

Ampliació de matemàtiques per alumnes d'institut

Carlos Luna Mota

Les matemàtiques que fem a l'institut són, en general, les eines bàsiques que tothom necessita per funcionar en societat. No seria just dedicar-hi més hores a ampliar aquest temari perquè no tothom necessita aquesta ampliació i perquè cal dedicar aquest temps a altres assignatures per tal de tenir una formació prou completa i variada.

Malgrat tot, no és estrany trobar alumnes que, per gust o amb la vista posada en uns futurs estudis tècnics, voldrien dominar millor aquesta matèria i troben a faltar aprofundir-hi més. Tradicionalment, aquest aprofundiment es duia a terme mitjançant assignatures optatives o classes de reforç, però avui dia hi ha moltes més alternatives i en aquest document en faig un recull de les que acostumo a recomanar als meus alumnes.

Es tracta de recomanacions que s'allunyen deliberadament del temari tradicional i del que moltes persones consideren matemàtiques *de debò* perquè és important, especialment en aquestes edats, trencar amb els estereotips de la matèria i allunyar-se radicalment de fórmules memorístiques que sovint es tradueixen en alumnes amb molts coneixements però poca capacitat d'aplicar-los.

Malgrat la seva fama, les matemàtiques són una branca del coneixement eminentment creativa, i les persones que s'hi dediquen professionalment sovint ho fan motivats per l'experimentació amb aquest tipus d'activitats, més que no pas amb llargues sessions d'estudi. És aquesta *mirada matemàtica*, que entén la geometria tridimensional a través del Cub de Rubik i que veu fractals on altres només hi veuen un arbre, la que hem de potenciar en alumnes que vulguin anar més enllà del temari propi del seu curs.

Finalment, és fonamental que les tasques d'ampliació no suposin mai una càrrega o una obligació per qui les fa. No es tracta pas de fer tot el que proposo o de fer una sèrie d'activitats especialment seleccionades. Es tracta de trobar, en aquesta llista, alguna activitat que motivi a l'alumne i que s'adapti bé als seus gustos i al seu nivell actual de coneixements. Només així aconseguirem el grau d'interès necessari per anar més enllà de la simple memorització.

Activitats recomanades

Presencials

- Les visites al **Museu de Matemàtiques de Catalunya** o a alguna de les seves exposicions itinerants són sempre una activitat recomanable que es pot fer en família. El lema d'aquest museu és *prohibit no tocar* i estic segur que sortireu de l'exposició amb ganes de tornar-hi.
- Participar en competicions com les **Proves Cangur**, l'**Olimpiada Matemàtica**, el **Fem mates/+mates** o els **Problemes a l'esprint** és una bona manera de treballar les matemàtiques amb la motivació pròpia d'una competició però sense la pressió dels exàmens.
- Els alumnes que tinguin ganes d'anar més lluny en aquesta matèria poden intentar entrar en programes d'aprofundiment, com ara **Bojos per la matemàtica** o **Estalmat** on rebran classes avançades. Malgrat tot, les places són limitades i no sempre és fàcil accedir-hi.
- Participar en els concursos de fotografia matemàtica d'**ADEMG** o l'**ABEAM** és una bona manera d'obligar-te a cercar matemàtiques arreu.
- Més en general, qualsevol activitats d'oci que requereixi fer servir el pensament lògic, com ara formar part d'un club d'**escacs** o aficionar-se a les **scape rooms**, serà una bona manera d'aflar l'enginy i treballar habilitats que després redundaran en classe de matemàtiques.

En línia

- Els cursos en línia de **Brilliant** o **Khan Academy** s'adapten al nivell de l'alumne i li permeten avançar tant temari com vulgui al seu propi ritme.
- El llibre de text interactiu **Mathigon** encara està en construcció però promet ser un recurs magnífic per aprendre de manera autodidacta.
- Finalment, les xarxes socials s'han omplert els darrer anys d'excel·lents divulgadors de la matemàtica. No té sentit fer recomanacions exhaustives en un ambient tant voluble, però podeu començar a estirar del fil a través de blogs com **Gaussianos**, **NRICH maths**, **Punt Mat**, **Calaix +ie** o **Divermates**, canals de Youtube com **Numberphile**, **3Blue1Brown** o **Derivando** o usuaris de xarxes socials com la **Catriona Agg**, en **James Tanton** o el **Calendari Matemàtic**.

