Documentació del grup de lectura sobre homologia i cohomologia de grups

Diversos alumnes i exalumnes dels graus de matemàtiques i física de la UB i de la UNED

Curs 2024-2025

Semestre de primavera

Aquesta compilació conté els documents corresponents al grup de lectura sobre homologia i cohomologia de grups,[1] realitzat a la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona, durant el semestre de primavera del curs 2024-2025.

Organitzadors: Abel Salinas Sellas i
Carlos Fernández Lorán.

Participants: Abel Salinas Sellas,
Adrià Grau Serra,
Bernat Esteve Sagarra,
Biel Barberà Collado,
Bruna Gràvalos Talló,
Carlos Fernández Lorán,
Cinta Isern,
Clàudia Rafart Medina,
Dídac Díaz Funes,
Eduardo Inti Martirena,
Ester Vives,
Ian Sànchez Montero,
Joan Blay Gómez,
Jordi Cardiel Bonilla,
Luis Martínez Villabón,
Marc Puig Creixell,
Martí Batista Obiols,
Miquel Martínez Gavagnin-Capoggiani,
Nerea Gómez Valenzuela,
Rocham Bahaloul Kouidri,
Teresa Ferrer de Noguera i
Varg Brangwin.

Resum

(En construcció.)

[1]Podeu contactar amb el grup al correu electrònic grupdelecturamatesub@gmail.com. També podeu trobar totes les memòries a linktr.ee/lectura_mates_ub.
Disseny del logotip: Yaiza Aguilar Carós.

2020 Mathematics Subject Classification: 20J05, 20J06.

Índex

Introducció

(En construcció.)

Context històric

(En construcció.)

Consideracions pràctiques

Aquest grup de lectura s'organitza des del semestre de primavera de 2023 a iniciativa d'en Roger Garrido Vilallave. La present edició, la cinquena, s'ha dut a terme a (En construcció: quines aules?) de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

Per tal d'assolir l'objectiu del grup, s'ha seguit liberalment apunts del professor Ieke Moerdijk.[3] S'ha estructurat el contingut en les xerrades que es pot veure a la taula següent. (En construcció: font?)

	Data	Tema
1	27/II	Introducció - Homologia singular
2	6/III	Homologia simplicial I
3	13/III	Homologia simplicial II
4	20/III	Complexos cel·lulars
75	2/III	Homologia singular

Taula 1: Calendari de l'activitat del grup. Totes les dates són a 2025.

[3] Moerdijk, I. *Representation of Finite Groups. Lecture Notes* (apunts de classe, Universitat de Nijmegen, 2015).

Homología Singular

Carlos Fernández Lorán

February 2025

El objetivo de esta sesión es motivar el resto del seminario. La primera sección está pensada como un contexto previo para introducir contenido que utilizaremos más adelante.

1 Preliminares

1.1 Homotopía

Definición 1.1. *Dados dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos* $f, g : X \to Y$*, diremos que* f *es* ***homótopa*** *a* g *si existe una aplicación continua* $H : X \times [0,1] \to Y$ *tal que* $H(x,0) = f(x)$ *y* $H(x,1) = g(x)$ *para todo* $x \in X$*. La aplicación* H *se llama* ***homotopía*** *entre* f *y* g*. Si* f *es homótopa a* g*, escribimos* $f \sim g$*, o* $f \sim_H g$ *si queremos especificar la homotopía* H

Lema 1.2.

1. *La relación binaria* $\sim$ *es una relación de equivalencia en el conjunto* $C(X,Y)$ *de las aplicaciones continuas de* X *a* Y*.*
2. *Si* $f_1, g_1 : X \to Y$ *son homótopas y* $f_2, g_2 : Y \to Z$ *son homótopas, entonces* $f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1 : X \to Z$ *son homótopas*

Definición 1.3. *Una aplicación continua* $f : X \to Y$ *es una* ***equivalencia homotópica*** *si hay una aplicación* $g : Y \to X$ *continua tal que* $g \circ f \sim id_X$ *y* $f \circ g \sim Id_Y$*. Entonces diremos que* g *es el* ***inverso homotópico*** *de* f*.*

Un espacio topológico X *es* ***homotópicamente equivalente*** *a* Y *(o tienen el mismo* ***tipo de homotopía****) si existe una equivalencia homotópica* $f : X \to Y$*. En este caso escribimos* $X \sim Y$*.*

Diremos que un espacio es ***contráctil*** *si tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio* $\{*\}$*.*

Lema 1.4. *La relación binaria* $\sim$ *define una relación de equivalencia en la colección de los espacios topológicos.*

1.2 Invariantes homotópicos

Podemos definir de un *invariante homotópico* de manera informal como una cantidad definida para todos los espacios topológicos, y que es igual entre dos espacios topológicos del mismo tipo de homotopía.

El primer invariante homotópico que comentaremos es el *grupo fundamental* de un espacio topológico con punto base (X, x). El grupo fundamental se suele denotar como $\pi_1(X, x)$ y esta formado por todos los caminos en X que empiezan y acaban en x. Ahora enumeraremos algunas propiedades generales.

1. Toda aplicación continua $f : X \to Y$ induce un morfismo de grupos

$$\pi_1(f, x) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$$

   y si f es una equivalencia homotópica, entonces $\pi_1(f, x)$ es un isomorfismo. (Esto muestra que el grupo fundamental es un invariante homotópico).

2. Se tiene que para $x \in S^n$,$\pi_1(S^n, x) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ \{1\} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$.

Otro invariante homotópico más simple es el número de componentes arco conexas del espacio.

Definición 1.5. *Para un espacio topológico X denotamos como $\pi_0(X)$ el conjunto de componentes arco conexas de X. Denotaos como $\bar{x}$ a el componente arco conexo de de $x \in X$. Además para las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ definimos la aplicación*

$$\begin{aligned} \pi_0(f) : \pi_0(X) &\to \pi_0(Y) \\ \bar{x} &\mapsto \overline{f(c)} \end{aligned}$$

Proposición 1.6. *Los siguientes resultados son ciertos:*

1. *i)* $\pi_0(id_x) = id_{\pi_0(X)}$,
   ii) $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$,
2. *si $f \sim g$, entonces $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.*

1.3 Categorías

Definición 1.7. *Una **categoría** C consiste en:*

- *una colección de **objetos** $Ob(C)$,*
- *para todo par de objetos X, Y un colección de **morfismos** $Hom_C(X, Y) = C(X, Y)$,*
- *una **ley de composición***

$$\circ : Hom_C(Y, Z) \times Hom_C(X, Y) \to Hom_C(X, Z)$$

tal que:

- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

- *$\exists id_X \in Hom_C(X,X)$ tal que $f \circ id_X = f$ y $id_X \circ g = g$ para todo $f \in Hom_C(X,Y)$ y todo $g \in Hom_C(Y,X)$.*

Definición 1.8. *Sean C, D dos categorías, un* ***functor*** *$F : C \to D$ es una aplicación que asigna a cada objeto X de C un objeto $F(X)$ de D y a cada morfismo $f : X \to Y$ en C un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ en D tal que se preserva la composición y las identidades.*

La definición y algunas de las propiedades de π_0 se pueden reformular de una manera más compacta diciendo que π_0 es un functor $\pi_0 : Top \to Set$ que envía morfismos homótopos de Top al mismo morfismo en Set.

Proposición 1.9. *Sea $F : Top \to C$ un functor. Las siguientes aserciones son equivalentes:*

i) para todo par de funciones continuas f, g, si $f \sim g$ entonces $F(f) = F(g)$,

ii) F envía equivalencias homotópicas a isomorfismos en C.

Corolario 1.10. *Si f es una equivalencia homotópica, entonces $\pi_0(f)$ es una biyección.*

Similarmente, podemos definir el grupo fundamental como un functor entre la categoría de los espacios topológicos con punto base y la categoría Grp. Además, también se cumple la propiedad de que envía morfismos homótopos a morfismos homótopos

2 Homología Singular

Definición 2.1. *Sea S un conjunto y R un anillo, denotamos RS el* ***R-módulo libre de*** *S como el conjunto formado por las sumas $\sum_{s\in S} r_s b_s$ donde en cada suma solo hay un número finito de $r_s \in R$ no nulos, con la R-linearidad dada por*

$$\rho\Big(\sum_{s\in S} r_s b_s\Big) + \rho'\Big(\sum_{s\in S} r'_s b_s\Big) \coloneqq \sum_{s\in S} (\rho r_s + \rho' r'_s) b_s$$

donde los símbolos b_s forman base de RS.

Tenemos que toda aplicación $\phi : S \to T$ induce una aplicación R-lineal $R\phi : RS \to RT$ tal que $R\phi(b_s) = b_{\phi(s)}$. Podemos ver entonces, que esta construcción define un functor $R- : Set \to R - Mod$.

El siguiente teorema nos muestra lo que definiremos como homología de un espacio topológico:

Teorema 2.2. *Sea R un anillo, para todo $i \geq 0$ podemos asociar a cada espacio topológico X un R-módulo $H_i(X)$ y a cada aplicación continua $f : X \to Y$ un morfismo de R-módulos $H_i(f) : H_i(X) \to H_i(Y)$ de manera que se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. ***Grado cero:*** *$H_0(X) = R\pi_0(X)$ y para $f : X \to Y$, $H_0(f) = R\pi_0(f)$.*

2. ***Functorialidad:***

   i) $H_i(id_X) = id_{H_i(X)}$
   ii) $H_i(f \circ g) = H_i(f) \circ H_i(g)$

3. ***Homotopía:*** *Si* $f \sim g$ *entonces* $H_i(f) = H_i(g)$.

4. ***Homología del punto:*** $H_i(\{*\}) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ R & i = 0 \end{cases}.$

5. ***Aditividad:*** *Si* X_α *son los componentes arco conexos de* X *entonces las inclusiones* $X_\alpha \hookrightarrow X$ *inducen un isomorfismo de* R*-módulos*

$$\bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha) \simeq H_i(X)$$

6. ***Mayer-Vietoris:*** *Si* $X = U \cup V$ *con* U *y* V *abiertos, tenemos una cadena exacta larga de* R*-módulos:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_i(U \cap V) \xrightarrow{(1)} H_i(U) \oplus H_i(V) \xrightarrow{(2)} H_{i-1}(U \cap V) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V) \xrightarrow{(1)} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{(2)} H_0(X) \longrightarrow 0$$

donde las coordenadas de las aplicaciones (1) *son iguales a* $H_i(U \cap V \hookrightarrow U)$ *y* $H_i(U \cap V \hookrightarrow V)$*, y donde las componentes de las aplicaciones* (2) *son iguales a* $-H_i(U \hookrightarrow X)$ *y* $H_i(V \hookrightarrow X)$.

Además, si $X' = U' \cup V'$ *es otra descomposición de un espacio en abiertos y si* $f : X \to X'$ *es una aplicación continua tal que* $f(U) \subset U'$ *y* $f(V) \subset V'$*, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} H_i(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_i(f)"] & H_{i-1}(U \cap V) \arrow[d, "H_{i-1}(f)"] \\ H_i(X') \arrow[r, "\partial"] & H_{i-1}(U \cap V) \end{tikzcd}$$

Ahora comentaremos las propiedades que aparecen en el teorema 2.2.

- **Dependencia en R.** La definición de homología singular depende del anillo R. Normalmente, se toma un cuerpo o $\mathbb{Z}$. La notación, en caso de querer explicitar el anillo con el que se trabaja, es $H_i(X; R)$ y $H_i(f; R)$.

- **Functores de Homotopía.** La propiedad 2 nos de que cada uno de los H_i son functores de Top a $R-Mod$. Además, al imponer 3 mantenemos la propiedad que imponemos a la definición functorial de π_0, a un functor que cumpla esta propiedad lo llamaremos **functor de homotopía**. Aplicando la propiedad 1.9 vemos que si f es una equivalencia homotópica, entonces todas las aplicaciones R-lineales $H_i(f)$ son isomorfismos de R-módulos.

- **Espacios Contráctiles.** Todos los espacios contráctiles tienen la misma homología que un punto. Estos son los espacios con la homología más simple (propiedad 4).
- **Espacios Arco Conexos.** Gracias a la propiedad 5, siempre podemos restringirnos al caso de calcular la homología de un espacio arco conexo.
- **Cortar y Pegar.** La propiedad de Mayer-Vietoris (6) es un análogo al Teorema de Serfeit y Van Kampen en el caso del grupo fundamental. Permite calcular la homología de un espacio de manera inductiva partiéndolo en trozos más simples.

3 Complejos y la homología Singular

Podemos entender los complejos de R-módulos como los "modelos algebraicos" de los espacios topológicos. En esta sección definiremos la homología de complejos, y para acabar la utilizaremos para definir la homología de espacios topológicos.

3.1 Complejos

Definición 3.1. *Sea R un anillo. Un **complejo de R-módulos** C es una familia de R-módulos $\{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ junto con aplicaciones R-lineales $d_i : C_i \to C_{i-1}$, tal que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

*Los elementos de C_i los llamaremos **elementos homogéneos de grado i**, y las aplicaciones d_i se llamarán **diferenciales** o **aplicaciones de borde**. Normalmente, ignoraremos el subíndice del diferencial y escribiremos d en lugar de d_i.*

Definición 3.2. *Un **morfismo de complejos** $f : C \to D$ es una familia de aplicaciones R-lineales $f_i : C_i \to D_i$ para $i \in \mathbb{Z}$ que preserva los diferenciales: $d \circ f_i = f_{i-1} \circ g$ para todo i.*

Podemos componer los morfismos de complejos definiendo $(f \circ g)_i$ como $f_i \circ g_i$. Por tanto, podemos definir la categoría de los complejos $Ch(R)$.

Remarca 3.3. *Es fácil ver que f es un isomorfismo si, y solo si, todos sus componentes f_i son isomorfismos como aplicaciones R-lineales.*

Definición 3.4. *Diremos que dos morfismos de complejos $f, g : C \to D$ son **homótopos** si hay una familia de aplicaciones $h_i : C_i \to D_{i+1}$ tal que $f_i - g_i = d \circ h_i + h_{i-1} \circ d$ para todo i. La familia $h = (h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ se llama **homotopía** entre f y g. Si f y g son homótopos escribiremos $f \sim g$ o $f \sim_h g$ si queremos especificar la homotopía.*

La idea detrás de esta definición de homotopía, fuera de que concuerde más adelante con la definición de homología en complejos, es que nos permite elevar las diferencias entre las componentes a través de la cadena.

Lema 3.5. *1. La relación binaria $\sim$ es una relación de equivalencia del conjunto $Hom_{Ch(R)}(C, D)$.*

2. Si $f_1, g_1 : C \to D$ son homótopos y $f_2, g_2 : D \to E$ son homótopos entonces $f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1 : C \to E$ son homótopos.

Definición 3.6. *Un morfismo de complejos $f : C \to D$ es una* ***equivalencia homotópica*** *si hay un morfismo de complejos $g : D \to C$ tal que $g \circ f \sim id_C$ y $f \circ g \sim id_D$. Diremos que g es el* ***inverso homotópico*** *de f.*

Diremos que un complejo C es ***homotópicamente equivalente*** *o que* ***tiene el mismo tipo de homotopía*** *que D si existe una equivalencia homotópica $f : C \to D$. En este caso escribiremos $C \sim D$.*

3.2 Homología de Complejos

Definición 3.7. *Dado un complejo de R-módulos C, definimos los siguientes submódulos de C_i:*

$$Z_i(C) = Ker(C_i \xrightarrow{d} C_{i-1})$$

$$B_i(C) = Im(C_{i+1} \xrightarrow{d} C_i)$$

A los elementos de $Z_i(C)$ los llamaremos ***ciclos de grado*** *i y a los elementos de $B_i(C)$ los llamaremos* ***bordes de grado*** *i. Por definición de complejo, tenemos que $B_i(C) \subset Z_i(C)$, por tanto, podemos definir la* ***homología de grado*** *i* ***de C*** *como el cociente:*

$$H_i(C) \coloneqq Z_i(C)/B_i(C)$$

Además, para un morfismo $f : C \to D$, es fácil ver que podemos restringir las componentes de la siguiente forma: $f_i : Z_i(C) \to Z_i(D)$ y $f : B_i(C) \to B_i(D)$, por tanto induce un morfismo de nivel de homotopía

$$\begin{aligned} H_i(f) : H_i(C) &\longrightarrow H_i(D) \\ [x] &\longmapsto [f_i(x)] \end{aligned}$$

Definición 3.8. *Un morfismo de complejos es un* ***casi isomorfismo*** *si induce un isomorfismo en homología.*

Remarca 3.9. *H_i define un functor de $Ch(R)$ a $R - Mod$.*

Proposición 3.10. *Si $f \sim g$ entonces $H_i(f) = H_i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Prueba. Sea $x \in Z_i(C)$, queremos ver que $H_i(f)([x]) = H_i(g)([x])$, pero por definición es equivalente a ver que $[f_i(x)] = [g_i(x)]$ en $Z_i(C)/B_i(C)$, por tanto, es suficiente ver que $f_i(x) - g_i(x) \in B_i(C)$. Por la definición de homotopía de morfismos de complejos (Definición 3.4) tenemos la siguiente igualdad:

$$f_i(x) - g_i(x) = (d \circ h_i)(x) + (h_{i-i} \circ d)(x)$$

Analizaremos los dos términos por separado:

- El primer término $(d \circ h_i)(x) = d(h_i(x))$ claramente pertenece a $B_i(C)$, dado que se define como $Im(C_{i+1} \xrightarrow{d} C_i)$.
- El segundo término $(h_{i-1} \circ d)(x) = h_{i-1}(d(x))$ es cero. Esto se debe a que como $x \in Z_i(C) = Ker(C_i \to C_{i-1})$, $d(x) = 0$, y como h_{i-1} es R-lineal, $h_{i-1}(d(x)) = h_{i-1}(0) = 0$.

