius.*

   Sovint, aquestes construccions es consideren en la situació en què H *és un subgrup de* G*, i* f *és la inclusió. En el cas especial on* H *és el subgrup trivial de* G*, recuperem l'exemple anterior.*

GRUPS COMPACTES I DUALITAT DE TANNAKA

Martí Batista i Obiols

Abstract

En aquesta sessió tractarem el concepte de grup topològic (compacte) i algunes propietats inicials per familiaritzar-nos amb el concepte. Passarem després a treballar amb les seves representacions, veient així com es veuen generalitzades moltes de les propietats de les representacions de grups finits. Aquestes construccions ens proporcionaran el context per tractar el concepte de dualitat en determinats tipus de grup topològic i alguns teoremes importants com el de Pontryagin o el de Tannaka-Krein.

1. Grups Topològics

En aquesta secció veurem la definició de grup topològic i alguns resultats rellevants que hi estan relacionats. L'objectiu és familiaritzar-nos amb el concepte per després passar a treballar amb les seves representacions.

Definició 1.1. Un **grup topològic** és una terna $(G, \tau, \cdot)$, on (G, τ) és un espai topològic, $(G, \cdot)$ és un grup i se satisfan les següents condicions:

- $\cdot : G \times G \to G$ és contínua, havent dotat $G \times G$ de la topologia producte.
- $(\ \ )^{-1} : G \to G$ és contínua.

Observació. Notem que la primera condició equival que per a tot $g_1, g_2 \in G$ i per a tot $\mathcal{U} \in \tau$ tal que $g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{U}$, aleshores existeixen $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \tau$ amb $g_1 \in \mathcal{V}_1$ i $g_2 \in \mathcal{V}_2$ tals que $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 = \{h_1 \cdot h_2 : h_1 \in \mathcal{V}_1, h_2 \in \mathcal{V}_2\} \subseteq \mathcal{U}$. Similarment, la segona condició equival que per a tot $g \in G$ i per a tot $\mathcal{U} \in \tau$ tal que $g^{-1} \in \mathcal{U}$, existeix un $\mathcal{V} \in \tau$ amb $g \in \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}^{-1} = \{h^{-1} : h \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{U}$.

Definició 1.2. Un grup topològic $(G, \tau, \cdot)$ és **compacte** si (G, τ) és compacte.

Observació. El concepte de *compacitat* en espais topològics serveix per descriure formalment espais topològics que tenen algunes propietats pròpies d'espais finits (p.e. tot espai compacte és tancat, fitat, tota successió que hi estigui continguda té una parcial convergent a l'espai, tota funció real contínua en un compacte assoleix extrems absoluts, etc.). Fins ara hem treballat amb representacions de grups *finits*, amb la qual cosa és natural veure les representacions de grups *compactes* com aquelles que mantindran moltes de les propietats que hem anat desenvolupant al llarg de les sessions anteriors, però ara per grups més generals.

Exemple 1.3. $(\mathbb{R}, \tau_{euc}, +)$ és un grup topològic no compacte.

Exemple 1.4. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tau, +)$ **no** és un grup topològic, amb $\tau = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$, ja que l'antiimatge pel producte de $\{0\}$ és $\{(0,0), (1,1)\}$, que no és obert.

Proposició 1.5. *$GL(n, \mathbb{R})$ dotat de la topologia euclidiana de $\mathbb{R}^{n^2}$ i de l'operació interna de composició és un grup topològic.*

Proof. És senzill demostrar la continuïtat de la composició, i la de la inversa també utilitzant la Regla de Cramer (el determinant és funció contínua). $\square$

2. Propietats dels Grups Compactes

Els grups topològics disposen de totes les propietats intrínseques dels grups i dels espais topològics, però pel fet d'estar combinant totes dues estructures podem obtenir alguns resultats particulars més forts. Vegem-ne alguns:

Proposició 2.1. *Sigui G un grup topològic, i $g \in G$. Aleshores les aplicacions $L_g : G \to G$ i $R_g : G \to G$ definides per $L_g(h) = gh$ i $R_g(h) = hg$ són homeomorfismes.*

Proof. Considerem $\gamma_g : G \to G \times G$ definida per $\gamma_g(h) = (g, h)$, que és contínua. Aleshores L_g és la composició de la funció producte amb γ_g, i per tant és contínua. La bijectivitat de L_g és directa, i tenim que $(L_g)^{-1}$ és contínua degut que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Similarment procedim amb R_g. $\square$

Proposició 2.2. *Sigui G un grup topològic, amb $V \subseteq G$. Aleshores V és obert (tancat) si, i només si, V^{-1} és obert (tancat).*

Proof. Tenim que la funció $(\ )^{-1}$ és contínua, i per tant en efecte V^{-1} és un obert. Observem que $V = (V^{-1})^{-1}$, i hem acabat. $\square$

Proposició 2.3. *Sigui G un grup topològic i $\mathcal{U} \subseteq G$ un obert amb $e \in \mathcal{U}$. Aleshores existeix un obert $\mathcal{V}$, amb $e \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{-1}$ i $V \cdot V \subseteq \mathcal{U}$.*

Proof. La inversa per l'aplicació producte de $\mathcal{U}$ és un obert de $G \times G$, al qual (e, e) pertany. Aleshores, existeixen oberts $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ amb $e \in \mathcal{V}_1, e \in \mathcal{V}_2$ tals que $\mathcal{V}_1 \cdot \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Tenim que $\mathcal{V}_1^{-1}, \mathcal{V}_2^{-1}$ són oberts, i si definim $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_1^{-1} \cap \mathcal{V}_2^{-1}$ és fàcil veure que satisfà les condicions que buscàvem. $\square$

Proposició 2.4. *Un grup topològic G és Hausdorff si, i només si, $\{e\}$ és tancat.*

Proof. La implicació a la dreta és directa, assumim ara que $\{e\}$ és tancat. Per ser L_g homeomorfisme, tenim que $L_g(\{e\}) = \{g\}$ és tancat, per a tot $g \in G$. Prenem $g \neq e$ qualsevol. Per ser $\{g\}$ tancat, existeix un obert $\mathcal{U}$ amb $e \in \mathcal{U}$ i $g \notin \mathcal{U}$. Per la proposició anterior existeix un obert $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{-1}$ amb $e \in \mathcal{V}$ i $\mathcal{V} \cdot \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Ara bé, tenim que $g \in g \cdot \mathcal{V}$, i és $\mathcal{V} \cap g \cdot \mathcal{V} = \varnothing$ (si suposem que h es troba a la intersecció, és $h = g \cdot h_1$, per algun $h_1 \in \mathcal{V}$, i $h \in \mathcal{V}$; per tant, $g = h \cdot h_1^{-1} \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, la qual cosa és una contradicció.). Així, hem vist que e i g poden ser separats per oberts disjunts. Finalment, si prenem $g_1, g_2 \in G$ punts qualssevol de G, podem prendre $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ oberts disjunts amb $e \in \mathcal{U}_1$ i $g_1^{-1} \cdot g_2 \in \mathcal{U}_2$. Aleshores, per ser L_{g_1} un homeomorfisme, tenim que $g_1 \cdot \mathcal{U}_1$ i $g_1 \cdot \mathcal{U}_2$ són tots dos oberts, i a més $g_1 \in g_1 \cdot \mathcal{U}_1$ i $g_2 \in g_1 \cdot \mathcal{U}_2$. Notem que els oberts són disjunts. $\square$

Definició 2.5. Un **morfisme de grups topològics** entre $(G, \tau_1, \cdot)$ i $(H, \tau_2, \circ)$ és una aplicació $\psi : G \to H$ que és un morfisme topològic entre (G, τ_1) i (H, τ_2) (i.e. una aplicació contínua) i un morfisme de grups entre $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$. En cas que ψ sigui bijectiva, direm que és un **isomorfisme de grups topològics**.

