ESCUELA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Maestría en Ingeniería para la Industria con Especialidad en Telecomunicaciones

Modelos estadísticos en Simulación

Fundamentos de Modelado y Simulación

Variables aleatorias y sus propiedades

- **Experimento**: proceso del cual su resultado no se sabe con certeza.
- Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se le llama ***espacio muestral*** y se denota como *S*.
- A los resultados como tal los llamamos *puntos de muestra* del *espacio muestral*.
- Ejemplo: Experimento de tirar una moneda al aire:

$$S = \{C, E\}$$

- Ejemplo: Tirar un dado:

$$S = \{1, 2, 3..., 6\}$$

Variables aleatorias y sus propiedades

Una variable aleatoria, *X*, es una función que asigna un número real (-∞,∞) a cada resultado de un experimento dentro del espacio muestral *S*.

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas.

Variables aleatorias discretas

Las variables aleatorias discretas son aquellas cuyo espacio muestral es un conjunto numerable (contable) de elementos. Estos pueden ser valores finitos, o bien valores infinitos numerables.

Los posibles valores de X pueden listarse como $x_1, x_2, x_3, \ldots$

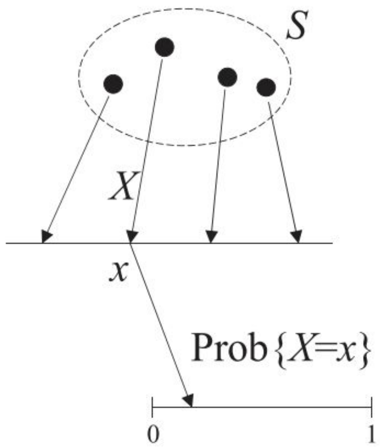
$$S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Ejemplos:

- Puntos obtenidos al lanzar dos datos
- Número de caras al lanzar 2 monedas
- Número de veces que se necesita lanzar una moneda, hasta que caiga cara.

Variables aleatorias discretas

Considere X una variable aleatoria discreta. Para cada cada posible resultado x_i en S_x, el número $p(x_i) = P(X = x_i)$ representa la probabilidad de que la variable aleatoria sea igual al valor de x_i .



Los números $p(x_i)$, $i=1,2..$ deben satisfacer dos condiciones:

a. $p(x_i) \geq 0,\ \textit{para todos los } i$

b. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

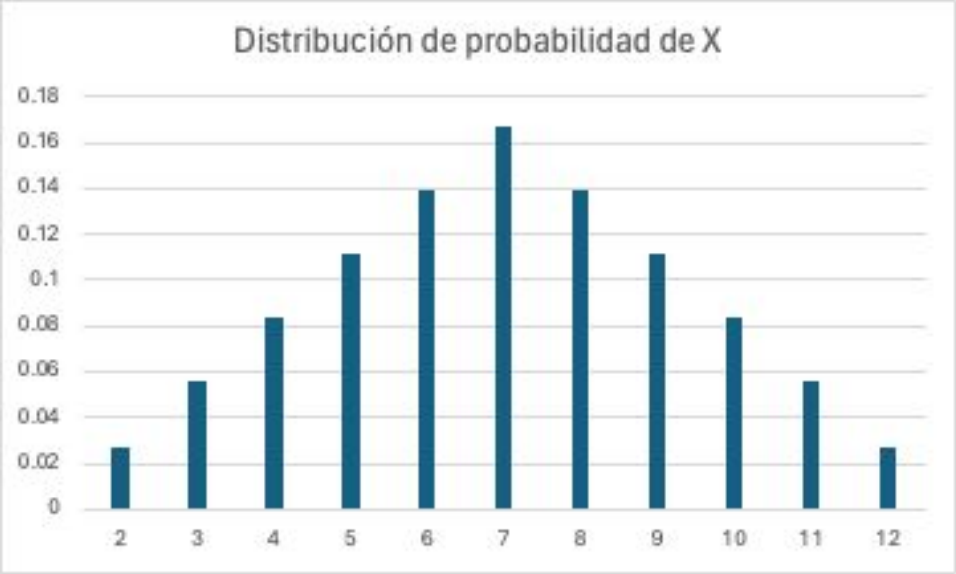
A la colección de pares $(x_i, p(x_i))$, $i=1,2,...$ se llama **distribución de probabilidad** de X, y $p(x_i)$ es llamada función de masa de probabilidad (pmf) de X

Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Lanzar dos dados, sea X la suma de las caras de los dados.

