Documentació del grup de lectura sobre càlcul variacional

Diversos alumnes i exalumnes
del grau de matemàtiques

Curs 2023-2024

Semestre de tardor

Aquesta compilació conté els documents corresponents al grup de lectura sobre càlcul variacional,[1] realitzat a la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, durant el semestre de tardor del curs 2023-2024.

Organitzador:	Roger Garrido Vilallave.
Participants:	Elena Solà Cava, Joaquim Vives Fornt, Jordi Riu Pont, Marc Piquer i Méndez, Roger Garrido Vilallave i Yaiza Aguilar Carós.

Resum

L'objectiu d'aquest grup de lectura és introduir els conceptes i resultats bàsics del càlcul variacional. Concretament, es tracta els conceptes de funcional i de primera i segona variació, i s'estudia el problema variacional de l'anul·lació de la primera variació d'un funcional. Per al cas del funcional integral d'acció, en particular, es dóna condicions necessàries i suficients.

[1]Podeu contactar amb el grup al correu electrònic grupdelecturamatesub@gmail.com. També podeu trobar totes les memòries a linktr.ee/lectura_mates_ub.
Disseny del logotip: Yaiza Aguilar Carós.

2020 Mathematics Subject Classification: 49-06.

Índex

Introducció

El càlcul variacional, o càlcul de variacions, és un conjunt de tècniques consistent a trobar funcions que extremalitzin una certa quantitat. En aquest sentit, es pot entendre com una generalització del càlcul de màxims i mínims d'una funció.

Aquests problemes variacionals s'expressen més formalment en termes de funcionals: el problema a estudiar consisteix en un funcional continu que actua sobre un cert conjunt de funcions, dins el qual es vol localitzar la funció que minimitza (o maximitza) el funcional.

Un funcional particularment interessant i útil és el funcional d'acció, definit per $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. El problema variacional que s'estudia, donat aquest funcional, és trobar la corba y amb extrems fixats que el minimitza.

L'interès d'aquest funcional rau en el fet que, en termes d'aquest, es pot formular multitud de problemes en matemàtiques o en diverses branques de la ciència, com ara el càlcul de geodèsiques en una varietat de Riemann o les formulacions lagrangiana i hamiltoniana de la mecànica.

En aquest treball, s'introdueix els conceptes bàsics del càlcul variacional i es dóna alguns resultats per a funcionals generals. Tot seguit, es particularitza al cas del funcional d'acció, i per al seu problema variacional es dóna condicions necessàries i suficients per a la corba solució, en termes de F.

Context històric

La història del càlcul variacional[3] té les seves arrels en la resolució de determinats problemes d'optimització, com els problemes isoperimètrics o el problema de mínima resistència. D'alguns d'aquests problemes ja se'n té coneixença de la Grècia clàssica.

Un problema particularment important en aquest desenvolupament és el problema de la braquistòcrona (la corba de descens més ràpid entre dos punts), plantejat per Galileu (1564 - 1642) a la seva obra *Discursos i demostracions matemàtiques en relació a dues noves ciències*. A l'*Acta Eruditorum* de 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) plantejà el problema als matemàtics de l'època. Això va resultar en quatre solucions: una del propi Johann, una del seu germà gran Jakob (1654-1705), una de Newton (1643-1727) i una de Leibniz (1646-1716).

D'entre aquestes solucions, la de Jakob és la que interessa per a la nostra matèria. Primer, raona que si una corba minimitza el temps entre dos punts, cada tram ha de minimitzar el temps entre els extrems. Llavors, fa una petita

[3] Goldstine, H. H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. 1ª ed. Nova York: Springer-Verlag, 1980.
Aquest resum històric segueix el treball de l'assignatura d'Història de les matemàtiques d'aquest grau titulat *El problema de la braquistòcrona i els inicis del càlcul variacional*, elaborat per Víctor-Xavier Bigorra Lorenzo, Marc Burillo García, Jordi González de Regàs, Matías Nicolás Viner i Marc Piquer i Méndez, del curs 2022/23.

variació sobre la corba, prou petita com per considerar que el temps de recorregut no varia, i aplica tot un seguit de raonaments geomètrics. És en aquesta "petita variació" on veiem els orígens del càlcul variacional.

Aquests mètodes es van anar desenvolupant durant les dècades següents, empesos primer pels desenvolupaments dels propis germans Bernoulli, fins que la primera forma de càlcul variacional va ser construïda per Euler (1707-1783), i després millorada per Lagrange (1736-1813), que va fer-la servir per a donar una nova formulació de la mecànica.

Les següents aportacions cerquen poder donar condicions necessàries i suficients per a què una corba sigui solució d'un problema variacional. Matemàtics que cal destacar en aquesta construcció són Legendre (1752-1833), Jacobi (1804-1851), Hamilton (1805-1865) i Weierstrass (1815-1897). Un testimoni del fet que el càlcul de variacions va seguir sent objecte d'atenció fins al segle XX és el fet que David Hilbert (1862-1943) hi va dedicar un dels seus famosos problemes, el vintè: "Tenen solució tots els problemes variacionals amb certes condicions de contorn?".

Consideracions pràctiques

Aquest grup de lectura s'organitza des de la primavera de 2023 a iniciativa d'en Roger Garrido Vilallave. La present edició, la tercera, s'ha dut a terme a les aules S1 i S3 de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Per tal d'assolir l'objectiu del grup, s'ha seguit liberalment *Calculus of variations*, de I. Gelfand i S. Fomin,[4] i *The calculus of variations*, de B. van Brunt.[5] S'ha estructurat el contingut en les xerrades que es pot veure a la taula següent.

	Data	Tema
1	11/X	Introducció i funcionament del grup
2	18/X	Exemples de càlcul variacional
3	25/X	Resultats generals
4	15/XI	La segona variació
5	22/XI	La condició de Legendre
6	29/XI	La condició de Legendre forta
7	13/XII	La condició de Jacobi
8	20/XII	Condició suficient

Taula 1: Calendari de l'activitat del grup. Totes les dates són a 2023.

[4] Gelfand, I. M. i Fomin, S. V. *Calculus of variations.* 1ª ed. Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall, 1963.

[5] Brunt, B. van. *The calculus of variations.* 1ª ed. Nova York: Springer-Verlag, 2004.

INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL VARIACIONAL

ROGER GARRIDO VILALLAVE

1. Conceptes bàsics

Funcional: Aplicació que va d'un conjunt de funcions a $\mathbb{R}$. Alguns exemples:

(1) La integral $\int_a^b(-)$, que assigna a cada funció f integrable Riemann en $[a,b]$ el valor $\int_a^b f$.
(2) L'aplicació L que assigna a cada corba $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ la seva longitud, és a dir,
$$L(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{1 + ||\dot{\gamma}(t)||^2}dt.$$

Una classe especial de funcionals és la dels funcionals de la forma
$$L(f) := \int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx,$$
on $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és una funció integrable Riemann.

Problema variacional: Determinar els màxims i mínims d'un funcional. Per exemple, suposem que volem determinar la corba $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ més curta que hi ha entre els punts $A, B \in \mathbb{R}^n$. Considerem el conjunt de funcions
$$\{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \mid \text{classe } \mathcal{C}^1,\ \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B\}$$
i el funcional L definit anteriorment. Aleshores el problema esmentat és un problema variacional, i consisteix en trobar els mínims de L.

2. Espais de funcions

Els diferents espais de funcions que considerarem són espais vectorials normats (i, per tant, espais mètrics) o bé subespais mètrics d'aquests. Generalment treballarem en $\mathcal{C}^k[a,b]$, és a dir, en l'espai vectorial de les funcions $[a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, amb la següent norma (depenent de k):
$$||f|| := \sum_{j=0}^{k} \max_{a \le x \le b} |f^{(j)}(x)|.$$

Cadascuna d'aquestes normes indueix una distància en el respectiu espai $\mathcal{C}^k[a,b]$:
$$d(f,g) := ||f - g|| = \sum_{j=0}^{k} \max_{a \le x \le b} |f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)|.$$

Date: 11 d'octubre de 2023.

Una observació és que, en el cas de $\mathcal{C}^0[a,b]$, recuperem la distància que utilitzàvem a l'assignatura d'Anàlisi Matemàtica per parlar de convergència uniforme.

