Documentació del grup de lectura sobre el teorema de De Rham

Diversos alumnes dels graus de matemàtiques i de física

Curs 2022-2023

Semestre de primavera

Aquesta compilació conté els documents corresponents al grup de lectura sobre el teorema de De Rahm,[1] realitzat a la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, durant el semestre de primavera del curs 2022-2023.

Organitzador:	Roger Garrido Vilallave.
Participants:	Elena Solà Cava, Joan Domingo Pasarin, Joaquim Vives Fornt, Jordi Riu Pont, Júlia Villaró Cañizal, Marc Piquer i Méndez, Óscar Fernández Acacio, Quim Mas Paradís i Roger Garrido Vilallave.

Resum

L'objectiu d'aquest grup de lectura és introduir la teoria necessària per poder entendre el teorema de De Rham. Amb aquest propòsit, s'introdueix els conceptes bàsics de topologia algebraica, geometria diferencial i integració en varietats, particularitzant a la cohomologia de De Rham. Es tanca el recull amb dos resultats fonamentals: el teorema de Stokes (generalitzat) i el ja esmentat teorema de De Rham.

[1]Podeu contactar amb el grup al correu electrònic grupdelecturamatesub@gmail.com. També podeu trobar totes les memòries a linktr.ee/lectura_mates_ub.
Disseny del logotip: Yaiza Aguilar Carós.

2020 Mathematics Subject Classification: 58-06, 58A12.

Índex

Introducció 1

1. Introducció a la topologia algebraica (R. G. V.) 3

2. Introducció a la geometria diferencial (M. P. M.) 10

Addendum: El pla projectiu (R. G. V.) 15

3. Formes diferencials (R. G. V.) 19

4. Exemples de formes (R. G. V.) 22

5. Orientacions (M. P. M.) 25

Addendum: Exemples d'orientacions (R. G. V.) 28

6. Mètrica riemanniana, forma de volum i aplicació de Gauss (R. G. V.) 30

Addendum: Exemples de varietats riemannianes, formes de volum i l'aplicació de Gauss (R. G. V.) 33

7. Propietats de la cohomologia de De Rham (R. G. V. i M. P. M.) . . 37

Addendum: Resum de geometria diferencial i riemanniana (R. G. V.) . . 40

8. Complexos de cocadenes i la successió de Mayer-Vietoris (R. G. V. i J. V. F.) 46

9. Integració en varietats I (J. R. P.) 52

10. Integració en varietats II (J. D. P.) 56

11. Varietats amb vora diferenciable (Q. M. P.) 61

12. El teorema de Stokes (M. P. M.) 66

13. El teorema de De Rham (R. G. V.) 68

Introducció

El Teorema de De Rham és un resultat que relaciona la cohomologia de De Rham amb la cohomologia singular.

Per una banda, la cohomologia de De Rham és un invariant geomètric de la varietat que estudia les formes diferencials que són tancades però no exactes. Per exemple, el clàssic lema de Poincaré es pot reformular en termes de la cohomologia de De Rham de la següent manera: *tot domini estrellat $U \subseteq \mathbb{R}^n$ té cohomologia de De Rham trivial* (nul·la llevat de grau zero, que és u-dimensional).

El lema de Poincaré ja deixa entreveure que la cohomologia de De Rham depèn, en certa manera, de la topologia, ja que per demostrar-lo cal utilitzar la hipòtesi que és estrellat (no funcionaria, per exemple, si el domini tingués algun *forat*).

Per altra banda, la cohomolgia singular d'una varietat (o, en general, d'un espai topològic) és un invariant topològic que, informalment, es diu que medeix els forats de la varietat. És un dels objectes centrals d'estudi en topologia algebraica.

El teorema de De Rham estableix que, contra tot pronòstic, ambdues cohomologies són isomorfes. El més sorprenent és que, per definir la cohomologia de De Rham cal una estructura diferencial, i això és independent de la topologia. Com a conseqüència del teorema, es pot prendre tantes estructures diferencials com es vulgui, que la cohomologia de De Rham no variarà.

Com que la cohomologia singular s'entén com una representació dels forats de la varietat, obtenim que una forma diferencial tancada però no exacta apareix exactament quan la varietat té un forat. Per exemple, com que S^1 té un únic forat monodimensional, hi ha una 1-forma diferencial que és tancada però no exacta.

Per poder entendre el teorema, per tant, cal posar les bases de la topologia algebraica i la geometria diferencial, cosa que s'ha fet al llarg de les xerrades d'aquest grup de lectura: per la part més analítica o geomètrica, hem definit la integració i demostrat el Teorema de Stokes; en canvi, també hem parlat de la successió exacta de Mayer-Vietoris, que és una eina fonamental en la topologia algebraica.

Context històric

La història del teorema de De Rham[3] té les seves arrels en la teoria de les formes diferenciables desenvolupada per Henri Poincaré (1854-1912) i Élie Cartan (1869-1951) a principis del segle XX. El propi Georges de Rham (1903-1990) va entrar en joc en aquest camp el 1931 en provar la conjectura de Cartan que una forma tancada és exacta si la seva integral és nul·la sobre tota subvarietat sense vora i que una subvarietat sense vora és ella mateixa la vora d'una altra subvarietat si tota forma tancada hi té integral nul·la.

[3] Dieudonné, J. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960.* 1ª ed. Basilea: Birkhauser, 1989.

Seguint aquest treball, de Rham estudià la unificació de les nocions de forma i subvarietat, cosa que va resultar en la seva noció de *corrent*, inspirada per la recent teoria de distribucions. La seva feina va ser crucial per la topologia diferencial i per la teoria de la mesura geomètrica.

Cal fer notar, però, que de Rham no va formular aquests resultats en termes de la teoria de la cohomologia. Això no es va fer fins després, als anys 50. El resultat central que s'exposa en aquest treball és precisament la traducció a termes cohomològics de (part de) la tesi de de Rham de 1935.

Consideracions pràctiques

Aquest grup de lectura s'ha organitzat a iniciativa d'en Roger Garrido Vilallave, i s'ha dut a terme a l'aula S4 de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Inicialment, l'objectiu era el teorema d'Attiyah-Singer. Abans de començar, es va considerar inabastable aquest objectiu i es va reorientar el grup al teorema de Hodge. El dia 3 de març de 2023, la tercera trobada, es va acordar tornar a reorientar el grup cap al teorema de De Rham. A tal efecte, s'ha seguit liberalment *From Calculus to Cohomology*, de I. Madsen i J. Tornehave.[4] S'ha estructurat el contingut en les xerrades que es pot veure a la taula següent.

	Data	Tema
1	17/II	Introducció a la topologia algebraica
2	24/II	Introducció a la geometria diferencial
3	3/III	Formes diferencials
4	10/III	Exemples de formes diferencials
5	17/III	Orientacions
6	22/III	Mètrica riemanniana, forma de volum i aplicació de Gauss
7	12/IV	Propietats de la cohomologia de De Rham
8	19/IV	Complexos de cocadenes i la successió de Mayer-Vietoris
9	26/IV	Integració en varietats I
10	10/V	Integració en varietats II
11	17/V	Subvarietats amb vora
12	24/V	El teorema de Stokes
13	15/VI	El teorema de De Rham

Taula 1: Calendari de l'activitat del grup. Totes les dates són a 2023.

[4] Madsen, I. i Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

INTRODUCCIÓ A LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 17 DE FEBRER DE 2023

La referència estàndard per aquesta introducció és [1].

1. Cadenes

Definició 1. Sigui $n \geq 0$. Definim el n**-símplex** Δ_n com el subespai topològic de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta_n := \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i = 1,\ x_i \geq 0\}.$$

En particular, el 0-símplex Δ_0 és el punt, l'1-símplex Δ_1 és l'interval $[0, 1]$, el 2-simplex Δ_2 és un triangle ple, el 3-símplex Δ_3 és un tetraedre ple, i generalitza de la manera *òbvia* a dimensions superiors. Es pot pensar que un n-símplex és un *triangle de dimensió n*.

Donat un espai topològic X, volem mirar quins triangles n-dimensionals tenen a dins. Un n-símplex a dins d'un espai topològic és una aplicació contínua $\sigma : \Delta_n \to X$.

Definició 2. Sigui X un espai topològic. Anomenem n**-cadena** (en anglès, n-**chain**) a tota aplicació contínua $\sigma : \Delta_n \to X$.

Exemple 3. L'espai topològic $*$ amb un sol punt té una única n-cadena per cada n, que és $\sigma_n : \Delta_n \to *$, $\sigma_n(x) = *$.

Exemple 4. Si X és un espai topològic, una 1-cadena és el mateix que una corba parametritzada (contínua, que no necessàriament diferenciable) $\gamma : [0, 1] \to X$, ja que $\Delta_1 \cong [0, 1]$.

Exemple 5. Un exemple de 2-cadena en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ és el disc de radi 1 i centrada en el 0, amb alguna parametrització contínua $\sigma : \Delta_2 \to D^2 \subseteq \mathbb{C}$.

Exemple 6. Encara que $\mathbb{C}$ té *dimensió* 2 (en algun sentit), poden haver-hi 3-cadenes! Per exemple, considerem l'aplicació contínua $\pi : \Delta_3 \to \Delta_2$ que col·lapsa, de manera contínua, el tetraedre Δ_3 en una de les seves cares, que identifiquem amb Δ_2. Si σ denota la 2-cadena de l'exemple anterior, obtenim una 3-cadena $\tilde{\sigma} : \Delta_3 \xrightarrow{\pi} \Delta_2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$. La imatge de $\tilde{\sigma}$ és la mateixa que la de σ, però no són la mateixa cadena (de fet una és una 3-cadena i l'altra, una 2-cadena!). És evident que $\tilde{\sigma}$ està estretament relacionada amb σ (de fet es diu que $\tilde{\sigma}$ és la *degeneració* de σ, però a nosaltres això no ens ha d'importar gens).

Observem que aquesta trampa ens permet associar, a cada 2-cadena de $\mathbb{C}$ una 3-cadena. Això es pot fer per tota n (no només per $n = 2$), i també per tot espai topològic X. A més, també podem variar una mica π.

Exemple 7. Podem fer una construcció similar a la de l'exemple anterior però a l'inrevés. Sigui $\sigma : \Delta_3 \to \mathbb{C}$ un 3-símplex. Considerem una inclusió $\iota : \Delta_2 \to \Delta_3$

(enviem Δ_2 a algun dels costats del triangle Δ_3). Aleshores tenim un 2-símplex $s\sigma : \Delta_2 \xrightarrow{\iota} \Delta_3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$, que ve a ser la restricció de σ a un dels costats del triangle Δ_2.

Aquesta construcció també es pot generalitzar a tot espai topològic X i per tota n. De fet, podem escollir $n+1$ aplicacions $\iota : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, que són les $n+1$ cares de Δ_{n+1}. Siguin $\iota_0, \ldots, \iota_n$ les cares, on ι_i denota la inclusió de Δ_n a la cara de Δ_{n+1} oposada a l'i-èsim vertex. Aleshores, donat un $(n+1)$-símplex σ obtenim els n-símplexs $s_0\sigma, \cdots, s_n\sigma$.

Les cares ens permeten formalitzar el concepte de *vora* d'una cadena. Per exemple, si tenim una 1-cadena $\gamma : [0,1] \to X$ que va del punt p al punt q, la seva vora hauria de ser $q - p$ (el signe indica el sentit de la 1-cadena). Això, però, de moment no té sentit, ja que no podem fer sumes formals de cadenes. Definim-ho:

Definició 8. Sigui X un espai topològic i $n \geq 0$. Definim $C_n(X)$ com el $\mathbb{Z}$-mòdul lliurement generat pel conjunt de n-cadenes $\sigma : \Delta_n \to X$, és a dir, els elements de $C_n(X)$ són combinacions lineals formals de cadenes $\sum_i a_i\sigma_i$, amb $a_i \in \mathbb{Z}$ i $\sigma_i : \Delta_n \to X$ cadenes.

Per convenció posem $C_{-1} = 0$.

Ara ja podem definir la vora d'una n-cadena:

Definició 9. Sigui X un espai topològic i $\sigma : \Delta_n \to X$ una n-cadena. Definim la **vora** de σ com

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_k\sigma \in C_{n-1}(X).$$

Podem estendre linealment ∂_n a tot $C_n(X)$, de manera que obtenim una aplicació lineal $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$.

Per convenció posem $\partial_0 = 0$.

Això motiva la definició del $\mathbb{Z}$-mòdul de n-vores, que és $B_n(X) := \operatorname{im} \partial_{n+1}$. També definim el $\mathbb{Z}$-mòdul de n-cicles com $Z_n(X) := \ker \partial_n$.

Finalment, observem que el llenguatge de cadenes ja ha aparegut en el grau en assignatures de càlcul i anàlisi:

- <u>Teorema de la integral de línia:</u> Per tota 1-cadena $\gamma \in C_1(\mathbb{R}^n)$ prou regular, i donat un camp escalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ també prou regular, es té que
$$\int_\gamma F dr = F(\partial\gamma) \quad (:= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))\ ).$$
- <u>Teorema de Green:</u> Per tota 2-cadena $\sigma \in C_2(\mathbb{R}^2)$ prou regular i tot camp $F = (P, Q)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definit en un entorn de im σ es té:
$$\int_{\partial\sigma} F dr = \int_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$
- <u>Teorema global de Cauchy:</u> Per tota 2-vora $\sigma \in B_2(\mathbb{C})$ es té que
$$\int_{\partial\sigma} f(z)dz = 0.$$

2. Homologia singular

Exemple 10. Anem a comparar, topològicament, $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Considerem, en ambdós casos, la cadena $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \in C_1(\mathbb{C})$ ó $C_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ definida per

- σ_1 és una parametrització del segment que va de i a $-1-i$.
- σ_2 és una parametrització del segment que va de $-1-i$ a $1-i$.
- σ_3 és una parametrització del segment que va de $1-i$ a i.

Observem que σ és un cicle tant en $\mathbb{C}$ com en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En primer lloc,

$$\begin{aligned} \partial\sigma_1 &= [-1-i] - [i], \\ \partial\sigma_2 &= [1-i] - [-1-i], \\ \partial\sigma_3 &= [i] - [1-i], \end{aligned}$$

on $[p]$ denota la 0-cadena $\{*\} \to X$ que envia $* \mapsto p$. Per tant, $\partial\sigma = \partial\sigma_1 + \partial\sigma_2 + \partial\sigma_3 = 0$, així que $\sigma \in Z_1(\mathbb{C})$ ó $Z_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Sigui $\tau \in C_2(\mathbb{C})$ un 2-símplex que té per imatge el triangle de vèrtexs i, $-1-i$, $1-i$, i de manera que la restricció a les cares és σ_2, $-\sigma_3$ (i.e. σ_3 en sentit contrari) i σ_1. Aleshores

$$\partial\tau = \sigma_2 - (-\sigma_3) + \sigma_1 = \sigma.$$

Això prova que $\sigma \in B_2(\mathbb{C})$.

En canvi, si intentem fer el mateix truc per veure que $\sigma \in B_2(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ veurem que no és possible, ja que tot $\tau \in C_2(\mathbb{C})$ amb $\partial\tau = \sigma$ cal que tingui el $0 \in \mathbb{C}$ en la seva imatge! Per tant, $\sigma \notin B_2(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Un moment de reflexió demostra que el que hem detectat és el *forat* de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no hi ha a $\mathbb{C}$.

Aquest exemple motiva la definició d'homologia singular, que moralment detecta els forats n-dimensionals del nostre espai topològic:

Definició 11. Sigui X un espai topològic i $n \geq 0$. Definim el **grup d'homologia singular n-èsim** de X com

$$H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

Lema 12. *El grup d'homologia n-èsim està ben definit i és un $\mathbb{Z}$-mòdul.*

Proof. Per veure que està ben definit cal veure que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$. Això segueix del fet que $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ (això normalment s'abrevia per $\partial^2 = 0$), que es comprova desenvolupant l'expressió de ∂ (exercici).

Com que el quocient de $\mathbb{Z}$-mòduls és sempre un $\mathbb{Z}$-mòdul (si quocientem per un submòdul, com és el cas) es dedueix que $H_n(X)$ és un $\mathbb{Z}$-mòdul. $\square$

Exemple 13. Calculem els grups d'homologia singular de $*$. Prèviament ja hem vist que $C_n(*) = \mathbb{Z}\sigma_n$, on $\sigma_n(x) = *$ per tota $x \in \Delta_n$. A més,

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_k \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ senar ó } n = 0, \\ \sigma_{n-1}, & n \text{ parell}, n \neq 0. \end{cases}$$

Per tant,

$$B_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot \sigma_n, & n \text{ senar}, \\ 0, & n \text{ parell}, \end{cases}$$

i també

$$Z_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot \sigma_n, & n \text{ senar ó } n = 0, \\ 0, & n \text{ parell}. \end{cases}$$

Per tant es dedueix que

$$H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot [\sigma_0], & n = 0, \\ 0, & \text{altrament}. \end{cases}$$

Això ens està dient, d'acord amb la interpretació dels grups d'homologia que hem donat anteriorment, que $*$ no té forats, fet que és d'esperar.

Exercici 14. Calcular els grups d'homologia singular de l'espai topològic discret amb dos punts, $\{p, q\}$. (*Indicació: Utilitzar que la imatge d'un connex és connexa.*)

Teorema 15. *Els grups d'homologia són invariants topològics, és a dir, si X i Y són espais topològicament equivalents aleshores $H_n(X) \cong H_n(Y)$ per tota $n \geq 0$.*

Exemple 16. Comprovem que $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no són homotòpicament equivalents. Sabem que $\mathbb{C}$ és contràctil (homotòpicament equivalent a $*$), així que $H_1(\mathbb{C}) = 0$. Per altra banda, a un exemple anterior hem vist que hi ha un 1-cicle en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no és una vora, així que $H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \neq 0$. Per tant, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no poden ser homotòpicament equivalents.

3. Cocadenes

Sovint ens interessa assignar, de manera lineal, un valor a cadascuna de les cadenes de $C_n(X)$.

Exemple 17. En $\mathbb{R}^2$ definim l'àrea d'una 2-cadena $\sigma \in C_2(\mathbb{R}^2)$ per

$$A(\sigma) := \int_\sigma dxdy.$$

S'estén linealment a tots els elements de $C_2(\mathbb{R}^2)$.

L'àrea és, doncs, una aplicació lineal $A : C_2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, és a dir, un element de l'espai dual de $C_2(\mathbb{R}^2)$.

Definició 18. Sigui X un espai topològic. Definim el $\mathbb{Z}$-mòdul de **n-cocadenes** com $C^n(X) := (C_n(X))^\vee = \mathrm{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$ (atenció: el $\mathbb{Z}$-mòdul d'arribada són els enters).

Lema 19. *L'operador vora indueix un operador, anomenat* ***diferencial****, de la següent manera: donat $\omega \in C^n(X)$,*

$$d_n(\omega) := (\sigma \in C_{n+1}(X) \mapsto \omega(\partial_{n+1}\sigma) \in \mathbb{Z}).$$

Per tant, $d_n : C^n(X) \to C^{n+1}(X)$.

Definició 20. Sigui X un espai topològic i $n \geq 0$. Definim el seu **grup de cohomologia singular n-èsim** com

$$H^n(X) := \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n-1}}.$$

Lema 21. *El grup de cohomologia n-èsim està ben definit i és un $\mathbb{Z}$-mòdul.*

Proof. Com amb el cas de l'homologia això és perquè $d^2 = 0$. □

Exercici 22. De manera similar al cas de l'homologia singular comproveu que

$$H^n(*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Exemple 23. Utilitzant una eina algebraica que es diu **successió de Mayer-Vietoris** es pot calcular que

$$H^n(S^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, k, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observació 24. És important no confondre's i pensar que $H_n(X) \cong H^n(X)$ com a $\mathbb{Z}$-mòduls, ja que en general és fals! No obstant això, sí que hi ha una fórmula tancada que dóna la cohomologia singular en termes de l'homologia singular. Per tant, ens podem preguntar per què val la pena estudiar la cohomologia si està ben determinada a partir de l'homologia, i la resposta és que en cohomologia hi ha una operació natural, el *cup product*, que és una estructura molt potent a l'anell $\bigoplus_n H^n(X)$.

4. Cup product

Denotem

$$H^*(X) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X),$$

que és un $\mathbb{Z}$-mòdul. Els elements de $H^*(X)$ són combinacions lineals (finites) $\sum_i a_i x_i$, amb $a_i \in \mathbb{Z}$ i $x_i \in H^{n_i}(X)$.

Als elements $x \in H^n(X) \subseteq H^*(X)$ els anomenem **homogenis de grau** n. També posem $|x| := n$.

Exemple 25. Per un exemple anterior, $H^*(*) \cong \mathbb{Z}$, amb el generador de grau 0.

Exemple 26. Com que $H^n(S^k) \cong \mathbb{Z}$ si $n = 0, k$, i és 0 altrament, es dedueix que $H^*(S^k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, amb un generador de grau 0 i un altre de grau k.

Anem a definir el cup product, que donades una p-cocadena i una q-cocadena dóna una $(p+q)$-cocadena.

Per $k \leq n$ i $0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ sigui $\iota^n_{i_0,\ldots,i_k} : \Delta_k \to \Delta_n$ la inclusió canònica de Δ_k en Δ_n pels vèrtexs $i_0, \ldots, i_k$.