Proposició 2.6. *Siguin G, H grups topològics. Si $\psi : G \to H$ és un morfisme de grups, si és continu en e, aleshores és continu a tot G (és morfisme topològic).*

Proof. Sigui $g \in G$ qualsevol, i sigui $\mathcal{U} \subseteq H$ obert tal que $\psi(g) \in \mathcal{U}$. Aleshores $\psi(e) = e_H \in \psi(g)^{-1} \cdot \mathcal{U}$, que és un obert de H. Així, per continuïtat en e, existeix $\mathcal{V} \subseteq G$ obert amb $e \in \mathcal{V}$ i tal que $\psi(V) \subseteq \psi(g)^{-1} \cdot \mathcal{U}$. Notem llavors que $g \cdot \mathcal{V}$ és un entorn obert de g, amb $\psi(g \cdot \mathcal{V}) = \psi(g) \cdot \psi(\mathcal{V}) \subseteq \psi(g) \cdot \psi(g)^{-1} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$. □

3. L'Espai Quocient

Donat un espai topològic (X, τ), si definim una relació d'equivalència $\sim$ en X, podem dotar el conjunt quocient $X/\sim$ de la topologia final respecte de la projecció (i.e. la topologia més *grollera* que fa contínua la projecció).

D'altra banda, donat un grup $(G, \cdot)$ i un subgrup normal $H \trianglelefteq G$, prenent la relació d'equivalència $g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} \cdot g_2 \in H$, podem dotar el conjunt quocient d'una operació $\star$ definida per $[g_1] \star [g_2] = [g_1 \cdot g_2]$ que fa que $(G/\sim, \star)$ tingui estructura de grup.

Ara treballem amb grups topològics que consten tant d'una topologia com d'una estructura de grup, amb la qual cosa podem definir un quocient que sigui una combinació d'aquests dos conceptes:

Definició 3.1. Sigui G un grup topològic, i sigui $H \trianglelefteq G$. Considerant G/H el conjunt de classes associat a la relació d'equivalència descrita pel subgrup, dotem G/H de la topologia final respecte la projecció a quocient, τ_π. Anomenem el grup topològic $(G/H, \star, \tau_\pi)$ el **grup quocient de G respecte H.**

Teorema 3.2. *Sigui $\psi : G \to H$ un morfisme de grups topològics exhaustiu. Si ψ és una aplicació oberta, aleshores $\widetilde{\psi} : G/Ker(\psi) \to H$, definida per $\widetilde{\psi}([g]) = \psi(g)$, és un isomorfisme de grups topològics.*

Proof. Del Primer Teorema d'Isomorfisme tenim que $\widetilde{\psi}$ és un isomorfisme de grups. Tenim trivialment que $\widetilde{\psi}$ és bijectiva i contínua (per definició de topologia final), i la continuïtat de la inversa ve donada pel fet que ψ és oberta. □

4. Grups de Lie

En aquesta secció comentarem breument un tipus particular de grup topològic de gran rellevància, els anomenats *grups de Lie*, i un dels resultats més importats relacionats amb aquests, el 5è Problema de Hilbert. L'objectiu és transmetre la trascendència d'alguns dels conceptes que hem tractat.

Definició 4.1. Una **varietat topològica de dimensió** n és un espai topològic localment euclidià (i.e. tot punt té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$), de Hausdorff, i tal que tot recobriment per oberts admet un refinament per un recobriment per oberts localment finit (és *paracompacte*).

Definició 4.2. Donada X una varietat topològica de dimensió n, un **atlas** és un recobriment per oberts $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de X juntament amb una família d'aplicacions $\{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$. A més, per a tot $i, j \in I$, anomenem **funció d'enganxament entre $\mathcal{U}_i$ i $\mathcal{U}_j$** l'homeomorfisme induït per:

$$\Phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \xrightarrow{\Phi_j} \Phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

Definició 4.3. Una **varietat topològica suau** és una varietat topològica X conjuntament amb un atlas $\{\Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ tal que totes les seves funcions d'enganxament són de classe C^∞.

Definició 4.4. Un **grup de Lie** és un grup topològic $(G, \tau, \cdot)$ on (G, τ) és una varietat diferenciable suau de dimensió finita on les aplicacions de producte i d'invers són de classe C^∞ (observem que cal tenir present que $G \times G$ és també una varietat diferenciable suau).

En aquest context és on va aparèixer de forma natural la pregunta de si la condició de suavitat era realment necessària; és a dir, si tot grup topològic que sigui una varietat topològica és isomorf (com a grup topològic) a un grup de Lie. La resposta a aquesta qüestió va ser positiva, essent resolta primerament per grups compactes (John von Neumann, 1933), més tard generalitzada a grups abelians localment compactes (Lev Pontryagin, 1934) i finalment resolta del tot (Andrew Gleason, Deane Montgomery, Leo Zippin, durant la dècada de 1950).

5. Representacions de Grups Topològics

En aquesta secció tractarem el concepte de representació per grups topològics. Veurem de quina forma alguns resultats vistos per grups finits generalitzen per determinats tipus de grup topològic. Comencem amb una observació:

Observació. Sigui $\mathcal{V}$ un espai vectorial de dimensió n (suposarem, per simplicitat, que el cos base és $\mathbb{R}$), i li fixem una base $\{v_1, ..., v_n\}$. Prenem l'isomorfisme $\pi : GL(\mathcal{V}) \to GL(n, \mathbb{R})$ donat per l'assignació de cada isomorfisme vectorial a la seva matriu associada en la base fixada. Tenint present la topologia considerada a l'inici per $GL(n, \mathbb{R})$, podem induir mitjançant l'isomorfisme considerat una topologia a $GL(\mathcal{V})$, i a més no és difícil veure que aquesta topologia no depèn de la base fixada. D'aquesta forma, per a tot $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}-$espai vectorial de dimensió n, és $GL(\mathcal{V})$ isomorf (com a grup topològic) a $GL(n, \mathbb{R})$.