Com que tenim un espai mètric automàticament obtenim les nocions de convergència i continuïtat:

- Una successió $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{C}^k[a,b]$ convergeix a $f \in \mathcal{C}^k[a,b]$ si, i només si, per cada $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 tal que, per tota $n \geq n_0$,
$$\sum_{j=0}^{k} \max_{a \leq x \leq b} |f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| < \varepsilon.$$
- Un funcional $J : \mathcal{C}^k[a,b] \to \mathbb{R}$ és continu en $f \in \mathcal{C}^k[a,b]$ si, per cada $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si
$$\sum_{j=0}^{k} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)| < \delta$$
aleshores
$$\sum_{j=0}^{k} \max_{a \leq x \leq b} |(Jf)^{(j)}(x) - (Jg)^{(j)}(x)| < \varepsilon.$$

Alguns exemples de funcionals continus i lineals:

Exemple 1. Donat $x_0 \in [a,b]$ definim $J : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ per $J(f) := f(x_0)$. Comprovem que és lineal i continu.

Per la linealitat, $J(0) = 0(x_0) = 0$, i donats $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es té que
$$J(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x_0) = f(x_0) + \lambda g(x_0) = J(f) + \lambda J(g).$$

Comprovem ara la continuïtat. Explícitament, veurem que J és continu en cada $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Per cada $g \in \mathcal{C}[a,b]$ es té que
$$|J(f) - J(g)| = |f(x_0) - g(x_0)| \leq \max_x |f(x) - g(x)| = ||f - g||.$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, si prenem $\delta := \varepsilon$ tenim que, si $||f - g|| < \delta$ aleshores $|J(f) - J(g)| < \varepsilon$. Això implica la continuïtat de J en f.

Exemple 2. Donades $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{C}[a,b]$ definim el funcional $J : \mathcal{C}^k[a,b] \to \mathbb{R}$ per
$$J(f) := \int_a^b \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(x) f^{j)}(x) dx.$$

És lineal. Comprovem que també és continu. Donades $f, g \in \mathcal{C}^k[a,b]$, si M denota el màxim $\max_j \max_x |\alpha_j(x)|$ (que existeix perquè les α_j són contínues en $[a,b]$), aleshores

$$
\begin{aligned}
|J(f)-J(g)| &= \left|\int_a^b \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(x)(f^{j)}(x)-g^{j)}(x))dx\right| \leq \\
&\leq \int_a^b \sum_{j=0}^{k} |\alpha_j(x)|\cdot|f^{j)}(x)-g^{j)}(x)|dx \leq \\
&\leq M\cdot\int_a^b \sum_{j=0}^{k} |f^{j)}(x)-g^{j)}(x)|dx \leq \\
&\leq M\cdot\int_a^b \max_y \left\{\sum_{j=0}^{k} |f^{j)}(y)-g^{j)}(y)|\right\} dx = \\
&= M\cdot\int_a^b ||f-g||dx = \\
&= M(b-a)||f-g||.
\end{aligned}
$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, si prenem $f, g \in \mathcal{C}^k[a,b]$ tals que $||f-g|| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ aleshores $|J(f)-J(g)| < \varepsilon$. Això prova la continuïtat de J.

Observació 3. Quan al llibre diuen *funcional lineal* realment es refereixen a *funcional* ***continu*** *i lineal.*

Exercici 4. Comprovar que si $J_1, \ldots, J_n$ són funcionals continus amb el mateix domini, i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és contínua, aleshores el funcional $f(J_1, \ldots, J_n)$ és continu. A més, si $J_1, \ldots, J_n$ i f són lineals, també ho és $f(J_1, \ldots, J_n)$. Això en particular ens demostra que, si J_1 i J_2 són funcionals continus i lineals amb el mateix domini, també ho és $J_1 + J_2$.

3. Diferencial d'un funcional

Sigui $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional. Definim la **variació** de J com el funcional de dues variables

$$\Delta : X \times X \to \mathbb{R}, \quad \Delta(y;h) := J(y+h) - J(y).$$

Definició 5. Si per cada $y \in X$ existeix un funcional $\delta J(y;-) : X \to \mathbb{R}$ lineal i continu tal que

$$\Delta J(y;h) = \delta J(y;h) + \varepsilon(h)\cdot||h||,$$

amb $\varepsilon \to 0$ quan $||h|| \to 0$, diem que J és un funcional **diferenciable** i que δJ és la **diferencial** o **primera variació** de J.

Exemple 6. Vegem quina forma pren la diferencial de J quan estem en un problema variacional d'extrems fixos. Considerem $X \subseteq \mathcal{C}^2[x_0, x_1]$ el subespai format per aquelles funcions tals que $f(x_0) = y_0$ i $f(x_1) = y_1$, i el funcional

$$J(y) := \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx,$$

on f és de classe $\mathcal{C}^2$ respecte totes les variables.

Donat $h \in \mathcal{C}^2[x_0, x_1]$ tal que $h(x_0) = h(x_1) = 0$ tenim que

$$f(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') = f(x, y, y') + \varepsilon\left(h\frac{\partial f}{\partial y} + h'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\Delta J(y;h) &= J(y+h) - J(y) = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x, y+h, y'+h') - f(x,y,y')\right) dx = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x,y,y') + \varepsilon \left(h\tfrac{\partial f}{\partial y} + h'\tfrac{\partial f}{\partial y'}\right) - f(x,y,y') + O(\varepsilon^2)\right) dx = \\
&= \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left(h\tfrac{\partial f}{\partial y} + h'\tfrac{\partial f}{\partial y'}\right) dx + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

així que la primera variació de J és

$$\delta J(y;h) = \int_{x_0}^{x_1} \left(h\frac{\partial g}{\partial y} + h'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx.$$

Exemples del càlcul variacional

Recordem de la presentació del Roger:

- el càlcul variacional consisteix en buscar màxims i mínims de funcionals continus definits sobre algun espai de funcions
- un funcional és una aplicació que va d'un conjunt de funcions a $\mathbb{R}$.

1. **La corba Braquistòcrona** *(corba de descens més ràpid)*

   La història del càlcul variacional comença amb un problema proposat per Bernoulli (si, aquell que te una distribució de probabilitat bastant normaleta) en 1696 al seu archienemic (germà) Jacob.

   L'enunciat del problema en qüestió diu així:

   "Donats dos punts A i B en un pla vertical, quina és la corba dibuixada per un punt quan només actua la gravetat, que comença en el punt A i arriba al punt B en el menor temps possible?"

   Això es tradueix per: quina és la forma que voldríeu que tingués el vostre tobogan si haguéssiu de baixar al nen pesat (li direm... Artur!) lo més ràpid possible?

   Anomenem $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Suposarem (de manera bastant legítima) que la corba solució pot ser representada per una funció $y : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $y \in \mathscr{C}^1[x_0, x_1]$.

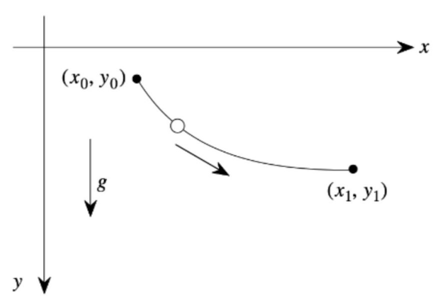
   

   Figure 1: coses amb fletxes que semblen de física bruh

   El temps total que tarda l'Artur en baixar, ve donat per l'expressió següent:

   $$T(y) = \int_0^L \frac{ds}{v(s)} \tag{1}$$

   on L denota la longitud d'arc de la corba, s és el paràmetre que indica el espai recorregut, i v és la velocitat del Artur a s unitats de (x_0, y_0).

Observació: Podem expressar el paràmetre s com:

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Primer de tot hem d'aconseguir una expressió de la velocitat en termes de y. Farem servir la llei de conservació de l'energia amb aquell objectiu. A qualsevol lloc $(x, y(x))$ de la corba tenim:

$$\frac{1}{2}mv^2(x) + mgy(x) = c \tag{2}$$

on totes les lletres són exactament el que esteu pensant.

Observació: Podem determinar la constant avaluant les funcions a un dels x: $c = \frac{1}{2}mv^2(x_0) + mgy(x_0)$

D'altra banda, aïllant v a (2) queda :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2c}{m} - 2gy(x)}$$

$$\Rightarrow_{(1)} T(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\frac{2c}{m} - 2gy(x)}} dx.$$

Per tant el problema es redueix a trobar y que minimitzi T amb $y(x_0) = y_0$ i $y(x_1) = y_1$. Notem que la transformació

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \omega'^2}}{\sqrt{\omega}} dx$$

amb

$$\omega(x) = \frac{1}{2g}(\frac{2c}{m} - 2gy(x))$$

no afecta als extrems de T. Per tant minimitzar J o T, són problemes equivalents.

