Sistemas complejos

Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Mapeos bidimensionales

Carlos Manuel Rodríguez Martínez

Universidad Veracruzana

4 de abril de 2016

Mapeos de modelos simples

- Un ejemplo simple. Tenemos una taza de café

- ¿En cuanto tiempo alcanza la temperatura ambiente? Si la tasa de pérdida de calor es proporcional a la diferencia de temperatura entre la taza y el exterior, entonces

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

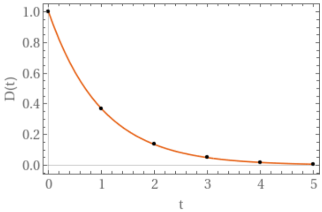
donde $T(t)$ es la temperatura de la taza al tiempo t, k es una constante que depende del calor específico, y T_a es la temperatura ambiente.

- Su solución es $T(t) = T_a + (T(0) - T_a)e^{-kt}$.

Mapeos de modelos simples

- Haciendo $D(t) = T(t) - T_a$ la solución queda como $D(t) = D(0)e^{-kt}$.
- La solución se puede expresar en forma de mapeo con pasos de tiempo de periodo 1.

$$f(x) = e^{-K}x$$

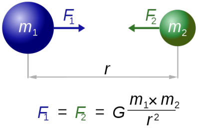


- El mapeo nos permite omitir pasos intermedios que no nos interesan para describir la dinámica.
- Este modelo es muy simple, y es unidimensional porque sólo se necesita una variable para especificar el estado del sistema.

Modelo más complicado

- La interacción gravitacional entre dos cuerpos está dada por

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^2}\hat{\mathbf{r_{12}}}$$



- Entonces considérese la interacción entre tres cuerpos

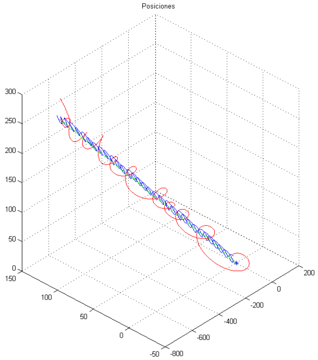
$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\left(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}\right)}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3} - \frac{Gm_3\left(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_3}\right)}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_3}|^3}$$

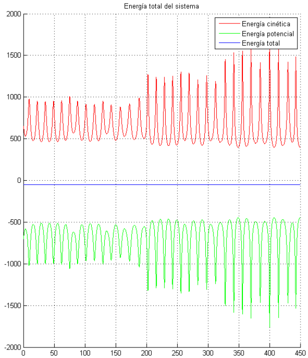
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3\left(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_3}\right)}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_3}|^3} - \frac{Gm_1\left(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}\right)}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}\right)}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}|^3} - \frac{Gm_2\left(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_2}\right)}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_2}|^3}$$

Modelo más complicado

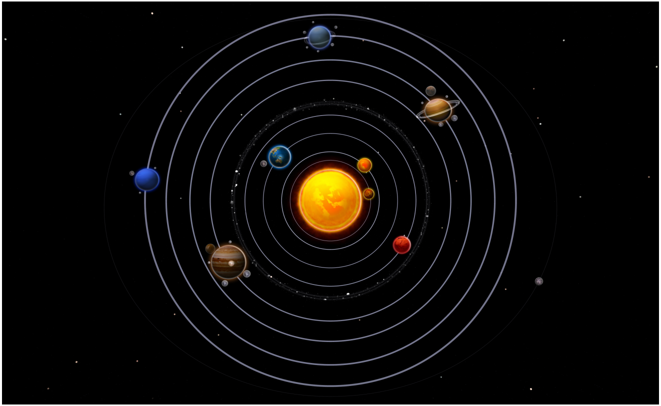
- Son 9 ecuaciones diferenciales acopladas.
- Un ejemplo de lo complicado que puede llegar a ser





Modelo más complicado

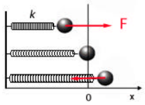
- ¿Cómo saber si esta cosa es estable?



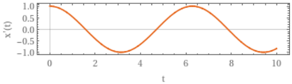
- Una herramienta para analizar este tipo de dinámica complicada es la sección de Poincaré.

Sección de Poincaré

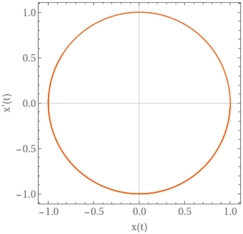
- Supongamos que tenemos un oscilador armónico. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$.