Definició 5.1. Sigui G un grup topològic i sigui $\mathcal{V}$ un espai vectorial de dimensió finita. Definim una **representació contínua de G en $\mathcal{V}$** com un morfisme (de grups topològics) $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$.

Observació. Si prenem G un grup finit i el dotem de la topologia discreta, tenim una representació de G en el sentit que hem estat treballant fins ara. Per tant, el que veurem és una generalització dels conceptes previs.

Definició 5.2. Sigui $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$ una representació d'un grup topològic G. Direm que és una **representació irreductible** els seus únics subespais invariants són $\{0\}$ i $\mathcal{V}$, on un subespai $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ es diu que és **invariant** si $\forall g \in G$, és $\rho_g(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Observem que és essencialment la mateixa definició ja vista.

Definició 5.3. Denotem per $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunt de funcions reals contínues en un espai topològic X. Donada $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, anomenem **suport de** f, denotat per $sup(f)$, a $\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Direm $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ té **suport compacte** si $sup(f)$ és compacte. Denotem per $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}}(X) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunt de funcions contínues amb suport compacte. Denotarem per $\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(X) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunt de funcions contínues fitades. Observem que $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}}(X) \subseteq \mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(X)$.

Exercici 1: $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}}(X), \mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(X)$ són subespais vectorials de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$.
Exercici 2: Siguin $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ i $g \in G$ qualssevol. Aleshores es té que $f \circ L_g, f \circ R_g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. El mateix aplica si ens restringim a $\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(X)$ o $\mathcal{C}^c_{\mathbb{R}}(X)$.

Definició 5.4. Una aplicació lineal d'un $\mathbb{R}-$espai vectorial a $\mathbb{R}$ s'anomena **funcional lineal**. Sigui ara G un grup topològic. Considerem L un funcional lineal que té per domini qualsevol dels $\mathbb{R}-$espais vectorials $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G), \mathcal{C}^c_{\mathbb{R}}(G)$ o $\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(G)$. Direm que L és **invariant per l'esquerra** si $L(f \circ L_{g^{-1}}) = L(f)$. Similarment direm que és **invariant per la dreta** si tenim que $L(f \circ R_{g^{-1}}) = L(f)$. Direm que L és **invariant** si ho és per l'esquerra i per la dreta. Direm que L és **positiva** si es té que per a tota $f \geq 0$ és $L(f) \geq 0$. Si L és positiva i invariant direm que és una **mitjana invariant**.

Definició 5.5. Sigui G un grup topològic. Si existeix una mitjana invariant no nul·la amb domini $\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(G)$, direm que G és **susceptible**[1].

Definició 5.6. Una mitjana invariant L es diu que és **normalitzada** si el seu domini conté $\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(G)$ i $L(\mathbf{1}) = 1$, on $\mathbf{1}$ és la funció constant en 1.

Observació. En aquesta sessió no discutirem la aquesta definició, ni veurem la necessitat de restringir-nos a aquest tipus de grups topològics. L'objectiu és únicament tenir present que les propietats que donarem no són generals a tot grup topològic, sinó que només ho són d'un tipus particular.

Exemple 5.7. Alguns exemples de grups topològics susceptibles són els grups finits, els grups abelians o els grups resolubles.

Proposició 5.8. *Sigui G un grup topològic susceptible, i $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$ una representació contínua i fitada, amb $\mathcal{V}$ de dimensió finita. Aleshores existeixen subespais vectorials invariants $W_1, ..., W_k$ de $\mathcal{V}$ disjunts dos a dos tals que $\mathcal{V} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ i de tal forma que per a tot $i \in \{1, ..., k\}$ és $\rho_i : G \to GL(W_i)$, definida per $\rho_i(g) = \rho(g)_{|W_i}$, una representació irreductible.*

Teorema 5.9 (**Lema de Schur**). *Sigui G un grup topològic susceptible, i sigui, $\rho_1 : G \to GL(\mathcal{V}_1)$, $\rho_2 : G \to GL(\mathcal{V}_2)$ dues representacions contínues, fitades i irreductibles, amb $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ de dimensió finita i cos base $\mathbb{R}$. Aleshores, considerant $I(\rho_1, \rho_2)$ l'espai vectorial format pels morfismes de representacions entre ρ_1 i ρ_2, se satisfà una de les següents:*

- *ρ_1 i ρ_2 no són isomorfes i $dim(I(\rho_1, \rho_2)) = 0$.*

[1] En anglès, *amenable*.

- *ρ_1 i ρ_2 són isomorfes i $dim(I(\rho_1, \rho_2)) = 1$.*

Teorema 5.10. *Sigui G un grup topològic susceptible i $\pi : G \to GL(\mathcal{V}), \rho : G \to GL(\mathcal{U})$ dues representacions contínues i fitades en espais de dimensió finta, amb π irreductible. Si $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k$ és una descomposició de $\mathcal{U}$ en subespais invariants tal que cada ρ_i és irreductible, llavors tenim que*

$$dim(I(\pi, \rho)) = \#\{i : \rho_i \text{ és isomorfa a } \pi\}$$

i per tant, llevat d'isomorfisme, la factorització en irreductibles és única.

Observació. Podem definir el concepte de *caràcter* per grups topològics susceptibles, i extreure'n també propietats anàlogues a les vistes per grups finits.

6. Teoremes de Dualitat

En les matemàtiques, la *dualitat* és una transformació involutiva d'un determinat tipus d'objectes en un nou tipus d'objectes. Ser capaç de descriure el dual de diversos tipus d'objectes matemàtics ha estat un problema històricament molt rellevant. En el cas de Teoria de Grups el concepte de *dual d'un grup G* no està definit com a tal, sinó que existeixen diversos duals en funció de l'estructura *extra* que s'afegeixi al grup. Un dels més destacables és el següent:

Definició 6.1. Sigui G un grup topològic abelià i localment compacte. Definim el **dual de Pontryagin** de G per $G^* := Hom(G, \mathbb{S}^1)$; és a dir, els morfismes de grups topològics entre G i $\mathbb{S}^1$, on $\mathbb{S}^1$ està dotat de la topologia euclidiana i amb l'operació producte donada per les arrels de la unitat. L'operació binària interna a G^* és el producte puntual i la topologia és la *topologia compacte-obert*[2].

Teorema 6.2 (**Pontryagin**). *Sigui G un grup topològic abelià i localment compacte. Aleshores hi ha un isomorfisme canònic $G \cong (G^*)^*$.*

Més endavant es va poder desenvolupar una generalització d'aquest teorema, per grups topològics compactes (sense cap restricció sobre commutativitat). Per descriure aquest resultat és necessari observar primer que, fixat un grup topològic compacte G, les seves representacions i els seus respectius morfismes formen una categoria, que podem denotar per $\mathbf{Rep}_G$. El que ens diu el Teorema de dualitat de Tannaka-Krein és que tot grup topològic compacte pot ser reconstruït a partir de la seva categoria de representacions associada (notem que no s'ha d'imposar cap restricció sobre la commutativitat).

