Capítulo 3

Séries de Fourier

3.1. Introdução

Neste capítulo analisamos a série de Fourier que é um caso especial de série de potências. A série de Fourier tem muitas aplicações na engenharia elétrica mas neste trabalho essas séries são usadas apenas para resolver equações diferenciais parciais.

Uma série formada por senos e cosenos é chamada de série trigonomêtrica. Assim, uma série trigonomêtrica assume a seguinte forma:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \, Cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) + b_m \, Sen \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right) \tag{3.1}$$

A série anterior é chamada de série de Fourier de uma função $f(x)$ desde que essa série seja convergente.

As séries de Fourier são análogas as séries de Taylor no sentido em que ambas séries fornecem uma forma de representar funções relativamente complicadas em termos de funções elementares e familiares.

Se a série de Fourier converge então ela representa uma função $f(x)$ e podemos representar essa relação da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \, Cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) + b_m \, Sen \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right) \tag{3.2}$$

Sabemos que para que uma função seja representável por uma série de potências as condições são as seguintes para um x real:

- A função deve ser infinitamente derivável.
- O resto da fórmula de Taylor deve tender para zero.

Portanto, devemos observar que uma série trigonomêtrica pode ser convergente ou divergente.

Exemplo 1: Séries trigonométricas convergentes e divergentes:

Mostramos algumas séries trigonomêtricas e suas características de convergência:

1. A série trigonométrica com $a_m = b_m = \frac{1}{m^2}$ para $m \neq 0$ e $a_o = 0$ assume a seguinte forma:

$$Cos(\frac{\pi}{L}x) + Sen(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{4}Cos(\frac{2\pi}{L}x) + \frac{1}{4}Sen(\frac{2\pi}{L}x) + \frac{1}{9}Cos(\frac{3\pi}{L}x) + \frac{1}{9}Sen(\frac{3\pi}{L}x) + \ldots$$

   Pode ser demonstrado que a série anterior converge para todos os valores de x.

2. A série trigonométrica com $a_m = 0$ e $b_m = \frac{1}{m}$ assume a seguinte forma:

$$Sen(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{2}Sen(\frac{2\pi}{L}x) + \frac{1}{3}Sen(\frac{3\pi}{L}x) + \ldots$$

   Pode ser demonstrado que a série anterior converge para todos os valores de x exceto para $x = \frac{L}{2}$.

3. A série trigonométrica com $a_m = 1$ e $b_m = 0$ assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{2} + Cos(\frac{\pi}{L}x) + Cos(\frac{2\pi}{L}x) + Cos(\frac{3\pi}{L}x) + \ldots$$

   Pode ser demonstrado que a série anterior diverge para todos os valores de x exceto para $x = \frac{L}{2}$.

As séries de Fourier são usadas em aplicações tais como no método de separação de variáveis de equações diferenciais, na resolução de equações diferenciais parciais, na análise de circuitos elétricos em que os bipolos ativos são fontes de tensão e/ou corrente de tipo periódico não senoidal, entre outras aplicações. Assim, por exemplo, uma fonte periódica não senoidal pode ser substituída por uma série de Fourier (que está formado apenas por funções senoidais) e depois aplicar a teoria de corrente alternada para fontes de corrente alternada senoidal e o teorema da superposição para analisar essse tipo de circuito elétrico.

3.2. As séries de Fourier

As séries de Fourier podem representar uma grande variedade de funções incluindo algumas funções discontínuas. Entretanto, não podemos esquecer que pela natureza da série de Fourier, ela pode representar somente funções periódicas com período T (o período T não necessariamente é o período original de $f(x)$, isto é, pode ser menor mas um múltiplo do período original).

Periodicidade das funções seno e coseno:

Uma função $f(x)$ é chamada de periódica com período $T > 0$ se o domínio de $f(x)$ contém, $x+T$ sempre que contiver x e se adicionalmente

$$f(x+T) = f(x) \tag{3.3}$$

para todo valor de x. Chamamos o T de período. A figura 1 mostra uma função periódica.

Observação:

Se T é o período de $f(x)$ então um múltiplo inteiro de T também é um período de T $(2T, 3T, 4T, \ldots)$. Assim, o menor valor do período é chamado de período fundamental de $f(x)$. Também, a função constante é considerada periódica com qualquer período e sem período fundamental.

As funções $Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ são periódicas com período fundamental $T = \frac{2L}{m}$. Para verificar essa característica lembremos que $Sen\ x$ e $Cos\ x$ tem como período fundamental 2π e que

Figura 1: Uma função periódica

$Sen\ \alpha x$ e $Cos\ \alpha x$ tem período fundamental $\frac{2\pi}{\alpha}$. Assim, escolhendo $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ verificamos que o período fundamental T de $Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ é dado por $T = \dfrac{2\pi}{\frac{m\pi}{L}} = \dfrac{2L}{m}$. Adicionalmente, como todo múltiplo inteiro de um período também é um período então cada uma das funções $Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ tem um período comum $2L$.

Também provamos facilmente que $T = \frac{2L}{m}$ é um período de $Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ da seguinte forma:

$$f(x) = Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$f(x+T) = Sen\left[\frac{m\pi}{L}(x + \frac{2L}{m})\right] = Sen\left[\frac{m\pi}{L}x + 2\pi\right] = Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Ortogonalidade das funções seno e coseno:

As funções u e v são chamadas de ortogonais no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se satisfazem a seguinte relação:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\ v(x)\ dx = 0 \tag{3.4}$$

Também, um conjunto de funções formam um conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal. Assim, as funções $Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e $Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$. Podemos provar facilmente a validade das seguintes relações:

$$\int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \Big\{\ 0 \quad \text{para todo} \quad m \ \text{ e } \ n \tag{3.6}$$

$$\int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ L & \text{se} \quad m = n \end{cases} \tag{3.7}$$

A validade dessas relações podem ser obtidas por integração direta. Na prova devemos usar as seguintes relações trigonomêtricas:

$$Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left\{Cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]-Cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]\right\} \tag{3.8}$$

$$Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left\{Cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]+Cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right\} \tag{3.9}$$

$$Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left\{Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]+Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right\} \tag{3.10}$$

que usaremos quando $m \neq n$. Para o caso particular em que $m = n$ as relações anteriores se reduzem às seguintes relações mais simples:

$$Sen^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left\{1-Cos\left[\frac{2m\pi}{L}x\right]\right\} \tag{3.11}$$

$$Cos^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left\{1+Cos\left[\frac{2m\pi}{L}x\right]\right\} \tag{3.12}$$

$$Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}Sen\left[\frac{2m\pi}{L}x\right] \tag{3.13}$$

Exemplo 2: Provar as relações (3.5), (3.6) e (3.7).

A prova dessas relações matemáticas é relativamente simples e são apresentadas a seguir.

1. **Provando a relação (3.5)**:
   Se $m \neq n$ temos o seguinte:

$$P=\int_{-L}^{L}Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L}\left[Cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]+Cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right]\,dx\right\}$$

$$P=\frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]+\frac{L}{(m-n)\pi}Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}$$

$$P=\frac{L}{2\pi(m+n)}\left[Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}+\frac{L}{2\pi(m-n)}\left[Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}$$

$$P=\frac{L}{2\pi}\left\{\frac{1}{(m+n)}\left[Sen(m+n)\pi-Sen(-1)(m+n)\pi\right]+\frac{1}{(m-n)}\left[Sen(m-n)\pi-Sen(-1)(m-n)\pi\right]\right\}$$

$$P=\frac{L}{\pi}\left[\frac{1}{(m+n)}Sen(m+n)\pi+\frac{1}{(m-n)}Sen(m-n)\pi\right]=0$$

porque os múltiplos de π são tais que $Sen(k\pi) = 0$ para k inteiro.