Lectures recomanades

Divulgació matemàtica

- Qualsevol llibre d'en **Martin Gardner** és un petit tresor d'idees matemàtiques. L'**Ian Stewart** va recollir el seu testimoni i també ha publicat llibres molt inspiradors. Recentment destaquen molt l'**Alex Bellos**, en **Paul Lockhart** i l'**Adrián Paenza**. D'aquest últim podeu trobar tots els llibres en format PDF a **la seva web**.
- A nivell nacional, la **Clara Grima** i en **Claudi Alsina** tenen diversos llibres de divulgació matemàtica que poden resultar interessants per alumnes d'edats diverses.
- L'editorial RBA publica periòdicament col·leccions com ara **El Mundo Es Matemático** o **Desafíos Matemáticos**. La qualitat no és uniforme, però són llibres entretinguts i donen una idea general força acurada dels temes tractats. L'editorial Planeta publica llibres de divulgació matemàtica en la seva línia **Drakontos** i l'editorial Nivola té una bona col·lecció de biografies matemàtiques: **La matemática en sus personajes**.

Enigmes

- Els llibres clàssics d'enigmes matemàtics són els de **Sam Loyd** i **Henry Dudeney**. L'**Édouard Lucas** és menys conegut, simplement, per escriure en francès en comptes de en anglès. En tots tres casos, es tracta de llibres interessants però una mica antics.
- Avui dia destaquen autors com **Carlo Fabretti**, **Dennis Shasha** o **Raymond Smullyan** i, a nivell nacional, cal seguir la pista d'en **Jordi Deulofeu** i en **Miquel Capó**.
- L'editorial Gedisa té dues col·leccions excel·lents de llibres d'enigmes: **Juegos** i **Desafios Matemáticos**. Allà trobareu traduïts bona part dels autors que acabo de citar i molts altres igualment interessants.

Literatura matemàtica

- El primer nom que ve al cap quan un parla de literatura matemàtica és el de **Lewis Carroll**, amb les seves *Alícies*, però en **Robert Abbott**, amb el seu *Planilàndia*, també és un clàssic recomanable. Malgrat tot, jo crec que alguns relats de **Jorge Luis Borges**, com ara *la Biblioteca de Babel* o *el Libro de Arena*, són millors exponents del gènere i tenen més qualitat literària.
- A un nivell molt més avançat, la ciència ficció de **Greg Egan** sovint fa servir matemàtiques universitàries com a fil conductor.

Jocs recomanats

D'enginy

- Qualsevol **joc d'enginy**, especialment aquells de natura geomètrica, com el **Tangram** o el **Cub Soma**, serà un bon exercici per treballar matemàtiques a un nivell *tàctil*. De tangrams, per exemple, n'hi ha de molts tipus, i al MMACA han desenvolupat un de nou, el **Tangram Egipci**, que està ple de propietats matemàtiques.
- Altres jocs d'enginy clàssics inclouen el **Puzzle de la T**, els **Daus No-Transitius**, els **Trencaclosques de Cordills i Filferros**, els **Pentòminos**, els **Ponts de Leonardo**, les **Torres de Hanoi**, el **Solitari** o el famós **Cub de Rubik** i les seves mil variants.
- Molts d'aquests jocs els trobareu a fires d'artesia, la **botiga del MMACA** i l'**Abacus**, però amb material que tingueu per casa també podeu improvisar i fer manualitats matemàtiques. Per exemple, amb una baralla de cartes és fàcil formar **Quadrats Màgics** i **Quadrats Grecolatins** que tenen un munt de propietats i variants per explorar.

