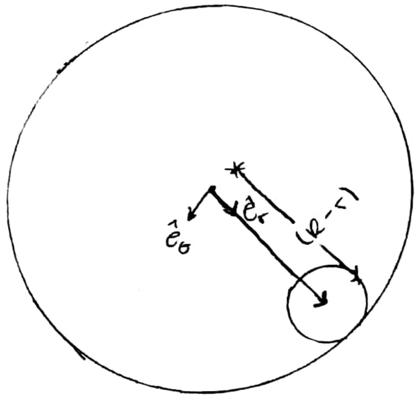
Problema 3

- Un tubo sólido pequeño de radio r se encuentra dentro de un tubo hueco más grande de radio R. Encuentra el periodo de oscilaciones del tubo pequeño moviéndose dentro del grande alrededor del punto de equilibrio




Cambiamos a coordenadas polares

teniendo el vector posición $(R-r)\hat{e}_r$

Un cambio en $d(R-r)\hat{e}_r = \hat{e}_{\theta i} - \hat{e}_{\theta f}$

$$\frac{d(R-r)}{dt} = (R-r)\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$ el radio no cambia

$$v_t = (R-r)\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \Rightarrow \frac{v_t}{r} = \frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\omega = \frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

Para encontrar el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{(R-r)\dot{\theta}}\,\hat{e}_\theta$$

Scanned by CamScanner

Problema 2

Tenemos cambio de posición respecto al ángulo

a)

$\vec{x} = \ell/2 \,\text{sen}(\alpha)$ , $V_x = \frac{\ell}{2}\cos(\alpha)\dot{\alpha}$

$y = \ell/2 \cos(\alpha)$ , $V_y = -\frac{\ell}{2}\,\text{sen}(\alpha)\dot{\alpha}$

$V^2 = \frac{\ell^2}{4}\dot{\alpha}^2$

De la energía cinética $K_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{8}m\ell^2\dot{\alpha}^2$

Consideramos energía potencial rotacional

$K_r = \frac{I}{2}\omega^2 \Rightarrow \omega = \dot{\alpha}$ , $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ (por ser una barra uniforme)

$K_r = \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\alpha}^2$

La energía potencial $U = mgh$

$U = mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha)$

Dado que la energía se conserva

$E_T = K_c + K_r + U$

$E_T$ = es la energía inicial a un ángulo $\alpha_0$

$E_T = mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha_0)$

$$mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha_0) = \frac{1}{8}\ell^2 m\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha)$$

$$mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha_0) = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos(\alpha)$$

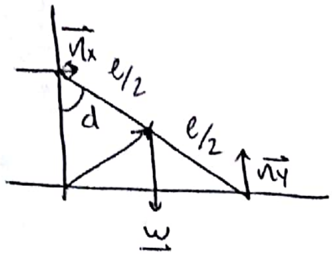
$$\frac{3g}{\ell}\cos(\alpha_0) = \dot{\alpha}^2 + \frac{3g}{\ell}\cos(\alpha)$$

Derivando respecto a tiempo

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - \frac{3g}{\ell}\sin(\alpha)\dot{\alpha} = 0$$

$$\underline{\underline{\ddot{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin(\alpha) = 0}}$$ (ec. de movimiento)

b) Mediante ley de Newton




$$\Sigma F_x = n_x = m\ddot{x}$$
$$\Sigma F_y = n_y - w = m\ddot{y}$$

donde $x = \ell/_2 \sin(\alpha)$ , $y = \ell/_2 \cos(\alpha)$

$\dot{x} = \ell/_2 \cos(\alpha)\dot{\alpha}$ , $\dot{y} = -\ell/_2 \sin(\alpha)$

$$\ddot{x} = \ell/_2 \left(\cos(\alpha)\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha)\right) \quad , \quad \ddot{y} = -\ell/_2 \left(\operatorname{sen}(\alpha)\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2\cos(\alpha)\right)$$

Teniendo que se genera un torque (la derivada del momento angular es igual al torque)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\dot{\alpha}} \qquad I = \frac{1}{12} m\ell^2 \text{ (por ser barra uniforme)}$$

$$L = \frac{1}{12} m\ell^2 \dot{\alpha} \quad , \quad \frac{dL}{dt} = \frac{1}{12} m\ell^2 \ddot{\alpha}$$

Ahora con suma de torques

$$\Sigma \tau = -\frac{\ell}{2} n_x \cos(\alpha) + \frac{\ell}{2} n_y \sin(\alpha) = \frac{1}{12} m\ell^2 \ddot{\alpha}$$

sustituyendo $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en la suma de fuerzas

$$-\ell/_2 \left(\ell/_2 \ddot{\alpha} m\cos(\alpha) - \ell/_2 m\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}(\alpha)\right)\cos(\alpha) + \ell/_2 \left(-\ell/_2 m\ddot{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha) - \ell/_2 \dot{\alpha}^2 m\cos(\alpha) + mg\right)\sin(\alpha) = \frac{dL}{dt}$$

$$\ell^2/_4 \ddot{\alpha} m\cos^2(\alpha) + \frac{\ell^2}{4} m\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \ell^2/_4 m\ddot{\alpha}\operatorname{sen}^2(\alpha) - \frac{\ell^2}{4}\dot{\alpha}^2 m \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \frac{\ell}{2} mg\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{12} m\ell^2 \ddot{\alpha}$$

Factorizando

$$-\frac{\ell^2}{4}\ddot{\alpha} m + \frac{\ell}{2} mg\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{12} m\ell^2 \ddot{\alpha}$$

$$-3\ddot{\alpha} + \frac{9}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}(\alpha) = \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \qquad \text{(ec de movimiento)}$$