Análisis de Series de Tiempo

Sofía Villers Gómez
Carlos Fernando Vásquez Guerra
Luis Angel Ramirez Teodoro

Índice general

Prefacio

Primera edición del bookdown *Análisis de Series de Tiempo* para su uso en la materia Análisis de Supervivencia y Series de tiempo y sus relacionadas impartidas por los autores, así como para aquellos estudiantes que deseen adquirir el conocimiento pertinente de tal tópico.

Objetivos

- Otorgar un material electrónico de calidad con el contenido referente al Análisis de Series de Tiempo como un esfuerzo de los autores para lograr un proceso de aprendizaje autodidacta por parte del alumno y así optimizar el tiempo, tanto de los profesores, como el de los alumnos.
- Plasmar las bases teóricas de esta rama de la estadística con el uso de ejemplos y contenido visual para un mejor entendimiento de cada subtema que se trate.
- Dar continuidad al material para el curso *Análisis de Supervivencia y Series de Tiempo*.

Estructura

Este libro se compone de

Se recomienda que la consulta de los capítulos se realice de acuerdo al índice, ya que a medida que se avanza en índice, se asume el conocimiento de los capítulos previos.

Detalles técnicos

Para la creación de este material se hizo uso de varios sistemas de software como LaTeX y CSS para el diseño de ciertos elementos. Todos los cálculos y gráficas fue creado con el lenguaje de programación `R` ya sea con el uso del paquete `base` o algún otro de los paquetes que se mencionan a continuación.

```
R version 3.6.2 (2019-12-12)
Platform: x86_64-apple-darwin15.6.0 (64-bit)
Running under: macOS  10.16

Matrix products: default
BLAS:   /Library/Frameworks/R.framework/Versions/3.6/Resources/lib/libRblas.0.dylib
LAPACK: /Library/Frameworks/R.framework/Versions/3.6/Resources/lib/libRlapack.dylib

locale:
[1] en_US.UTF-8/en_US.UTF-8/en_US.UTF-8/C/en_US.UTF-8/en_US.UTF-8

attached base packages:
[1] stats     graphics  grDevices utils     datasets  methods   base

other attached packages:
 [1] TSA_1.2          forecast_8.11    kableExtra_1.2.1 knitr_1.30
 [5] latex2exp_0.4.0  patchwork_1.0.0  forcats_0.5.0    stringr_1.4.0
```

```
 [9] dplyr_1.0.1      purrr_0.3.4      readr_1.3.1      tidyr_1.1.0
[13] tibble_3.0.4     ggplot2_3.3.2    tidyverse_1.3.0

loaded via a namespace (and not attached):
 [1] tseries_0.10-47      httr_1.4.2           splines_3.6.2
 [4] jsonlite_1.7.2       viridisLite_0.3.0    modelr_0.1.6
 [7] assertthat_0.2.1     TTR_0.23-6           cellranger_1.1.0
[10] yaml_2.2.1           pillar_1.4.6         backports_1.2.0
[13] lattice_0.20-40      glue_1.4.2           quadprog_1.5-8
[16] digest_0.6.27        rvest_0.3.5          colorspace_1.4-1
[19] Matrix_1.2-18        htmltools_0.5.0.9003 timeDate_3043.102
[22] pkgconfig_2.0.3      broom_0.7.0          haven_2.2.0
[25] bookdown_0.21.6      scales_1.1.1         webshot_0.5.2
[28] mgcv_1.8-31          generics_0.0.2       ellipsis_0.3.1
[31] withr_2.3.0          urca_1.3-0           nnet_7.3-13
[34] cli_2.1.0            quantmod_0.4-15      magrittr_2.0.1
[37] crayon_1.3.4         readxl_1.3.1         evaluate_0.14
[40] fs_1.5.0             fansi_0.4.1          nlme_3.1-144
[43] xts_0.12-0           xml2_1.2.2           tools_3.6.2
[46] hms_0.5.3            lifecycle_0.2.0      locfit_1.5-9.1
[49] munsell_0.5.0        reprex_0.3.0         compiler_3.6.2
[52] rlang_0.4.10         grid_3.6.2           rstudioapi_0.12
[55] leaps_3.1            rmarkdown_2.6.4      gtable_0.3.0
[58] fracdiff_1.5-1       DBI_1.1.0            curl_4.3
[61] R6_2.5.0             zoo_1.8-7            lubridate_1.7.9
[64] stringi_1.5.3        parallel_3.6.2       Rcpp_1.0.5
[67] vctrs_0.3.4          dbplyr_1.4.2         tidyselect_1.1.0
[70] xfun_0.19            lmtest_0.9-37
```

Este libro fue escrito con bookdown usando RStudio.

Esta versión fue escrita con:

```
Finding R package dependencies ... Done!
```

```
 setting  value
 version  R version 3.6.2 (2019-12-12)
 os       macOS  10.16
 system   x86_64, darwin15.6.0
 ui       X11
 language (EN)
 collate  en_US.UTF-8
 ctype    en_US.UTF-8
 tz       America/Mexico_City
 date     2021-01-11
```

Licencia

Parte I

Un primer vistazo

Motivación

Sólo para recordar lo que se mencionaba en el primer material, nuestro objetivo en esta parte será responder preguntas como: *¿Cuál será el precio de las acciones de Facebook para el último bimestre del 2020?, ¿Cuál será el nivel de partículas contaminantes en la CDMX para noviembre de 2020?, ¿Cuál será la capacidad de un procesador intel para el año 2021?*, puede parecer, en primera instancia, una tarea complicada. Si bien no tenemos una "bola mágica" con la que podamos adivinar el futuro, disponemos de ciertos procesos estocásticos llamados *Series de Tiempo*, cuyo objetivo principal es el *pronóstico*.

Series de Tiempo

Una serie tiempo es una secuencia de observaciones, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y espaciados entre sí de manera uniforme (diario, semanal, semestral, anual, entre otros). Por esta razón, los datos usualmente son dependientes entre sí. El principal objetivo de una serie de tiempo (denotada por X_t, donde $t = 1, 2, ..., n$) es realizar una análisis de los datos para hacer pronóstico del comportamiento de la serie, asumiendo que mantendrá un comportamiento similar al observado.

Se pueden encontrar series de tiempo en diferentes campos de estudio, por ejemplo:

- Economía: Indices de precios mensuales, exportaciones totales mes a mes, tasa de interés semanal.
- Física: Nivel de precipitación diaria, temperatura diaria o mensual.
- Demografía: Tasa de natalidad, tasa de mortalidad, número de habitantes en cierta región.
- Marketing: Ventas diarias o mensuales de la compañía.

El análisis clásico de las series temporales se basa en la suposición de que los valores que toma la variable de observación es la consecuencia de tres componentes, cuya actuación conjunta da como resultado los valores medidos.

Los componentes de una serie de tiempo son:

1. **Tendencia**: La tendencia o tendencia a largo plazo de una serie es por lo común el resultado de factores a largo plazo. En términos intuitivos, la tendencia de una serie de tiempo caracteriza el patrón gradual y consistente de las variaciones de la propia serie, que se consideran consecuencias de fuerzas persistentes que afectan el crecimiento o la reducción de la misma, tales como: cambios en la población, en las características demográficas de la misma, cambios en los ingresos, en la salud, en el nivel de educación y tecnología. Las tendencias a largo plazo se ajustan a diversos esquemas. Algunas se mueven continuamente hacía arriba, otras declinan, y otras más permanecen igual en un cierto período o intervalo de tiempo.

2. **Estacionalidad**: El componente de la serie de tiempo que representa la variabilidad en los datos debida a influencias de las estaciones, se llama componente estacional. Esta variación corresponde a los movimientos de la serie que recurren año tras año en los mismos meses (o en los mismos trimestres) del año poco más o menos con la misma intensidad. Por ejemplo: Un fabricante de albercas inflables espera poca actividad de ventas durante los meses de otoño e invierno y tiene ventas máximas en los de primavera y verano, mientras que los fabricantes de equipo para la nieve y ropa de abrigo esperan un comportamiento anual opuesto al del fabricante de albercas.

3. **Componente aleatoria**: Esta se debe a factores a corto plazo, imprevisibles y no recurrentes que afectan a la serie de tiempo. Como este componente explica la variabilidad aleatoria de la serie, es impredecible, es decir, no se puede esperar predecir su impacto sobre la serie de tiempo. Existen dos tipos de variación irregular:
   a) Las variaciones que son provocadas por acontecimientos especiales, fácilmente identificables, como las elecciones, inundaciones, huelgas, terremotos.
   b) Variaciones aleatorias o por casualidad, cuyas causas no se pueden señalar en forma exacta, pero que tienden a equilibrarse a la larga.

Se puede observar que de los tres componentes, los dos primeros son determinísticos, mientas que la última es aleatoria. Entonces la serie se tiempo se puede expresar como:

$$X_t = T_t + E_t + I_t$$

donde T_t es el componente de **tendencia**, E_t el componente de **estacionalidad** y I_t la componente **aleatoria**.

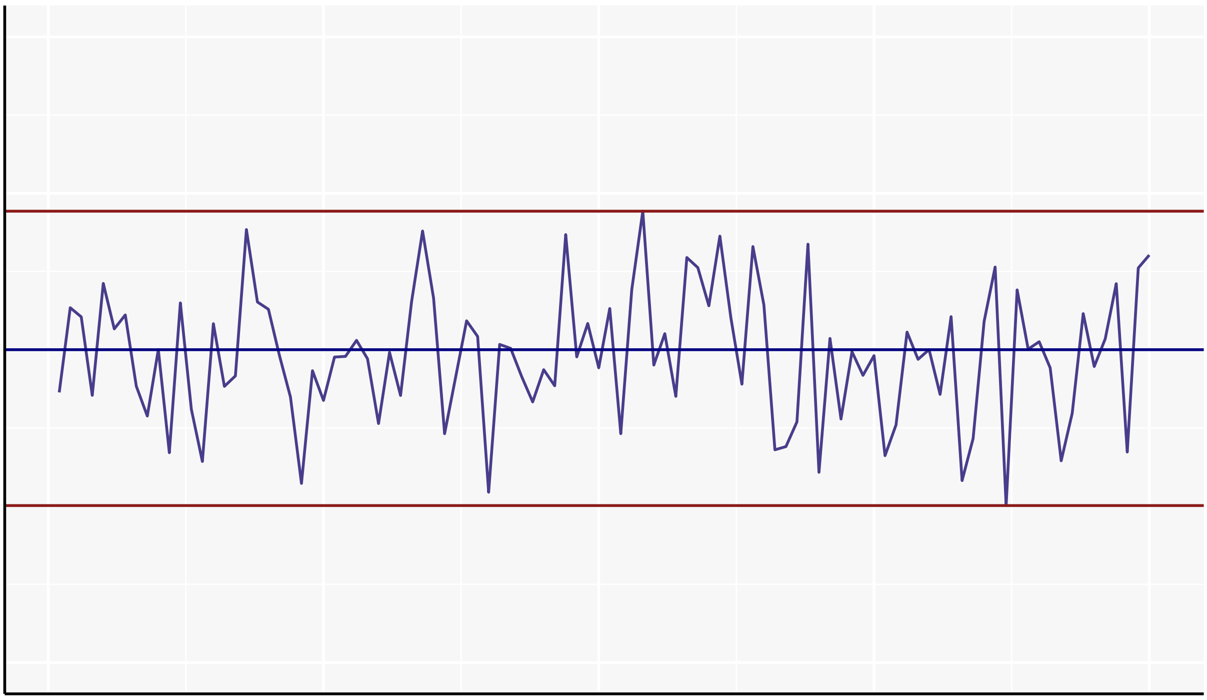
Según las características de las series de tiempo estas pueden clasificarse en:

Estacionarias: Una serie de tiempo estacionaria es estable a lo largo del tiempo, es decir su media, varianza y **autocovarianza** (en diferentes rezagos o diferentes tiempos) son constantes en el tiempo.

Es decir que sin importar el momento en que se midan (invariantes respecto al tiempo) se debe cumplir lo siguiente:

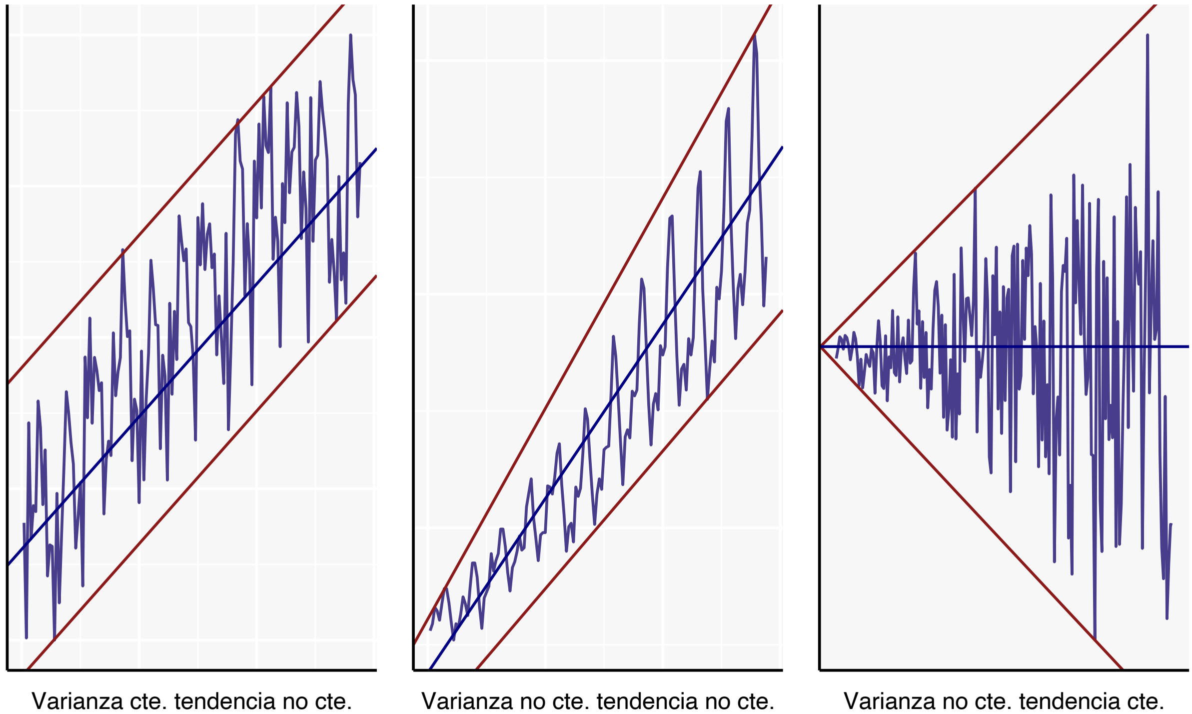
- Media: $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_{t+k}) = \mu$
- Varianza: $Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \sigma^2$
- Covarianza: $\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$

Aquí se muestra un ejemplo en el cual la varianza no cambia a lo largo del tiempo y la media permanece constante

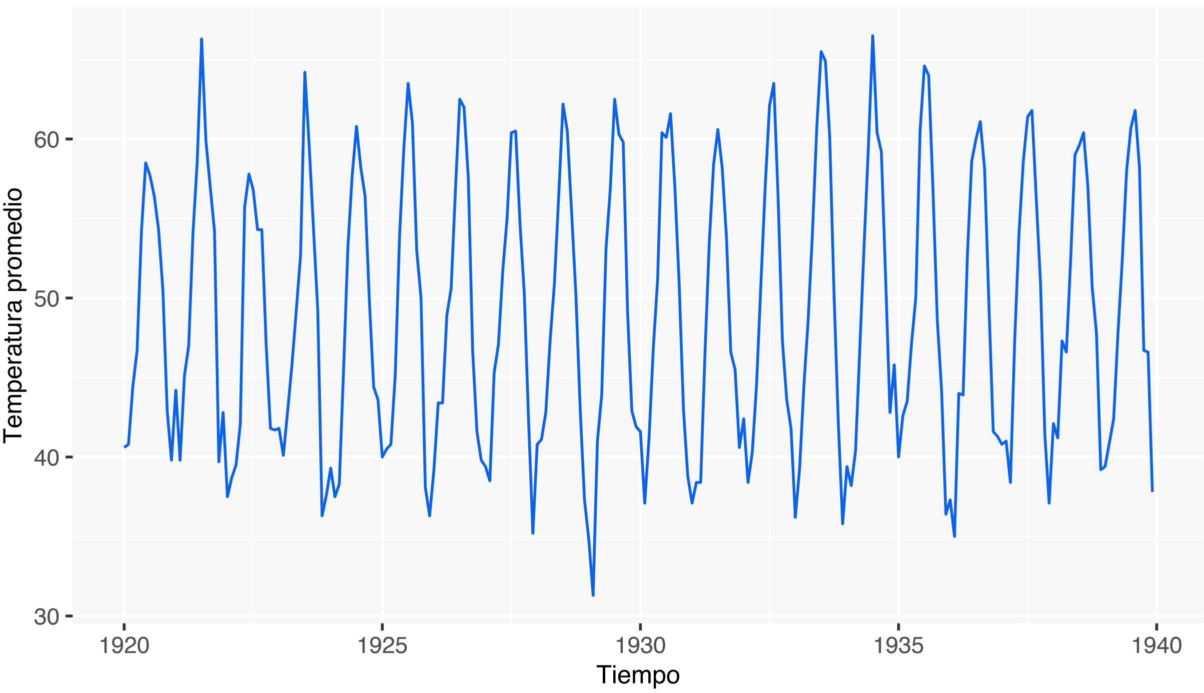


Varianza cte. tendencia cte.

