Del Compàs Auri a l'Spira Mirabilis!

Enric Brasó Campderrós i Carlos Luna Mota

Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)
enric.braso@mmaca.cat i carlos.luna@mmaca.cat

Resum del taller

En aquest taller presentarem dos materials manipulables del MMACA per treballar la proporcionalitat a Secundària: el Compàs Auri i l'Spira Mirabilis.

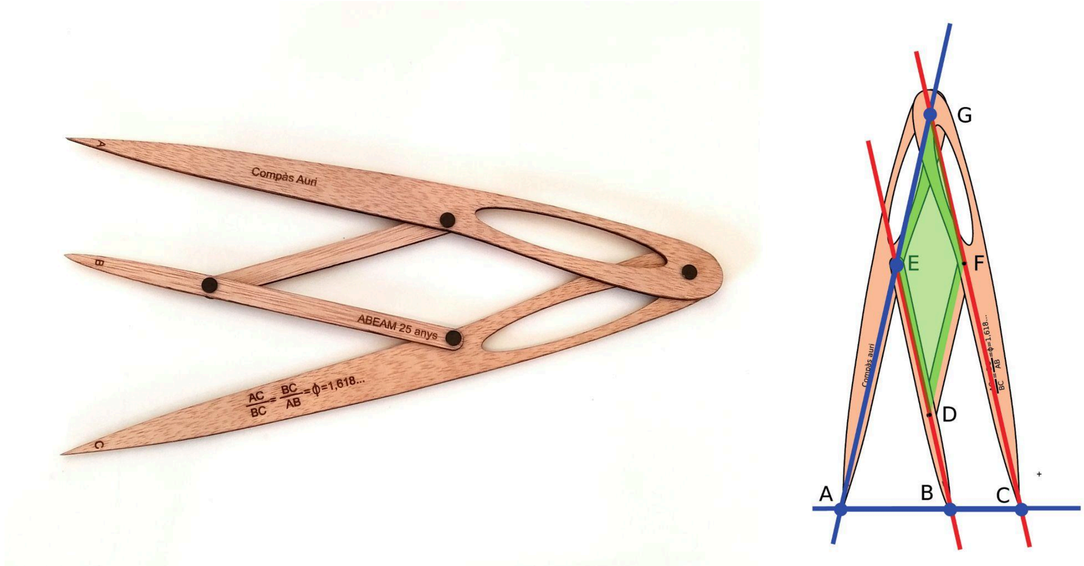
En tots dos casos, el material permet mesurar i aplicar raons de semblança de manera analògica, sense fer ús de cap escala numèrica o unitat de mesura. Es tracta, a més, de materials especialment adients per projectes STEAM on vulgueu donar importància a les matemàtiques.

El taller consta d'una breu xerrada inicial seguida d'una fase experimental on els assistents podran interactuar amb els materials presentats i dur a terme alguna de les activitats proposades. Tancarem la sessió fent una posada en comú de les vostres opinions i resolent els dubtes que us hagin sortit.

PARAULES CLAU: **Proporcionalitat, Computador Analògic, Compàs Auri, Espiral Logarítmica.**

1. El Compàs Auri com a punt de partida d'un projecte STEAM

Un Compàs Auri és un cas particular de pantògraf que té per raó de semblança el nombre d'or $\varphi \approx 1.618...$ [Rey i Udina 2015, Brasó 2023].



Compàs Auri del MMACA (esquerra) i diagrama il·lustrant del seu funcionament (dreta).

Per fer servir el Compàs Auri, només cal obrir els seus braços fins a aconseguir que dues de les seves puntes (B i C, al diagrama de la dreta) quedin separades per una longitud donada i, llavors, llegir el resultat de multiplicar aquesta longitud pel nombre d'or en la separació d'un altre parell de puntes ($AB = BC \cdot \varphi$, al mateix diagrama).

Canviant les puntes que fem servir com a entrada i sortida de dades en aquest computador analògic, podem fer divisions per aquesta mateixa constant ($BC = AB / \varphi$) o fins i tot operar amb aquesta constant al quadrat ($AC = BC \cdot \varphi^2$ i $BC = AC / \varphi^2$).