De taula

- Els jocs de taula d'estratègia són una bona manera de treballar la concentració, la lògica i la resolució de problemes. Estem parlant dels **Escacs**, és clar, però també de les **Dames** i de jocs que són menys coneguts aquí però que tenen una gran repercussió en altres cultures, com ara el **Go**, el **Shogi** o l'**Aulé**. Aquest darrer joc, tant popular al continent africà, és una bona manera d'exercitar el càlcul mental, com també ho és el jugar al **Backgammon**.
- De caire més actual, tenim jocs com el **Catan** i el **Carcassonne** que no tenen res a envejar als clàssics a nivell d'estratègia però, si volem triar jocs de taula moderns que tinguin una forta component matemàtica, us recomano fixar-vos en el **Set**, el **Quarto**, el **Tantrix**, el **Hive**, el **Katamino**, el **Dobble**, el **Patchwork** i el **Kingdomino**.
- D'alguns jocs clàssics de paper i llapis, com ara el **Dots & Boxes** o l'**Hex**, se n'han publicat llibres sencers d'anàlisi matemàtic. De fet, hi ha tota una branca de la matemàtica dedicada a l'estudi d'aquests *jocs abstractes* i a Portugal cada any fan un **Campionat Nacional** juvenil amb alguns dels millors jocs d'aquesta categoria. Si voleu jocs de taula abstractes de qualitat us recomano les marques **Gigamic** i **Stephen Spiele** i, a nivell nacional, **Nestorgames**.

Digitals

- Avui dia potser és més fàcil jugar amb un dispositiu mòbil que no pas en persona i podeu trobar versions digitals de tots (o gairebé tots) els jocs proposats a l'aparat anterior. També és fàcil trobar aplicacions plenes de passatemps clàssics. La **Simon Tatham's Portable Puzzle Collection** és probablement una de les millors i més completes.
- Els dispositius mòbils permeten treballar amb objectes virtuals complexos, com demostren jocs com **Monument Valley**, on cal resoldre trencaclosques en un món de geometria paradoxal.
- Altres aplicacions destacables, a nivell didàctic, serien l'**Euclidea** i la **Pitagorea**, que permeten aprofundir en la geometria clàssica de manera divertida i distreta.

Temes d'investigació recomanats

Avui dia és molt fàcil trobar informació sobre gairebé qualsevol tema que ens interessi i, sovint, només ens cal que algú ens ajudi a triar un bon tema. La col·lecció de preguntes d'aquesta secció permet descobrir alguns temes força interessants que gairebé mai tenim temps de tractar a classe. Només es tracta d'afinar l'olfacte matemàtic i seguir-ne la pista!

- Què és la **Diagonal de Cantor**?
- Què és un **enrajolat aperiòdic**?
- Què és el **fractal de Mandelbrot**?
- Què és el **joc de la vida de Conway**?
- Què són la **cinta de Möbius** i l'**ampolla de Klein**?
- Què diu el **Teorema de Pick**?
- Què diu el **Teorema de Bolzano**?
- Què diu el **Principi del Colomar**?
- Què diu el **Teorema de la Bola Peluda**?
- Com funciona un **regle de càlcul**?
- Com funcionen les **antenes parabòliques**?
- Com calculaven **arrels quadrades a l'antiga Babilònia**?
- Com s'escriuen els nombres en **notació ternària balancejada**?
- Com podem sumar els infinits termes d'una **sèrie geomètrica**?
- Com pots **demostrar el Teorema de Pitàgores** sense fer servir paraules?
- Com es fan servir **esferes per corregir errors de transmissió**?
- Com podem saber **si un quadrilàter és pot inscriure en un cercle**?
- Com pots fer servir la **seqüència de Thue-Morse** per fer que un joc sigui més just?
- Com feien servir el **triangle 3-4-5 a l'antic Egipte**?
- Quina relació hi ha entre el **nombre d'or i les flors**?
- Quina relació hi ha entre el **nombre d'or i l'icosaedre**?
- Quina relació hi ha entre el **triangle de Sierpiński** i el **triangle de Tartaglia**?
- Quina relació hi ha entre el **triangle de Sierpiński** i les **Torres de Hanoi**?