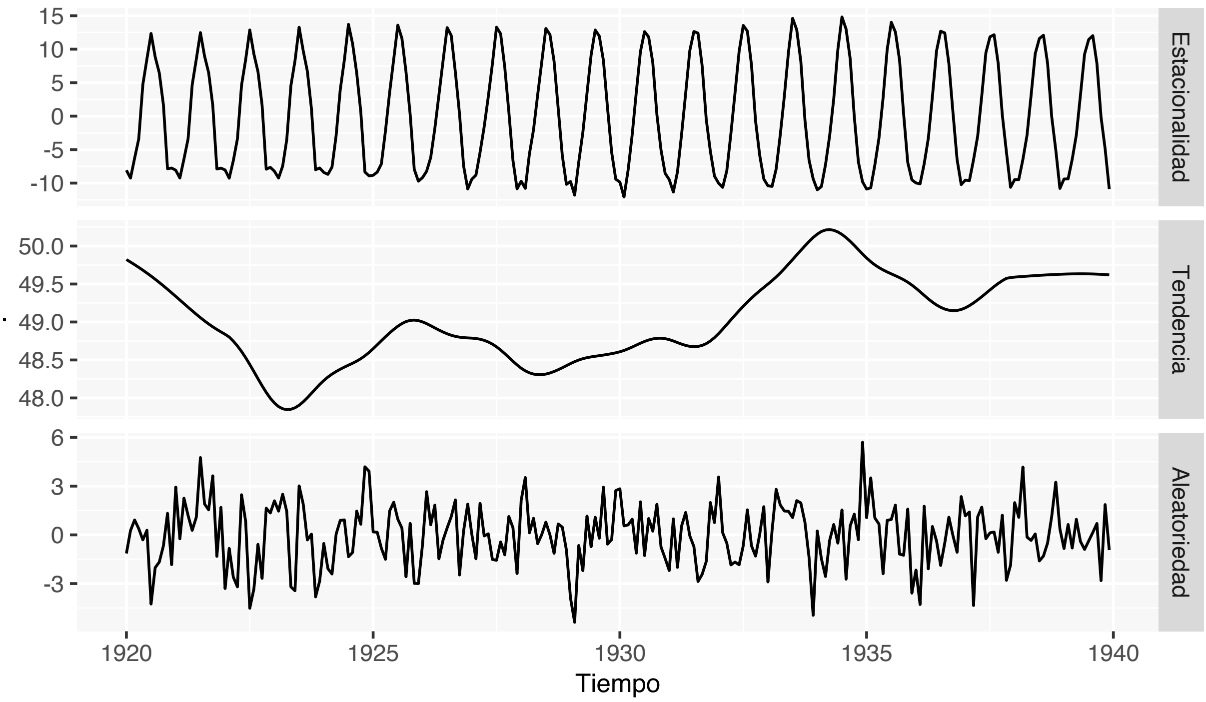
No estacionaria: Son series en las cuales la tendencia y/o variabilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante. Existen muchos casos en este tipo de series, aquí se muestran algunos ejemplos.



Las siguientes gráficas son sólo otro ejemplo basado en el conjunto de datos `nottem`, en el cual se tienen las temperaturas mensuales promedio en Nottingham entre 1920 y 1939. Esta serie de tiempo tiene el siguiente comportamiento a través de los años.



Las siguientes gráficas representan las componentes antes mencionadas de esta serie de tiempo.


15
10
5
0
-5
-10
Estacionalidad
50.0
49.5
49.0
48.5
48.0
Tendencia
6
3
0
-3
Aleatoriedad
1920
1925
1930
1935
1940
Tiempo

Capítulo 1

Procesos estocásticos

La palabra estocástico, que tiene origen Griego, era usada bajo el significado de *perteneciente al azar*. En ese sentido un proceso estocástico se define como un conjunto de variables aleatorias ordenadas según el tiempo (o el espacio que corresponda), el cual puede ser continuo o discreto. Se denota la variable aleatoria en el tiempo t por $X(t)$ o X_t con $-\infty < t < \infty$ en caso de ser continua o bien $t = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ en caso de ser discreta.

Como un ejemplo de proceso estocástico tenemos, el número de personas que esperan en una fila en el instante t del tiempo.

1.1. Proceso estocástico estacionario

Al trabajar con series de tiempo el escenario ideal sería trabajar con series que posean la característica de tener la media y la autocovarianza constantes a lo largo del tiempo, es decir, que sus valores oscilen dentro de un rango de valores y no muestren tendencia clara, creciente o decreciente, teóricamente conocidos como procesos estacionarios. Para definir un proceso estocástico como un proceso estacionario es sumamente necesario conocer la función de densidad conjunta de las variables aleatorias que conforman el proceso, no obstante, en la práctica no es común que se logre. Es por esto por lo que los procesos estacionarios se pueden definir de la siguiente forma:

- **Procesos estrictamente estacionarios:** Se dice que un proceso $X_t, t \in Z$ es estrictamente estacionario, si sus funciones de densidad para un conjunto arbitrario de variables $X_t, X_{t+1}, ..., X_{t+m}$ son invariantes respecto a desplazamientos en el tiempo, es decir, que cumplen:

$$f(X_t, X_{t+1}, ..., X_{t+m}) = f(X_{t+k}, X_{t+k+1}, ..., X_{t+k+m}) \quad \forall t, m, k \in Z$$

- **Procesos débilmente estacionarios:** Un proceso $X_t, t \in Z$ se dice que es débilmente estacionario de orden k si los primeros k momentos son invariantes a través del tiempo. Podemos definir un proceso débilmente estacionario de segundo orden si cumple lo siguiente:

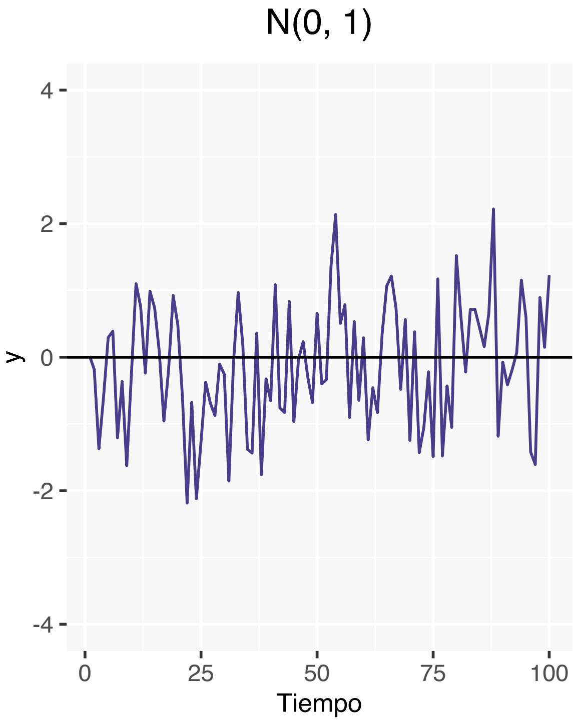
  1. $E\left[|X_t|^2\right] < \infty \forall t \in Z$
  2. $E[X_t] = \mu \ \ \forall t \in Z$, lo cual quiere decir que las esperanzas de las variables aleatorias son independientes del tiempo por lo cual permanecen constantes.
  3. $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+m}, X_{s+m}) \forall t, s, m \in Z$, es decir las covarianzas de dos variables aleatorias del proceso que se encuentran en distintos puntos del tiempo dependen solamente del lapso transcurrido entre cada una de ellas.

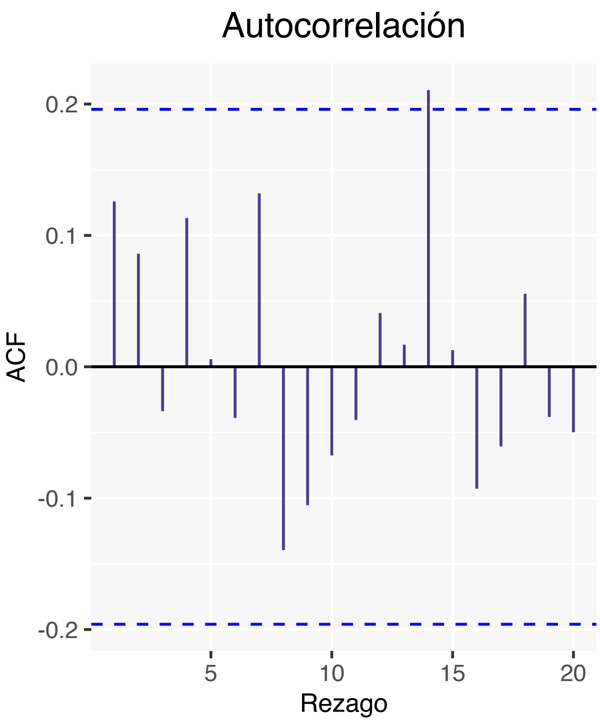
En resumen, si una serie es estacionaria, su media, su varianza y su autocovarianza (en diferentes rezagos) permanecen iguales sin importar el momento en el cual se midan; es decir, son invariantes respecto al tiempo.

1.2. Ruido blanco ("white noise")

Un ruido blanco es un caso simple de los procesos estocásticos, donde los valores son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo con media cero e igual varianza, se denota por ϵ_t.

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$
$$Cov(\epsilon_{t_i}, \epsilon_{t_j}) = 0 \forall t_i \neq t_j$$

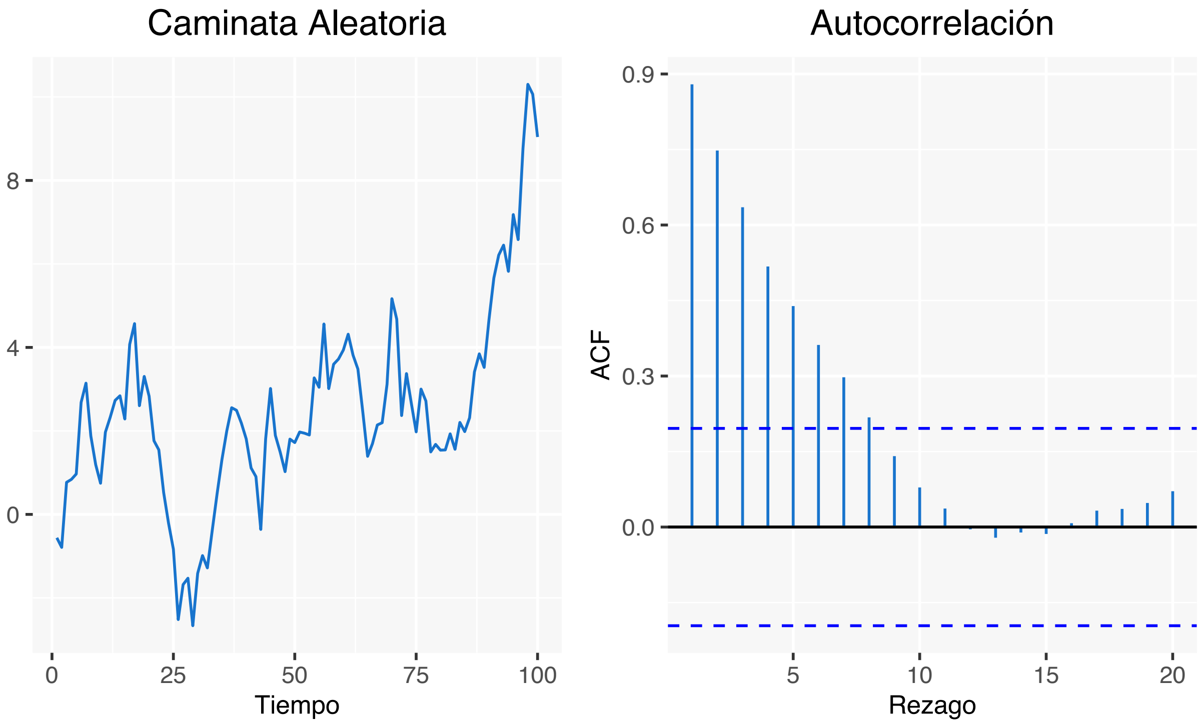




La segunda gráfica lleva el nombre de **correlograma**, la cual esta creada con los valores de autocorrelación, los cuales se ven en el siguiente capítulo.

1.3. Caminata aleatoria

Es un proceso estocástico X_t donde la primera diferencia de este proceso es un ruido blanco: $\nabla X_t = \epsilon_t$



La anterior gráfica esta basada en 100 simulaciones de una normal estándar bajo con una semilla en 123.

1.3.1. Ejercicio

Reproducir la caminata aleatoria y ver ¿qué sucede al aumentar el número de simulaciones ($n = 1000$)? ¿Por qué sucede este nuevo comportamiento?

Capítulo 2

Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Como se mencionó en el apartado anterior, tenemos que para un proceso estacionario X_t, su esperanza es $E[X_t] = \mu$ y su varianza $Var[X_t] = E[X_t - \mu]^2 = \sigma^2$ las cuales son constantes; así como las covarianzas $Cov(X_t, X_s)$, que son funciones que solamente dependen del tiempo que transcurre entre t y s; entonces en este caso podemos escribir la **covarianza** entre X_t y X_{t+k} como:

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)$$

Y su **correlación** como:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

donde, $Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \gamma_0$.

También conocida como la **función de autocorrelación (ACF)**, la cual es una medida de la relación para los valores de la serie respecto a los valores de esta misma, observados $k - t$ unidades de tiempo.

La función de autocorrelación tiene las siguientes propiedades:

- $\rho_0 = 1$
- $-1 \leq \rho_j \leq 1$
- $\rho_j = \rho_{-j}$

En general, se utiliza la función de autocorrelación muestral r_k, la cual queda determinada por la siguiente expresión

$$r_k = \frac{\sum\limits_{t=k+1}^{n} (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum\limits_{t=1}^{n} (X_t - \bar{X})^2}$$

Para $k = 1, 2, \ldots$ y donde $\bar{X}$ es la media de las observaciones.