Por tanto, $f_i(x) - g_i(x) \in B_i(C)$ como queríamos. □

Corolario 3.11. *Si f es una equivalencia homotópica, entonces $H_i(f)$ es un isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$. Es decir, que toda equivalencia homotópica es un casi isomorfismo.*

Definición 3.12. *Una **secuencia exacta corta de complejos** es una secuencia de complejos $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ nos da una secuencia exacta larga de R-modulos en homotopía:*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_i(C) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(D) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(E) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(C) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_0(C) \xrightarrow{H_0(f)} H_0(D) \xrightarrow{H_0(g)} H_0(E) \xrightarrow{\partial} H_{-1}(C) \longrightarrow \dots$$

.

Además, si $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f'} D' \xrightarrow{g'} E' \longrightarrow 0$ es otra secuencia exacta corta de complejos y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_C"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_D"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
H_i(E) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_i(\alpha_E)"] & H_{i-1}(C) \arrow[d, "H_{i-1}(\alpha_C)"] \\
H_i(E') \arrow[r, "\partial'"] & H_{i-1}(C')
\end{tikzcd}$$

4 Construcción de la homología singular

Vamos a construir un complejo $C^{sing}(X)$ de R-módulos para cada espacio topológico X, que contenga parte de la información relativa a X.

Definición 4.1. *Sea $(e_0, \dots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

- *El n-**símplex estándar** Δ^n se define como:*

$$\Delta^n := < e_0, \dots, e_n > = \{\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n : \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

.

- *El símplex* $< e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n >$ *se denota como* $\partial_i \Delta^n$ *y se llama* ***cara*** i***-esima*** *de* Δ^n.

- *Si* $0 \leq i \leq n$, *existe una única aplicación afin* $\epsilon^i : \Delta^n - 1 \to \Delta^n$ *tal que*

$$\epsilon^i(e_k) = \begin{cases} e_k & k \leq i-1 \\ e_{k+1} & k \geq i+1 \end{cases}$$

Esta aplicación ϵ^i *induce un isomorfismo afín de* Δ^{n-1} *en* $\partial_i \Delta^n$.

Definición 4.2. *Sea* X *un espacio topológico y* R *un anillo. El* ***complejo singular*** $C^{sing}(X)$ *se define por:*

1. *Para* $n < 0$, $C_n^{sing}(X) = 0$.

2. *Para* $n \geq 0$, $C_n^{sing}(X)$ *es el* R*-módulo libre con las aplicaciones continuas* $\sigma : \Delta^n \to X$ *como base. Las aplicaciones* σ *se llaman* ***símplices singulares*** *de* X.

3. *Para* $n \geq 1$, *la aplicación de borde* $d_n : C_n^{sing}(X) \to C_{n-1}^{sing}(X)$ *manda cada* $\sigma : \Delta^n \to X$ *a*

$$d_n(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \epsilon^i)$$

Para toda aplicación continua $f : X \to Y$, definimos $C^{sing}(f) : C^{sing}(X) \to C^{sing}(Y)$ como el morfismo de complejos que manda cada símplex singular $\sigma \in C_n^{sing}(X)$ a $f \circ \sigma \in C_n^{sing}(Y)$. Por tanto, el complejo singular define un functor:

$$C^{sing} : Top \to Ch(R)$$

Definición 4.3. *Definimos la* ***homología singular*** *de un espacio topológico* X *como* $H_i(X) = H_i(C^{sing}(X))$ *y para toda aplicación continua* $f : X \to Y$ *tomamos* $H_i(f) = H_i(C^{sing}(f))$. *Esto nos da el functor:*

$$H_i : Top \to R - Mod$$

Ahora comprobaremos que las propiedades enunciadas en el Teorema 2.2.

Proposición 4.4. *Tenemos que* $H_0(X) = R\pi_0(X)$.

Prueba. Tenemos que $H_0(X) = H_0(C^{sing}(X)) = Z_0(C^{sing}(X))/B_0(C^{sing}(X)) = C_0^{sing}/Im(C_1^{sing} \xrightarrow{d_1} C_0^{sing})$. Tenemos que $C_0^{sing}(X) = R\{\sigma : \{*\} \to X\} \cong RX$. Pero tenemos que si $x, y \in X$ pertenecen a la misma componente arco conexa $[x] = [y]$, dado que existiría un camino σ que uniría x con y, y por definición de d_1 tenemos:

$$d_1(\sigma) = \sigma(0) - \sigma(1) = x - y$$

Por lo que $x - y \in Im(C_1^{sing} \xrightarrow{d_1} C_0^{sing})$ como queríamos. Recíprocamente, si existe un σ tal que $d_1(\sigma) = x - y$, este camino ha de ser un camino de x a y, y, por tanto, x e y pertenecen a la misma componente arco conexa. Entonces $H_0(C^{sing}(X)) = RX/Im(C_1^{sing} \xrightarrow{d_1} C_0^{sing}) = R\pi_0(X)$. $\square$

Proposición 4.5. *Si* $f \sim_H g$ *entonces* $C^{sing}(f) \sim C^{sing}(g)$.

Corolario 4.6. *Si* $f \sim_H g$ *entonces* $H_i(f) = H_i(g)$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.7. *Sea* U *un recubrimiento abierto de* X, *y sea* $C_n^{sing,U}(X)$ *denota el submódulo de* $C_n^{sing}(X)$ *generado por los símplices singulares cuya imagen está contenida en* V, *para algún* $V \in U$. *Entonces:*

1. *los* R*-módulos* $C_n^{sing,U}(X)$ *forman un sub complejo* $C^{sing,U}(X)$ *de* $C^{sing}(X)$,
2. *la inclusión* $C^{sing,U}(X) \hookrightarrow C^{sing}(X)$ *es un casi isomorfismo (realmente es una equivalencia homotópica).*

Corolario 4.8. *La propiedad de Mayer-Vietoris de las secuencias exactas largas se cumple.*

Homologia Simplicial

Miquel Martínez

6 de març de 2025

1 Políedres simplicials

1.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és introduir els políedres simplicials.

Per què ens hauríen d'interessar? Els políedres simplicials són la base de l'homologia simplicial, possiblement l'homologia més senzilla que veurem. Estan estretament lligats amb la geometria dels espais topològics, i presenten nombrosos teoremes molt interessants.

La topologia algebraica moderna (que neix amb Poincaré) és, en part, la introducció de l'homologia simplicial. Aquesta aconsegueix reflectir bona part de la forma del políedre, de tal manera que podem recuperar informació geomètrica a partir d'aquests grups, com ara la característica d'Euler. Per descobrir per tant per què és útil l'homologia simplicial hem de veure per què són interessants els objectes que està tractant.

Els apartats que se segueixen són un resum del capítol 1 de [3]. També hi ha algunes coses extretes de Hatcher [1]. Finalment també he consultat uns apunts del drive de Matemàtiques de la UB, escrits pel Guillem Sedó i Torres [2]. Les demostracions estan extretes de la font que quedava més clara, i hi ha poques modificacions (el contingut si que està una mica barrejat).

1.2 Definicions bàsiques

Els políedres que ens interessaran són espais topològics construits a partir de símplexs. Anem a veure, doncs, que és un símplex:

Definició 1.1. Sigui $N > 0$, i $v_0, v_1, \ldots, v_n$, amb $n \geq 0$, $n+1$ punts de $\mathbb{R}^N$ afínment independents. S'anomena *símplex de dimensió* n o n*-dimensional* de vèrtexs $v_0, \ldots, v_n$ al subconjunt de $\mathbb{R}^N$ definit per

$$\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \{x \in \mathbf{R}^N; x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, \ldots, n\}.$$

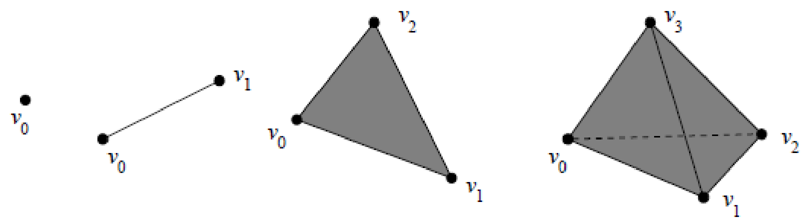

Figura 1: Exemples de simplexs

Òbviament un símplex està ubicat en $\mathbb{R}^n$, i per tant te la topologia induida per l'euclideana. A més, són espais super bons:

Proposició 1.2. *Donat un símplex, tenim les següents propietats:*

- *Tot símplex és compacte, connex, localment arconnex i contràctil*
- *Dos símplexs n-dimensionals qualssevols són homeomorfs*

Demostració. Pàgina 3-4 dels apunts. Demostració senzilla. □

Ara, anem a crear espais més complexs a través de símplexs, que seràn els nostres 'building blocks'.

Definició 1.3. Sigui $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ un símplex n-dimensional, i $k \geq 0$. Anomenarem *cares k-dimensionals* de $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ als símplexs

$$\Delta(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}), \text{ amb } 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$$

A les cares 1-dimensionals les anomenarem *arestes* de Δ^n.

Per exemple, les cares d'un 2-símplex $\Delta(v_0, v_1, v_2)$ són el propi 2-símplex, els 1-símplexs $\Delta(v_0, v_1)$, $\Delta(v_0, v_2)$, $\Delta(v_1, v_2)$, i els 0-símplexs v_0, v_1, v_2.

Amb això podem construir els complexos simplicials, que seran realment els objectes amb els quals treballarem:

Definició 1.4. Un *complex simplicial* és un conjunt finit de símplexs de $\mathbf{R}^N$, $K = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, tal que

(i) si σ_i és un símplex de K, aleshores totes les cares de σ_i són de K,

(ii) si σ_i i σ_j són símplexs de K, aleshores o bé $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ o bé $\sigma_i \cap \sigma_j$ és una cara de σ_i i de σ_j.

Un *complex simplicial infinit* és idèntic amb infinites cares, tot i que ha de complir també

(iii) tot punt de $\mathbb{R}^n$ té un entorn que talla només un nombre finit de símplexs de K.

Pel que ens interessa només treballarem amb finits. Per descomptat, el que volem fer nosaltres és explora la informació de la unió dels símplexs:

Definició 1.5. Donat K complexe simplicial, anomenem el *políedre simplicial geomètric* associat a K com a $|K|$ donat per:

$$|K| = \cup_{\sigma_i \in K} \sigma_i$$

Diem els símplexs de K com les *cares* de K, i diem que K és una *triangulació* de $|K|$. Com que els políedres estan formats per símplexs (i un nombre finit en el nostre cas) també són la òstia topològicament parlant.

Proposició 1.6. *Donat K complex simplicial, tenim que:*

1. *$|K|$ és un espai metritzable, compacte, localment arc-connex, localment contràctil, i verifica el segon axioma de numerabilitat (la topologia té una base numerable).*
2. *La topologia de $|K|$ és coherent amb la dels simplexs σ, és a dir, que $C \subset |K|$ és tancat sii ho són les interseccions amb σ, on σ recorre el conjunt de totes les cares de K.*

Demostració. Pàgina 7. La segona part és immediata per definició, però a la primera cal una mica de feina (per la part de contràctil, la resta es dedueix immediatament de la topologia de σ_i). □

Com a conseqüència de la segona part, tenim que donada una aplicació $f : |K| \to X$, aquesta és contínua sii ho és en les restriccions f_{σ_i}.
Notem també que naturalment definim la dimensió del poliedre com la dimensió més gran de les cares de K.

1.3 Aplicacions simplicials

Anem a definir ara els morfismes entre diferents complexos simplicials

Definició 1.7. Definició. Sigui K, L complexos simplicials, i $\varphi : |K| \to |L|$ una aplicació. Es diu que φ és una *aplicació simplicial* si verifica:

(i) Per tota cara σ de K, $\varphi(\sigma)$ és una cara de L. En particular, φ envia vèrtexs de $|K|$ a vèrtexs de $|L|$.

(ii) Per tota cara $\sigma \in K$ la restricció $\varphi_{|\sigma} : \sigma \to \varphi(\sigma)$ és una aplicació afí. És a dir, si v_i són els vèrtexs de σ es verifica

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(v_i),$$

sempre que $\sum \lambda_i = 1$, i $\lambda_i \geq 0$ per a tot i.

Exemple 1.8. *Observem que, per la condició (ii), una aplicació simplicial queda determinada per les imatges dels vèrtexs de $|K|$, encara que aquestes no es poden donar arbitràriament ja que s'ha de verificar també la condició (i). Vegeu els dos exemples (en la (b), considerem l'aplicació que envia v_0 a w_1, v_1 a w_0 i v_2 a w_2):*

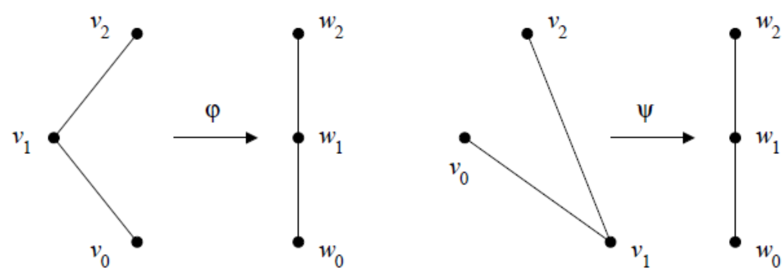

Figura 2: (a) aplicació simplicial, (b) aplicació no simplicial. [3]

Com la topologia d'un políedre és coherent respecte els seus subconjunts, tenim:

Proposició 1.9. *Sigui $\varphi : |K| \to |L|$ una aplicació simplicial entre poliedres. Aleshores és una aplicació contínua.*

Demostració. En efecte, tota aplicació afí és contínua i per tant si $\varphi : |K| \to |L|$ està definida per parts afins sobre cada simplex de K, és contínua. $\square$

Òbviament, composició d'aplicacions simplicials és aplicació simplicial, i la identitat és simplicial.

A tall de curiositat, els políedres geomètrics i les aplicacions simplicials formen la categoria anomenada **Pol**. Els isomorfismes de *Pol* seran els isomorfismes simplicials, que en aquest cas definiriem un isomorfisme quan existeixi la inversa ϕ^{-1}, donada ϕ simplicial.

1.4 Subpolíedres

Definició 1.10. Donat K un complex simplicial, tenim un *subcomplex simplicial* de K com un subconjunt L de K tal que si σ és una cara de L, aleshores totes les cares de σ són de L. Direm que $|L|$ és un subpolíedre de $|K|$

Per descomptat n'hi ha molts (i molt interessants) però a nosaltres ens interessa un en particular:

Definició 1.11. Sigui K complex simplicial. Denotem *l'esquelet p-dimensional* de K, $p > 0$, sq_pK, com el subcomplex de K format per totes les cares de K de dimensió menor o igual a p.

Per exemple, l'esquelet 0-dimensional de K està format únicament pels vèrtexs de K. L'esquelet 1-dimensional de K està format pels vèrtexs i les arestes de K, etc. En particular, tenim les inclusions:

$$\emptyset \subset sq_0K \subset sq_1K \subset ... \subset sq_nK = K$$

aital successió de subcomplexs se l'anomena la *filtració per l'esquelet* de K.

2 Cadenes d'un políedre i homologia simplicial

2.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és introduir l'homologia simplicial dels políedres.

En la primera xerrada, hem vist la definició d'una homologia en espais topològics de manera general, és a dir, un functor $H_i(X)$, el qual *desitjariem* que transporti els morfismes entre espais topològics de manera convenient, així com els espais topològics (secció 2. de la primera xerrada).
Tot seguit, es construeix la homologia de complexos que ens permet definir la homologia singular.

L'homologia simplicial es pot veure com una **restricció** de l'homologia singular en espais topològics particulars, els políedres, o dit d'altra manera, l'homologia singular coincideix amb l'homologia singular sobre els políedres. Tanmateix, la sencillesa de l'homologia simplicial permet obtenir alguns resultats teòrics més fàcilment (sobre els políedres), sense haver de treure tanta maquinària pesada. A més, pel que ens pertoca a nosaltres és més senzilla d'entendre, almenys geomètricament.