Considerem el functor *oblidadís* $F : \mathbf{Rep}_G \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$. Anomenem $\mathbf{Aut}(F, F)$ el conjunt de transformacions naturals de F en F, i el dotem de la topologia més grollera tal que, per a tota representació $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$, la projecció $\mathbf{Aut}(F, F) \to \mathbf{Aut}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ definida per $(\alpha_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}} \mapsto \alpha_{\mathcal{V}}$ és contínua (i.e. la topologia final respecte totes aquestes projeccions). Vegem una definició:

[2] En aquest cas, és la que té per subbase tots els conjunts de la forma $V(K, \mathcal{U})$, on $K \subseteq G$ és compacte, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}^1$ és un obert, i $V(K, \mathcal{U})$ denota les funcions contínues $f : G \to \mathbb{S}^1$ tals que $f(K) \subseteq \mathcal{U}$

Definició 6.3. Es diu que la transformació natural $(\alpha_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}$ **preserva els productes tensorials** si $\alpha_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}} = \alpha_{\mathcal{V}} \otimes \alpha_{\mathcal{U}}$. Anomenem $\mathcal{T}(G)$ el conjunt de les transformacions naturals de $\mathbf{Aut}(F, F)$ que preserven els productes tensorials.

En aquest context Tannaka va demostrar le següent resultat:

Lema 6.4 (**Tannaka**). *$\mathcal{T}(G)$ és un grup compacte amb la topologia induïda per $\boldsymbol{Aut}(F, F)$ i la composició com a operació interna.*

Podem definir una aplicació $G \to \mathcal{T}(G)$, definida per assignar a cada $g \in G$ la transformació natural consistent que, per a tota representació $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$, prenem $\alpha_{\mathcal{V}}^g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, on $\alpha_{\mathcal{V}}^g(v) := \rho_g(v)$. Aleshores, tenim el següent teorema:

Teorema 6.5 (**Tannaka-Krein**). *Aquesta aplicació $G \to \mathcal{T}(G)$ és un isomorfisme de grups topològics.*

Observació. Aquest resultat es pot trobar demostrat en detall a [1] pel cas de grups finits (notem que són un cas particular de grups topològics compactes).

Problema (obert): Trobar un anàleg d'aquests teoremes de dualitat per grups localment compactes no commutatius.

7. Referències

Les fonts principals són les següents:

[1] *Representations of Finite Groups* (2015), I. Moerdijk

[2] *An Introduction to the Theory of Topological Groups ans their Representations* (2011), V. Paulsen

[3] *Tannaka Duality*, NLAB

[4] *Tpological Manifolds*, NLAB

[5] *A categorical approach to Tannaka Duality* (2016), G. Alsina

Xerrada seminari representacions 12/12

1.- Varietats differenciables

• **DEF**: Una varietat topològica és un espai topològic X amb les següents propietats

① és hausdorff ② admet una base numerable d'oberts

③ $\forall x \in X$ $\exists U \subseteq X$ entorn i $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{\dim X}{n}}$ contínua tal que:

- $\phi : U \to \phi(U)$ és un homeo
- $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ és obert.

• **DEF**: Una carta és un parell (U, ϕ) com abans.

• **DEF**: donades ~~(φ, U)~~, (U, ϕ) i (V, ψ) cartes de X amb $V \cap U \neq \emptyset$. Aleshores,

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \xrightarrow{\cong} \phi(U \cap V)$$

homeo.

Aquestes les anomenem funcions de transició.

• **DEF**: Anomenem atles a $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ família de cartes que recobreixen X (varietat topològica) i són compatibles.

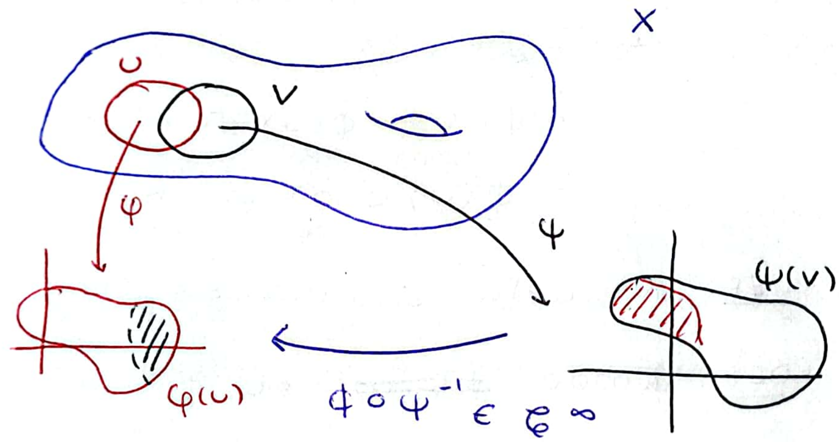
! $\phi \circ \psi^{-1}$ és una aplicació de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$, k és la regularitat de la funció de transició.

• **DEF**: dos atles són equivalents si la seva unió és un atles.

• **DEF** Una varietat diferenciable de dimensió n i classe r és X una varietat topològica i una classe d'atles de regularitat r.

! si $r=\infty$ diem diferenciable.

* a partir d'ara tot es diferenciable, ie: $r=\infty$.



• **DEF**: $f: M \longrightarrow N$ una aplicació entre varietats diferenciables de dimensió m i n resp. és diferenciable si $\forall (U,\phi)$ carta de M, $\forall (V,\psi)$ carta de N,

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \underbrace{\phi(f^{-1}(V)\cap U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \longrightarrow \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

és diferenciable.

• **DEF**: un difeomorfisme és una aplicació diferenciable amb inversa diferenciable.

2. Grups de Lie

• **DEF**: un grup de Lie és:

(pv 1) Varietat diferenciable M que té estructura de grup, on +, $^{-1}$ són diferenciables.

(pv 2) un grup topològic amb estructura de varietat diferenciable, on +, $^{-1}$ són diferenciables.

! $+ : G \times G \longrightarrow G$ diferenciable, on

- $G \times G$ té la topologia producte
- té l'estructura diferenciable induïda per G

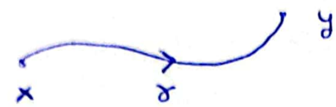
Exemples:

- $(\mathbb{R}^n, +)$ • $(\mathbb{R}^+, \cdot)$
- $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ • $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$
- $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{S}^3, \cdot)$ $\mathbb{H}$ de mòdul 1

• **DEF**: un morfisme de grups de Lie és $\phi: G \to H$ un morfisme de grups diferenciable.

3. Una mica més de topo

• **DEF**: Un espai topològic X és connex per camins si $\forall x,y \in X$ $\exists\, \gamma: I \to X$ tal que $\gamma(0)=x$ i $\gamma(1)=y$.



! connex per camins $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ connex

$\boxed{\text{! si } X \text{ és varietat el recíproc és cert}}$

• **DEF**: $\pi_0(X) := X/\sim$ $\quad x\sim y \iff \exists\, \gamma$ camí de x a y.