Para $m = n$ temos o seguinte:

$$P = \int_{-L}^{L} Cos^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L}\left[1 + Cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\right] dx\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[x + Sen\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\frac{L}{2m\pi}\right]_{-L}^{L}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[L - (-L) + \frac{L}{2m\pi}Sen(2m\pi) - \frac{L}{2m\pi}Sen[(-1)(2m\pi)]\right]$$

$$P = \ L + \frac{L}{2m\pi}Sen(2m\pi) = L$$

já que cada função do tipo $Sen(2m\pi) = 0$ para m inteiro.

2. **Provando a relação (3.6)**:

Se $m \neq n$ temos o seguinte:

$$P = \int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L}\left[Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right] + Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right]\ dx\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[-\frac{L}{(m+n)\pi}Cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right] - \frac{L}{(m-n)\pi}Cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}$$

$$P = \frac{1}{2}\left\{-\frac{L}{(m+n)\pi}\left[Cos\left[(m+n)(\pi)\right] - Cos\left[(m+n)(-\pi)\right]\right] + \right.$$

$$\left. -\frac{L}{(m-n)\pi}\left[Cos\left[(m-n)(\pi)\right] - Cos\left[(m-n)(-\pi)\right]\right]\right\}$$

$$P = \frac{L}{2\pi}\left\{-\frac{1}{(m+n)}\left[Cos\left[(m+n)(\pi)\right] - Cos\left[(m+n)(\pi)\right]\right] + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{(m-n)}\left[Cos\left[(m-n)(\pi)\right] - Cos\left[(m-n)(\pi)\right]\right]\right\} = 0$$

Para $m = n$ temos o seguinte:

$$P = \int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{2m\pi}{L}x\right) dx\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[-\frac{L}{2m\pi}Cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\right]_{-L}^{L} = -\frac{L}{4m\pi}\left[Cos(2m\pi) - Cos(-2m\pi)\right]$$

$$P = -\frac{L}{4m\pi}\left[Cos(2m\pi) - Cos(2m\pi)\right] = 0$$

3. **Provando a relação (3.7)**:

Se $m \neq n$ temos o seguinte:

$$P = \int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L}\left[Cos\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right] - Cos\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]\right]\, dx\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right] - \frac{L}{(m+n)\pi}Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}$$

$$P = \frac{L}{2\pi}\left[\frac{1}{(m-n)}Sen\left[\frac{(m-n)\pi}{L}x\right] - \frac{1}{(m+n)}Sen\left[\frac{(m+n)\pi}{L}x\right]\right]_{-L}^{L}$$

$$P = \frac{L}{2\pi}\left\{\frac{1}{(m-n)}\left[Sen\left[(m-n)\pi\right] - Sen\left[(-1)(m-n)\pi\right]\right] + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m+n)}\left[Sen\left[(m+n)\pi\right] - Sen\left[(-1)(m+n)\pi\right]\right]\right\}$$

$$P = \frac{L}{2\pi}\left\{\frac{1}{(m-n)}\left[Sen\left[(m-n)\pi\right] + Sen\left[(m-n)\pi\right]\right] + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m+n)}\left[Sen\left[(m+n)\pi\right] + Sen\left[(m+n)\pi\right]\right]\right\}$$

$$P = \frac{L}{\pi}\left\{\frac{1}{(m-n)}Sen\left[(m-n)\pi\right] - \frac{1}{(m+n)}Sen\left[(m+n)\pi\right]\right\} = 0$$

porque em todos os casos temos múltiplos de π são tais que $Sen(k\pi) = 0$ para k inteiro.

Para $m = n$ temos o seguinte:

$$P = \int_{-L}^{L} Sen^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-L}^{L}\left[1 - Cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\right] dx\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{2m\pi}Sen\left(\frac{2m\pi}{L}x\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$P = \frac{1}{2}\left[L - (-L) - \frac{L}{2m\pi}Sen(2m\pi) + \frac{L}{2m\pi}Sen[(-1)(2m\pi)]\right]$$

$$P = L - \frac{L}{4m\pi}Sen(2m\pi) - \frac{L}{4m\pi}Sen(2m\pi) = L - \frac{L}{2m\pi}Sen(2m\pi) = L$$

já que cada função do tipo $Sen(2m\pi) = 0$ para m inteiro.

3.3. Encontrando os coeficientes da série de Fourier

Supor que a série de Fourier na forma (3.2) converge e, portanto, representamos a soma da série pela função $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \, Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) \tag{3.14}$$

Nesse contexto, pretendemos encontrar os coeficientes de a_m e b_m para uma função $f(x)$ especificada.

3.3.1. Encontrando os coeficientes a_m

Multiplicamos (3.14) por $Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ para um n fixo inteiro ($n > 0$) e integramos em relação a x de $-L$ a L:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x) \;\; Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \;\; &= \;\; \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \;\; Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \;\; Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \tag{3.15}$$

Para n fixo e diferente de zero e para m variando assim como das relações de ortogonalidade (3.5) e (3.6) verificamos que o primeiro e o último termo do lado direito de (3.15) é sempre igual a zero e o segundo termo apresenta uma integral diferente apenas quando $m = n$ e, nesse caso, essa parcela da integral é igual a L. Assim, temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \;\; Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = L \;\; a_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.16}$$

que permite encontrar os coeficientes a_n para $n \neq 0$.

Para encontrar a_o integramos (3.14) para x variando de $-L$ a L da seguinte forma:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \;\; dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \;\; dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \;\; dx$$

$$\int_{-L}^{L} f(x) \;\; dx = \frac{a_o}{2}\,[x]_{-L}^{L} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{L}{m\pi}\left[Sen(\frac{m\pi x}{L})\right]_{-L}^{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{L}{m\pi}\left[-Cos(\frac{m\pi x}{L})\right]_{-L}^{L}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x) \;\; dx = \frac{a_o}{2}[L - (-L)] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m L}{m\pi}\,[Sen(m\pi) - Sen(-m\pi)] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m L}{m\pi}\,[Cos(m\pi) - Cos(-m\pi)]$$

$$\int_{-L}^{L} f(x) \;\; dx = a_o L + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2a_m L}{m\pi} Sen(m\pi) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m L}{m\pi}\,[Cos(m\pi) - Cos(m\pi)]$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\ \ dx = a_o L \Longrightarrow a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \ dx \tag{3.17}$$

De (3.16) encontramos a forma genérica de a_n que assume a seguinte forma:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.18}$$

As relações (3.17) e (3.18) podem ser juntadas da seguinte forma:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.19}$$

3.3.2. Encontrando os coeficientes b_m

Multiplicamos (3.14) por $Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ para um n fixo inteiro $(n > 0)$ e integramos em relação a x de $-L$ a L temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\ \ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad &= \quad \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} Cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} Sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para n fixo e diferente de zero e para m variando assim como das relações de ortogonalidade (3.6) e (3.7) verificamos que o segundo termo do lado direito de (3.20) é sempre igual a zero. A integral do primeiro termo é zero porque é uma função senoidal. O terceiro termo tem uma integral diferente de zero apenas para $m = n$. Assim, (3.20) assume a seguinte forma:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\ \ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = L\ \ b_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.21}$$

que é válida para qualquer n inteiro e positivo. Assim temos a relação que nos permite encontrar b_n da seguinte forma:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.22}$$

Portanto, se a série de Fourier converge e, dessa forma, representa adequadamente uma função $f(x)$ conhecida então os coeficientes da série de Fourier podem ser encontrados usando as relações (3.19) e (3.22).