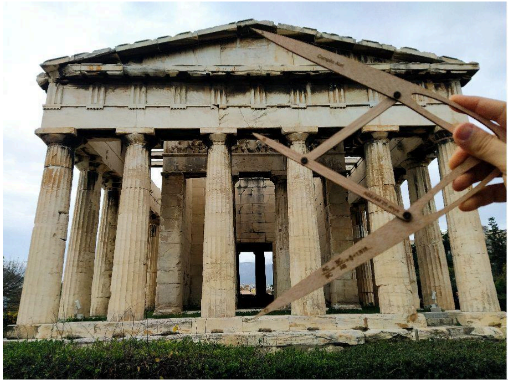
Aquestes propietats es poden deduir a partir del teorema de Tales si tenim en compte que el punt E divideix el segment AG en secció àuria i que EDFG és un paral·lelogram.

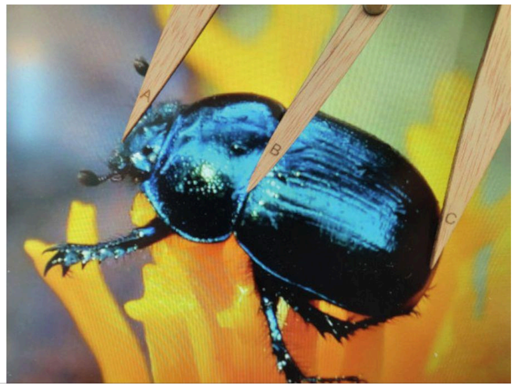
És un material manipulatiu que resulta sorprenent i que ens permet qüestionar algunes de les idees preconcebudes que té l'alumnat:

- *Com és possible multiplicar amb quatre pals de fusta?*
- *Com podem fer operacions sense nombres?*
- *Què significa multiplicar, en general?*

Matemàticament, però, és senzill d'analitzar, i constitueix un bon punt de partida per treballar la proporcionalitat a través d'un projecte STEAM per a qualsevol curs de secundària, on es dissenyin pantògrafs amb diferents constants de proporcionalitat per tal d'estudiar els objectes del nostre entorn.

Podem, per exemple, treballar la història de l'art tot analitzant les proporcions més comunes de la pintura i l'arquitectura clàssica. O podem preguntar-nos quin avantatge evolutiu ha dut molts animals i plantes (inclosos els humans) a desenvolupar proporcions àuries, tot procurant ser crítics a l'hora de determinar si aquestes proporcions són realment àuries.





Exemples de proporcions àuries en l'arquitectura grega (esquerra) i en la natura (dreta).

També podem treballar aspectes de l'àmbit de l'enginyeria i la tecnologia a través del disseny i la fabricació dels nostres propis Compassos Auris o de l'estudi dels pantògrafs que es fan servir actualment en la joieria i la numismàtica.

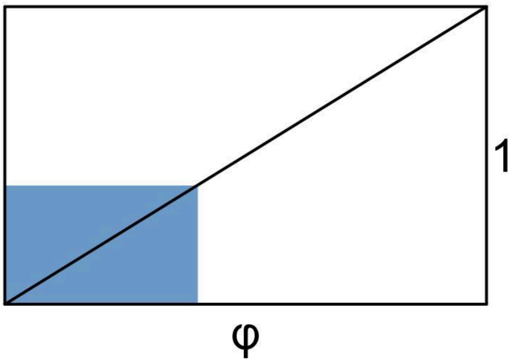
Es tracta, doncs, d'un material amb molt de potencial per treballar totes les lletres de la paraula STEAM, inclosa, per variar, la M.

2. Del Compàs Auri a l'Spira Mirabilis

Una petita mancança del Compàs Auri és que només permet mesurar proporcions entre punts alineats. Si disposem de dues còpies del mateix objecte podem solucionar amb facilitat aquest problema, però no sempre és fàcil tenir-ne dues còpies i no volem deixar escapar l'oportunitat d'estudiar les proporcions d'objectes rectangulars.

Amb un Compàs Auri només podem fer proporcions lineals.