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

x	p(x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

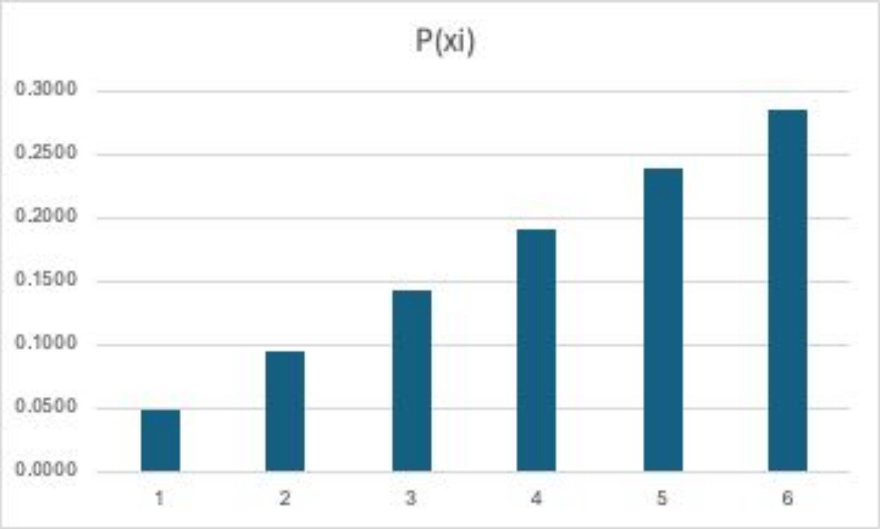


Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Lanzar un dado "trucado", cuya probabilidad de que un caiga una cara es proporcional al número de puntos de dicha cara.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

x	P(x)
1	1/21
2	2/21
3	3/21
4	4/21
5	5/21
6	6/21



Variables aleatorias continuas

- Las **variable aleatorias continuas** son aquellas cuyo espacio muestral es un conjunto no numerable de elementos.
- Las variables aleatorias continuas son una idealización matemática, ya que cualquier procedimiento de medida que se emplee tendrá un límite de precisión.
- Igualmente, al programar cualquier algoritmo de generación de números aleatorios éstos se obtendrán con un determinado número finito de cifras decimales. Con lo cual, en la práctica el espacio muestral será numerable.
- Las variables aleatorias continuas pueden ser utilizadas para describir fenómenos aleatorios en los cuales la variable de interés puede tomar cualquier valor en cierto intervalo. Por ejemplo, el tiempo de falla, o la longitud de una barra, etc.

Variables aleatorias continuas: función de densidad de probabilidad

- Si el espacio muestral S_x de la variable aleatoria continua X es un intervalo o una colección de intervalos, X es llamada una **variable aleatoria continua**. Para una variable aleatoria continua X, la probabilidad de que X caiga en el intervalo $[a,b]$ está dada por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- La función $f(x)$ es llamada **función de densidad de probabilidad** (pdf) de la variable aleatoria X. La pdf satisface las siguientes condiciones:

a. $f(x) \geq 0$ for all x in R_X
b. $\int_{R_X} f(x)dx = 1$
c. $f(x) = 0$ if x is not in R_X

Variables aleatorias continuas: función de densidad de probabilidad

$f(x)$: función de densidad de probabilidad

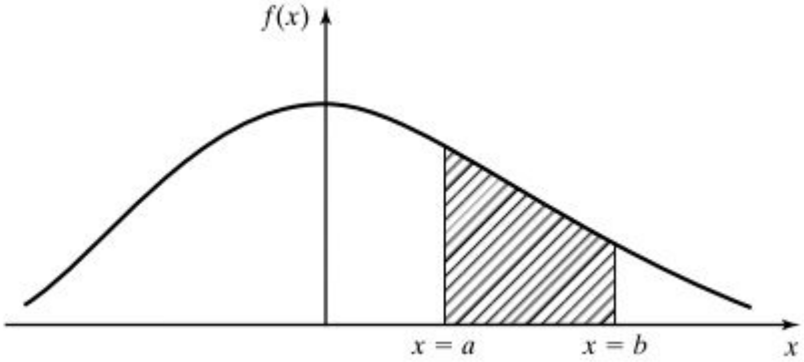


Figure 2 Graphical interpretation of $P(a < X < b)$.