2.1. Función de autocorrelación parcial

La función de correlación parcial estima la correlación entre una observación k tiempos después de la observación actual removiendo los efectos de las correlaciones de las observaciones intermedias; es decir:

$$\pi_j = corr(X_j, X_{j-k} | X_{j-1}, X_{j-2}, ...X_{j-k-1})$$

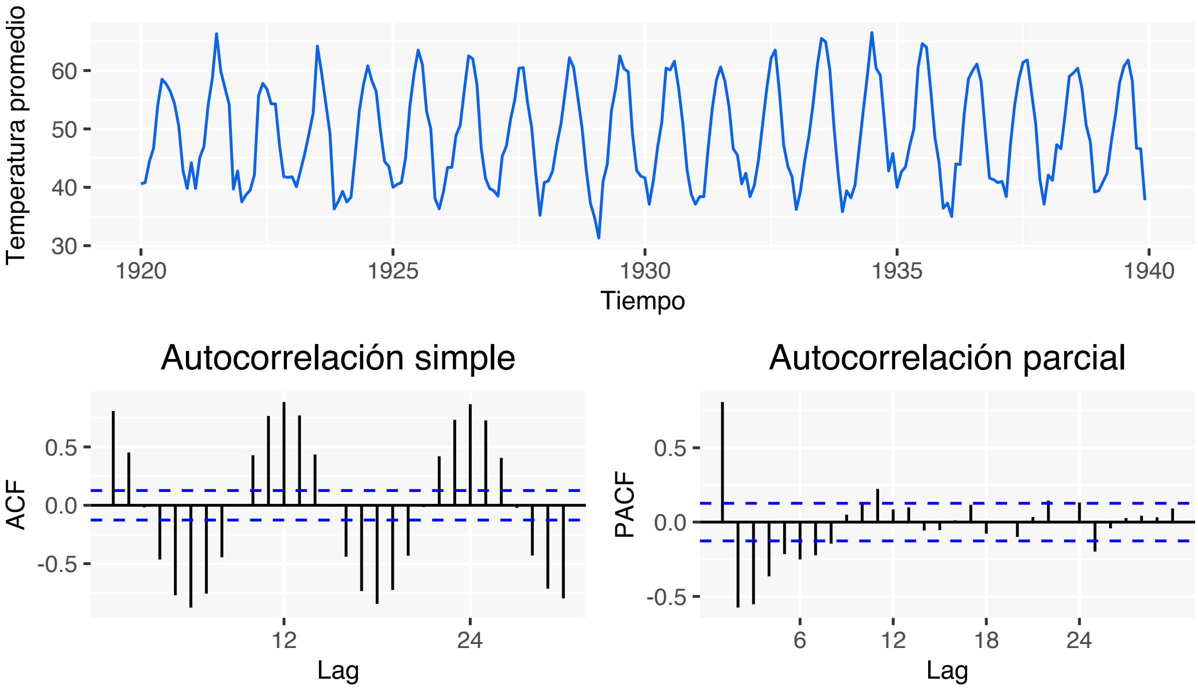
Para este caso, el estimador apropiado es la función de autocorrelación parcial muestral Cryer and Chan (2008), el cual puede obtenerse utilizando r_k para la siguiente expresión recursiva.

$$\pi_j = \frac{\rho_j - \sum_{k=1}^{j-1} \pi_{j-1,k}\rho_{j-k}}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} \pi_{j-1,k}\rho_k}$$

donde $\pi_{j,k} = \pi_{j-1,k} - \pi_j \pi_{j-1,j-k}$ para $k = 1, 2, \ldots, j-1$.

2.2. Correlograma

Una vez calculadas las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, se grafican contra los diferentes rezagos para obtener los correlogramas. Estos son serán de gran utilidad para la identificación del modelo, tal como se menciona en el capítulo 10 y en el complemento a este material SeriesTCode. Como ejemplo, se presentan los gráficos correspondientes a los datos de `nottem`.



2.3. Prueba de Ljung-Box

Esta prueba permite probar en forma conjunta que todos los coeficientes de autocorrelación son simultáneamente iguales a cero. La prueba está definida como

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \sim \chi^2_{(m)}$$

donde n es el tamaño de la muestra, m la longitud del rezago.

Las hipótesis de esta prueba son:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{Los coeficientes de autocorrelación son simultáneamente iguales a cero} \\ H_1 &: \text{Alguno de los coeficientes de autocorrelación es distinto de cero} \end{aligned}$$

Entonces si LB excede el valor crítico de la tabla Ji cuadrada al nivel de significancia seleccionado, no se acepta la hipótesis de que todos los coeficientes de autocorrelación son iguales a cero, por lo tanto al menos algunos de ellos deben ser diferentes de cero[1].

[1]Originalmente la prueba esta diseñada para comprobar estadísticamente si las observaciones son independientes entre sí, bajo esta hipótesis, los coeficientes de correlación serán cero y el estadístico LB será cercano a cero. Esta prueba es de gran ayuda para ver la calidad del modelo que se aplique y para validar las hipótesis que se puedan requerir en la construcción de intervalos de predicción. Se hablará más de su uso en el capítulo 10.

Capítulo 3

Transformaciones

La mayoría de las series de tiempo no son débilmente estacionarias, es decir que no muestran una media ni una varianza constantes a lo largo del tiempo y pueden mostrar tendencias crecientes o bien, decrecientes. Para poder trabajar con este tipo de series de una forma más sencilla y manejable, existen métodos para transformarlas y verlas como realizaciones de una serie de tiempo débilmente estacionaria. Las transformaciones más comunes son el suavizamiento a través de medias móviles o ajustando polinomios a la serie en cuestión, la diferenciación.

3.1. Suavizamiento por medias móviles

Se mencionó que las series de tiempo se pueden ver como la suma de tres componentes: una tendencia, una estacionalidad y una componente aleatorio o irregular. Ahora bien, en este método de suavizamiento el objetivo es estimar y extraer **la tendencia** (T_t) del modelo. Lo anterior se puede realizar estimando la tendencia con:

$$\hat{T}_t = (2q+1)^{-1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t-j}, q+1 \leq t \leq n-q$$

Este es uno de mucho filtros lineales que podrían aplicarse ($\hat{T}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}$). Obsérvese que para valores grandes de q, $(2q+1)^{-1} \sum_{j=-q}^{q} [X_{t-j} - \hat{T}_t] \approx 0$, lo cual no sólo atenua el ruido, también permite que la tendencia lineal $T_t = c_0 + c_1 t$ pase sin distorsión. Sin embargo hay que tener cuidado en la selección de q, ya que valores muy grandes, si T_t no es lineal, entonces se suavizará la serie pero la estimación de la tendencia será mala.

3.2. Suavizamiento por polinomios ajustados

En este método de suavizamiento el objetivo es estimar y extraer la **tendencia** (T_t) y la **estacionalidad** (E_t) del modelo. Si $E_t = 0$, se tiene un caso de no estacionariedad simple, por lo que el proceso tiene un comportamiento estacionario alrededor de la tendencia y para estimar T_t se supone que tiene la siguiente forma:

$$T_t = a_0 + a_1 + ... + a_p t^p$$

Si se tiene $p = 1$ la tendencia es lineal, si $p = 2$ la tendencia es cuadrática.

Los parámetros a_i se estiman mediante mínimos cuadrados ordinarios, es decir que minimicen $\sum_{i=1}^{n} (x_i - T_i)^2$.

3.3. Diferencias de Box-Jenkins

Consiste en aplicar diferencias a la serie de tiempo estudiada hasta que las observaciones se perciban como componentes de una serie débilmente estacionaria. Se debe comprender los siguientes operadores para el método:

El **operador de retraso** se denota con una letra B o $\mathcal{L}$ y se define como el valor retrasado de una serie de tiempo temporal indicado por el exponente del operador. De manera particular se tiene $BX_t = X_{t-1}$, por lo que si se aplica varias veces el operador, la serie se retardaría k-unidades temporales:

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

En particular $B^0 X_t = X_t$. Se puede utilizar con notación polinómica:

$$\phi(B)X_t = \left(\phi_0 + \phi_1 B + \phi_2 B^2\right) X_t = \phi_0 X_t + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}$$

El **operador diferencia** se expresa con ∇ y se define como la diferencia entre el valor al periodo t y valor rezagado k periodos $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$.

Ambos operadores se relacionan de la siguiente manera:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = Z_t - BZ_t = (1-B)Z_t$$

Teniendo que $\nabla = (1-B)$ Si aplicamos el operador diferencia sucesivamente entonces se obtiene:

$$\nabla^k = (1-B)^k; \quad \nabla^k X_t = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{k!(k-1)!}(-1)^k X_{t-k}$$

Parte II

Procesos lineales estacionarios

Capítulo 4

$AR(p)$: Proceso Autoregresivo

Los modelos autoregresivos se basan en la idea de que el valor actual de la serie X_t, puede explicarse en función de p valores pasados $X_{t-1}, X_{t-2}, ...X_{t-p}$, donde p determina el número de rezagos necesarios para pronosticar un valor actual.

El modelo autoregresivo de orden p está dado por:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

Expresado en términos del operador de retardos

$$X_t - \phi_0 - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - ... - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t - \phi_0 + (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - ... - \phi_p B^p) X_t = \epsilon_t \phi_p(B) X_t = \epsilon_t + \phi_0$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco y $\phi_0, \phi_1, \phi_2, ...\phi_p$ son parámetros del modelo.

4.1. Proceso Autoregresivo de orden 1: $AR(1)$

En los procesos $AR(1)$ la variable X_t está determinada únicamente por el valor pasado, esto es X_{t-1}.

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Donde ϵ_t es un ruido blanco con media 0 y con varianza σ^2 e independiente de X_t. Para verificar que sea estacionario (débilmente) se debe verificar la estacionalidad en media y covarianza.

4.1.1. Estacionario en Media

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t) = \phi_0 + \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t) \\ &= \phi_0 + \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) \end{aligned}$$

Para que X_t sea estacionario en la media se debe cumplir que $E(X_t) = E(X_{t-1})$

Entonces:

$$(1 - \phi_1)\mathbb{E}(X_t) = \phi_0 \implies E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

por lo tanto $E(X_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ y $\phi_1 \neq 1$.

4.1.2. Estacionario en Covarianza

Para que $AR(1)$ sea estacionario, la varianza tiene que ser constante y finita en el tiempo.

$$\begin{aligned}
\gamma_0 = Var(X_t) &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t - \phi_0 - \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \epsilon_t)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))^2 + 2\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\epsilon_t + \epsilon_t^2\right] \\
&= \phi^2 \mathbb{E}\left[(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))^2\right] + 2\phi_1 \mathbb{E}\left[X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})\right]\mathbb{E}(\epsilon_t) + \mathbb{E}[\epsilon_t^2] \\
&= \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + \sigma^2
\end{aligned}$$

Buscamos que X_t sea estacionario en la varianza, por lo que bajo el supuesto de proceso estacionario:

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow Var(X_t) = Var(X_{t-1}) \\
&\Longrightarrow Var(X_t) = \gamma_0 = \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + \sigma^2 \\
&\Longrightarrow \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 \Longrightarrow (1 - \phi_1^2)\gamma_0 = \sigma^2 \\
&\Longrightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}$$

Véase que para que sea estacionario, con varianza constante y finita es necesario que $|\phi_1| < 1$. En resumen

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Respecto a la covarianza $Cov(X_t, X_{t-k})$ para $K = 1, ...$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \epsilon_t)(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))\right] + \mathbb{E}\left[\epsilon_t(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))\right] \\
&= \phi_1 \mathbb{E}\left[(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))\right] = \phi_1 \gamma_{k-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Entonces:} \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 \phi \\ \gamma_2 &= \gamma_1 \phi \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\therefore AR(1)$ es estacionario en covarianza si $|\phi_1| < 1$ y la **función de covarianza** será:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

Los **coeficientes de correlación** quedan determinados por la siguiente expresión:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1 \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1}$$

Por lo que la **función de autocorrelación** para $AR(1)$ es :

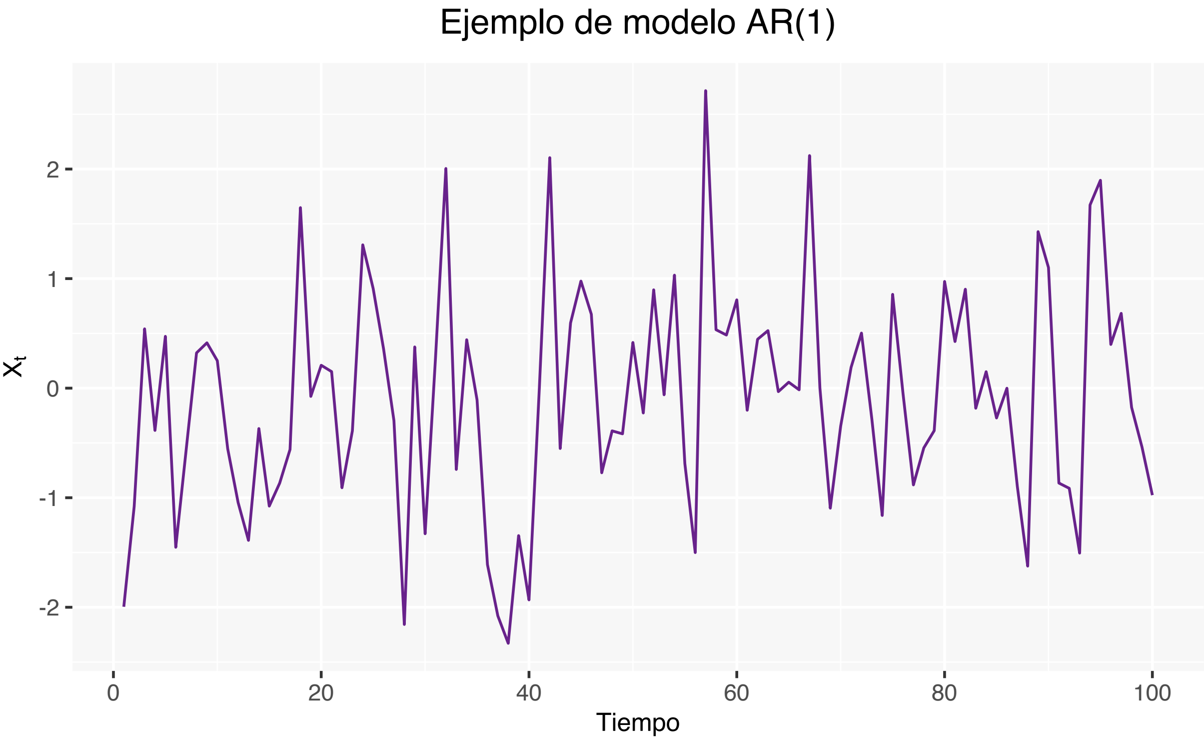
$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi \rho_{k-1} & k \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi_1 \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_o} & k \geq 1 \end{cases}$$

Observemos que para el modelo $AR(1)$, la función de autocorrelación es exponencial