Hi ha un cas particular d'homologia simplicial: l'homologia sobre graphs. Per aquell que estigui interessat, busqueu el llibre "Simplicial Complexes of Graph", de Jakob Jonsson. Força interessant si us agrada la discreta i els graphs.

El que es segueix és un *resum* del capítol 2 dels apunts de [3]. Les demostracions estàn indicades a la pàgina corresponent, o bé estan incloses aquí.

2.2 Definicions bàsiques

Sigui K un complex simplicial i $\mathcal{V}_K = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ el conjunt dels seus vèrtexs. Direm que K és un *complex simplicial ordenat* si el conjunt $\mathcal{V}_K$ està totalment ordenat: $v_1 < v_2 < \cdots < v_r$.
En aquest cas tot subcomplex de K hereta una ordenació induïda. En particular les cares de K són símplexs ordenats.

Intuïtivament, ordenar els vèrtexs d'un símplex és una forma d'orientar aquest símplex:

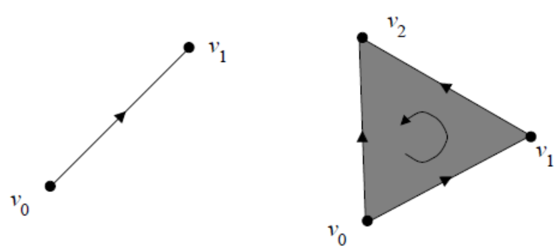

Figura 3: Símplexs ordenats

Sigui $\Delta(v_{i_0}, \ldots, v_{i_p})$ un símplex d'un complex ordenat K, de forma que $v_{i_0} < \cdots < v_{i_p}$. Per indicar que considerem l'ordre dels vèrtexs, el denotarem per $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]$. [1]

Definició 2.1. Sigui K un complex simplicial ordenat. Per a tot $p \geq 0$, s'anomena *grup de cadenes p-dimensionals de K*, i es denota per $C_p(K)$, com el grup abelià lliure generat pel conjunt de cares p-dimensionals ordenades:

$$C_p(K) := \bigoplus \mathbb{Z}[\sigma]$$

Com a exemples:

- $C_0(\Delta) = \mathbb{Z}[v_1] \bigoplus \mathbb{Z}[v_2] \bigoplus \mathbb{Z}[v_2] \cong \mathbb{Z}^3$

[1] *Al llarg de tot aquest capítol suposarem que els complexs simplicials que apareixen estan ordenats.*

- $C_1(\Delta) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \bigoplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \bigoplus \mathbb{Z}[v_0, v_2] \cong \mathbb{Z}^3$
- $C_2(\Delta) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] \cong \mathbb{Z}$
- $C_p(\Delta) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{p+1}}$ (en general)

Arribats a aquest punt volem continuar expressant algebraicament sentits geomètrics. L'observació clau aquí és que amb encapsular la informació geomètrica de la vora en tenim suficient per explicar gran part de la forma del políedre; té sentit, doncs, definir el següent operador, anomenat *operador vora:*

Definició 2.2. Sigui K un complex simplicial ordenat. Per a tot $p \geq 1$ s'anomena l'operador vora el morfisme $\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ de grups abelians que sobre els generadors està definit per

$$\partial_p[v_{i_0}, ..., v_{i_p}] = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_{i_0}, ..., \hat{v_{i_k}}, ..., v_{i_p}]$$

i per $p = 0$ és el l'operador nul.

Una interpretació geomètrica d'aquest operador seria el següent:

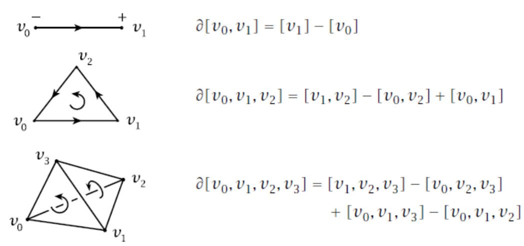

Figura 4: Interpretació geomètrica de les vores. Hatcher [1]

Arribats a aquest punt ja podem definir el complex de cadenes simplicials, que no és sinó una successió de grups abelians lliures finitament generats, amb els operadors vora que ens transporten cap 'abaix':

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} ... \xrightarrow{\partial_1} C_0(K)$$

denotem aquesta successió com $C_\star(K)$. En general, una successió de l'estil (en altres àreas de les matemàtiques ens trobem situacions similars) ha de complir la següent propietat fonamental:

Proposició 2.3. *Sigui K un complex simplicial ordenat. La composició*

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

és nul·la per a tot $p \geq 1$, és a dir, $\partial^2 = 0$.

Demostració. És suficient veure-ho per als generadors. Sigui $\sigma = [v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+1}}]$ un generador, és a dir, una cara ordenada de K. Calculem $\partial^2\sigma$:

$$\begin{aligned}
\partial(\partial[v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+1}}]) &= \partial\left(\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_{p+1}}]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \left[\partial[v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_{p+1}}]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \left[\sum_{l<k} (-1)^l [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_l}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_{p+1}}]\right. \\
&\quad \left. + \sum_{l>k} (-1)^{l-1} [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, \hat{v}_{i_l}, \dots, v_{i_{p+1}}]\right] \\
&= \sum_{0 \leq l < k \leq p+1} \left[(-1)^{l+k} + (-1)^{l+k-1}\right] [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_l}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_{p+1}}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Un cop tenim això, podrem definir pròpiament el grup d'homologia simplicial p-èssim de K a través de la informació que es transmet quan baixem en els grups de cadenes simplicials de K.

Definició 2.4. Definim el grup de *cicles p-dimensionals* de K com el nucli de ∂_p:

$$Z_p(K) := \ker(\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K))$$

i el grup de les *vores p-dimensionals* de K com la imatge de ∂_{p+1}:

$$B_p(K) := \operatorname{im}(\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \to C_p(K))$$

i finalment el grup d'homologia simplicial p:

$$H_p(K) = H_p(C_\star(K), \partial) := Z_p(K)/B_p(K)$$

Observació. *Això està ben definit! Tenim $B_p(K) \subset Z_p(K)$, ja que si $z \in B_p(K)$, llavors*

$$\partial_p(z) = \partial_p \partial_{p+1}(c) = 0$$

Precisament per això hem definit l'operador vora d'aquella manera, per tal que aquesta propietat es compleixi.

Així doncs, els elements dels grups d'homologia $H_p(K)$ són classes d'equivalència de cicles $z \in Z_p(K)$, que són iguals sii existeix una cadena $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $z - z' = \partial(c)$. Això és molt semblant al grup fonamental! Essencialment, quan tenim dos cicles que la seva diferència està en una mateixa cara, són el mateix.

De totes maneres, a nosaltres ens interessa saber *calcular* aquests grups d'homologia. Aquesta tasca dependrà molt del tipus d'homologia on ens trobem. Veiem un exemple del nostre cas:

Exemple 2.5. *Sigui K l'1-esquelet d'un 2-símplex ordenat de vèrtexs $\{v_0, v_1, v_2\}$, és a dir, les seves arestes i els seus vèrtexs. Tindrem*

$$C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2],$$

$$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_2],$$

amb ∂ donada per la matriu (per trobar-la hauriem de fer la imatge dels generadors: per exemple, $\partial([v_o, v_1]) = [v_1] - [v_0]$ dona la primera columna)

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

d'on resulten les següents identificacions dels grups d'homologia:

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{C_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2]}{\langle (-1, 1, 0), (0, -1, 1)(-1, 0, 1) \rangle} \cong \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$$

on els 'vectors' d'abaix del quocient són les imatges dels generadors (columnes de la matriu). De manera similar:

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = \ker(\partial_1)/\{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Computar els grups d'homologia NO ÉS COSA TRIVIAL, sobretot quan comencem a engreixar els generadors. Vegeu com es complica el càlcul fent l'esquelet 2-dimensional d'un 3-símplex a la pàgina 59 de [3]. Tot i així, tenim un resultat especialment interessant:

Teorema 2.6. *Sigui Δ^n un símplex n-dimensional. Aleshores, el complex de cadenes $C_\star(\Delta^n)$ és contràctil en grau > 0 (més tard definim contràctil), i en particular*

$$H_p(\Delta^n) = 0$$

Aquest resultat és important, donat que ens està dient que els 'building blocks' dels complexos simplicials tenen una homologia molt particular.

Com que els grups de cicle $Z_p(K)$ són finitament generats (són subgrups dels grups de cadenes $C_p(K)$), i el grup d'homologia $H_p(K)$ és quocient de grups finitament generats, llavors és finitament generat. Per tant, podem aplicar el teorema d'estructura dels grups abelians finitament generats, i obtenim:

Proposició 2.7. *Sigui K un complex simplicial ordenat. Els grups d'homologia $H_p(K)$ són grups abelians finitament generats, per a tot $p \geq 0$, i admeten una descomposició de la forma:*

$$H_p(K) \cong \mathbb{Z}^r \bigoplus_{i=1}^{m} T_i$$

on r és el rang, i $T_i \cong \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ són grups cíclics finits, que verifiquen la relació de divisibilitat $d_i | d_{i+1}$

Observació. *Aquest resultat no és exclusiu dels grups abelians. Si A és un domini d'ideals principals, i M un A-mòdul finitament generat, tenim el mateix teorema (apunts del Travessa capítol 7). Així doncs aquest resultat continuarà tenint sentit quan definim una homologia més general sobre mòduls.*

2.3 Interpretració geomètrica de H_0 en políedres

Volem dotar d'informació geomètrica als grups d'homotopia (sinó, de què serveixen?). En particular, H_0 dona una informació molt important: la connexió d'un políedre. Recordem que els políedres són localment arc-connexos, i per tant connexió i arc-connexió són pràcticament el mateix.

Primer necessitem una definició i una proposició per poder demostrar el teorema important:

Definició 2.8. Donat K complex simplicial, direm que K és simplicialment connex sii per a tot parell de vèrtexs v_0, v_1 de K existeix una successió de vértexs $v_0, w_1, ..., w_r, v_1$ tal que $\Delta(w_i, w_{i+1})$ és una aresta de K.

És a dir, intuitivament, que podem arribar d'un vèrtex a un altre caminant per les arestes. Té sentit, doncs, que si podem fer això, $|K|$ també estigui estretament connectat:

Proposició 2.9. *Sigui K un complex simplicial. Llavors, K és simplicialment connex sii $|K|$ és connex*

Demostració. Pàgina 61-62 de [3]. La demostració és força feixuga i utilitza coses de poliedres que no hem vist. □

Ara podem enunciar el resultat principal:

Teorema 2.10. *Sigui $|K|$ un políedre connex, no buit. Aleshores, $H_0(K) = \mathbb{Z}$*

Demostració. Pàgina 62-63 de [3]. Donarem una idea de la demostració:

- Primer, notem que donat dos vèrtexs qualsevols, podem formar una cadena entre arestes ubicada en $C_1(K)$ (i.e: de la forma $s = [w_0, w_1] + ... + [w_{r-1}, w_r]$) tal que $\partial s = v_i - v_0$
- Definim després el morfisme *d'augmentació* $\epsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ donat per $\epsilon(\sum y_i v_i) = \sum y_i$. Si mirem que és exhaustiu i té nucli $B_0(K)$ ja ho tindriem (pel primer teorema d'isomorfia).

□

3 Complexs de R-mòduls i morfismes

3.1 Complexs de R-mòduls

3.1.1 Definició general

Com hem dit[2], el càlcul de l'homologia d'un políedre pot ser una cosa fotuda. Per tant, volem obtenir tècniques de càlcul més àgils: és aquest l'objectiu d'aquests següents apartats. Dotarem d'eines algebraiques a l'homologia. En general i per simplificar, agafarem aquí R com a un anell unitari, i en general millor que penseu en algun cos de característica zero per la intuició.

Comencem definint la generalització de les cadenes que hem vist:

Definició 3.1. Un *complex de cadenes* de R-mòduls és una successió de R-mòduls M_n, i de morfismes de R-mòduls $\partial_n : M_n \to M_{n-1}$ tals que

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0$$

Per convenció, $\partial_0 = 0$. Direm que el complex és finit si existeix n_0 tal que $M_p = 0$ per tot $p \geq n_0$.

Als morfismes ∂_n els anomenerem els *diferencials* dels complexs. En general, denotarem un complex com a la tupla $(M_\star, \partial)$, o fins i tot ens petem ∂ si ja estrà clar pel context. També ho podem escriure com:

$$... \to M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_0$$

Un cas particular de complexs de R-mòduls són les sucessions exactes:

Definició 3.2. Sigui $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ una successió de morfismes de R-mòduls. Es diu que és una *successió exacta* en M si $\operatorname{im} f = \ker g$.
Es diu que una successió de morfismes de R-mòduls

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

és exacta, si ho és en cada grau, és a dir, si $\operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$, per a tot $n \geq 0$.

De la mateixa manera que hem definit l'homologia anteriorment, ara podem definir, de manera més general:

Definició 3.3. Sigui $M_\star$ un complex de R-mòduls. S'introdueixen els p-cicles i les p-vores del complex $M_\star$ com els sub-R-mòduls de M_p donats, respectivament, per

$$Z_p(M_\star) = \ker \partial_p \subseteq M_p,$$

$$B_p(M_\star) = \operatorname{im} \partial_{p+1} \subseteq M_p.$$

Tenim la inclusió $B_p(M_\star) \subseteq Z_p(M_\star)$ (la demostració és la mateixa), ergo l'homologia d'un complex de R-mòduls està ben definida:

Definició 3.4. Sigui $M_\star$ un complex de R-mòduls. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el *R-mòdul d'homologia p-èsima* de $M_\star$ com el R-mòdul quocient

$$H_p(M_\star) = Z_p(M_\star)/B_p(M_\star).$$

Observació. *Observem que si el complex $M_\star$ és exacte en M_n, és a dir, $\operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$, aleshores $H_n(M_\star) = 0$. En aquest sentit, els R-mòduls $H_p(M_\star)$ mesuren la manca d'exactitud del complex $M_\star$ en cada grau.*

Sovint, es diu que un complex de R-mòduls $M_\star$ és acíclic (per què només té un cicle) si és una successió exacta, és a dir, si $H_p(M_\star) = 0$ per a tot $p \geq 0$.

[2]Aquesta secció d'aquí és, en part, un repàs del que va fer el Carlos l'altra dia

3.1.2 Homologia d'un complex simplicial amb coeficients en un anell R

Sigui K un complex simplicial ordenat. Aleshores, el complex de cadenes simplicials $C_\star(K)$ de K és un exemple de complex de $\mathbb{Z}$-mòduls. En aquest cas, el complex és finit, i els grups abelians són lliures. Ara, podem estendre la definició per poder permetre coeficients en un anell R, i no només en $\mathbb{Z}$:

Definició 3.5. Sigui K un complex simplicial ordenat, R un anell commutatiu, i $p \geq 0$. Es defineix el *p-èssim R-mòdul de cadenes simplicials de K amb coeficients en R*, que denotarem per $C_p(K;R)$, com el R-mòdul lliure generat per les cares ordenades de K de dimensió p.

Notem que l'únic que hem canviat són els coeficients!

Com l'operador vora del complex de cadenes $C_*(K)$ està definit sobre els generadors, s'estén R-linealment a un únic morfisme de R-mòduls (això us ho creieu i ja)

$$\partial : C_p(K;R) \longrightarrow C_{p-1}(K;R),$$

que continuarà verificant $\partial^2 = 0$, i així es té definit un complex de R-mòduls, $(C_*(K;R), \partial)$.

Definició 3.6. Sigui K un complex simplicial, i R un anell commutatiu. Per a tot $p \geq 0$, es defineix el *p-èssim R-mòdul d'homologia de K amb coeficients en R* per

$$H_p(K;R) := H_p(C_*(K;R), \partial).$$

Aquí només hem definit totes les eines que hem fet fins ara en homologia d'un complex simplicial amb un altre anell R, no hi ha absolutament res de nou.

3.1.3 Característica d'Euler i els Betti numbers

Ara, si R és un domini d'ideals principals (DIP) tot submòdul d'un R-mòdul finitament generat és finitament generat (la demostració està a la pàgina 92 de [3]), i així els grups $H_p(K;R)$ són R-mòduls finitament generats. En particular, si R és un cos k, aquests grups són k-espais vectorials de dimensió finita.

A continuació volem veure alguna utilitat de definir el grup d'homotopia sobre un cos k general. Abans d'això, definim un concepte geomètric:

Definició 3.7. Sigui K complex simplicial, i k un cos. Definim el p-èssim nombre de Betti de K amb coeficients en k com

$$b_p(K,k) = dim_k H_p(K,k)$$

Com a notació, tenim que $k = \mathbb{Z}$, aleshores $b_p(K,\mathbb{Z}) = b_p$

I un altre concepte estretament lligat, que potser coneixeu ja:

Definició 3.8. Sigui K un políedre. Definim la *característica d'Euler* de K com

$$\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 - ...$$

on c_i són el nombre de Δ^n-simplexs en el complexe.