Variables aleatorias continuas: función de densidad de probabilidad

Ejemplo: La vida de un dispositivo está dada por X, una variable aleatoria continua. La función de densidad de probabilidad del dispositivo, en años, está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int e^{-x/2} = -2e^{-x/2}$$

Distribución exponencial con una media de 2 años

Calcule la probabilidad de que la vida del dispositivo sea entre 2 y 3 años:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= \frac{1}{2}\int_2^3 e^{-x/2}\,dx \\ &= -e^{-3/2} + e^{-1} \\ &= -0.223 + 0.368 \\ &= 0.145 \end{aligned}$$

Función de probabilidad acumulada

La función de probabilidad acumulada, denotada como $F(x)$, mide la probabilidad de que una variables aleatoria X asuma un valor menor o igual a x, es decir, $F(x) = P(X \leq x)$.

Si X es discreta, entonces:

$$F(x) = \sum_{\substack{\text{all} \\ x_i \leq x}} p(x_i)$$

Si X es continua: entonces:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Función de probabilidad acumulada

Algunas propiedades de la función de probabilidad acumulada son:

a. F is una función no-decreciente. Si $a < b$, entonces $F(a) \leq F(b)$

b. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

c. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Todas las preguntas de probabilidad acerca de X pueden responderse en términos de la **función de probabilidad acumulada**. Por ejemplo:

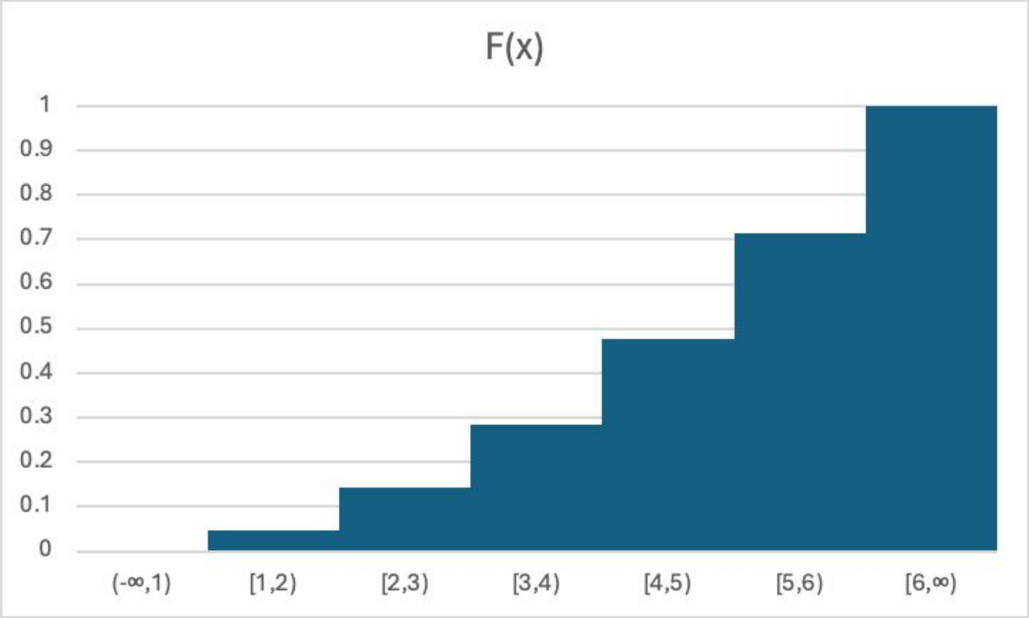
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \text{, cuando } a < b$$

Función de probabilidad acumulada

Ejemplo: Lanzar un dado “trucado”, cuya probabilidad de que un caiga una cara es proporcional al número de puntos de dicha cara.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

x	F(x)
(-∞,1)	0
[1,2)	1/21
[2,3)	3/21
[3,4)	6/21
[4,5)	10/21
[5,6)	15/21
[6,∞)	21/21



Función de probabilidad acumulada

Ejemplo: La vida de un dispositivo está dada por X, una variable aleatoria continua. La función de densidad de probabilidad del dispositivo, en años, está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt = 1 - e^{-x/2}$$

$$\boxed{\int e^{-\frac{x}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}}}$$