Observações: As seguintes observações são importantes;

- Se a função é periódica então o intervalo de integração pode ser mudado de $-L \leq x \leq L$ para $0 \leq x \leq 2L = T$.
- Cada elemento a_m e b_m pode ser encontrado de forma independente e a dificuldade para encontrar esses valores depende da forma matemática de $f(x)$.

Exemplo 3: Supor que existe uma série de Fourier convergindo para a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad\qquad f(x+4) = f(x)$$

Determine os coeficientes dessa série de Fourier.

$f(x)$ é mostrada na figura 2. Devemos observar que a função $f(x)$ é triangular e periódica com período $T = 2L = 4 \Longrightarrow L = 2$.

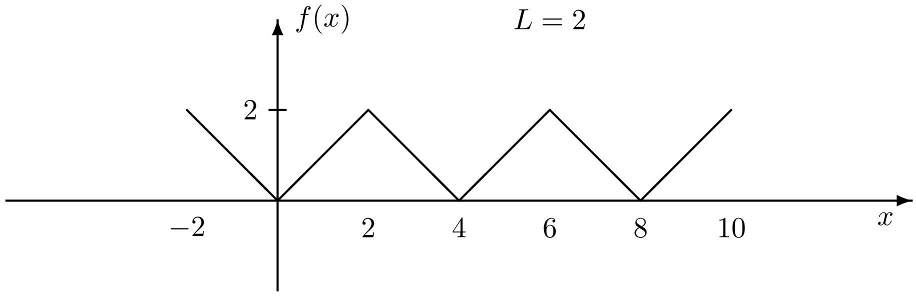

Figura 2: Gráfico de $f(x)$ do exemplo 3.

Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}\right\} = \frac{1}{2}\{2+2\} = 2$$

Encontrando a_m para $m > 1$:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} -x\, Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\, dx + \int_{0}^{2} x\, Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\, dx\right\}$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\, Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\, dx$$

Usamos a integração por partes da seguinte forma:

$u = x$ $\qquad\qquad$ $du = dx$

$dv = Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\, dx$ $\qquad\qquad$ $v = \frac{2}{m\pi} Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$

Substituindo na integral temos o seguinte:

$$\int x\, Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\, dx = \frac{2}{m\pi} x\, Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) - \int \frac{2}{m\pi}\, Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$$

$$\int x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx = \frac{2}{m\pi}x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

Usamos a relação anterior para calcular a_m:

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2}{m\pi}x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \right.$$

$$\left.\left[\frac{2}{m\pi}x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2}\right\}$$

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{-0+0-\left(\frac{2}{m\pi}\right)^2[Cos\ 0^o - Cos(-m\pi)] + 0 - 0 + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2[Cos(m\pi) - Cos\ 0^o]\right\}$$

$$a_m = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m\pi}\right)^2[2Cos(m\pi) - 2] = \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2[Cos(m\pi) - 1] \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Quando m é impar $\Longrightarrow Cos(m\pi) = -1 \Longrightarrow (Cos(m\pi) - 1) = -2$.

Quando m é par $\Longrightarrow Cos(m\pi) = 1 \Longrightarrow (Cos(m\pi) - 1) = 0$.

Portanto os coeficientes a_m assumem a seguinte forma:

$$a_m = \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2} & \text{para } m \text{ impar} \\ \\ 0 & \text{para } m \text{ par} \end{cases}$$

Encontrando b_m:

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} -x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx + \int_{0}^{2} x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx\right\}$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx$$

Usamos a integração por partes da seguinte forma:

$u = x$ $\qquad\qquad$ $du = dx$

$dv = Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx$ $\qquad\qquad$ $v = -\frac{2}{m\pi}Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$

Substituindo na integral temos o seguinte:

$$\int x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx = -\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \int \frac{2}{m\pi}\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$$

$$\int x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx = -\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

Usamos a relação anterior para calcular b_m:

$$b_m = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \right.$$

$$\left.\left[-\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2}\right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2}\left\{0 - 0 - \frac{2}{m\pi}(-2)Cos(-m\pi) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 Sen(-m\pi) - \frac{2}{m\pi}(2)Cos(m\pi) + 0 + 0 - 0\right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{m\pi}Cos(m\pi) - \frac{4}{m\pi}Cos(m\pi)\right] = 0 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, $f(x)$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[Cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3^2}Cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5^2}Cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{1}{7^2}Cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \ldots\frac{1}{m^2}Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \ldots\right]$$

para m impar.

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}Cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right]$$

Exemplo 4: Resolvendo o exemplo anterior mas com outra estrutura:

Supor que existe uma série de Fourier convergindo para a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \qquad\qquad f(x+4) = f(x)$$

Determine os coeficientes dessa série de Fourier.

O gráfico de $f(x)$ é mostrada na figura 3. Devemos observar que a função $f(x)$ é triangular e periódica com período $T = 2L = 4 \Longrightarrow L = 2$. Neste caso integramos no intervalo de 0 a $2L = T = 4$ que também é possível.

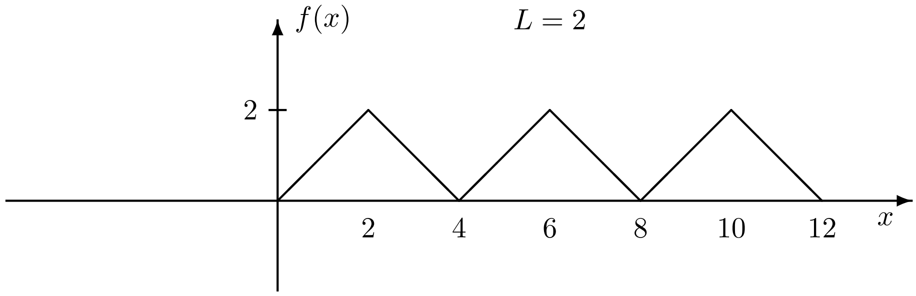

Figura 3: Gráfico de $f(x)$ do exemplo 4.

Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\,dx + \int_2^4 (-x+4)\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^4\right\}$$

$$a_o = \frac{1}{2}\left\{[2+0]+[-8+16+2-8]\right\} = 2$$

Encontrando a_m para $m > 1$:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx + \int_2^4 (4-x)\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx\right\}$$

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx + \int_2^4 4\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx - \int_2^4 x\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx\right\}$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx$$

Mas esse tipo de integral já foi encontrado no exemplo anterior e assume a seguinte forma:

$$\int x\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\,dx = \frac{2}{m\pi}x\,Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\,Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

Usamos a relação anterior para calcular a_m:

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2}{m\pi}x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + 4\left[\frac{2}{m\pi}\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_2^4 - \right.$$

$$\left.\left[\frac{2}{m\pi}x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_2^4\right\}$$

$$a_m = \frac{1}{2}\left\{\left[0 + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 Cos(m\pi) - 0 - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\right] + 0 - \left[0 + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 Cos(2m\pi) - 0 - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 Cos(m\pi)\right]\right\}$$

$$a_m = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 [Cos(m\pi) - 1]\,(2) = \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 [Cos(m\pi) - 1] \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Quando m é impar $\Longrightarrow Cos(m\pi) = -1 \Longrightarrow (Cos(m\pi) - 1) = -2$.

Quando m é par $\Longrightarrow Cos(m\pi) = 1 \Longrightarrow (Cos(m\pi) - 1) = 0$.