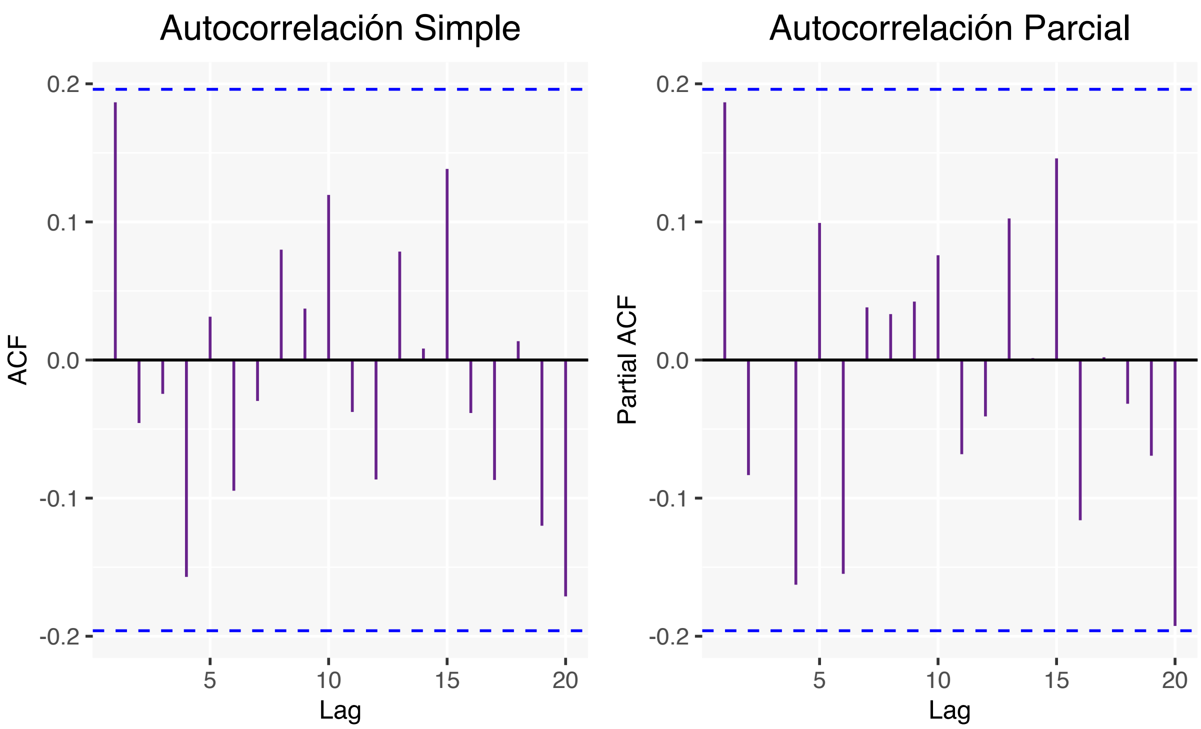
$$\begin{aligned} &\rho_0 = 0 \\ &\rho_1 = \phi_1 \rho_o = \phi_1 \\ &\rho_2 = \phi_1 \rho_1 = \phi_1^2 \implies \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi_1^2 & k \geq 1 \end{cases} \\ &\quad \vdots \\ &\rho_k = \phi_1^k \end{aligned}$$

- Caso particular: $AR(1) : X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$, es decir que $\phi_0 = 0$. Para este caso se tiene $\mathbb{E}(X_t) = \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) \implies (1 - \phi_1)\mathbb{E}(X_t) = 0 \implies \mathbb{E}(X_t) = \frac{0}{(1-\phi_1)} = 0$.

A continuación se muestran los resultados para un modelo $AR(1)$ de la siguiente forma $X_t = 0.35X_{t-1} + \epsilon_t$



Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.



4.2. Proceso Autoregresivo de orden 2: $AR(2)$

En los procesos $AR(2)$ la variable X_t está determinada por el valor pasado y el anterior a este.

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

Donde ϵ_t es un ruido blanco (media cero y varianza σ^2). Asumiendo estacionariedad débil, se tiene que la media y la varianza del proceso serán las siguientes.

4.2.1. Estacionario en Media

Bajo el supuesto de estacionalidad:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_{t-1}) = \mathbb{E}(X_{t-2}) \\
\Longrightarrow\ &(1-\phi_1-\phi_2)\mathbb{E}(X_t) = \phi_0 \\
\Longrightarrow\ &\mathbb{E}(X_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ Para que sea estacionario, se tiene que cumplir que $1-\phi_1-\phi_2 \neq 0$.

4.2.2. Estacionario en Covarianza

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t - \phi_0 - \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}) - \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \phi_2(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \epsilon_0)^2\right] \\
&= \mathbb{E}[\phi_1^2(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))^2 + 2\phi_1\phi_2(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) \\
&\qquad + \phi_2^2(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))^2 + \epsilon_0^2 + \cdots] \\
&= \phi_1^2\gamma_0 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \phi_2^2\gamma_0 + \sigma^2
\end{aligned}$$

Pero, véase lo siguiente

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \phi_2(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \epsilon_t)(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-2}))^2 + \phi_2(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \epsilon_t(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right] \\
&= \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \\
\implies \gamma_1 &= \frac{\phi_1}{(1-\phi_2)}\gamma_0 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1
\end{aligned}$$

En general la autocovarianza de orden k, para $k > 1$ será:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t)(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \phi_2(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \epsilon_t)(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k})\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{[\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))][(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))]\right\} + \mathbb{E}\left\{[\phi_2(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))][(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))]\right\} \\
&= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}
\end{aligned}$$

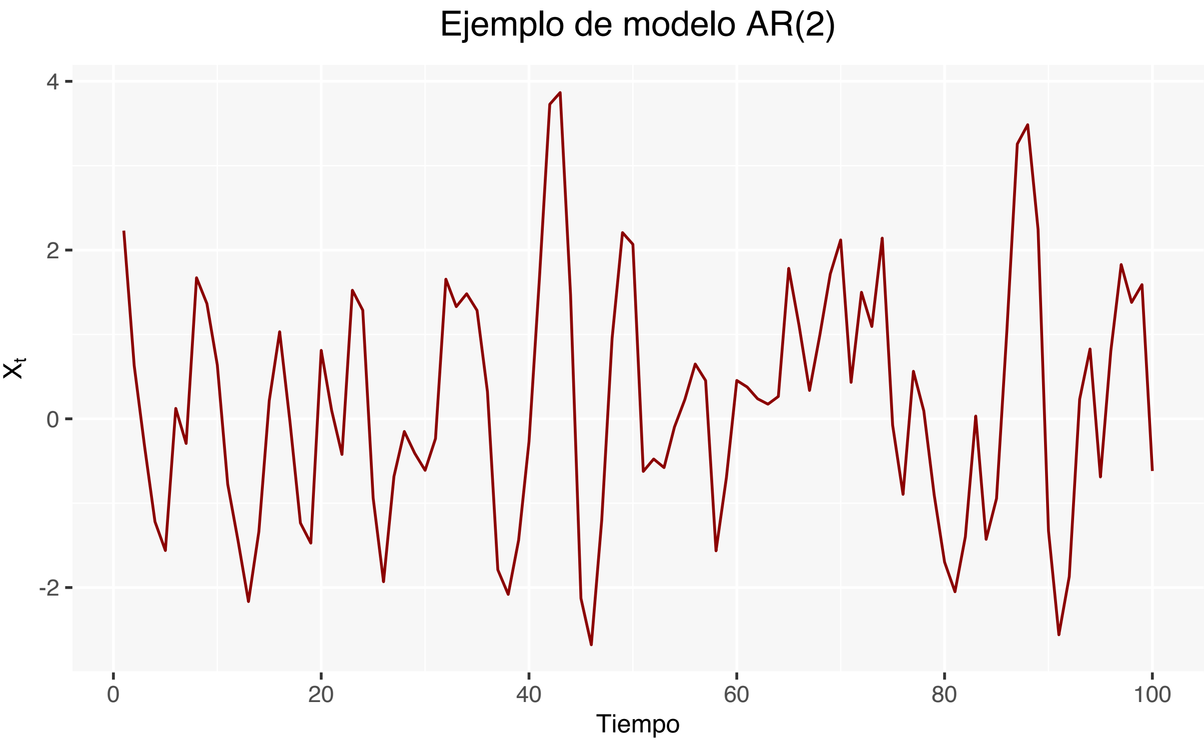
Entonces la **función de autocovarianza** de un modelo $AR(2)$ es la siguiente

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_0 & \text{si} \quad k = 0 \\ \gamma_1 & \text{si} \quad k = 1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} & \text{si} \quad k > 1 \end{cases}$$

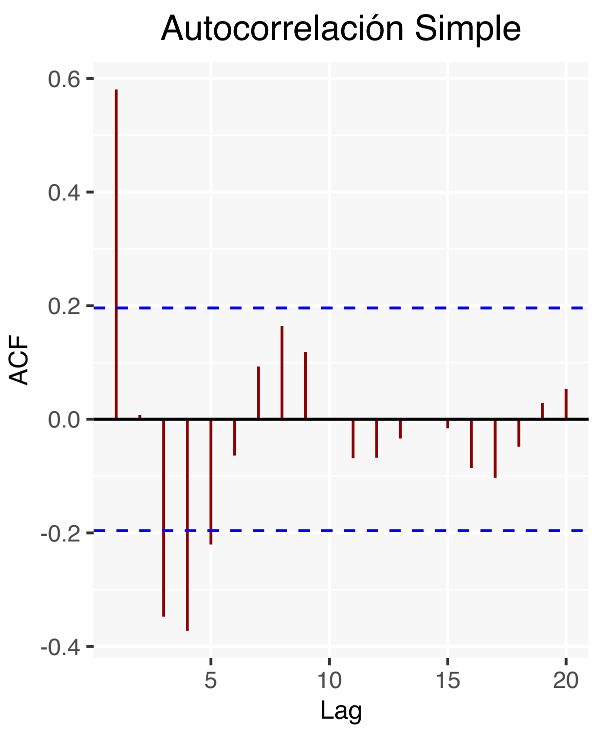
Y la correspondiente **función de autocorrelación** de un modelo $AR(2)$ es:

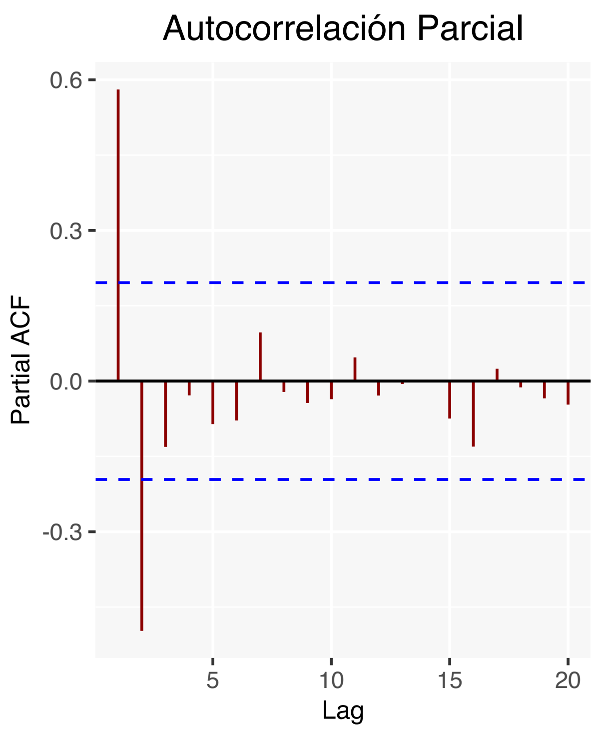
$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & \text{si} \quad k = 1 \\ \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} & \text{si} \quad k > 1 \end{cases}$$

A continuación se da un ejemplo de un modelo $AR(2)$ de la siguiente forma $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + \epsilon_t$



Y al igual que para el ejemplo del modelo $AR(1)$, se agregan las gráficas de autocorrelación simple y parcial.





Algo interesante de tener los procesos en términos de operadores de retardos es que podemos obtener las condiciones de estacionariedad en AR por las raíces del polinomio que se deriva de esta notación:

$$
\begin{aligned}
AR(1) :& X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t \\
&\Longrightarrow (1 - \phi_1 B) X_t = \epsilon_t \\
&\Longrightarrow B = \frac{1}{\phi_1} \Longrightarrow |\phi_1| < 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} AR(2): & X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t \\ \implies & (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = \epsilon_t \end{aligned}$$

Por lo que las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$ serán $B^1, B^2 = \frac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}$.

Y gracias a todo esto, podemos interpretar que para que los procesos sean estacionarios, se solicita que las raíces estén fuera del círculo unitario, es decir: $|B^1| > 1$ y $|B^2| > 1$.

Capítulo 5

$MA(q)$: Proceso de Medias Móviles

Estos modelos se puede decir son determinados por una fuente externa, además de que suponen linealidad. Es decir que el valor actual de la serie X_t esta influenciado por los valores de la fuente externa.

El modelo de medias móviles de orden q está dado por:

$$MA(q) : X_t - \mu = \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2} - ... - \theta_q\epsilon_{t-q}$$

Expresado en términos del operador de retardos

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q)\epsilon_t \\ &= \mu + \theta_q(B)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco, $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ son los parámetros del modelo.

Antes de continuar, véase que es posible escribir un modelo AR con un MA. Supongamos un modelo $AR(2)$, en el cual se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &AR(2) : X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t \\ &\implies \phi(B)X_t = (1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2)X_t = \phi_0 + \epsilon \\ &\therefore X_t = \tfrac{\phi_0}{\phi(B)} + \tfrac{\epsilon_t}{\phi(B)} = \mu + (1 - \psi_1 B^1 - \psi_2 B^2 - \cdots)\epsilon_t \end{aligned}$$

Sin olvidar que las condiciones de estacionalidad para un proceso $AR(1)$ y $AR(2)$ son $|\phi_1| < 1$ y $|1 - \phi_1 - \phi_2| > 0$ respectivamente.

5.1. Proceso de Medias Móviles de orden 1: $MA(1)$

Este modelo determina el valor de X_t en función de la innovación actual y su primer retardo, es decir:

$$\begin{aligned} &X_t = \theta_0 - \theta_1\epsilon_{t-1} - \epsilon_t = \mu - \theta_1\epsilon_{t-1} - \epsilon_t \\ \implies &X_t = \mu - (1 + \theta_1 B)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco y θ es el parámetro. Además, véase que

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu - \theta_1\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) - \mathbb{E}(\epsilon_t) = \mu$$

Por lo que este proceso ya es estacionario en su media. Sólo resta estudiar el caso para la covarianza. Asumiendo estacionariedad débil, se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\mu - \theta_1\epsilon_{t-1} - \epsilon_t - \mu)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\theta_1^2\epsilon_{t-1}^2 + 2\theta_1\epsilon_{t-1}\epsilon_t + \epsilon_t^2\right] \\
&= \theta_1^2\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= (1+\theta_1^2)\sigma^2 \\
\\
\gamma_1 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(-\epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1})(-\epsilon_{t-1} - \theta_1\epsilon_{t-2})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\epsilon_t\epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_t\epsilon_{t-2} + \theta_1\epsilon_{t-1}^2 + \theta_1^2\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}\right] \\
&= \theta_1\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-1}^2\right] \\
&= \theta_1\sigma^2 \\
\\
\gamma_2 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))\right] = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