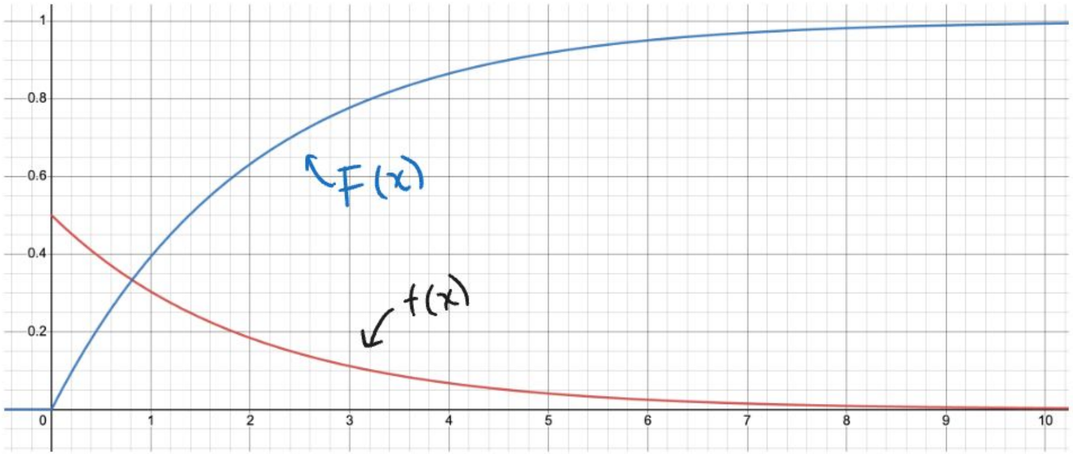
$$f(x) = \tfrac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}\,dt$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left[(-2e^{-x/2}) - (-2e^{-0/2})\right]$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left[-2e^{-x/2} + 2\right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/2}$$



Función de probabilidad acumulada

Ejemplo (continuación):

La probabilidad que el dispositivo dure por al menos 2 años está dada por:

$$P(0 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0) = F(2) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

La probabilidad que la vida del dispositivo sea entre 2 y 3 años es calculada, segun:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(2) = (1 - e^{-3/2}) - (1 - e^{-1}) \\ &= -e^{-3/2} + e^{-1} = -0.223 + 0.368 = 0.145 \end{aligned}$$

Valor esperado, varianza y desviación estandar

La **media** o valor esperado de una variable aleatoria X se representa indistintamente $E(X)$ o μ, y se define de la forma siguiente:

Si X es una variable aleatoria discreta:

$$E(X) = \sum_{\text{all } i} x_i p(x_i) \qquad \text{if } X \text{ is discrete}$$

Si X es una variable aleatoria continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad \text{if } X \text{ is continuous}$$

Al valor esperado o media, también se le conoce cómo el primer momento de X, y el momento n de X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X^n) = \sum_{\text{all } i} x_i^n p(x_i) \qquad \text{if } X \text{ is discrete}$$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx \qquad \text{if } X \text{ is continuous}$$

Valor esperado, varianza y desviación estándar

La varianza de una variable aleatoria X se representa como σ^2 o VAR(X), y se define de la forma siguiente:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}\{(x - \mathrm{E}\{X\})^2\} = \mathrm{E}\{x^2\} - (\mathrm{E}\{X\})^2$$

La media E(X) es una medida de la tendencia central de una variable aleatoria. La varianza de X mide el valor esperado de la diferencia al cuadrado entre la variable aleatoria y su media. Es decir, la varianza VAR(X), es una medida de dispersión o variación de los posibles valores de EX en torno a la media E(X). La desviación estándar σ, se define como la raíz cuadrada de la varianza σ^2. La media, la varianza y la desviación estándar se expresan en las mismas unidades.