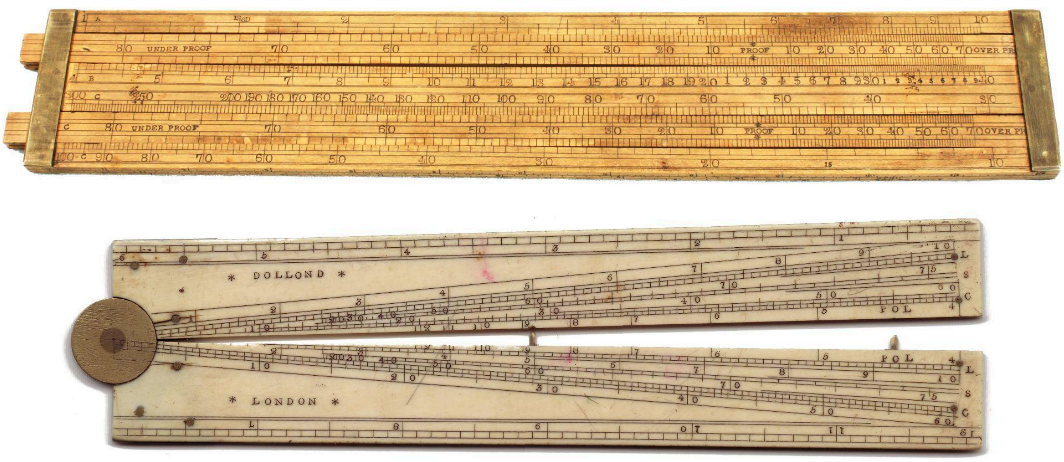
Una solució trivial d'aquest problema consisteix a dibuixar un rectangle auri i traçar-hi la diagonal. Amb aquest dibuix podem verificar proporcions àuries d'objectes rectangulars comprovant, simplement, que les dues diagonals siguin coincidents.



Verificador de rectangles auris i exemple de rectangle auri (blau).

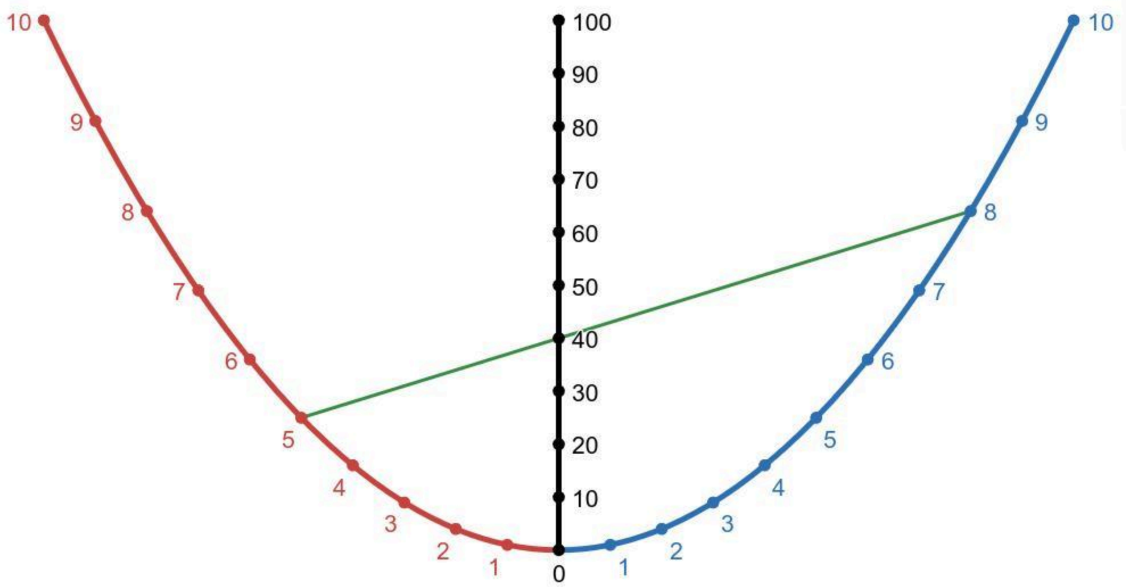
Aquesta solució és fàcil d'entendre i resulta molt flexible, perquè en una mateixa gràfica podem traçar rectes amb diferents pendents i lligar-ho amb el temari de funcions lineals. Malgrat tot, també es tracta d'una solució poc sorprenent, en comparació amb l'efecte que produeix el Compàs Auri en l'alumnat, i això ens va dur a buscar alternatives.

A la literatura podem trobar nombrosos exemples de computadors analògics interessants, com ara el regle de càlcul (basat en escales logarítmiques) o el pantòmetre (basat en triangles semblants), però en la majoria dels casos l'operació es fa a través d'una escala numèrica, que és quelcom que s'allunya de la natura purament geomètrica del Compàs Auri.



Un regle de càlcul (a dalt) i un pantòmetre (a baix).