Com no vull que us moriu del avorriment, el que ve ara ho comentaré per sobre però no ho faré pas en detall.

El integrant de J no depèn de x de manera explícita. Llavors,

$$H(y, y') = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} = -\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}$$

és constant als extrems. Per tant, si y es un extrem en J, s'ha de satisfer:

$$y(1 + y'^2) = c_1 \tag{3}$$

on c_1 és una funció que te per imatge la recta del infinit del pla projectiu (es broma, es una constant). Es pot resoldre la equació amb paràmetres a saco, i em sap greu però no ho escriure (si algú ho vol veure que ho demani que li envio foto).

La solució final es una classe de corbes planes anomenada *cicloides* (Figure 2).

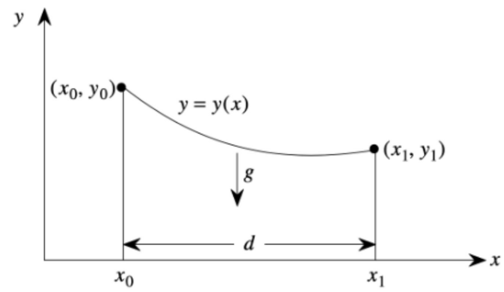


Figure 2: Un tipus de cicloide

2. **La Catenària**

   Imagineu un cable fi, pesat i flexible penjant de dos pals d'alçades y_0 i y_1 separats d'una distància d (Figure 3).

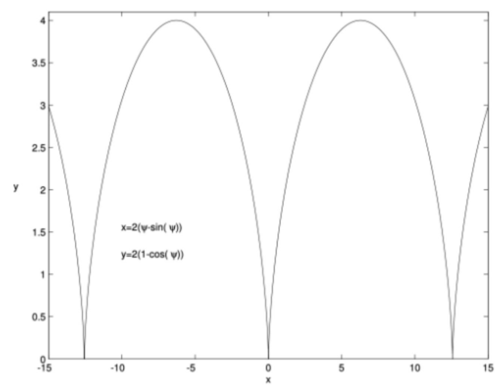


Figure 3: Dibuixet

   Quina serà la forma del cable? Aquest agafarà la posició que minimitzi la seva energia potencial. L'energia potencial ve donada per

$$W_p = \int_0^L mgy(s)ds$$

   on s és la longitud d'arc i $y(s)$ es l'alçada del cable a s unitats per sobre de terra en llargada. El nombre L denota la longitud d'arc del cable des de (x_0, y_0) a (x_1, y_1). Ara bé, com no coneixem L i $ds = \sqrt{1+y'^2}$, podem posar:

$$W_p = \int_{x_0}^{x_1} mgy(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \tag{4}$$

   Fent servir aquesta expressió, estem de nou assumint que y és de la forma $y : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ i que $y \in \mathscr{C}^1[x_0, x_1]$. Minimitzar W_p és equivalent a minimitzar

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

També es requereix $y(x_0) = y_0$ i $y(x_1) = y_1$.

El integrant de J no conté x explícitament, així:

$$H(y, y') = y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2}$$

és constant als extrems. Per tant s'ha de satisfer:

$$\frac{y^2}{1+y'^2} = c_1^2. \tag{5}$$

Si $c_1 = 0$, la única solució a l'equació és $y = 0$. Suposem que $c_1 \neq 0$. Llavors (5) equival a

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}. \tag{6}$$

Integrant a banda i banda,

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}} = c_1 ln(\frac{y + \sqrt{y^1 - c_1{}^2}}{c_1}) + c_2$$

on c_2 és la constant d'integració. Fent més càlculs que ningú es llegira, arribem a

$$y(x) = c_1 cosh(\frac{x - c_2}{c_1}).$$

Comentari: Trobem el mateix funcional J en el problema de minimització d'una superfície de revolució (Figura 4).

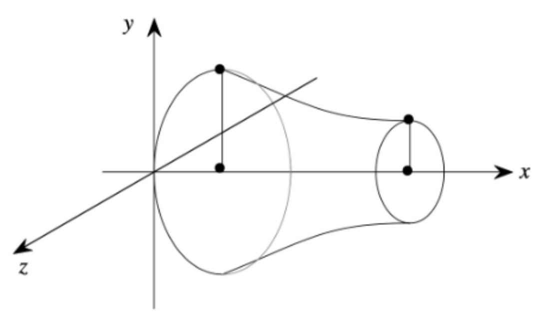


Figure 4: Superfície de Revolució

Recordatori dels dies anteriors

Recordatori 1 (Variació d'un funcional)**.** Sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai de funcions normat i $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional. La **variació** de J es defineix com el funcional $\Delta_J : X \times X \to \mathbb{R}$ donat per l'assignació

$$\Delta_J(y, h) = J(y + h) - J(y). \tag{1}$$

Recordatori 2 (Diferencial d'un funcional)**.** Diem que un funcional $J : X \to \mathbb{R}$ és **diferenciable** si per a cada $y \in X$, existeix un funcional $\delta_J : X \to \mathbb{R}$, que pot dependre del punt y i per això escriurem $\delta(y, \cdot)$, de manera que

(i) $\delta_J(y, \cdot)$ és **continu**. O sigui que per a cada $\varepsilon > 0$ existeix $\tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ de manera que si $\|y - f\| < \tilde{\delta}(\varepsilon)$, aleshores $|\delta(y, x) - \delta(y, f)| < \varepsilon$.

(ii) $\delta_J(y, \cdot)$ és **lineal**.

(iii) Verifica que $\Delta_J(y, h) = \delta_J(y, h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$ i que $\varepsilon \to 0$ si $\|h\| \to 0$.

Diem que δ_J és la **diferencial** de J.

Les condicions anteriors es poden resumir de la següent manera: direm que J és diferenciable si podem aproximar increments de J tan petits com vulguem de forma contínua per aplicacions lineals.

Resultats generals

Teorema 3 (Unicitat de la diferencial)**.** *La diferencial δ_J d'un funcional diferenciable $J : X \to \mathbb{R}$ és única.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $y \in X$. Vegem que $\delta_J(y, \cdot)$ és única. Observem que si $\frac{\delta_J(y,h)}{\|h\|} \to 0$ si $\|h\| \to 0$, aleshores $\delta_J(y, h) = 0$ per a tot $h \in X$. En efecte, si existís $h_0 \in X$ tal que $\delta_J(y, h_0) \neq 0$, podríem considerar tant la successió $h_n := \frac{h_0}{n} \in X$ que si $n \to +\infty$, $\|h_n\| \to 0$, per a $n \in \mathbb{N}$, com el nombre $\lambda := \frac{\delta_J(y,h_0)}{\|h_0\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ara bé,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta_J(y, h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta_J(y, h_0)}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0, \tag{2}$$

fet que contradiu la hipòtesi que $\frac{\delta_J(y,h)}{\|h\|} \to 0$ si $\|h\| \to 0$.

Si existís una altra diferencial $\tilde{\delta}_J(y, \cdot)$ de J, podríem considerar les quantitats

$$\begin{aligned} \Delta_J(y, h) &= \delta_J(y, h) + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\| \\ \Delta_J(y, h) &= \tilde{\delta}_J(y, h) + \varepsilon_2(h) \cdot \|h\| \end{aligned} \tag{3}$$

de manera que $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \to 0$ si $\|h\| \to 0$. Obtindríem que $\delta_J(y,h) - \tilde{\delta}_J(y,h) = \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h))$ i, per tant, que

$$\frac{\delta_J(y,h) - \tilde{\delta}_J(y,h)}{\|h\|} = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h) \to 0 \tag{4}$$

si $\|h\| \to 0$. Tot plegat, passaria que $\delta_J(y,h) - \tilde{\delta}_J(y,h) = 0$ per a tot $h \in X$, que és el que volíem demostrar. □

Definició 4 (Extrems relatius)**.** Sigui $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional i $S \subseteq X$ un subconjunt de X. Diem que J té un **màxim relatiu** en $y \in S$ si existeix $\delta > 0$ tal que $J(\tilde{y}) - J(y) \leq 0$ per a tot $\tilde{y} \in S$ que verifiqui que $\|\tilde{y} - y\| < \delta$. Diem que J té un **mínim relatiu** en $y \in S$ si $-J$ té un màxim relatiu en y.

Observació 5. El fet que J tingui un màxim relatiu o un mínim relatiu en $y \in S$ és equivalent al fet que $J(y) - J(\tilde{y})$ no canviï de signe en S.