• **PROP**: (1) $G^0 :=$ component connexa de $e \in G$. Aleshores, $G^0 \trianglelefteq G$

(2) $\pi_0(G) \cong G/G^0$ amb la topologia quocient, com a grup és discret i contable.

ens podem reduir a l'estudi de grups de Lie connexos.

• **DEF**: $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ camins $\gamma_i(0) = P$, $\gamma_i(1) = Q$ són homòtops si $\exists\, H : [0,1] \times [0,1] \to X$ contínua tal que

(1) $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$

(2) $H(0,s) = P$, $H(1,s) = Q$.

• **DEF**: X és simplement connex si $\forall p, q \in X$ tots els camins de p a q són homòtops.

• **DEF**: Donat X un espai topològic, connex per camins, i $x \in X$, definim:

mòdul homotopia

$$\pi_1(X, x) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to X \\ \gamma(0) = \gamma(1) = x \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

Considerant l'operació concatenació de camins $\Rightarrow \pi_1(X, x)$ és un grup.

! no depèn de x.

Exemples:

① $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

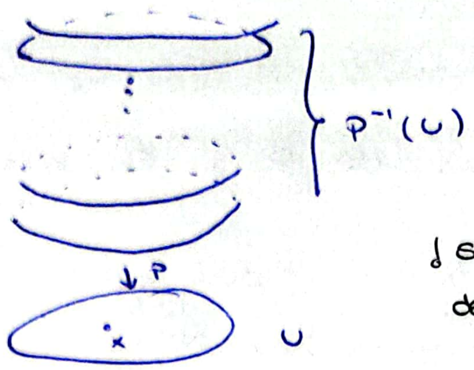
② $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}}_{\text{producte lliure}}$

! en general el grup fonamental no és commutatiu

4. Revestiments:

• **DEF**: $p : Y \to X$ diem que és un revestiment de X si localment llueix com $X \times F \to X$ on F és discret.

(ie: $\forall x \in X$ $\exists U \subseteq X$ entorn de x tal que $p^{-1}(U)$ és unió disjunta d'oberts, cadascun d'ells homeomorf a U.)



} si X és varietat diff demaneu p diff.

- **PRCP**: Tot revestiment té la propietat d'elevació de camins.

  $\downarrow$

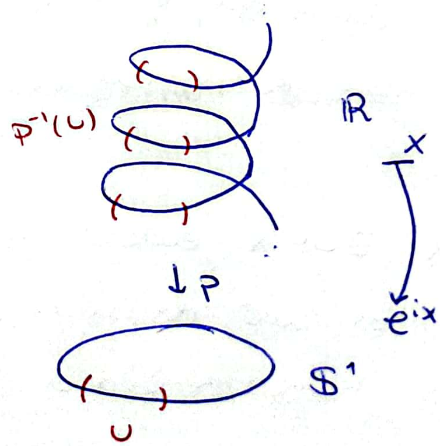
  $\forall b \in X$: $\tilde{b} \in p^{-1}(b) \subseteq Y$ si γ és un camí que comença en b $\Rightarrow \exists!\ \tilde{\gamma}$ que comença en $\tilde{b}$

- **PRCP**: si Z és simplement connex i $f: X \to Z$ contínua, tal que $f(z) = b \Rightarrow \exists!\ \tilde{f}: Z \to Y$ tal que $\tilde{f}(z) = b$.

- **DEF**: $p: Y \to X$ revestiment de X, diem que és universal si Y és simplement connex.

  (és únic llevat de iso.)

exemple:



• prop: si X és una varietat aleshores existeix el revestiment universal.

Veiem-ho:

homotop.

• $b \in X$ i considerem $\tilde{X}_b = \{$ camins en X que comencen en b $\} / \sim$

• tenim un morfisme natural $p: \tilde{X}_b \to X$

$\gamma \mapsto \gamma(1)$

• veiem que és revestiment universal:

- $x \in X$ considerem U un entorn de x prou petit per tal que sigui simplement connex.

- $h: U \times \underbrace{p^{-1}(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{classes d'homotopia de camins de } b \text{ a } x.}} \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que $(p \circ h)(u, f) = u$

h és la concatenació de f amb qualsevol camí que connecti u i x

• La topologia en cada $p^{-1}(U)$ s'enganxa bé a una topologia a $\tilde{X}_b$, l'elevació de camins implica $\tilde{X}_b$ és simplement connex.

Revestiments de grups de Lie:

El revestiment universal d'un grup de Lie G és,

$$\tilde{G} := \{ \gamma : [0,1] \longrightarrow G \ , \ \gamma(0) = e \} /\sim$$

homotopia

- PROP.: $\tilde{G}$ és un grup amb $\gamma_1 \cdot \gamma_2 (t) := \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$

  a més a més és una varietat.

- THM:

  1. $\tilde{G}$ és simplement connex com a grup de Lie.

     $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ és morfisme de grups de Lie.

  2. $\ker(p) \cong \pi_1(G)$

  3. $\ker(p)$ és un subgrup central de G

! $\pi_1(G)$ és commutatiu.

Grupos de Lie

Carlos Fernández Lorán y Júlia Vilageliu Giró*

December 2024

1 Variedades diferenciables

Definición 1.1. *Una* ***variedad topológica de dimensión*** n *es un espacio topológico* X *con las siguientes propiedades:*

- *es Hausdorff*
- *admite una base numerable de abiertos*
- $\forall x \in X \exists U \subseteq X$ *entorno abierto de* x *y* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *continua tal que:*
  - $\phi : U \to \phi(U)$ *es un homeomorfismo*
  - $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *es abierto*

Definición 1.2. *Una* ***carta*** *es un par* (U, ϕ) *como los descritos en la definición 1.1*

Definición 1.3. *Dadas dos cartas* (U, ϕ) *y* (V, ψ) *de* X *con* $V \cap U \neq \emptyset$*. Entonces,*

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \xrightarrow{\cong} \phi(U \cap V)$$

las llamamos ***funciones de transición****. Si* $\phi \circ \psi^{-1}$ *es de clase* C^k *como función de* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^n$*, diremos que la* ***regularidad*** *de la función de transición es* k*.*

Definición 1.4. *Llamamos* ***atlas*** *de* X *a* $A = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ *una familia de cartas que recubren* X *y son compatibles.*

Definición 1.5. *Dos atlas son* ***equivalentes*** *si su unión es un atlas.*

Definición 1.6. *Una* ***variedad diferenciable de dimensión*** n ***y clase*** r *es una variedad topológica* X *y una clase de atlas de regularidad* r*. Si* $r = \infty$ *decimos que es diferenciable.*

A partir de ahora, todas las variedades que contemplaremos serán diferenciables, i.e. $r = \infty$.

*L'escrit és de tots dos i la xerrada la va fer el primer.

Definición 1.7. *Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Una aplicación entre variedades diferenciables $f : M \to N$ es* ***diferenciable*** *si para toda carta (U, ϕ) de M y para toda carta (V, ψ) de N,*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m \to (\psi(V)) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es diferenciable.

