Aplicação da aproximação de Laplace

Carlos Eduardo Frantz Manchini[1]

E-mail: carlos-efm@hotmail.com

Aproximação de Laplace

As primeiras aplicações da aproximação de Laplace na área estatística foram desenvolvidas por [1]. Uma generalização da expansão de Edgeworth envolvendo a aproximação de Laplace foi proposta por [3] para distribuições da família exponencial. Há também aplicações na estatística Bayesiana para obter aproximações dos momentos posteriores e distribuições [2]. A aproximação de Laplace representa uma maneira precisa de aproximar integrais. A idéia é encontrar o máximo da função a ser integrada e aplicar uma aproximação da série Taylor de segunda ordem para o logaritmo da função, a qual corresponde a uma distribuição normal que pode ser integrada e calculada analiticamente. A aproximação de Laplace pode ser usada para selecionar a melhor solução caso vários máximos locais tenham sido encontrados, uma vez que um pico amplo é preferido em um pico alto, mas estreito.

Seja $g(x)$ uma função que alcança ponto de máximo em x_0. Queremos calcular

$$\int_a^b g(x)\,dx.$$

Supondo $h(x) = \log g(x)$ temos:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \exp(h(x))\,dx.$$

Aplicando uma aproximação da série de Taylor em torno do ponto x_0, temos a expressão

$$\int_a^b \exp(h(x))\,dx \approx \int_a^b \exp\left(h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}h''(x_0)(x-x_0)^2\right)\,dx.$$

Considerando que $h(x)$ alcança ponto máximo em x_0, sabemos que $h'(x_o) = 0$. Obtém-se:

$$= \int_a^b \exp\left(h(x_0) + \frac{1}{2}h''(x_0)(x - x_0)^2\right)\, dx \;=\; \exp(h(x_0)) \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x - x_0)^2}{-h''(x_0)^{-1}}\right)\, dx.$$

Note na equação acima que há uma quantidade correspondente a uma densidade normal com média x_0 e variância $-h''(x_0)^{-1}$. Denotando $\Phi(x; \mu, \sigma^2)$ a função de distribuição acumulada da normal, reescrevemos a aproximação de Laplace:

$$= \exp(h(x_0))\sqrt{\frac{2\pi}{-h''(x_0)}}\left[\Phi\left(b; x_0, -h''(x_0)^{-1}\right) - \Phi\left(a; x_0, -h''(x_0)^{-1}\right)\right].$$

Sendo o intervalo $(a, b) = (-\infty, \infty)$, obtemos a forma final da aproximação, dada por

$$\int_a^b g(x)dx \;\approx\; \exp(h(x))\left(-\frac{2\pi}{h''(x)}\right)^{1/2}.$$

Aplicação

Vamos aproximar a integral dada a seguir pelo método de Laplace,

$$\int_0^\infty \exp(-u + x\log u)\frac{1}{u}\, du.$$

A função $f(u) = -u + x\log u$ tem ponto máximo em $u = u_0$ que depende de x,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = 0, \quad \Longrightarrow \quad -1 + \frac{x}{u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_0 = x.$$

Introduzindo uma nova variável z para fazer com que o máximo seja independente de x,

$$z = \frac{u}{x} \quad \Longrightarrow \quad u = xz \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = x\mathrm{d}z, \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

Assim, temos que $f(u) = -xz + x\log z + x\log x$. Portanto, a integral a ser aproximada é dada:

$$\int_0^\infty \exp[-x(z - \log z)]\frac{1}{z}\exp(x\log x)\,\mathrm{d}z \;=\; \exp(x\log x)\int_0^\infty \exp[-x(z - \log z)]\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \quad (1)$$

Definindo $f(z) = z - \log z$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 1 - \frac{1}{z}, \;\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 0 \implies \quad z_0 = 1.$$

$$f(z_0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{z^2} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z_0) = 1.$$

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)(z - z_0)^2 = 1 + \frac{1}{2}(z-1)^2.$$