Teorema 6. *Sigui $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Suposem que $y \in X$ és un màxim o un mínim relatiu. Aleshores, $\delta_J(y, \cdot) = 0$.*

Demostració. Podem suposar que y és un mínim relatiu. Com que J és diferenciable

$$\Delta_J(y,h) = \delta_J(y,h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\| \tag{5}$$

on $\varepsilon(h) \to +\infty$ si $\|h\| \to 0$. Per tant, per a $\|h\|$ prou petit, $\Delta_J(y,h)$ i $\delta_J(y,h)$ tenen el mateix signe. En efecte, com que sense pèrdua de generalitat podem suposar que per a tot $\|h\|$ el signe de $\Delta_J(y,h)$ és positiu i que el de $\delta_J(y,h)$ és negatiu, ha d'existir $\lambda > 0$ independent de $\|h\|$ tal que $\varepsilon(h) \cdot \|h\| = \Delta_J(y,h) - \delta_J(y,h) > \lambda > 0$, fet que contradiu que $\varepsilon(h) \to 0$ si $\|h\| \to 0$.

Suposem ara que $\delta_J(y, h_0) \neq 0$ per a algun $h_0 \in X$. Aleshores, per a qualsevol $\alpha > 0$

$$\delta_J(y, -\alpha h_0) = -\delta_J(y, \alpha h_0). \tag{6}$$

Per tant, podem fer que per a $\|h\|$ petit, el signe de $\Delta_J(y,h)$ sigui negatiu i positiu, fet que contradiu que $\Delta_J(y,h) \geq 0$ per a $\|h\|$ prou petit. □

Vegem ara un parell de lemes tècnics, però d'aplicació pràctica.

Lemma 7. *Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua que satisfà que*

$$\int_a^b \alpha(x) h'(x)\, dx = 0 \tag{7}$$

per a tot $h \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que $h(a) = 0 = h(b)$, aleshores α és constant.

Demostració. Exercici. □

Lemma 8. *Si $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ són contínues i*

$$\int_a^b \alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x)\, dx = 0 \tag{8}$$

per a tot $h \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que $h(a) = 0 = h(b)$, aleshores β és derivable i $\beta'(x) = \alpha(x)$ per a cada $x \in [0,1]$.

Demostració. Posem $A(x) \coloneqq \int_a^x \alpha(y)\,dy$ (observem que és contínua en $[a,b]$ en virtut del Teorema Fonamental del Càlcul (de fet, uniformement contínua en $[a,b]$)) i integrem per parts el primer sumand de (8). Obtenim que

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)\,dx = -\int_a^b A(x)h'(x)\,dx \tag{9}$$

i, per tant, reescrivim (8) com

$$\int_a^b (-A(x)+\beta(x))h'(x)\,dx = 0 \tag{10}$$

Com que se satisfan les hipòtesis del lema anterior, $\beta(x)-A(x)$ és una funció constant; és a dir, $\beta'(x) = \alpha(x)$. $\square$

L'equació d'Euler

En aquesta secció esbrinarem com trobar l'aplicació diferencial d'un determinat tipus de funcional. Això ens permetrà de resoldre el següent problema.

Sigui $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^{|\alpha|}}$ és contínua per a $|\alpha| \in \{1,2\}$, on α és un multi-índex. El conjunt d'aquestes funcions el denotarem per E, i és un espai vectorial. Considerem, per a $A, B \in \mathbb{R}$, el conjunt

$$\mathcal{C}^1_{A,B}([a,b]) \coloneqq \{f \in \mathcal{C}^2([a,b]) : f(a) = A \text{ i } f(b) = B\}. \tag{11}$$

Definim ara el funcional $J : \mathcal{C}^2_{A,B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ donat per l'assignació

$$J(f) = \int_a^b F(x, f(x), f'(x))\,dx. \tag{12}$$

El problema consisteix en trobar un element f de $\mathcal{C}^2_{A,B}([a,b])$ tal que J tingui un màxim relatiu o un mínim relatiu.

L'exemple de la corba braquistòcrona és un problema d'aquest tipus.

Deduïm tot seguit quina ha de ser la diferencial de J. Primer de tot, considerem l'increment $f(x)+h(x)$, amb $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular com calgui. Per tal que $f + h \in \mathcal{C}^2_{A,B}([a,b])$, s'ha de satisfer que $h(a) = 0 = h(b)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \Delta_J(f,h) = J(f+h) - J(f) &= \int_a^b F(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x))\,dx - \int_a^b F(x, f(x), f'(x))\,dx \\ &= \int_a^b F(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x)) - F(x, f(x), f'(x))\,dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Ara usem la fórmula de Taylor:

$$\Delta_J(f,h) = \int_a^b (F_y(x, f(x), f'(x)) \cdot h(x) + F_z(x, f(x), f'(x)) \cdot h'(x)\,dx) + \mathcal{O}_{\|h\|\to 0}(\|h\|^2). \tag{14}$$

Així doncs, la diferencial de J en f és

$$\delta_J(f,h) = \int_a^b F_y(x, f(x), f'(x))h(x) + F_z(x, f(x), f'(x))h'(x)\,dx. \tag{15}$$

Com que una condició necessària per tal que f sigui un extrem relatiu és que $h \in \ker \delta_J(f, \cdot)$ per a tota h, usant el lema (8), obtenim que F_z és derivable (com a funció de x) i que

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0. \tag{16}$$

En forma de teorema:

Teorema 9 (Equació d'Euler(-Lagrange))**.** *Sigui J un funcional del tipus*

$$J(f) = \int_a^b F(x, f(x), f'(x))\, dx \tag{17}$$

per a $f \in \mathcal{C}^2_{A,B}([a, b])$. Aleshores, J té un mínim relatiu o un màxim relatiu si se satisfà l'equació d'Euler, que és

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0. \tag{18}$$

Observem que (18) és una equació diferencial. Les solucions de l'equació d'Euler s'anomenem **solucions extremals**. No podem usar els teoremes habituals d'existència i unicitat per a estudiar aquests tipus d'equacions pel tipus de condicions que imposem a f.

Exemple 10. Considerem la funció $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per $F(x, y, x) = 2x + xyz + z^2 + y$, que és tan regular com vulguem. Definim el funcional $J : \mathcal{C}^2_{1,2}([0, 1]) \to \mathbb{R}$ per

$$J(f) = \int_0^1 F(x, f(x), f'(x))\, dx = \int_0^1 2x + 2xf(x)f'(x) + (f'(x))^2 + f(x)\, dx. \tag{19}$$

Per exemple, si $g(x) \coloneqq x + 1 \in \mathcal{C}^2_{1,2}([0, 1])$, $J(g) = \int_0^1 2x^2 + 5x + 2 = \frac{31}{6}$. Si $h(x) \coloneqq x^2 + 1 \in \mathcal{C}^2_{1,2}([0, 1])$, $J(h) = \int_0^1 4x^4 + 9x^2 + 2x + 1\, dx = \frac{29}{5}$. Per a trobar un extrem relatiu, usem l'equació d'Euler (18):

$$f(x) + 2f''(x) - 1 = 0. \tag{20}$$

Si resolem l'equació diferencial obtenim una família biparamètrica de solucions. Si imposem les condicions que $f(0) = 1$ i que $f(1) = 2$, obtenim que la solució és

$$f^\star(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 \tag{21}$$

i $J(f^\star) = \frac{7}{2} + \frac{\cot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$, que és un màxim relatiu o un mínim relatiu.

4. Funcionals quadràtics. La segona variació d'un funcional.

Yaiza Aguilar Carós

November 2023

Definició 4.1. Un funcional $B[x, y]$ pertanyent a un espai lineal normat $\mathcal{R}$, és bilineal si és una funció lineal de y per qualsevol x fixada i una funció lineal de x per a qualsevol y fixada. És a dir, si compleix:

$$B[x + y, z] = B[x, z] + B[y, z]$$

$$B[\alpha x, y] = \alpha B[x, y]$$

$$B[x, y + z] = B[x, z] + B[x, z]$$

$$B[x, \alpha y] = \alpha B[x, y]$$

per qualssevol $x, y, z \in \mathcal{R}$ i per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definició 4.2. Si posem $x = y$ en un funcional bilineal, obtenim el funcional quadràtic: $A[x] = B[x, x]$.

Definició 4.3. Un funcional quadràtic és definit positiu si $A[x] > 0$ per qualsevol x diferent de 0.

Definició 4.4. Un funcional bilineal definit en un espai de dimensió finita s'anomena forma bilineal. Qualsevol forma bilineal es pot escriure com:

$$B[x, y] = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \xi_i \eta_k$$

on $\xi_1, ..., \xi_n$ i $\eta_1, ..., \eta_n$ són els components dels vectors x i y en alguna base.