Donades $\sigma \in C^p(X)$ i $\eta \in C^q(X)$ definim, per cada $(p+q)$-cadena $x \in C_{p+q}(X)$,

$$(\sigma \smile \eta)(x) := \sigma(x \circ \iota_{0,1,\ldots,p}) \cdot \eta(\sigma \circ \iota_{p,p+1,\ldots,p+q}),$$

on hem fet un abús de notació en l'escriptura de la ι i omès $n := p + q$. El resultat d'aquesta operació és un element de $C^{p+q}(X)$.

Exemple 27. Sigui $\sigma \in C_2(\mathbb{C})$ una cadena amb imatge el triangle de vèrtexs i, $-1-i$ i $1-i$ (en aquest ordre). Sigui $s_i\sigma \in C_1(\mathbb{C})$ la cadena que representa el costat del triangle oposat al vèrtex $i \in \{0,1,2\}$; en altres paraules, $s_0\sigma = \sigma \circ \iota_{1,2}$, $s_1\sigma = \sigma \circ \iota_{0,2}$ i $s_2\sigma = \sigma \circ \iota_{0,1}$. Calculem:

$$\begin{aligned} ((s_0\sigma)^\vee \smile (s_2\sigma)^\vee)(\sigma) &= (s_0\sigma)^\vee(\sigma \circ \iota_{0,1}) \cdot (s_2\sigma)^\vee(\sigma \circ \iota_{1,2}) = \\ &= (s_0\sigma)^\vee(s_2\sigma) \cdot (s_2\sigma)^\vee(s_0\sigma) = 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((s_2\sigma)^\vee \smile (s_0\sigma)^\vee)(\sigma) &= (s_2\sigma)^\vee(\sigma \circ \iota_{0,1}) \cdot (s_0\sigma)^\vee(\sigma \circ \iota_{1,2}) = \\ &= (s_2\sigma)^\vee(s_2\sigma) \cdot (s_0\sigma)^\vee(s_0\sigma) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Recordem que no hem calculat $(s_0\sigma)^\vee \smile (s_2\sigma)^\vee$ sinó l'evaluació d'aquesta 2-cocadena en σ! Una conseqüència d'aquests dos càlculs és que el producte $\smile$ no és commutatiu.

Lema 28. *L'operació* $\smile\colon C^p(X) \times C^q(X) \to C^{p+q}(X)$ *satisfà*

$$\partial(\sigma \smile \eta) = \partial\sigma \smile \eta + (-1)^p(\sigma \smile \partial\eta).$$

Per tant, el producte de cocicles dóna un cocicle, i el producte d'una vora amb un cocicle (o a l'inrevés) dóna un cocicle.

Proof. Aplicar les fórmules i calcular. □

Per tant, l'operació $\smile$ passa al quocient com un producte $\smile\colon H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X)$:

$$[\sigma] \smile [\eta] := [\sigma \smile \eta].$$

Definició 29. Definim el **cup product** en $H^*(X)$ com el producte $\smile\colon H^*(X) \times H^*(X) \to H^*(X)$ que s'obté estenent bilinealment el producte $\smile$ construït.

Lema 30. *El cup product és associatiu. A més, si* $\sigma \in H^p(X)$ *i* $\eta \in H^q(X)$ *aleshores*

$$\sigma \smile \eta = (-1)^{pq}\eta \smile \sigma.$$

Per tant, $(H^*(X), \smile)$ *és el que s'anomena una àlgebra graduada commutativa (que no significa que sigui commutativa!).*

Teorema 31. *L'àlgebra graduada commutativa* $(H^*(X), \smile)$ *és un invariant homotòpic.*

Exemple 32. Calculem el cup product de S^k.

L'anell de cohomologia de S^k és isomorf a $\mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$, amb $|\alpha| = 0$ i $|\beta| = k$. Com que $|\beta \smile \beta| = k + k = 2k$, i $H^{2k}(S^k) = 0$, es dedueix que $\beta \smile \beta = 0$. Es pot demostrar que α és una unitat de $(H^*(S^k), \smile)$, així que la resta de productes són trivials. Es dedueix que:

$$(H^*(S^k), \smile) \cong \mathbb{Z}[\omega]/(\omega^2).$$

Exemple 33. Observem que l'estructura d'anell de $(H^*(X), \smile)$ dóna més informació que la col·lecció de $\mathbb{Z}$-mòduls $\{H^n(X)\}_{n\geq 0}$. Tenim que

$$H^p(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p \text{ parell}, 0 \leq p \leq 2n, \\ 0, & \text{altrament}, \end{cases}$$

i també

$$H^p(S^2 \vee S^5) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p \text{ parell}, 0 \leq p \leq 2n, \\ 0, & \text{altrament}, \end{cases}$$

així que només amb els grups de cohomologia no podem decidir si $\mathbb{CP}^n$ i $S^2 \vee S^5$ són homotòpicament equivalents o no. En canvi, resulta que com a anells (si ens oblidem del grau) hi ha els següents isomorfismes:

$$H^*(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}[\omega]/(\omega^{n+1}),$$

mentre que

$$H^*(S^2 \vee S^5) \cong \mathbb{Z}[\eta_0, \ldots, \eta_n]/(\eta_i \eta_j)_{i,j}.$$

Amb l'ajuda d'aquesta estructura d'anell podem concloure que $\mathbb{CP}^n$ i $S^2 \vee S^5$ no són homotòpicament equivalents.

References

[1] Hatcher, A.: *Algebraic topology*, Versió online: https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf.

INTRODUCCIÓ A LA GEOMETRIA DIFERENCIAL

MARC PIQUER I MÉNDEZ - 24 DE FEBRER DE 2023

La referència usada per aquesta introducció és [1].

1. Varietats diferenciables

Una varietat diferenciable és, intuïtivament, l'anàleg a altres dimensions d'una superfície suau. Per formalitzar aquesta idea, cal introduir una noció de diferenciabilitat, que apareixerà cartografiant la varietat a $\mathbb{R}^n$.

L'espai on introduïrem aquesta cartografia té, en si, una estructura topològica concreta, que serà aquella en què el veïnat de cada punt serà localment semblant a $\mathbb{R}^n$.

Definició 1. Una varietat topològica (sense vora) de dimensió $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ és un espai topològic M Hausdorff que compleix el segon axioma de numerabilitat i tal que per cada punt hi ha un entorn homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$.

D'aquí endavant, M és una varietat topològica amb $\dim M =: m$.

Definició 2. Una carta de M és un parell (U, φ), on $U \subseteq M$ és un obert i $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ és un homeomorfisme.

Una carta definirà unes coordenades $(x_1, \ldots, x_m) \coloneqq \varphi(p)$, $p \in U$. Ara, si recobrim M amb cartes que no es portin malament entre elles, tindrem un atles diferenciable.

Definició 3. Un atles diferenciable de M és una família de cartes $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ tal que $U_i \cap U_j = \varnothing$ o bé $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ és un difeomorfisme.

Aquí, "difeomorfisme" vol dir senzillament diferenciable[1] i d'inversa diferenciable (en el sentit de les funcions $\mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$). No cal demostrar-ho, però per cada atles hi ha un únic atles maximal (en el sentit de la inclusió) que el conté, cosa que permet definir finalment les varietats diferenciables.

Definició 4. Una varietat diferenciable és el parell $(M, \mathcal{A})$, on M és una varietat topològica i $\mathcal{A}$ hi és un atles diferenciable maximal.

La dimensió de M com a varietat diferenciable és la mateixa que com a varietat topològica.

Exemple 5. (1) A $\mathbb{R}^m$, l'estructura donada per $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, \mathrm{id})\}$ s'anomena estructura estàndard a $\mathbb{R}^m$.

[1] En aquest cas, diferenciable vol dir $\mathcal{C}^\infty$. Es pot fer geometria "menys diferencial", però no és el que farem aquí.

(2) A $\mathbb{S}^n$, l'estructura donada per $\mathcal{A} = \{(\mathbb{S}^n \setminus \{\mathrm{N}\}, \pi^{\mathrm{N}}_{\mathrm{est}}), (\mathbb{S}^n \setminus \{\mathrm{S}\}, \pi^{\mathrm{S}}_{\mathrm{est}})\}$ s'anomena estructura estàndard a $\mathbb{S}^n$, on N i S són els pols nord i sud i π_{est} denota la projecció estereogràfica.
(3) Un paraboloide és una superfície diferenciable: només cal una carta, que pot ser la projecció sobre un pla ortogonal a l'eix.

2. Aplicacions diferenciables

Havent definit l'espai on treballarem, cal parlar de les aplicacions. Com l'espai, tractarem amb aplicacions diferenciables, però cal definir ben bé què vol dir "diferenciables", ara que treballarem en llocs que no són, necessàriament, oberts de $\mathbb{R}^n$.

Definició 6. Siguin M, N varietats diferenciables. Diem que $F : M \to N$ contínua és **diferenciable** si, $\forall p \in M$, hi ha un entorn coordenat (U, φ) de p i un entorn coordenat (V, ψ) de $F(p)$ tals que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable a $\varphi(p)$.

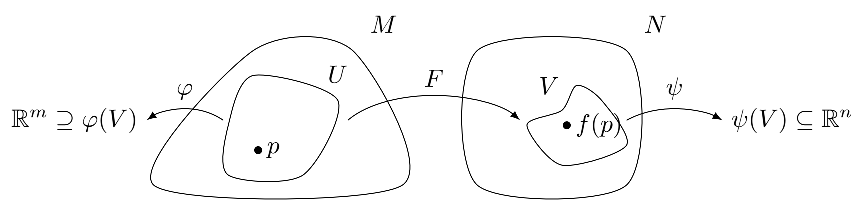


Figura 1. Esquema de la diferenciabilitat d'una varietat M a una altra N.

Exemple 7. En aquests exemples, M, N són varietats diferenciables.

(1) Les aplicacions $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciables en sentit del càlcul són diferenciables en aquest sentit.
(2) La identitat $\mathrm{id} : M \to M$ és diferenciable.
(3) Sigui un obert $U \subseteq M$ i $F : M \to N$ diferenciable, llavors $F_{|U} : U \to N$ es diferenciable.

Donem ara un parell de propietats més de les aplicacions diferenciables.

Proposició 8. *La composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable.*

Demostració. Siguin $F : M \to N$, $G : N \to P$ aplicacions diferenciables amb M, N, P varietats diferenciables. Prenem un punt $p \in M$ i entorns coordenats (U, φ) de $p \in M$, (V, δ) de $F(p) \in N$ i (W, ψ) de $G \circ F(p) \in P$. Cal veure que $\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1}$ és diferenciable en un entorn de $\varphi(p)$.

Ara bé, en un entorn de $\varphi(p)$, és vàlida la descomposició $\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G \circ \delta^{-1}) \circ (\delta \circ F \circ \varphi^{-1})$, és a dir, descomposa en dues aplicacions diferenciables (ja que F, G ho són per hipòtesi), i per tant $G \circ F$ és diferenciable. $\square$

Ara que ja hem definit aplicació diferenciable a les varietats diferenciables, també hi podem definir difeomorfisme.

Definició 9. Siguin M, N varietats diferenciables i una aplicació $F : M \to N$. Diem que F és un difeomorfisme si (1) F és diferenciable, (2) F és bijectiva i (3) F^{-1} és diferenciable.

3. Espai tangent

Definició 10. Sigui M varietat diferenciable i $p \in M$. Anomenem derivació a p tota aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\delta_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ tal que $\delta_p(fg) = \delta_p(f)g(p) + f(p)\delta_p(g)$.

Es pot veure fàcilment (exercici) que el conjunt de totes les derivacions a p és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Definició 11. Sigui $p \in M$. Anomenem espai tangent a M en p, T_pM, el conjunt de totes les derivacions a p. Els seus elements els anomenarem vectors tangents.

No ho demostrarem, però la dimensió de l'espai tangent és, intuïtivament, la mateixa que la de la pròpia varietat diferencial. De fet, donada una carta al voltant de $p \in M$ de coordenades $(x_1, \dots, x_m)$, es té

$$T_pM = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial_{x_m}}\right|_p \right\rangle =: \langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m} \rangle .$$

Prenem ara una aplicació diferenciable $F : M \to N$. Si tenim una derivació $v \in T_pM$, podem generar una derivació a $T_{F(p)}N$ fent $g \mapsto v(g \circ F)$. Això és, doncs, l'anàleg a la jacobiana del càlcul diferencial.

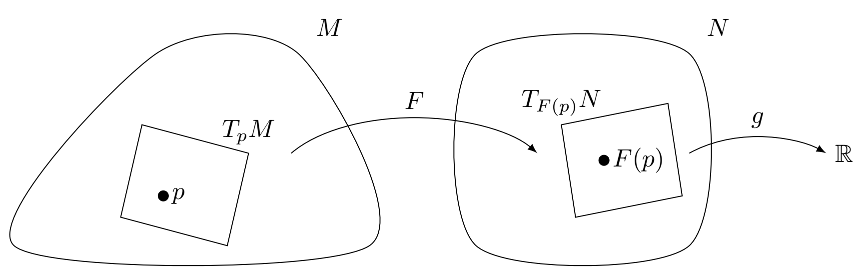


Figura 2. Esquema del procés per generar una derivació a N en $F(p)$ a partir d'una derivació a p en M.

Definició 12. Siguin M, N varietats diferenciables, $F : M \to N$ diferenciable i $p \in M$. S'anomena diferencial de F a p l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} d_pF : & T_pM & \longrightarrow & T_{F(p)}N \\ & \delta_p & \longmapsto & d_pF(\delta_p) : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(N) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \delta_p(g \circ F), \end{array} \end{array}$$

que envia una derivació a M en p a una derivació a N en $F(p)$.

4. Fibrat tangent i cotangent. Camps vectorials i formes diferenciables

De manera intuïtiva, un camp vectorial serà una assignació a cada punt d'un vector de l'espai tangent en aquell punt. Per fer-ho bé, però, cal definir una estructura prèvia, que agrupi tots els espais tangents de la varietat.

Definició 13. El fibrat tangent a una varietat M és $TM = \bigcup_{p\in M}\{p\} \times T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$.

TM admet una topologia i una estructura diferenciable (de dimensió $2n$) que fa diferenciable la projecció $\pi : TM \to M$, però no ho demostrarem.

Definició 14. Un camp vectorial diferenciable X a M és una aplicació diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, és a dir, $X_p \in T_pM$ per tot $p \in M$.

Posarem $\mathcal{X}(M)$ pel conjunt de tots els camps diferenciables a M. És un $\mathcal{F}(M)$-mòdul.

Ara que hem definit el fibrat tangent, definirem el seu germà malvat. Com T_pM són espais vectorials, definirem els seus duals T_p^*M i d'aquí...

Definició 15. El fibrat cotangent a una varietat M és $T^*M = \bigcup_{p\in M}\{p\} \times T_p^*M = \{(p, v^*) : p \in M, v^* \in T_p^*M\}$.

Com abans, s'hi pot donar una topologia i una estructura diferenciable que fa diferenciable la projecció $q : T^*M \to M$.

Definició 16. Una 1-forma diferenciable ω a M és una aplicació diferenciable $\omega : M \to T^*M$ tal que $q \circ \omega = \mathrm{id}_M$, és a dir, $\omega_p \in T_p^*M$ per tot $p \in M$.

Vénen a ser el dual dels camps vectorials diferenciables, i posem el seu conjunt per $\Omega^1(M)$. També és un $\mathcal{F}(M)$-mòdul.

Exemple 17. L'exemple més evident d'1-forma diferencial és df, per tot $f \in \mathcal{F}(M)$.

Observant el comportament, es pot entendre que una 1-forma diferencial es menja un vector i torna una funció diferenciable. Això es pot estendre p-formes, que es mengen p vectors i tornen una funció diferenciable, però tenen alguna altra propietat restrictiva. En particular, $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Més en particular, els objectes diferenciables que es mengen n vectors i m covectors s'anomenen tensors $\binom{m}{n}$. Així, les p-formes diferenciables són un tipus de tensors $\binom{0}{p}$, i els camps vectorials no són més que tensors $\binom{1}{0}$.

5. Geometria de Riemann

Ara introduïrem, per primera vegada, una noció mètrica a les varietats diferenciables. És per tant, el primer moment en què veritablement es pot dir que estem fent geometria.

Definició 18. Una mètrica de Riemann és un tensor $\binom{0}{2}$ sobre M simètric i definit positiu.

Aquest és l'anàleg al producte escalar de la geometria euclidiana. El pas que estem fent és el mateix que en saltar de la geometria afí a l'euclidiana.

Definició 19. Una varietat de Riemann és un parell (M, g), on M és una varietat diferenciable i g és una mètrica de Riemann sobre M.

Seguint el que hem dit, la mètrica g assigna a cada punt una aplicació que pren dos vectors i ens retorna un escalar, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

Localment (és a dir, en una certa carta amb coordenades $(x_1, \ldots, x_m)$, es pot assignar coeficients $(g_{ij})_{ij}$ a la mètrica de manera que, per dos vectors de $T_{(x_1,\ldots,x_m)}M$ $X = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_{x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m \beta_i \partial_{x_i}$, es calcula localment

$$g_{(x_1,\ldots,x_m)}(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Llavors, posem $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$.

Exemple 20. Un exemple conegut és la primera forma fonamental en una superfície parametritzada a $\mathbb{R}^3$, que es sol escriure $g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Si la superfície ve donada per $\psi(u, v)$, aquests nombres es calculen amb

$$E = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad F = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad G = \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

on $\cdot$ representa el producte escalar usual.

Si prenem el cas concret d'un torus de radi R i gruix r, tenim una parametrització

$$\psi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

d'on s'obté $g = (R+r \cos v)^2 du^2 + r^2 dv^2$. Veure que aquesta mètrica és riemanniana és immediat, si l'escrivim com a matriu

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (R + r \cos v)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

ja que en aquesta forma es veu clarament que és simètrica i definida positiva.

Fent servir aquesta mètrica, es pot calcular angles, longituds, àrees... tot el que estem acostumats a fer en geometria euclidiana.

Referències

[1] Curràs Bosch, C. M.: *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*, 1ª edició, Edicions de la UB, Barcelona, 2003.

ADDENDUM: EL PLA PROJECTIU

ROGER GARRIDO VILALLAVE

1. Varietat diferenciable

El pla projectiu $\mathbb{RP}^2 = \{[x : y : z]\} = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ es pot exhibir com una varietat diferencial si prenem les cartes:

(1) $U_1 := \{[x : y : z] \mid x \neq 0\} \subseteq \mathbb{RP}^2$ amb $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$ donada per
$$\varphi_1([x : y : z]) := \left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right).$$
(2) $U_2 := \{[x : y : z] \mid y \neq 0\} \subseteq \mathbb{RP}^2$ amb $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ donada per
$$\varphi_2([x : y : z]) := \left(\frac{x}{y},\ \frac{z}{y}\right).$$
(3) $U_3 := \{[x : y : z] \mid z \neq 0\} \subseteq \mathbb{RP}^2$ amb $\varphi_3 : U_3 \to \mathbb{R}^2$ donada per
$$\varphi_3([x : y : z]) := \left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right).$$

Les funcions de canvi de carta són:

(1) Per passar de la primera carta a la segona tenim el canvi de carta $\tau_{12} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$,
$$\tau_{12}(x, y) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x, y)) = \varphi_2([1 : x : y]) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$
que està definida per $(x, y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. És clarament diferenciable.

(2) Per passar de la primera carta a la tercera tenim el canvi de carta $\tau_{13} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) \to \varphi_3(U_1 \cap U_3)$,
$$\tau_{13}(x, y) = \varphi_3(\varphi_1^{-1}(x, y)) = \varphi_3([1 : x : y]) = \left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right),$$
que està definida per $(x, y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. És clarament diferenciable.

(3) Per passar de la segona carta a la tercera tenim el canvi de carta $\tau_{23} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) \to \varphi_3(U_2 \cap U_3)$,
$$\tau_{23}(x, y) = \varphi_3(\varphi_2^{-1}(x, y)) = \varphi_3([x : 1 : y]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right),$$
que està definida per $(x, y) \in \varphi_2(U_2 \cap U_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. És clarament diferenciable.

(4) Els canvis de carta τ_{21}, τ_{31} i τ_{32} són, per definició, τ_{12}^{-1}, τ_{13}^{-1} i τ_{23}^{-1}, respectivament. També són tots ells diferenciables.

2. Diferencial dels canvis de carta

Calculem les diferencials $d_p\tau_{ij}$ de les aplicacions de canvi de carta.

2.1. Diferencial de τ_{12}.

Sigui $(x,y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, és a dir, que satisfà $x \neq 0$. Aleshores

$$d_{(x,y)}\tau_{12} = \begin{pmatrix} -x^{-2} & 0 \\ -yx^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.2. Diferencial de τ_{13}.

Sigui $(x,y) \in \varphi(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, és a dir, que satisfà $y \neq 0$. Aleshores

$$d_{(x,y)}\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -y^{-2} \\ y^{-1} & -xy^{-2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Diferencial de τ_{23}.

Sigui $(x,y) \in \varphi(U_2 \cap U_3) \subseteq \mathbb{R}^2$, és a dir, que satisfà $y \neq 0$. Aleshores

$$d_{(x,y)}\tau_{23} = \begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-2} \\ -y^{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. Resta de canvi de cartes.