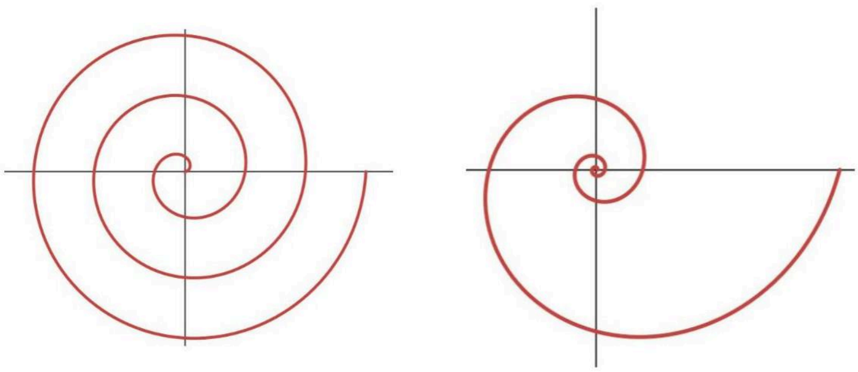
De fet, si estem disposats a fer servir escales numèriques, podem fer servir el següent nomograma per fer multiplicacions (i divisions): Tracem la paràbola $Y = X^2$, hi marquem els punts de coordenades enteres i els etiquetem amb el valor absolut de la seva coordenada horitzontal. Si unim dos d'aquests punts amb un segment de recta, aquest últim ens indicarà el producte dels dos nombres en el punt de tall amb l'eix vertical.



Nomograma de la multiplicació basat en la paràbola $Y = X^2$, amb l'exemple $5 \cdot 8 = 40$ marcat. Els eixos horitzontal i vertical estan escalats en proporció 1:10 per facilitar-ne l'ús.

Estudiar aquest nomograma és una activitat excel·lent per treballar el temari de rectes i paràboles. És, a més, un material fàcilment reproduïble a l'aula i resulta sorprenent per l'alumnat, però encara depèn d'una escala numèrica per efectuar els càlculs.

Partint de la idea de fer servir una corba per fer càlculs, i apropant-nos al mètode de neusi inventat a l'antiga Grècia, no és difícil trobar dues conegudes espirals que fan operacions matemàtiques: L'espiral d'Arquimedes suma una constant al radi cada 360°, mentre que l'espiral logarítmica el multiplica per una constant cada 360°. És aquesta última, doncs, la que més ens interessa i la que estudiarem a continuació.



L'espiral d'Arquimedes (esquerra) i l'espiral logarítmica (dreta).

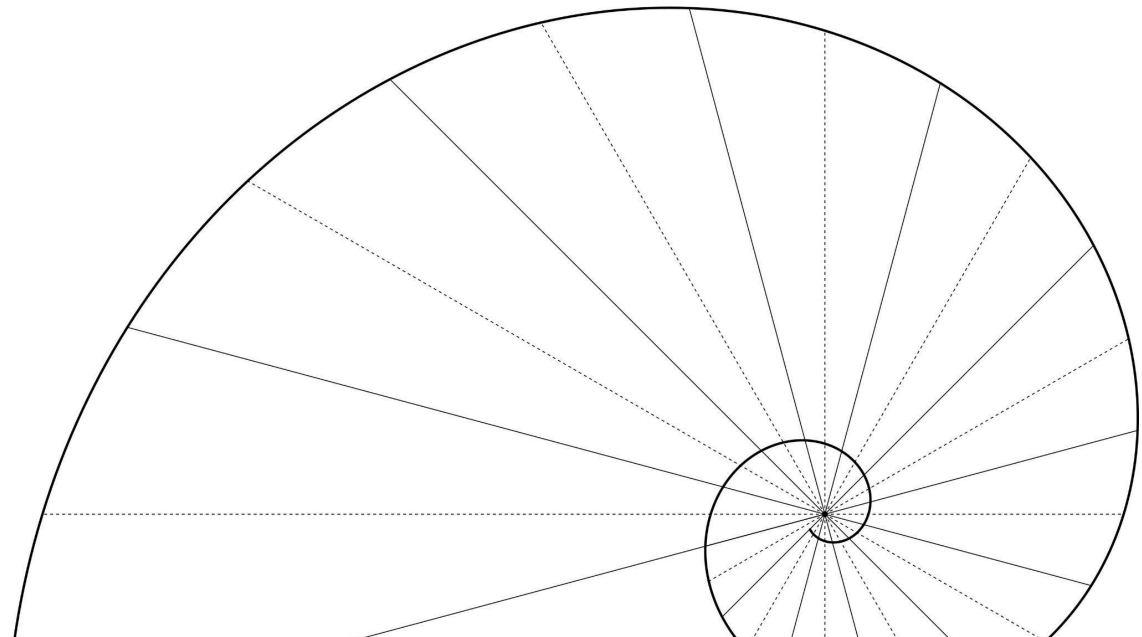
3. L'Spira Mirabilis a l'aula

L'espiral logarítmica va ser descrita per Albrecht Dürer en 1525, va ser estudiada per, entre d'altres, René Descartes en 1638 i va ser batejada com «Spira Mirabilis» per Jacob Bernoulli en 1692 per les seves interessants propietats matemàtiques.