Portanto os coeficientes a_m assumem a seguinte forma:

$$a_m = \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2} & \text{para } m \text{ impar} \\ \\ 0 & \text{para } m \text{ par} \end{cases}$$

Encontrando b_m:

$$b_m = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\ Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx + \int_2^4 (4 - x)\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx\right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx + \int_2^4 4\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx - \int_2^4 x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx\right\}$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx$$

Esse tipo de integral já foi encontrado no exemplo anterior e assume a seguinte forma:

$$\int x\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\ dx = -\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$

Usamos a relação anterior para calcular b_m:

$$b_m = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{8}{m\pi}\left[Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_2^4 - \right.$$

$$\left.\left[-\frac{2}{m\pi}x\ Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_2^4\right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{4}{m\pi}Cos(m\pi) + 0 + 0 - 0\right] - \frac{8}{m\pi}\left[Cos(2m\pi) - Cos(m\pi)\right] - \right.$$

$$\left.\left[-\frac{8}{m\pi}Cos(2m\pi) + 0 + \frac{4}{m\pi}Cos(m\pi) - 0\right]\right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{m\pi}Cos(m\pi) - \frac{8}{m\pi}Cos(2m\pi) + \frac{8}{m\pi}Cos(m\pi) + \frac{8}{m\pi}Cos(2m\pi) - \frac{4}{m\pi}Cos(m\pi)\right] = 0$$

$$b_m = 0 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, $f(x)$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[Cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3^2}Cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5^2}Cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{1}{7^2}Cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \ldots \frac{1}{m^2}Cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \ldots\right]$$

para m impar.

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}Cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right]$$

Deve-se observar que o resultado obtido é o mesmo do exemplo 3 já que estamos resolvendo o mesmo problema. Apenas mudamos a faixa escolhida para a integração.

3.4. O Teorema de Convergência de Fourier

Neste caso vamos supor que conhecemos uma função $f(x)$. Se $f(x)$ é uma função periódica com período $T = 2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$ então podemos calcular os coeficientes a_m e b_m da seguinte forma:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.23}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.24}$$

e montar a série de Fourier correspondente:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \, Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) \tag{3.25}$$

Nesse contexto estamos interessados em conhecer se a série (3.25) converge para algum valor de x e, se realmente converge, queremos saber se converge para o valor de $f(x)$.

Os matemáticos descobriram que existem casos em que a série de Fourier encontrada para uma função $f(x)$ pode não convergir para $f(x)$ e ainda existem casos em que a série pode divergir. É relativamente simples identificar funções $f(x)$ cujas séries de Fourier não convergem para pontos isolados. Por outro lado, as funções cuja série de Fourier divergem em um ou mais pontos são mais difíceis de construir e são consideradas patológicas.

As hipóteses de garantia de convergência de uma série de Fourier para a função $f(x)$ é mostrada no Teorema 1.

Teorema 1: Sobre convergência da série de Fourier

Supor que $f(x)$ e $f^{'}(x)$ são funções seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$. Adicionalmente $f(x)$ está definida no intervalo $-L \leq x \leq L$ de forma que seja periódica e com período $2L$. Nesse contexto $f(x)$ tem uma série de Fourier dada pela relação:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \, Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) \tag{3.26}$$

e cujos coeficientes são dados por (3.23) e (3.24). Então a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde $f(x)$ **é continua** e converge para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ em todos os pontos em que $f(x)$ é descontínua.

Observações: As seguintes observações são importantes:

1. Devemos observar que $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ é o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto de descontinuidade x e em pontos em que $f(x)$ é contínua esse valor representa o próprio valor de $f(x)$. $f(x_o^+)$ é usado para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow x_o$ pela direita e $f(x_o^-)$ é usado para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \longrightarrow x_o$ pela esquerda.

2. As condições dadas no Teorema 1 são suficientes para a convergência de uma série de Fourier e essas condições não são necessárias.

3. Uma função é seccionalmente contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser particionado em um número finito de pontos $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$ de modo que seja verdadeiro o seguinte:

   a) $f(x)$ é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$.

   b) $f(x)$ tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo quando aproximadas do interior do intervalo. Não é necessário que a função se encontre definida nos pontos de partição x_i. Também não é essencial que o intervalo seja fechado (pode ser aberto ou fechado em cada extremidade). A figura 4 mostra uma função seccionalmente contínua.

4. Existem muitas funções que satisfazem as condições do Teorema 1 (praticamente todas as que interessam na Engenharia Elétrica). Funções que não satisfazem as exigências do Teorema 1 são aquelas que tem descontinuidades infinitas no intervalo $[-L, L]$ como $\frac{1}{x^2}$ quando $x \rightarrow 0$ ou $Ln|x-L|$ quando $x \rightarrow L$.

Figura 4: Uma função $f(x)$ seccionalmente contínua.

Entretanto, existem funções que não satisfazem as exigências do Teorema 1 mas a série correspondente converge para $f(x)$.

Exemplo 5: Série de Fourier de uma onda quadrada:

Encontrar a série de Fourier de $f(x)$ definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -L \leq x \leq 0 \\ \\ L & \text{se} \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} \qquad\qquad f(x+2L) = f(x)$$

A onda quadrada é mostrada na figura 5.

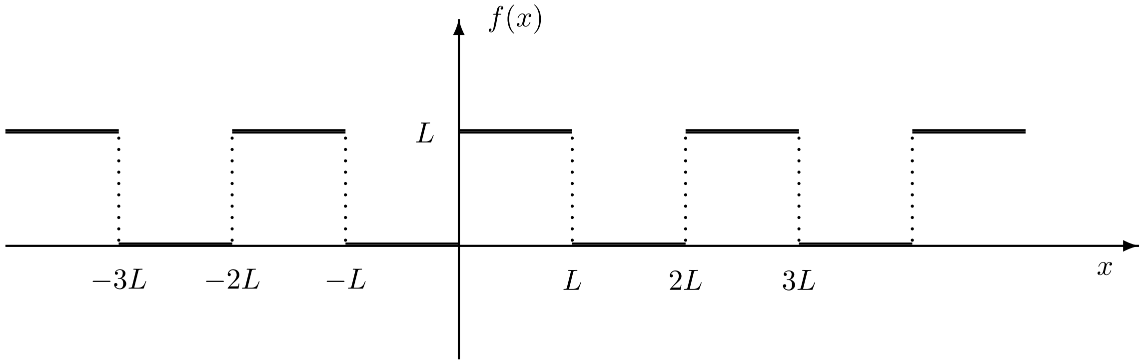

Figura 5: Uma onda quadrada

Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\,dx = [x]_0^L = L$$

Encontrando a_m para $m > 1$:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\, Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{0}^{L} Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx$$

$$a_m = \frac{L}{m\pi}\left[Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]_0^L = 0 \Longrightarrow a_m = 0 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Encontrando b_m:

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\, Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{0}^{L} Sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx$$

$$b_m = -\frac{L}{m\pi}\left[Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]_0^L = -\frac{L}{m\pi}\left[Cos(m\pi) - 1\right] = \frac{L}{m\pi}\left[1 - Cos(m\pi)\right]$$

Se m é impar então $b_m = \frac{2L}{m\pi}$ e se m for par então $b_m = 0$. Assim, b_m assume a seguinte forma:

$$b_m = \begin{cases} \frac{2L}{m\pi} & \text{para } m \text{ impar} \\ \\ 0 & \text{para } m \text{ par} \end{cases}$$

Portanto, $f(x)$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left[Sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3}Sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5}Sen\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \ldots\right]$$

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Sen\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]}{(2n+1)}$$

3.5. Funções pares e impares e as séries de Fourier em senos e cosenos

Em algumas aplicações é necessário expandir uma função $f(x)$, definida originalmente para o intervalo $[0, L]$ em uma série de Fourier de período $2L$. Essa expansão pode ser realizada de várias formas e cada tipo de expansão é válida apenas para o intervalo $[0, L]$. Para apresentar esse tipo de expansão precisamos definir e usar as propriedades das funções pares e impares.