- Su órbita es

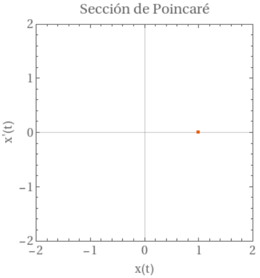


- En el espacio fase



Sección de Poincaré

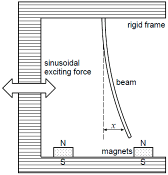
- Vamos a ir tomando muestras cada vez que se cumpla cierto evento, tal que de las muestras se obtenga un mapeo que caracterice la dinámica del sistema.
- En el caso del oscilador dado que es periódico con periodo 2π, se puede tomar muestras cada 2π.
- El resultado es el siguiente



- Es decir, la dinámica de este sistema se puede caracterizar por un mapeo que siempre mapea al mismo punto.

Sección de Poincaré

- Ahora veamos un sistema más complicado, el oscilador de Duffing.



  cuya ecuación de movimiento es
  $\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t)^3 = \gamma \cos(t)$.
- ¿Cómo tomar la sección de Poincaré? Primero se observa que si se tiene una solución $x(t)$ entonces $x(t + 2\pi)$ también es solución.

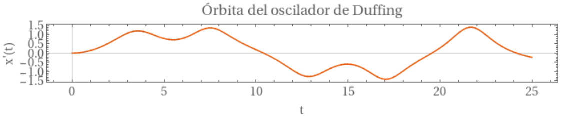
$$\ddot{x}(t+2\pi) + \delta\dot{x}(t+2\pi) + \alpha x(t+2\pi) + \beta x(t+2\pi)^3$$
$$= \gamma \cos(t+2\pi)$$
$$\ddot{x}(t+2\pi) + \delta\dot{x}(t+2\pi) + \alpha x(t+2\pi) + \beta x(t+2\pi)^3 = \gamma \cos(t)$$

Sección de Poincaré

- Y cambiando $x(t+2\pi) = x_1(t)$ queda

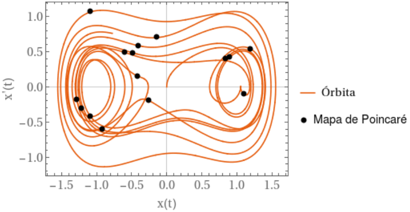
$$\ddot{x}_1(t) + \delta\dot{x}_1(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_1(t)^3 = \gamma\cos(t).$$

- Sea $x_N(t) = x(t+2N\pi)$, esto quiere decir que si se resuelve la ecuación diferencial a partir de cualquiera de los puntos x_N siempre estaremos describiendo al mismo sistema. Por lo tanto tomar la sección de Poincaré cada 2π nos dará un mapa representativo de la dinámica del sistema.
- La órbita es

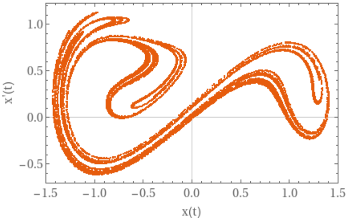


Sección de Poincaré

- Su trayectoria en el espacio fase

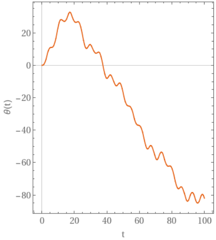


- La sección de Poincaré

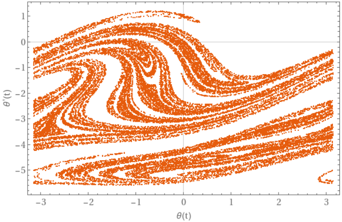


Sección de Poincaré

- Para el ejemplo del péndulo del libro, $\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) + \rho \sin(t)$, es similar. Su órbita es



- Y su sección de Poincaré



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Volviendo al problema de 3 cuerpos

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\left(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}\right)}{\left|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}\right|^3} - \frac{Gm_3\left(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_3}\right)}{\left|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_3}\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^3} - \frac{Gm_1\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r_3}-\mathbf{r_1}\right)}{\left|\mathbf{r_3}-\mathbf{r_1}\right|^3} - \frac{Gm_2\left(\mathbf{r_3}-\mathbf{r_2}\right)}{\left|\mathbf{r_3}-\mathbf{r_2}\right|^3}$$

- Una manera de enfrentarlo es haciendo que $m_3 << m1, m2$.

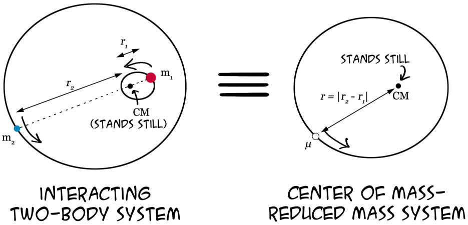
Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Esto simplifica mucho el problema, ya que desacopla las dos primeras ecuaciones.

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right|^3} - \frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right|^3}$$

- Las primeras dos ecuaciones son el problema de 2 cuerpos, que tiene solución analítica.



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Con respecto a las masas grandes se harán las siguientes simplificaciones.