A diferència de l'espiral d'Arquimedes, l'espiral logarítmica continua indefinidament en els dos sentits, allunyant-se cap a l'infinit i apropant-se cap a l'origen de coordenades sense assolir-los, tot mantenint sempre un mateix angle respecte als seus radis. És, doncs, una corba autosimilar i fer-la rotar al voltant de l'origen és equivalent a aplicar-hi una homotècia des d'aquest punt.

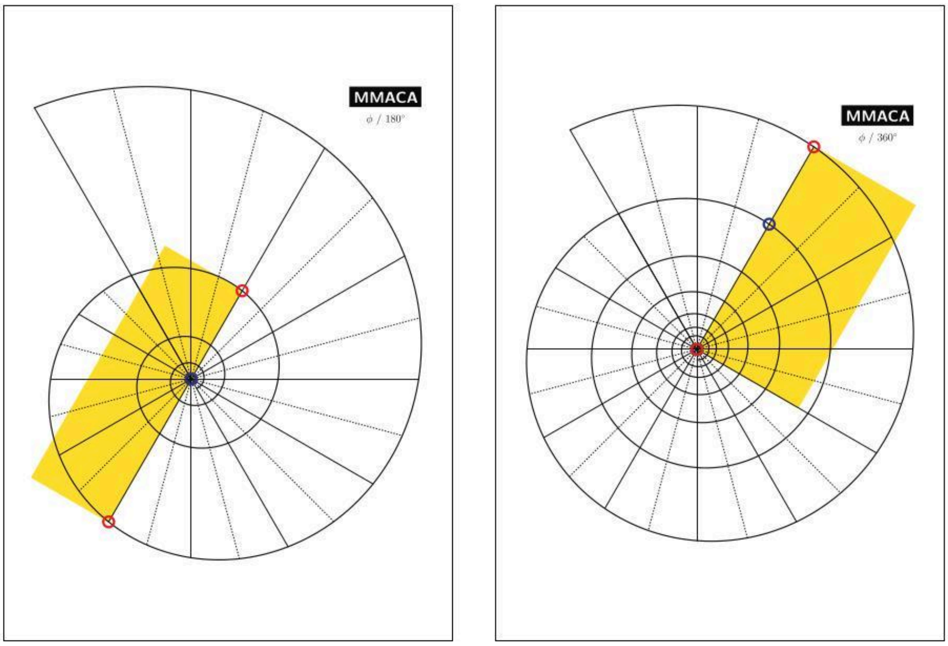
Cada espiral logarítmica queda completament caracteritzada per la constant per la qual queda multiplicat el radi en fer un gir de 360°. A efectes pràctics, però, resulta més còmode etiquetar-les com «espiral λ / α» entenent que ens referim a l'espiral que multiplica el radi per λ cada cop que girem un angle α i que una mateixa espiral pot tenir diverses denominacions. Així, l'espiral φ / 90° serà aquella que multiplica el radi pel nombre d'or cada 90° o, equivalentment, la que multiplica el radi per φ^4 cada 360°.

Per fer servir aquestes espirals a l'aula serà necessari, també, marcar l'origen de coordenades. La millor manera de fer-ho consisteix a traçar-hi 24 radis (un cada 15°) que ajudin a alinear correctament els objectes sobre l'espiral.