Definició 4.5. Si posem $x = y$ en l'expressió anterior, obtenim el que s'anomena forma quadràtica:

$$A[x] = B[x, x] = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \xi_i \xi_k$$

Exemple 4.6. Una funció bilieal definida en $\mathcal{C}$ és

$$B[x, y] = \int_a^b \alpha(t) x(t) y(t) dt,$$

on $\alpha(t)$ és una funció fixada. Si $\alpha(t) > 0$ per qualsevol $t \in [a, b]$, aleshores el corresponent funcional quadràtic

$$B[x, y] = \int_a^b \alpha(t) x(t)^2 dt,$$

és definit positiu.

Recordem que un funcional $J[y]$ és diferenciable si

$$\triangle J[h] = J[y + h] - J[y]$$

pot ser escrita com

$$\triangle J[h] = \varphi[h] + \epsilon ||h||$$

on $\varphi[h]$ es un funcional lineal i $\epsilon \to 0$ quan $||h|| \to 0$. Aleshores, $\varphi[h]$ és la principal part lineal de $\triangle J[h]$ i s'anomena variació (o primera diferencial) de $J[y]$ i es denota per $\delta J[h]$.

Definició 4.7. Diem que el funcional $J[y]$ és dos vegades diferenciable si el seu increment es pot escriure com:

$$\triangle J[h] = \varphi_1[h] + \varphi_2[h] + \epsilon||h||^2$$

on $\varphi_1[h]$ es un funcional lineal (la primera varaició) i $\varphi_2[h]$ es un funcional quadràtic, i $\epsilon \to 0$ quan $||h|| \to 0$.

Definició 4.8. El funcional $\varphi_2[t]$ s'anomena segona variació (o segon diferencial) del funcional $J[y]$ i es denota com $\delta^2 J[h]$.

Observació 4.9. El segon variaional és únic i la prova és anàloga a la de la unicitat del primer variacional.

Teorema 4.10. Una condició necessària per tal que el funcional $J[y]$ tingui un mínim a $y = \tilde{y}$ és que

$$\delta^2 J[y] \geq 0$$

per $y = \tilde{y}$ i qualsevol h admissible. Anàlogament, una condició necessària per tal que el funcional $J[y]$ tingui un màxim a $y = \tilde{y}$ és que

$$\delta^2 J[y] \leq 0$$

per $y = \tilde{y}$ i qualsevol h admissible.

Prova. Per definció, tenim:

$$\triangle J[h] = \delta^2 J[h] + \epsilon\|h\|^2,$$

quan $\epsilon \to 0$ quan $h \to 0$. Sabem que $\delta J[h] = 0$ per $y = \tilde{y}$ per totes les h admissibles.

Raonem per contradicció. Suposem que $\delta^2 J[h_0] < 0$ per alguna h_0 adient. Aleshores, per qualsevol $\alpha \neq 0$, tenim

$$\triangle J[h_0\alpha] - \epsilon\|h_0\alpha\|^2 = \delta^2 J[\alpha h_0] = \alpha^2 \delta^2 J[h_0] < 0$$

Per tant, $\triangle J[h]$ pot ser negatiu per $\|h\|$ arbitràriament petites. Però això és impossible ja que, per hipòtesis, $J[y]$ té un mínimm a $y = \tilde{y}$ i.e.

$$\triangle J[h] = J[\tilde{y} + h] - J[y] \geq 0$$

per $\|h\|$ suficientment petita.

□

Definició 4.11. Un funcional quadràtic $\varphi_2[h]$ definit en algun espai lineal normat $\mathcal{R}$ és fortament positiu si existeix una constant $k > 0$ tal que

$$\varphi_2[h] \geq k\|h\|^2$$

per qualsevol h.

Teorema 4.12. Una condició suficient per tal que el funcional $J[y]$ tingui un mínim a $y = \tilde{y}$, tal que la seva primera variació, $\delta J[y]$ és 0 per $y = \tilde{y}$, és que la seva segona variació $\delta^2 J[h]$ sigui fortament positiva per $y = \tilde{y}$.

Prova. PEr $y = \tilde{y}$, tenim $\delta J[h] = 0$ per qualsevol h admissible. Aleshores,

$$\triangle J[h] = \delta^2 J[h] + \epsilon\|h\|^2$$

on $\epsilon \to 0$ quan $\|h\| \to 0$. També tenim que, per $y = \tilde{y}$:

$$\delta^2 J[h] \geq k\|h\|^2$$

on k és una constant estrictament positiva. Per tant, per alguna ϵ_1 suficient petita, $|\epsilon| < k/2$ si $\|h\| < \epsilon_1$. En conseqüència,

$$\triangle J[h] = \delta^2 J[h] + \epsilon\|h\|^2 \geq k\|h\|^2 + \epsilon\|h\|^2 \geq k\|h\|^2 - \epsilon\|h\|^2 > k\|h\|^2 - k/2\|h\|^2 = k/2\|h\|^2 > 0$$

si $\|h\| < \epsilon_1$ i.e. $\triangle J[h] = J[\tilde{y} + h] - J[\tilde{y}] > 0$ si $\|h\| < \epsilon_1$. Conseqüentment, $J[y]$ té un mínim a $y = \tilde{y}$.

$\square$

LA CONDICIÓ DE LEGENDRE

MARC PIQUER I MÉNDEZ - 22 DE NOVEMBRE DE 2023

Aquest document segueix la secció 25 de [1]. Essencialment, particularitzem els resultats de l'anterior al funcional $J : \mathcal{C}^1_{A,B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ definit per

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)), \tag{1}$$

on $F \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Aquest és particularment interessant per la seva senzillesa i aplicacions, i ja l'havíem vist anteriorment.

1. La fórmula de la segona variació

Novament, prenem un increment $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ amb $h(a) = h(b) = 0$, de manera que podem escriure la diferència

$$\begin{aligned} \Delta J[h] &= J[y+h] - J[y] \\ &= \int_a^b (F_y h + F_{y'} h')dx + \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}h^2 + 2F_{yy'}hh' + F_{y'y'}{h'}^2)dx + \varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

fent servir la fórmula de Taylor, on podem escriure

$$\varepsilon = \int_a^b (\varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 hh' + \varepsilon_3 {h'}^2)dx.$$

Per la continuïtat de les segones derivades de F, queda clar que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ per a $||h|| \to 0$, de manera que $\varepsilon \to 0$ almenys quadràticament en $||h||^2$.

D'aquí es dedueix que, a (2), el primer i segon sumands són, respectivament, $\delta J[h]$ i $\delta^2 J[h]$. Per tant, tenim

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}h^2 + 2F_{yy'}hh' + F_{y'y'}{h'}^2)dx.$$

Podem compactar una mica més aquesta expressió: podem integrar per parts el sumand del mig i veure que

$$\int_a^b 2F_{yy'}hh'dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)h^2 dx,$$

de manera que

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (P{h'}^2 + Qh^2)dx, \tag{3}$$

on

$$P(x) = \frac{1}{2}F_{y'y'}, \qquad Q(x) = \frac{1}{2}\left(F_{yy'} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right).$$

El mateix procés es pot fer amb l'expressió que hem donat per ε, de manera que, afegint l'error, es pot escriure, per al cas que y sigui un extrem,

$$\Delta J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx + \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2)dx,$$

on $\xi, \eta \to 0$ si $||h|| \to 0$. Aquesta fórmula serà útil no avui, sinó en futures xerrades.

2. La condició de Legendre

Es va provar a la xerrada anterior que una condició per minimitzar un funcional és que la seva segona variació sigui no negativa. Particularitzant-ho a aquest cas, ho podrem perfilar encara una mica més.

Considerem el funcional quadràtic (3), per a funcions h que satisfacin $h(a) = 0$. Amb aquesta condició, h serà "petita a $[a, b]$" si h' també ho és, però el contrari no és necessàriament cert (podríem construir, per exemple, una funció fortament oscillant però de valor absolut molt petit). Qualitativament, això ens porta a pensar que, a (3), el terme dominant serà P. Precisem ara aquesta idea.