Definición 1.8. *Un* ***difemorfismo*** *es una aplicación diferenciable con inversa diferenciable.*

2 Grupos de Lie

Definición 2.1. *Un* ***grupo de Lie es****:*

1. *Una variedad diferenciable M que tiene estructura de grupo con $+$ y $(\_)^{-1}$ diferenciables.*
2. *Un grupo topológico con estructura de variedad diferenciable, con $+$ y $(\_)^{-1}$ diferenciables.*

Remarca 2.2. *$+ : G \times G \to G$ es diferenciable con $G \times G$ con la topología producto y la estructura diferenciable inducida por G.*

Ejemplo 2.3.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$
2. $(\mathbb{R}^+, \cdot)$
3. $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$
4. $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$
5. $(S^1, \cdot)$ *con S^1 vista como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*
6. $(S^3, \cdot)$ *con S^3 vista como $\mathbb{H}$ de módulo 1*

Definición 2.4. *Un* ***morfismo de grupos de Lie*** *es un morfismo de grupos $\phi : G \to H$ diferenciable.*

3 Conexión por caminos y Homotopía

Definición 3.1. *Un espacio topológico X es* ***conexo por caminos*** *si para todo par $x, y \in X$ existe un camino $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.*

Remarca 3.2. *Conexo por caminos implica conexo, pero el recíproco no es cierto.*

Definición 3.3. *El conjunto de* ***componentes conexas de*** *X es $\pi_0 \coloneqq X/\sim$ con $x \sim y \iff \exists \gamma$ un camino de x a y.*

Si para un grupo de Lie G tomamos G^0 como la componente conexa de $e \in G$, tenemos:

Proposición 3.4. *1. G^0 es un subgrupo normal de G.*

2. $\pi_0(G) \cong G/G^0$ con la topología cociente, como grupo es discreto y numerable.

Este resultado nos permite reducir nuestro estudio a los grupos de Lie conexos.

Definición 3.5. *Dos caminos $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ tal que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$ son **homótopos** si existe una aplicación continua $H : I \times I \to X$ tal que*

1. *$H(t, 0) = \gamma_0(t)$ y $H(t, 1) = \gamma_1(t)$*
2. *$H(0, s) = p$ y $H(1, s) = q$*

Definición 3.6. *Un espacio topológico X es **simplemente conexo** si $\forall p, q \in X$ todos los caminos de p a q son homótopos.*

Definición 3.7. *Dado un espacio topológico X, conexo por caminos, y $x \in X$, definimos:*

$$\pi_1(X, x) = \{\gamma : I \to X \text{ caminos tal que } \gamma(0) = \gamma(1) = x\}/\sim$$

Donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por la homotopía de caminos. Si lo consideramos con la operación concatenación de caminos $\pi_1(X, x)$ es un grupo.

Remarca 3.8. *Como hemos pedido que X sea conexo por caminos, $\pi_1(X, x)$ no depende de x, si no fuera conexo por caminos, tendríamos un grupo diferente para cada componte conexa de X.*

Ejemplo 3.9. *1. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ que es conmutativo.*

2. $\pi(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ que no es conmutativo.

4 Revestimientos

Definición 4.1. *Diremos que $p : Y \to X$ es un **revestimiento** de X si localmente luce como $X \times F \to X$ donde F es discreto. Es decir, que para todo $x \in X$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x tal que $p^{-1}(U)$ es unión disienta de abiertos, cada uno de ellos homeomorfo a U.*

Proposición 4.2. *Todo revestimiento tiene la propiedad de elevación de caminos. Es decir, que para todo $b \in X$ y $\tilde{b} \in p^{-1}(b) \subseteq Y$ si γ es un camino que comienza en b, entonces existe un único camino $\tilde{\gamma}$ que comienza en $\tilde{b}$ y $p(\tilde{\gamma}) = \gamma$.*

Proposición 4.3. *Si Z es simplemente conexo y $f : Z \to X$ es una función continua tal que $p(z) = b$ y $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$. Entonces, existe una única $\tilde{f} : Z \to Y$ continua tal que $\tilde{f}(z) = \tilde{b}$.*

Definición 4.4. *Diremos que un revestimiento $p : Y \to X$ de X es un* ***revestimiento universal*** *de X si Y es simplemente conexo. En caso de que exista, es único sin contar con isomorfismo.*

Ejemplo 4.5.

Proposición 4.6. *Si X es una variedad, entonces existe un recubrimiento universal de X.*

Prueba. Sea $b \in X$, consideramos $\tilde{X}_b$ el conjunto de caminos en X que comienzan en b módulo homotopía. Tenemos un morfismo natural $p : \tilde{X}_b \to X; \gamma \mapsto \gamma(1)$. Veamos que es un recubrimiento universal:

Sea $x \in X$ consideramos U un entorno abierto de x suficientemente pequeño para que sea simplemente conexo. Definimos $h : U \times p^{-1}(x) \to p^{-1}(U)$ tal que $(p \circ h)(U, f) = U$ ($p^{-1}(x)$ son las clases de homotopía de caminos de b a x) tenemos que h es la concatenación con f de cualquier camino que conecte u y x. La topología de cada $p^{-1}(U)$ se engancha bien con la topología de $\tilde{X}_b$, la elevación de caminos implica que $\tilde{X}_b$ es simplemente conexo. □

5 Revestimientos de grupos de Lie

El revestimiento universal de un grupo de Lie G es,

$$\tilde{G} = \{\gamma : I \to G; \gamma(0) = e\}/\sim \tag{1}$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia asociada a la homotopía de caminos.

Proposición 5.1. *$\tilde{G}$ es un grupo con $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) := \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$. Además, es una variedad.*

Teorema 5.2.

1. *$\tilde{G}$ es simplemente conexo como grupo de Lie y $p : \tilde{G} \to G$ es un morfismo de grupos de Lie.*
2. *$Ker(p) \cong \pi_1(G)$*
3. *$Ker(p)$ es un subgrupo central (conmutativo) de G*

6 Álgebras de Lie

Dado un elemento $a \in G$ podemos definir

$$L_a : G \longrightarrow G \qquad R_a : G \longrightarrow G$$
$$x \mapsto ax \qquad\qquad x \mapsto xa$$

del grupo sobre si mismo. Estas funciones son difeomorfismos del grupo bajo la estructura de variedad diferenciable y se llaman *multiplicación por la izquierda* y *multiplicación por la derecha* respectivamente.

