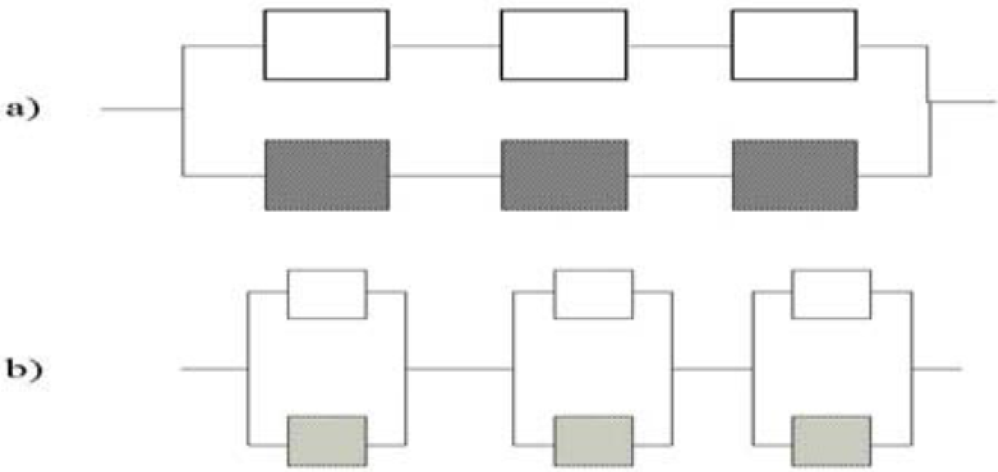
Ejercicios de Probabilidades.

1. El departamento de calidad de una fábrica de elementos de sujeción ha evaluado que cierto tipo de anclajes metálicos producidos pueden ser defectuosos debido a las siguientes causas: defectos en la rosca y defectos en las dimensiones. Se ha calculado que el 6% de los anclajes que producen tiene defectos en la rosca, mientras que el 9% tiene defectos en las dimensiones. Sin embargo, el 90% de los anclajes no tienen ningún tipo de defectos. ¿Cuál es la probabilidad de que un anclaje tenga ambos tipos de defectos?
   SOLUCIÓN: P=0.05

2. Una máquina consta de tres componentes en serie, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de fallo de 0.01. Por motivos de seguridad se decide colocar otros tres componentes, en paralelo con los primeros, para reducir el riesgo de avería de la máquina. Suponiendo que todos los componentes actúan independientemente, ¿cuál de las dos alternativas presentadas en la figura es preferible, teniendo en cuenta que, por motivos económicos, los componentes de seguridad son de inferior calidad y tienen una probabilidad de averiarse de 0.05?

   SOLUCIÓN: En el caso a) P(avería de la máquina)=4.236×10^{-3}. En el caso b) P(avería de la máquina)=1.499×10^{-3}. Por consiguiente, es preferible la alternativa b) a la a)

3. Las proporciones de piezas defectuosas fabricadas por dos máquinas M_1 y M_2 son 0.04 y 0.01, respectivamente. Se toma una pieza al azar y resulta aceptable. Sabiendo que la probabilidad de elegir una pieza de cualquiera de las dos máquinas es 0.5, calcular la probabilidad de que provenga de M_1.
   SOLUCIÓN: P=0.492

4. La probabilidad de que un componente se averíe en un período de tiempo dado es 0.01. Su estado (averiado, funcionando) se comprueba con un ensayo que cumple que cuando el componente funciona la probabilidad de que el ensayo diga lo contrario es 0.05, pero si el componente está averiado el ensayo no se equivoca. Si el ensayo indica que el componente está averiado, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté?
   SOLUCIÓN: P=0.168

5. Un laboratorio quiere introducir en el mercado un test para detectar una enfermedad. Cuando la persona está enferma, el test indica un 95% de las veces que lo está. Sin embargo, a veces el test da positivo aunque la persona no tenga la enfermedad. Esto ocurre un 1% de las veces. Si el 0.5% de la población está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad cuando el test así lo indica?
   SOLUCIÓN: P=0.323