Uma função é par se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se satisfaz a relação:

$$f(-x) = f(x) \tag{3.27}$$

São exemplos de funções pares: x^2, $Cos(nx)$, $|x|$, etc.

Uma função é impar se seu domínio contém $-x$ sempre que contiver x e se satisfaz a relação:

Figura 6: Função par e impar.

$$f(-x) = -f(x) \tag{3.28}$$

São exemplos de funções pares: x, x^3, $Sen(nx)$, etc. A figura 6 mostra uma função par e uma função impar.

Observação: A maioria das funções não são pares nem impares. De (3.28) concluimos que se $x = 0$ faz parte do domínio de $f(x)$ então $f(0) = 0$. Também a função identicamente nula é a única que é ao mesmo tempo par e impar.

Propriedades das funções pares e impares: As seguintes propriedades relacionadas com funções pares e impares são muito importantes:

1. A soma (ou diferença) e o produto (ou quocente) de duas funções pares é uma função par.
2. A soma (ou diferença) de duas funções impares é uma função impar mas o produto (ou quocente) de duas funções impares é uma função par.
3. A soma (ou diferença) de uma função par e uma função impar não é uma função par nem uma função impar mas o produto dessas funções é uma função impar.
4. Se $f(x)$ é uma função par então temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx \tag{3.29}$$

5. Se $f(x)$ é uma função impar então temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0 \tag{3.30}$$

A demonstração dessas propriedades é relativamente simples e são realizados abaixo.

1. Prova da primeira propriedade: Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funções pares:

   Seja $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$g(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = g(x) \Longrightarrow g(x) \text{ é uma função par}$$

Seja $h(x) = f_1(x)f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = h(x) \Longrightarrow h(x) \text{ é uma função par}$$

2. Prova da segunda propriedade: Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funções impares:
   Seja $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$g(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) = -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x) \Longrightarrow g(x) \text{ é uma função impar}$$

   Seja $h(x) = f_1(x)f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = (-1)(-1)f_1(x)f_2(x) = f_1(x)f_2(x) = h(x) \Longrightarrow h(x) \text{ é uma função par}$$

3. Prova da terceira propriedade: Seja $f_1(x)$ uma função par e $f_2(x)$ uma função impar:
   Seja $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$g(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x) \Longrightarrow g(x) \text{ é uma função que não é par nem impar}$$

   Seja $h(x) = f_1(x)f_2(x)$. Nesse contexto temos o seguinte:

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = (-1)f_1(x)f_2(x) = -h(x) \Longrightarrow h(x) \text{ é uma função impar}$$

4. Prova da quarta propriedade: Seja $f(x)$ uma função par. Nesse contexto temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \tag{3.31}$$

   Trabalhamos com a primeira integral do lado direito da equação da seguinte forma:
   Fazemos: $x = -s \Longrightarrow$: Se $x = 0 \Longrightarrow s = 0$ e se $x = -L \Longrightarrow -L = -s \Longrightarrow s = L$. Também $f(x) = f(-s) = f(s)$ (função par) e $dx = -ds$. Substituindo as relações anteriores na primeira integral do lado direito de (3.31) temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{L}^{0} f(s)(-ds) = -\int_{L}^{0} f(s)ds = \int_{0}^{L} f(s)ds$$

   Substituindo a relação anterior em (3.31) temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(s)ds + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

5. Prova da quinta propriedade: Seja $f(x)$ uma função impar. Nesse contexto temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \tag{3.32}$$

Trabalhamos com a primeira integral do lado direito da equação da seguinte forma:

Fazemos: $x = -s \Longrightarrow$: Se $x = 0 \Longrightarrow s = 0$ e se $x = -L \Longrightarrow -L = -s \Longrightarrow s = L$. Também $f(x) = f(-s) = -f(s)$ (função impar) e $dx = -ds$. Substituindo as relações anteriores na primeira integral do lado direito de (3.32) temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{L}^{0} -f(s)(-ds) = \int_{L}^{0} f(s)ds = -\int_{0}^{L} f(s)ds$$

Substituindo a relação anterior em (3.32) temos o seguinte:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = -\int_{0}^{L} f(s)ds + \int_{0}^{L} f(x)dx = -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$$

3.5.1. Séries (de Fourier) em Cosenos

Neste caso provamos que se $f(x)$ é uma função par então a série de Fourier correspondente é representado apenas por funções coseno, isto é, todos os $b_n = 0$.

Supor que $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$ e que $f(x)$ é uma função períodica par com período $2L$. Nesse contexto a função $f(x)Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função par e $f(x)Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função impar. Portanto, de (3.29) e (3.30) temos o seguinte:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.33}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.34}$$

Assim, a série de Fourier de uma função $f(x)$ que é par assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.35}$$

Portanto, a série de Fourier de uma função par é formado pelo termo constante e pelas funções trigonomêtricas pares da forma $Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Esse tipo de série é chamado de série de Fourier em cosenos.

3.5.2. Séries (de Fourier) em Senos

Neste caso provamos que se $f(x)$ é uma função impar então a série de Fourier correspondente é representado apenas por funções seno, isto é, todos os $a_n = 0$.

Supor que $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$ e que $f(x)$ é uma função períodica impar com período $2L$. Nesse contexto a função $f(x)Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função impar e $f(x)Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função par. Portanto, de (3.29) e (3.30) temos o seguinte:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.36}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.37}$$

Assim, a série de Fourier de uma função $f(x)$ que é impar assume a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.38}$$

Portanto, a série de Fourier de uma função impar é formado apenas pelas funções trigonomêtricas ímpares da forma $Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Esse tipo de série é chamado de série de Fourier em senos.

Exemplo 6: Série de Fourier de uma função impar:

Seja $f(x) = x$ para $-L \leq x \leq L$ e seja $f(-L) = f(L) = 0$ (para que a função seja impar). Seja $f(x)$ definida no intervalo restante de forma que seja periódica com período $2L$. Essa função é chamada de dente de serra. Encontre a série de Fourier dessa função.

A figura 7 mostra a forma gráfica de $f(x)$.

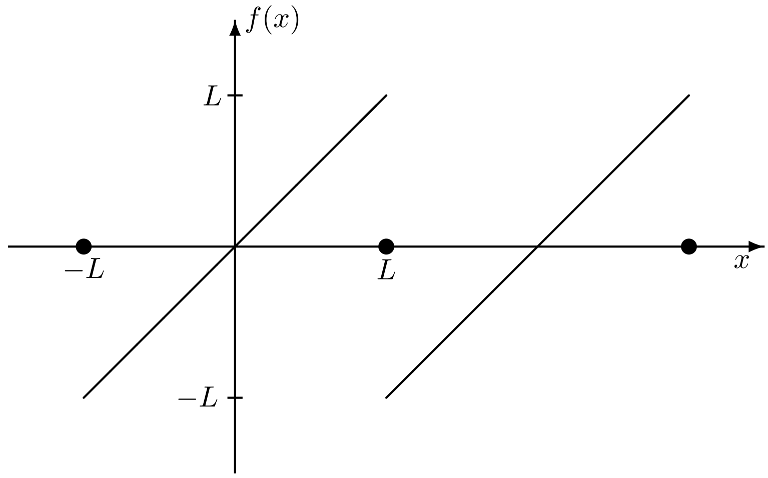

Figura 7: Uma função dente de serra.