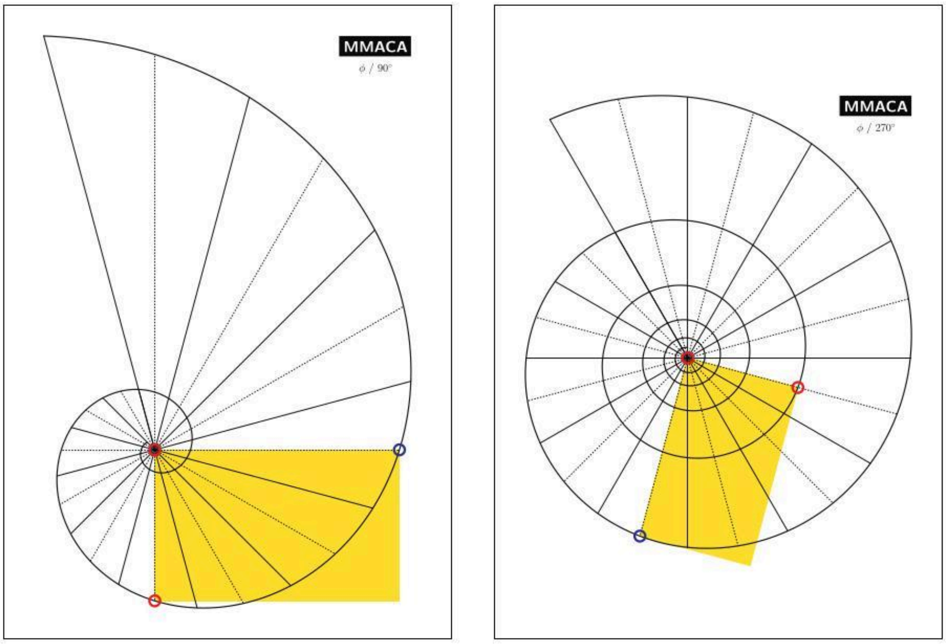
Espiral logarítmica φ / 90°, amb radis marcats cada 15°.

Fent servir les espirals φ / 180° o φ / 360° podem mesurar (o generar) raons àuries entre punts alineats, tal com fèiem amb el Compàs Auri.



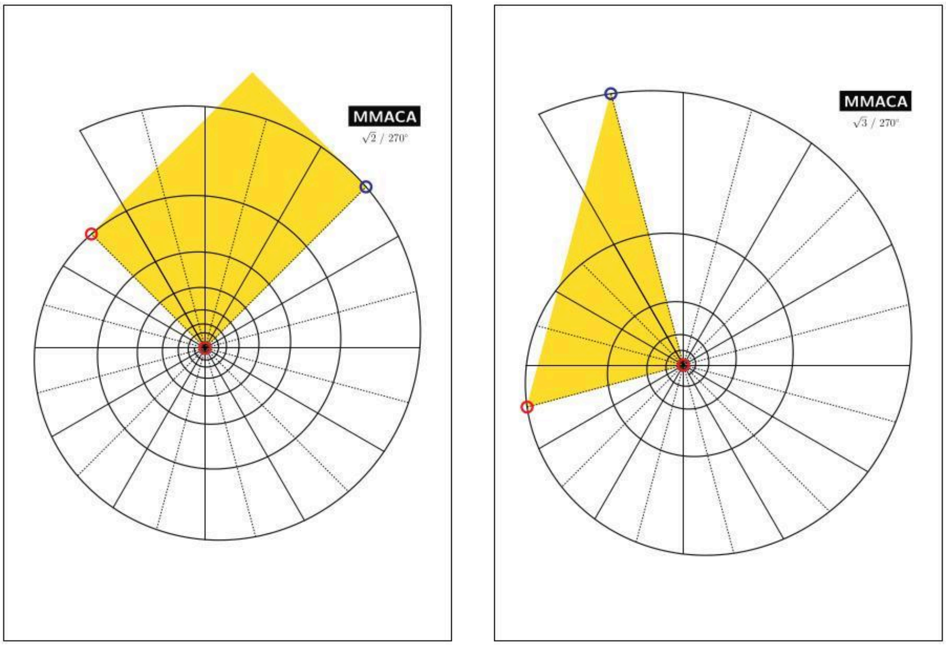
Espirals φ / 180° (esquerra) i φ / 360° (dreta) fent-se servir per dividir un segment (punts vermells) en secció àuria (punt blau) a la vora d'un full de paper (de color groc).

La llibertat que tenim per escollir el valor d'α ens permet també verificar (o generar) rectangles auris mitjançant les espirals φ / 90° o φ / 270°, essent aquesta última la que permet alinear l'objecte amb més facilitat perquè els seus radis creixen més lentament.