Valor esperado, varianza y desviación estándar

Ejemplo: Lanzar un dado "trucado", cuya probabilidad de que un caiga una cara es proporcional al número de puntos de dicha cara.

x	$P(x)$	$x \times P(x)$	$x^2 \times P(x)$
1	1/21	1/21	1/21
2	2/21	4/21	8/21
3	3/21	9/21	27/21
4	4/21	16/21	64/21
5	5/21	25/21	125/21
6	6/21	36/21	216/21

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{21}\right) + 2\left(\frac{2}{21}\right) + \cdots + 6\left(\frac{6}{21}\right) = \frac{91}{21} = 4.33$$

$$E(X^2) = 1^2\left(\frac{1}{21}\right) + 2^2\left(\frac{2}{21}\right) + \cdots + 6^2\left(\frac{6}{21}\right) = 21$$

$$V(X) = 21 - \left(\frac{91}{21}\right)^2 = 21 - 18.78 = 2.22$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 1.49$$

Valor esperado, varianza y desviación estándar

Ejemplo: La vida de un dispositivo está dada por X, una variable aleatoria continua. La función de densidad de probabilidad del dispositivo, en años, está dada por *f(x)*:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x/2}\,dx = -xe^{-x/2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{1/2}e^{-x/2}\Big|_0^\infty = 2 \text{ years}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x/2}\,dx$$

$$E(X^2) = -x^2e^{-x/2}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x/2}\,dx = 8$$

$$V(X) = 8 - 2^2 = 4 \text{ years}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 2 \text{ years}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Uniforme

Distribución uniforme: Se usa cuando se considera que todos los valores comprendidos en un intervalo finito son igualmente probables.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Uniforme

Distribución uniforme: Se usa cuando se considera que todos los valores comprendidos en un intervalo finito son igualmente probables.

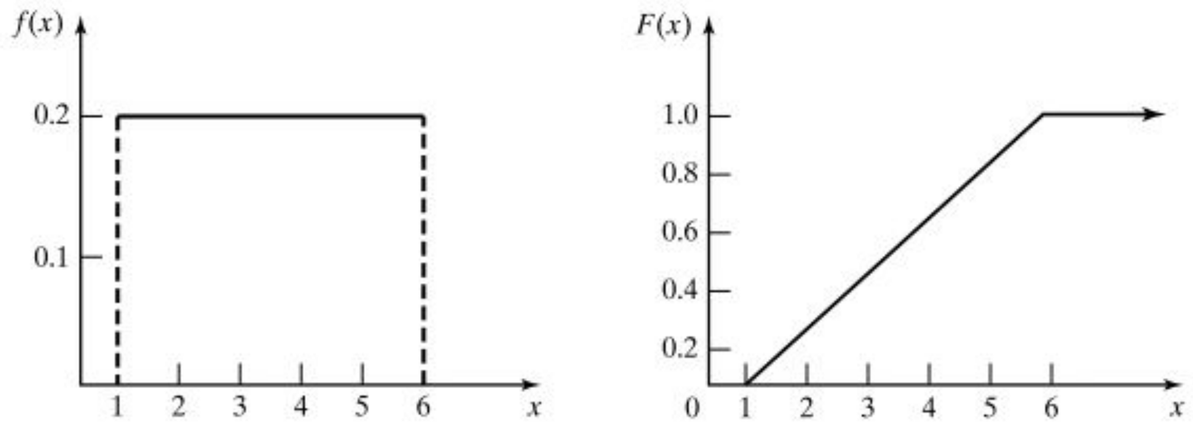


Figure 8 pdf and cdf for uniform distribution.

$a=1,\ b=6$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Uniforme

Un autobús llega cada 20 minutos a una parada específica a partir de las 6:40 a.m. y hasta las 8:40 a.m. Cierto pasajero no conoce el horario, pero llega aleatoriamente (distribuido uniformemente) entre las 7:00 a.m. y las 7:30 a.m. cada mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere más de 5 minutos a un autobús?

El pasajero tiene que esperar más de 5 minutos sólo si la hora de llegada está entre las 7:00 A.M. y las 7:15 A.M. o entre las 7:20 A.M. y las 7:30 A.M. Si X es una variable aleatoria que denota el número de minutos pasadas las 7:00 A.M. en que llega el pasajero, la probabilidad deseada es

$$P(0 < X < 15) + P(20 < X < 30)$$

Ahora bien, X es una variable aleatoria uniforme en (0, 30). Por lo tanto, la probabilidad deseada viene dada por

$$F(15) + F(30) - F(20) = \frac{15}{30} + 1 - \frac{20}{30} = \frac{5}{6}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Exponencial

Distribución exponencial: La distribución exponencial se ha utilizado para modelar los tiempos entre llegadas cuando éstas son completamente aleatorias y para modelar tiempos de servicio que son muy variables.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

En estos casos, λ (lambda) representa una tasa (razón): llegadas por hora o servicios por minuto.