De la definició de $C_p(K,k)$ se segueix clarament la igualtat següent:

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p dim_k C_p(K,k)$$

La pregunta que ens podem fer ara és si podem comparar la característica d'Euler de diferents políedres. És a dir, si $f : |K| \to |L|$ és una aplicació contínua (o fins i tot simplicial, vegeu la definició a dalt), podem obtenir alguna relació entre les característiques de K i L? Resulta que la característica d'Euler es pot computar a partir dels grups d'homologia simplicial, i que l'aplicació simplicial f indueix un morfisme dels grups d'homologia simplicial de K en els de L. Per tant, en alguns casos podrem establir una certa relació entre les dues característiques.

Ara, un fet realment important és que la característica d'Euler és invariant homotòpicament. Una manera de veure-ho (i crec que és la manera estàndart més fàcil) és lligar $\chi(K)$ amb els nombres de Betti, i després com que l'homologia simplicial és invariant per homotopia (això us ho creieu de moment), tenim el nostre invariant i som molt feliços.

Com a curiositat, donada una superfície podem 'poligonitzar-la' (no definirem formalment el que significa això aquí), i podem calcular-li la seva $\chi(K)$. Per exemple, la esfera unitat S^2 té característica d'Euler 2, el torus té característica d'Euler 0, el doble torus té característica -2, etc. Això no és casualitat, ja que $\chi(X)$ està estretament lligat amb el genus d'un espai topològic, i.e, la quantitat de 'forats' que té una superfície, sempre i quan aquest espai sigui prou 'bo' (i.e: superfícies connectades).

D'altra banda, aprofitem ara que estem parlant de geometria per mencionar que la divisió en complexos simplicials que hem fet es pot generalitzar una mica. La generalització immediata són els CW-complexes, que són espais topològics on el que ajuntem no són cares 'afins' sinó 'cel·les' més generals. Si dona temps, en el seminari veurem CW-complexes i la seva homotopia. La descripció d'un espai com a CW-complexe permet computar-li la seva característica d'Euler associada.

Dit això, anem ara a veure que efectivament la característica d'Euler és invariant. Abans fem un petit lema:

Lema 3.9. *Suposem que tenim la següent successió exacta de k-espais vectorials de dimensió finita*

$$0 \xrightarrow{A} V_1 \xrightarrow{i} V_2 \xrightarrow{f} V_3 \xrightarrow{B} 0$$

Aleshores, tenim que

$$\dim(V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_3).$$

Demostració. Com que és exacta tenim que $\operatorname{im}(A) = \ker(i) = \{0\}$, així que i és una aplicació injectiva. De la mateixa manera veiem que $\operatorname{im}(f) = \ker(B) = V_3$, per tant f és exhaustiva. Observem que $\operatorname{im}(i) = \ker(f)$. Pel primer teorema d'isomorfia tenim

$$V_2/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f) = V_3$$

Com que treballem amb k-espais vectorials de dimensió finita obtenim la següent igualtat:

$$\dim(V_2) - \dim(\ker(f)) = \dim(V_3)$$

Però sabem que $\ker(f) = \operatorname{im}(i)$, i com que i és una aplicació injectiva:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(i)) = \dim(V_1)$$

i lògicament

$$\dim(V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_3).$$

□

I ara demostrem el teorema important:

Teorema 3.10. *(Invariància de la característica d'Euler) Sigui $(M_\star, \partial_\star)$ un complex de cadenes de k-espais vectorials de dimensió finita. Considerem:*

$$\chi(M_\star) := \sum (-1)^p dim_k M_\star$$

$$\chi(H_\star(M_\star)) := \sum (-1)^p dim_k H_p(M_\star)$$

Aleshores tenim que $\chi(M_\star) = \chi(H_\star(M_\star))$

Demostració. Notem que per tot $p \geq 0$ tenim les següents succesions exactes de $k-$e.v.e ed dimensió finita:

$$0 \longrightarrow Z_p \xrightarrow{i} M_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_p \xrightarrow{i} Z_p \xrightarrow{\pi} H_p(M) \longrightarrow 0$$

Comprovar que són successions exactes és immediat ja que $\ker(\partial_p) = Z_p = \text{im}(i)$ per definició i $\ker(\pi) = B_p = \text{im}(i)$. Aplicant la observació anterior obtenim:

$$\dim_k M_p = \dim_k Z_p + \dim_k B_{p-1}$$

$$\dim_k Z_p = \dim_k B_p + \dim_k H_p(M)$$

Per tant

$$\chi(M_*) = \sum (-1)^p \dim_k M_p = \sum (-1)^p \left(\dim_k Z_p + \dim_k B_{p-1}\right) =$$

$$= \sum (-1)^p \left(\dim_k B_p + \dim_k H_p(M) + \dim_k B_{p-1}\right) =$$

$$= \sum (-1)^p \dim_k H_p(M) = \chi(H_*(M_*))$$

□

En cristià[3]: tenim que la característica d'Euler d'un complexe és la mateixa excepte mòdul homologia. Per tant, donats dos espais CW-complexes (tingueu al cap els simplicials) tenim que si són homòtopament equivalents, com que tindràn la mateixa homologia (com veurem més endavant) aleshores tenen la mateixa característica.

En el nostre cas tenim, doncs, aquest corol·lari:

Corol·lari 3.11. *Sigui K un complexe simplicial. Aleshores, per tot cos k tenim que*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{dimK} (-1)^p b_p(K, k)$$

Demostració. En l'anterior teorema substituï-ho $M_\star$ pel nostre complex de cadenes escollit, i comproveu que tot quadra :) □

Referències

[1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[2] Guillem Sedó i Torres. *Topologia algebraica (apunts).* ?, 2019.

[3] Pere Pascual Vicenç Navarro. *Topologia Algebraica.* ?, 1999.

[3]Per cert, en l'enunciat tinc severs dubtes sobre la notació. Crec que hi ha un tipo en la font original, ja que $H_\star(M_\star)$ suposo que hauria de ser $H_p(M_\star)$, que té molt de sentit. El mateix tipo es repeteix posteriorment, així que no sé ben bé si és notació, però no m'acaba d'agradar. A partir d'aquí posaré $H_p(M_\star)$, tot i que si en els apunts originals veieu l'altra hauria de ser el mateix.

Homologia Simplicial

Miquel Martínez

6 de març de 2025

1 Complexs de R-mòduls i morfismes

1.1 Morfismes de complexs de R-mòduls

De moment hem parlat a fons dels complexs de R-mòduls. Com a tota àrea de les matemàtiques, ara ens interessaria donar morfismes entre ells. Primer donem la definició de morfisme, tot i que pot resultar una mica estranya a primera vista:

Definició 1.1. Siguin $(M_\star, \partial), (M'_\star, \partial)$ dos complexos de R-mòduls. Un *morfisme de complexs* $f_\star : (M_\star, \partial) \to (M'_\star, \partial)$ és una successió de morfismes de R-mòduls $f_p : M_p \to M'_p$, per a tot $p \geq 0$, tal que el següent diagrama és conmutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & M_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "f_p"'] & M_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M'_{p+1} \arrow[r, "\partial'_{p+1}"] & M'_p \arrow[r, "\partial'_p"] & M'_{p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

és a dir, que es verifiquen les següents igualtats per a tot $p \geq 0$:

$$f_{p-1}\partial_p = \partial'_p f_p$$

L'objectiu de definir així els morfismes, especialment la conmutativitat, es per poder obtenir una categoria de R-mòduls. Específicament, voldrem que l'homologia sigui un functor. La raó d'això quedarà palesa més endavant.

1.2 Construcció del functor homotopia

Denotem la categoria de complexs de R-mòduls com $C(R\text{-mod})$, formada pels mateixos complexs i els morfismes definitits anteriorment. Ara, volem que la homotopia sigui un functor d'aquesta categoria a una altra, així que comprovem-ho. [1]

Lema 1.2. *Sigui $f_* : (M_*, \partial) \longrightarrow (M'_*, \partial')$ un morfisme de complexos de R-mòduls. Aleshores f_* indueix un morfisme entre les homologies dels complexos*

$$H_p(f_*) : H_p(M_*) \longrightarrow H_p(M'_*),$$

tal que si $z \in Z_p(M_*)$ és un representant de $[z] \in H_p(M_*)$, llavors

$$H_p(f_*)([z]) := [f_p(z)].$$

Demostració. Hem de veure que està ben definit, és a dir, que f_p envia cicles a cicles, i vores a vores.
Sigui doncs $z \in Z_p(M_*)$, és a dir, $\partial_p z = 0$. Llavors, $f_p(z) \in Z_p(M'_*)$, que és el kernel de ∂'_p, ja que

$$\partial'_p(f_p(z)) = f_{p-1}(\partial_p(z)) = 0.$$

[1] Per descomptat el llenguatge categòric va ser introduït molt després de la topologia algebraica. Estem fent una presentació actualitzada.

Per tant $f_*(Z_p(M_*)) \subseteq Z_p(M'_*)$.

D'altra banda, si $z \in B_p(M_*) = im(\partial_{p+1})$, existeix $z' \in M_{p+1}$ tal que $z = \partial_{p+1}(z')$, i per tant

$$f_p(z) = f_p(\partial(z')) = \partial'(f_{p+1}(z')) \in B_p(M'_*),$$

és a dir, $f_*(B_p(M_*)) \subseteq B_p(M'_*)$.

□

Finalment:

Lema 1.3. *Siguin* $f_* : (M_*, \partial) \longrightarrow (M'_*, \partial')$ *i* $g_* : (M'_*, \partial') \longrightarrow (M''_*, \partial'')$ *morfismes de complexos, aleshores*

$$H_p(f \circ g)_* = H_p(f_*) \circ H_p(g_*),$$

$$H_p(id_{M_*}) = id_{H_p(M_*)}.$$

Demostració. És immediat per definició de $H_p(f_\star)$ (el quocient es comporta bé amb la identitat i la composició). □

Així doncs, tenim que per tot $p \geq 0$ l'aplicació que hem definit és un functor entre la categoria de les cadenes de R-mòduls i la categoria dels R-mòduls:

$$H_p : C(R - mod) \to R - mod$$

1.3 Morfisme induït per una aplicació simplicial

Hem construït el morfisme induït de manera general. Ara, tornem als nostres apreciats políedres, i provarem que tota aplicació simplicial entre dos políedres indueix un morfisme entre els grups d'homologia simplicial d'aquests.

Així doncs, siguin K, L dos complexes simplicials ordenats, i $f : |K| \to |L|$ una aplicació simplicial induïda per una aplicació entre els vèrtexs $V_K \to V_L$ (vegeu més amunt la definició si no us enrecordeu).

Volem veure que f indueix un morfisme de complexs de R-mòduls,

$$f_* : C_*(K, R) \to C_*(L, R)$$

i per tant segons el lema anterior un morfisme natural entre les homologies:

$$H_p(f_*) : H_p(K, R) \to H_p(L, R)$$

Primer definim el nostre candidat a aplicació, que és bastant intuïtiu:

Definició 1.4. Sigui K, L dos complexos simplicials ordenats i $f : |K| \to |L|$ una aplicació simplicial. Sigui $[v_0, \ldots, v_p] \in K$ una cara aleshores

$$f_*([v_0, \ldots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), \ldots, f(v_p)] & \text{si } f(v_i) \neq f(v_j) \text{ per tot } i \neq j \\ 0 & \text{si } \exists i \neq j \text{ tal que } f(v_i) = f(v_j) \end{cases}$$

i si $\sigma \in S_{p+1}$ (el grup de permutacions de $p + 1$ elements) aleshores definim

$$[v_{\sigma(0)}, \ldots, v_{\sigma(p)}] = \epsilon(\sigma)[v_0, \ldots, v_p]$$

on $\epsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació σ.

Proposició 1.5. *L'aplicació definida és en efecte un morfisme de complexos de R-mòduls, de* $C_*(K, R)$ *a* $C_*(L, R)$

Demostració. Hem de veure que per tot $p \geq 0$ es compleix que f_* verifica la igualtat $\partial_{p+1} \circ f_* = f_* \circ \partial_{p+1}$. Ho distingim entre diversos casos:

1r cas: Hi ha un únic parell $i \neq j$ tal que $f(v_i) = f(v_j)$. Per definició es té que $\partial_{p+1} f_*([v_0, \ldots, v_p]) = 0$. Calculem l'altra composició:

$$f_* \partial_{p+1}([v_0, \ldots, v_p]) = f_* \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p] \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k f_*([v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p])$$

$$= (-1)^i [f(v_0), \ldots, f(v_p)] + (-1)^j [f(v_0), \ldots, f(v_p)]$$

$$= (-1)^i [f(v_0), \ldots, f(v_p)] + (-1)^j (-1)^{j-i-1} [f(v_0), \ldots, f(v_i), f(v_j), \ldots, f(v_p)] = 0$$

2n cas: Existeixen almenys tres nombres diferents i, j, k tals que $f(v_i) = f(v_j) = f(v_k)$. Aquest cas és més fàcil ja que $f_* \partial_{p+1}([v_0, \ldots, v_p]) = 0 = \partial_{p+1} f_*([v_0, \ldots, v_p])$.

3r cas: Per a tot parell $i \neq j$ es verifica que $f(v_i) \neq f(v_j)$. Tindrem que

$$\partial_{p+1} f_*([v_0, \ldots, v_p]) = \partial_{p+1}([f(v_0), \ldots, f(v_p)])$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [f(v_0), \ldots, f(v_k), \ldots, f(v_p)]$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k f_*([v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p])$$

$$= f_* \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_p] \right) = f_* \partial_{p+1}([v_0, \ldots, v_p])$$

4rt cas: Hi ha $i \neq j \neq k \neq l$ tals que $f(v_i) = f(v_j)$ i $f(v_k) = f(v_l)$ amb $f(v_j) \neq f(v_k)$, però aleshores tindrem que $f_* \partial_{p+1}([v_0, \ldots, v_p]) = 0 = \partial_{p+1} f_*([v_0, \ldots, v_p])$ com en el segon cas. $\square$

Un cop establert això podem parlar una mica més dels grups d'homologia d'un complex simplicial.

Corol·lari 1.6. *(Independència de l'ordre dels vèrtexs). Sigui K un complex simplicial, i denotem K_1, K_2 els complexs ordenats per dues ordenacions diferents. Aleshores, els grups d'homologia $H_p(K_1, R)$ i $H_p(K_2, R)$ són isomorfs, per a tot $p \geq 0$*

Demostració. Donada l'aplicació simplicial $f : K_1 \to K_2$, induida per la identitat de K, és un isomorfisme simplicial. Ara, com que els functors conserven els isomorfismes, tenim que el morfisme induït $H_p(f_*)$ és un isomorfisme, i per tant tenim la isomorfia entre els grups d'homologia. $\square$

Corol·lari 1.7. *Siguin K_1 i K_2 dos poliedres disjunts, i $K = K_1 \sqcup K_2$. Aleshores $H_p(K, R) \cong H_p(K_1, R) \oplus H_p(K_2, R)$.*

Demostració. Com K és la unió disjunta de K_1 i K_2, es té $C_*(K, R) = C_*(K_1, R) \oplus C_*(K_2, R)$ (això us ho creieu). Però, l'homologia d'una suma directa de complexos és la suma directa de les homologies (això també us ho creieu), el que permet concloure la prova. $\square$

I finalment podem concloure un resultat important que havia quedat penjat de l'apartat 2.3:

Corol·lari 1.8. *Sigui K un complex simplicial. Si $|K|$ té r components connexes, aleshores $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$.*

Finalment, ara volem donar un exemple geomètric força il·luminador.