Com que $d\tau_{21} = (d\tau_{12})^{-1}$, $d\tau_{31} = (d\tau_{13})^{-1}$ i $d\tau_{32} = (d\tau_{23})^{-1}$, tenim que

$$d_{(x,y)}\tau_{21} = \frac{1}{-x^{-3}} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ yx^{-2} & -x^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ -yx & x \end{pmatrix},$$

$$d_{(x,y)}\tau_{31} = \frac{1}{y^{-3}} \begin{pmatrix} -xy^{-2} & y^{-2} \\ -y^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy & y \\ -y^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_{(x,y)}\tau_{32} = \frac{1}{-xy^{-4}} \begin{pmatrix} 0 & xy^{-2} \\ y^{-2} & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -y^2 \\ -x^{-1}y^2 & -x^{-1}y^3 \end{pmatrix}.$$

3. Exemple d'aplicació diferenciable

Donem un exemple d'aplicació diferenciable $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f([x:y:z]) := \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}.$$

El primer que cal fer és veure que està ben definida. El denominador és una suma de termes no-negatius, així que només s'anul·la si $x^2 = y^2 = z^2 = 0$. Però això implica que $x = y = z = 0$, i això no és possible ja que $[x:y:z] \in \mathbb{RP}^2$. També cal veure que no depèn del representant. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Aleshores

$$f([\lambda x : \lambda y : \lambda z]) = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2x^2 + \lambda^2y^2 + \lambda^2z^2} = \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} = f([x:y:z]),$$

així que no depèn del representant. Tot això prova que f està ben definida.

Comprovem ara que és diferenciable. Això és equivalent a veure que localment és diferenciable, és a dir, que $f \circ \varphi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}$ és diferenciable per tota i.

Localment

$$(f \circ \varphi_1^{-1})(x,y) = f([1:x:y]) = \frac{x}{1+x^2+y^2},$$

$$(f \circ \varphi_2^{-1})(x,y) = f([x:1:y]) = \frac{x}{x^2+1+y^2},$$

$$(f \circ \varphi_3^{-1})(x,y) = f([x:y:1]) = \frac{xy}{x^2+y^2+1},$$

que són totes diferenciables. Per tant, $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ és diferenciable.

4. Espai tangent

Recordem que un vector tangent en $p \in M$ és una derivació $\mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ en p.

Definim els següents vectors tangents:

(1) Si $p = [1 : y : z] \in U_1 \subseteq \mathbb{RP}^2$, definim els vectors tangents de manera que actuen sobre una aplicació $f \in \mathcal{F}(U_1)$ com

$$\frac{\partial}{\partial Y_1}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\varphi_1(p)} (f \circ \varphi_1^{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_1}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\varphi_1(p)} (f \circ \varphi_1^{-1}).$$

(2) Si $p = [x : 1 : z] \in U_2 \subseteq \mathbb{RP}^2$, definim els vectors tangents de manera que actuen sobre una aplicació $f \in \mathcal{F}(U_2)$ com

$$\frac{\partial}{\partial X_2}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\varphi_2(p)} (f \circ \varphi_2^{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_2}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\varphi_2(p)} (f \circ \varphi_2^{-1}).$$

(3) Si $p = [x : y : 1] \in U_3 \subseteq \mathbb{RP}^2$, definim els vectors tangents de manera que actuen sobre una aplicació $f \in \mathcal{F}(U_3)$ com

$$\frac{\partial}{\partial X_3}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\varphi_3(p)} (f \circ \varphi_3^{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_3}\Big|_p (f) := \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\varphi_3(p)} (f \circ \varphi_3^{-1}).$$

A tall d'exemple calculem algunes derivades de la funció f de l'apartat anterior. Si $p = [1 : y : z] \in U_1 \subseteq \mathbb{RP}^2$, aleshores

$$\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial x}|_{(y,z)}\left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\Big|_{(y,z)} = \frac{1-y^2+z^2}{(1+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial y}|_{(y,z)}\left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2}\Big|_{(y,z)} = -\frac{2yz}{(1+y^2+z^2)^2}.$$

5. Vectors tangents a la intersecció de dues cartes

Si $p \in U_i \cap U_j$, podem donar dues bases de $T_p\mathbb{RP}^2$. Una és prenent la base de vectors tangents associada a la carta U_i, i l'altra prenent la base de vectors tangents associada a la carta U_j. Però com que les dues bases són base del mateix espai vectorial, podem expressar cada base com a combinació lineal dels vectors de l'altra base.

A partir de la regla de la cadena es pot veure que la matriu de canvi de base que, donades les coordenades d'un vector en la base associada a U_i, retorna les coordenades del vector en la base associada a U_j, és $d_{\varphi_i(p)}\tau_{ij}$.

Expressem els vectors tangents anteriors els uns a partir dels altres.

(1) Si $p = [1 : x : y] \in U_1 \cap U_2$, aleshores
$$\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p = -x^{-2}\frac{\partial}{\partial X_2}|_p - x^{-2}y\frac{\partial}{\partial Z_2}|_p,$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p = x^{-1}\frac{\partial}{\partial Z_2}|_p.$$
(2) Si $p = [x : 1 : y] \in U_1 \cap U_2$, aleshores
$$\frac{\partial}{\partial X_2}|_p = -x^{-2}\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p - xy\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p,$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_2}|_p = x\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p.$$
(3) Etcètera.

Seguim amb l'exemple de les derivades de f (la funció de l'apartat 3). A l'apartat anterior hem vist que, donat un punt $p = [1 : y : z] \in U_1$,
$$\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p(f) = \frac{1 - y^2 + z^2}{(1 + y^2 + z^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p(f) = -\frac{2yz}{(1 + y^2 + z^2)^2}.$$

Per tant, si $p = [x : 1 : z] = [1 : \frac{1}{x} : \frac{z}{x}] \in U_1 \cap U_2$, aleshores
$$\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p(f) = \frac{1 - x^{-2} + x^{-2}z^2}{(1 + x^{-2} + x^{-2}z^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p(f) = -\frac{2x^{-2}z}{(1 + x^{-2} + x^{-2}z^2)^2},$$
així que
$$\frac{\partial}{\partial X_2}|_p(f) = -x^{-2}\frac{\partial}{\partial Y_1}|_p(f) - xz\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p(f) = -\frac{1 - x^{-2} + x^{-2}z^2}{(x + x^{-1} + x^{-1}z^2)^2} + \frac{2x^{-1}z^2}{(1 + x^{-2} + x^{-2}z^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial Z_2}|_p(f) = x\frac{\partial}{\partial Z_1}|_p(f) = -\frac{2x^{-1}z}{(1 + x^{-2} + x^{-2}z^2)^2}.$$

FORMES DIFERENCIALS

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 3 DE MARÇ DE 2023

1. Tensors de tipus $(p, 0)$

Definició 1. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n. Un **tensor** de tipus $(p, 0)$ és una aplicació

$$\omega : \{(x, v_1, \ldots, v_p) \mid x \in M,\ v_i \in T_x M\} \to \mathbb{R},$$

tal que

(1) Per cada $x \in M$, l'aplicació $\omega(x, -) : T_x M \times \overset{p)}{\cdots} \times T_x M \to \mathbb{R}$ és multilineal.

(2) Localment, l'expressió de ω és diferenciable.

Exemple 2. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable. Definim el següent tensor de tipus $(1, 0)$:

$$df(x, v_x) := v_x(f) = D_{v_x}(f).$$

El que fa aquest tensor és, donat un punt de $\mathbb{R}^2$ i un vector tangent, calcula la derivada de f en la direcció del vector tangent.

Exemple 3. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n, i g una mètrica Riemanniana en M. La mètrica g és un tensor de tipus $(2, 0)$ ja que donat un punt $x \in M$ i dos vectors $u, v \in T_x M$ retorna l'escalar $g_x(u, v)$.

2. Formes diferencials

Definició 4. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n. Una **p-forma diferencial** ω en M és un tensor de tipus $(p, 0)$ tal que, per cada $x \in M$, $\omega_x(u_1, \ldots, u_p) = 0$ si $u_i = u_j$ per alguna $i \neq j$. L'espai vectorial de p-formes en M es denota per $\Omega^p(M)$.

Exemple 5. En $\mathbb{R}^n$ el determinant

$$\det : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \det(x, u_1, \ldots, u_n) := \det(u_1 | \cdots | u_n)$$

és una n-forma diferencial.

Exemple 6. En $\mathbb{R}^2$ l'aplicació que, donats un punt $x \in \mathbb{R}^2$ i dos vectors $u, v \in T_x \mathbb{R}^2$, retorna l'àrea del rombe que determinen u i v, és una 2-forma diferencial, ja que si $u = v$ aleshores l'àrea és zero.

Exemple 7. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n, i X un camp vectorial en M. Aleshores es pot definir una 1-forma diferencial de la següent manera:

$$dX_x(u) := (X_x)^\vee(u),$$

és a dir, en cada punt $x \in M$ la 1-forma diferencial actua com el dual del vector X_x.

Exemple 8. Considerem en $\mathbb{R}^2$ el camp vectorial $X_x := \frac{\partial}{\partial x}|_x$. La 1-forma diferencial definida en l'exemple anterior actua de la següent manera:

$$dX_x\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}|_x + \mu\frac{\partial}{\partial y}|_x\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}|_x\right)^\vee\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}|_x + \mu\frac{\partial}{\partial y}|_x\right) = \lambda.$$

Exemple 9. En una varietat Riemanniana (M,g) la mètrica és un tensor de tipus $(2,0)$ però no és una 2-forma!!! Això és perquè, donat un punt $x \in M$ i un vector $u \in T_xM$ no nul, es té que $g_x(u,u) = ||u||^2 \neq 0$.

3. Producte exterior

Donada una p-forma ω i una q-forma η és possible *enganxar-les* per formar una $(p+q)$-forma $\omega \wedge \eta$.

Definició 10. Siguin $\omega \in \Omega^p(M)$ i $\eta \in \Omega^q(M)$. Definim el seu **producte exterior** per

$$(\omega\wedge\eta)(u_1,\dots,u_{p+q}) := \sum_{\sigma\in S(p,q)} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\omega(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)})\cdot\eta(u_{\sigma(p+1)},\dots,u_{\sigma(p+q)}),$$

on $S(p,q)$ denota el subconjunt del grup simètric S_{p+q} que satisfà que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ i $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$.

Exemple 11. Considerem en $\mathbb{R}^2$ les formes diferencials $dx := d\frac{\partial}{\partial x}$ i $dy := d\frac{\partial}{\partial y}$ definides en un exemple anterior. Aleshores per tot $x \in \mathbb{R}^2$ i tota parella de vectors $\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}, \lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} \in T_x\mathbb{R}^2$ es té que

$$(dx\wedge dy)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y},\ \lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= +dx\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dy\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\right) - dx\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot dy\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \alpha\mu - \lambda\beta,$$

ja que els elements de $S(1,1)$ són totes les permutacions de S_2.

Lema 12. *Sigui M una varietat diferencial de dimensió n. Es té:*

(1) Si $\omega \in \Omega^p(M)$ i $\eta \in \Omega^q(M)$, aleshores $\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega$.

(2) Si ω té grau senar, aleshores $\omega\wedge\omega = 0$.

(3) Tota p-forma ω es pot escriure localment en una carta (U,φ) de manera única com

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

on $dx_{i_j} := d\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}$, i $f_{i_1,\dots,i_p} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ són funcions diferenciables.

4. Diferencial exterior

Definició 13. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n. Localment (es pot veure que no depèn de l'elecció de la carta) definim la **diferencial exterior** de la p-forma $f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ per

$$d(f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

i ho estenem utilitzant la linealitat (localment) a tota forma de $\Omega^p(M)$.

La diferencial exterior és una generalització del gradient, el rotacional, ... a varietats diferencials arbitràries.

Lema 14. *Obtenim una aplicació $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$. Satisfà:*

(1) $d^2 = 0$.

(2) Leibniz: Si $\omega \in \Omega^p(M)$ i $\eta \in \Omega^q(M)$, aleshores $d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$.

5. Cohomologia de De Rham

Definició 15. Sigui M una varietat diferencial de dimensió n. El p-èsim **grup de cohomologia de De Rham** de M es defineix per

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))}{\mathrm{im}\ (d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))}.$$

És un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Intuïtivament els grups de cohomologia de De Rham medeixen *quant falla M de satisfer la llei irrotacional $\implies$ té potencial.*

Referències

[1] Tornehave, Madsen: *From calculus to cohomology.*

EXEMPLES DE FORMES

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 3 DE MARÇ DE 2023

L'espai vectorial de k-formes diferencials en una varietat diferencial M de dimensió n el denotem per $\Omega^k(M)$. Una base local de $\Omega^n(M)$ ve donada per $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, amb $i_1 < \cdots < i_k$. A més, per 1-formes es té l'anticommutativitat $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, i també $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Les 0-formes són les aplicacions diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$.

La diferencial exterior es defineix, localment, per

$$d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Exemple 1. (ÀLGEBRA) Existeix una única aplicació $\tilde{d} : \bigoplus_k \Omega^k(M) \to \bigoplus_k \Omega^k(M)$ tal que:

(1) És lineal.

(2) Si $\omega \in \Omega^k(M)$, aleshores $\tilde{d}(\omega) \in \Omega^{k+1}(M)$.

(3) Si $f \in \Omega^0(M)$, aleshores localment

$$\tilde{d}(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

(4) Satisfà la regla de Leibniz, és a dir, si $\omega \in \Omega^k(M)$ i $\eta \in \Omega^\ell(M)$, aleshores

$$\tilde{d}(\omega \wedge \eta) = \tilde{d}(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \tilde{d}(\eta).$$

Aquesta aplicació $\tilde{d}$ coincideix amb la diferencial exterior i, a més, $(\tilde{d})^2 = d^2 = 0$.

Exemple 2. (ÀLGEBRA) Sigui M una varietat diferencial de dimensió n, i sigui $f \in \Omega^0(M)$ una 0-forma (equivalentment, una aplicació diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$). Aleshores localment

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

que es pot interpretar com el **gradient** de f.

Exemple 3. (ÀLGEBRA) Sigui M una varietat diferencial de dimensió 2, i sigui $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma que localment té expressió $\omega = f dx + g dy$. Aleshores localment

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

que ens dóna el **rotacional** del camp (f, g).

Exemple 4. (CÀLCUL) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la 1-forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

té rotacional nul ($\mathrm{rot}\omega = d\omega = 0$) però no admet cap funció potencial: no hi ha cap 0-forma $U \in \Omega^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tal que $\omega = dU = \mathrm{grad}(U)$, és a dir, tal que

$$f = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Per tant, $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$.

Exemple 5. (ÀLGEBRA) Sigui M una varietat diferencial de dimensió 3, i sigui $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma que localment té expressió $\omega = fdx + gdy$. Aleshores localment

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz,$$

que es pot interpretar com el **rotacional** de ω.

Típicament, quan parlem de rotacional ens referim al rotacional d'un camp vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$. Resulta que si considerem la forma $\omega := F_1dx + F_2dy + F_3dz$, el rotacional que hem deduït en aquest exemple ens dóna el rotacional del camp vectorial F (llevat d'algun signe), així que $\mathrm{rot}F = 0$ sii $\mathrm{rot}\omega = 0$.

Exemple 6. (ÀLGEBRA) Sigui M una varietat diferencial de dimensió 3, i sigui $\omega \in \Omega^2(M)$ una 2-forma que localment té expressió $\omega = fdx\wedge dy + gdx\wedge dz + hdy\wedge dz$. Aleshores localment

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

que es pot entendre com la **divergència** de ω (o del camp (f, g, h)). És important notar que la convenció de signes és diferent de l'estàndard.

Exemple 7. (CÀLCUL) Considerem la parametrització (carta) de $\mathbb{R}^2$ donada per $\varphi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty)$, $\varphi(r, \theta) = r(\cos\theta, \sin\theta)$. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable que té expressió local $\tilde{f} : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; en altres paraules, $\tilde{f}$ és f en forma polar.

Si coneixem $\tilde{f}$, podem calcular df? Com que $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$, aleshores desenvolupant amb la regla de la cadena (on hi ha els punts suspensius) obtenim:

$$\begin{aligned} df &= d(\tilde{f} \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} dy = \cdots = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \sin\theta\right) dx + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \sin\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \cos\theta\right) dy, \end{aligned}$$

que és l'expressió del rotacional en forma polar de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 8. (CÀLCUL) Sigui (M, g) una varietat riemanniana orientada (totes les que veurem en aquesta llista d'exemples estaran orientades) de dimensió n. La **forma de volum** és la forma que localment es defineix per $\mathrm{vol}_M := \sqrt{|\det G|}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ (aquí $dx_1, \ldots, dx_n$ és una base orientada positivament, però això de moment no és important), on G denota la matriu de Gram de g en la carta local que s'està considerant. Un apunt: si $n = 1$ s'anomena **forma de longitud**, i si $n = 2$ s'anomena **forma d'àrea**.

Si $M = \mathbb{R}^n$, la forma de volum és $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. La forma de volum $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$ té diferencial nul i és a la imatge del diferencial, és a dir, $[\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}] = 0$ en $H^n_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 9. (CÀLCUL) Considerem una corba $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ diferenciable (és a dir, de classe $\mathcal{C}^\infty$). Denotem per t l'única coordenada de $(0,1)$. La matriu de Gram de la mètrica de $\gamma^* := \gamma((0,1))$ que s'obté restringint la mètrica de $\mathbb{R}^2$ és la matriu 1×1

$$G_{t_0} = \left(\left(\tfrac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t_0) \right)^2 + \left(\tfrac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t_0) \right)^2 \right).$$

Per tant, la forma de longitud de γ^* és

$$\mathrm{vol}_{\gamma^*}(t_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t_0) \right)^2}\ dt.$$

Exemple 10. (CÀLCUL) Sigui $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathbb{C}^\infty$. La forma de longitud de $G(f)$, la gràfica de f, és

$$\mathrm{vol}_{G(f)}(x_0) = \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}\ dt.$$

Exemple 11. (CÀLCUL) Considerem la següent carta de S^2:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to S^2, \quad \varphi(u,v) := (\sin u \sin v, \cos u \sin v, \cos v).$$

La matriu de Gram de la mètrica de S^2 que s'obté restringint la mètrica de $\mathbb{R}^3$ és, en aquesta carta,

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \sin v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la forma d'àrea de S^2 s'expressa localment com

$$\mathrm{vol}_{S^2}(u,v) = \sqrt{1 + \sin^2(v)}\ du \wedge dv.$$

Resulta que la forma d'àrea de S^2 té diferencial nul, però no hi ha cap 1-forma ω en S^2 tal que $d\omega = \mathrm{vol}_{S^2}$ (això últim ho veurem més endavant). Per tant la classe de cohomologia de de Rham $[\mathrm{vol}_{S^2}]$ és no-nul·la, així que $H^2_{dR}(S^2) \neq 0$.

ORIENTACIONS

MARC PIQUER I MÉNDEZ - 17 DE MARÇ DE 2023

Aquest document segueix [2] des de la definició 9.8 fins a la proposició 9.14.

1. Definicions

Definició 1. Diem que una varietat diferenciable M de dimensió n és **orientable** si hi ha $\omega \in \Omega^n(M)$ amb $\omega_p \neq 0$ per tot $p \in M$.

Tal ω s'anomena **forma d'orientació** en M. A més, diem que dues formes d'orientació ω, τ són equivalents si hi ha $f \in \Omega^0(M)$ (que recordem que és el mateix que $\mathcal{F}(M)$) tal que $\tau = f\omega$ amb $f(p) > 0$ per tot $p \in M$.

Definició 2. Una classe d'equivalència de formes d'orientació en M s'anomena **orientació en** M.

A l'espai $\mathbb{R}^n$ euclidià, la forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ (que anomenem **estàndard**) redueix al cas conegut de la geometria afí.

Definició 3. Sigui M varietat diferenciable orientada per la forma ω. Una base $e_1, \ldots, e_n$ de T_pM està orientada **positivament** o **negativa** segons el signe de $\omega_p(e_1, \ldots, e_n)$.

Aquest signe depèn tan sols de l'orientació. Ara, com que les formes d'orientació són no nul·les per definició, per cada parell ω, τ de formes d'orientació, hi ha una única $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\tau = f\omega$. A cada punt $p \in M$, diem que ω i τ **determinen la mateixa orientació** si $f(p) > 0$. Això equival a dir que ω i τ indueixen les mateixes bases positivament orientades a T_pM.

Lema 4. *En una varietat diferenciable orientable connexa hi ha justament dues orientacions.*

Demostració. Si M és connex, com f és diferenciable i no nul·la, no canvia de signe sobre M. ☐

2. Orientacions induïdes

Si $U \subseteq M$ és un obert, restringint les formes d'orientació de M a U s'indueix una orientació a M. Es pot fer el mateix procés al revés:

Lema 5. *Sigui $(V_i)_{i \in I}$ un recobriment per oberts d'una (sub)varietat diferenciable M. Si tots els V_i estan orientats i les orientacions coincideixen a $V_i \cap V_j$ per tots $i, j \in I$, llavors M té una única orientació que restringeix a les orientacions dels V_i.*

Per la prova del lema, cal fer servir un mètode usual de la geometria diferencial: les particions de la unitat.

Teorema 6. *Sigui $(V_i)_{i\in I}$ un recobriment per oberts d'una varietat diferenciable $M \subseteq \mathbb{R}^l$. Hi ha funcions diferenciables $\varphi_i : M \to [0,1]$, per $i \in I$ tals que*

(1) $\sup \varphi_i \subseteq V_i$ per tot $i \in I$,[1]
(2) cada $p \in M$ té un entorn obert on tan sols un nombre finit de les φ_i no s'anul·la, i
(3) per cada $p \in M$ es té $\sum_{i\in I} \varphi_i(p) = 1$.