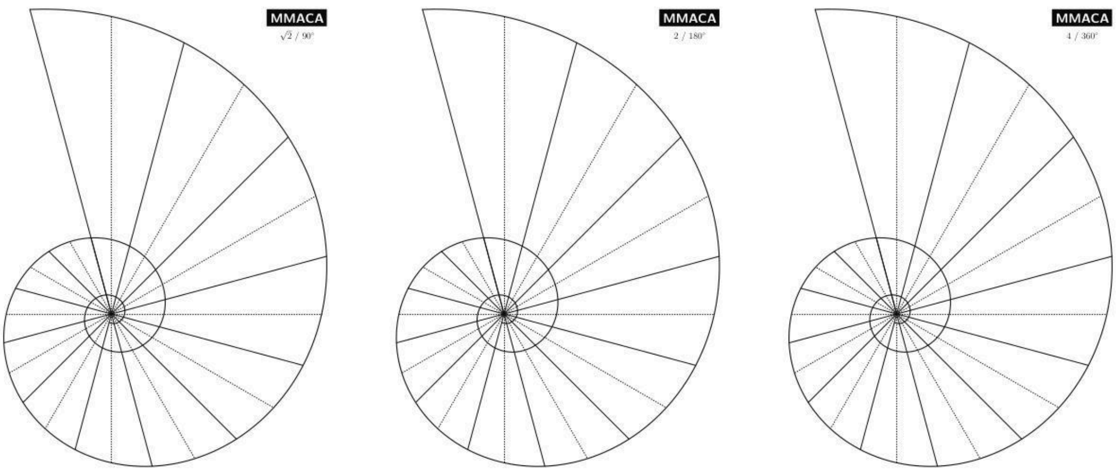
Espirals φ / 90° (esquerra) i φ / 270° (dreta) fent-se servir per multiplicar un segment (punts vermells) pel nombre d'or (punt blau) a la cantonada d'un full de paper (de color groc).

Si canviem ara el valor de λ, podem fer servir les espirals √2 / 270° o √3 / 270° per calcular quines són les proporcions d’un full de mida A7 o quina relació hi ha entre els catets d’un escaire (respectivament).



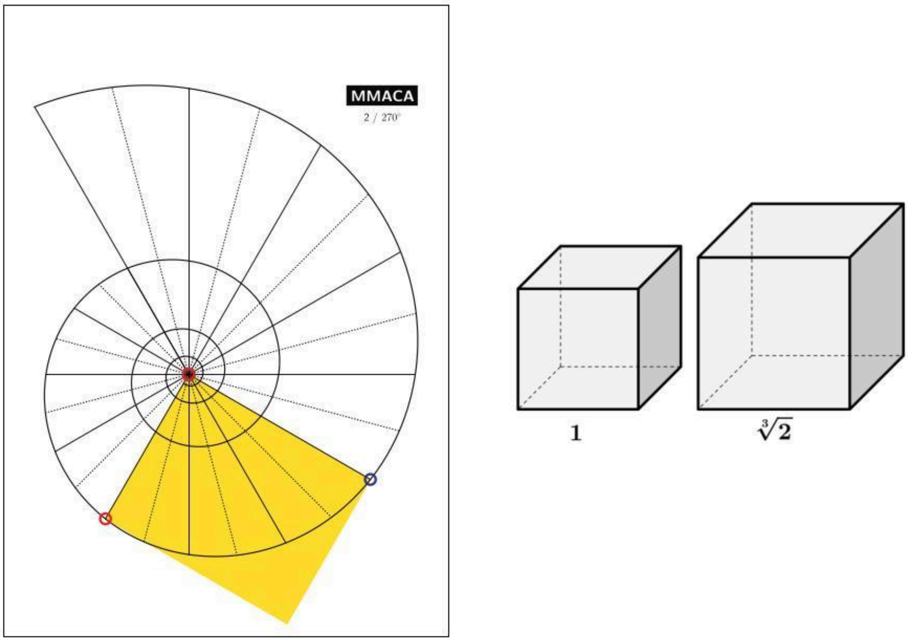
Espirals √2 / 270° (esquerra) i √3 / 270° (dreta) verificant les proporcions d’objectes.

Si volem aprofundir més en l’estudi de potències i arrels, podem preguntar a l’alumnat per què les espirals √2 / 90°, 2 / 180° i 4 / 360° s’assemblen tant i (un cop hagin determinat que, de fet, són la mateixa) demanar-los que trobin la λ associada a cadascun dels 24 radis marcats (i.e. angles múltiples de 15°).