Pode-se verificar que $f(x)$ é uma função impar e seus coeficientes de Fourier assumem a seguinte forma:

$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Precisamos encontrar a integral da seguinte forma:

$$\int_{0}^{L} x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Esse tipo de integral pode ser integrada por partes como já foi realizada anteriormente. Assim, temos o seguinte:

$u = x \qquad\qquad du = dx$

$dv = Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad\qquad v = -\frac{L}{n\pi} Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Assim, a integral procurada assume a seguinte forma:

$$\int x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} \int Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\int x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.39}$$

A relação (3.39) aparece com frequência em problemas de séries de Fourier e merece ser lembrado. Substituíndo essa relação na integral para calcular b_n temos o seguinte:

$$b_n = \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{n\pi} x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$b_n = \frac{2}{L}\left[-\frac{L^2}{n\pi}\ Cos(n\pi) + 0 + 0 - 0\right] = \frac{2L}{n\pi}\left[-Cos(n\pi)\right]$$

Para n impar $-Cos(n\pi) = 1$ e para n par $-Cos(n\pi) = -1$. Portanto, b_n assume a seguinte forma:

$$b_n = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A série de Fourier de $f(x)$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.40}$$

Para o caso particular em que $L = 2$ a série assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

3.6. Representação de uma função por uma série em senos ou cosenos

Sempre é possível representar uma função periódica por uma série com elementos apenas em senos ou cosenos. Para verificar este fato observemos que a forma matemática de $f(x)$ nos exemplos 3 e 6 são exatamente iguais no intervalo $0 \leq x \leq 2$ para $L = 2$. Portanto, as séries encontradas para as funções dos exemplos 3 e 6 representam de forma adequada a função periódica $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 2$. Assim, a função periódica $f(x)$:

$$f(x) = x \qquad 0 \leq x \leq 2 \qquad f(x+2) = f(x) \tag{3.41}$$

pode ser representada por uma série de Fourier (provavelmente com elementos seno e coseno) considerando o período $T = 2$ ($L = 1$). Entretanto, $f(x)$ pode ser transformado na função $f(x)$ do exemplo 3 com $L = 2$ e a série de Fourier dessa função modificada representa de forma adequada a função $f(x)$ de (3.41) para o intervalo $0 \leq x \leq 2$ (para $-2 \leq x \leq 0$ essa série obviamente não representa de forma adequada $f(x)$ em (3.41) nesse intervalo). Da mesma forma $f(x)$ pode ser transformado na função $f(x)$ do exemplo 6 com $L = 2$ e a série de Fourier dessa função modificada representa de forma adequada a função $f(x)$ de (3.41) para o intervalo $0 \leq x \leq 2$. Portanto, a função periódica $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2$ pode ser representado por 3 tipos de séries diferentes (um tipo de série com funções seno e coseno, um tipo de série apenas com funções coseno e um tipo de série apenas com funções seno).

Para que uma função periódica seja representada apenas por senos ou cosenos então essa função $f(x)$ deve ser adequadamente extendida. Assim, seja $f(x)$ uma função periódica definida em $0 \leq x \leq L$.

Para representar $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq L$ por uma série de Fourier em cosenos devemos extender $f(x)$ para o intervalo $-L \leq x \leq L$ de forma que se transforme em uma função par. De forma semelhante, para representar $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq L$ por uma série de Fourier em senos devemos extender $f(x)$ para o intervalo $-L \leq x \leq L$ de forma que se transforme em uma função impar. Se $f(x)$ for extendida de outra forma então a série de Fourier converge para $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq L$ mas deve ter termos em senos e cosenos.

Em resumo, se pretendemos expandir uma função $f(x)$, originalmente definida no intervalo $[0, L]$, em uma série de Fourier de período $2L$ então existem as seguintes alternativas:

1. Definir uma função $g(x)$ de período $2L$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ \\ f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

   A função $g(x)$ é uma extensão periódica par de $f(x)$. Assim, a série de Fourier de $g(x)$ representa adequadamente $f(x)$ no intervalo $[0, L]$.

2. Definir uma função $h(x)$ de período $2L$ tal que:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ \\ 0 & x = 0 \ \text{ e } \ x = L \\ \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

   A função $h(x)$ é uma extensão periódica impar de $f(x)$. Assim, a série de Fourier de $h(x)$ representa adequadamente $f(x)$ no intervalo $[0, L]$.

3. Definir uma função $p(x)$ de período $2L$ tal que:

$$p(x) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{3.44}$$

   e defina $p(x)$ em $(-L, 0)$ de qualquer forma desde que seja consistente com o Teorema de convergência de Fourier. Assim, existem muitas formas de séries e todas convergindo para $f(x)$ no intervalo original.

Essas séries envolvem termos em senos e cosenos. Uma forma trivial seria com $p(x) = 0$ para $-L \leq x \leq 0$.

Exemplo 7: Série de Fourier de uma função $f(x)$:

Seja $f(x) = x$ definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x \leq 1 \\ \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad\qquad f(x+2) = f(x)$$

Encontre a série de Fourier dessa função.

O gráfico de $f(x)$ é mostrada na figura 8.

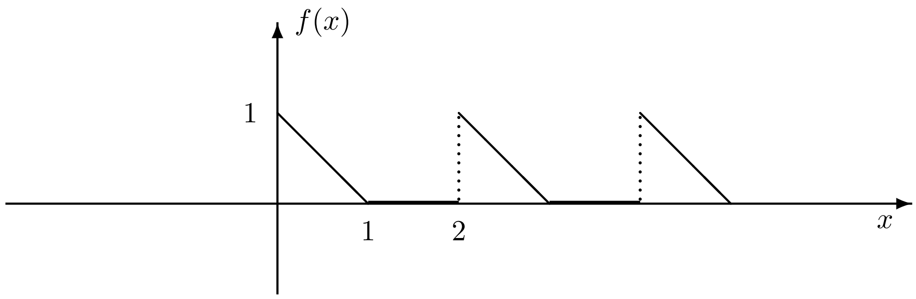

Figura 8: Função original do exemplo 7.

A função $f(x)$ é expandida em séries de Fourier de 3 formas diferentes:

1. Extendendo $f(x)$ para uma função par: A figura 9 mostra a função extendida.

   Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\; dx = \frac{2}{2}\int_0^1 (1-x)\; dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = [1 - \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$$

   Encontrando a_n:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\; Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\; dx = \frac{2}{2}\int_0^1 (1-x)\; Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$a_n = \int_0^1 Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - \int_0^1 x\; Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

   Neste capítulo já foi encontrada a forma matemática da seguinte integral:

$$\int x\; Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{n\pi} x Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

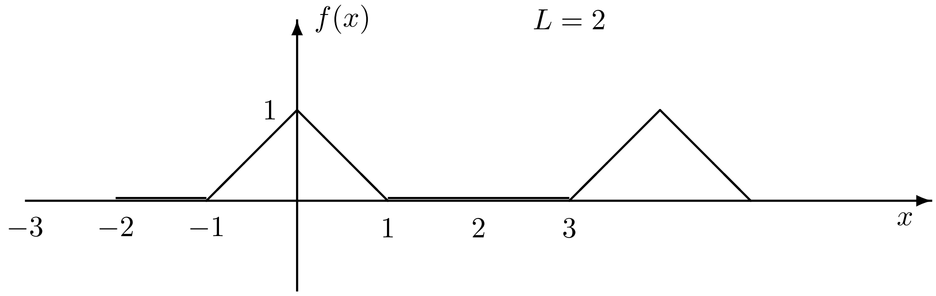

Figura 9: Extensão par da função do exemplo 7.