És aquesta darrera propietat la que justifica el nom **partició de la unitat** pel conjunt de funcions $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.

Demostració. Exercici pel lector. Si això no us convenç, es pot trobar a [1]. □

Demostració. (del lema 5) Per cada V_i, sigui $\omega_i \in \Omega^n(M)$ una forma d'orientació a l'orientació de V_i i una partició de la unitat φ_i. Ara, definim

$$\omega = \sum_{i\in I} \varphi_i \omega_i,$$

i cada $\varphi_i\omega_i$ s'estén a una n-forma sobre M definint-la nul·la a $M \setminus \sup \varphi_i$.

ω és una forma d'orientació perquè, per $p \in V_i \subseteq M$ i $e_1, \ldots, e_n$ base de T_pM orientada positivament respecte ω_i, $e_1, \ldots, e_n$ també està positivament orientada respecte cada ω_j amb $p \in V_j$, i a la fórmula

$$\omega_p(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i\in I} \varphi_i(p)\omega_{i,p}(e_1, \ldots, e_n)$$

tots els termes són positius o nuls. Es pot comprovar que la forma d'orientació ω té la propietat que desitjàvem.

Per veure la unicitat, suposem que hi ha una altra forma d'orientació τ que ho compleix. Llavors, $\tau = f\omega$ per una certa funció $f \in \mathcal{F}(M)$, i $f(p) > 0$ per tot $p \in M$. Llavors, ω i τ són a la mateixa orientació. □

3. L'orientació sota difeomorfismes

Ara, si estem orientats en una varietat diferenciable i, fent anar un difeomorfisme, saltem a una altra, cap la possibilitat que ens maregem pel camí i acabem orientats del revés.

Definició 7. Sigui $\varphi : M \to N$ difeomorfisme entre varietats diferenciables M i N orientades per n-formes ω i τ, respectivament. Es pot donar una forma d'orientació $\tilde{\tau}$ a M fent servir τ amb l'esquema següent

$$T_pM \times \overset{n}{\cdots} \times T_pM \xrightarrow{d_p\varphi \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes d_p\varphi} T_{\varphi(p)}N \times \overset{n}{\cdots} \times T_{\varphi(p)}N \xrightarrow{\tau_{\varphi(p)}} \mathbb{R}$$

per cada $p \in M$. Si $\tilde{\tau}$ i ω són a la mateixa orientació, diem que φ **preserva l'orientació**. Si no, diem que φ **inverteix l'orientació**.

[1] Recordem que el **suport** $\sup f$ d'una funció f és el tancat més petit que conté tots els punts $p \in M$ on $f(p) \neq 0$, és a dir, l'adherència del conjunt $\{p \in M : f(p) \neq 0\}$.

Per qualsevol varietat diferenciable orientada M, doncs, podem trobar cartes que preserven l'orientació entre M i $\mathbb{R}^n$. Les anomenem **cartes orientades**. Si tenim un atles amb totes les cartes orientades, l'anomenem **atles positiu**.

Proposició 8. *Si $\mathcal{A}$ és un atles positiu en M, llavors M té una orientació unívocament determinada tal que les cartes de $\mathcal{A}$ són totes orientades.*

Demostració. Posem $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Per cada $i \in I$, orientem U_i de manera que φ_i sigui un difeomorfisme que preserva l'orientació. Llavors les dues orientacions donades a cada intersecció $U_i \cap U_j$ coincideixen. Llavors, pel lema 5, la tal orientació existeix i és única. $\square$

Referències

[1] Curràs Bosch, C. M.: *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*, 1ª edició, Edicions de la UB, Barcelona, 2003.

[2] Madsen, I. i Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

ADDENDUM: EXEMPLES D'ORIENTACIONS

ROGER GARRIDO VILALLAVE

Exemple 1. En $\mathbb{R}^n$, la n-forma determinant

$$\det\left(\sum_i a_1^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|\cdots\Big|\sum_i a_n^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) := \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

és una forma d'orientació.

Per exemple, per $n = 3$, la base (en cada punt)

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

està orientada negativament, ja que

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Exemple 2. Sigui ω una forma d'orientació de $\mathbb{R}^3$. Es pot definir una orientació de S^2 induïda per ω. Donat $p = (x, y, z) \in S^2$, definim la 2-forma

$$\tilde{\omega}_p(u, v) := \omega\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},\ u,\ v\right),$$

on $u, v \in T_pS^2 \subseteq T_p\mathbb{R}^3$. Resulta que $\tilde{\omega}$ és una forma d'orientació en S^2.

Exemple 3. Prenem l'esfera S^2 i la carta donada per $\varphi : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to S^2$,

$$\varphi(u, v) := (\sin u \sin v,\ \cos u \sin v,\ \cos v).$$

Aleshores per tot punt p de la imatge de φ es té que $\{(d_p\varphi)\frac{\partial}{\partial u},\ (d_p\varphi)\frac{\partial}{\partial v}\}$ pot ser una base de l'espai tangent (ho és en els punts $p = \varphi(u, v)$ on són linealment independents). Mirem si, quan és una base, està orientada positiva o negativament en el punt $p = \varphi(u, v)$ respecte l'orientació de l'exemple anterior (prenem $\omega = \det$).

Pensem l'espai tangent T_pS^2 com un subespai de $T_p\mathbb{R}^3$ gràcies a la inclusió $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. La diferencial $d_p\varphi$ és l'aplicació lineal

$$d_p\varphi = \begin{pmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix} : T_{(u,v)}(0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to T_pS^2 \subseteq T_p\mathbb{R}^3.$$

Els vectors de la base són (en els punts $p = \varphi(u, v)$ on són linealment independents)

$$\frac{\partial}{\partial u}|_{\varphi(u,v)} := (d_{\varphi(u,v)}\varphi)\frac{\partial}{\partial u} = \cos u \sin v\frac{\partial}{\partial x} - \sin u \sin v\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}|_{\varphi(u,v)} := (d_{\varphi(u,v)})\frac{\partial}{\partial v} = \sin u \cos v\frac{\partial}{\partial x} + \cos u \cos v\frac{\partial}{\partial y} - \sin v\frac{\partial}{\partial z}.$$

Per tant,

$$\tilde{\det}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \det\left(\sin u \sin v \frac{\partial}{\partial x} + \cos u \sin v \frac{\partial}{\partial y} + \cos v \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin u \sin v & \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ \cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos v & 0 & -\sin v \end{vmatrix} = \sin v,$$

amb el que, si els vectors formen una base, la base està orientada positivament si $v \in (-\pi, 0)$ i negativament si $v \in (0, \pi)$.

MÈTRICA RIEMANNIANA, FORMA DE VOLUM I APLICACIÓ DE GAUSS

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 22 DE MARÇ DE 2023

1. Mètrica Riemanniana

Definició 1. Sigui M una varietat diferenciable. Una **mètrica riemanniana** en M és un tensor de tipus $(0,2)$ que satisfà, per tot $p \in M$, que $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ és un producte escalar.

La matriu de Gram de la mètrica riemanniana en una base B s'anomena **primera forma fonamental** de (M,g) en la base B. Observem que depèn de la parametrització.

2. Forma de volum

Comencem estudiant què passa quan ajuntem una mètrica riemanniana amb una orientació. Això ens permet parlar de bases ortonormals orientades positivament. Una d'aquestes bases ens determina, intuïtivament, una manera d'assignar volum: direm que el volum encapsulat per aquesta base és 1.

Lema 2. *Sigui M una varietat riemanniana orientada de dimensió n. Sigui ω una forma d'orientació. Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ i $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ són dues bases ortonormals orientades positivament de T_pM, aleshores*

$$\omega_p(e_1,\dots,e_n) = \omega_p(e'_1,\dots,e'_n).$$

Demostració. Sigui $p \in M$ arbitrari. Si tenim dues bases ortonormals i orientades positivament $\{e_1,\dots,e_n\}$ i $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ de T_pM, aleshores podem escriure una de les bases com a combinació lineal de l'altra:

$$\begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} C,$$

per alguna matriu C ortogonal (respecte g_p).

Si apliquem ω_p a cada banda de la igualtat,

$$\omega_p(e'_1,\dots,e'_n) = \det(C) \cdot \omega_p(e_1,\dots,e_n).$$

Com que tant $\omega_p(e'_1,\dots,e'_n)$ com $\omega_p(e_1,\dots,e_n)$ són positius, cal que el determinant també ho sigui. De l'ortogonalitat es dedueix que $\det C = 1$. □

Per tant, tenim una aplicació

$$\rho : M \to \mathbb{R}, \quad \rho(p) := \omega_p(e_1,\dots,e_n).$$

Es pot demostrar que aquesta aplicació és diferenciable. Per tant, deduïm el següent resultat:

Teorema 3. *Sigui M una varietat riemanniana orientada de dimensió n. Sigui ω una forma d'orientació. Existeix una única n-forma vol_M tal que, per tot $p \in M$ i tota base ortonormal orientada positivament $\{e_1, \ldots, e_n\}$, es té que*

$$vol_M(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

*Aquesta forma l'anomenem **forma de volum**.*

Demostració. L'única possibilitat (i que de fet funciona perquè ρ és diferenciable) és prendre

$$\mathrm{vol}_M(u_1, \ldots, u_n) := \frac{\omega(u_1, \ldots, u_n)}{\rho(u_1, \ldots, u_n)}.$$

□

Exemple 4. Sigui $p \in M$, i sigui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal orientada positivament de T_pM. Quin volum determinen els vectors $\{2e_1, \ldots, 2e_n\}$? Per la multilinealitat,

$$\mathrm{vol}_{M,p}(2e_1, \ldots, 2e_n) = 2^n \cdot \mathrm{vol}_{M,p}(e_1, \ldots, e_n) = 2^n \cdot 1 = 2^n.$$

Per tant, el volum que determinen $\{2e_1, \ldots, 2e_n\}$ és 2^n, tal i com esperaríem si féssim un dibuixet.

Aquest procediment escrit en general ens permet expressar la forma de volum de la següent manera:

Corol·lari 5. *Sigui M una varietat riemanniana orientada de dimensió n, i sigui (U, φ) una carta de M on la matriu de Gram de g és $G : U \to M_n(\mathbb{R})$ en alguna base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_i$. Aleshores en U tenim que*

$$vol_M = \sqrt{|\det G|}\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

3. Aplicació de Gauss

Ara estudiarem què passa si tenim posada la nostra varietat M (de dimensió n) a dins de $\mathbb{R}^{n+k}$. Així, suposem que $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ és una subvarietat diferencial, i hi posem l'estructura mètrica induïda.

Definició 6. Una **aplicació de Gauss** és una aplicació diferenciable $Y : M \to T\mathbb{R}^{n+k}$ tal que:

(1) Es té que $\pi \circ Y = \mathrm{id}_M$, on $\pi : T\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ és la projecció.
(2) Per tot $p \in M$, $Y_p \in (T_pM)^{\perp}$.
(3) Per tot punt $p \in M$ el vector Y_p és normal (respecte la mètrica estàndard de $\mathbb{R}^{n+k}$).

Recordem que $T\mathbb{R}^{n+k}$ és una varietat diferenciable que té com a conjunt de punts

$$T\mathbb{R}^{n+k} = \{(p, v) \mid p \in \mathbb{R}^{n+k}, v \in T_p\mathbb{R}^{n+k}\},$$

és a dir, és la varietat diferenciable formada per $\mathbb{R}^{n+k}$ amb els plans tangents de cada punt *enganxats*.

Per tant el camp Y assigna a cada punt p un element $Y(p) = (q, v)$, que és un punt $q \in M$ i un vector $v \in T_qM$. A priori no cal que $q = p$. Aquesta igualtat, però, la tenim garantida per la primera condició:

$$p = \mathrm{id}_M(p) \overset{(1)}{=} (\pi \circ Y)(p) = \pi(q, v) = q.$$

Per tant, Y assigna a cada punt p un vector tangent a p. La segona condició ens diu que el vector que assignem a un punt p és perpendicular a l'espai tangent. Així, una aplicació de Gauss és una aplicació que assigna, a cada punt $p \in M$, un vector perpendicular a l'espai tangent i, a més, normal.

Teorema 7. *Sigui $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una varietat de dimensió n. Hi ha una bijecció entre el conjunt d'aplicacions de Gauss i el conjunt d'orientacions de M*

$$\{\textit{aplicacions de Gauss}\} \overset{\cong}{\to} \{\textit{orientacions}\}$$

donada per

$$Y \mapsto [\det(Y, -, -)].$$

Observació 8. En particular, veure que una subvarietat $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de codimensió 1 és orientable és equivalent a trobar una aplicació de Gauss. D'aquesta manera es podria veure que la cinta de Möbius no és orientable (algú s'anima a veure que la cinta de Möbius no admet cap aplicació de Gauss?).

Referències

[1] Madsen, I. i Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

ADDENDUM: EXEMPLES DE VARIETATS RIEMANNIANES, FORMES DE VOLUM I L'APLICACIÓ DE GAUSS

ROGER GARRIDO VILALLAVE

1. Varietats riemannianes

Exemple 1. Sigui $\gamma : I = (0,1) \to \mathbb{R}^n$ una corba diferenciable injectiva i tal que $\gamma'(t) \neq 0$ per tota t. Aleshores $\gamma^* := \gamma(I)$ és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^2$, ja que hi tenim la carta (γ^*, γ^{-1}). Això funciona perquè γ és injectiva així que γ^{-1} existeix i, a més, com que $\gamma'(t) \neq 0$ per tota t, el Teorema de la Funció Inversa ens diu que γ^{-1} és diferenciable.

Denotem per $\dot{\gamma}|_p$ el vector tangent que actua sobre $\mathcal{F}(\gamma^*)$ per

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)}(f) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(t_0+h)) - f(\gamma(t_0))}{h} = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \gamma).$$

Es pot demostrar que, pensant $T_{\gamma(t_0)}\gamma^* \subseteq T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$,

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t_0)}.$$

Com que $\gamma'(t) \neq 0$ per tota t, $\dot{\gamma}|_p \neq 0$ per tot p, així que $\dot{\gamma}$ es pot pensar com un camp vectorial que no s'anul·la en cap punt. A més, com que $\dim T_p\gamma^* = 1$, també tenim que $T_p\gamma^* = \langle \dot{\gamma}|_p \rangle$.

Podem dotar γ^* de dues estructures de varietat riemanniana, que a priori no tenen perquè ser equivalents:

(1) L'estructura induïda pensant γ^* com a subvarietat de $\mathbb{R}^n$.
(2) L'estructura riemanniana que fa que $\dot{\gamma}$ sigui normal en cada punt. Observem que aquesta estructura riemanniana no només depèn del conjunt γ^*, sinó que també depèn de la parametrització γ.

Normalment, si no s'especifica el contrari, dotarem γ^* de l'estructura riemanniana induïda per l'estructura estàndard de $\mathbb{R}^n$.

També podem orientar γ^*. Com que $T_p\gamma^* = \langle \dot{\gamma}|_p \rangle$ per tot punt p, l'espai de 1-formes de γ^* és el $\mathcal{F}(\gamma^*)$-mòdul generat per la 1-forma $d\dot{\gamma}$ (que és la 1-forma dual de $\dot{\gamma}$). En altres paraules,

$$\Omega^1(\gamma^*) = \{ f d\dot{\gamma} \mid f : \gamma^* \to \mathbb{R} \text{ diferenciable} \}.$$

Com que $d\dot{\gamma}$ és una 1-forma que mai s'anul·la, és una forma d'orientació i, per tant, dóna lloc a una orientació $[d\dot{\gamma}]$. L'altra classe d'orientació és $[-d\dot{\gamma}]$.

Exemple 2. Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ donada per $\gamma(t) = (t, t^2)$. Aleshores pensant $T_{\gamma(t_0)}\gamma^* \subseteq T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^2$, tenim que

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)} = \frac{\partial}{\partial x} + 2t_0 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Per tant, l'estructura riemanniana induïda per l'estructura de $\mathbb{R}^2$ és

$$g^{\gamma^*}_{\gamma(t_0)} \left(\lambda\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)},\ \mu\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)}\right) := g^{\mathbb{R}^2}_{\gamma(t_0)} \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda t_0 \frac{\partial}{\partial y},\ \mu\frac{\partial}{\partial x} + 2\mu t_0 \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \lambda\mu + 4\lambda\mu t_0^2 = (1 + 4t_0^2)\lambda\mu.$$

Per tant, la primera forma fonamental en la base $\{\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)}\}$ és (la matriu 1×1):

$$G^{\gamma^*}_{\gamma(t_0)} = \left(\sqrt{1 + 4t_0^2}\right).$$

La forma de volum (o, com que estem en dimensió 1, de longitud) és

$$\mathrm{vol}_{\gamma^*}|_{\gamma(t_0)} := \sqrt{|\det G_{\gamma(t_0)}|}\ d\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)} = \sqrt[4]{1 + 4t_0^2}\ d\dot{\gamma}|_{\gamma(t_0)}.$$

La podem expressar en la base $\{dx, dy\}$, i obtenim

$$\mathrm{vol}_{\gamma^*} = \sqrt[4]{1 + 4t_0^2}\ dx + 2t_0 \sqrt[4]{1 + 4t_0^2}\ dy.$$

Exemple 3. El conjunt $M_n(\mathbb{R})$ es pot identificar amb $\mathbb{R}^{n^2}$ i, per tant, té estructura de varietat diferencial (la mateixa que $\mathbb{R}^{n^2}$). Per consistència amb el punt de vista de les matrius, denotarem per $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ el vector *derivada respecte l'entrada* (i, j).

L'aplicació determinant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ és diferenciable i, a més, $1 \in \mathbb{R}$ és un valor regular seu (això vol dir que $d_A \det : T_A M_n(\mathbb{R}) \to T_1(\mathbb{R})$ és exhaustiva per tota $A \in \det^{-1}(1)$). Per tant, pel Teorema del Valor Regular deduïm que $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ és una subvarietat diferencial de $M_n(\mathbb{R})$ de dimensió $n^2 - 1$. A més, l'espai tangent de $A \in SL_n(\mathbb{R})$ és

$$T_A SL_n(\mathbb{R}) = \ker(d_A \det) \subseteq T_A M_n(\mathbb{R}).$$

Gràcies a la identificació $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ tenim una mètrica riemanniana g en $M_n(\mathbb{R})$ (la que fa que una base ortonormal sigui $\{\frac{\partial}{\partial x_{ij}}_{i,j}\}$). Per tant, com que $T_A SL_n(\mathbb{R}) \subseteq T_A M_n(\mathbb{R})$ per tota matriu A, mitjançant la restricció obtenim una mètrica riemanniana en $SL_n(\mathbb{R})$:

$$g^{SL}_A(u, v) := g_A(u, v).$$

Exemple 4. Estudiem l'exemple anterior per $n = 2$. La varietat $M_2(\mathbb{R})$ té dimensió 4, i l'aplicació determinant

$$\det : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

té diferencial

$$d_A \det = \begin{pmatrix} d & -c & -b & a \end{pmatrix} : T_A M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

per una matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

La varietat $SL_2(\mathbb{R})$ té dimensió 3, i pel que s'ha argumentat en l'exemple anterior, l'espai tangent de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ és

$$T_A SL_2(\mathbb{R}) = \ker(d_A \det) =$$

$$= \left\{ \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_{11}}|_A + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial x_{12}}|_A + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x_{21}}|_A + \delta \cdot \frac{\partial}{\partial x_{22}}|_A \quad \Big| \quad d\alpha - c\beta - b\gamma + a\delta = 0 \right\}.$$

Per exemple, l'espai tangent en la identitat $\mathrm{id} \in SL_2(\mathbb{R})$ és

$$T_{\mathrm{id}} SL_2(\mathbb{R}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{11}}|_{\mathrm{id}} + \frac{\partial}{\partial x_{22}}|_{\mathrm{id}},\ \frac{\partial}{\partial x_{12}}|_{\mathrm{id}},\ \frac{\partial}{\partial x_{21}}|_{\mathrm{id}} \right\rangle.$$

El producte escalar en $T_{\mathrm{id}} SL_2(\mathbb{R})$ determinat per la mètrica induïda g^{SL} té la següent matriu de Gram (primera forma fonamental) en la base donada al paràgraf anterior:

$$G_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, en particular observem que no es tracta d'una base ortonormal però sí ortogonal. La podem ortonormalitzar i obtenir la base

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_{11}}|_{\mathrm{id}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_{22}}|_{\mathrm{id}},\ \frac{\partial}{\partial x_{12}}|_{\mathrm{id}},\ \frac{\partial}{\partial x_{21}}|_{\mathrm{id}} \right\}.$$

Exemple 5. El semiplà de Poincaré $\mathbb{H}^2$ és la varietat diferenciable $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ juntament amb la mètrica riemanniana que té primera forma fonamental

$$G_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

en la base $\{\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)},\ \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)}\}$ de $T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$.

2. Formes de volum

Exemple 6. Considerem en el semiplà de Poincaré $\mathbb{H}^2$ l'orientació donada per la forma $dx \wedge dy$. La base

$$\left\{ y \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)},\ y \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} \right\}$$

de $T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$ està orientada positivament, ja que

$$(dx \wedge dy) \left(y \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)},\ y \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} \right) = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = y^2 > 0,$$

i també és ortonormal.