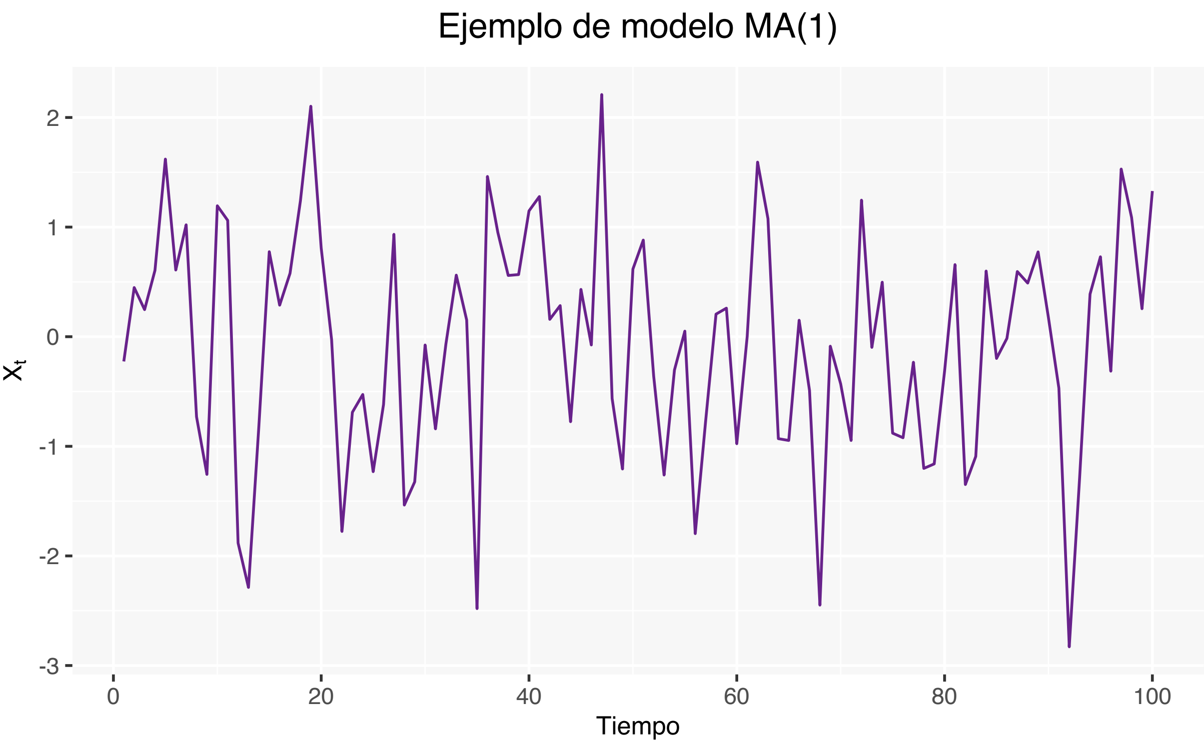
Entonces la **función de autocovarianza** de un modelo $MA(1)$ es:

$$
\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ \theta_1\sigma^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}
$$

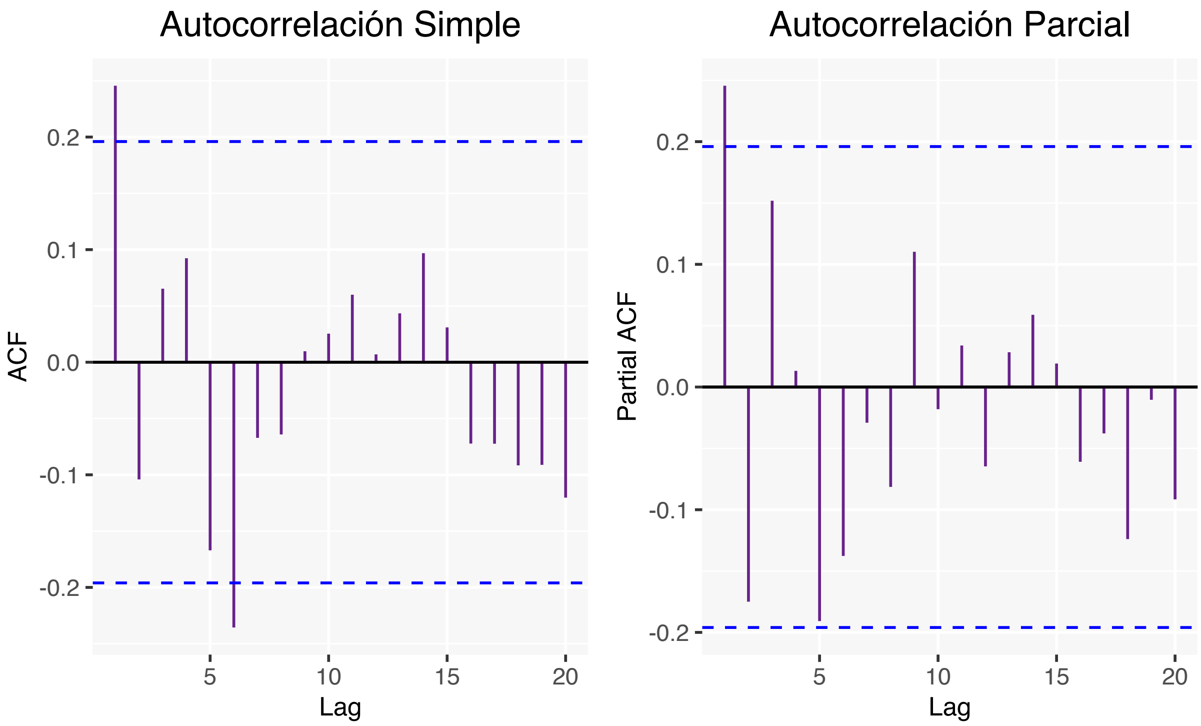
Y la correspondiente **función de autocorrelación** de un modelo $MA(1)$ es:

$$
\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}
$$

A continuación se muestran los resultados para un modelo $AR(1)$ de la siguiente forma $X_t = 0.45\epsilon_{t-1}$



Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.



5.2. Proceso de Medias Móviles de orden 2: $MA(2)$

Este modelo esta determinado por:

$$\begin{aligned} MA(2) : X_t &= \theta_0 - \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2} \\ X_t &= \theta_0 - (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco y θ_1, θ_2 son los parámetros del modelo. Asumiendo estacionariedad débil, es fácil comprobar que $\mathbb{E}(X_t) = \theta_0$. Respecto a la covarianza se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right] = \mathbb{E}\left[(-\epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2})^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\epsilon_t^2\right] + \theta_1^2\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-1}\right]^2 + \theta_2^2\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-2}\right]^2 \\ &= \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(-\epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2})(-\epsilon_{t-1} - \theta_1\epsilon_{t-2} - \theta_2\epsilon_{t-3})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\theta_1\epsilon_{t-1}^2 + \theta_1\theta_2\epsilon_{t-2}^2\right] \\ &= \theta_1\left(1 + \theta_2\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(-\epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2})(-\epsilon_{t-2} - \theta_1\epsilon_{t-3} - \theta_2\epsilon_{t-4})\right] \\ &= \theta_2\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-2}^2\right] \\ &= \theta_2\sigma^2 \end{aligned}$$

Entonces la **función de autocovarianza** de un modelo $MA(2)$ es:

$$\gamma_k = \begin{cases} \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ \theta_1(1+\theta_2)\sigma^2 & \text{si } \ k=1 \\ \theta_2\sigma^2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k>2 \end{cases}$$

Y la correspondiente **función de autocorrelación** de un modelo $MA(2)$ es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{\theta_1+(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{si } k=1 \\ \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k>2 \end{cases}$$

Capítulo 6

$ARMA(p, q)$: Proceso Autoregresivo de Medias Móviles

Es muy probable que una serie de tiempo X_t, tenga características de un proceso AR y de un proceso MA al mismo tiempo, por lo que será un proceso $ARMA$. Así, X_t sigue un proceso $ARMA(p, q)$, y en este proceso habrá p términos autoregresivos y q términos de media móvil. Este se verá de la siguiente forma:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + -\theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - ... - \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco, y $\phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q$ son los parámetros del modelo.

Para un proceso $ARMA(p, q)$ una condición de estacionariedad es la misma que para un proceso $AR(p)$, y una condición de invertivilidad es la misma que para el proceso $MA(q)$.

El modelo $ARMA(p, q)$ se puede escribir en términos de los operadores de retardo de la siguiente manera.

Sea $c = 0$.

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) X_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q) \epsilon_t \\ \Longrightarrow \phi_p(B) X_t &= \theta_q(B) \epsilon_t \end{aligned}$$

Donde + $\phi_p(B)$ es el polinomio autoregresivo + $\theta_q(B)$ es el polinomio de medias móviles.

Hay que observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} X_t &= \tfrac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \epsilon_t \quad \longleftarrow MA(\infty) \\ \epsilon_t &= \tfrac{\phi_1(B)}{\theta_q(B)} X_t \quad \longleftarrow AR(\infty) \end{aligned}$$

- Los modelos $ARMA(p, q)$ siempre compartirán las características de los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$, ya que contiene ambas estructuras a la vez.
- El modelo $ARMA(p, q)$ tiene media cero y varianza constante y finita además de que la función de autocorrelación es infinita y decrece rápidamente hacia cero.

- Un proceso $ARMA(p, q)$ es **estacionario** si y sólo si el modulo de las raíces del polinomio $\phi_p(B)$ está fuera del círculo unitario.
- Un proceso $ARMA(p, q)$ es **invertible** si y sólo si el modulo de las raíces del polinomio $\theta_q(B)$ está fuera del círculo unitario.

Ejemplo

Sea $Y_t : ARMA(2, 1)$ con $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ tal que $Y_t = 1.5 Y_{t-1} - 0.9 Y_{t-2} - 0.4 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$.

Sabemos que es invertible por que $|\theta| = |-0,4| < 1$ y es estacionario por lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\phi_2(B) = (1 - 1.5B + 0.9B^2)\\
\implies &B_1, B_2 = \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4(0.9)}}{2(0.9)} = 0.83 \pm 0.645\\
\implies &|B| = \sqrt{0.83^2 + 0.65^2} = 1.05423 > 1
\end{aligned}$$

6.1. $ARMA(1,1)$

En un modelo $ARMA(1,1)$ la serie de tiempo X_t se determina en función de su pasado hasta el primer retardo, la innovación actual y el pasado de la innovación hasta el primer retardo.

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco, y ϕ_1 y θ_1 son los parámetros del modelo. Ahora se verán las características de un proceso $ARMA(1,1)$ estacionario.

6.1.1. Media

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(c + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}) = c + \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1})$$

Por lo que Suponiendo estacionariedad $\mathbb{E}(X_t) = \frac{c}{1-\theta_1}$.

6.1.2. Covarianzas

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right] = \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + \theta_1^2\sigma^2 + \sigma^2 + \phi_1\theta_1 Cov(X_{t-1}, \epsilon_{t-1})\\
\iff &(1-\phi_1^2)Var(X_t) = \sigma^2(1+\theta_1^2) + \phi_1\theta_1\sigma^2\\
\implies &Var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2(1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1)}{1-\phi_1^2}
\end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{E}(X_t) = c + \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}) \implies X_t - \mathbb{E}(X_t) = \phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))]\\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1})(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))^2\right] + \mathbb{E}\left[\epsilon_t X_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[\epsilon_t \mathbb{E}(X_{t-1})\right] + \theta_1\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-1}X_{t-1}\right] - \theta_1\mathbb{E}[\epsilon_{t-1}\mathbb{E}(X_{t-1})]\\
&= \phi_1\gamma_0 + \theta_1\mathbb{E}[\epsilon_{t-1}X_{t-1}]\\
&= \phi_1\gamma_0 + \theta_1\mathbb{E}[\epsilon_{t-1}(c + \phi_1 X_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2})]\\
&= \phi_1\gamma_0 + \theta_1\mathbb{E}\left[c\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-1}\phi_1 X_{t-2} + \epsilon_{t-1}^2 + \theta_1\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}\right]\\
&= \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))]\\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1})) + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1})(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[(\phi_1(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \epsilon_t(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2})) + \theta_1\epsilon_{t-1}(X_{t-2} - \mathbb{E}(X_{t-2}))\right]\\
&= \mathbb{E}[\phi_1(X_{t-1}X_{t-2} - X_{t-1}\mathbb{E}(X_{t-2}) - X_{t-2}\mathbb{E}(X_{t-1}) + \mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-2}))\\
&\quad + \epsilon_t X_{t-2} - \epsilon_t\mathbb{E}(X_{t-2}) + \theta_1\epsilon_{t-1}X_{t-2} - \theta_1\epsilon_{t-1}\mathbb{E}(X_{t-2})]\\
&= \phi_1\gamma_1
\end{aligned}$$

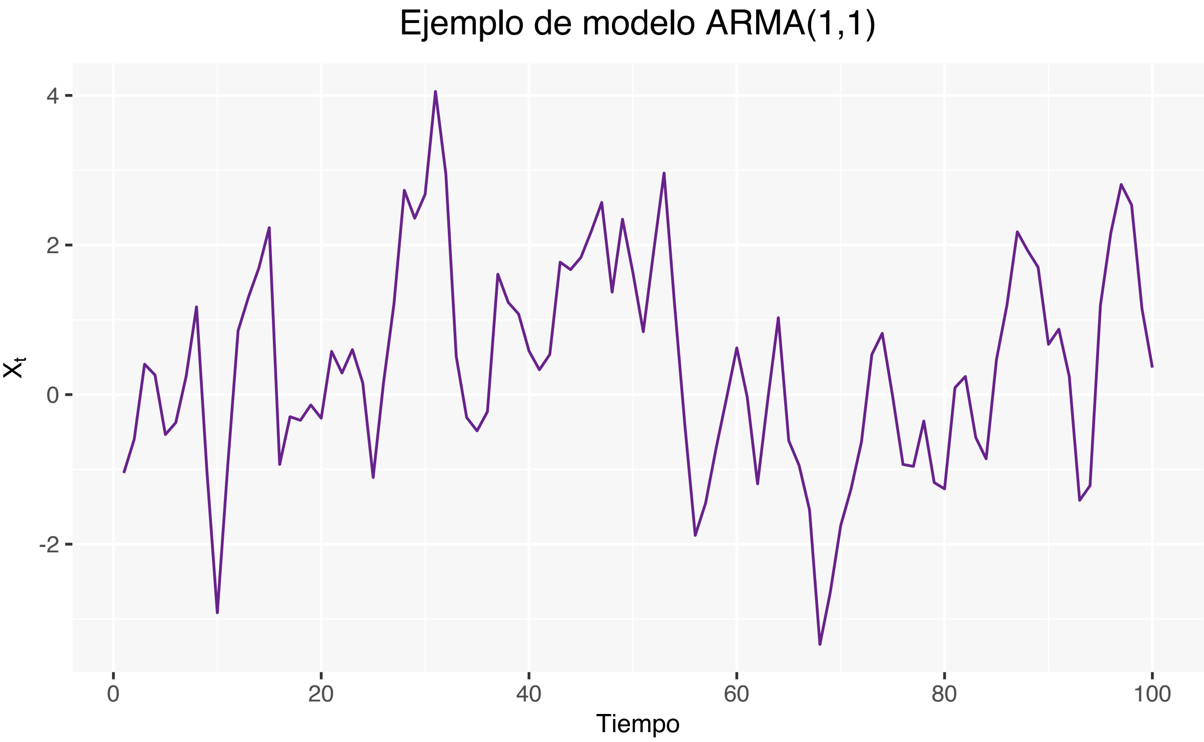
Entonces la **función de autocovarianza** de un proceso $ARMA(1,1)$ es:

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\sigma^2(1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1)}{1-\phi_1^2} & k=0 \\ \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2 & k=1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} & k>1 \end{cases}$$