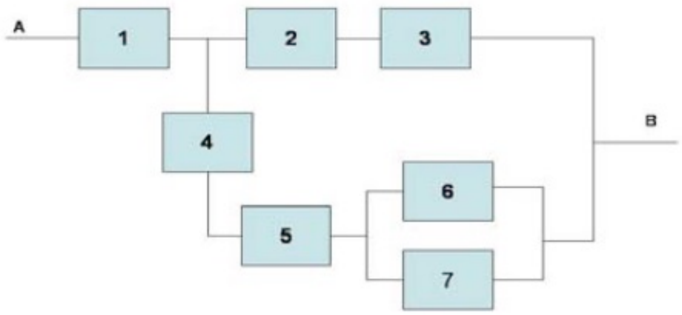
6. En un sistema protegido por una alarma, la probabilidad de que se produzca una situación de peligro es 0.1. Si ésta se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber existido peligro es 0.03. Hallar la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro.
   SOLUCIÓN: P=0.2213

7. Tres máquinas A, B y C producen piezas con una proporción de defectuosas del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se tiene un lote compuesto por 100 piezas de A, 50 de B y 50 de C. Se extrae una pieza al azar.
   (a) Calcular la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.
   (b) Si la pieza es defectuosa, calcular la probabilidad de que venga de A.
   SOLUCIÓN: a) P=0.0375; b) P=0.66

8. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas periféricas de una gran ciudad, de manera que el 60% de los autobuses cubren el servicio de la primera línea, el 30% cubren el servicio de la segunda línea y el 10% cubren el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es:
   - Del 2% en la primera línea.
   - Del 4% en la segunda línea.
   - Del 1% en la tercera línea.

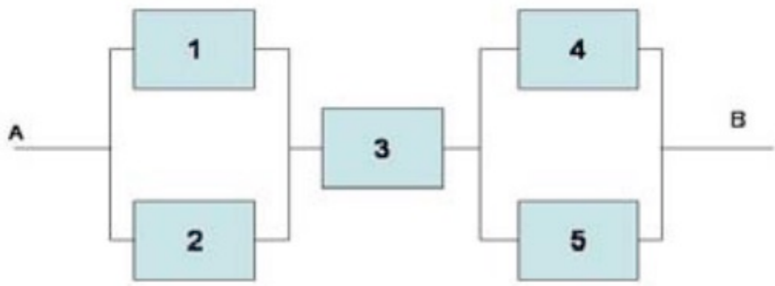
   Calcular:
   (a) La probabilidad de que en un día un autobús sufra avería.
   (b) Sabiendo que un autobús ha sufrido una avería en un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de que preste servicio en la primera línea?
   SOLUCIÓN: a) P=0.025; b) P=0.48

9. Se tiene un sistema de componentes conectados según la siguiente figura:



Todos los componentes son de una fiabilidad similar, y tienen una probabilidad de averiarse de 0.01. Las averías de los componentes son independientes del estado del resto de los componentes. El sistema funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcionen. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?
SOLUCIÓN: P=0.9896.

10. Calcula la probabilidad de que el siguiente sistema funcione, donde los componentes tienen las mismas características que en el problema anterior.



SOLUCIÓN: P=0.9898

11. Sean A, B y C eventos cualesquiera. Pruebe los siguientes resultados.
 a) Muestre que $P(A \cup B \cup C)$ es igual a:
 $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
 (Pista: definir y usar un nuevo evento $D = B \cup C$).
 b) Muestre que si A, B y C son mutuamente excluyentes, entonces:
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.
 c) Muestre que $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$
 d) Sea $A = B \cap C$. Muestre que $P(B|A) = 1$
 e) Sea $A = B \cup C$. Muestre que $P(B|A) = P(B)/P(A)$