Per tant, la ρ definida en els apunts val

$$\rho(x,y) = (dx \wedge dy) \left(y \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)},\ y \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} \right) = y^2.$$

Així, la forma de volum és

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2,(x,y)}(u,v) = \frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy)(u,v).$$

Per exemple, l'àrea (volum) que formen els vectors $\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)}, \ \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$ és

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2,(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Això ens diu que, com més ens anem apropant a la recta $y = 0$ (que no és a $\mathbb{H}^2$), més augmenta l'àrea entre els vectors $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$.

PROPIETATS DE LA COHOMOLOGIA DE DE RHAM

ROGER GARRIDO VILALLAVE I MARC PIQUER I MÉNDEZ - 12 D'ABRIL DE 2023

Aquest document segueix [1] des del teorema 9.23 fins a l'exercici 9.31.

1. Teorema dels entorns tubulars

Comencem enunciant i demostrant un teorema del que treurem propietats de la cohomologia de De Rahm.

Teorema 1 (dels entorns tubulars)**.** *Sigui $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ una subvarietat diferenciable amb $\dim M = n$. Hi ha un obert $V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ amb $M \subseteq V$ i una extensió de id_M a $r : V \to M$ diferenciable tal que*

(1) per $x \in V, y \in M$, $||x - r(x)|| \leq ||x - y||$, amb igualtat si, i només si, $y = r(x)$,
(2) per tot $p \in M$, $r^{-1}(p)$ és una bola oberta al subespai afí $p + T_pM^{\perp}$ amb centre a p i radi $\rho(p)$, on ρ és una funció diferenciable positiva a M. A més, si M és compacte, llavors ρ es pot prendre constant, i
(3) si $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ és diferenciable i $0 < \varepsilon(p) < \rho(p)$ per tot $p \in M$ llavors

$$S_\varepsilon = \{x \in V : ||x - r(x)|| = \varepsilon(r(x))\}$$

és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^{n+k}$ amb codimensió 1.

Anomenem V **entorn tubular de** M **de radi** ρ.

Demostració. Primer, al voltant d'un punt $p_0 \in M$ farem una construcció local. Prenem camps vectorials $Y_1, \ldots, Y_k$ que hi formin base ortonormal de $T_{p_0}M^{\perp}$ definits en un entorn obert W de p_0 en M pel qual hi ha un difeomorfisme $f : \mathbb{R}^n \to W$ amb $f(0) = p_0$.

Definim $\Phi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ per

$$\Phi(x, t) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} t_j Y_j(f(x)),$$

amb $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}^k$. La seva jacobiana a 0 té $\partial_{x_1} f|_{x=0}, \ldots, \partial_{x_n} f|_{x=0}$ per les primeres n columnes i $Y_{1,p_0}, \ldots, Y_{k,p_0}$ per les següents k.

Per la definició, les primeres n formen una base de $T_{p_0}M$ i les k darreres formen una base de $T_{p_0}M^{\perp}$. Llavors, Φ és difeomorfisme local a 0. Hi ha, per tant, un entorn obert W_0 de p_0 a M i $\varepsilon_0 > 0$ tals que

$$\Phi_0(p, t) = p + \sum_{j=1}^{k} t_j Y_j(p)$$

defineix un difeomorfisme $W_0 \times \varepsilon_0 \mathring{\mathbb{D}}^k \to V_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$.

Posant π_{W_0} per la projecció sobre W_0 i llavors $r_0 = \pi_{W_0} \circ {\Phi_0}^{-1}$ és una aplicació diferenciable $V_0 \to W_0$ que estén id_{W_0}, de manera que ${r_0}^{-1}(p)$ és la bola oberta de $p + T_pM^\perp$ amb centre p i radi ε_0 per tot $p \in W_0$. Podem retallar prou ε_0 i W_0 de manera que es compleixi la primera clàusula.

Ara, tot M es pot recobrir amb oberts del tipus V_0 amb aplicacions r_0, que seran compatibles a les interseccions. A la unió de tots els oberts V', doncs, hi podem definir $r : V' \to M$ que estén id_M, de manera que la primera clàusula es compleix. Si per cada cas triem $\varepsilon_0 \leq 1$, llavors $r^{-1}(p)$ sobre $p \in M$ serà una bola oberta com la que demana la segona clàusula. Això sí, el radi $\tilde{\rho}$ pot ser una funció discontínua.

Veiem que no és així. La funció distància respecte M definida per $d_M(x) = \inf_{y\in M} ||x - y||$ és contínua a tot $\mathbb{R}^{n+k}$. Per $x \in V'$, doncs, tenim $d_M(x) = ||x-r(x)||$. Llavors, si $p \in M$ i $x \in p+T_pM^\perp$ és a distància $\tilde{\rho}(p)$ de p, $d_M(x) = \tilde{\rho}(p)$. Per la primera clàusula, x és a la frontera de V' i la funció $d : M \to \mathbb{R}$ definida per $d(p) = \inf_{z\notin V'} ||p - z||$ satisfà $0 < d(p) \leq \tilde{\rho}(p)$ i és contínua.

Per la màgia del Nadal, es pot donar $\psi : V' \to \mathbb{R}$ tal que $d(x)/4 \leq \psi(x) \leq 3d(x)/4$ per $x \in M$. Llavors, $\rho = \psi|_M$ és positiva, diferenciable i compleix $\rho(p) < \tilde{\rho}(p)$ per $p \in M$. Si M és compacta, es pot prendre ρ constant amb $\rho = \min_{p\in M} d(p)/2$. Definint $V = \{x \in V' : ||x - r(x)|| < \rho(r(x))\}$ ja tenim els dos primers punts.

Pel tercer, n'hi ha prou de veure que $S_\varepsilon \cap V_0$ és buit o bé una subvarietat diferenciable de V_0 amb codimensió 1. Tenim

$$ {\varphi_0}^{-1}(S_\varepsilon \cap V_0) = \{(p, t) \in W_0 \times \mathbb{R}^k : ||t|| = \varepsilon(p) < \varepsilon_0\}. $$

i la projecció sobre W_0 és $U = \{p \in W_0 : \varepsilon(p) < \varepsilon_0\} \subseteq M$. Ara, el difeomorfisme $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \to U \times \mathbb{R}^k$ donat per $\varphi(p, t) = (p, \varepsilon(p)t)$ fa $\varphi(U \times S^{k-1}) \subseteq S$, i amb això ho tenim. $\square$

2. Primera aplicació: dimensió de la cohomologia

Quan la varietat és compacta es pot demostrar que la seva cohomologia no *explota a infinit*, en el sentit que H^d és de dimensió finita per tota d.

Sigui M una varietat diferencial compacta.

Amb l'ajut del Teorema dels Entorns Tubulars (teorema 1) sabem que hi ha un entorn tubular V_ρ de M amb $\rho > 0$ constant. Considerem un recobriment de M per boles $\{U_i\}_{i\in I}$, tal que $U_i \subseteq V$. Com que M és compacta existeix un subrecobriment finit $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Si denotem per U la seva unió, tenim $M \subseteq U \subseteq V_\rho$.

Les aplicacions $i : M \to V_\rho$ i $r : V_\rho \to M$ restringeixen a aplicacions $i : M \to U$ i $r : U \to M$. Si apliquem la cohomologia a la relació $r \circ i = \mathrm{id}$ deduïm que $H^d(i) \circ H^d(r) = \mathrm{id}$ (per tota d). Això implica que $H^d(r)$ és exhaustiva.

Com que U és la reunió finita de boles, $H^d(U)$ és de dimensió finita per tota d (és un corol·lari de la successió exacta de Mayer-Vietoris). Per tant, com que $H^d(r) : H^d(U) \to H^d(M)$ és exhaustiva, cal que $H^d(M)$ sigui també de dimensió finita.

Hem demostrat el següent resultat:

Proposició 2. *Tota varietat diferencial compacta té els grups de cohomologia de De Rham finits.*

La condició de compacitat és necessària.

Exemple 3. Sigui $M = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ una subvarietat no compacta de $\mathbb{R}^2$. La seva cohomologia de De Rham en grau 1 és isomorfa a $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (un generador per cada *forat*).

3. Segona aplicació: relació amb l'homotopia

Utilitzant topologia algebraica es pot demostrar (no ho farem) que l'homotopia es porta bé amb la cohomologia de De Rham i, per tant, que aquesta cohomologia és un bon invariant homotòpic:

Proposició 4. *Siguin M_1 i M_2 dues subvarietats de $\mathbb{R}^m$, i siguin $f_0, f_1 : M_1 \to M_2$ dues aplicacions diferenciables homòtopes. Aleshores $H^d(f_0) = H^d(f_1)$ per tota d.*

Això implica que, si M_1 i M_2 són dues varietats diferenciables homotòpicament equivalents, aleshores $H^d(M_1) \cong H^d(M_2)$ per tota d.

Exemple 5. Sigui M una varietat diferenciable contràctil (per exemple $\mathbb{R}^n$ ó D^n). Aleshores

$$H^d(M) \cong H^d(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & d = 0, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Això és, de fet, una generalització del Lema de Poincaré, ja que tot domini estrellat és contràctil.

Exemple 6. Sigui $n \geq 1$. Sabem que hi ha un retracte de deformació $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ donat per la inclusió i i per

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \quad r(x) := \frac{x}{||x||}.$$

Per tant, com que $r \circ i = \mathrm{id}$ i $i \circ r \simeq \mathrm{id}$, si apliquem cohomologia obtenim que $H^d(r) \circ H^d(i) = \mathrm{id}$ i $H^d(i) \circ H^d(r) = \mathrm{id}$, amb el que $H^d(i)$ i $H^d(r)$ són isomorfismes. Conseqüentment, la cohomologia de S^n és la cohomologia de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, que es pot demostrar que és

$$H^d(S^n) \cong H^d(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & d = 0, n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Referències

[1] Madsen, I. i Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

RESUM DE GEOMETRIA DIFERENCIAL I RIEMANNIANA

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 16 D' ABRIL DE 2023

Sigui M una varietat diferencial de dimensió n.

① Espai tangent

Un vector tangent en $p \in M$ és una *direcció en la qual derivar*. Per exemple, si prenem la varietat $\mathbb{R}^2$ i el punt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, podem derivar en la direcció de l'eix OX, que ve a ser la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)}$, en la direcció de l'eix OY, que és la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)}$, i també en la direcció de la recta $y = x$, que és la suma de derivades parcials $\frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)} + \frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)}$.

Tenim doncs un espai vectorial de derivacions (vectors tangents), que denotem per T_pM. En el cas de l'exemple anterior, com que tota forma de derivar és combinació lineal de $\frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)}$ i $\frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)}$, tenim que

$$T_0\mathbb{R}^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}|_{(0,0)},\ \frac{\partial}{\partial y}|_{(0,0)} \right\rangle.$$

Formalment, definim T_pM com l'espai vectorial de derivacions de M en p. Una derivació en p és una aplicació lineal $D : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ que satisfà $D(f \cdot g)(p) = D(f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g)(p)$ (és a dir, com que es comporta com una derivada, és *una forma de derivar*). Hem denotat per $\mathcal{F}(M)$ el conjunt de funcions $M \to \mathbb{R}$ diferenciables.

Com que una derivació és una cosa local, podem estudiar-les utilitzant cartes. Sigui $p \in M$, i considerem una carta (U, φ) al voltant de p. Les següents aplicacions són derivacions en p:

$$f \in \mathcal{F}(M) \mapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Les denotem, fent un abús de notació, per $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Observem que el que fa $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ sobre una funció diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ és derivar l'*expressió local* de f (és a dir, $f \circ \varphi^{-1}$) respecte de la coordenada x_i en $\varphi(U)$.

Resulta que

$$T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p,\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\rangle.$$

② Camps vectorials

Intuïtivament, un camp vectorial és una aplicació X que a cada punt $p \in M$ hi assigna un vector tangent $X_p \in T_pM$. A més, com que estem treballant amb coses diferenciables, cal que el vector X_p varïi d'una manera diferenciable quan variem p. Per formalitzar aquesta segona condició el que demanem és que, per tot punt

$p \in M$ i tota carta (U, φ) al voltant de p, X_p s'expressi com

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

amb $f_i : U \to \mathbb{R}$ diferenciables.

Un exemple de camp vectorial en $\mathbb{R}^2$ és

$$X_{(x,y)} = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)}.$$

③ **Tensors de tipus** $(k, 0)$

Encara que ara no sembli gens motivat, més endavant ens serà útil el concepte de tensor de tipus $(k, 0)$.

Un tensor de tipus $(k, 0)$ és una aplicació ω que, donat un punt $p \in M$ i k vectors tangents $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ retorna un escalar. A més, si fixem $p \in M$ obtenim una aplicació $\omega_p : T_pM \times \overset{k)}{\cdots} \times T_pM \to \mathbb{R}$, que demanem que sigui multilineal. Finalment, també demanem que ω sigui diferenciable (en el mateix sentit que la diferenciabilitat demanada pels camps vectorials).

Observem que, per cada $p \in M$, $\omega_p \in (T_pM \times \overset{k)}{\cdots} T_pM)^* \cong T_p^*M \times \overset{k)}{\cdots} T_p^*M$, on $*$ denota el dual d'un espai vectorial. Per tant, si fixem una carta, utilitzem $dx_1, \ldots, dx_n$ per denotar la base dual de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ (és a dir, $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{i,j}$). Encara amb la carta fixada, tenim alguns tensors de tipus $(k, 0)$ canònics, que es denoten per $dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$ i es defineixen per

$$(dx_{i_1} \cdots dx_{i_k})(v_1, \ldots, v_k) := dx_{i_1}(v_1) \cdots dx_{i_k}(v_k).$$

Resulta que ω_p és combinació lineal de tots els tensors de tipus $(k, 0)$ canònics $dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$.

Si això no s'acaba d'entendre més endavant es veuran alguns exemples.

④ **Mètrica riemanniana**

Una mètrica riemanniana en M és un tensor g de tipus $(2, 0)$ tal que, per cada $p \in M$, la restricció $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ és un producte escalar, és a dir,

(1) És definit positiu: $g_p(u, u) \geq 0$, amb igualtat si, i només si, $u = 0$.
(2) És simètric: $g_p(u, v) = g_p(v, u)$.

Per exemple, en $\mathbb{R}^2$ hi tenim la mètrica euclidiana, que és el tensor de tipus $(2, 0)$ definit per $g_p := dxdx + dydy$. A tall d'exemple, calculem el producte escalar entre $\frac{\partial}{\partial x}|_p$ i $\frac{\partial}{\partial y}|_p$:

$$g_p\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p,\ \frac{\partial}{\partial y}|_p\right) = (dxdx)\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p,\ \frac{\partial}{\partial y}|_p\right) + (dydy)\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p,\ \frac{\partial}{\partial y}|_p\right) =$$

$$= dx\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p\right) \cdot dx\left(\frac{\partial}{\partial y}|_p\right) + dy\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p\right) \cdot dy\left(\frac{\partial}{\partial y}|_p\right) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Així, amb la mètrica g els vectors $\frac{\partial}{\partial x}|_p$ i $\frac{\partial}{\partial y}|_p$ són perpendiculars en tot punt p.

Sigui $p \in M$, i escollim una carta (U, φ) al voltant de p (de manera que tenim una base de vectors tangents $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ de T_pM). L'aplicació $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ és un producte escalar, així que podem considerar la seva matriu de Gram en la base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Aquesta matriu s'anomena primera forma fonamental en la carta (U, φ).

En el cas de la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, la primera forma fonamental és

$$G_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici: Comproveu que el tensor de tipus $(2, 0)$ definit per

$$g_{(x,y)} := dxdx + y \cdot dxdy + y \cdot dydx + 2y^2 \cdot dydy$$

és una mètrica riemanniana en $\mathbb{R}^2$. Calculeu la seva primera forma fonamental (en la carta identitat). Calculeu el producte escalar entre els vectors $\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)}$ i $\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)}$ per cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i determineu l'angle que formen.

⑤ Formes diferencials

Una k-forma diferencial ω en M és un tensor de tipus $(k, 0)$ tal que, si $v_i = v_j$ per algun índex $i \neq j$, aleshores $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$.

L'exemple típic de 2-forma diferencial en $\mathbb{R}^2$ és el determinant:

$$\det\left(a\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)} + b\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)},\ c\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)} + d\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} \right) := \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

El conjunt de les k-formes diferencials en M es denota per $\Omega^k(M)$. Donada una k-forma diferencial ω i una ℓ-forma diferencial η, podem construir la següent $(k+\ell)$-forma diferencial:

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \sum_{\sigma \in S(k,\ell)} \text{signe}(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{(\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}),$$

on $S(k, \ell)$ denota el subconjunt del grup simètric $S_{k+\ell}$ donat per les permutacions $\sigma \in S_{k+\ell}$ tals que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ i $\sigma(k + 1) < \cdots < \sigma(k + \ell)$.

Aquesta fórmula tan lletja és bastant irrellevant, l'únic interessant és que dóna lloc a un producte, l'anomenat producte exterior, que és $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$. Aquest producte és bilineal i antisimètric, i resulta que, si $p \in M$ i (U, φ) és una carta al voltant de p, el conjunt de k-formes diferencials en U és:

$$\Omega^k(U) = \left\{ \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid f_{i_1,\dots,i_k} : U \to \mathbb{R} \text{ diferenciable} \right\}.$$

Més endavant veurem dos exemples particulars de formes diferencials: les formes d'orientació i les formes de volum.

⑥ Forma d'orientació

Què és una orientació de M? En geometria lineal, una orientació venia donada per un signe que associàvem a les bases de l'espai vectorial (teníem les bases orientades positivament i les bases orientades negativament). Anem a fer el mateix.

Una forma d'orientació associa, per cada punt $p \in M$, i a cada base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de l'espai tangent T_pM, un escalar no-nul, del qual ens interessa el seu signe. Si el signe és positiu, direm que $\{e_1, \dots, e_n\}$ està orientada positivament; en canvi, si és negatiu, direm que $\{e_1, \dots, e_n\}$ està orientada negativament.

Formalment, una forma d'orientació és una n-forma diferencial $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que, si $u_1, \dots, u_n \in T_pM$ són linealment independents, aleshores $\omega_p(u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Si $\omega_p(u_1, \dots, u_n) > 0$, diem que la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ està orientada positivament, i si $\omega_p(u_1, \dots, u_n) < 0$, diem que la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ està orientada negativament.

Dues formes d'orientació determinen la mateixa orientació si tenen el mateix signe en cada base. Per tant, diem que dues formes d'orientació ω i η són equivalents, i escrivim $\omega \sim \eta$, si existeix alguna funció diferenciable <u>i positiva</u> $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = f \cdot \eta$. Finalment, definim una orientació de M com una classe d'equivalència.

És important remarcar que no tota varietat diferenciable admet alguna orientació (per exemple la cinta de Möbius, o el pla projectiu).

⑦ Forma de volum

Suposem fixades, a la nostra varietat diferencial M, una mètrica riemanniana g i una orientació $[\omega]$.

Sigui $p \in M$, i $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de T_pM. Diem que la base és ortonormal si $g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, i que està orientada positivament si $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$. Per tant, podem parlar de bases ortonormals orientades positivament.

Què és el volum? De tota la vida, si tenim un cub determinat per tres vectors ortonormals i orientats positivament, el volum d'aquest cub és 1. Podem generalitzar així la noció de volum a una varietat arbitrària (amb una mètrica i una orientació fixades).

Resulta que existeix una única n-forma $\mathrm{vol}_M \in \Omega^n(M)$ tal que, per cada base ortonormal i orientada positivament $\{e_1, \dots, e_n\}$, es té que $\mathrm{vol}_M(e_1, \dots, e_n) = 1$. A aquesta n-forma l'anomenem forma de volum.

Escollim un punt $p \in M$ i una carta (U, φ) al voltant de p. Resulta que, si G és la matriu de Gram en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ (és a dir, la primera forma fonamental de la mètrica), aleshores

$$\mathrm{vol}_M = \sqrt{|\det G|} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

⑧ Lema de Poincaré i cohomologia de De Rham

En $\mathbb{R}^n$, teníem ben definit el gradient, el rotacional, la divergència, ... Hi ha un operador que generalitza totes aquestes nocions alhora, que és la diferencial exterior.

Definim la diferencial exterior de la k-forma diferencial $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ per

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

i l'extenem linealment a una aplicació $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ per tota k.

La fórmula tampoc és important. Vegem alguns exemples per entendre què està passant:

(1) Si $f : M \to \mathbb{R}$ és una aplicació diferenciable (és a dir, una 0-forma), aleshores df és el gradient de f:
$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$
(2) Si $\dim M = 2$ i $\omega = f dx + g dy$ és una 1-forma, aleshores $d\omega$ és el rotacional de ω:
$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$
(3) Si $\dim M = 3$ i $\omega = f dx \wedge dy + g dx \wedge dz + h dy \wedge dx$, aleshores $d\omega$ és la divergència de ω (llevat d'algun signe):
$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Per tant, la diferencial exterior és una generalització dels conceptes de rotacional, divergència, gradient, etc. a dimensions superiors i en varietats diferencials arbitràrires.