Definición 6.1. *Una* ***álgebra de Lie*** *es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto con una operación bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada* ***braquet de Lie****, con las siguientes propiedades*

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ *(Antisimetría)*
2. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(Identidad de Jacobi)*

para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Sea G un grupo de Lie, y sea

$$\mathfrak{g} = Lie(G) := \mathfrak{X}(G)^G$$

el espacio de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda. Este espacio tiene una estructura natural de álgebra de Lie dada por el conmutador de campos vectoriales, $[X,Y] = XY - YX$ y lo llamaremos el **Álgebra de Lie asociada a** G. Podríamos entender el braquet de Lie como una medida de cuanto "no conmutan" dos elementos $X,Y \in \mathfrak{g}$

Teorema 6.2. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe un único (sin contar con isomorfismo) grupo de Lie $\tilde{G}$ con la propiedad de ser conexo, simplemente conexo y tal que $Lie(\tilde{G}) = \mathfrak{g}$. Además, si G es otro grupo de Lie tal que $Lie(G) = \mathfrak{g}$, entonces existe un homomorfismo (revestimiento) $p : \tilde{G} \to G$.*

Definición 6.3. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, que es el espacio tangente a G en la identidad e. La* ***exponencial*** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *se define como:*

$$\exp(X) = \gamma_X(1)$$

donde $\gamma_X(t)$ es la curva en G obtenida como la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\gamma_X(t) = X_{\gamma_X}(t), \quad \gamma_X(0) = e$$

Definición 6.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, definimos el* ***álgebra universal envolvente*** *$U(\mathfrak{g})$ como un álgebra asociativa tal que $\mathfrak{g}$ es un subespacio de $U(\mathfrak{g})$ y las operaciones internas respetan el braquet de Lie: $XY - YX = [X,Y]$ para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$.*

7 Representaciones de Grupos de Lie

Definición 7.1. *Sea G un grupo de Lie y sea V un espacio vectorial topológico localmente convexo. Una* ***representación de*** *G* ***en*** *V es un morfismo de grupos*

$$\pi : G \to GL(V)$$

que es continuo en la topología fuerte de V, es decir, la función $(g,v) \mapsto \pi(g)v$ es continua. En este caso decimos que (π, V) es una representación de G.

Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial con una topología asociada tal que las aplicaciones suma y multiplicación por escalar son continuas. La propiedad de ser *localmente convexo* significa que todo punto tiene un entorno convexo. Una *topología fuerte* en V es una topología que asegura que las evaluaciones de la acción de G sobre V sean compatibles con la continuidad de los operadores lineales.

Ejemplo 7.2. *1. Sea $G = S^1$, y sea*

$$\begin{aligned} \pi : S^1 &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ \theta &\longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces $(\pi, \mathbb{C}^2)$ es una representación de S^1.

2. Sea $G = SL_n(\mathbb{R})$ [1] y consideramos la representación dada por asignar a cada elemento de G la transformación lineal que representa. Esta representación se llama representación de definición de $G = SL_n(\mathbb{R})$.

Definición 7.3. *Decimos que dos representaciones (π, V), (σ, W), son **equivalentes** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T : V \to W$ que conmuta con la operación del grupo, es decir, que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi(g)} & V \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ W & \xrightarrow[\pi(g)]{} & W \end{array}$$

Ejemplo 7.4. *Consideramos las dos representaciones de $\mathbb{R}^*$,*

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \quad y \quad x \mapsto \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

es claro que estas dos representaciones son equivalentes.

Definición 7.5. *Sea (π, V) una representación de G. Decimos que $W \subset V$ es un **espacio invariante** si $\pi(g)W \subset W$ para todo $g \in G$.*

Definición 7.6. *Decimos que una representación (π, V) de G es **irreducible** si los únicos espacios invariantes son $\{0\}$ y V.*

Lema 7.7. ***(Lema de Schur)*** *Supongamos que (π, V) es una representación irreducible de G y sea $T \in End(V)$ una transformación equivalente, es decir $\pi(g)T = T\pi(g)$, para todo $g \in G$. Entonces $T = \lambda Id$.*

[1] $SL_n(\mathbb{R})$ es el *grupo lineal especial*, el grupo de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión n de determinante 1.

Prueba. Para probar este lema observamos que siempre es posible encontrar un valor propio λ de T. Por lo tanto $Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$. Como $Ker(T - \lambda Id)$ es un espacio invariante bajo la acción de G y V es irreducible, concluimos que $Ker(T - \lambda Id) = V$, es decir $T = \lambda Id$. $\square$

Definición 7.8. *Diremos que una representación (π, V) es **completamente irreducible** si existen subespacios invariantes $V_j \subset V, j = 1, \ldots, l$ tal que $V_i \cap V_j = \{0\}$ y*

$$V = \bigoplus V_j$$

.

Observamos que no todas las representaciones son completamente irreducibles, por ejemplo la representación

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

no es completamente irreducible.

Definición 7.9. *Un **espacio de Hilbert** H es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, dotado de un producto interno (producto escalar) $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ que cumple*

1. *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal.*
2. *Para todo $x, y \in H$ se cumple $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.*
3. *El producto interno es definido positivo: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
4. *H es completo con la norma inducida por el producto interno.*

Definición 7.10. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Una **medida de Haar** en G es una medida que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Invariancia bajo traslaciones: Si $A \subset G$ un conjunto medible y $g \in G$, entonces $\mu(gA) = \mu(A)$.*
2. *Regularidad: se puede aproximar por arriba, por abajo por compactos y abiertos.*
3. *Finita en compactos: para cualquier conjunto compacto $K \subset G$, $\mu(K) < \infty$.*
4. *No trivial*

Definición 7.11. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Sea μ una medida de Haar en G. Definimos la **función modular** $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ definida por la propiedad:*

$$\int_G f(gx)d\mu(x) = \Delta(g)\int_G f(x)d\mu(x)$$

*Diremos que G es **unimodular** si $\Delta(g) = 1$ para todo $g \in G$.*

Definición 7.12. *Sea H un espacio de Hilbert. Una representación (π, H) se dice que es **unitaria** si $\pi(g)$ es un operador unitario para todo $g \in G$, es decir si*

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall g \in G$$

Observamos que si $dimH < \infty$, entonces toda representación unitaria es completamente reducible, ya que si $V \subset H$ es un subespacio invariante, entonces $V^\perp$ también es invariante.

Supongamos a partir de ahora que G es un grupo compacto, y sea (π, H) una representación de G en el espacio de Hilbert H con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Definamos un nuevo producto interior $(\cdot,\cdot)$ en H mediante

$$(v, w) = \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle dg$$

donde dg es la medida de Haar en G. Como G es compacto, $Vol(G) < \infty$ y la integral que define el nuevo producto interior converge para todo $v, w \in H$. Resulta entonces facil comprobar que

$$\begin{aligned}(\pi(x)v, \pi(x)w) &= \int_G \langle \pi(gx)v, \pi(gx)w\rangle dg \\ &= \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle dg = (v, w)\end{aligned}$$

es decir, (π, H) es una representación unitaria con respecto a este producto. Esto se llama el "truco unitario" de Weyl. Podemos notar que usando este truco podemos asumir que cualquier representación de un grupo de Lie compacta es unitaria y, por tanto, que cualquier representación de dimensión finita es completamente reducible. De hecho también tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.13. *Sea G un grupo compacto, y sea (π, H) una representación unitaria irreducible de G. Entonces $dim(H) < \infty$.*

Ejemplo 7.14.