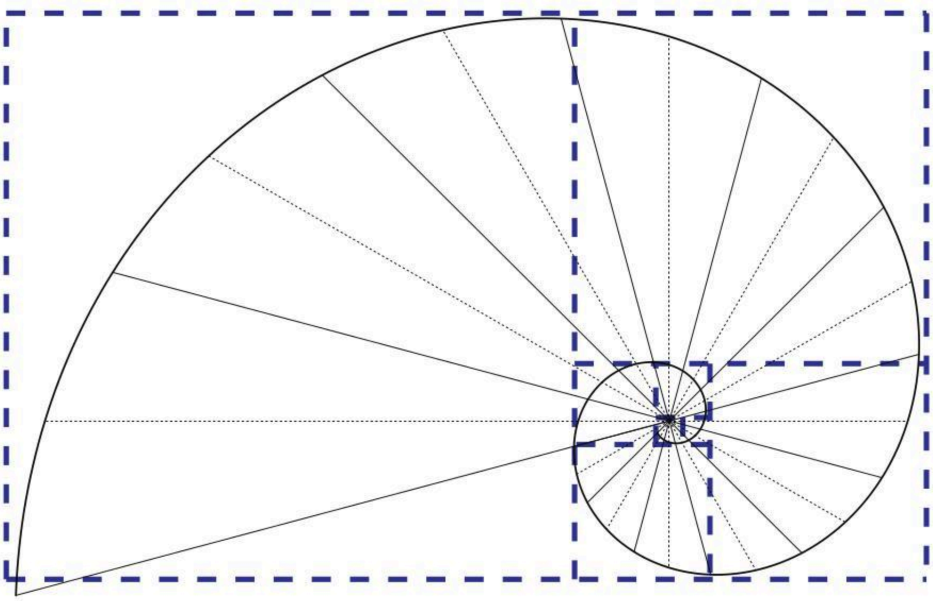
Espirals √2 / 90° (esquerra), 4 / 180° (centre) i 4 / 360° (dreta).

Amb una mica de reflexió, és fàcil veure que fins i tot podem resoldre el problema de la duplicació del cub amb l'aparentment innòcua espiral 2 / 270°.



Resolució del problema de la duplicació del cub (dreta) mitjançant l'espiral 2 / 270° (esquerra).

Es tracta, doncs, d'un material amb molt potencial i és fàcilment reproduïble a l'aula. Podem projectar-lo o fotocopiar-lo a qualsevol escala i podem donar una còpia a cada alumne o tenir un joc complet d'espirals degudament plastificades per reaprofitar-les cada curs. De fet, també és possible fer que el mateix alumnat dibuixi i faci servir una espiral de Fibonacci com a aproximació de l'espiral φ / 90° i aprofitar l'ocasió per parlar de la relació entre el nombre d'or i aquesta famosa successió.



Aproximació de Fibonacci de l'espiral φ / 90°.

4. Conclusions

En aquest article hem proposat un seguit d'idees que permeten treballar la proporcionalitat a l'aula de Secundària, tot i que algunes de les propostes seria fàcil adaptar-les a altres edats.

Hem partit d'un material d'aula ben conegut i divulgat, com és el Compàs Auri, i hem enumerat els seus principals avantatges com a base d'un projecte STEAM. També hem fet notar el seu principal desavantatge i això ens ha dut a buscar-hi alternatives.

Després d'examinar altres computadors analògics interessants, com ara els regles de càlcul, els pantòmetres o els nomogrames, hem plantejat i desenvolupat un material d'aula basat en espirals logarítmiques (o Spira Mirabilis).

Tot i ser de natura molt diferent, les espirals logarítmiques tenen algunes característiques en comú amb el Compàs Auri que les fa especialment desitjables com a material d'aula. En particular, permeten fer multiplicacions i divisions (per una constant donada) de manera purament geomètrica i el seu funcionament resulta inicialment sorprenent a l'alumnat, cosa que ajuda a captar el seu interès.

Així doncs, us encoratgem a dur algunes d'aquestes activitats a l'aula i, a tal efecte, us hem preparat un recull d'espirals en PDF que podeu descarregar a [Luna 2024].

5. Bibliografia

Brasó, Enric (2023). «*El nombre d'or*». Pàgina web d'accés obert.
https://mmaca.cat/moduls/nombre-or/ (consultada 31/05/2025).

Luna, Carlos (2024). «*Spira Mirabilis*». Pàgina web d'accés obert.
https://github.com/CarlosLunaMota/Spira-Mirabilis (consultada 31/05/2025).

Rey, Josep; Udina, Manuel. «Variacions sobre Fibonacci i el nombre d'or».
Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM, 2015, núm. 36, p. 120–127,
https://raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/302374 (consultat 31/05/2025).