A càlcul integral vam veure que, si $U \subseteq \mathbb{R}^2$ és un domini estrellat, i ω és una 1-forma $\omega = Pdx + Qdy$ en U, si rot$\omega = 0$ aleshores $\omega = \nabla F$ per alguna $F : U \to \mathbb{R}$ (dèiem que ω admet un potencial F). Això és el Lema de Poincaré, que podem reformular de la següent manera:

$$\text{en un domini estrellat,} \quad d\omega = 0 \implies \omega = dF.$$

Ens interessa mirar si aquest resultat generalitza per varietats diferencials arbitràries. És a dir, si $\omega \in \Omega^k(M)$ satisfà $d\omega = 0$, existeix alguna $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$? Spòiler: no.

Per estudiar *quant falla el Lema de Poincaré* definim la cohomologia de De Rham, que és el $\mathbb{R}$-espai vectorial següent:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\operatorname{im}\,(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}.$$

Aquest quocient està capturant les k-formes diferencials ω tals que $d\omega = 0$ però que no admeten potencial (i.e. no existeix cap η tal que $d\eta = \omega$), ja que en el quocient estem matant totes les formes que sí que admeten potencial.

Observem que el Lema de Poincaré generalitzat és equivalent a que $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = 0$ per tota k. En efecte, si aquest espai vectorial és zero, $\ker d = \operatorname{im}\, d$, així que si $d\omega = 0$ aleshores $\omega \in \ker d = \operatorname{im}\, d$ i, per tant, $\omega = d\eta$ per alguna η.

Resulta que, si M i N són dues varietats diferencials homotòpicament equivalents, $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(N)$. En les sessions anteriors hem vist / ens hem cregut que:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

$$H^k_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem, per exemple, que $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$ no és zero, així que hi ha alguna 1-forma diferencial ω tal que rot $\omega = d\omega = 0$ però que no admet cap potencial. Aquest és un contraexemple a que el Lema de Poincaré sempre és cert. També ens mostra que els espais vectorials $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ es poden entendre com l'*obstrucció* al Lema de Poincaré.

COMPLEXOS DE COCADENES I LA SUCCESSIÓ DE MAYER-VIETORIS

ROGER GARRIDO VILALLAVE I JOAQUIM VIVES FORNT - 19 D'ABRIL DE 2023

Sigui $\mathbb{K}$ el teu cos preferit.

1. Complexos de cocadenes

Definició 1. Un **complex de cocadenes** $C^\bullet$ és una col·lecció de $\mathbb{K}$-espais vectorials $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ juntament amb aplicacions lineals (anomenades **diferencials**) $d_n : C^n \to C^{n+1}$ tals que $d_{n+1}\circ d_n = 0$. Normalment es denota per d totes les aplicacions diferencials, de manera que la identitat que han de satisfer s'escriu $d^2 = 0$.

És útil imaginar-se un complex de cocadenes com un diagrama

$$\cdots \xrightarrow{d} C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} C^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

tal que $d^2 = 0$.

Exemple 2. Considerem els $\mathbb{K}$-espais vectorials

$$C^n := \begin{cases} \mathbb{K}\cdot u_1, & n = 0,\\ \mathbb{K}\cdot v_1 \oplus \mathbb{K}\cdot v_2, & n = 1,\\ \mathbb{K}\cdot w_1 \oplus \mathbb{K}\cdot w_2, & n = 2,\\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Prenent les bases $\{u_1\}$ de C^0, $\{v_1, v_2\}$ de C^1 i $\{w_1, w_2\}$ de C^2, definim l'aplicació diferencial

$$d_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d_1 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},$$

i $d_n = 0$ per $n \neq 0, 1$. En tots els casos $d^2 = 0$. L'única composició no trivial és $d_2 \circ d_1$, que és

$$d_2 \circ d_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Per tant, tenim el complex de cocadenes

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{K}\cdot u_1 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{K}\cdot v_1 \oplus \mathbb{K}\cdot v_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{K}\cdot w_1 \oplus \mathbb{K}\cdot w_2 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots .$$

Exemple 3. Sigui X un espai topològic. El complex de cocadenes singulars (definit en la primera zerrada) amb coeficients en alguns cos $\mathbb{K}$ és un complex de cocadenes.

Exemple 4. Sigui M una varietat diferencial. El **complex de De Rham** de M és el complex de cocadenes $\{\Omega^n(M)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ juntament amb la diferencial exterior. Aquí posem $\Omega^n(M) = 0$ per $n < 0$.

Escrit pel primer dels autors, llegit per tots dos.

2. Grups de cohomologia

Definició 5. Sigui $C^\bullet$ un complex de cocadenes. Un n**-cicle** és un element $\sigma \in C^n$ tal que $d\sigma = 0$. Una n**-vora** és un element $\sigma \in C^n$ tal que existeix algun $\tilde{\sigma} \in C^{n-1}$ que fa que $\sigma = d\tilde{\sigma}$. Denotem per Z^n el conjunt de n-cicles, i per B^n el conjunt de n-vores.

Lema 6. *Sigui $C^\bullet$ un complex de cocadenes. Tant Z^n com B^n són $\mathbb{K}$-subespais vectorials de C^n i, a més, $B^n \subseteq Z^n$.*

Proof. La inclusió $B^n \subseteq Z^n$ segueix del fet que $d^2 = 0$. □

Exemple 7. Considerem el complex de cocadenes de l'exemple anterior. Els únics espais vectorials (de cicles i vores) no trivials són:

$$\begin{array}{rcll} Z^0 & = & \ker d_0 = 0, & B^0 = \text{im } d_{-1} = 0, \\ Z^1 & = & \ker d_1 = \langle v_1 + 2v_2 \rangle, & B^1 = \text{im } d_0 = \langle v_1 + 2v_2 \rangle, \\ Z^2 & = & \ker d_2 = \langle w_1, w_2 \rangle, & B^2 = \text{im } d_1 = \langle w_1 - 3w_2 \rangle. \end{array}$$

Des d'un punt de vista abstracte (que és el que estem fent aquí) potser no té gaire sentit, però a la pràctica ens interessa saber quins són els cicles que no són vores. Això es correspon amb fer el quocient Z^n/B^n.

Per exemple, en el cas del complex de De Rham, un 1-cicle ω que no és vora és una 1-forma ω amb rotacional nul però que no admet cap potencial. En particular, el que ens diu el Lema de Poincaré és que, en dominis estrellats, no hi ha cap d'aquestes 1-formes.

Definició 8. Sigui $C^\bullet$ un complex de cocadenes. Definim el seu **grup de cohomologia n-èsim** com el $\mathbb{K}$-espai vectorial (grup abelià)

$$H^n(C^\bullet) := \frac{Z^n}{B^n} = \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n-1}}.$$

Exemple 9. En l'exemple anterior tenim:

$$H^n(C^\bullet) = \begin{cases} 0/0 = 0, & n = 0, \\ \dfrac{\langle v_1 + 2v_2 \rangle}{\langle v_1 + 2v_2 \rangle} = 0, & n = 1, \\ \dfrac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\langle w_1 - 3w_2 \rangle} = \langle [w_1] \rangle, & n = 2, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

3. Successions exactes

Les successions exactes seran una eina calculística per obtenir grups de cohomologia.

Definició 10. Siguin A, B i C tres $\mathbb{K}$-espais vectorials, i siguin $f : A \to B$, $g : B \to C$. És a dir, considerem un diagrama

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

que anomenem successió curta. Diem que una successió curta és **exacta** si $\operatorname{im} f = \ker g$.

En altres paraules, una successió curta és exacta si tot allò que mata g és tot allò que prové de f.

Definició 11. Considerem una successió llarga

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A^i \xrightarrow{f_i} A^{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots,$$

on els A^i són $\mathbb{K}$-espais vectorials, i els $f_i : A^i \to A^{i+1}$ són aplicacions lineals. Diem que és una successió llarga **exacta** si cadascuna de les successions curtes $A^{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A^i \xrightarrow{f_i} A^{i+1}$ és exacta. Equivalentment, la successió llarga és exacta si, i només si, $\operatorname{im} f_{i-1} = \ker f_i$ per tota i.

Proposició 12. *Un complex de cocadenes $C^\bullet$ és una successió exacta si, i només si, $H^n(C^\bullet) = 0$ per tota n.*

Proof. Exercici. □

Exemple 13. Per tota $n \in \mathbb{Z}$ sigui $A^n := \mathbb{K} \cdot u_n \oplus \mathbb{K} \cdot v_n$. Definim també $f_n : A^n \to A^{n+1}$ com l'aplicació lineal que té per matriu (en les bases $\{u_n, v_n\}$ i $\{u_{n+1}, v_{n+1}\}$)

$$f_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

és a dir, $f_n(u_n) = v_{n+1}$ i $f_n(v_n) = 0$.

Per veure que es tracta d'una successió exacta cal veure que $\operatorname{im} f_n = \ker f_{n+1}$. Com que, per tota $n \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{im} f_n = \langle v_{n+1} \rangle, \quad \ker f_{n+1} = \langle v_{n+1} \rangle,$$

deduïm que la successió és una successió exacta llarga.

4. Aplicacions de la successió de Mayer-Vietoris

D'ara en endavant fixem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

La successió de Mayer-Vietoris és una eina algebraica que ens permet donar la cohomologia de M a partir de la cohomologia de U, V i $U \cap V$, on $U \cup V = M$. Es pot pensar com un anàleg cohomològic del Teorema de Seifert-van Kampen.

Denotem les inclusions per

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook, "j_U"] \arrow[d, hook, "j_V"'] & U \arrow[d, hook, "i_U"] \\ V \arrow[r, hook, "i_V"'] & M \end{tikzcd}.$$

Tenim una aplicació $i_U^* : \Omega^n(M) \to \Omega^n(U)$ que envia $\omega \in \Omega^n(M)$ a la n-forma

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto \omega(di_U(v_1), \dots, di_U(v_n)),$$

on $v_1, \dots, v_n$ són camps vectorials i di_U és l'aplicació diferencial de i_U. Aquesta aplicació i_U^* indueix una aplicació en cohomologia $i_U^* : H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{dR}}(U)$ passant al quocient.

Anàlogament obtenim aplicacions

$$\begin{tikzcd} H^n_{\mathrm{dR}}(U\cap V) & H^n_{\mathrm{dR}}(U) \arrow[l, hook', "j_U^*"'] \\ H^n_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[u, hook, "j_V^*"] & H^n_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[l, hook', "i_V^*"] \arrow[u, hook', "i_U^*"'] \end{tikzcd}.$$

Amb tota aquesta notació podem enunciar el Teorema de la Successió de Mayer-Vietoris.

Teorema 14 (Successió de Mayer-Vietoris)**.** *Sigui M una varietat diferencial, i $U,V\subseteq M$ dos oberts tals que $U\cup V=M$. Hi ha una successió llarga exacta*

$$\cdots\longrightarrow H^n_{dR}(M)\xrightarrow{I^*}H^n_{dR}(U)\oplus H^n_{dR}(V)\xrightarrow{J^*}H^n_{dR}(U\cap V)\xrightarrow{\partial}H^{n+1}_{dR}(M)\longrightarrow\cdots,$$

on

$$I^*([\omega]):=(i_U^*[\omega],i_V^*[\omega]),\qquad J^*([\omega],[\eta]):=j_U^*[\omega]-j_V^*[\eta].$$

Exemple 15 (Esfera S^1)**.** Siguin $N:=(0,1)$, $S:=(0,-1)\in S^1$ els pols nord i sud de S^1, i considerem els oberts $U:=S^1\setminus N$, $V:=S^1\setminus V$. Clarament $U\cup V=S^1$.

Tant U com V són contràctils, així que

$$H^k_{\mathrm{dR}}(U)\cong H^k_{\mathrm{dR}}(V)\cong H^k_{\mathrm{dR}}(\{*\})\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,\\ 0, & \text{altrament.}\end{cases}$$

Com que $U\cap V=S^1\setminus\{N,S\}$ és homotòpicament equivalent a l'espai amb dos punts $\{p,q\}$, tenim que

$$H^k_{\mathrm{dR}}(U\cap V)\cong H^k_{\mathrm{dR}}(\{p,q\})\cong H^k_{\mathrm{dR}}(\{p\})\oplus H^k_{\mathrm{dR}}(\{q\})\cong\begin{cases}\mathbb{R}^2, & k=0,\\ 0, & \text{altrament.}\end{cases}$$

Per tant, la successió exacta de Mayer-Vietoris diu:

(1) Per $n+1=1$ la següent successió és exacta:

$$\begin{tikzcd} H^0_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^0_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^0_{\mathrm{dR}}(U\cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \arrow[r, "I^*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^1_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^1_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Com que, al ser una successió exacta, $\operatorname{im}\partial=\ker I^*=H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)$, deduïm que l'aplicació ∂ és exhaustiva. El Primer Teorema d'Isomorfia ens dóna

$$H^0_{\mathrm{dR}}(U\cap V)/\ker\partial\cong\mathbb{R}^2/\ker\partial\cong\operatorname{im}\partial=H^1_{\mathrm{dR}}(S^1).$$

Per tant, només ens cal calcular $\ker\partial$ per conèixer $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)$. Altre cop, com que la successió és exacta tenim que $\ker\partial=\operatorname{im}J^*$.

Siguin $\omega\in\Omega^0(U)$, $\eta\in\Omega^0(V)$ dues 0-formes (és a dir, dues aplicacions diferenciables) tals que $H^0_{\mathrm{dR}}(U)=\mathbb{R}\cdot[\omega]$ i $H^0_{\mathrm{dR}}(V)=\mathbb{R}\cdot[\eta]$. Les inclusions $j_U:U\cap V\to U$ i $j_V:U\cap V\to V$ envien $[\omega]$ i $[\eta]$ al mateix subespai de dimensió 1, així que J^* té per imatge un espai de dimensió 1 (el generat per la imatge de $[\omega]$, que és la mateixa que la imatge de $[\eta]$). És a dir, $\ker\partial=\operatorname{im}J^*\cong\mathbb{R}$, així que $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\mathbb{R}^2/\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$.

(2) Per $n+1>1$, la següent successió és exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^n_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{J^*} & H^n_{\mathrm{dR}}(U\cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^1) & \xrightarrow{I^*} & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(V) \\
\cong & & \cong & & \cong & & \cong \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Com que $\operatorname{im}\partial = \ker I^* = H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^1)$, deduïm que ∂ és exhaustiva. Com que $\ker\partial = \operatorname{im} J^* = 0$, deduïm que ∂ és injectiva. Per tant, ∂ és un isomorfisme, així que $H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong H^n_{\mathrm{dR}}(U\cap V)=0$.

A més, com que S^1 és connex sabem que $H^0_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\mathbb{R}$.

Per tant,

$$H^n_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & n=0,1,\\ 0, & \text{altrament.}\end{cases}$$

Exemple 16 (Esferes S^k)**.** Sigui $k\geq 2$. Calculem la cohomologia de De Rham de S^k utilitzant la cohomologia de De Rham de S^1 (calculat a l'exemple anterior) i la successió de Mayer-Vietoris.

Siguin $N:=(0,\dots,0,1)$, $S:=(0,\dots,0,-1)\in S^k$ els pols nord i sud de S^k. Definim $U:=S^k\setminus\{N\}$, $V:=S^k\setminus\{S\}$. Clarament $U\cup V=S^k$.

Per una banda, U i V són contràctils, així que

$$H^n_{\mathrm{dR}}(V)\cong H^n_{\mathrm{dR}}(U)\cong H^n_{\mathrm{dR}}(\{*\})\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & n=0,\\ 0, & \text{altrament.}\end{cases}$$

Per altra banda, és fàcil veure (fent un dibuixet) que $U\cap V$ és homotòpicament equivalent a S^{k-1}. Per tant, $H^n_{\mathrm{dR}}(U\cap V)\cong H^n_{\mathrm{dR}}(S^{k-1})$.

Per $n+1>1$ la successi de Mayer-Vietoris ens dóna la successió exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(U)_{\mathrm{dR}}\oplus H^n_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{J^*} & H^n_{\mathrm{dR}}(U\cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^k) & \xrightarrow{I^*} & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(V) \\
\cong & & \cong & & \cong & & \cong \\
0 & \longrightarrow & H^n_{\mathrm{dR}}(S^{k-1}) & \longrightarrow & H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^k) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Com que $\operatorname{im}\partial=\ker I^*=H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^k)$ i $\ker\partial=\operatorname{im} J^*=0$, deduïm que ∂ és un isomorfisme i que, per tant, $H^{n+1}_{\mathrm{dR}}(S^k)\cong H^n_{\mathrm{dR}}(S^{k-1})$ (sempre que $n+1>1$).

Si $n+1=1$ (és a dir, $n=0$), la successió de Mayer-Vietoris ens dóna la successió exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(U)_{\mathrm{dR}}\oplus H^0_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{J^*} & H^0_{\mathrm{dR}}(U\cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^1_{\mathrm{dR}}(S^k) & \xrightarrow{I^*} & H^1_{\mathrm{dR}}(U)\oplus H^1_{\mathrm{dR}}(V) \\
\cong & & \cong & & \cong & & \cong \\
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & H^0_{\mathrm{dR}}(S^{k-1}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(S^k) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

i es pot deduir (amb una mica de feina) que $H^1_{\mathrm{dR}}(S^k)=0$.

Finalment, com que S^k és connex sabem que $H^0_{\mathrm{dR}}(S^k)\cong\mathbb{R}$.

Per tant, usant inducció es té que

$$H^n_{\mathrm{dR}}(S^k) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & n = 0, k, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Jordi Riu Pont
26-IV-2023

Integració en varietats diferenciables.

- M varietat diferenciable orientada de dimensió n
- $\Omega^n_c(\Omega)$ = espai vectorial de les n-formes amb suport compacte.
  - Suport compacte: tancat més petit que conté tots els punts $p \in M$ on ~~[illegible]~~ $\omega(p) \neq 0$ i és compacte.

Es defineix la integral

$$\int_M : \Omega^n_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(*) L'objectiu és integrar en subespais de M

(*) Demostrar el Teorema d'Stokes.

— **Lemma 10.1.** (Cas en què $M = \mathbb{R}^n$): Sigui $\phi: V \longrightarrow W$ difeo, $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ oberts. Suposem que $\det D_x\phi$ és de signe constant $\delta = \pm 1$ quan varia el vector $x \in V$. Aleshores,

$$\int_V \phi^*(\omega) = \delta \cdot \int_W \omega$$

Donada ϕ, $\phi^*(\omega): V \longrightarrow (T_pV)^* \times \cdots \times (T_pV)^*$, $\quad d_p\phi : T_pV \longrightarrow T_pW$

$$p \longmapsto \phi^*(\omega_p)\,?$$

$$(d_p\phi)^* : T_{\phi(p)}V \longrightarrow T_pW$$

$$v \longmapsto v \circ d_p\phi$$

derivació $\leftarrow$ $(T_{\phi(p)}W \to \mathbb{R}) \longmapsto (T_pV \longrightarrow T_{\phi p}W \xrightarrow{v} \mathbb{R})$

Si $\omega_p = \sum_{i_1<\dots<i_n} \lambda_{i_1\dots i_n} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_n} \Rightarrow$

$$\phi^*(\omega)_{p_\phi} := \sum_{i_1<\dots<i_n} \lambda_{i_1\dots i_n} (d\phi)^*(dx_{i_1})\wedge\dots\wedge(d\phi)^*(dx_{i_n}).$$

Demostració: Podem escriure $\omega = f(x)\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$, on $f\in \mathcal{C}^\infty_c(W;\mathbb{R})$

Ara, $\phi^*(\omega) = f(\phi(x)) \det(D_x\phi)\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ (Això significa fora)

(exemple) $\to$ $= \delta f(\phi(x))\cdot|\det(D_x\phi)|\, dx_1\wedge\dots dx_n$ ara s'usa que

$$\int_W f(x)\, d\mu_n = \int f(\phi(x))\, |\det D_x\phi|\, d\mu_n.$$

– Proposició: Donada M varietat diferenciable, existeix una única aplicació lineal

$$\int_M : \Omega^n_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$ amb la propietat

que: si $\operatorname{Sup}\omega \subset \mathcal{U}$, on $\boxed{(\mathcal{U},h) \text{ és una carta}}$ $\mathcal{C}^\infty$, aleshores $\to h\in\mathcal{C}^\infty$.

$$\int_M \omega = \int_{h(\mathcal{U})} (h^{-1})^*(\omega) \qquad \omega\in\Omega^n_c(M)$$

(Bàsicament: per a integrar sobre M, integrem sobre $\mathbb{R}^n$)

Demostració: Fem-ho en dos passos:

~~(i) Sup ω ⊆ ... petit ... $\mathcal{U}$, on $(\mathcal{U},h)$ és una carta.~~

(i) Sup ω petit $\Rightarrow$ tenim carta $(\mathcal{U},h)$ tal que Sup $\omega \subseteq \mathcal{U}$.