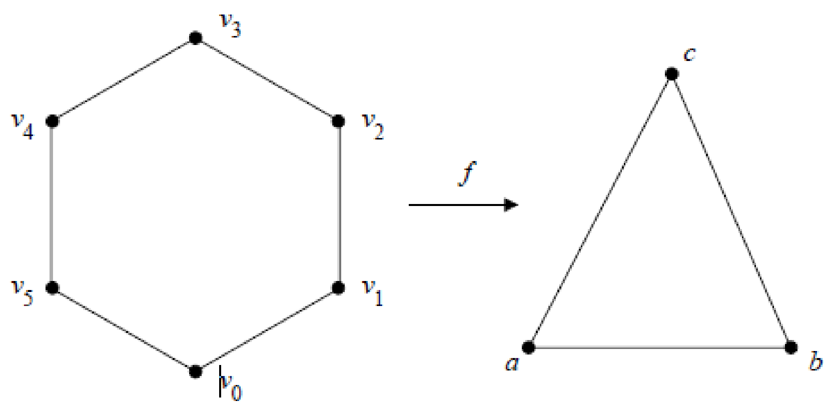

Figura 1: Exemple de l'aplicació. [2]

Exemple 1.9. *Siguin K i L els complexos simplicials de la figura, ordenats per $v_0 < v_1 < \cdots < v_5$ i $a < b < c$, respectivament. Sigui f l'aplicació simplicial que sobre els vèrtexs ve donada per $f(v_0) = f(v_3) = a$, $f(v_1) = f(v_4) = b$, $f(v_2) = f(v_5) = c$.*
Com $|K|$ i $|L|$ són connexos es té $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ i $H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, i a més aquests grups estan generats per un vèrtex qualsevol dels respectius poliedres. Així, es resulta que f indueix un isomorfisme $H_0(K) \to H_0(L)$.
Respecte a l'acció de f en els grups H_1, observem que $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ està generat per la classe del cicle

$$z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] + [v_3, v_4] + [v_4, v_5] + [v_5, v_0],$$

i que $H_1(L) \cong \mathbb{Z}$ està generat per la classe del cicle

$$z' = [a, b] + [b, c] + [c, a].$$

És immediat comprovar que $f_*(z) = 2z'$. Així, a través dels isomorfismes $H_1(K) = \mathbb{Z}[z] \cong \mathbb{Z}$ i $H_1(L) = \mathbb{Z}[z'] \cong \mathbb{Z}$, el morfisme induït en H_1,

$$H_1(K) \to H_1(L),$$

correspon a la multiplicació per 2. Aquesta acció té un significat geomètric clar: mentre donem una volta a K, la imatge dóna dues voltes a L.

2 Homotopies entre morfismes de complexs de R-mòduls

A continuació introduirem la noció d'homotopia entre morfismes de complexs de R-mòduls.

Definició 2.1. Siguin M_*, M'_* dos complexs de cadenes de R-mòduls diferents, i f, g dos morfismes de complexs. Aleshores, és diu que f, g són morfismes homòtops si existeix una successió de morfismes de $R-$mòduls, $h_p : M_p \to M'_{p+1}$, $p \geq 0$, tal que es verifica la següent igualtat:

$$f_p - g_p = \partial_{p+1} h_p + h_{p-1} \partial_p$$

Direm que h és una homotopia entre els morfismes f, g.

El següent diagrama resumeix la situació.

$$\begin{tikzcd}
M_{p+1} \arrow[r, "\delta_{p+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{p+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{p+1}"] & M_p \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, shift right, "f_p"'] \arrow[d, shift left, "g_p"] \arrow[dl, dashed, "h_p"'] & M_{p-1} \arrow[d, shift right, "f_{p-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{p-1}"] \arrow[dl, dashed, "h_{p-1}"'] \\
M_{p+1}' \arrow[r, "\delta_{p+1}'"'] & M_p' \arrow[r, "\delta_p'"'] & M_{p-1}'
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Diagrama

Notem que la homotopia no vol dir moure'ns pel diagrama, ja que f_p, g_p viuen en el mateix complexe.
Una bona pregunta a fer-s'he ara és quina relació té la homotopia que coneixem de tota la vida amb aquesta definició purament algebraica. Una intuició geomètrica és la següent [1]:

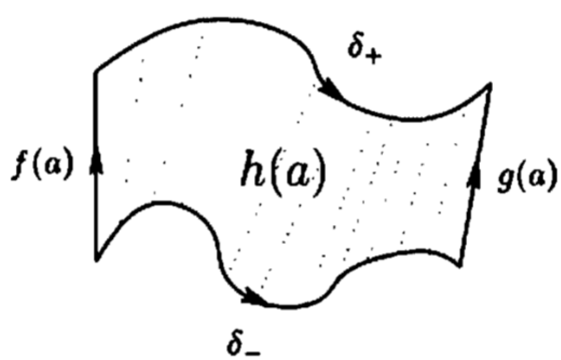

Figura 3: Homotopia entre f i g

En la figura anterior veiem la homotopia h entre f, g, i a un camí de X. Formalment, $f \circ a$ és el camí en Y a l'esquerra del quadradet; el mateix per $g(a)$. Ara, intentem mirar la vora de $h(a)$: això és la suma (orientada) dels costats del 'rectangle', i.e,

$$\partial h(a) = g(a) - \delta_+ - f(a) + \delta_-$$

Però si ens hi fixem, $\delta_+ - \delta_-$ no és sinó $h(\partial(a))$! Com que a no és un camí del nostre espai X, $\partial(a)$ és la vora d'aquest camí. És a dir, són els paths connectant $f(\partial(a))$ cap a $g(\partial(a))$. Per tant, $h(\partial(a))$ és h aplicat als extrems de a. Així doncs, obtenim que $g - f = \partial h + h\partial$.

Proposició 2.2. *Siguin $f, g : M_* \to M'_*$ morfismes homòtops en complexs de R-mòduls. Aleshores, indueixen el mateix morfisme en l'homologia*

$$H_p(f) = H_p(g) : H_p(M_*) \to H_p(M'_*)$$

Demostració. Sigui $[z] \in H_p(M_*)$. Aleshores, per definició de H_p, tenim que $\partial_p(z) = 0$, ja que

$$H_p(M_*) = ker(\partial_p)/im(\partial_{p+1})$$

Per definició, $H_p(f)([z]) = [f_p(z)], H_p(g)([z]) = [g_p(z)]$. Aleshores,

$$f_p(z) - g_p(z) = \partial'_{p+1}(h_p(z)) + h_{p-1}(\partial_p(z)) = \partial'_{p+1}(h_p(z))$$

i prenent classes d'homologia obtenim que $[\partial'_{p+1}(h_p(z))] = 0$ ja que és una vora, i per tant tenim la igualtat que buscàvem. □

Observació. *Un dels principals resultats de la teoria d'homologia estableix que donades dues $f, g : |K| \to |L|$ aplicacions simplicials homòtopes (en el sentit topològic), aleshores els morfismes que indueixen entre els complexs de cadenes simplicials, $f_*, g_* : C_*(K, R) \to C_*(L, R)$ són homòtops en el sentit d'aquest apartat.*

Aleshores, per la proposició que acabem de veure indueixen el mateix morfisme en homologia. De totes maneres, això no ho demostrem aquí de moment (potser es veurà a homologia singular, o potser no).

A continuació, mirarem finalment un cas molt particular d'homotopia:

Definició 2.3. Sigui M_* un complex de R-mòduls. Direm que M_* és contràctil si per tot $p \geq 0$ existeix $h_p : M_p \to M_{p+1}$ tal que

$$id_p = \partial_{p+1}h_p + h_{p-1}\partial_p$$

Si la condició es dona per grau $p \geq n_0$, direm que M_* és contràctil en grau més gran que n_0.

I tenim una bona interpretació geomètrica altre cop:

Proposició 2.4. *Si M_* és contràctil en grau més gran que n_0, aleshores $H_p(M_*) = 0$ per tot $p > n_0$*

Demostració. Sigui $[z] \in H_p(M_*)$ amb $p > n_0$. Aleshores,

$$z = id(z) = \partial_{p+1}(h_p(z)) + h_{p-1}(\partial_p(z)) = \partial_{p+1}(h_p(z))$$

ergo $z \in B_p(M_*)$, i per tant $[z] = 0$. □

3 Homologia d'un símplex

En la secció dos hem comentat de passada el teorema sobre els grups d'homotopia d'un simplex. A continuació, demostrem el resultat.
Abans d'això notem que la implicació contrària no és sempre certa (en altres homologies més generals): un contraexemple és en la corba del topòleg, la qual té grup fonamental trivial però no és contràctil.

Teorema 3.1. *Sigui Δ^n un símplex n-dimensional. Aleshores el complex de cadenes $C_*(\Delta^n)$ ès contràctil en grau > 0, i en particular*

$$H_p(\Delta^n) = 0,$$

per a tot $p > 0$.

Demostració. Denotem $v_0, \ldots, v_n$, els vèrtxes de Δ^n ordenats per $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$, i considerem el complex de cadenes $C_*(\Delta^n)$, generat per les cares ordenades $\sigma_p = [v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}]$, $i_0 < i_1 < \cdots < i_p$.

Hem de construir una homotopia $h_p : C_p(\Delta^n) \to C_{p+1}(\Delta^n)$, per a tot $p \geq 0$, que ha de complir $id = \partial_{p+1} h_p + h_{p-1}\partial_p$.
Fixem un vèrtex de Δ^n, per exemple, v_0. Com que estem en un complex simplicial, és suficient definir h_p sobre els generadors $\sigma_p = [v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}]$. La nostra funció a estudiar serà:

$$h_p(\sigma_p) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_0 \in \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}\}, \\ [v_0, v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}], & \text{si } v_0 \notin \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}\}. \end{cases}$$

Ara, distingim si v_0 pertany o no a σ_p.

Suposem que v_0 és un vèrtex de σ_p, i sense pèrdua de generalitat prenem $v_0 = v_{i_0}$. Aleshores

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} h_p(\sigma_p) + h_{p-1}\partial_p(\sigma_p) &= h\partial[v_0, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p}] \\ &= h\left(\sum_{j=0}^{p}(-1)^j[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_j}, \ldots, v_{i_p}]\right) \\ &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j h[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_j}, \ldots, v_{i_p}] \\ &= [v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}] + 0 + \cdots + 0 \\ &= [v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}] = \sigma_p. \end{aligned}$$

D'altra banda, si v_0 no és un vèrtex de σ_p, tindrem

$$\begin{aligned} \partial_{p+1} h_p(\sigma_p) + h_{p-1}\partial_p(\sigma_p) &= \partial([v_0, v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}]) + h\left(\sum_{j=0}^{p}(-1)^j[v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_j}, \ldots, v_{i_p}]\right) \\ &= [v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}] - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j[v_0, \ldots, \hat{v}_{i_j}, \ldots, v_{i_p}] + \sum_{j=0}^{p}(-1)^j[v_0, v_{i_0}, \ldots, \hat{v}_{i_j}, \ldots, v_{i_p}] \\ &= [v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}] = \sigma_p. \end{aligned}$$

□

Observació. *El teorema anterior, $H_p(\Delta^n) = 0$, $p > 0$, ès l'anàleg n-dimensional del teorema d'Anàlisi conegut com teorema de Poincaré, segons el qual, tot camp vectorial a $\mathbb{R}^3$ amb rotacional nul ès el gradient d'una funció potencial.*

Tot i que hem donat una demostració del teorema utilitzant les eines que hem vist fins ara, també es podria haver fet d'una altra manera (més senzilla): utilitzant que la homologia es preserva per homotopia, i que donat un espai convex, aquest és contràctil.

4 Succession exactes en homologia

4.1 Succession exactes de complexs de R-mòduls

En aquest apartat introduirem la successió exacta d'homologia associada a una successió exacta de complexs de R-mòduls. Les aplicacions a l'homologia simplicial les veurem en l'apartat següent.

Primer, veiem la definició formal, que no és sinó una extensió del que ja hem vist.

Definició 4.1. Sigui R un anell, M_*, M'_*, M''_* complexs de R-mòduls, i sigui

$$0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f_*} M_* \xrightarrow{g_*} M''_* \longrightarrow 0$$

una successió de morfismes de complexs. Aleshores, es diu que els mrofismes f, g formen una successió exacta de complexs de R-mòduls si per a tot $p \geq 0$ tenim que la successió

$$0 \longrightarrow M'_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} M''_p \longrightarrow 0$$

és exacta, i.e, si f_p injectiva, g_p exhaustiva, $\ker g_p = \mathrm{im} f_p$.

Una successió exacta de morfismes de complexs és equivalent al diagramma commutatiu següent, on les files són seqüències exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M'_{p+1} \arrow[r, "f_{p+1}"] \arrow[d, "\partial"] & M_{p+1} \arrow[r, "g_{p+1}"] \arrow[d, "\partial"] & M''_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_p \arrow[r, "f_p"] \arrow[d, "\partial"] & M_p \arrow[r, "g_p"] \arrow[d, "\partial"] & M''_p \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_{p-1} \arrow[r, "f_{p-1}"] \arrow[d, "\partial"] & M_{p-1} \arrow[r, "g_{p-1}"] \arrow[d, "\partial"] & M''_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

A continuació veiem com podem extreure una successió exacta als grups d'homologia a partir d'una successió exacte als complexes.

Proposició 4.2. *Sigui* $0 \to M'_* \xrightarrow{f_*} M_* \xrightarrow{g_*} M''_* \to 0$ *una successió exacta de complexs de R-mòduls. Aleshores, per a tot $p \geq 0$, tenim una successió exacta de R-mòduls entre els seus grups d'homologia*

$$H_p(M'_*) \xrightarrow{H_p(f_*)} H_p(M_*) \xrightarrow{H_p(g_*)} H_p(M''_*)$$

Demostració. Cal provar que im $H_p(f_*) = \ker H_p(g_*)$. Verifiquem les dues inclusions. Recordem les següents definicions:

$$g_p : \ M_p \to M''_{p-1}$$
$$f_p : M'_p \to M_{p-1}$$

- im $H_p(f_*) \subseteq \ker H_p(g_*)$: Sigui $[z] \in$ im $H_p(f_*) \subset H_p(M_*)$ i escrivim $[z] = H_p(f_*)[z']$ amb $[z'] \in H_p(M'_*)$. La classe $H_p(g_*)([z])$ està representada per $g_p(z) = g_p(f_p(z')) = 0$ (recordem que $H_p(g_*)([z]) = [g_p(z)]$), per la exactitud de la successió de complexos.
  Així, tenim que $H_p(g_*)([z]) = [g_p(z)] = 0$, és a dir $[z] \in \ker H_p(g_*)$.

- $\ker H_p(g_*) \subseteq$ im $H_p(f_*)$: Sigui $[z] \in H_p(M_*)$ tal que $H_p(g_*)([z]) = 0$. La classe $H_p(g_*)([z])$ està representada per $g_p(z)$, i per tant $g_p(z)$ serà una vora, és a dir, existeix un $y'' \in M''_{p+1}$ tal que $g_p(z) = \partial''_{p+1}(y'')$, ja que im$\partial_{p+1} = B_p(M''_*)$.

Com g_{p+1} és exhaustiva hi haurà un $y \in M_{p+1}$ tal que $g_{p+1}(y) = y''$. Aquest y verifica $g_p(\partial_{p+1}(y)) = \partial''_{p+1} g_{p+1}(y) = \partial''_{p+1}(y'') = g_p(z)$, on la primera igualtat és per la definició de g morfisme.
Per tant $z - \partial_{p+1}(y) \in \ker g = \operatorname{im} f$, ja que g és lineal de R-mòduls, d'on resulta que hi haurà un $z' \in M'_p$ tal que $f_p(z') = z - \partial_{p+1}(y)$.

Observem que z' és un cicle de M'_* ja que $f_{p-1}(\partial'_p(z')) = \partial_p(f_p(z')) = \partial_p(z - \partial_{p+1}y) = \partial_p z - \partial^2 y = 0$, ja que recordem que $[z] \in H_p(M_*)$. Ara, com f és injectiva per hipòtesis, $\partial_p(z') = 0$. En definitiva, com $z = f_p(z') + \partial_{p+1}(y)$, tindrem que $[z] = H_p(f_*([z'])) \in \operatorname{im} H_p(f_*)$.

□

En general el morfisme f_* no és injectiu, ni g_* és exhaustiu. No obstant, podem connectar les diferents successions de la proposició, per $p \geq 0$, mitjançant el morfisme de connexió, que es defineix en la proposició següent.

Proposició 4.3. *Amb les mateixes hipòtesis de la proposició anterior, per a tot $p \geq 1$, existeix un morfisme de R-mòduls,*

$$H_p(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(M'_*)$$

tal que $\partial_*[z'']$ admet com a representant un cicle $y' \in M'_{p-1}$ que verifica $f(y') = \partial z$, amb $g(z) = z''$. A aquest morfisme se l'anomena morfisme de connexió i es denota per ∂_*.

Demostració. Sigui $[z''] \in H_p(M''_*)$ una classe representada pel cicle $z'' \in Z_p(M''_*)$. Com z'' és un cicle, verifica $\partial''_p(z'') = 0$. El morfisme g és exhaustiu i per tant existeix un $z \in M_p$ tal que $g(z) = z''$.

L'element $\partial_p z$ és de la imatge de f ja que $g_{p-1}(\partial_p z) = \partial''_p g_p(z) = \partial z'' = 0$, per definició de morfisme i de cicle; de l'exactitud de la successió s'en dedueix l'existència d'un $y' \in M'_{p-1}$ tal que $f(y') = \partial z$, perquè $\ker g = \operatorname{im} f$. A més, aquest y' és un cicle, perquè f és injectiva i tenim

$$f_{p-1}(\partial'_p y') = \partial_p f_p(y') = \partial_p \partial_{p+1} z = 0.$$

Així y' defineix una classe d'homologia $[y'] \in H_{p-1}(M'_*)$.

Definim ara $\partial_*([z'']) = [y']$. S'ha de provar que la definició de ∂_* no depèn de les eleccions realitzades, és a dir, ni del representant z'' ni de l'antiimatge z, i que és un morfisme de R-mòduls. La demostració es deixa com a exercici al lector.