1. *Sea $G = S^1$. Entonces, todas las representaciones unitarias irreducibles de G son de la forma $\theta \mapsto e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

2. *Podemos definir dos acciones de G en el espacio $L^2(G)$, llamadas acción regularidad por la derecha y acción regularidad por la izquierda, definidas respectivamente por*

$$(L_a \cdot f)(x) = f(a^{-1}x) \quad y \quad (R_a \cdot f)(x) = f(xa)$$

Si G es unimodular, entonces

$$\begin{aligned}\langle L_a f, L_a h\rangle &= \int_G \overline{L_a f(x)} L_a h(x) dx = \int_G \overline{f(a^{-1}x)} h(a^{-1}x) dx \\ &= \int_G \overline{f(x)} h(x) dx = \langle f, h\rangle \\ &= \int_G \overline{f(xa)} h(xa) dx = \langle R_a f, R_a h\rangle\end{aligned}$$

Juntando estas dos acciones obtenemos una representación unitaria de $G \times G$ en $L^2(G)$.

Observemos que considerando como un espacio de Hilbert

$$L^2(S^1) = \hat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} e^{in\theta}$$

y el espacio generado por cada $e^{in\theta}$ es invariante bajo la acción regular, es decir, $L^2(S^1)$ es generado por las funciones que obtenemos de las representaciones irreducibles de S^1.

En general tenemos la siguiente construcción. Sea G un grupo compacto, y sea (π, H) una representación unitaria e irreducible de G. Dados $v, w \in H$, definimos una función $c_{v,w} : G \to \mathbb{C}$ mediante

$$c_{v,w}(g) = \langle \pi(g)v, w\rangle$$

las funciones $c_{v,w}$ se llaman las *funciones coeficientes* de la representación.

Remarca 7.15. *Si (π, V), (σ, W) son dos representaciones equivalentes, entonces los espacios generados por sus funciones coeficiente son iguales*

Hay otra manera ligeramente distinta de ver a las funciones coeficiente. Sean $v, w \in H$ y definamos $T_{v,w} \in End(H) \simeq H \otimes H^*$ mediante

$$T_{v,w}(u) = \langle v, u\rangle w$$

Esto genera un operador que "proyecta" un vector u hacia la dirección de w ponderada por el producto interno con v, entonces

$$\begin{aligned}tr(\pi(g)^{-1}T) &= Tr(u \mapsto \langle \tilde{v}, u\rangle \pi(g^{-1})w) \\ &= \langle v, \pi(g)^{-1}w\rangle = \langle \pi(g)v, w\rangle = c_{v,w}(g)\end{aligned}$$

lo que conecta las funciones coeficiente con la estructura algebraica de $End(H)$.

Teorema 7.16. *Sea (π, H) una representación unitaria de G. Definamos una acción de $G \times G$ en $End(H)$ mediante $(g, h) \cdot T = \pi(g)T\pi(h^{-1})$, y sea*

$$\begin{aligned}A : End(H) &\longrightarrow L^2(G) \\ T &\longmapsto (g \mapsto Tr(\pi(g)^{-1}T))\end{aligned}$$

Entonces A es una transformación lineal G-equivalente, es decir, que A es lineal y que respeta la acción del grupo en ambos espacios:

$$A((g, h) \cdot T) = g \cdot (A(T)) \cdot h^{-1}$$

Definición 7.17. *Dada una representación (π, H) definimos el* ***carácter de la representación*** *como la función $\chi(x) = Tr(\pi(x))$. Observemos que esta función tiene la característica de que $\chi(gxg^{-1}) = \chi(x)$.*

Teorema 7.18. ***(Relaciones de Ortogonalidad de Schur)*** *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita y definamos un producto, un producto interno en $End(H)$ mediante $\langle T, S\rangle = Tr(T^*S)$, donde T^* es el operador adjunto de T*

1. *Si (π_1, H_1), (π_2, H_2) son dos representaciones irreducibles e inequivalentes de G. Entonces para todo $T \in End(H_1)$, $S \in End(H_2)$*

$$\langle A(T), A(S)\rangle = 0$$

2. *Si $S, T \in H$, entonces*

$$\langle A(S), A(T)\rangle = \frac{1}{d}\langle S, T\rangle$$

   donde $d = dimH$.

Este teorema no solo establece una relación entre la irreductibilidad de las representaciones en G y su independencia algebraica, que se traduce en su ortogonalidad en $L^2(G)$, sino que también establece una relación entre $End(H)$ y $L^2(G)$.

Definición 7.19. *Sea G un grupo de Lie, definiremos su* ***espectro unitario*** *como el conjunto*

$$\hat{G} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de equivalencia de las representaciones} \\ \textit{unitarias irreducibles de } G \end{array} \right\}$$

Estos últimos resultados y definiciones nos dicen que existe un encaje

$$\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} A(H_\gamma \otimes H_\gamma^*) \subset L^2(G)$$

que además es $G \times G$ equivariante. El teorema de Peter-Weyl nos dice que este encaje es, de hecho, suprayectivo.

Teorema 7.20.

$$L^2(G) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} A(H_\gamma \otimes H_\gamma^*) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} A(End(H_\gamma))$$

Además, si $f \in C^\infty(G)$, entonces $\oplus_{\gamma \in \hat{G}} f_\gamma \to f$ uniformemente, donde f_γ es la proyección de f al espacio $A(End(H_\gamma))$.

Podemos definir una acción de $\mathfrak{g}$ en $C^\infty(G)$ mediante

$$(Xf)(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g \exp tX)$$

y podemos extender esta acción hasta definir una acción de $U(\mathfrak{g})$, el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$, que de esta manera se identifica con el espacio de operadores diferenciales invariantes por la izquierda de G. Observamos que usando esta identificación, el espacio de operadores invariantes tanto por la izquierda como por la derecha es precisamente el centro del álgebra universal envolvente, $Z(\mathfrak{g})$. El lema de Schur nos dice que cada $X \in Z(\mathfrak{g})$ actúa como multiplicación por escalar en cada una de las componentes $H_\gamma \otimes H_\gamma^*$ y, por tanto, si tenemos una ecuación diferencial en G que resulta ser bi-invariante bajo la acción del grupo, entonces podemos reducir el problema de resolver esta ecuación diferencial a resolver una serie de ecuaciones algebraicas. Es un principio de la física que las ecuaciones que definen las fuerzas fundamentales de la naturaleza deben permanecer invariantes bajo las simetrías del espacio. En el caso de un grupo de Lie G esto significa que deberían poderse expresar usando operadores diferenciales bi-invariantes. Observemos que, en particular, el elemento de Casimir de $\mathfrak{g}$ actúa en G como el operador de Laplace y siempre se encuentra en $Z(\mathfrak{g})$.

Ejemplo 7.21. *En el caso cuando $G = S^1$ tenemos que*

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{inx} = ine^{inx}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$

y estos son los unicos valores propios del laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.