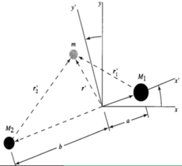
$$|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}| = 1, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3}} = 1,$$

$$G(m_1 + m_2) = 1, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

de manera que

$$Gm_2 = \frac{Gm_2}{G(m_1 + m_2)} = \alpha, \quad Gm_1 = 1 - \alpha.$$

- Por último se escoge un sistema de referencia en el cual las dos masas grandes están estáticas.



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Entonces la relación entre ambos sistemas de referencia es

$$x(t) = x'(t)\cos t - y'(t)\sin t, \quad y(t) = x'(t)\sin t + y'(t)\cos t.$$

- La interacción gravitacional en este sistema de referencia es

$$\begin{aligned}
\ddot{x}' &= 2\dot{y}'(t) - \frac{\alpha(\alpha + x'(t) - 1)}{\left((\alpha + x'(t) - 1)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)(\alpha + x'(t))}{\left((\alpha + x'(t))^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} + x'(t) \\
\ddot{y}' &= -2\dot{x}'(t) - \frac{(1-\alpha)y'(t)}{\left((\alpha + x'(t))^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} + y'(t) \\
&\quad - \frac{\alpha y'(t)}{\left((\alpha + x'(t) - 1)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

- Este es el problema de 3 cuerpos restringido.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Esta solución contiene órbitas periódicas y caóticas

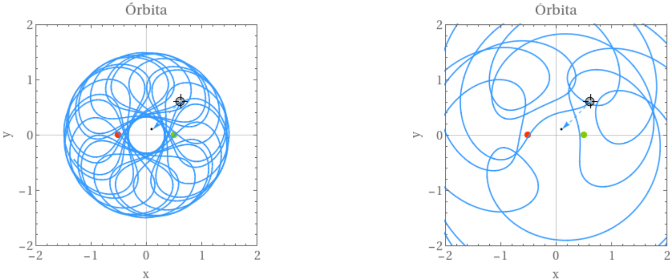
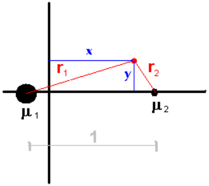


Figura: Órbita estable y caótica. Depende del valor de α.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- El problema de 3 cuerpos restringido conserva una cantidad que se llama constante o integral de Jacobi.



$$
\begin{aligned}
C_J &= \frac{2\pi}{T}(x'^2 + y'^2) + 2G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \dot{x'}^2 - \dot{y'}^2 \\
&= x'^2 + y'^2 + 2\frac{r_2+\alpha}{r_1 r_2} - \dot{x'}^2 - \dot{y'}^2.
\end{aligned}
$$

- Cuando la órbita pasa por el punto $y = 0$ la velocidad en y puede tener dos valores.

$$
\dot{y} = \pm\sqrt{x'^2 + 2\frac{r_2+\alpha}{r_1 r_2} - \dot{x'}^2 - C_J}.
$$

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

Entonces si nos fijamos en los valores $(x'(t), \dot{x}'(t))$ cada vez que $y(t) = 0$ con $\dot{y}(t) > 0$ ó $\dot{y}(t) < 0$ tendremos un mapa que describe por completo la dinámica del sistema.

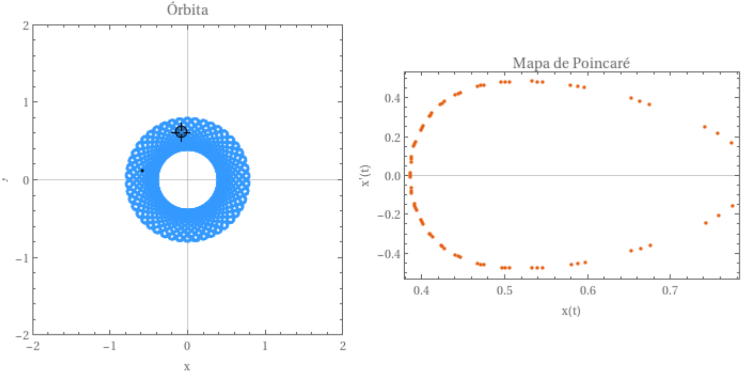


Figura: $\alpha = 1$.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

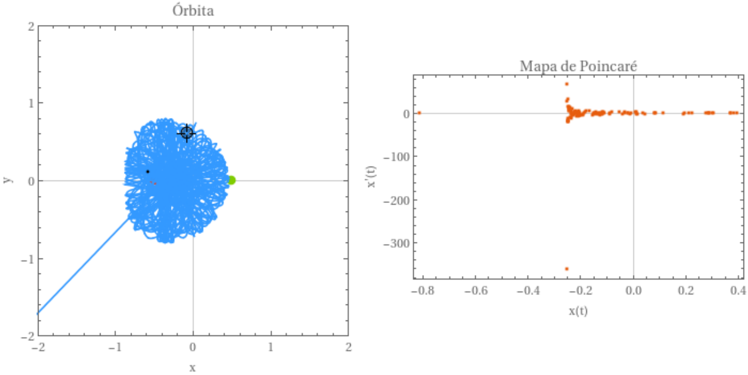
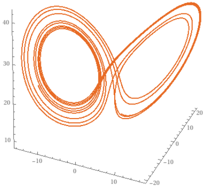


Figura: $\alpha = 1.25$.