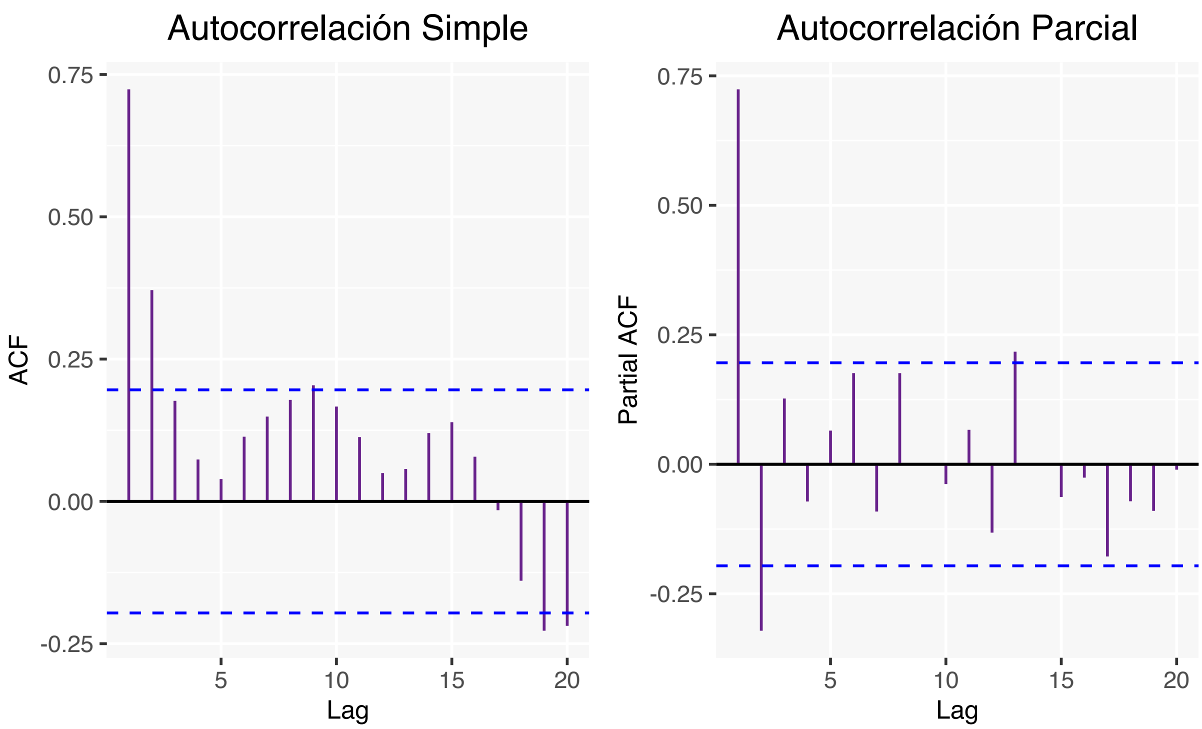
Y la **función de autocorrelación** de un proceso $ARMA(1,1)$ es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\phi_1\gamma_0+\theta_1\sigma_2}{\gamma_0} = \phi_1 - \frac{\theta_1\sigma^2}{\gamma_0} & k=1 \\ \frac{\phi_1\gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{k-1} & k>1 \end{cases}$$

A continuación se muestran los resultados para un modelo $ARMA(1,1)$ de la siguiente forma $X_t = 0.65X_{t-1} + .30\epsilon_{t-1}$



Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.


Autocorrelación Simple
ACF
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
5
10
15
20
Lag
Autocorrelación Parcial
Partial ACF
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
5
10
15
20
Lag

Parte III

Procesos lineales no estacionarios

Capítulo 7

$ARIMA(p, d, q)$: Proceso Autoregresivo Integrado y de Medias Móviles

Los modelos de series de tiempo AR, MA y $ARMA$ se basan en el supuesto de estacionariedad del proceso, es decir, la media, la varianza y las covarianzas son constantes en el tiempo. Sin embrago, muchas series de tiempo relacionadas con aplicaciones reales no son estacionarias, ya sea porque cambian de nivel en el tiempo (existe tendencia) o la varianza no es constante en el tiempo, a este tipo de procesos se les conoce como **procesos integrados**.

Para trabajar con estas series de tiempo lo que se hace es calcular las diferencias de la serie de tiempo d veces para hacerla estacionaria y posteriormente aplicar a la serie diferenciada un modelo $ARMA(p, q)$, en este caso se diría que la serie original es un proceso $ARIMA(p, d, q)$, donde p es el número de términos autoregresivos, d el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerla estacionaria y q el número de términos de la media móvil.

La expresión algebraica del proceso $ARIMA(p, d, q)$ es:

$$X_t^d = c + \phi_1 X_{t-1}^d + ... + \phi_p X_{t-p}^d - \theta_1 \epsilon_{t-1}^d - \theta_2 \epsilon_{t-2}^d - ... - \theta_q \epsilon_{t-q}^d + \epsilon_t^d$$

donde X_t^d es la serie de las diferencias de orden d, ϵ_t^d es un proceso de ruido blanco, y $\phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q$ son los parámetros del modelo.

El modelo $ARIMA(p, d, q)$ se puede escribir en términos de los operadores de retardo de la siguiente manera:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) X_t^d = c + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q) \epsilon_t^d$$
$$\phi_p(B)(1 - B)^d X_t = c + \theta_q(B) \epsilon_t^d$$

Los modelos integrados se usan para reducir la **NO** estacionariedad de la serie al usar las diferencias y en la mayoría de las aplicaciones $d = 1$ y hasta $d = 2$ es suficiente para volver la serie estacionaria, pero en algunas ocasiones, aplicar transformaciones a los datos tienen mejor resultado para lograr la estacionariedad en comparación con las diferencias. Por ejemplo, en las series de tiempo económicas, la variabilidad aumenta cuando el nivel promedio del proceso aumenta. Sin embargo el porcentaje de cambio en las observaciones es relativamente independiente del nivel, entonces aplicar una transformación logarítmica puede ser más eficiente para lograr la estacionariedad de la serie.

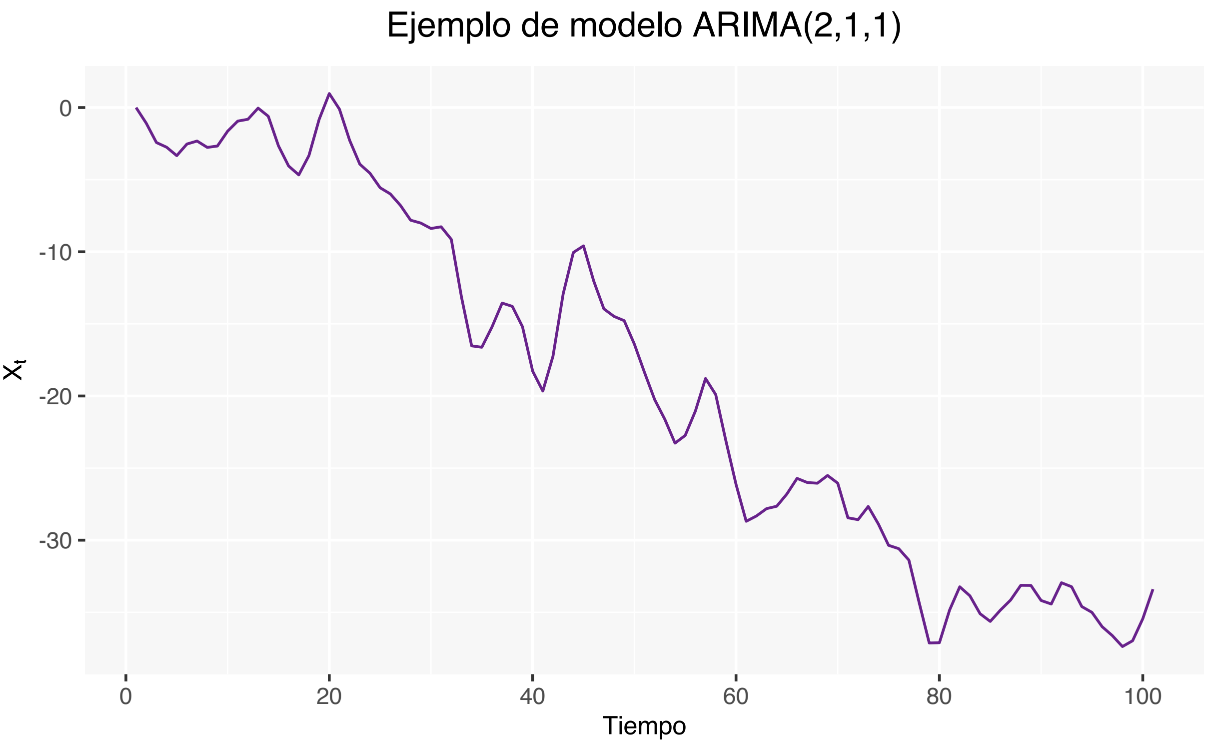
Ejemplo

Se tiene el siguiente modelo: $X_t = \mu_t + Z_t$ donde $\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$ y Z_t es un proceso estacionario.

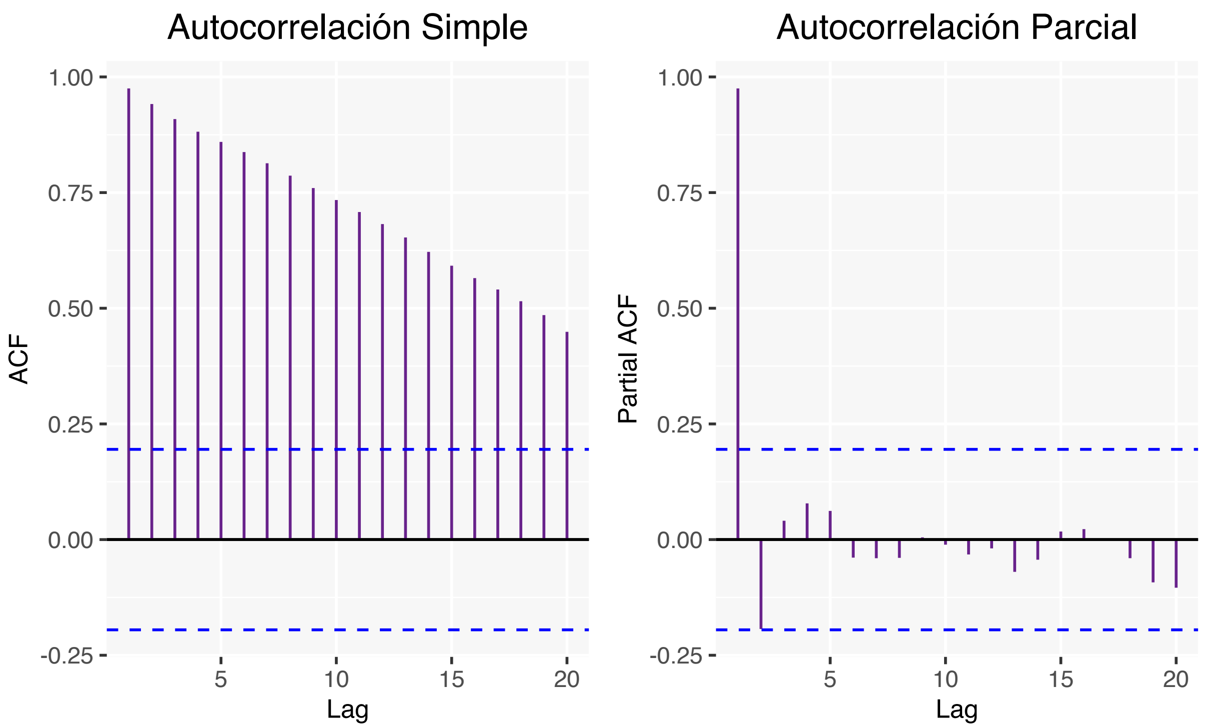
$$
\begin{aligned}
X_t - X_{t-1} &= \mu_t + Z_t - \mu_{t-1} - Z_{t-1} \\
&= \beta_0 + \beta_1 t + Z_t - \beta_0 - \beta_1(t-1) - Z_{t-1} \\
&= \beta_1 + Z_t - Z_{t-1}
\end{aligned}
$$

El cual ya no depende de t.

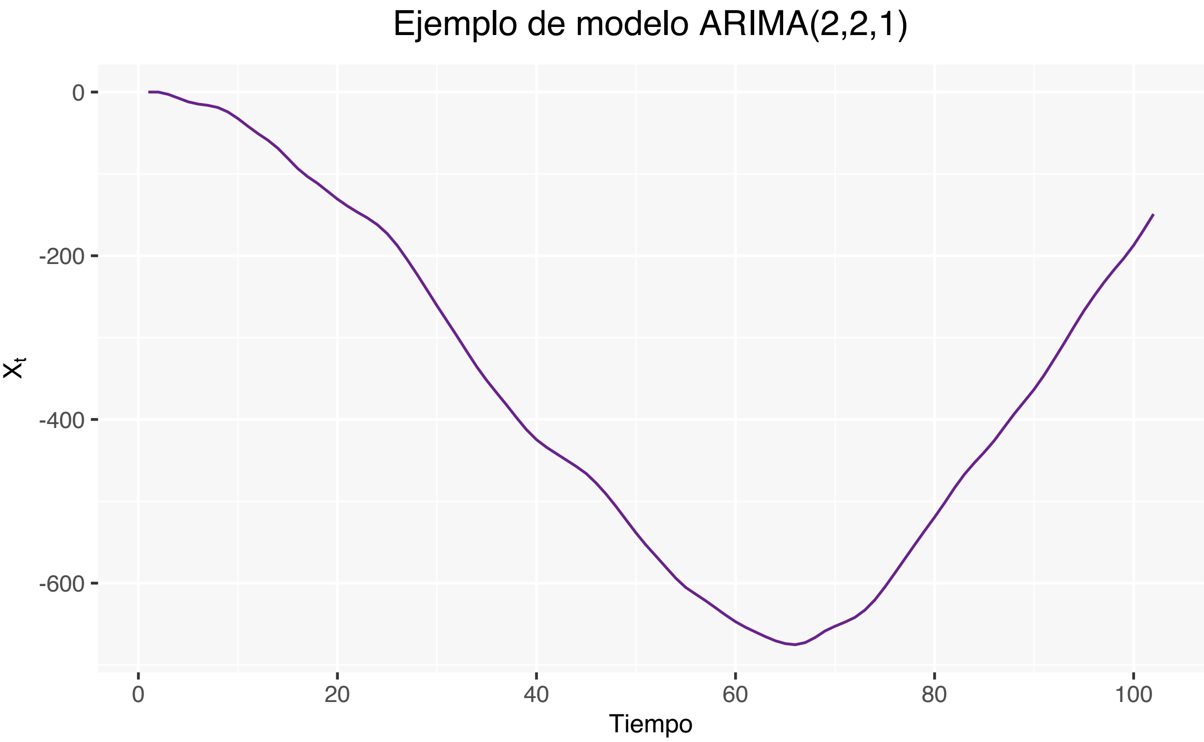
A continuación se muestran los resultados para un modelo $ARIMA(2,1,1)$ de la siguiente forma $X_t = 0.85X_{t-1} - 0.45X_{t-2} + .30\epsilon_{t-1}$



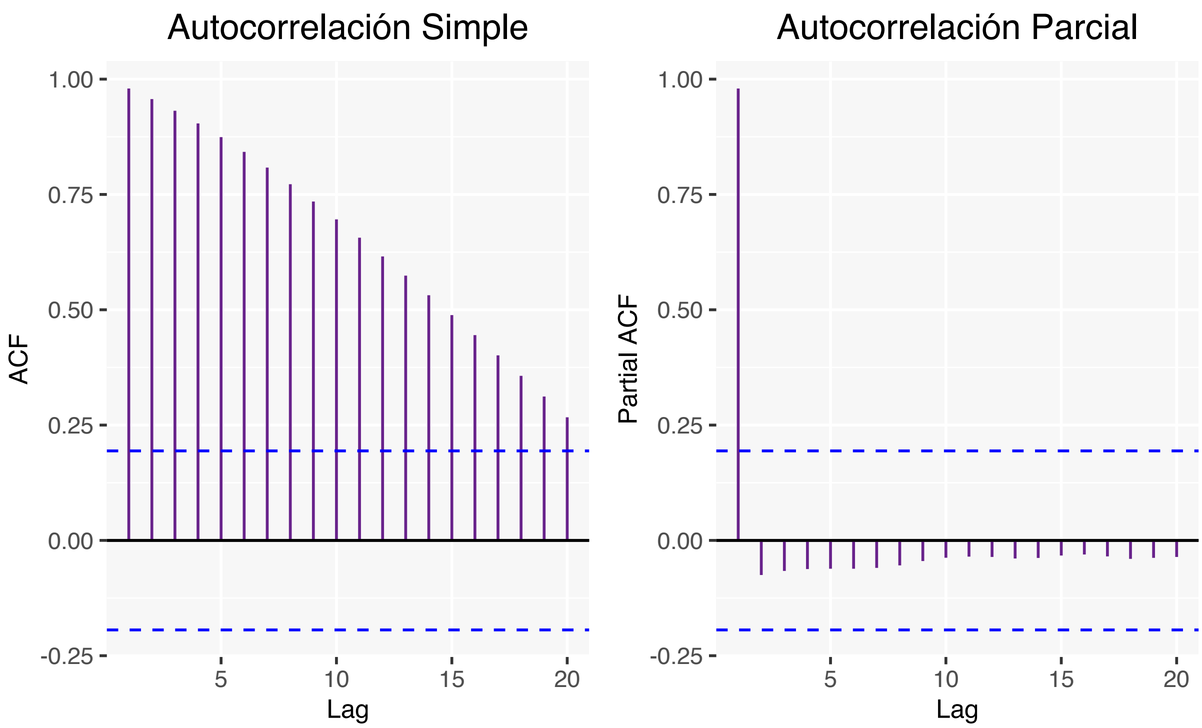
Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.