Usando a relação anterior temos o seguinte:

$$a_n = \left[\frac{2}{n\pi}Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \left[\frac{2}{n\pi}x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$a_n = \left[\frac{2}{n\pi}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right] - \left[\frac{2}{n\pi}\ Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \left[Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]\right]$$

$$a_n = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \left[1 - Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Quando n é impar então $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ então temos o seguinte:

$$a_n = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Quando n é par então $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$ para $n = 2, 6, 10, \ldots$ e $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$ para $n = 4, 8, 12, \ldots$ e, portanto, temos o seguinte:

$$a_n = 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \qquad n = 2, 6, 10, \ldots$$

$$a_n = 0 \qquad n = 4, 8, 12, \ldots$$

Obviamente como foi realizada uma extensão de $f(x)$ para uma função par então todos os coeficientes $b_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Portanto, $f(x)$ pode ser representada pela seguinte série de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left\{Cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{9}Cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{25}Cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots\right\} +$$

$$\frac{8}{\pi^2}\left\{\frac{1}{4}Cos\left(\pi x\right) + \frac{1}{36}Cos\left(3\pi x\right) + \frac{1}{100}Cos\left(5\pi x\right) + \ldots\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right]}{(2k+1)^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Cos\left[(2k+1)\pi x\right]}{(2k+1)^2}$$

2. Extendendo $f(x)$ para uma função impar: A figura 10 mostra a função extendida.

   Neste caso temos que todos os $a_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ já que estamos realizando uma extensão impar da função $f(x)$.

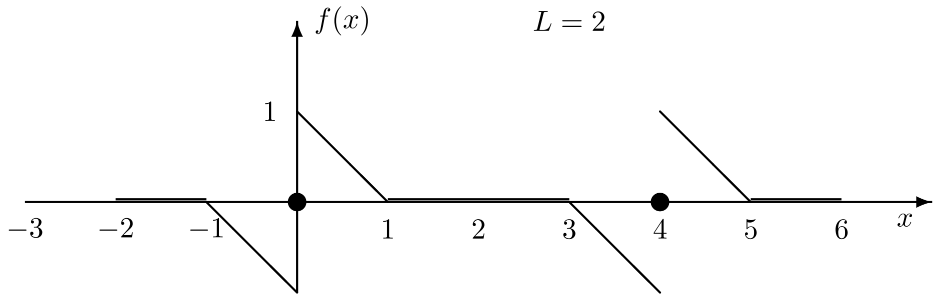

Figura 10: Extensão impar da função do exemplo 7.

   Encontrando b_n:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx = \frac{2}{2}\int_0^1 (1-x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \int_0^1 Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - \int_0^1 x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

   Neste capítulo já foi encontrada a forma matemática da seguinte integral:

$$\int x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} x Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

   Usando a relação anterior temos o seguinte:

$$b_n = \left[-\frac{2}{n\pi} Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \left[\frac{2}{n\pi} x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$b_n = \left[\frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{2}{n\pi}\left[Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right] - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \left(Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

   Quando n é impar então $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$ para $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$ e $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$ para $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$ e, portanto, temos o seguinte:

$$b_n = \frac{2}{n\pi} - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \frac{2}{n\pi}\right) \qquad n = 1, 5, 9, 13, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 = \frac{2}{n\pi}\left(1 + \frac{2}{n\pi}\right) \qquad n = 3, 7, 11, 15, \ldots$$

Quando n é par então $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ para $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ e, portanto, temos o seguinte:

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

A série de Fourier da função $f(x)$ expandida assume a seguinte forma:

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\right) Sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{5\pi} - \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2\right) Sen\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{\pi} Sen(\pi x) + \frac{1}{2\pi} Sen(2\pi x) \ldots +$$

$$\left(\frac{2}{3\pi} + \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2\right) Sen\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{7\pi} + \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2\right) Sen\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \ldots$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4k+1} - \frac{2}{(4k+1)^2\pi}\right] Sen\left(\frac{4k+1}{2}\pi x\right) + \right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4k-1} + \frac{2}{(4k-1)^2\pi}\right] Sen\left(\frac{(4k-1)\pi x}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k} Sen\,(k\pi x)\right\}$$

3. Extendendo $f(x)$ fazendo $p(x) = 0$ para $-L \leq x < 0$:

   Neste caso a função extendida não é par nem impar e, portanto, a série de Fourier da função extendida pode ter termos em senos e cosenos. A gráfica da função extendida é mostrada na figura 11.

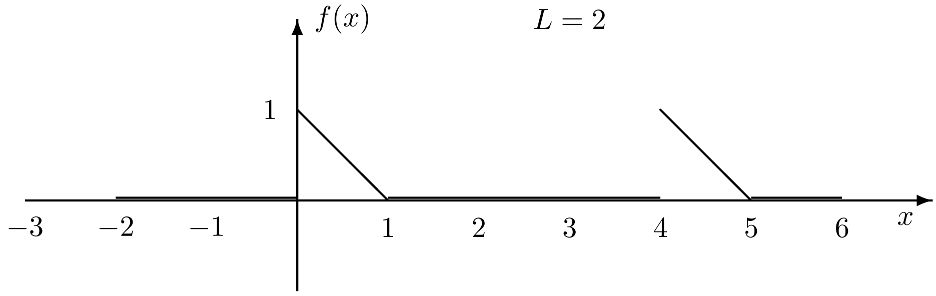

Figura 11: Extensão da função do exemplo 7.

Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)\ dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Encontrando a_n para $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\; Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\; dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)\; Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2}{n\pi}Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \left[\frac{2}{n\pi}x\; Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\left[1 - Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Quando n é impar então $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ e temos o seguinte:

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} \qquad\qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Quando n é par então $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$ para $n = 2, 6, 10, \ldots$ e $Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$ para $n = 4, 8, 12, \ldots$. Portanto, para n par temos o seguinte:

$$a_n = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \qquad\qquad n = 2, 6, 10, \ldots$$

$$a_n = 0 \qquad\qquad n = 4, 8, 12, \ldots$$

Encontrando b_n:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\; dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)\; Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \left[\frac{2}{n\pi}x\; Cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Quando n é impar então $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$ para $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$ e $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$ para $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$ e, portanto, temos o seguinte:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(n\pi)^2} \qquad\qquad n = 1, 5, 9, 13, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2} \qquad\qquad n = 3, 7, 11, 15, \ldots$$

Quando n é par então $Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ para $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ e, portanto, temos o seguinte:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

A série de Fourier da função $f(x)$ expandida assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right]}{(2k+1)^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Cos\left[(2k+1)\pi x\right]}{[2(2k+1)]^2} + \ldots + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}Sen(k\pi x) +$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{2}{(4k+1)^2\pi}\right)Sen\left[\frac{(4k+1)\pi x}{2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-1} + \frac{2}{(4k-1)^2\pi}\right)Sen\left[\frac{(4k-1)\pi x}{2}\right]\right\}$$

4. Encontrando a série de Fourier sem extensão:

   Neste caso encontramos a série de Fourier de $f(x)$ sem extensão o que também é possível. Devemos observar que neste caso temos $L = 1$. A gráfica é mostrada na figura 12 que é a mesma da figura 8 onde apenas foi adicionada a informação de que $L = 1$.

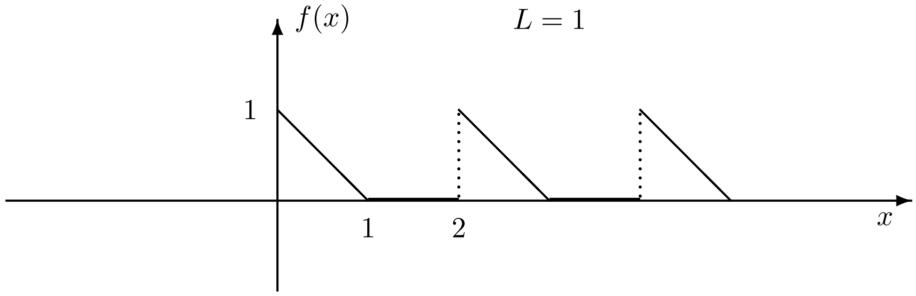

Figura 12: Função original sem extensão.