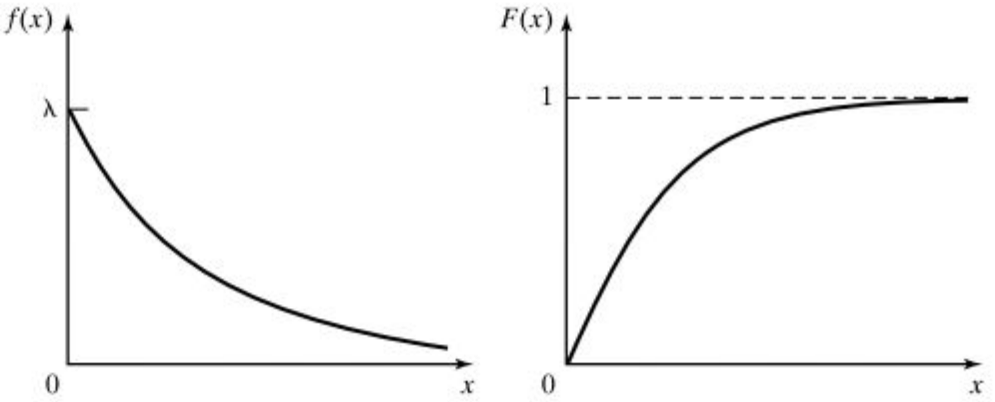


Figure 9 Exponential density function and cumulative distribution function.

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Exponencial

En la figura se muestran diferentes funciones de densidad de probabilidad exponenciales. Los valores en que se intersecta en el eje vertical siempre es igual al valor de λ.

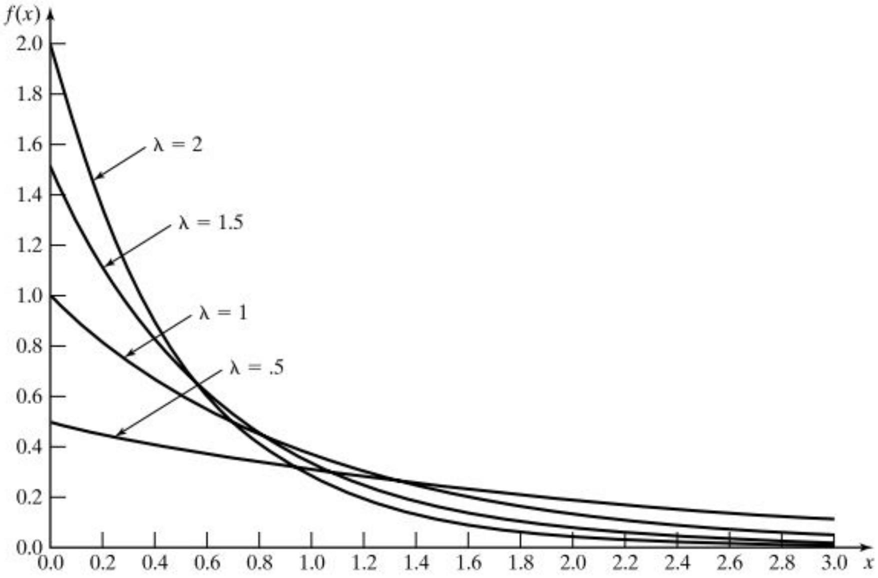


Figure 10 pdfs for several exponential distributions.

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Exponencial

La distribución exponencial tiene una media y una varianza dadas por

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{and} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Por lo que la media y la desviación estándar son iguales

La función de probabilidad acumulada está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Exponencial

Propiedad sin memoria de las variables aleatorias con distribución exponencial: los valores futuros de los valores con distribución exponencial no se ven afectados por los valores pasados. Si comparamos esto con, por ejemplo, una variable aleatoria uniformemente distribuida, podemos ver la diferencia. Por ejemplo, al lanzar una moneda justa, podemos considerar que la probabilidad de cara y cruz es la misma que tiene el valor de 0,5. Si, después de un resultado de cara, esperaríamos ver una cola (aunque puede que no ocurra). En una variable aleatoria con distribución exponencial, no podemos tener este tipo de expectativa. En otras palabras, no sabemos nada sobre el valor futuro de la variable aleatoria dada una historia completa del pasado.