A continuación se muestran los resultados para un modelo $ARIMA(2,2,1)$ de la siguiente forma $X_t = 0.85X_{t-1} - 0.45X_{t-2} + .30\epsilon_{t-1}$



Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.



¿Qué se puede decir del efecto que tiene el parámetro d al comparar las gráficas de ambas series?

Capítulo 8

$IMA(d, q)$: Proceso Integrado y de Media Móvil

Este proceso es un caso particular del proceso $ARIMA(p, d, q)$ cuando $p = 0$. Se calculan las diferencias de la serie de tiempo d veces para convertir la serie en estacionaria y luego se aplica un modelo $MA(q)$.

Por ejemplo:

Sea Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 la serie de tiempo original. Entonces la serie diferenciada de orden uno será:

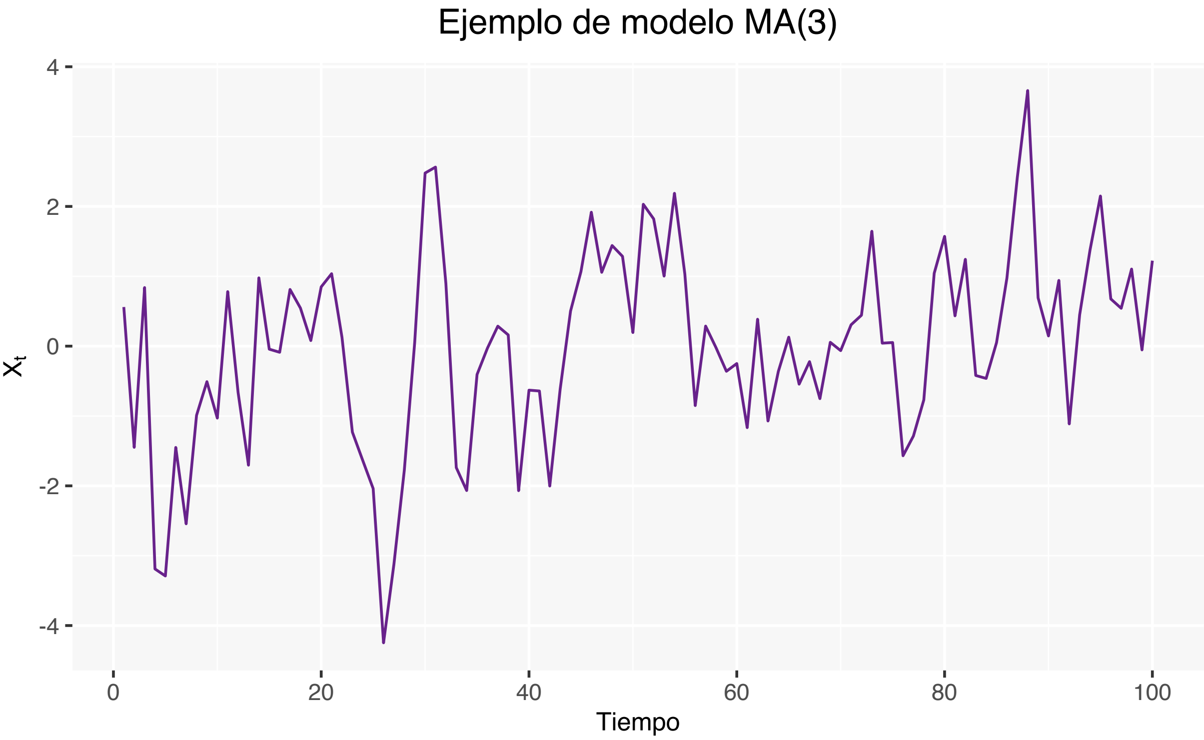
$$
\begin{aligned}
Y_1 &= Z_2 - Z_1 \\
Y_2 &= Z_3 - Z_2 \\
Y_3 &= Z_4 - Z_3 \\
Y_4 &= Z_5 - Z_4
\end{aligned}
$$

Y la serie diferenciada de orden dos será:

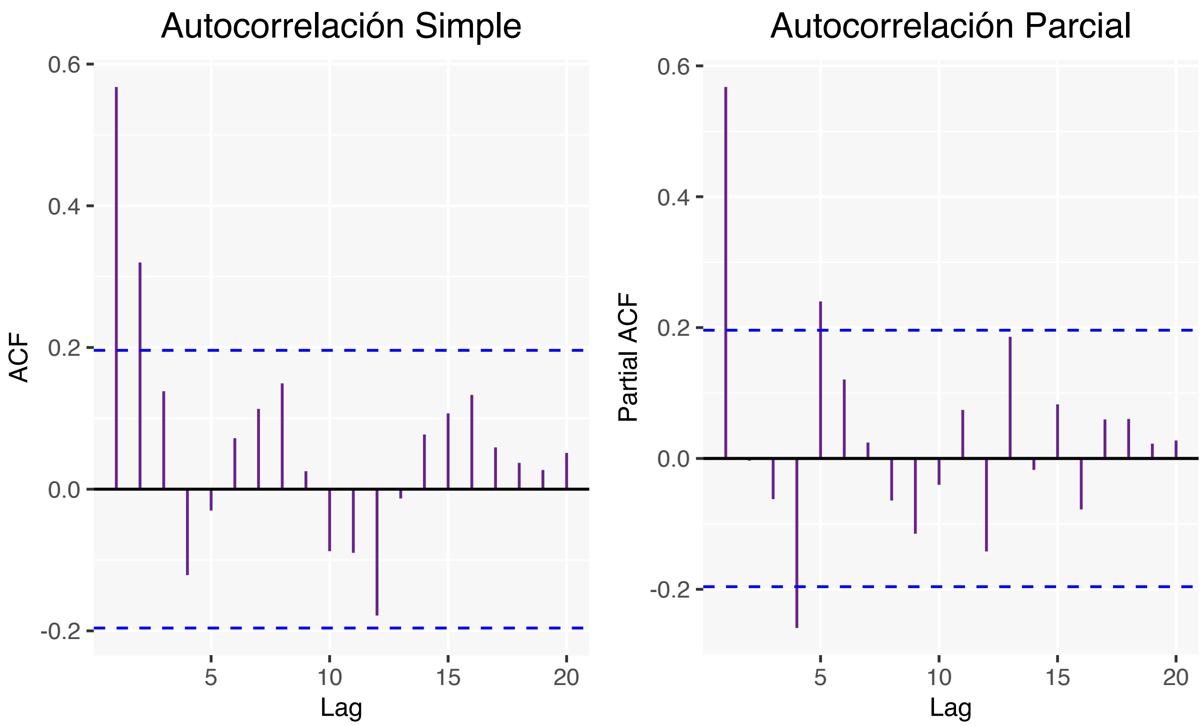
$$
\begin{aligned}
X_1 = Y_2 + Y_1 = Z_3 - Z_2 + Z_2 - Z_1 &= Z_3 - Z_1 \\
X_2 = Y_3 + Y_2 &= Z_4 - Z_2 \\
X_3 = Y_4 + Y_3 &= Z_5 - Z_3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto al hacer diferencia de orden 2 a la serie de tiempo original Z_t, se obtiene una serie de tiempo X_1, X_2, X_3 que ya es estacionaria y a esta se la aplicaría un modelo de medias móviles $MA(q)$, por ejemplo si $q = 1$ se ajustaría un modelo $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$, donde ϵ_t es ruido blanco.

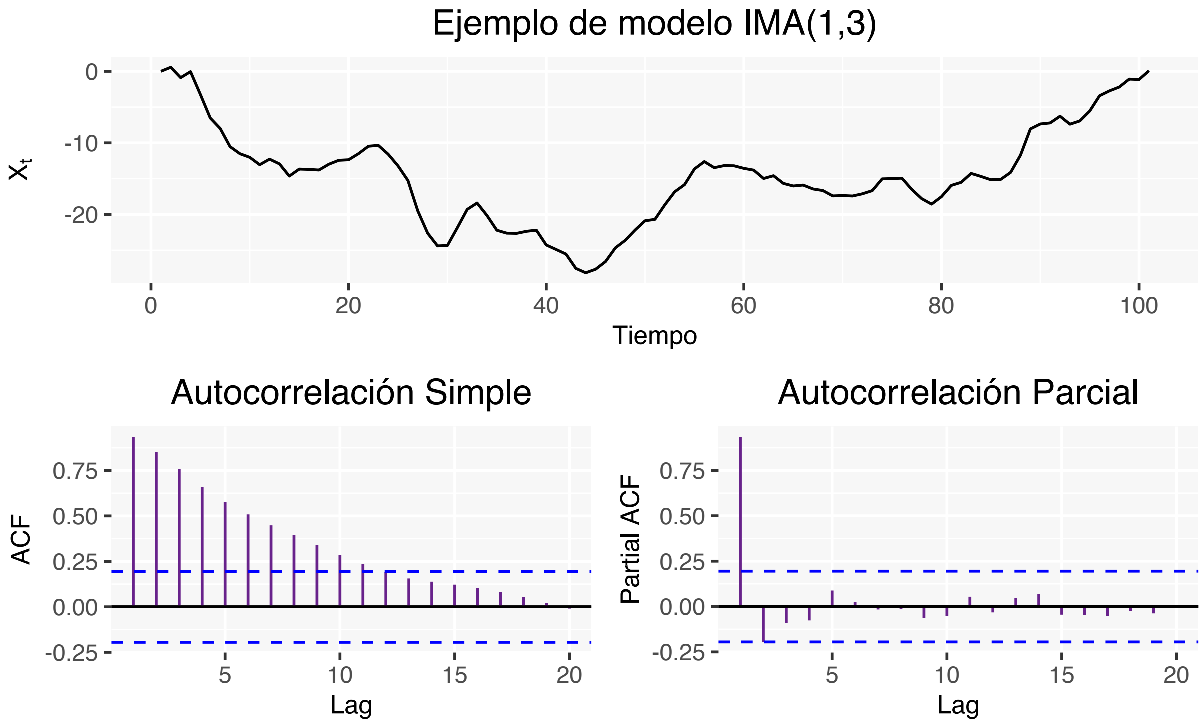
A continuación se modelan los datos de un modelo $MA(3)$ de la siguiente forma $X_t = 0.80\epsilon_{t-1} + 0.20\epsilon_{t-2} + 0.50\epsilon_{t-3}$



Además de las gráficas de Autocorrelación simple y parcial.



Ahora veamos como queda la serie si le incluimos un proceso integrado (una diferencia) de orden 1.



Haga la prueba aumentando el orden de las diferencias, ¿cuál es el efecto en la serie de tiempo?

Parte IV

Otras consideraciones

Capítulo 9

Predictores Lineales

Sea X_t un proceso estacionario. Se desea predecir X_{n+1} en una función lineal de lo observado hasta el tiempo n es decir con $X_1, X_2, ..., X_n$. Entonces lo que buscamos es encontrar los coeficientes a_i con $i = 1, ..., n$ tales que

$$\hat{X}_{n+1} = a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + ... + a_n X_1$$

Utilizando las varianzas y covarianzas entre los elementos de la serie de tiempo se obtiene que una estimación de las $a_i's$ son las que den solución al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & Cov(X_1, X_3) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & Cov(X_2, X_3) & \dots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & Cov(X_n, X_3) & \dots & Cov(X_n, X_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cov(X_{n+1}, X_n) \\ Cov(X_{n+1}, X_{n-1}) \\ \vdots \\ Cov(X_{n+1}, X_1) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma \underline{a} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \gamma$$

En general si deseamos predecir X_{n+h} dado $X_1, X_2, ..., X_n$, el predictor lineal será

$$\hat{X}_{n+h} = a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + ... + a_n X_1$$

En donde el mejor predictor lineal serán los $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_h \\ \gamma_{h+1} \\ \vdots \\ \gamma_{h+n} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma \underline{a} = \gamma$$

Ejemplo ¿Cuál es el predictor lineal de X_3 dado X_1, X_2?

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Como $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \implies \begin{array}{l} a_1 + \rho_1 a_2 = \rho_1 \\ a1\rho_1 + a_2 = \rho_2 \end{array}$$

Y en general: $\hat{X}_{n+h} = a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_n X_1$.

Ejercicios

- Sean X_1, X_2, X_4, X_5 obs. de un modelo $MA(2)$ de la forma $X_t = Z_t + 0.5Z_{t-1} + 0.25Z_{t-2}$. $Encontrar el mejor estimador para X_3 en términos de X_1 y X_2. $Z_t \sim N(0,1)$.
- Sean X_1, X_2, X_4, X_5 obs. de un modelo $MA(2)$ de la forma $X_t = Z_t - 0.25Z_{t-2}$. $Encontrar el mejor estimador para X_3 en términos de X_2 y X_4. $Z_t \sim N(0,1)$.

Capítulo 10

Construcción de modelos para series de tiempo univariadas

Para construir un modelo $ARIMA$ que ajuste a una serie tiempo dada, se debe seguir un proceso iterativo de tres etapas. Primero identificar un modelo $ARIMA(p, d, q)$ tentativo, segundo, estimarlos parámetros desconocidos del modelo. Tercero, mediante el análisis de residuales verificar si el modelo propuesto es el adecuado.

- **Identificación**: Utilizando los datos ordenados cronológicamente haciendo uso de gráficos (correlograma, diagrama de dispersión, otros) se seleccionan los modelos $ARIMA(p, d, q)$ que valga la pena investigar. En esta etapa es posible identificar más de un modelo candidato que describa la serie. Observando las gráficas del ACF y PACF de la serie transformada podemos hacernos una idea del modelo que describe nuestra serie, o al menos de cuáles son los primeros candidatos que debemos probar.
- **Estimación**: Considerando el modelo o modelos apropiados seleccionados en el paso anterior, se procede a realizar inferencia sobre los parámetros del modelo. Algunos paquetes permiten la selección del método de estimación (verosimilitud, momentos, mínimos cuadrados) que mejor se ajuste a las especificaciones del problema.
- **Verificación**: Si el modelo es el adecuado, es decir los valores de p y q han sido correctamente especificados, entonces el modelo deberá ajustar bien a los datos y los residuales (la diferencia entre lo observado y lo estimado con el modelo) deberán comportarse como ruido blanco, esto se puede comprobar con la prueba de Ljung-Box. Si el modelo es adecuado, la función de autocorrelación de los residuales no debe de tener ninguna estructura. En caso de que el modelo no sea el adecuado, se escoge el siguiente candidato y se repiten los pasos anteriores.