- Quina relació hi ha entre **els nombres racionals i la funció fusc?**
- Quina relació hi ha entre el **codi Gray** i les **anelles xineses?**
- Quina relació hi ha entre **la cançó dels 12 dies de Nadal i el triangle de Pascal?**
- Quina relació hi ha entre els codi binari i el **Nim?**
- Quina relació hi ha entre els nombres de Fibonacci i el **Nim de Wythoff?**
- Quina relació hi ha entre **quadrats grecolatins** i el disseny d'experiments?
- Quines propietats té la **seqüència de Van der Corput?**
- Quants decimals té l'**expressió decimal de $\sqrt{2}$?**
- Quins són els **tres problemes impossibles de l'antiguitat?**
- Per què **el nombre d'or és el nombre més irracional?**

Altres recomanacions

Lectura

Practicar la lectura no només no va en contra d'una bona formació tècnica sinó que sovint n'és la clau. Cal, però, fugir de lectures obligatòries i trobar gèneres que motivin a l'alumne, com ara la divulgació científica (**Bill Bryson**, **Pere Estupinyà**, **William Poundstone**, ...) o la ciència ficció (**Philip K. Dick**, **Isaac Asimov**, **Arthur C. Clarke**, ...).

Idiomes

Malauradament, encara avui dia resulta difícil trobar cert tipus de material en català (o fins i tot en castellà) i cal recórrer a llibres, pàgines web i vídeos en anglès. Aprendre idiomes en general, i anglès en particular, ens obre la porta a moltíssim material imprès i en línia que d'altra manera ens quedaria fora de l'abast.

Si hagués de triar una única "recomanació alternativa" d'aquesta llista, probablement seria la d'aprendre anglès. Malgrat tot, el mètode per fer-ho no necessàriament passa per cursos i acadèmies (tot i que probablement siguin la manera més ràpida i efectiva de fer-ho) i potser resulta més motivador, simplement, començar a **veure sèries en anglès** o fer servir alguna aplicació gamificada de l'estil **Duolingo**.

Art

L'art i la matemàtica són dues disciplines que sovint s'han fet servir mútuament com a font d'inspiració. Són molts els artistes que han basat la seva obra en alguna idea matemàtica: la literatura de l'**Oulipo**, la música de **J. S. Bach**, l'arquitectura de **B. Fuller** o la pintura de **M. C. Escher** en són bons exemples.

L'**origami** i el **kirigami** són dues disciplines artístiques d'origen oriental que es fonamenten, respectivament, en el plegat i el tall de fulls de paper. Actualment, totes dues disciplines viuen una segona edat d'or gràcies a la matemàtica, que hi ha sabut trobar nombroses propietats i aplicacions pràctiques (des del plegat de panells solars fins a la creació de nano-màquines). A nivell clàssic puc recomanar els llibres de **Vicente Palacios** i **John Montroll** i d'autors més contemporanis destacaria **David Mitchell**, **Erik D. Demaine** i **Robert J. Lang**.

El món de l'espectacle també té la seva ració de matemàtiques de la mà de la **matemàgia**. Aquí els referents serien en **Pedro Alegría**, en **Fernando Blasco** i en **Sergio Belmonte**. D'autors internacionals cal tenir en compte en **Martin Gardner** i en **Roberto Giobbi**.

Programació

Programar ordinadors (o qualsevol aparell electrònic) és una tasca enriquidora que té molts punts en comú amb la resolució de problemes matemàtics. En contra del que molta gent creu, programar ordinadors no és especialment difícil. La major dificultat sovint rau en trobar un bon curs en la nostra llengua (**en anglès és molt més fàcil**). Per alumnes sense experiència prèvia, el llenguatge de programació **Python** ofereix una de les portes d'entrada més accessibles a aquest món i, a diferència d'altres llenguatges educatius (com ara l'*Scratch* o el *Logo*), es tracta d'un llenguatge potent i amb força sortida professional.

Un cop familiaritzats amb els rudiments bàsics, serà fàcil trobar projectes de programació que cridin l'atenció de l'alumne, com ara dibuixar **fractals** amb la **Tortuga de Python**, programar jocs senzills amb **PyGame**, fer un simulador del **Joc de la Vida** de Conway, ...

Si el tema agrada i es vol progressar encara més, webs com **Top Coder**, **Code Wars**, **Project Euler** o **Jutge.org** obren la porta a la programació competitiva, un autèntic repte per a gent de totes les edats.