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Gamma

La distribución Gamma se utiliza para modelar el tiempo necesario para completar una tarea (atender a un cliente, reparar una máquina, etc.)

Una variable aleatoria X es gamma distribuida con los parametros β and θ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma.

- donde $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$; cuando α es un entero
- cuando $\alpha=1$, es una función exponencial, en otras palabras la distribución gamma es una forma mas general de la distribución exponencial.

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Gamma

La media y la varianza de una distribución gamma están dadas por:

Media	$\alpha \cdot \beta$
Varianza	$\alpha \cdot \beta^2$

La función de probabilidad acumulada está dada por:

Si α no es un entero, no existe expresión analítica.
Si α es un entero positivo, entonces:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^j}{j!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Gamma

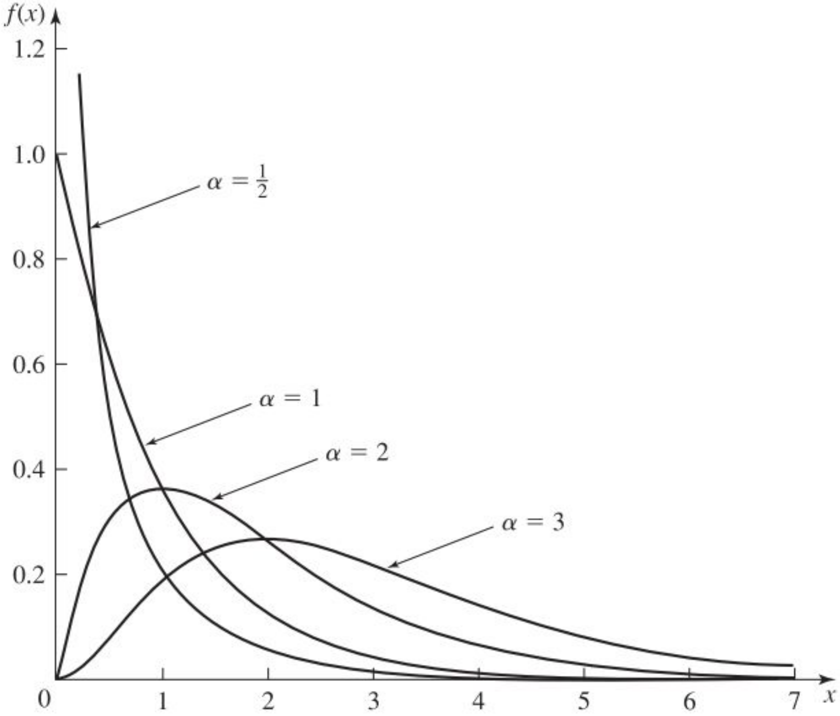


FIGURE 6.7
gamma(α, 1) density functions. *(continued)*

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Erlang

- Cuando el parámetro β en la distribución Gamma es un entero, la distribución es referida como una distribución Erlang.
- Cuando $\beta=k$, un entero positivo, la función de densidad de probabilidad de la distribución Erlang está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-k\theta x}(k\theta x)^i}{i!} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Weibull

La distribución de probabilidad continua de Weibull se podría utilizar para modelar el tiempo de completación de una tarea, tiempo entre fallos de las piezas de un equipo, utilizado como modelo aproximado ante la ausencia de datos.

Función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \beta^{-\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Función de Probabilidad Acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Parámetros:

Parámetro de forma: $\alpha > 0$.
Parámetro de escala: $\beta > 0$.

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Weibull

Media	$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
Varianza	$\frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \left[2 \cdot \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right]$