Lema 1. *Amb la notació anterior i assumint $h(a) = h(b) = 0$, una condició necessària per a què $\delta^2 J[h]$ sigui no negatiu és que $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, b]$.*

Demostració. Suposem que no es té la condició. Llavors, hi ha $\beta \in (0, \infty)$ i $x_0 \in [a, b]$ tal que $P(x_0) = -2\beta$. Com que P és contínua, hi ha $\alpha \in (0, \infty)$ tal que $a \leq x_0 - \alpha$, $x_0 + \alpha \leq b$, i $P(x) < -\beta$ per a tot $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Ara, doncs, només cal que construïm una funció h que faci negativa la segona variació $\delta^2 J[h]$. Com hauria de ser evident per a tothom amb una mínima idea de matemàtiques o de la vida en general, una funció que ens servirà és

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi(x - x_0)}{\alpha}, & x \in [x_0 - \alpha, \leq x_0 + \alpha]; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Fent el càlcul, obtenim, amb aquesta funció,

$$\begin{aligned} \delta^2 J[h] &= \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} P \frac{\pi^2}{\alpha^2} \sin^2 \frac{2\pi(x - x_0)}{\alpha} dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q \sin^4 \frac{\pi(x - x_0)}{\alpha} dx \\ &< -\frac{2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha, \end{aligned}$$

on $M = \max_{x \in [a,b]} |Q(x)|$. És clar que la darrera baula de la desigualtat és negativa per a α prou petit, i per tant el funcional esdevé negatiu per la funció h corresponent. □

Aquesta condició ja porta directament a l'objectiu d'aquest escrit: una condició necessària per a minimitzar (1).

Teorema 2 (Condició de Legendre)**.** *Una condició necessària per a què $y \in \mathcal{C}^1_{A,B}([a, b])$ minimitzi J donat per* (1) *és que es tingui*

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0,$$

per a tot $x \in [a, b]$.

3. Discussió sobre condicions suficients

Legendre mateix va intentar demostrar que la "condició forta de Legendre",

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0$$

per a tot $x \in [a, b]$, és suficient per a què y sigui un mínim. Tanmateix, es pot raonar que això no és possible. Això, de fet, val per a qualsevol condició que sigui local, en el sentit que només expressi quelcom respecte cada punt de la corba individualment.

Per exemple, en una esfera de radi u podem considerar el funcional de longitud d'una corba $y = (\theta, \varphi) : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ entre punts $A, B \in \mathbb{S}^2$, donat per

$$\begin{aligned} \ell[y] &= \int_a^b ||y'(x)||dx \\ &= \int_a^b \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2} \\ &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{1 + \sin^2\theta\ \varphi'^2} d\theta, \end{aligned}$$

on y ve donada per la funció $\varphi(\theta)$.[1] Ara, es pot veure que les corbes donades per aquest funcional són els arcs de gran cercle que uneixen A i B. Tanmateix, podem donar la volta al gran cercle per ambdós costats: un minimitzarà la corba i l'altre no.

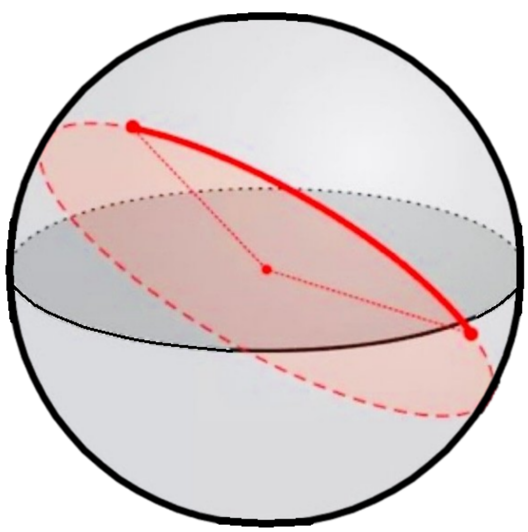


Figura 1. Gran arc d'una esfera, on la línia contínua minimitza la distància entre els punts i la línia discontínua no.

Tot i així, es pot comprovar que ambdues opcions compleixen la condició forta de Legendre. Això deixa clar que no és condició suficient per a minimitzar el funcional. De fet, això ja indica que cap condició local no ens servirà, ja que tots dos arcs de gran cercle són localment indistingibles.

[1] L'explicació és una mica cutre, però us la mengeu.

Referències

[1] Gelfand, I. M. i Fomin, S. D. *Calculus of variations*. 1ª ed. Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall, 1963.

CONDICIÓ DE LEGENDRE FORTA

ROGER GARRIDO VILALLAVE

Continuem amb l'estudi dels extrems del funcional

$$J[y] := \int_a^b F(x, y, y')dx.$$

La seva segona variació és

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}h^2 + 2F_{yy'}hh' + F_{y'y'}h'^2)dx$$

que, tal i com va ensenyar-nos en Marc, si prenem

$$P(x) := \frac{1}{2}F_{y'y'}, \quad Q(x) := \frac{1}{2}\left(F_{yy'} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)$$

es pot exhibir com un funcional quadràtic:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx.$$

Algunes condicions necessàries per tal que J tingui un mínim en $y = y_0$ són:

(1) Que la segona variació $\delta^2 J_{y_0}[h]$ sigui definida no-negativa.
(2) **Condició de Legendre:** Que $P(x) \geq 0$ per tota $x \in [a, b]$.

1. Condició de Legendre forta

La condició de Legendre forta (2)' demana que $P(x) > 0$ per tota $x \in [a, b]$. Veiem que, si se satisfà una hipòtesi addicional, aleshores la segona variació és definida positiva (en particula satisfà la condició (1)).

Com que $P > 0$, si es pot trobar una factorització

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b P \cdot \varphi^2 dx,$$

amb $\varphi \not\equiv 0$ aleshores la segona variació és definida positiva.

Truc: Com que $h(a) = h(b) = 0$, per tota funció w prou bona es té que

$$0 = w(b)h^2(b) - w(a)h^2(a) = \int_a^b (wh^2)'dx.$$

Date: 29 de Novembre de 2023.

Per tant aquesta integral és una quantitat que es pot sumar sempre. Si la sumem a l'expressió de $\delta^2 J[h]$,

$$\delta^2 J[h] = \delta^2 J[h] + 0 = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx + \int_a^b wh^2 dx.$$

Si es fan manipulacions, s'obté

$$\int_a^b (Ph'^2 + 2whh' + (Q + w')h^2)dx.$$

Ara intentem completar quadrats. Donades dues funcions A, B tenim que

$$(Ah + Bh')^2 = A^2h^2 + 2ABhh' + B^2h'^2,$$

i si imposem $A = \sqrt{Q + w'}$, $B = \sqrt{P}$ ens queda que

$$2w = 2AB = 2\sqrt{P(Q + w')},$$

de manera que podem completar quadrats si, i només si, w és solució de l'equació diferencial $w^2 = P(Q + w')$.

Si ($*_1$) el terme $(h' + \frac{w}{P}h)^2$ no és constantment zero per cap $h \neq 0$, i ($*_2$) existeix una solució de $P(Q+w') = w^2$, ja haurem acabat. Un estudi de l'equació diferencial revela que ($*_1$) sempre és cert, i que ($*_2$) se satisfà si, i només si, l'equació diferencial $-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0$ no té el que s'anomenen punts conjugats a a.

Hem deduït:

Suposem que $P > 0$. Si l'equació diferencial $-\frac{d}{dx}(Pu0) + Qu = 0$ no té cap punt conjugat amb a en $(a, b]$, aleshores $\delta^2 J$ és definit positiu.

2. Estudi de l'equació diferencial

2.1. **Propietat ($*_1$).**

Sigui h tal que $\left(h' + \frac{w}{P}h\right)^2 = 0$. Aleshores $h' + \frac{w}{P}h = 0$, així que h és solució de l'equació $h' + \frac{w}{P}h = 0$. La funció constant nul·la és una solució d'aquesta equació, i com que $h(a) = 0$ pel Teorema d'Existència i Unicitat deduïm que $h = 0$. Per tant la propietat ($*_1$) sempre se satisfà.

2.2. **Propietat ($*_2$).**

Estudiem quan l'equació diferencial $P(Q + w') = w^2$ té solució.

2.2.1. *Canvi de variables.*

La nostra equació diferencial inicial és una **equació de Ricatti**. Això ens suggereix fer el canvi de variable $w = -\frac{u'}{u}P$. Obtenim l'equació diferencial

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0.$$

Diem que un punt $\tilde{a} \in (a, b]$ és **conjugat** a a si existeix una solució no-nul·la de $-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0$ que s'anul·la tant en a com en $\tilde{a}$.

Exercici: Demostrar que, si $-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0$ no té cap punt conjugat a a, aleshores admet alguna solució (que, a més, no és constantment nul·la). *Indicació: Utilitzar el teorema de dependència contínua de la solució dels PVI respecte les condicions inicials.*

3. Implicació recíproca

Finalment, veiem que si $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$ és definida positiva i $P > 0$, aleshores $[a, b]$ no té punts conjugats amb a.