□

Podem ara enunciar el resultat principal d'aquest apartat. [2]

Teorema 4.4. *Siguin M'_*, M_* i M''_* complexos de R-mòduls, i*

$$0 \longrightarrow M'_* \xrightarrow{f_*} M_* \xrightarrow{g_*} M''_* \longrightarrow 0$$

una successió exacta de complexos. Llavors la successió

$$\cdots \longrightarrow H_p(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(M'_*) \xrightarrow{H_{p-1}f_*} H_{p-1}(M_*) \xrightarrow{H_{p-1}g_*} H_{p-1}(M''_*) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

és una successió exacta, que s'anomena la successió exacta llarga d'homologia associada a la successió exacta de complexos.

Demostració. Cal provar que es verifiquen les igualtats següents:

1. $\ker H_{p-1} g_* = \operatorname{im} H_{p-1} f_*$.
2. $\ker \partial_* = \operatorname{im} H_{p-1} g_*$.
3. $\ker H_{p-1} f_* = \operatorname{im} \partial_*$.

[2] A partir d'aquí he simplificat la notació, deixant d'especificar p en alguns subíndexs; així ho feia el llibre. Tot i així n'he deixat algun que crec que ajudava a clarificar.

La primera ja està demostrada, ja que és la primera proposició que hem demostrar a la secció.

Provem 2. Comencem per la inclusió $\ker \partial_* \subseteq \mathrm{im} H_{p-1}(g_*)$. Sigui $[z''] \in \ker \partial_*$, on $z'' \in Z_p(M''_*)$. Seguirem amb les notacions que hem usat en les demostracions anteriors per definir ∂_*.
Així, $\partial_*[z''] = [y']$, amb $y' \in Z_{p-1}(M'_*)$, tal que $f(y') = \partial z$, i $g(z) = z''$. Com $[z''] \in \ker \partial_*$, y' és una vora, és a dir, hi haurà un $z' \in M'_p$ amb $y' = \partial z'$.

Considerem l'element $z - f(z') \in M_p$. Notem $g(z - f(z')) = g(z) = z''$, on $g \circ f$ envia al 0 perquè és una seqüència exacte; ara, aquest element és també una antiimatge de z'' i a més, és un cicle

$$\partial(z - f(z')) = \partial z - f(\partial z') = \partial z - f(y') = 0.$$

Així, $[z''] = H_p(g_*)[z - f(z')]$, i $[z''] \in \mathrm{im} g_*$ (notem que si no haguéssim comprovat que fos un cicle, llavors l'element no tindria perquè està al grup d'homologia, sinó que senzillament pertany a M_p).

Comprovem ara l'altra inclusió, $\mathrm{im} H_p(g_*) \subseteq \ker \partial_*$. Sigui $[z''] \in \mathrm{im} H_p(g_*)$, i $z \in Z_p(M_*)$ un cicle tal que $g(z) = z''$. Segons la definició de ∂_* hem de trobar $y' \in M'_{p-1}$ tal que $f(y') = \partial z$. Però $f(y') = \partial z = 0$ i f és injectiva, per tant, $y' = 0$, i llavors, $\partial_*[z''] = [y'] = [0]$. Així $[z''] \in \ker \partial_*$.

Provem finalment 3. Per provar que $\ker H_{p-1}(f_*) \subseteq \mathrm{im}\partial_*$, considerem una classe $[y'] \in H_{p-1}(M'_*)$ tal que $H_{p-1}(f_*)([y']) = 0$, representada per un cicle $y' \in Z_{p-1}(M'_*)$. Per definició $H_{p-1}(f_*)[y'] = [f(y')] = 0$ si, i només si, $f(y') = \partial z$, per algun $z \in M_p$, però aleshores, per la definició de ∂_*, $\partial_*([g(z)]) = [y']$, i per tant: $y' \in \mathrm{im}\partial_*$.

La inclusió $\ker f_* \supseteq \mathrm{im}\partial_*$ es prova de forma anàloga a les anteriors. Exercici al lector :).

$\square$

Acabem aquest apartat establint la naturalitat de la successió exacta llarga d'homologia.

Proposició 4.5. *Sigui*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M'_* & \xrightarrow{f} & M_* & \xrightarrow{g} & M''_* & \to & 0 \\
 & & \downarrow m' & & \downarrow m & & \downarrow m'' & & \\
0 & \to & N'_* & \xrightarrow{h} & N_* & \xrightarrow{k} & N''_* & \to & 0
\end{array}$$

un diagram commutatiu de successions exactes de complexos de R-mòduls. Aleshores el diagrama de successions exactes llargues

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \to & H_p(M'_*) & \xrightarrow{f_*} & H_p(M_*) & \xrightarrow{g_*} & H_p(M''_*) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(M'_*) \to \dots \\
 & & \downarrow m'_* & & \downarrow m_* & & \downarrow m''_* & & \downarrow m'_* \\
\dots & \to & H_p(N'_*) & \xrightarrow{h_*} & H_p(N_*) & \xrightarrow{k_*} & H_p(N''_*) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(N'_*) \to \dots
\end{array}$$

és commutatiu.

Demostració. Els dos primers quadrats són commutatius per què l'homologia és un functor (en aquest cas ens preserva les composicions de morfismes).
Queda per provar, per tant, la naturalitat del morfisme de connexió. Usarem les notacions que hem anat utilitzant. Sigui $[z''] \in H_p(M''_*)$, i $\partial_*[z''] = [y']$, amb $f(y') = \partial z$ i $g(z) = z''$. Com $mf = hm'$ i $m'g = km$ es tenen les igualtats $hm'(y') = \partial m(z)$ i $km(z) = \partial m''(z'')$. Així, $\partial'_* m''_*[z''] = [m'(y')] = m'_*(\partial_*[z''])$, com volíem veure. $\square$

4.2 Successions exactes en homologia simplicial

A continuació volem donar aplicacions en l'homologia simplicial de la successió exacta d'homologia associada a una successió exacta de complexs. Principalment, farem la successió d'homologia relativa i la successió de Mayer-Vietoris. Notarem que les demostracions complicades ja les hem fet en el capítol anterior. Suposarem també que $R = \mathbb{Z}$ per simplificar les notacions.

4.2.1 Successió d'homologia relativa

Definició 4.6. Sigui K un complex simplicial ordenat, i L un subcomplex de K amb l'ordre induït. Definim el *complex de cadenes relatives* de (K, L) com el complex quocient $C_*(K, L) := C_*(K)/C_*(L)$. S'anomena *homologia relativa* de (K, L) a l'homologia

$$H_*(K, L) := H_*(C_*(K, L))$$

Per la pròpia definició es té una successió exacta de complexos

$$0 \to C_*(L) \xrightarrow{i_*} C_*(K) \xrightarrow{\pi_*} C_*(K, L) \to 0,$$

on i_* és el morfisme induït per la inclusió de L en K, i π_* és el morfisme de projecció. De l'apartat anterior es dedueix ara de forma immediata:

Teorema 4.7. *Sigui K un complex simplicial i L un subcomplex de K. Hi ha una successió exacta llarga d'homologia*

$$\cdots \to H_p(L) \xrightarrow{i_*} H_p(K) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(L) \to \ldots$$

que s'anomena la successió exacta d'homologia relativa del parell (K, L).
Aquesta successió és natural en (K, L), és a dir, si (K', L') és un altre parell de complexos simplicials, i $\varphi : |K| \to |K'|$ és una aplicació simplicial tal que $\varphi(|L|) \subseteq |L'|$, aleshores el diagrama de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \to & H_p(L) & \xrightarrow{i_*} & H_p(K) & \xrightarrow{\pi_*} & H_p(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & \ldots \\
 & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \\
\ldots & \to & H_p(L') & \xrightarrow{i'_*} & H_p(K') & \xrightarrow{\pi'_*} & H_p(K', L') & \xrightarrow{\partial'_*} & \ldots
\end{array}$$

És commutatiu.

Usant aquesta successió exacta podem calcular, per exemple, l'homologia de $sq_n\Delta^{n+1}$. Sigui Δ^{n+1} un símplex n-dimensional amb els vèrtexs ordenats, i $sq_n\Delta^{n+1}$ el subcomplex ordenat format per les cares de Δ^{n+1} de dimensío $\leq n$ (recordem que és l'esquelet; ja l'hem presentat prèviament en la primera secció d'introducció als políedres).
Comencem calculant l'homologia relativa del parell $(\Delta^{n+1}, sq_n\Delta^{n+1})$. El complex de cadenes de $sq_n\Delta^{n+1}$ ve donat per

$$C_p(sq_n\Delta^{n+1}) = C_p(\Delta^{n+1}), \quad 0 \leq p \leq n,$$
$$C_{n+1}(sq_n\Delta^{n+1}) = 0,$$

on la primera igualtat és conseqüència de la definició de $C_p = \bigoplus_{dim(\sigma)=p} \mathbb{Z}[\sigma]$, i la segona és immediata. Ara, tenim que el complex de cadenes del parell homològic és

$$C_p(\Delta^{n+1}, sq_n\Delta^{n+1}) = \frac{C_p(\Delta^{n+1})}{C_p(sq_n\Delta^{n+1})} \cong \begin{cases} 0, & 0 \leq p \leq n, \\ \mathbb{Z}, & p = n+1. \end{cases}$$

per tant, com que si $C_p(\Delta^{n+1}) = 0$ els seus cicles són 0 trivialment, obtenim que en els primers casos el grup d'homologia és trivial; en l'últim cas, com que no hi ha cap altre espai on projectar les vores obtenim el complet. Per tant:

$$H_p(\Delta^{n+1}, sq_n\Delta^{n+1}) \cong \begin{cases} 0, & 0 \leq p \leq n, \\ \mathbb{Z}, & p = n+1. \end{cases}$$

Observem a més, que el símplex Δ^{n+1} determina, un cop escollit l'ordre dels seus vèrtxes, un generador de $H_{n+1}(\Delta^{n+1}, sq_n\Delta^{n+1})$. D'aquí se segueix el següent teorema.

Teorema 4.8. *L'homologia de la triangulació* $sq_n\Delta^{n+1}$ *de l'esfera* S^n*,* $n \geq 1$*, ès*

$$H_p(sq_n\Delta^{n+1}) \cong \begin{cases} 0, & 0 < p < n, \\ \mathbb{Z}, & p = n. \end{cases}$$

Demostració. Com sabem que $H_p(\Delta^{n+1}) = 0$ si $p > 0$ pel teorema d'homologia d'un símplex, de la successió exacta d'homologia relativa i del càlcul anterior, resulta la successió exacta curta

$$0 \to H_{n+1}(\Delta^{n+1}, sq_n\Delta^{n+1}) \to^{\cong} H_n(sq_n\Delta^{n+1}) \to 0,$$

i també, si $0 < p < n$,

$$0 \to H_p(sq_n\Delta^{n+1}) \to 0$$

d'on es dedueix el resultat. □

4.2.2 Successió de Mayer-Vietoris

L'altra successió exacta que estudiarem és la successió de Mayer-Vietoris (que potser recordareu de la primera xerrada que hem fet). Sigui K un complex simplicial i K_1, K_2 subcomplexos de K tals que $K = K_1 \cup K_2$. Considerem el morfisme de complexos

$$\pi : C_p(K_1) \oplus C_p(K_2) \to C_p(K)$$
$$(c_1, c_2) \mapsto c_1 - c_2$$

i sigui

$$i : C_p(K_1 \cap K_2) \to C_p(K_1) \oplus C_p(K_2)$$
$$c \mapsto (c, c)$$

la inclusió diagonal.

Teorema 4.9. *La successió*

$$0 \to C_*(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} C_*(K_1) \oplus C_*(K_2) \xrightarrow{\pi} C_*(K) \to 0$$

és una successió exacta de complexos de grups abelians, i indueix una successió exacta llarga d'homologia

$$\ldots \to H_p(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(K_1 \cap K_2) \to \ldots$$

Aquesta successió s'anomena la successió exacta llarga de Mayer-Vietoris.

Demostració. Com $K = K_1 \cup K_2$, tots els generadors de $C_p(K)$ tenen antiimatge per π, és a dir, l'aplicació π és exhaustiva. El nucli de π és

$$\ker \pi = \{(c_1, c_2) : c_1 = c_2 \in C_*(K_1 \cap K_2)\},$$

d'on resulta l'exactitud de la successió de l'enunciat. La resta es segueix de la secció anterior. □

El següent resultat és elemental, i es dedueix de la pròpia definició de característica d'Euler. No obstant, el deduirem ara de la successió exacta de Mayer-Vietoris seguint l'esperit de la secció.

Corol·lari 4.10. *Sigui* K *un políedre i* K_1, K_2 *subpolíedres de* K *tals que* $K = K_1 \cup K_2$*. Aleshores*

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2).$$

Demostració. Segons el teorema anterior es té una successió exacta

$$\dots \to H_p(K_1 \cap K_2) \to H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \to H_p(K) \to H_{p-1}(K_1 \cap K_2) \to \dots$$

i com la característica d'Euler d'una successió exacta és 0 (això es pot deduir de la invariància de la característica d'Euler, exercici pel lector), podem agrupar termes en la forma

$$\begin{gathered} 0 = \text{rang } H_0(K) - (\text{rang } H_0(K_1) + \text{rang } H_0(K_2)) + \text{rang } H_0(K_1 \cap K_2) \\ -\text{rang } H_1(K) + (\text{rang } H_1(K_1) + \text{rang } H_1(K_2)) - \text{rang } H_1(K_1 \cap K_2) \\ \dots \\ = \chi(K) - \chi(K_1) - \chi(K_2) + \chi(K_1 \cap K_2) \\ \Rightarrow \chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2). \end{gathered}$$

□

Referències

[1] Chris Grossack. *Chain Homotopies Geometrically.* Blog, 2022.

[2] Pere Pascual Vicenç Navarro. *Topologia Algebraica.* ?, 1999.

Complexs cel·lulars

Teresa Ferrer de Noguera

20 de març de 2025

1 Introducció i primeres definicions

Hi ha una gran quantitat de referències disperses, i en cadascuna un complex cel·lular es defineix de manera diferent. En aquesta secció veurem una intuïció general, i dues construccions força clares. Cal notar també que en algunes de les referències consultades fan distinció entre complex CW (Closure-finite Weak complex, terme introduït per J. C. Whitehead que explicarem més endavant), i complex cel·lular. Com que en la majoria de llocs s'usen les terminologies indistintament, farem el mateix aquí.

La idea intuïtiva d'un complex cel·lular és un espai topològic que es pot construir inductivament adjuntant boles topològiques (o cel·les, com després formalitzarem) a espais anomenats esquelets (definits en sessions anteriors, però dels quals farem un recordatori).

Es poden veure com una generalització dels complexs simplicials i de les varietats topològiques, cosa que permet treballar-hi de manera menys restrictiva. En particular, gairebé tots els espais topològics d'interès en la topologia algebraica són homotòpicament equivalents a complexs cel·lulars.

Cal definir un parell de conceptes:

Definició 1.1. Una *cèl·lula* és un espai topològic e homeomorf a un espai euclidià real. És a dir, existeix algun $n \in \mathbb{N}$ tal que $e \sim \mathbb{R}^n$. Aleshores, direm que e (que denotarem e^n d'ara en endavant) és una n-cèl·lula, on n és la seva *dimensió*.

Definició 1.2. Siguin X, Y espais topològics, i $A \subset Y$ un subespai de Y. Sigui $f : A \longrightarrow Y$ una aplicació contínua (també anomenada *aplicació d'adjunció*). L'*espai d'adjunció* $X \cup_f Y$ es construeix de la següent manera: $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim$
on $\sim$ denota la relació d'equivalència $a \sim f(a)\ \forall a \in A$.

Definició 1.3. Un *complex cel·luar* (o *complex CW*) es construeix prenent la unió d'una seqüència d'espais topològics

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \dots$$

tal que cada X_n s'obté d'adjuntar còpies de n-cèl·lules $(e^n_\alpha)_\alpha$, cadascuna homeomorfa a la bola n-dimensional B^n, a través d'aplicacions d'adjunció $g^n_\alpha : \partial e^n_\alpha \longrightarrow X_{n-1}$.
Així doncs, podem veure X_n com $X_n = X_{n-1} \sqcup_\alpha \overline{e}^n_\alpha$.

A cada X_n se l'anomena n-esquelet del complex.

La topologia de $X = \bigcup_n X_n$ és dèbil: un conjunt $A \subset X$ és un obert (o tancat) si, i només si, $A \cap X_n$ és un obert (o tancat) a X_n $\forall n$.

Notem que la condició de topologia dèbil és automàtica quan X és de dimensió finita, és a dir quan $X = X_n$ per a cert n. En efecte, si A és obert de X, per la definició de topologia quocient a X_n tenim que $A \cap X_{n-1}$ és obert de X_{n-1}, i així successivament per tots els esquelets (com que n és finit, es demostra en un nombre finit de passos).