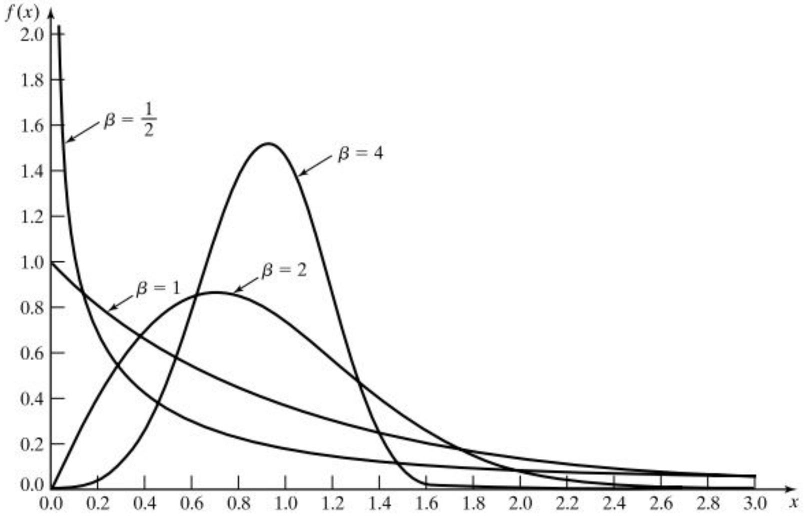


Figure 20 Weibull pdfs for $\nu = 0; \alpha = 1; \beta = \frac{1}{2}, 1, 2, 4.$

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Normal

La distribución normal se puede utilizar en aquellas aplicaciones donde aplica el teorema del límite central. Es decir, se usa para describir variables que son suma de gran número de otras variables.

Función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

para cualquier x real.

Probabilidad acumulada: No tiene expresión analítica

Parámetros:

Parámetro de posición: $\mu \in (-\infty, \infty)$.
Parámetro de escala: $\sigma > 0$.

Media	μ
Varianza	σ^2

Distribuciones de Probabilidad Continuas: Normal

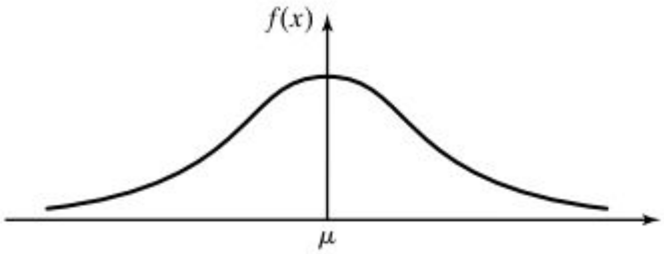


Figure 12 pdf of the normal distribution.

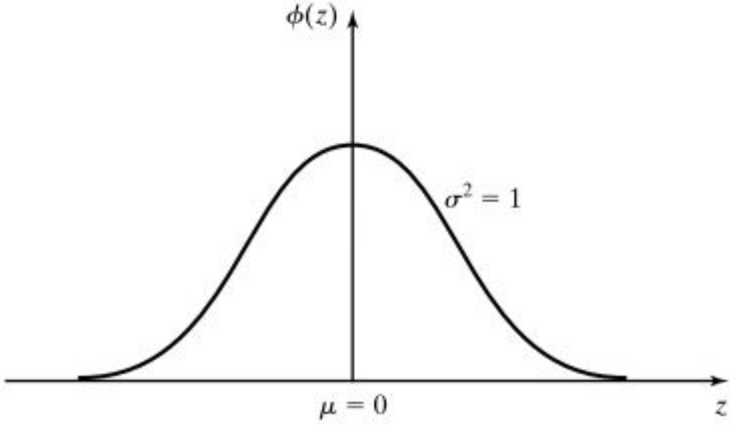


Figure 13 pdf of the standard normal distribution.

Ejercicio: Distribución de Probabilidades en Omnet++

El objetivo de este ejercicio es profundizar en el conocimiento de diferentes distribuciones de probabilidad, sus propiedades y su aplicación para simulaciones utilizando OMNeT++.

Cree un modelo simple consistente en un emisor S y un receptor R. El emisor crea nuevos mensajes con un intervalo de tiempo aleatorio T y lo envía al receptor . El receptor registra el tiempo entre llegadas de los mensajes.

Modelo. Emisor-Receptor

Elija al menos dos distribuciones de probabilidad diferentes para la variable aleatoria T (consulte el manual de OMNeT++ para obtener una lista de distribuciones) y para cada una de ellas

- Dibuje la Función de Densidad de Probabilidad (FDP) y la Función de Distribución Acumulativa (FDA) de la distribución.
- Registre y visualize el histograma y los datos vectoriales de los tiempos entre llegadas de los mensajes recibidos cuando detienes la simulación después de 100, 1000, 10000 mensajes.
- ¿Cuáles son la media muestral, la varianza muestral y la desviación típica de los resultados de la simulación?
- Compara los resultados con las expectativas teóricas.