Aleshores, $h: T_pM\times\dots\times T_pM \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}$

Demostrem-ho en dos passos:

(i) $\operatorname{Sup}\omega$ és petit. (Com que $\operatorname{Sup}\omega = \{p \in M : \omega(p) \neq 0\}$) suposem que existeix una carta $(\mathcal{U}, h)$ tal que $\operatorname{Sup}\omega \subseteq \mathcal{U} \subseteq M$. Tenim que $h : \underset{\subseteq M}{\mathcal{U}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$. Aleshores

~~[illegible]~~, i $\displaystyle\int_M \omega = \underbrace{\int_{h(\mathcal{U})}}_{\text{Sobre } \mathbb{R}^n} (h^{-1})^* \omega$. S'ha de veure que

ens ho creiem

És vàlid per al suport per allà del conjunt de mesura zero

és independent de la carta triada

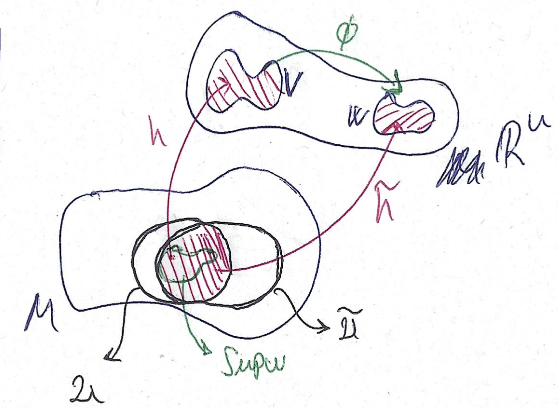
Suposem que $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{h})$ n'és una altra amb $\operatorname{Sup}(\omega) \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$.

Considerem $\phi : \underbrace{h(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}})}_{V} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\tilde{h}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}})}_{W}$, $\boxed{\phi = \tilde{h} \circ h^{-1}}$

Interpretació: Això que el determinant no canviï s'interpreta com que "l'orientació no canvia". En el cas real, que f sigui positiva

det $D_x\phi$ (determinant base de $T_pR \times \dots T_pR$)

(forma de orientació)



té determinant de Jacobi positiu ($\det D_x \phi > 0$) perquè $\phi^* (\tilde{h}^{-1})^*(\omega) = (h^{-1})^*(\omega)$

$\Rightarrow$ Pel Lema anterior $\displaystyle\int_{h(\mathcal{U})} (h^{-1})^* \omega = \int_{\tilde{h}(\tilde{\mathcal{U}})} (\tilde{h}^{-1})^* (\omega)$

(ii) És tria una partició de la unitat $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M sobre un atlas.

Els (ρ_α) conjunt de funcions suaus tals que un nombre finit d'elles són no nul·les

La cosa és que podem escriure $\omega = \displaystyle\sum_{\alpha \in A} \underbrace{\rho_\alpha \omega}_{\in \Omega^n_c(M)}$, amb ρ_α suport petit com abans

~~Aleshores~~ es defineix

$$I(\omega)=\sum_{\alpha\in A}\int_M \rho_\alpha \omega$$

i usem l'argument anterior (i) on per a cada $\alpha\in A$, considerem $\mathcal{U}_\alpha \supseteq \operatorname{Sup} \rho_\alpha$.

~~Ara~~ Ara, I és un operador lineal.

$\ulcorner$ Si passés que $\operatorname{Sup}\omega \subseteq \mathcal{U}$ on $(\mathcal{U},\psi)$ orientada positivament podem usar $\urcorner$

$\llcorner$ $\mathcal{U}$ directament i $I(\omega)=\int_M \omega$ $\lrcorner$

Lema 10.3 (i) $\int_M \omega$ canvia de signe si canviem l'orientació de M.

(ii) Si $\omega\in\Omega^n_c(M)$ té el suport contingut en $W\subset M \Rightarrow \int_M \omega=\int_W \omega$ (els conjunts de mesura nul·la són invisibles)

(iii) Si $\phi: N\longrightarrow M$, N varietat diferenciable i ϕ difeo que preserva orientació $\Rightarrow$

$$\int_M \omega=\int_N \phi^*(\omega) \quad \text{per a } \omega\in\Omega^n_c(M).$$

Joan Domingo Pasarin
10-V-2023

Mesura de Riemann - Lebesgue

Def: donat $A \subset M$, diem que A és mesurable en M si per tota carta (U, φ), $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable. Denotem

$$\mathcal{L}_M := \{A \subset M \mid A \text{ és mesurable en } M\}$$

Prop: $\mathcal{L}_M$ és σ-àlgebra en M i conté la σ-àlgebra de Borel de M.

Definim primer el volum o mesura d'un conjunt contingut en una carta. Donada una carta (U, φ) de M amb $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, observem que el det. $|g|$ de g està ben def. en U i $\sqrt{|g|} \in C^\infty(M)$. Donat $A \in \mathcal{L}_M$ tq. $A \subset U$, definim

$$V_{g,U}(A) := \int_{\varphi(A)} (\sqrt{|g|}) \circ \varphi^{-1} \, dx_1 \cdots dx_n$$

Prop: $V_{g,U}(A)$ no depèn de la carta (U, φ).

Dem:

Sigui (V, ψ), $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ una altra carta tq. $A \subset V$.
Tenim $\psi \circ \varphi^{-1} = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, y_n))$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \Rightarrow \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{g_{ij}} = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l}\right)}_{\tilde{g}_{kl}}$$

Si $G=(g_{ij})$, $\widetilde{G}=(\tilde{g}_{kl})$ i $J=d(\psi\circ\varphi^{-1})$, tenim

$$G=J^t\widetilde{G}J \Rightarrow \det G=(\det J)^2\det\widetilde{G}$$

A més, $\cancel{dx_1\cdots dx_n}$ $dy_1\cdots dy_n=|\det J|\,dx_1\cdots dx_n$

$$\Rightarrow \int_{\psi(A)}(\sqrt{\det\tilde{g}})\circ\psi^{-1}dy=\int_{\varphi(A)}(\sqrt{\det\tilde{g}})\circ(\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\,|\det J|\,dx$$

$$=\int_{\varphi(A)}(\sqrt{\det g})\circ\varphi^{-1}dx \quad ✓$$

Donat $A\in\mathcal{L}_M$ qualsevol, prenem $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ atles de M. Posem

$$A_0:=A\cap U_0 \quad i \quad A_{n+1}:=(A\cap U_{n+1})\setminus\left(\bigcup_{j=0}^{n}A_j\right) \quad n\in\mathbb{N}$$

(A_j) és suc. disjunta, $A_j\subset U_j$ i $A=\bigcup_j A_j$.

$$V_g(A):=\sum_{j=0}^{\infty}V_{g,U_j}(A)$$

Prop: $V_g(A)$ no depèn de l'atles escollit.

Dem:

$\{(\widetilde{U}_j,\tilde{\varphi}_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $(\widetilde{A}_j)$. Tenim $A=\bigcup_j A_j=\bigcup_k\widetilde{A}_k$

$$V_{g,U_j}(A)=V_{g,U_j}(A\cap A_j)=V_{g,U_j}\left(\bigcup_k(A_j\cap\widetilde{A}_k)\right)=\sum_k V_{g,U_j}(\widetilde{A}_k\cap A_j)$$

$$V_{g,\widetilde{U}_k}(A_k)=\sum_j V_{g,U_k}(\widetilde{A}_k\cap A_j)$$

Com $A_j \cap \tilde{A}_k \subset U_j \cap \tilde{U}_k$, $V_{g,U_j}(A_j \cap \tilde{A}_k) = V_{g,\tilde{U}_k}(A_j \cap \tilde{A}_k)$

$$\Rightarrow \sum_j V_{g,U_j}(A_j) = \sum_j \sum_k V_{g,U_j}(A_j \cap \tilde{A}_k) = \sum_j \sum_k V_{g,\tilde{U}_k}(A_j \cap \tilde{A}_k)$$

$$\underset{\text{Lema sèries de termes +}}{=} \sum_k \sum_j V_{g,\tilde{U}_k}(A_j \cap \tilde{A}_k) = \sum_k V_{g,\tilde{U}_k}(\tilde{A}_k)$$

Prop: V_g és una mesura en $(M, \mathcal{L}_M)$.

Dem: $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ atles

(A_k) cjts. disjunts dos a dos, $A = \bigcup_k A_k$.

Per cada $j \in \mathbb{N}$, $(A_k \cap U_j)_k$ és suc. disjunta en U_j

$$\Rightarrow V_{g,U_j}(A \cap U_j) = \sum_k V_{g,U_j}(A_k \cap U_j)$$

$$\Rightarrow V_g(A) = \sum_j V_{g,U_j}(A \cap U_j) = \sum_j \sum_k V_{g,U_j}(A_k \cap U_j)$$

$$\underset{\text{canvi suma}}{=} \sum_k V_g(A_k)$$

Es pot comprovar que V_g és mesura de Radon, completa, i $(M, \mathcal{L}_M, V_g)$ és un espai de mesura σ-compacte i la mesura de qualsevol subvarietat de dim $= m < n$ és 0. A més a més, si $(M,g) = (\mathbb{R}^n, g_{st})$

$$V_g(A) = \int_A \sqrt{|g|}\, dx = \int_A dx = |A|$$

L'atles $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ ja és num.

Prop:

Sigui $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ un àtles, i $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una p.d.u subordinada a $\{U_j\}_j$ i una funció mesurable $f: M\to\mathbb{R}$.

$$f\in L^1(M) \iff \alpha_j f\in L^1(U_j) \text{ per tot } j \text{ i}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int_{U_j}\alpha_j|f|\,dV_g<\infty$$

En tal cas,

$$\int_M f\,dV_g=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{U_j}\alpha_j f\,dV_g.$$

Dem:

$\Rightarrow)$

$$\cancel{f=f\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j}\quad f(p)=\underbrace{\cancel{f(p)}}_{f(p)\sum_j\alpha_j(p)=}\sum_{j=0}^{\infty}f(p)\alpha_j(p)\quad\forall p\in M$$

A més, $|\alpha_j f|\leq|f|$ i $\left|\sum_{j=0}^{m}\alpha_j f\right|\leq|f|\quad\forall j,m$

$\Rightarrow \alpha_j f\in L^1(U_j)$ ja que $sup(\alpha_j)\subset U_j$

Per conv. monòtona

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\int_{U_j}\alpha_j|f|\,dV_g=\int_{U_j}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j(x)|f(x)|\,dV_g=\int_{U_j}|f|\,dV_g<\infty$$

Per conv. dominada

$$\int_M f\,dV = \int_M \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j f\,dV = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{U_j} \alpha_j f\,dV$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$f_m := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j f \longrightarrow f \quad \text{puntualment.}$$

$$\int_M |f_K - f_\ell|\,dV \leq \sum_{j=\ell+1}^{K} \int_{U_j} \alpha_j |f|\,dV \qquad K \leq \ell$$

$\Rightarrow (f_K)_K$ succ. Cauchy en $L^1(M)$

$\Rightarrow f_K \to f$ en $L^1(M)$ (prenent parcials es veu unicitat del límit)

$\Rightarrow f \in L^1(M)$

Varietats amb vora diferenciable

Quim Mas Paradís

Dimecres, 17 de maig de 2023

1 Introducció

Considerem una varietat diferenciable n-dimensional, i prenem un domini (de la mateixa dimensió) d'aquesta -si es vol, un subconjunt d'aquesta-. Aquest domini tindrà una vora sobre la varietat que, si té una forma estranya (per exemple, si te punxes), pot ser que presenti problemes de diferenciabilitat sobre les cartes que hi cauen a sobre. Topològicament, també es pot pensar que cal verificar que la topologia induïda sobre el domini (formada pels oberts de la varietat que tallen amb el domini) preservi les condicions de varietat topològica.

Començarem definint què és un domini amb vora diferenciable, és a dir, quines són les condicions que ha de complir el domini per no presentar cap d'aquests problemes. Llavors, veurem dos lemes: (1) demostrarem que la vora del domini és una subvarietat de dimensió $n-1$ i (2) suposant que la varietat diferenciable és orientada, veurem de quina manera induïm l'orientació en la vora.

2 Dominis amb vora diferenciable

Definició 1 (domini amb vora diferenciable). *Sigui $\mathcal{M}^n$ una varietat diferenciable de dimensió n. Un subconjunt $N \subseteq M^n$ és un domini amb vora diferenciable si per tot punt $p \in \mathcal{M}$, existeix una carta $(U,h)_p$ de classe C^∞ al voltant de p tal que*

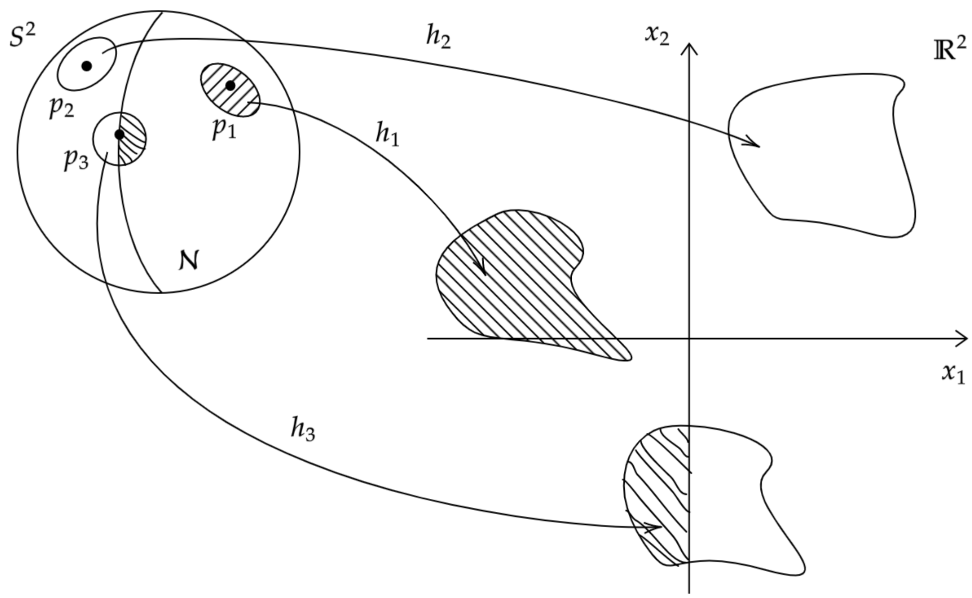
$$h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}^n_- \tag{1}$$

on $\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x \leq 0\}$.

Exemple 2. Considerem l'esfera com a varietat diferenciable $\mathcal{M} = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, de manera que $n = 2$. Considerem la semiesfera corresponent a l'hemisferi oriental com a domini amb vora diferenciable, $\mathcal{N} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ i } x \geq 0\}$. Usarem les coordenades (θ, φ) per a descriure-la, on $\theta \in [0,\pi]$ (sent 0 el pol nord i π el pol sud) i $\varphi \in [0, 2\pi]$ (sent 0 el punt $(1,0,0)$ i creixent en sentit antihorari).

Considerem un punt interior $p_1 \in \mathrm{Int}(\mathcal{N})$, un punt exterior $p_2 \in \mathcal{M} - \mathcal{N}$ i un punt a la frontera $p_3 \in \partial\mathcal{N}$. Considerem les cartes $(U_1,h_1)_{p_1}, (U_2,h_2)_{p_2}$ i $(U_3,h_3)_{p_3}$ amb els homeomorfismes h_1, h_2, h_3 definits així:

$$h_1(\theta,\varphi) = (-\cos\theta, \cos\varphi) \quad h_2(\theta,\varphi) = (\sin\theta, \cos\varphi) \quad h_3(\theta,\varphi) = (-\cos\varphi, -\cos\theta - 1) \tag{2}$$



Anem a comprovar que, efectivament, es compleix (1) en cada cas:

- Com que $U_1 \subset \mathcal{N}$, tenim que $h_1(U_1 \cap \mathcal{N}) = h_1(U_1)$. L'angle θ sempre és positiu en l'octau d'esfera on es troba U_1, de manera que $h_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2_-$ (l'altra coordenada no és rellevant). Per tant, tenim que $h_1(U_1) \cap \mathbb{R}^n_- = h(U_1)$. Així, $h_1(U_1 \cap \mathcal{N}) = h_1(U_1) \cap \mathbb{R}^n_- = h_1(U_1)$.

- Com que $U_2 \subset \mathcal{M} - \mathcal{N}$, tenim que $h_2(U_2 \cap \mathcal{N}) = \emptyset$. L'angle θ sempre és positiu en l'octau on es troba U_2, de manera que $h_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2_-$. Per tant, $h_2(U_2) \cap \mathbb{R}^2_- = \emptyset$. Per tant, $h_2(U_2 \cap \mathcal{N}) = h_2(U_2) \cap \mathbb{R}^2_- = \emptyset$.

- L'angle φ és positiu a l'hemisferi occidental i negatiu a l'hemisferi oriental, de manera que els punts de fora d'$\mathcal{N}$ els envia a $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2_-$, i els de dins d'$\mathcal{N}$ a $\mathbb{R}^2_-$. Per exemple, $h_3(\pi/6, 3\pi/2 + 0.15) \approx (-0.15, -1.15)$ i $h_3(\pi/6, 3\pi/2 - 0.15) \approx (0.15, -1.15)$. Els punts de la vora, amb $\varphi = 3\pi/2$, els envia a l'eix x_2. Per exemple, $h_3(\pi/2023, 3\pi/2) = (0, \cos(\pi/2023) - 1)$.

Per tant, perquè es verifiqui aquesta definició ens veiem forçats a escollir les cartes (U, h), tal com s'il·lustra en l'exemple, d'aquesta manera:

- Si $p \in \mathrm{Int}(\mathcal{N})$, com que sempre podem trobar un $U \subset \mathcal{N}$, escollim un h tal que $h(U) \subset \mathbb{R}^n_-$.

- Si $p \notin \overline{\mathcal{N}}$, com que sempre podem trobar un $U \subset \mathcal{M} - \mathcal{N}$, escollim un h és tal que $h(U) \subset \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n_-$.

- Si $p \in \partial\mathcal{N}$, llavors $[h(q)]_1 < x_1 \ \forall q \in U$ tals que $q \in \mathcal{N}$, $[h(q)] > x_1 \ \forall q \in U$ tals que $q \in \mathcal{N}$ i $[h(q)]_1 = 0 \ \forall q \in U$ tal que $q \in \partial N$ (incloent en aquest darrer cas, p).

Siguin ara (U,h) i (U,k) dues cartes que verifiquen aquesta definició al voltant d'un punt $p \in \partial\mathcal{N}$. En ser $\mathcal{M}^n$ una varietat diferenciable, podem definir l'aplicació canvi de cartes:

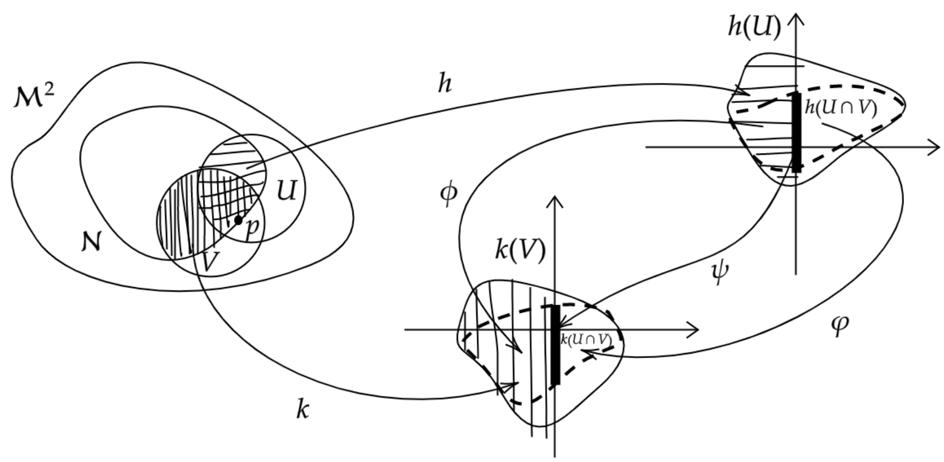
$$\varphi = k\,|_{U\cap V} \circ h^{-1}\,|_{h(U\cap V)} \colon h(U\cap V) \to k(U\cap V) \tag{3}$$

Aquesta la podem restringir als punts amb $x_1 \leq 0$:

$$\phi : h(U\cap V) \cap \mathbb{R}^n_- \to k(U\cap V) \cap \mathbb{R}^n_- \tag{4}$$

Aquesta, al seu temps, la podem restringir als punts amb $x_1 = 0$:

$$\psi : h(U\cap V) \cap \partial\mathbb{R}^n_- \to k(U\cap V) \cap \partial\mathbb{R}^n_- \tag{5}$$



Considerem ara la imatge de p per h, $q \equiv h(p) = (x_1, ..., x_n)$ i anem a calcular la jacobiana de la funció φ en aquest punt, $\phi(q) \equiv (\varphi_1, ..., \varphi_n)$:

$$D_p\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \star & & & \\ \vdots & & D_p\psi & \\ \star & & & \end{pmatrix} \tag{6}$$

Observem:

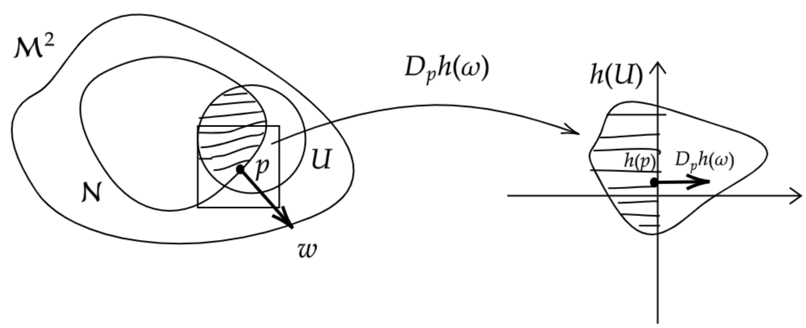
- Per les coordenades $\{x_2, ..., x_n\}$ hi trobem el jacobià de la restricció ψ, que sabem que és invertible en ser ψ un diffeomorfisme.
- Els termes $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}$ necessàriament han de ser nuls: a causa de la seva definició, h i k (i, per tant, φ) envien sempre punts de $\partial\mathcal{N}$ a punts de $\mathbb{R}^n$ amb $x_1 = 0$; per tant, la variació de φ_1 en les altres ha de ser nul (sinó, $\varphi_1 \neq 0$).
- Els altres termes no són rellevants per la discussió.