Sigui

$$F_t(h; y) := \int_a^b ((1-t)(Ph'^2+Qh^2)+th'^2)dx = (1-t)\int_a^b (Ph'^2+Qh^2)dx + t\int_a^b h'^2 dx,$$

per $t \in [0, 1]$. Es tracta d'un camí en l'espai de funcions entre $F_1(h; y) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$ i $F_0(h; y) = \int_a^b h'^2 dx$.

La seva equació associada és

$$-\frac{d}{dx}(tP + (1-t)u') + tQu = 0.$$

Sigui $u(x, t)$ una solució amb condicions inicials $u(a, t) = 0$, $\frac{d}{dx}u(a, t) = 1$. Si ens restringim a $t = 0$, ens queda

$$-\frac{d}{dx}u' = 0,$$

que si demanem les condicions inicials resulta en $u(x, 0) = x - a$.

Si en canvi ens restringim a $t = 1$ recuperem l'equació de $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$, de manera que $u(x, 1)$ n'és solució. El que volem veure, doncs, és que $u(x, 1)$ no s'anul·la en cap punt (això ens dirà que $[a, b]$ no té punts conjugats amb a.

Primer pas. Si $u(x_0, t_0) = 0$, aleshores $\frac{d}{dx}u(x_0, t_0) \neq 0$. Això és perquè, si la derivada s'anul·lés, pel Teorema d'Existència i Unicitat tindríem que $u(-, t_0) \equiv 0$, però això contradiu el fet que $\frac{d}{dx}u(a, t_0) = 1$.

Per tant, pel Teorema de la Funció Implícita el conjunt $\{(x_0, t_0) \in [a, b] \times [0, 1] \mid u(x_0, t_0) = 0\}$ defineix una corba prou regular.

Segon pas. Comprovem en primer lloc que b no pot ser conjugat amb a. Si ho fos, aleshores $u(a, 1) = u(b, 1) = 0$, de manera que utilitzant integració per parts tindríem que

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}(Ph') + Qh\right) \cdot h dx = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx,$$

fet que contradiu la hipòtesi que el funcional $\delta^2 J$ és definit positiu.

Tercer pas. Com que el conjunt de zeros de u forma una corba regular en $[a, b] \times [0, 1]$, suposant que $u(-, 1)$ té algun zero en (a, b) es procedeix a considerar cada situació geomètrica possible, i es veu que totes elles porten a contradicció (veure Gelfand-Fomin, pàgina 108). Per tant, $u(-, 1)$ no pot tenir cap zero en (a, b).

Això demostra la implicació recíproca. Així, s'ha demostrat:

Teorema. *Suposem que $P > 0$. El funcional $\delta^2 J$ és definit positiu si, i només si, la següent equació diferencial no té punts conjugats amb a en $(a, b]$:*

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0.$$

7. La condició de Jacobi

Joaquim Vives

Desembre 2023

7 La condició de Jacobi

7.1 L'equació de Jacobi i extremals

Com en la secció anterior, ens centrarem en l'estudi d'un funcional del tipus

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{1}$$

La segona variació d'aquest funcional era del estil

$$\int_a^b Ph'^2 + Qh^2\, dx \tag{2}$$

amb $P = \frac{1}{2}F_{y'y}$ i $Q = \frac{1}{2}(F_{yy} - \frac{\partial}{\partial x}F_{yy'})$

Definició 1. A l'equació d'Euler del funcional (2) se li diu *equació de Jacobi* del funcional (1). Ja sabem que aquesta equació és de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ph') + Qh = 0$$

L'objectiu principal d'aquesta secció és veure que la funció diferència entre dos extremals és solució de l'equació de Jacobi, o, el que és el mateix, extremal del funcional quadràtic (2).[1]

Definició 2. $\tilde{a}$ és un *punt conjugat* de a respecte del funcional (1) si ho és respecte del funcinal (2), en el sentit que ja coneixem de punt conjugat. ($h(a) = h(\tilde{a}) = 0$, on h és solució de l'equació de Jacobi, h és un extremal).

Teorema 1. Condició de Jacobi Si $y = y(x)$ és un mínim relatiu del funcional (1), i si $P > 0$, aleshores (a, b) no té punts conjugats a a.

[1] Recordem que una funció és un extremal d'un funcional si n'és solució de l'equació d'Euler amb condicions de frontera $h(0) = a$ i $h'(a) = 1$

Demostració. Si y és un mínim relatiu, ja sabem que la segona variació, és a dir el funcional quadràtic (2), és no negativa; teorema 4.1. I, si la segona variació és no negativa, ja hem vist que no pot haver-hi punts conjugats, per un teorema de l'última secció.

A continuació, fem notar el següent. Siguin $y = y(x)$ i $y^* = y^*(x)$ extremals de (2), és a dir solucions de l'equació de Jacobi. Posem que $y^*(x) = y(x)+h(x)$. Substituïm ara aquest funcional a l'equació d'Euler. Obtenim:

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} = F_y(x, y+h, y'+h') - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'}(x, y+h, y'+h') = 0$$

i, tot aplicant Taylor, i utilitzant que $y(x)$ és extremal i per tant compleix l'equació d'Euler,

$$\begin{aligned} F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} &= F_y(x,y,y') + F_{yy}(x,y,y')h + F_{yy'}(x,y,y')h' - \\ -\frac{\partial}{\partial x}(F_{y'}(x,y,y') &+ F_{y'y}(x,y,y')h + F_{y'y'}(x,y,y')h') + O(h^{1+\varepsilon}) = \\ &= F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} + F_{yy}h + F_{yy'}h' - \frac{\partial}{\partial x}(F_{y'y}h + F_{y'y'}h') = \\ &0 + (F_{yy} - \frac{\partial}{\partial x}F_{yy'})h + (-\frac{\partial}{\partial x}F_{y'y'} + F_{yy'})h' + O(h^{1+\varepsilon}) \end{aligned}$$

Finalment, (negligint el terme $\frac{\partial}{\partial x}F_{yy'}h$?), obtenim

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} = \frac{\partial}{\partial x}(Ph') + Qh = O(h^{1+\varepsilon})$$

És a dir, hem vist que, donanda $h(x)$ la diferència entre dues solucions de l'equació de Jacobi, aleshores $h(x)$ és també, llevat d'infinitèssim, solució de l'equació de Jacobi, és a dir extremal. Això indueix nocions un pel més generals i, en principi intuitivves, de punt conjugat.

7.2 Més de punts conjugats

Definició 3. Donat un extremal $y = y(x)$, diem que el punt $\tilde{M} = (\tilde{a}, y(\tilde{a}))$ es conjugat al punt $M = (a, y(a))$ si a $\tilde{M}$ la diferència $y^*(x) - y(x)$ és un infinitéssimal d'ordre més gran que 1 respecte de $||y^* - y||$. On $y^* = y^*(x)$ és un extremal proper.

Definició 4. Donat un extremal $y = y(x)$, diem que el punt $\tilde{M} = (\tilde{a}, y(\tilde{a}))$ es conjugat al punt $M = (a, y(a))$ si el límit quan $||y^* - y||_1 \to 0$ dels punts d'intersecció entre els extremals propers és $\tilde{M}$, i si $y(0) = y^*(0)$.

Exemple. Considereu dues geodèsiques properes a l'esfera que passen per un mateix punt P. És clar que aquestes dues geodèsiques es tallen en un altre punt. Si fem tendir una cap a l'altra els punts d'intersecció tendeixen cap a un punt $\tilde{P}$, que serà el punt conjugat de P, a saber, es tracta del punt anitpodal a P.

Dona el cas que aquestes dues definicions són equivalents:

Demostració. El fet que la definició 4 implica la 3 és (presuntament) clar. Veiem doncs que la definició 3 implica la 4. Sigui $y(x)$ un extremal tal que $y(a) = A$ i sigui $y^*_\alpha(x)$ extremal proper amb la mateixa condició inicial tal que per a cada α,

$$y^{*'}_\alpha(a) - y'(a) = \alpha$$

aleshores, $y^*_\alpha(x)$ pot posar-se del tipus

$$y^*_\alpha(x) = y(x) + \alpha h(x) + \varepsilon$$

on h és una solució de l'equació de Jacobi, tal que $h(a) = 0$ i $h'(a) = 1$ i ε d'ordre més gran que 1 respecte d'α. Això es deu a que, com hem vist, la diferència entre dos extremals propers és solució de l'equació de Jacobi llevat d'infinitèssim. (Aquí assumim α petit). Ara, posem

$$h(\tilde{a}) = 0, \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}$$

És clar que $h'(a) \neq 0$, atès que la solució h no és idènticament nula. Per Taylor, un pot veure fàcilment que per α prou petit,

$$y^*_\alpha(x) = y(x) + \alpha h(x) + \varepsilon$$

pren valors de signe diferent als punts $\tilde{a} - \beta$ i a $\tilde{a} + \beta$. És a dir el límit quan $\alpha \to 0$ dels punts d'intersecció és el punt $\tilde{M}$. Tot plegat, es comlpeix la condició de la definició 4.

