Valor Esperado y Varianza de una Uniforme $[a, b]$.

Varianza

$$Var(x) = \underbrace{E(x^2)} - \underbrace{(E(x))^2}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot b^3 - a^3 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

Valor Esperado

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big]_a^b = \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{b-a}} = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(x) = \frac{1}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b^3 - a^3}{b-a}\right) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4(b-a)(b^2 + b \cdot a + a^2) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)}$$

$$= \frac{4(b-a)(b^2+b\cdot a+a^2) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)}$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}\left[4b^2+4b\cdot a+4a^2-3a^2-6a\cdot b-3b^2\right]}{12\cancel{(b-a)}}$$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$