Cal notar també que, com que $\mathbb{R}^n$ és homeomorf a l'interior del disc n-dimensional (fet fàcilment comprovable que es deixa com a exercici), podem definir el següent:

Definició 1.4. L'*aplicació característica* ϕ_α de la cèl·lula e^n_α és la composició $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha \longrightarrow X^n \hookrightarrow X$.

És una aplicació contínua ja que és composició d'aplicacions contínues, amb la inclusió $X^n \hookrightarrow X$ contínua per la definició de topologia dèbil. I la restricció de ϕ_α a l'interior de D^n_α defineix un homeomorfisme amb e^n_α.

D'aquesta definició es desprèn una manera alternativa de descriure la topologia de X: $A \subset X$ és obert (o tancat) si, i només si, $\phi_\alpha^{-1}(A)$ és obert de D^n_α per cada aplicació característica.

Definició 1.5. Un *subcomplex* d'un complex CW X és un subespai $A \subset X$, unió de cèl·lules de X, tal que la clausura de cada cèl·lula de A està continguda en A.

Així, per cada cèl·lula de A, la imatge de la seva aplicació característica resideix en A, convertint A en un complex cel·lular, que té la topologia induïda de X.

Abans de continuar amb les propietats que presenta, vegem alguns exemples de complexs cel·lulars per tenir-ne una certa intuïció:

Exemple 1.6. *Un complex cel·lular* 1*-dimensional no és ni més ni menys que un graf, on els vèrtexs són les* 0*-cèl·lules i les arestes les* 1*-cèl·lules. La frontera d'una aresta (els punts dels extrems) es poden enganxar al mateix vèrtex.*

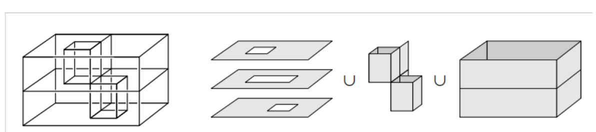

Figura 1: Casa de les dues habitacions

Exemple 1.7. *La casa de les dues habitacions (*FIGURA 1*) té una estructura evident de complex cel·lular* 2*-dimensional. El seu interès rau en el fet que té el tipus d'homotopia d'un punt (no ho demostrarem), de manera que podem comprovar que comparteixen la característica d'Euler (tal com la va definir el Miquel, però la versió més general per a complexs cel·lulars). En efecte, si comptem, la casa de dues habitacions té 29* 0*-cèl·lules, 51* 1*-cèl·lules i 23* 2*-cèl·lules, la qual cosa dona característica d'Euler* $29 - 51 + 23 = 1$*, la mateixa que un punt.*

Exemple 1.8. *L'**Espai projectiu real n-dimensional** $\mathbb{R}P^n$ es defineix com l'espai de totes les rectes que passen per l'origen de $\mathbb{R}^{n+1}$. Vegem el cas $\mathbb{R}^2$. Topològicament, per tal de definir-lo ens podem permetre prendre els punts d'intersecció de totes les rectes amb l'esfera unitat, i identificar els punts antipodals (ja que representen la mateixa recta). Això ens retorna l'arc superior de la circumferència amb els extrems identificats; és a dir, topològicament i negligint la mètrica, obtenim de nou l'esfera unitat.*
Vegem ara $\mathbb{R}P^2$, que es defineix de la mateixa manera sobre $\mathbb{R}^3$. De nou, prenem l'esfera unitat, en aquest cas 3-dimensional, i repetim el procés. Ens acaba quedant un dels hemisferis com a representant de l'espai, i si ens hi fixem la seva frontera és l'esfera S^1, és a dir el pla projectiu real $\mathbb{R}P^1$ que hem definit abans. Per tant, en termes de cèl·lules, hem adjuntat un disc 2-dimensional a $\mathbb{R}P^1$ per tal d'obtenir $\mathbb{R}P^2$, la qual cosa fa sospitar que, en efecte, té estructura de complex cel·lular. Restaria comprovar la condició de topologia dèbil, que es deixa com a exercici pel lector.

2 Propietats

Notem que un subcomplex és un subespai tancat; fins i tot podem definir un subcomplex com un subespai tancat format per unió de cèl·lules.

Un complex CW finit (amb cèl·lules finites) és compacte, ja que afegir una sola cèl·lula preserva la propietat. Vegem la següent proposició per a veure el recíproc:

Proposició 2.1. *Un subespai compacte d'un complex cel·lular està contingut en un subcomplex finit.*

Demostració. Vegem que un conjunt compacte C d'un complex cel·lular només interseca amb una quantitat finita de cèl·lules de X. Suposem doncs que existeix una seqüència infinita de punts $x_i \in C$ que pertanyen tots a cèl·lules diferents. Aleshores, $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ és un tancat de X.
Assumint que $S \cap X_{n-1}$ és tancat de X_{n-1}, tenim que per cada cèl·lula de X, $g_\alpha^{-1}(S)$ és tancat de ∂D^n_α, i $\phi_\alpha^{-1}(S)$ conté com a molt un punt més a D^n_α, així que és tancat. Per tant $S\cap_n$ és tancat a X_n per tot n, de manera que S és tancat de X. Amb el mateix argument es veu que tot subconjunt de S és també tancat de X, així que S té topologia discreta. Però és compacte, ja que és subespai tancat d'un compacte C. Així, S ha de ser finit, contradicció.

Com que C està contingut en una unió finita de cèl·lules, només cal demostrar que una unió finita de cèl·lules està continguda en un subcomplex finit de X. Una unió finita de subcomplexs finits és de nou un subcomplex finit, així que només cal provar que una sola cèl·lula e^n_α està continguda en un subcomplex finit.
La imatge de l'aplicació d'adjunció g_α d'aquesta cel·la és un compacte, així que per inducció sobre la dimensió n aquesta imatge està continguda en un subcomplex $A \subset X_{n-1}$. Per tant, e^n_α està continguda al subcomplex finit $A \cup e^n_\alpha$. $\square$

Passem a explicar la terminologia CW. Les lletres fan referència a les següents propietats:

- Closure-finiteness (clausura finita): la clausura de cada cèl·lula interseca només una quantitat finita d'altres cèl·lules.

- Weak topology (topologia dèbil): un conjunt és tancat si, i només si, interseca la clausura de cada cèl·lula en un tancat.

La següent proposició conté aquesta definició:

Proposició 2.2. *Donat un espai Hausdorff X i una família d'aplicacions $\phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$, llavors són les aplicacions característiques d'una estructura de complex CW sobre X si, i només si:*
(i) Cada ϕ_α es restringeix a un homeomorfisme des de ∂D^α_n sobre la seva imatge, una cèl·lula $e^\alpha_n \subset X$, i aquestes cèl·lules són totes disjuntes i la seva unió és X.
(ii) Per a cada cèl·lula e^α_n, $\phi_\alpha(\partial D^n_\alpha)$ està continguda en la unió d'un nombre finit de cèl·lules de dimensió menor que n.
(iii) Un subconjunt de X és tancat si i només si interseca el tancament de cada cèl·lula de X en un conjunt tancat.

La tercera condició es pot reescriure dient que un conjunt $C \subset X$ és tancat si, i només si, $\phi^{-1}_\alpha(C)$ és tancat a D^n_α per tot α.

Demostració. Ja hem vist la implicació "només si". Pel recíproc, suposem inductivament que X_{n-1} és un complex CW amb aplicacions característiques corresponents ϕ_α. La inducció pot començar amb $X_{-1} = \emptyset$. Sigui $f : X_{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha \to X_n$ donada per la inclusió a X_{n-1} i les aplicacions ϕ_α per totes les n-cèl·lules de X_n. És una aplicació contínua exhaustiva, i si veiem que és una aplicació quocient, aleshores X_n s'obté d'adjuntar les n-cèl·lules e^n_α a X_{n-1}. Per tant, si $C \subset X_n$ de manera que $f^{-1}(C)$ és tancat, ens cal veure que $C \cap \overline{e}^m_\beta$ és tancat per totes les cèl·lules e^m_β.
Tenim tres casos:

1. Si $m < n$ aleshores $f^{-1}(C)$ tancat implica que $C \cap X_{n-1}$ és tancat, i per tant $C \cap \overline{e}^m_\beta$ és tancat ja que $\overline{e}^m_\beta \subset X_{n-1}$.

2. Si $m = n$ aleshores e^m_β és una de les cèl·lules e^n_α, així que si $f^{-1}(C)$ és tancat llavors $f^{-1}(C) \cap D^n_\alpha$ és tancat, així que és compacte. Per tant, la seva imatge $C \cap \overline{e}^n_\alpha$ per f és compacta i per tant, un tancat.

3. Si $m > n$, tenim que $C \subset X_n$ implica $C \cap \overline{e}^m_\beta \subset \phi_\beta(\partial D^m_\beta)$. Aquest últim espai està contingut en una unió finita de clausures $\overline{e}^l_\gamma$ amb $l < m$. Per inducció sobre m, cada $C \cap \overline{e}^l_\gamma$ és tancat. Per tant, la intersecció de C amb la unió de la col·lecció finita $\overline{e}^l_\gamma$ és tancada. Intersecant aquest conjunt tancat amb $\overline{e}^m_\beta$, concloem que $C \cap \overline{e}^m_\beta$ és tancat.

Només resta veure que X té la topologia dèbil respecte els X_n; és a dir, veure que un conjunt de X és tancat si, i només si, interseca cada X_n en un tancat. L'argument anterior prenent $C = X_n$ prova que X_n és un tancat, de manera que un conjunt tancat interseca X^n en un tancat. Recíprocament, si un conjunt C interseca X_n en un tancat, aleshores C interseca cada $\overline{e}^n_\alpha$ en un tancat, així que C és tancat a X. □

Vegem una manera convenient de construir entorns oberts $N_\varepsilon(A)$ de subconjunts A de X, on ε és una funció que assigna un nombre $\varepsilon_\alpha > 0$ a cada cèl·lula de X. Es fa inductivament sobre els esquelets X_n. Suposem que ja hem construït un $N^n_\varepsilon(A)$ entorn de $A \cap X_n$ a X_n, començant per $N^0_\varepsilon(A)$=$A \cap X_0$. Llavors definim $N^{n+1}_\varepsilon(A)$ especificant la preimatge de

l'aplicació característica $\phi_\alpha : \mathcal{D}^{n+1} \to X$ de cada cèl·lula de dimensió $n+1$. Tenim que $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ és unió de dues parts: un ε_α-entorn de $\phi_\alpha^{-1}(A)\backslash\partial D^{n+1}$ a $D^{n+1}\backslash\partial D^{n+1}$ i un producte $(1-\varepsilon_\alpha, 1] \times \phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ respecte les coordenades "esfèriques"(r,θ) a D^{n+1}, amb $r \in [0,1]$ la coordenada radial i θ en $\partial D^{n+1} = S^n$.
Aleshores, definim $N_\varepsilon(A) = \bigcup_n N_\varepsilon^n(A)$. Això és un obert de X ja que la seva preimatge per l'aplicació característica és un obert (recordem la definició alternativa de la topologia dèbil).

Proposició 2.3. *Els complexs cel·lulars són normals i, en particular, Hausdorff.*

Demostració. Els punts són tancats en un complex CW X ja que són antiimatges de tancats per totes les aplicacions característiques ϕ_α. Siguin A, B conjunts tancats disjunts de X. Veiem que $N_\varepsilon(A)$ i $N_\varepsilon(B)$ són disjunts per ε_α suficientment petits. En el procés inductiu per construir aquests conjunts oberts, assumim que $N_\varepsilon^n(A)$ i $N_\varepsilon(B)$ s'han triat de manera que siguin disjunts. Notem que per una aplicació característica $\phi_\alpha : D^{n+1} \to X$, tenim que $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ i $\phi_\alpha^{-1}(B)$ estan a una distància positiva, ja que altrament per compacitat tindríem una seqüència a $\phi_\alpha^{-1}(B)$ que convergiria a un punt de $\phi_\alpha^{-1}(B)$ a ∂D^{n+1} a distància zero de $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$, però això és impossible perquè $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ és un entorn de $\phi_\alpha^{-1}(B) \cap \partial D^{n+1}$ a ∂D^{n+1} disjunt de $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(A)$. Similarment, $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ i $\phi_\alpha^{-1}(A))$ estan a distància positiva. També tenim $\phi_\alpha^{-1}(A)$ i $\phi_\alpha^{-1}(B)$ estan a distància positiva. Així doncs, prenent un ε_α prou petit, tindrem $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(B))$ disjunt de $\phi_\alpha^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ a D^{n+1}. □

Proposició 2.4. *Cada punt en un complex cel·lular té entorns oberts contràctils arbitràriament petits, de manera que són localment contràtcils.*

Demostració. Donat un punt x en un complex cel·lular X i un entorn U de x en X, podem triar els ε_α prou petits per tenir $N_\varepsilon(x) \subset U$ establint la condició que la clausura de $N_\varepsilon^n(x)$ estigui continguda en U per cada n.
Resta veure que $N_\varepsilon(x)$ és contràctil. Si $x \in X^m \backslash X^{m-1}$ i $n > m$ podem construir un retracte de deformació de $N_\varepsilon^n(x)$ sobre $N_\varepsilon^{n-1}(x)$ "resseguint cap enfora"segments radials de D^n. Un retracte de deformació de $N_\varepsilon^m(x)$ s'obté aleshores fent el retracte de deformació de $N_\varepsilon^n(x)$ sobre N_ε^{n-1} al llarg del t-interval $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, amb els punts de $N_\varepsilon^n(x)\backslash N_\varepsilon^{n-1}(x)$ quedant fixos fora de l'interval.
Finalment, $N_\varepsilon^m(x)$ és una bola oberta amb centre x, que clarament admet un retracte de deformació sobre x. □

En particular, els complexs cel·lulars són localment arc-connexos. així, un complex CW és arc-connex si, i només si, és connex.

Proposició 2.5. *En un subcomplex A d'un complex cel·lular X, l'entorn obert $N_\varepsilon(A)$ admet un retracte de deformació sobre A si $\varepsilon_\alpha < 1$ per tot α.*

Demostració. En cada cèl·lula de $X\backslash A$, $N_\varepsilon(A)$és un entorn producte de la frontera d'aquesta cèl·lula, de manera que un retracte de deformació de $N_\varepsilon(A)$ sobre A es pot construir exactament com a la demostració anterior. □

Una aplicació $f : X \to Y$ on el domini és un complex cel·lular és contínua si, i només si les seves restriccions a les clausures $\overline{e}_\alpha^n$ de les cèl·lules són contínues, i cal saber que el mateix és cert per homotopies $f_t : X \to Y$.

$$
\begin{array}{ccc}
\bigsqcup_{i \in I} S^{n_i - 1} & \xrightarrow{(\phi_i)_{i \in I}} & X \\
\downarrow & \text{(po)} & \downarrow \\
\bigsqcup_{i \in I} D^{n_i} & \longrightarrow & X \cup_{(\phi_i)_{i \in I}} \left(\bigsqcup_{i \in I} D^{n_i} \right)
\end{array}
$$

Figura 3: Diagrama d'adjunció de diverses cèl·lules

Definició 2.6. Un espai topològic X es diu que està *generat* per una col·lecció de subespais X_α si $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ i un conjunt A és tancat si, i només si, $A \cap X_\alpha$ és tancat a X_α per tot α.

Abans hem vist en altres paraules que un complex cel·lular X està generat per les clausures $\overline{e}^n_\alpha$ de les seves cèl·lules. Com que cada subcomplex de X és una unió finita de clausures de cèl·lules, X també està generat pels seus subcomplexs finits. Així doncs, X és generat de manera compacta.

3 Una mica de categories

Tot això es pot veure de manera més propera a la teoria de categories. Només en donarem una petita intuïció.

Definició 3.1. Per un espai topològic X, *l'adjunció d'una única n-cèl·lula* és el resultat d'"enganxarün n-disc a X a través de la imatge de la seva frontera (la $n-1$-esfera).
Sigui $\phi : S^{n-1} \to X$ una funció contínua. Aleshores, l'espai adjunt $X \cup_\phi D^n \in$Top és l'espai topològic que és el "pushout"[1] de la inclusió de la $n-1$-esfera per ϕ, de manera que és l'espai universal que fa que el diagrama de la Figura 2 commuti.

$$
\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & X \\
{\scriptstyle \iota}\downarrow & \text{(po)} & \downarrow \\
D^n & \longrightarrow & X \cup_\phi D^n
\end{array}
$$

Figura 2: Diagrama d'adjunció d'una única cèl·lula

Definició 3.2. Si tenim un conjunt d'aplicacions d'adjunció $\{\phi_i : S^{n_i-1} \to X\}_i$, totes cap al mateix espai X, les podem pensar com una única funció contínua $(\phi_i)_i : \bigsqcup_i S^{n_i-1} \to X$. El resultat d'adjuntar totes les n-cèl·lules corresponents a X resulta en el pushout de la Figura 3.