CONDICIÓ SUFICIENT

ROGER GARRIDO VILALLAVE

Aquestes notes segueixen la secció 28 del llibre Gelfand-Fomin.

Considerem el funcional

$$J[y] := \int_a^b F(x, y, y')dx$$

definit per les funcions prou regulars amb $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Vàrem veure que algunes condicions necessàries per tal que J tingui un mínim en $\hat{y}$ són:

(1) $\hat{y}$ **és un punt crític:** $\delta J[\hat{y}] = 0$, és a dir, se satisfà l'equació d'Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

(2) **La segona variació és definida no-negativa:** $\delta^2 J[\hat{y}; h] \geq 0$.

(3) **Condició de Legendre:** $F_{y,y'} \geq 0$.

(4) **Condició necessària de Jacobi:** L'interval (a, b) no té punts conjugats amb a.

Demostrarem una condició suficient, que és bastant similar al recíproc de totes aquestes condicions necessàries:

Teorema. *Sigui $\hat{y}$ un punt crític de J, i suposem que satisfà:*

(1) *$\hat{y}$ satisfà l'equació d'Euler:*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

(2) **Condició forta de Legendre:** $F_{y,y'} > 0$. [1]

(3) **Condició forta de Jacobi:** *L'interval $[a, b]$ no té punts conjugats amb a.*

Aleshores J té un mínim relatiu en $\hat{y}$.

Demostració.

Veure que J té un mínim en $\hat{y}$ és equivalent a veure que $\Delta J[\hat{y}; h] := J[\hat{y}+h] - J[\hat{y}] > 0$ per $h \neq 0$ admissible. En Marc va demostrar que

$$\Delta J[\hat{y}; h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx + \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2)dx,$$

Date: 19 de Desembre de 2023.

[1] Recordem que $F_{y,y'}$ i P són proporcionals per una constant positiva, de manera que això és equivalent a $P > 0$, que és com havíem definit la condició forta de Legendre.

on ξ, η són dos funcionals (que depenen de h) que convergeixen uniformement a 0 quan $||h|| \to 0$.

Per $||h||$ prou petit, com que $P > 0$ (condició forta de Legendre) tenim que $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx > 0$. Per tant, si veiem que la segona integral és negligible, com que la primera és positiva deduïrem que $\Delta J[\hat{y}; h] > 0$, tal i com volem veure. En aquest context, que sigui negligible significa que

$$\left| \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx \right| < \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx.$$

Vegem-ho! :)

La desigualtat de Cauchy-Schwarz aplicada al producte escalar de l'espai de funcions integrables dóna que

$$\left(\int_a^x h' dx \right)^2 = \left(\int_a^x h' \cdot 1 \right)^2 \leq \int_a^x 1^2 dx \int_a^x h'^2 dx = (x-a) \int_a^x h'^2 dx.$$

Per tant,

$$h^2(x) \overset{h(a)=0}{=} \left(\int_a^x h' dx \right)^2 \overset{\text{C-S}}{\leq} (x-a) \int_a^x h'^2 dx \leq (x-a) \int_a^b h'^2 dx.$$

Si ara integrem a cada banda,

$$\int_a^b h^2 dx \leq \int_a^b (x-a) \int_a^b h'^2 dt dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b h'^2 dx.$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$ prou petit amb $|\xi(x)|, |\eta(x)| < \varepsilon$ (per cada x), tenim:

$$\left| \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx \right| \leq \int_a^b |\xi| h^2 + |\eta| h'^2 dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\int_a^b h^2 dx + \int_a^b h'^2 dx \right) \leq \varepsilon \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \int_a^b h'^2 dx$$

Afirmació. *Existeix una constant $c > 0$ tal que*

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx > c \int_a^b h'^2 dx.$$

Si ara prenem $\varepsilon < c \cdot \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right)^{-1}$, tenim:

$$\left| \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx \right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \int_a^b h'^2 dx <$$

$$< c \cdot \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \int_a^b h'^2 dx = c \int_a^b h'^2 dx,$$

que per l'afirmació és més petit que $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$, tal i com volíem veure. Això finalitza la demostració del teorema. $\square$

Roman demostrar l'afirmació.

Demostració de l'afirmació.

Considerem la següent família de funcionals quadràtics, que depèn del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx - \alpha^2 \int_a^b h'^2 dx.$$

La seva equació d'Euler és

$$-\frac{d}{dx}((P - \alpha^2)h') + Qh = 0.$$

Per α prou petita,

- Com que $P > 0$ en $[a, b]$, i P és contínua, per cada $x \in [a, b]$ es té que $P(x) - \alpha^2 > 0$.
- La solució de l'equació d'Euler que satisfà $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$ no s'anul·la en $(a, b]$. Això és perquè la solució depèn contínuament del paràmetre α, i aquest enunciat és cert per $\alpha = 0$ (per hipòtesi).

Vam veure el següent teorema:

Teorema. *Si $P > 0$ i $[a, b]$ no té punts conjugats amb a, aleshores $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$ és definit positiu.*

Deduïm per tant, que els funcionals

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx - \alpha^2 \int_a^b h'^2 dx$$

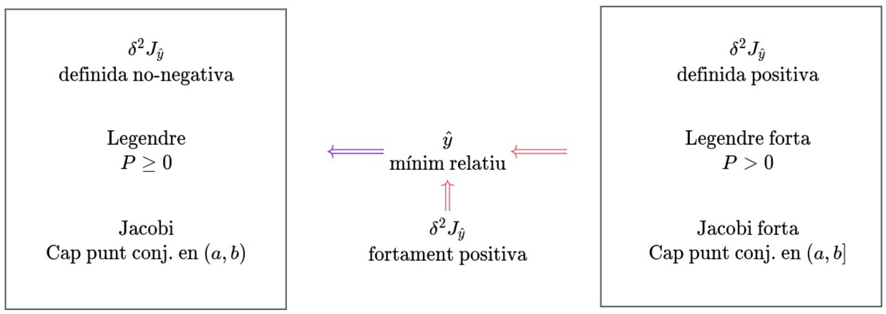
són definits positius per α prou petita. Si prenem $c := \alpha^2$, deduïm l'afirmació:

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx > c \int_b^a h'^2 dx.$$

□

APÈNDIX: CONDICIONS NECESSÀRIES I SUFICIENTS

ROGER GARRIDO VILALLAVE



Aquest diagrama mostra les diferents implicacions demostrades durant el seminari, fent referència exclusivament a funcionals de la forma $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$.

Se suposa, en tot moment, que $\hat{y}$ és un extrem relatiu de J, és a dir, que $\delta J_{\hat{y}} = 0$. Les implicacions blaves denoten condicions necessàries per tal que $\hat{y}$ sigui un mínim relatiu de J, mentre que les vermelles, suficients.

Les diferents condicions que apareixen són:

- $\delta^2 J_{\hat{y}}$ **definida no-negativa:** $\delta^2 J_{\hat{y}}[h] \geq 0$ per tota h admissible.
- $\delta^2 J_{\hat{y}}$ **definida positiva:** $\delta^2 J_{\hat{y}}[h] > 0$ per tota h admissible no-nul·la.
- **Condició de Legendre:** $P(x) \geq 0$ per tota $x \in [a, b]$. Equivalentment, $F_{y,y'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) \geq 0$ per tota $x \in [a, b]$.
- **Condició de Legendre forta:** $P(x) > 0$ per tota $x \in [a, b]$. Equivalentment, $F_{y,y'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) > 0$.
- **Condició de Jacobi:** L'interval (a, b) no conté cap punt conjugat amb a.
- **Condició de Jacobi forta:** L'interval $(a, b]$ no conté cap punt conjugat amb a.
- $\delta^2 J_{\hat{y}}$ **fortament positiva:** Existeix $k > 0$ tal que $\delta^2 J_{\hat{y}}[h] \geq k \cdot ||h||^2$.