Dessa forma, temos que

$$\int_0^\infty \exp^{-xf(z)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \;\sim\; \int_0^\infty \exp\left\{-x\left[1 + \frac{1}{2}(z-1)^2\right]\right\}\frac{1}{z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$\exp(-x)\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x(z-1)^2\right]\,\mathrm{d}z \;=\; \exp(-x)\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}xz^2\right]\,\mathrm{d}z.$$

Note que o último termo corresponde a integral Gaussiana: $\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}xz^2\right]\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.
Assim,

$$\int_0^\infty \exp\left[-x(z - \log z)\right]\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \;\sim\; \exp(-x)\sqrt{\frac{2\pi}{x}}. \tag{2}$$

Por fim, combinamos as equações (1) e (2) e obtemos a aproximação

$$\exp(x\log x)\exp(-x)\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{\exp(1)}\right)^x.$$

Para comparar a integral exata com a aproximação plotaremos as duas funções avaliadas no intervalo $(2, 4)$. A figura 1 confirma que a aproximação de Laplace foi acurada para aproximar a integral aplicada. A escolha do intervalo foi baseada na melhor visualização para distinção das mesmas, porém é viável a aplicação em $x \geq \infty$. Portanto, conclui-se para esta aplicação que o método de Laplace apresentou um desempenho adequado.

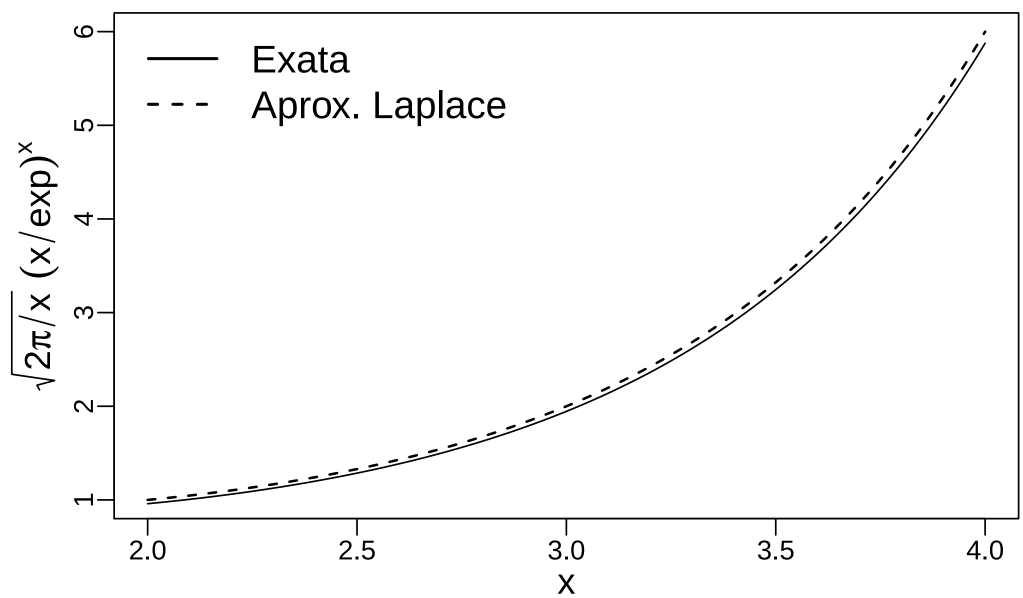

Figura 1: Comparação entre a integral exata e aproximação de Laplace avaliadas em $2 \leq x \leq 4$.

Referências

[1] **Daniels, Henry E.** (1954). *Saddlepoint approximations in statistics*. The Annals of Mathematical Statistics, p. 631-650.

[2] **Tierney, Luke; Kadane, Joseph B**. *Accurate approximations for posterior moments and marginal densities*. Journal of the american statistical association, v. 81, n. 393, p. 82-86, 1986.

[3] **Barndorff-Nielsen, Ole; Cox, David R.** *Edgeworth and saddle-point approximations with statistical applications.* Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), v. 41, n. 3, p. 279-299, 1979.