Prueba de estacionariedad de los residuales Dickey-Fuller. Prueba de independencia Box-Pierce.

Si se ajustan varios modelos candidatos $ARIMA(p, d, q)$, un buen modelo será aquel que tenga los residuales semejantes al de un ruido blanco, además que tenga los valores del AIC (Criterio de Información de Akaike) y BIC (Criterio de Información Bayesiana) menores con relación al resto de los modelos candidatos.

Parte V

Procesos no lineales

Capítulo 11

Introducción

Los procesos vistos hasta ahora son lineales, pero muchas series temporales económicas, y especialmente series financieras, no cumplen con el supuesto de varianza constante, y no sólo eso, sino que estos cambios tienden a estar correlacionados serialmente, en el sentido de que cambios de gran magnitud en el valor de la serie son seguidos por grandes cambios (periodos de mucha volatilidad) mientras que a cambios pequeños en el valor de la serie les siguen cambios pequeños (periodos de poca volatilidad).

También puede ocurrir que por la propia naturaleza del fenómeno económico que se esta analizando se requiera conocer no solo aspectos de su nivel medio sino que también nos interese su varianza (o volatilidad). Usar un proceso ARIMA en una serie con estas caracteristicas se observará que los residuos recogerán todo el efecto de la variabilidad de la serie, ya que los modelos lineales no consideran la variabilidad dentro del modelo.

Existen diferentes tipos de modelos no lineales, entre ellos los más populares son los ARCH y GARCH para predecir la volatilidad.

Capítulo 12

$ARCH(q)$: Proceso Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional

El nombre proviene del inglés, "Autoregressive conditional heteroscedasticity" (ARCH). Métodp propuesto por Engels en 1982, que determina un patrón de comportamiento estadístico para la varianza. Considera que la información pasada de una variable y su volatilidad son factores que explican su comportamiento presente y, por tanto, podrá ser extrapolado a futuro.

La expresión algebráica básica del proceso $ARCH(r)$ es:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t$$

Donde ϵ_t (proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza uno) y σ_t (factor denominado volatilidad) son procesos estacionarios independientes entre sí. La condición de independencia entre ϵ_t y σ_t, garantiza que la serie X_t tenga media marginal igual a cero:

$$E(X_t) = E(\sigma_t \epsilon_t) = E(\sigma_t)E(\epsilon_t) = 0$$

La media condicional también es nula.

$$E(X_t|X_{t-1}) = E(\sigma_t \epsilon_t|X_{t-1}) = E(\sigma_t|X_{t-1})E(\epsilon_t|X_{t-1}) = E(\sigma_t|X_{t-1})E(\epsilon_t) = 0$$

La varianza marginal de X_t es constante (σ^2) y se calcula como:

$$E(X_t^2) = E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)E(\epsilon_t^2) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$$

Sin embargo, la varianza condicionada no es constante:

$$E(X_t^2|X_{t-1}) = E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2|X_{t-1}) = E(\sigma_t^2|X_{t-1})E(\epsilon_t^2|X_{t-1}) = E(\sigma_t^2|X_{t-1})E(\epsilon_t^2) = \sigma_t^2 \times 1 = \sigma_t^2$$

Por tanto, σ_t^2, representa la varianza condicionada de la serie en cada instante , que va variando con cierta estructura estacionaria.

La condición de independencia entre σ_t y ϵ_t, además de garantizar que la serie X_t tenga media marginal igual a cero, nos garantiza que la serie carezca de autocorrelación y forme un proceso de ruido blanco. Sin embargo, la serie X_t no es de variables independientes.

El casos más simple de este proceso es un modelo ARCH(1) (la varianza condicional depende de un retardo de la serie) y se define como:

Un proceso estacionario X_t sigue un modelo $ARCH(1)$ si y sólo si

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t$$

donde ϵ_t es ruido blanco y

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

Observemos que la varianza condicional (σ_t^2) tiene una estructura similar a un AR(1), y por tanto solo depende del último valor observado. Por tanto, si el valor de X_t^2 es alto, la varianza σ_t^2 de la siguiente observación condicionada a este valor será también alta. Esto producirá correlación entre los cuadrados de la serie, provocando rachas de valores de magnitud relativamente elevada o con mayor varianza. Pero como la media marginal y la condicionada vale cero, aunque la varianza condicionada sea alta, siempre es posible que aparezca un valor pequeño de X_t^2, que disminuirá la varianza condicionada de la observación siguiente y facilitará que la siguiente observación sea pequeña en valor absoluto. De manera que la serie puede presentar rachas de valores altos, pero globalmente será estacionaria.

El modelo anterior puede generalizarse permitiendo una dependencia de la varianza condicional con q retardos. De manera que el modelo será $ARCH(q)$, el cual se define como:

Un proceso estacionario X_t sigue un modelo $ARCH(q)$ si y sólo si

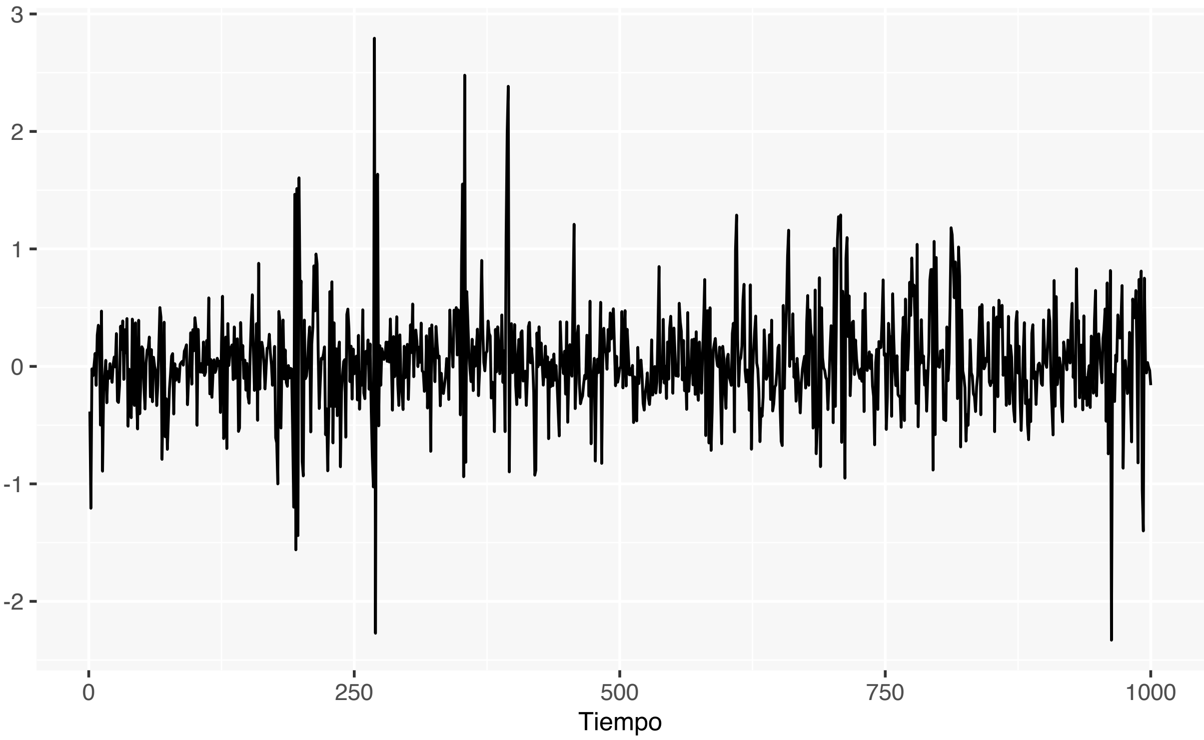
$$X_t = \sigma_t \epsilon_t$$

donde ϵ_t es ruido blanco y

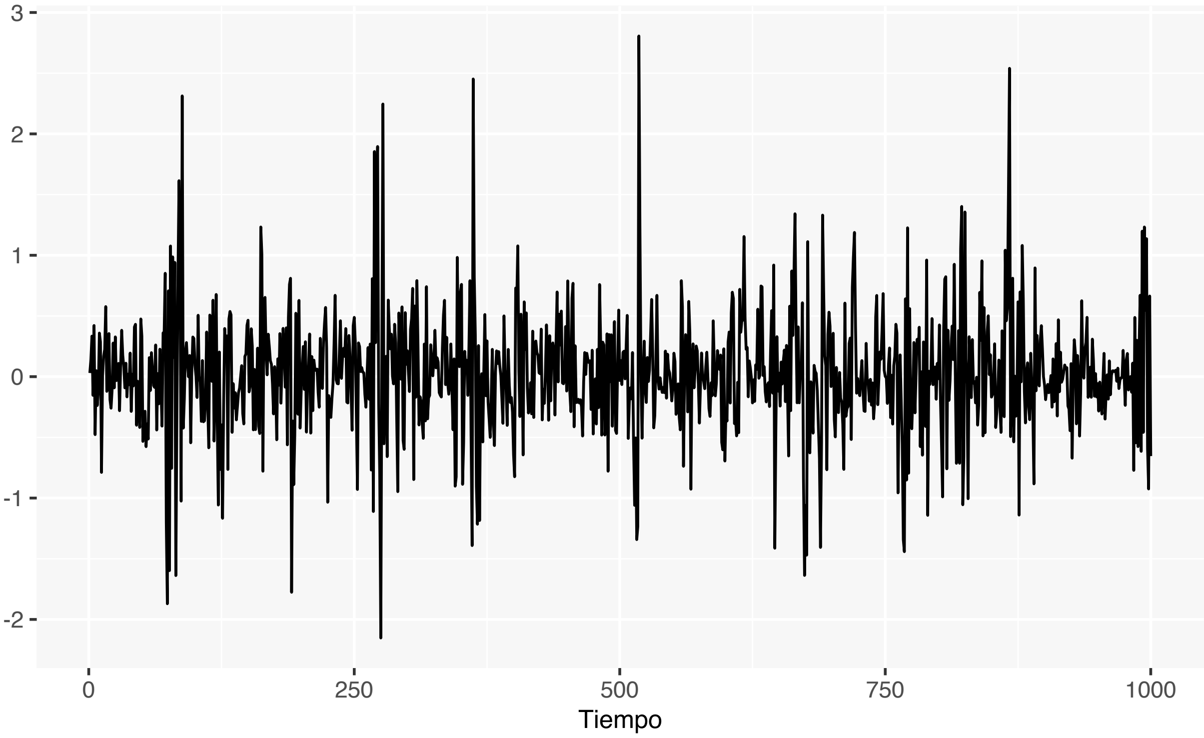
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + ... + \alpha_q X_{t-q}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0, i = 1, ..., q$. Para garantizar que el proceso σ_t^2 sea estacionario se requiere que $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$.

A continuación se muestran las simulaciones de un modelo $ARCH(1)$ con la varianza modelada de la siguiente forma: $\sigma_t^2 = 0.05 + 0.8X_{t-1}$



A continuación se muestran las simulaciones de un modelo $ARCH(3)$ con la varianza modelada de la siguiente forma: $\sigma_t^2 = 0.05 + 0.6X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + 0.1X_{t-3}$


3
2
1
0
-1
-2
0
250
500
750
1000
Tiempo

Capítulo 13

$GARCH(p,q)$: Proceso Autoregresivo Generalizado con Heterocedasticidad Condicional

En el modelo $ARCH(1)$ el predictor al tiempo $t+1$ de la varianza depende solo del último valor de σ_t. Sin embrago, en la práctica se desea tener mayor precisión en la predicción, para mejorarla se podría incluir todos los valores pasados σ_t con menor peso para volatilidades más distantes. Una propuesta para este problema la desarrolló Bollerslev(1986), donde introduce p retrasos de la varianza condicional al modelo, entonces p hace referencia al orden del modelo GARCH.

Entonces un proceso estacionario X_t sigue un modelo $GARCH(p,q)$ si

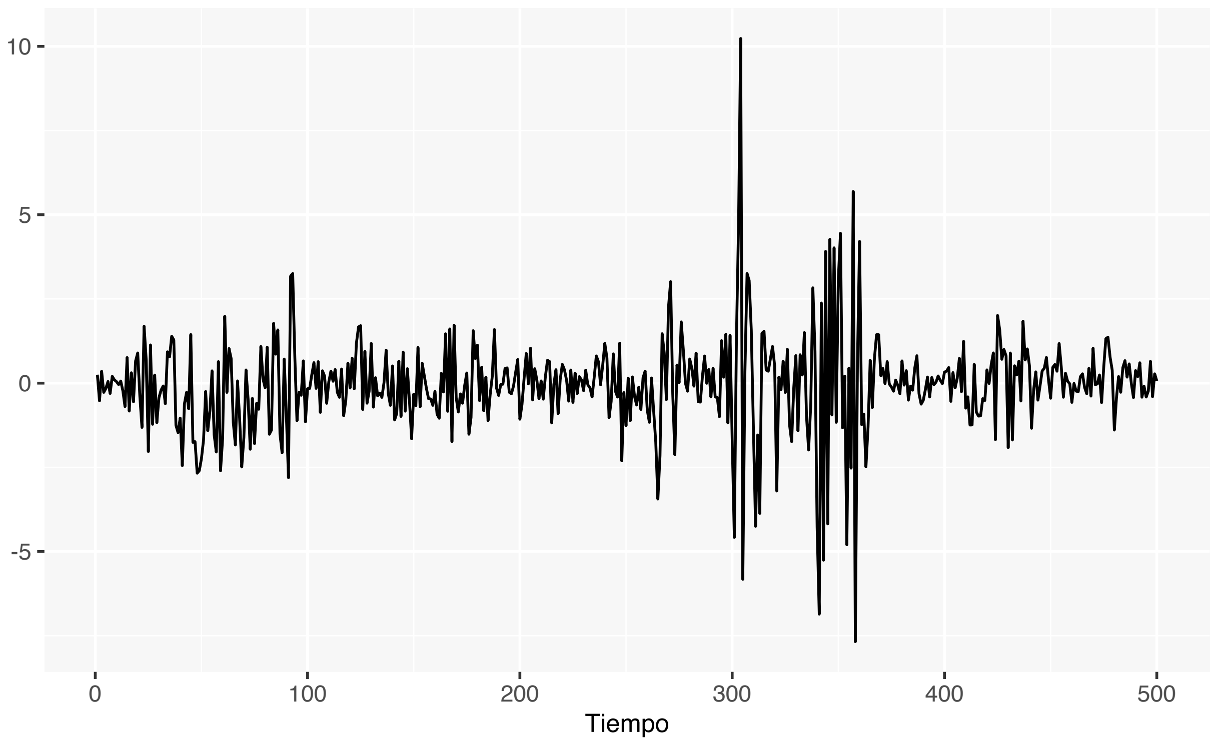
$$X_t = \sigma_t \epsilon_t$$

donde ϵ_t es ruido blanco y

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0$,$\alpha_i \geq 0, i = 1, ..., q$ y $\beta_j \geq 0, j = 1, ..., p$. Para garantizar que la varianza sea positiva y existan los momentos de orden superior se requiere que $\sum_{i=1}^{max(p,q)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$.

A continuación se muestran las simulaciones de un modelo $GARCH(1,1)$ con la varianza modelada de la siguiente forma: $\sigma_t^2 = 0.05 + 0.4X_{t-1} + 0.55\sigma_{t-1}^2$


10
5
0
-5
0
100
200
300
400
500
Tiempo

Bibliografía

Cryer, J. D. and Chan, K.-S. (2008). *Time series analysis: with applications in R*. Springer Science & Business Media.