Com que φ és un diffeomorfisme, ha de ser invertible. Com que ψ també és un diffeomorfisme, i els elements de la fila de $\partial\varphi_1/x_1$ són nuls, necessàriament $\partial\varphi/\partial x_1 \neq 0$.

Si variem x_1, passarem a tenir un punt tal que $x_1 < 0$ o $x_1 > 0$ cosa que, a través de h^{-1} es traduirà en passar a tenir un punt interior a $\mathcal{N}$ o interior a $\mathcal{M} - \mathcal{N}$, respectivament. Això, al seu temps, a través de k es traduirà en passar a tenir un punt tal que $\varphi_1 < 0$ o $\varphi_1 > 0$. Per tant, cal que $\partial\varphi_1/\partial x_1 > 0$, ja que en cas contrari es deixaria de verificar la definició 1 (tindríem un punt interior que per una carta te $x_1 > 0$, o un punt exterior que per una carta té $x_1 < 0$). En definitiva, aquesta definició implica que $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} > 0$.

Definició 3 (vector dirigit cap enfora). *Un vector tangent $\omega \in T_p\mathcal{M}^n$ en un punt de la frontera $p \in \partial\mathcal{N}$ és un vector dirigit cap enfora si existeix una carta C^∞ (U,h) al voltant de p tal que $D_p(\omega) \in \mathbb{R}^n$ té la primera coordenada positiva.*

La motivació d'aquesta definició és que, intuïtivament, $D_ph : T_p\mathcal{M} \to T_{h(p)}\mathbb{R}^n$ transporta els vectors tangents a $\mathbb{R}^n$. Si la primera component del vector és positiva, és a dir, 'apunta en sentit contrari a $\mathbb{R}^n_-$', llavors 'apunta en sentit contrari' a $\mathcal{N}$.



3 Orientació en vores diferenciables

Lema 4. *Sigui $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^n$ un domini amb vora diferenciable. Llavors, ∂N és una subvarietat de dimensió $n-1$ de $\mathcal{M}^n$.*

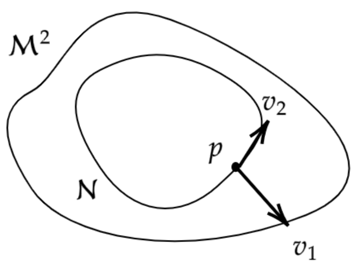
Demostració. Pel teorema d'estructura de les inversions (*ni idea de què és, jo em sabia aquesta definició i en $\mathbb{R}$oger m'ha dit que digui que és per aquest teorema)* una subvarietat $\mathcal{N}^m$ de dimensió m de $\mathcal{M}^n$ és un conjunt $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ tal que per tot punt $p \in \mathcal{N}$ existeix una carta (U,h) tal que $n-m$ coordenades de $h(p)$ són 0. Efectivament, en una vora diferenciable, $\forall p \in \partial\mathcal{N}$ existeix un (U,h) tal que $h(p)_1 = 0$. Per tant, $n-(n-1) = 1$ coordenades són 0, de manera que és una subvarietat diferencial de dimensió $m = n-1$ $\square$.

Lema 5. *Sota les mateixes condicions que el lema anterior, existeix un camp vectorial definit a ∂N format per vectors orientats cap enfora que no s'anul·la en camp punt.*

Demostració. És tan trivial que no val la pena escriure-la. No val ni com exercici pel lector. Ara necessitarem el lema per demostrar el darrer lema.

Lema 6. *Sota les mateixes condicions que el lema anterior, suposem que $\mathcal{M}^n, (n \geq 2)$ és orientable. Existeix una orientació induïda a ∂N tal que si $p \in \partial N$ i $v_1 \in T_p\mathcal{M}$ és un vector tangent dirigit cap enfora, llavors una base $v_2, ..., v_n$ per $T_p\partial\mathcal{N}$ és definida positiva si, i només si, $v_1, v_2, ..., v_n$ és definida positiva en $T_p\mathcal{M}$.*

Demostració-Explicació. $\mathcal{M}$ té una orientació $[\omega]$, donada per la forma de volum ω (n-forma que no s'anul·la en cap punt). Sigui un punt $p \in \partial\mathcal{N}$ de dimensió $n-1$. Sigui una base de $n-1$ vectors ortogonals en aquest punt, $v_2, ..., v_n$. Com podem definir una orientació? Considerem un vector orientat cap enfora v_1 en aquest punt, i calculem la orientació del conjunt amb ω. Llavors, $\omega_p^{\partial\mathcal{N}}(v_2, ..., v_n) \equiv \omega_p^{\mathcal{M}}(v_1, ..., v_n)$, és a dir, mirem la orientació del conjunt de la base i v_1, i la induïm a la base $v_2, ..., v_n$. Això ho hem fet per un punt. Si ara en considerem un altre, com que pel lema 5 existeix un camp vectorial definit a $\partial\mathcal{N}$ format per un vector orientat cap enfora que no s'anul·la en cap punt tindrem que $\omega^{\partial\mathcal{N}}$ és efectivament una n-forma diferenciable i, com que $v_1(p)$ no s'anul·la en cap punt, serà una $n-$forma de volum.



$$\omega_p^{\partial\mathcal{N}}(v_2, ..., v_n) \equiv \omega_p^{\mathcal{M}}(v_1, ..., v_n)$$

 Marc Piquer i Méndez

T. de Stokes: Sigui $N \subseteq M^m$ un domini de frontera diferenciable en una varietat diferenciable orientada. Sigui a ∂N la orientació induïda. Per tot $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ amb $N \cap \operatorname{sup}_M(\omega)$ compacte, es té $\int_{\partial N} \iota^*(\omega) = \int_N d\omega$, on $\iota : \partial N \to M$ és la inclusió.

Prova: Cas $m = 1$: trivial xd.

(Reducció 1)

Posem $m \geq 2$. És clar que $\iota^*(\omega)$ té suport compacte. ↦ ??

Triem $f \in \Omega^0_c(M)$ de valor constant 1 a $N \cap \operatorname{sup}_M(\omega)$.
↳ 0-forma constant

Com $f\omega|_N = \omega|_N$, $\int_{\partial N} \iota^*(\omega) = \int_{\partial N} \iota^*(f\omega)$ i $\int_N d\omega = \int_N d(f\omega)$, i per tant es pot assumir que ω té suport compacte.

(Reducció 2)

Es tria atles a M t.q. les cartes siguin com a la definició de frontera diferenciable
↦ $\forall p \in M$, $\exists (U,h) : h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}^m_-$
i una partició de la unitat $(\rho_\alpha)_{\alpha \in M}$. $\int_{\partial N} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial N} \rho_\alpha \omega$, $\int_N d\omega = \sum_\alpha \int_N d(\rho_\alpha \omega)$ i podem baixar a $\omega \in \Omega^{m-1}_c(M)$, $\operatorname{sup}_M(\omega) \subseteq U$ i (U,h) és carta amb $h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}^m_-$. Es pren (U,h) orientada positivament.
↦ Principi de Loréal: perque yo lo valgo.

(Reducció 3)

Sigui $\kappa \in \Omega^{m-1}_c(\mathbb{R}^m)$ la $(m-1)$ forma amb $(h^{-1})^*(\omega)$ a $h(U)$ i 0 a la resta de $\mathbb{R}^m$. Tenim, doncs,

$$\int_{\partial N} \omega = \int_{h(U) \cap \partial \mathbb{R}^m_-} (h^{-1})^*(\omega) = \int_{\partial \mathbb{R}^m_-} \kappa, \quad \int_N d\omega = \int_{h(U) \cap \mathbb{R}^m_-} (h^{-1})^*(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^m_-} d\kappa.$$

Per tant, baixem al cas $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^m_-$ i $\omega \in \Omega^{m-1}_c(\mathbb{R}^m)$.

(Càlcul directe)

Posem $\omega = \sum_{i=1}^m f_i(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$ i triem $b > 0$ t.q. $\operatorname{sup}_{\mathbb{R}^m} f_i \subseteq [-b,b]^m$, $i \in \{1,\dots,m\}$. Màgia potàgia:
↳ Heine-Borel

$\omega|_{\partial \mathbb{R}^m_-} = f_1(0, x_2, \dots, x_m)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$. Per tant,

$\int_{\partial \mathbb{R}^m_-} \omega = \int f_1(0, x_2, \dots, x_m)\, d\mu_{m-1}$ (1). Per altra banda, es té
↳ Lebesgue

$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial_{x_i} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ i llavors es té

$\int_{\mathbb{R}^n_-} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n_-} \partial_{x_i} f_i \, d\mu_n$. ②

Per $2 \le i \le n$, $\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_i} f_i (x_1, \dots, x_{i-1}, \cancel{t}, x_{i+1}, \dots, x_n)\, dt =$

$= f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, k, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -k, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$

i pel t. de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^n_-} \partial_{x_i} f_i \, d\mu_n = 0$. ③

Per $i = 1$, $\int_{-\infty}^{0} \partial_{x_1} f_1 (t, x_2, \dots, x_n)\, dt = f_1(0, x_2, \dots, x_n) - f_1(-k, x_2, \dots, x_n) =$

$= f_1(0, x_2, \dots, x_n)$,

i pel t. de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^n_-} \partial_{x_1} f_1 \, d\mu_n = \int f_1(0, x_2, \dots, x_n)\, d\mu_{n-1}$. ④

1, 2, 3 i 4 donen el resultat que volem. □

Prenent $N = M$ al teorema, es té...

Corol·lari: Si M^n és una varietat diferenciable orientada i $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$ llavors $\int_M d\omega = 0$.

Si ω és una d-forma tancada a M^n, una manera de veure que $[\omega] \in H^d(M)$ no és nul·la és veure $\int_Q f^*(\omega) \neq 0$ per $f: Q^d \to M$ diferenciable amb Q^d varietat diferenciable orientada i compacta.

Es pot veure $[\omega] = 0 \Longleftrightarrow$ les integrals així s'anul·len.

Exemple 1: El volum de S^{n-1} es pot calcular aplicant el t. de Stokes a D^n amb la orientació estàndard i $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$. $\omega_0|_{S^{n-1}} = Vol_{S^{n-1}}$ i $d\omega_0 = n \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Llavors

$$Vol(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \omega_0 = \int_{D^n} d\omega_0 = n \, Vol(D^n).$$

Es coneix $Vol(D^{2m}) = \pi^m / m!$ i $Vol(D^{2m+1}) = \frac{2^{2m+1} m! \, \pi^m}{(2m+1)!}$ i
↳ $m \in \mathbb{N}$

per tant $Vol(S^{2m-1}) = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}$ i $Vol(S^{2m}) = \frac{2^{2m+1} m! \, \pi^m}{(2m+1)!}$.

Font: Madsen, I. i Tornehave, J.; From Calculus to Cohomology

EL TEOREMA DE DE RHAM

ROGER GARRIDO VILALLAVE - 15 DE JUNY DE 2023

1. Repàs de cohomologia singular

Sigui X un espai topològic. Vam definir una n-**cadena** en X com una aplicació contínua $\sigma : \Delta_n \to X$. Es pot pensar com un triangle (de dimensió n) en X, juntament amb la seva parametrització. Per exemple, una 0-cadena en X és un punt de X, una 1-cadena és una corba, una 2-cadena un triangle, ...

Aleshores podem prendre combinacions lineals de n-cadena, i obtenim el $\mathbb{Z}$-mòdul $C_n(X)$, que es defineix com el $\mathbb{Z}$-mòdul generat pel conjunt de n-cadenes $\{\sigma : \Delta_n \to X\}$ en X.

Com que el nostre objectiu és treballar amb coeficients reals, definim $C_n(X;\mathbb{R})$ com el $\mathbb{R}$-espai vectorial generat pel conjunt de n-cadenes $\{\sigma : \Delta_n \to X\}$. Així, un element de $C_n(X;\mathbb{R})$ és una combinació lineal *formal* $\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i$, on $\lambda_i \in \mathbb{R}$ i $\sigma_i : \Delta_n \to X$.

Ara es pot definir l'**operador vora** que, intuïtivament, donada una n-cadena σ ens dóna la seva vora $\partial\sigma$. Observem que és una aplicació lineal $\partial : C_n(X;\mathbb{R}) \to C_{n-1}(X;\mathbb{R})$ que satisfà $\partial^2 = 0$.

És natural voler assignar, a cada cadena de X, un valor real (intuïtivament, podem pensar que hi estem assignant el n-volum). D'aquesta manera definim una n-**cocadena** com una aplicació lineal $C_n(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, és a dir, com un element del dual de $C_n(X;\mathbb{R})$. Denotem l'espai vectorial de n-cocadenes per $C^n(X;\mathbb{R})$.

L'aplicació $\partial : C_{n+1}(X;\mathbb{R}) \to C_n(X;\mathbb{R})$ indueix, passant al dual, una aplicació $d : C^n(X;\mathbb{R}) \to C^{n+1}(X;R)$, que anomenem **diferencial**. També satisfà que $d^2 = 0$.

Això ens permet definir la **cohomologia singualar** (amb coeficients reals) com els següents $\mathbb{R}$-espais vectorials:

$$H^n_{\text{sing}}(X;\mathbb{R}) := \frac{\ker(d : C^n(X;\mathbb{R}) \to C^{n+1}(X;\mathbb{R}))}{\text{im }(d : C^{n-1}(X;\mathbb{R}) \to C^n(X;\mathbb{R}))}.$$

Una observació important és que, quan treballàvem amb coeficients enters, la cohomologia singular era un $\mathbb{Z}$-mòdul (grup abelià) i com a tal podia tenir torsió. En canvi, si els coeficients són reals, la torsió desapareix ja que la cohomologia és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Finalment, si definim $H^*_{\text{sing}}(X;\mathbb{R}) := \bigoplus_n H^n_{\text{sing}}(X;\mathbb{R})$, hi podem posar el **cup product** $\smile$, que és un producte associatiu i graduat-commutatiu: $x \smile y = (-1)^{|x|\cdot|y|} y \smile x$, per $x \in C^{|x|}(X;\mathbb{R})$ i $y \in C^{|y|}(X;\mathbb{R})$. El $\mathbb{R}$-espai vectorial

$H^*_{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{R})$ juntament amb el cup product s'anomena **anell de cohomologia singular**.

2. Motivació del teorema

Sigui $X = M$ una varietat diferencial de dimensió m.

Les similituds formals entre l'anell de cohomologia singular i l'anell de cohomologia de de Rham de M són evidents. Això no implica, però, que siguin isomorfs, ja que podrien ser formalment idèntics però estar parlant sobre objectes diferents. A priori això és així.

Una n-cocadena assigna un escalar a cada n-triangle de M. Però... una n-forma diferencial ω també, ja que es pot pensar com l'aplicació

$$\int_{(-)} \omega : \sigma \mapsto \int_\sigma \omega \in \mathbb{R}$$

per cada n-triangle σ. Per tant sí que són el mateix...

La fal·làcia és que, en el cas de les cocadenes, un triangle és una cadena, mentre que per les formes diferencials cal que sigui una subvarietat amb vora (de la dimensió apropiada).

Així doncs, podem dir que les formes diferencials són la versió llisa de les cocadenes. Per establir la relació entre la cohomologia singular i la cohomologia de De Rham caldrà, en el fons, aproximar tota cadena a una subvarietat amb vora.

3. Aproximació de cadenes

El Teorema d'Aproximació de Whitney diu:

Teorema 1 (Aproximació de Whitney)**.** *Sigui X una varietat diferenciable (possiblement amb vora), Y una varietat diferenciable sense vora, i $f : X \to Y$ contínua. Si $C \subseteq X$ és un tancat tal que f és diferenciable en C, aleshores existeix una aplicació diferenciable $\tilde{f} : X \to Y$ que és homòtopa a f (relativament a C).*

Amb aquest teorema es pot demostrar, utilitzant molta topologia, que:

Teorema 2. *La inclusió $\iota : C_n^\infty(M;\mathbb{R}) \to C_n(M;\mathbb{R})$ indueix un isomorfisme $\iota^* : H_n(M;\mathbb{R}) \to H_n^\infty(M;\mathbb{R})$ per cada n.*

És a dir, les cadenes diferenciables detecten tota la homologia. No perdem informació si ens hi restringim.

4. L'aplicació de De Rham

L'aplicació de De Rham és una aplicació lineal $\mathcal{I} : H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{R})$. Per definir-la, com que

$$H^n_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{R}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Hom}(H_n(M;\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_n^\infty(M;\mathbb{R}),\mathbb{R}),$$

on a $(*)$ s'utilitza el Teorema dels Coeficients Universals, només cal construir-la com aplicació de la cohomologia de De Rham a $\mathrm{Hom}(H_n^\infty(M;\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

Es defineix de la següent manera:

$$\mathcal{I}([\omega]) := \left([\sigma] \mapsto \int_\sigma \omega\right).$$

Per veure que està ben definida (que no depèn de l'elecció del representant de $[\omega]$ ni de $[\sigma]$) cal el Teorema de Stokes. És un exercici divertit.

És natural, en el següent sentit:

(1) Si $f : M \to N$, aleshores el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
H^n_{\mathrm{dR}}(N) \arrow[r, "f^*"'] \arrow[d, "\mathcal{I}"] & H^n_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[d, "\mathcal{I}"'] \\
H^n_{\mathrm{sing}}(N;\mathbb{R}) \arrow[r, "f^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

(2) Si U i V són oberts tals que $U \cup V = M$, aleshores el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathcal{I}"'] & H^n_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[d, "\mathcal{I}"] \\
H^{n-1}_{\mathrm{sing}}(U\cap V;\mathbb{R}) \arrow[r, "\xi"'] & H^n_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

on δ i ξ són les aplicacions misterioses de les respectives successions de Mayer-Vietoris.

5. Demostració del teorema de De Rham

La idea és recobrir la nostra varietat M per una col·lecció d'oberts $\{U_i\}_{i\in I}$ tals que $\mathcal{I} : H^*_{\mathrm{dR}}(U_i) \to H^*_{\mathrm{sing}}(U_i;\mathbb{R})$ és un isomorfisme. A partir d'aquí es deduirà que $\mathcal{I}$ també és un isomorfisme.

Un parell d'observacions abans de demostrar-ho:

(1) Si U és un obert homeomorf a $\mathbb{R}^m$, aleshores $\mathcal{I} : H^n_{\mathrm{dR}}(U) \to H^n_{\mathrm{sing}}(U;\mathbb{R})$ és un isomorfisme per tota n.

(2) Si M és una varietat diferencial, admet una col·lecció de cartes $\{U_i\}_{i\in I}$ amb cada U_i homeomorfa a $\mathbb{R}^m$. Per tant, per (1) ja tenim que $\mathcal{I}$ és un isomorfisme per cada element d'aquesta col·lecció.

Anem a demostrar que, si $M = \bigcup_i U_i$ amb cada U_i tal que $\mathcal{I}$ hi és un isomorfisme, aleshores $\mathcal{I} : H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{sing}}(M;\mathbb{R})$ és un isomorfisme per cada n.

5.1. **Primer cas.**

Fem el cas que la col·lecció és finita. Només cal fer-ho per $M = U\cup V$ (per inducció). Apliquem la successió exacta de Mayer-Vietoris juntament amb el Lema dels Cinc.

5.2. **Segon cas.**

Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ un recobriment de M tal que $\mathcal{I}$ indueix un isomorfisme $\mathcal{I} : H^n_{\mathrm{dR}}(U_i) \overset{\cong}{\to} H^n_{\mathrm{sing}}(U_i;\mathbb{R})$ per cada n i cada $i \in I$.

Sigui $f : M \to \mathbb{R}$ una exhaució diferenciable, és a dir, una aplicació diferenciable tal que $f^{-1}((-\infty, c])$ és compacte per cada $c \in \mathbb{R}$.

Per $\ell \in \mathbb{N}$ definim $A_\ell := f^{-1}([\ell, \ell+1])$. Una propietat important és que $\{A_\ell\}_\ell$ recobreixen M. Com que $\{U_i\}_{i\in I}$ recobreixen M, i A_ℓ és compacte, un nombre finit $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ recobreixen A_ℓ. Sigui B_ℓ la seva unió. Una observació important és que, pel primer cas, $\mathcal{I}$ indueix un isomorfisme en la cohomologia d'aquests B_ℓ.

Siguin ara
$$U := \bigcup_{\substack{\ell\in\mathbb{N} \\ \ell \text{ senar}}} B_\ell, \qquad V := \bigcup_{\substack{\ell\in\mathbb{N} \\ \ell \text{ parell}}} B_\ell.$$

Es tracta d'unions disjuntes, ja que $B_\ell \subseteq f^{-1}((\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{3}{2}))$. Per tant les inclusions indueixen isomorfismes
$$H^n_*(U) \cong \prod_k H^n_*(B_{2k+1}), \qquad H^n_*(V) \cong \prod_k H^n_*(B_{2k}).$$

Es dedueix que $\mathcal{I}$ també indueix isomorfismes en les cohomologies de U i V. Ara apliquem el primer cas, ja que $M = U \cup V$.