Definició 3.3. Sigui X un espai topològic. Aleshores, un *complex cel·lular relatiu d'altura numerable en X* és una funció contínua $f : X \to Y$ i un diagrama seqüencial de l'espai topològic de la forma $X = X_{-1} \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots$ tal que:

1. Cada $X_k \hookrightarrow X_{k-1}$ és una adjunció cel·lular com hem definit abans (Figura 4).

[1] No tinc molt clar com es tradueix aquest concepte, deixaré la terminologia anglesa original

2. $Y = \bigcup_k X_k$ és la unió de totes aquestes adjuncions cel·lulars, i $f : X \to Y$ és la inclusió canònica. De manera més abstracta, l'aplicació $f : X \to Y$ és la inclusió de la primera component del diagrama en el seu cocon colímit $\varinjlim_k X_k$ (Figura 5).

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I} S^{n_i - 1} \arrow[r, "(\phi_i)_{i \in I}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(po)}"] & X_k \arrow[d] \\
\coprod_{i \in I} D^{n_i} \arrow[r] & X_{k+1}
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Diagrama condició 1 complex relatiu

$$\begin{tikzcd}
X = X_0 \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \\
& Y = \varinjlim X_\bullet & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figura 5: Diagrama condició 2 complex relatiu

Definició 3.4. Finalment, un complex cel·lular (relatiu) d'altura numerable es diu *complex CW* si l'adjunció de les cèl·lules $(k+1)$-èsimes $X_k \to X_{k+1}$ és totalment per $(k+1)$-cèl·lules, és a dir presentant un pushout com el de la Figura 6.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I} S^{k} \arrow[r, "(\phi_i)_{i \in I}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(po)}"] & X_k \arrow[d] \\
\coprod_{i \in I} D^{k+1} \arrow[r] & X_{k+1}
\end{tikzcd}$$

Figura 6: Diagrama complex CW

Donat un complex CW, X_n també s'anomena el seu n-esquelet.

Definició 3.5. Una *funció cel·lular* entre complexs CW és una aplicació contínua $f : X \to Y$ tal que $f(X_n) \subset Y_n$.

4 Referències

[1] nLab, CW Complex: https://ncatlab.org/nlab/show/CW+complex (últim accés: 20/03/2025)

[2] Rudolf Fritsch, Renzo A. Piccinini, Cellular structures in topology, Cambridge studies in advanced mathematics Vol. 19, Cambridge University Press (1990).

[3] Hatcher, Allen (2002). Algebraic topology. Cambridge University Press. ISBN 0-521-79540-0.

Homologia singular

Abel Salinas Sellas

March 2025

1 Introducció

Definim $\Delta^p := \{x \in \mathbb{R}^{p+1}; \sum_{i=0}^{p} x_i = 1, x_i \geq 0\}$, el símplex p-dimensional estàndard.

Definició 1.1. Sigui X un espai topològic, i p un enter no negatiu. Un *p-símplex singular* de X és una aplicació contínua $\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$.

La definició no exclou p-símplexs degenerats. Per exemple, un p-símplex singular pot ser una aplicació constant.

Definició 1.2. Sigui X un espai topològic. Es defineix el grup de cadenes singulars p-dimensionals de X, que es denota $S_p(X)$, com el grup abelià lliure generat pels p-símplexs singulars de X:

$$S_p(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sigma_i; \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^p \longrightarrow X \text{ contínua} \right\}$$

Donat un p-símplex singular σ, definim l'*operador vora* $\partial_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$ com

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ \delta_i,$$

on $\delta_i : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$ és l'aplicació contínua

$$\delta_i(x_0, \ldots, x_{p-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_p).$$

Lema 1.3. $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ *per a tot* $p \geq 0$.

La successió de grups de cadenes singulars $S_p(X)$, $p \geq 0$, amb l'operador vora ∂, formen un complex de cadenes de grups abelians $(S_*(X), \partial)$ que s'anomena el *complex de cadenes singulars de X*.
Recordem que, donat un complex d'R-mòduls M_*, es defineix l'R-mòdul d'homologia p-èsim de M_* com $H_p(M_*) = Z_p(M_*)/B_p(M_*)$, on $Z_p(M_*) = \ker \partial_p$ i $B_p(M_*) = \mathrm{im}\partial_{p+1}$.
Aleshores, definim el *p-èsim grup d'homologia singular de X* com el grup d'homologia p-èsim del complex de cadenes singulars de X, és a dir, $H_p(X) := H_p(S_*(X))$.

Teorema 1.4. *Sigui X un espai topològic d'un sol punt, $X = \{pt\}$. L'homologia singular de X és*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

,

$$H_p(X) = 0,$$

per a $p \geq 1$.

Passem a veure com associar un morfisme en homologia singular a una aplicació contínua entre espais topològics.

Proposició 1.5. *Siguin X, Y espais topològics i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua. Llavors f indueix un morfisme de complexs*

$$S_*(f) : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$$

tal que $S_p(f)(\sigma) = f \circ \sigma$, per a tot p-símplex singular σ de X.

Aquest morfisme és compatible amb la composició d'aplicacions contínues, i el morfisme induït per la identitat en X és el morfisme identitat del complex $S_*(X)$. Així doncs, S_* defineix un functor de **Top** a $C_*(\mathbf{Ab})$.

Proposició 1.6. *Siguin X i Y espais topològics i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua. Llavors el morfisme $S_*(f)$ indueix un morfisme de grups*

$$H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y),$$

tal que si $[c]$ és un cicle de X, aleshores $H_*(f)([c]) = [S_*(f)(c)]$. A més, si $f = id_X$, aleshores $H_*(id_X) = id_{H_*(X)}$, i si $g : Y \longrightarrow Z$ és una altra aplicació continua, llavors $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$.

També notarem el morfisme $H_*(f)$ com f_*.
De la proposició anterior obtenim immediatament la invariància topològica de l'homologia singular.

2 H_0 i arc-connexió

Sigui X un espai topològic, i I l'interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Tenim un homeomorfisme $I \cong \Delta^1$, i per tant tot camí $\gamma : I \longrightarrow X$ defineix un 1-símplex singular de X.

Teorema 2.1. *Sigui X un espai topològic arc-connex no buit. Llavors $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostració. Definim el morfisme

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon S_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum \lambda_x[x] &\longmapsto \sum \lambda_x \end{aligned}$$

Clarament ε és exhaustiu, per tant és suficient provar que $\ker \varepsilon = B_0(X)$.

Si $\sigma \in S_1(X)$, aleshores $\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$, i per tant $\partial\sigma \in \ker\varepsilon$. Sigui $c = \sum \lambda_x x \in S_0(X)$ tal que $0 = \varepsilon(c) = \sum \lambda_x$. Fixem $x_0 \in X$. Com que X és arc-connex, per a tot $x \in X$, existeix una aplicació contínua $\gamma_x : I \longrightarrow X$ tal que $\gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x$. Per tant, $c = \sum \lambda_x x = \sum \lambda_x x - \sum \lambda_x x_0 = \sum \lambda_x (x - x_0) = \sum \lambda_x \partial\lambda_x = \partial(\sum \lambda_x \gamma_x) \in B_0(X)$. □

Obtenim els dos resultats següents:

Proposició 2.2. *Sigui X un espai topològic de components arc-connexes X_i, $i \in I$. Aleshores*

$$H_*(X) = \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i)$$

Corol·lari 2.3. *$H_0(X)$ és un grup abelià lliure de rang igual al cardinal del conjunt de components arc-connexes.*

3 H_1 i el grup fonamental

En aquesta secció veurem el teorema de Poincaré, que relaciona el grup fonamental d'un espai topològic i el seu primer grup d'homologia. Recordem que si X és un espai topològic i $x_0 \in X$, el grup fonamental de X en x_0, $\pi_1(X, x_0)$, té per elements les classes d'equivalència d'homotopia dels llaços $\gamma : I \longrightarrow X$ amb punt base x_0. Denotem per $\tilde{\gamma}$ la classe d'homotopia corresponent a γ.
Com que I és homeomorf a Δ^1, tot llaç γ es pot considerar com un 1-símplex singular. Si γ té punt base x_0, $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = 0$, i per tant γ és un cicle. La classe d'homologia de γ la denotarem $[\gamma]$.

Proposició 3.1. *Sigui X un espai topològic i x_0 un punt de X. Siguin γ, γ' llaços de X amb punt base x_0. Si γ i γ' són llaços homòtops, les cadenes singulars que representen són homòlogues.*

Aquesta proposició ens diu que l'aplicació $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$, donada per $\varphi(\tilde{\gamma}) = [\gamma]$, està ben definida. De fet, tenim el següent resultat:

Proposició 3.2. *Sigui X un espai topològic, i x_0 un punt de X. L'aplicació*

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$$

és un morfisme de grups.

Demostració. Siguin γ i γ' llaços de X amb punt base x_0. Provarem que existeix un 2-símplex singular σ de X tal que $\gamma\gamma' = \gamma + \gamma' + \partial\sigma$, i per tant $[\gamma\gamma'] = [\gamma] + [\gamma']$. Definim σ sobre el símples estàndard Δ^2 per

$$\sigma(\sum t_i e_i) = \begin{cases} \gamma(2t_2 + t_1), \text{ si } t_2 \leq t_0 \\ \gamma'(2t_2 + t_1 - 1), \text{ si } t_2 \geq t_0 \end{cases}$$

Per tant, sobre l'aresta $[e_0, e_1]$, σ és igual a γ, sobre $[e_1, e_2]$ és γ', i sobre $[e_0, e_2]$ és $\gamma\gamma'$. Per tant, $\partial\sigma = \gamma' - \gamma\gamma' + \gamma$, és a dir, $[\gamma\gamma'] = [\gamma] + [\gamma']$. □

A la demostració de la proposició anterior veiem que si tenim dos camins, no necessàriament tancats, γ i γ' amb $\gamma(1) = \gamma'(0)$, existeix un 2-símplex σ tal que $\gamma\gamma' - (\gamma + \gamma') = \partial\sigma$. Aquesta idea s'utilitza en la demostració del teorema de Poincaré.
Una diferència important entre $\pi_1(X, x_0)$ i $H_1(X)$ és que el primer no és necessàriament abelià, i el segon sempre ho és. Per tant, si $a,\ b \in \pi_1(X, x_0)$, el producte $aba^{-1}b^{-1}$ és del nucli de φ. En general, si G és un grup, el commutador de G és el subgrup generat per elements de la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Es denota $[G, G]$. No demostrarem el següent lema, que s'ha vist a l'assignatura d'estructures algebraiques.

Lema 3.3. *1. $[G, G]$ és un subgrup normal de G.*

2. $G/[G, G]$ és un grup abelià, que denotem per G_{ab}, i anomenem l'abelianitzat de G.

3. Si $f : G \longrightarrow H$ és un morfisme de grups i H és abelià, aleshores f factoritza a través de G_{ab}, és a dir, existeix un únic morfisme f_{ab} tal que $f = f_{ab} \circ \pi$, on π és el morfisme de pas al quocient.

Aleshores, per la tercera propietat, el morfisme φ factoritza per un morfisme

$$\varphi_{ab} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \longrightarrow H_1(X).$$

Teorema 3.4 (de Poincaré)**.** *Sigui X un espai topològic arc-connex. El morfisme de grups abelians φ_{ab} és un isomorfisme.*

Demostració. Demostrem primer l'exhaustivitat de φ (aquesta implica la de φ_{ab}. Sigui $[z] \in H_1(X)$. Podem escriure $z = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i$, per a cert $n_i \in \mathbb{Z}$ i $\alpha_i : I \longrightarrow X$ 1-símplex singulars. Com que z és un cicle,

$$\partial z = \sum_{i=1}^{r} n_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) = 0.$$

Com que X és arc-connex, per a cada x podem escollir un camí γ_x que uneixi x_0 amb x. Posem $\gamma_{i_j} = \gamma_{\alpha_i(j)}$, $j = 0, 1$. Aleshores, $0 = \sum_{i=1}^{r} n_i(\gamma_{i_1} - \gamma_{i_0})$. Per tant,

$$z = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} n_i(\gamma_{i_1} + \alpha_i - \gamma_{i_0}).$$

Definim $\beta_i = \gamma_{i_0}\alpha_i\gamma_{i_1}^{-1}$, que és un camí tancat amb punt base x_0, i conseqüentment defineix una classe en el grup fonamental. Aleshores

$$\varphi(\widetilde{\prod \beta_i^{n_i}}) = \sum n_i\varphi(\beta_i) = \Big[\sum n_i(\gamma_{i_1} + \alpha_i - \gamma_{i_0})\Big] = [z].$$

Per la injectivitat hem de veure que $\ker\varphi_{ab} = 0$. Això és equivalent a veure que $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \ker\varphi$. Una inclusió ja l'hem vist. Per a l'altra inclusió, sigui $\tilde{\gamma} \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{\gamma} \in \ker \varphi$. Per la definició de φ, γ és vora d'una 2-cadena $c = \sum n_i \sigma_i \in S_2(X)$. Les arestes dels símplexs σ_i les denotem

$$\alpha_{i_0} = \sigma_i(1,2),$$

$$\alpha_{i_1} = \sigma_i(0,2),$$

$$\alpha_{i_2} = \sigma_i(0,1).$$

Així, $\gamma = \partial c = \sum n_i \partial \sigma_i = \sum n_i(\alpha_{i_0} - \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2})$. Siguin γ_{i_m} camins de x_0 a $\sigma_i(m)$, $m = 0, 1, 2$. Definim

$$\beta_{i_0} = \gamma_{i_1} \alpha_{i_0} \gamma_{i_2}^{-1},$$

$$\beta_{i_1} = \gamma_{i_0} \alpha_{i_1} \gamma_{i_2}^{-1},$$

$$\beta_{i_2} = \gamma_{i_0} \alpha_{i_2} \gamma_{i_1}^{-1},$$

i siguin $\beta_i = \beta_{i_0} \beta_{i_1}^{-1} \beta_{i_2}$, per a $i = 0, 1, 2$. Tenim les següents equivalències homotòpiques:

$$\beta_i = \beta_{i_0} \beta_{i_1}^{-1} \beta_{i_2} \sim \gamma_{i_1} \alpha_{i_0} \alpha_{i_1}^{-1} \alpha_{i_2} \gamma_{i_1}^{-1} \sim x_0.$$

Per tant, en el grup fonamental de X, tindrem $\tilde{\beta} \coloneqq \widetilde{\prod \beta_i^{n_i}} = 1$. Per construcció de β_i, el camí β i el camí γ són iguals en $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. Però $\tilde{\beta} = 1$ en $\pi_1(X, x_0)$, i per tant $\tilde{\gamma} = 1$ en $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. □

Com a corol·lari del teorema de Poincaré obtenim:

Corol·lari 3.5. *Sigui X un espai topològic arc-connex. Si el grup fonamental de X és abelià, aleshores $\pi_1(X, x_0) \cong H_1(X)$.*

Aplicant aquest resultat trobem els següents grups d'homologia: per a $n \geq 1$,

$$H_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$$

$$H_1(\mathbb{S}^n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

4 El teorema d'invariància homotòpica

Dos espais topològics X, Y són del mateix tipus d'homotopia si existeixen aplicacions contínues $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow X$ tals que $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ i $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. En aquesta secció veurem diverses conseqüències del següent teorema, que implica la invariància homotòpica de l'homologia singular.

Teorema 4.1. *Siguin X i Y espais topològics, i f, $g : X \longrightarrow Y$ aplicacions contínues. Aleshores, si f és homòtopa a g,*

$$H_*(f) = H_*(g) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y).$$

Corol·lari 4.2. *Siguin X i Y espais topològics del mateix tipus d'homotopia. Aleshores els grups d'homologia singular de X i de Y són isomorfs.*

Demostració. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una equivalència homotòpica entre X i Y amb inversa homotòpica g. Llavors $g \circ f$ és homòtopa a la identitat en X. De la functorialitat de l'homologia i del teorema anterior es dedueix que $g_* f_* = \mathrm{id}_{H_*(X)}$. Anàlogament, $f_* g_* = \mathrm{id}_{H_*(Y)}$, i per tant obtenim un isomorfisme entre $H_*(X)$ i $H_*(Y)$. □

Vegem alguns exemples.

1. Sigui X un espai topològic contràctil. Del teorema que dona l'homologia singular d'un punt i del corol·lari anterior en resulta $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ i $H_p(X) = 0$, si $p > 0$. Aquest exemple s'aplica a espais com $\mathbb{R}^n$ o Δ^n.

   El recíproc de les igualtats anteriors no és cert: hi ha espais que no són contràctils, però que tenen l'homologia d'un espai contràctil.

2. Com que $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ és del tipus d'homotopia de $\mathbb{S}^n$, $H_p(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \cong H_p(\mathbb{S}^n)$. Encara no hem calculat els grups d'homologia de les esferes en general, però és possible que els veiem la propera sessió.