Neste caso vamos encontrar relações matemáticas alternativas para encontrar a_n e b_n que aparecem na maioria dos livros da engenharia elétrica. Neste material a forma matemática de a_n e b_n assumem a seguinte forma:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.45}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.46}$$

As duas relações anteriores realizam uma integração para um período completo e a escolha dos límites de $-L$ a $L = \frac{T}{2}$ é arbitrária e escolhida pelos matemáticos para facilitar o processo de integração. Assim, podemos escolher outros limites desde que a integração seja para um período completo. Assim, as relações anteriores podem ser escritas da seguinte forma

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{2L=T} f(x)\, Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.47}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.48}$$

Vamos trabalhar apenas com a relação (3.47). Sabendo que $L = \frac{T}{2}$ temos o seguinte:

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{T} f(x)\; Cos\left(\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\; Cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Finalmente, lembrando que $\frac{2\pi}{T} = w$ então temos o seguinte:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\; Cos\,(nwx) \tag{3.49}$$

Da mesma forma podemos encontrar uma forma matemática para b_n que assume a seguinte forma:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\; Sen\,(nwx) \tag{3.50}$$

Portanto, encontramos a série de Fourier da função original usando as relações (3.49) (3.50) sendo que $T = 2L = 2$.

Encontrando a_o:

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\;\; dx = \frac{2}{2}\int_0^{1}(1-x)\; dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Encontrando a_n para $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\; Cos\,(nwx)\;\; dx = \frac{2}{2}\int_0^{1}(1-x)\; Cos\,(nwx)\, dx$$

$$a_n = \int_0^{1} Cos\,(nwx)\, dx - \int_0^{1} x\; Cos\,(nwx)\, dx$$

$$a_n = \left[\frac{1}{nw}Sen(nwx)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{nw}x\; Sen(nwx) + \frac{1}{(nw)^2}\; Cos(nwx)\right]_0^1$$

Sabendo que $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ temos o seguinte:

$$a_n = \left[\frac{1}{n\pi}Sen(n\pi x)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n\pi}x\; Sen(n\pi x) + \frac{1}{(n\pi)^2}\; Cos(n\pi x)\right]_0^1$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}Sen(n\pi) - \left[\frac{1}{n\pi}[Sen(n\pi) - 0] + \frac{1}{(n\pi)^2}[Cos(n\pi) - 1]\right] = \frac{1}{(n\pi)^2}[1 - Cos(n\pi)]$$

Quando n é impar então $Cos(n\pi) = -1$ e quando n é par então $Cos(n\pi) = 0$ e, portanto, temos o seguinte:

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} \qquad\qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$a_n = 0 \qquad\qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Encontrando b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\; Sen\,(nwx)\;\; dx = \frac{2}{2}\int_0^1 (1-x)\; Sen\,(nwx)\, dx$$

$$b_n = \int_0^1 Sen\,(nwx)\, dx - \int_0^1 x\; Sen\,(nwx)\, dx$$

Podemos deduzir facilmente a seguinte relação:

$$\int x\; Sen\,(nwx)\, dx = -\frac{1}{nw}x\; Cos(nwx) + \frac{1}{(nw)^2}Sen(nwx)$$

Usando a relação anterior b_n assume a seguinte forma:

$$b_n = \left[-\frac{1}{nw}Cos(nwx)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{nw}x\; Cos(nwx) - \frac{1}{(nw)^2}\; Sen(nwx)\right]_0^1$$

Sabendo que $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ temos o seguinte:

$$b_n = \left[\frac{1}{n\pi}[1 - Cos(n\pi)] + \left[\frac{1}{n\pi}[Cos(n\pi) - 0\right] - \frac{1}{(n\pi)^2}\,[Sen(n\pi) - 0]\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, $f(x)$ assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\left\{Cos(\pi x) + \frac{1}{9}Cos(3\pi x) + \frac{1}{25}Cos(5\pi x) + \ldots\right\} +$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{Sen(\pi x) + \frac{1}{2}Sen(2\pi x) + \frac{1}{3}Sen(3\pi x) + \ldots\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Cos[(2k+1)\pi x]}{(2k+1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Sen[k\pi x]}{k}$$

3.7. Problemas propostos

1. Determine se a função dada é periódica. Se for encontre o período fundamental:

   (a) $f(x) = sen\ 5x$ (b) $f(x) = cos\ 2\pi\ x$ (c) $f(x) = senh\ 2x$

   (d) $f(x) = sen\ \frac{\pi\ x}{L}$ (e) $f(x) = tg\ \pi\ x$ (f) $f(x) =\ x^2$

   (g) $f(x) = \begin{cases} 0 & 2n-1 \leq x \leq 2n \\ \\ 1 & 2n \leq x < 2n+1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

   (h) $f(x) = \begin{cases} (-1)^n & 2n-1 \leq x < 2n \\ \\ 1 & 2n \leq x < 2n+1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Nas funções mostradas: (a) Esboce o gráfico da função para 3 períodos e, (b) Encontre a série de Fourier da função.

   (a) $f(x) = -x \qquad -L \leq x < L \qquad f(x+2L) = f(x)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & -L \leq x < 0 \\ \\ 0 & 0 \leq x < L \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x+L & -L \leq x \leq 0 \\ \\ L & 0 < x < L \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$

   (f) $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x \leq -1 \\ x & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

   (g) $f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x \leq 0 \\ \\ 1 & 0 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

   (h) $f(x) = x \qquad -1 \leq x < 1 \qquad f(x+2) = f(x)$

   (i) $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad -2 \leq x \leq 2 \qquad f(x+4) = f(x)$

   (j) $f(x) = \begin{cases} 0 & -3 \leq x \leq 0 \\ \\ x^2(3-x) & 0 < x < 3 \end{cases} \qquad f(x+6) = f(x)$

   (k) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & -2 \leq x < 0 \\ \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

3. Para cada função mostrada determine se a função é par, impar ou nenhuma delas:

   (a) $f(x) = x^3 - 2x$ (b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ (c) $f(x) = tg(2x)$

   (d) $f(x) = sec\ x$ (e) $f(x) = e^{-x}$

4. A continuação são mostradas funções $f(x)$ para um intervalo de comprimento L. Em cada caso, mostre as extensões par e impar de $f(x)$ para um período igual a $2L$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2 - x \qquad 0 < x < 2$ (d) $f(x) = x - 3 \qquad 0 < x < 4$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (f) $f(x) = 4 - x^2 \qquad 0 < x < 1$

5. Para as funções indicadas encontre a série de Fourier de $f(x)$ ou de $f(x)$ extendida na forma indicada.

   $a)$ Encontre a série de Fourier em cosenos com perído 4 para a função: $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$

   $b)$ Encontre a série de Fourier em senos com perído 4 para a função: $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

   $c)$ Encontre a série de Fourier de $f(x) = x \qquad 0 \leq x < 1$ com período 1.

   $d)$ Encontre a série de Fourier em cosenos de $f(x) = L - x \qquad 0 \leq x \leq L$ com período $2L$.

   $e)$ Encontre a série de Fourier em senos de $f(x) = L - x \qquad 0 < x < L$ com período $2L$.

   $f)$ Encontre a série de Fourier em senos de $f(x) = 2 - x^2 \qquad 0 < x < 2$ com período 4.

   $g)$ Encontre a série de Fourier em cosenos de $f(x) = x^2 - 2x \qquad 0 < x < 4$ com período 8.