Estimadores Máximo Verosímiles

Estimadores – Método de máxima verosimilitud

Sea $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, halla el estimador máximo verosímil para la media poblacional μ, si tenemos una M.A.S de tamaño n.

$X \sim N(\mu, \sigma)$ n: tamaño muestral

Función de Verosimilitud

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x_i - \mu)^2} \right]$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

Propiedad: $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

Logaritmo de la Verosimilitud:

$$l(\mu) = \ln L(\mu) = \ln(2\pi\sigma^2)^{-n/2} + \ln\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)$$

$$= \boxed{\underbrace{-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)}_{\text{No depende de } \mu} - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \cdot \cancelto{1}{\ln(e)}$$

$$0 = \frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu} = 0 + \frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\cdot\cancel{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^1\cdot(+1)$$

$$0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2} \sim \sigma^2 \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{X}$$