Mapa de Henón

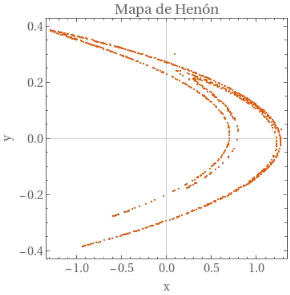
- El mapa de Henón es de hecho una sección de Poincaré del modelo de Lorentz.



$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z.$$

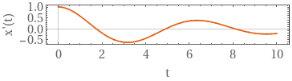
Mapa de Henón

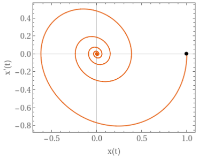
- Mapa de Henón, $f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$.



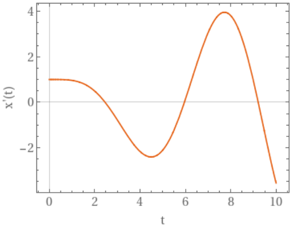
Atractores, repulsores y puntos de silla.

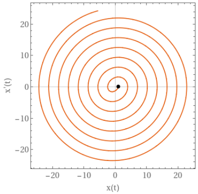
- Un ejemplo de atractor. En un oscilador armónico amortiguado (resorte-masa con fricción).





- Repulsor. Oscilador armónico forzado (resorte-masa forzado sin fricción).





Atractores, repulsores y puntos de silla.

- Sea $\mathbf{f}$ un mapa en $\mathbb{R}^m$, y sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ un punto fijo, esto es $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\mathbf{v}$ en la vecindad de ϵ, $N_\epsilon(p)$,

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{v}) = \mathbf{p},$$

  entonces $\mathbf{p}$ es un atractor. Si $N_\epsilon(\mathbf{p})$ es tal que para cada $\mathbf{v}$ en $N_\epsilon(\mathbf{p})$ excepto para $\mathbf{p}$ el punto mapea afuera de $N_\epsilon(\mathbf{p})$ entonces $\mathbf{p}$ es un repulsor.
- Los puntos de silla se caracterizan por ser atractores y repulsores en diferentes direcciones.

Atractores, repulsores y puntos de silla.

- ¿Qué tipo de atractor es el mapa de Lorentz?
- Algunos puntos divergen rápidamente, mientras otros son atraidos hacia un conjunto de puntos con estructura fractal. Se le conoce como atractor extraño.

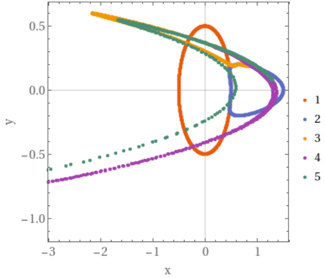


Figura: $a = 1.4,\ b = 0.3$.

Atractores, repulsores y puntos de silla.

- ¿Cómo analizar si un punto fijo es atractor o repulsor? En el capítulo anterior se vio que es a partir de los eigenvalores de la matriz Jacobiana.
$$|\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) - \lambda \mathbb{I}| = 0.$$
- Si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ es un atractor. Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ es un repulsor.

Mapas lineales.

- A los mapas de la forma

$$x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{11}y_n$$
$$y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n$$

  se les denomina mapas lineales, debido a que se pueden simplificar a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

  de manera que cumplen la propiedad $A(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aA(\mathbf{v}) + bA(\mathbf{w})$.

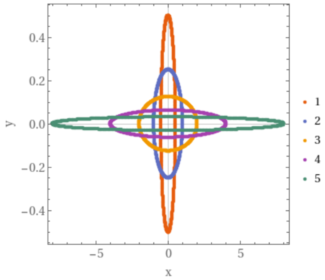
- Sea un mapa definido por $A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, entonces $A^{(n)}(\mathbf{v}) = A^n\mathbf{v}$.

Mapas lineales.

- El efecto de estos mapas es un cambio de escala. Por ejemplo, para el mapa definido por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

el resultado del mapeo es el siguiente.



Mapas lineales.

- Sea $A(\mathbf{v})$ un mapa lineal en $\mathbb{R}^m$, que está representado por una matriz A (en cualquier sistema de coordenadas). Entonces
  1. El origen es un atractor si el valor absoluto de todos los eigenvalores de A son menores que uno.
  2. El origen es un repulsor si el valor absoluto de todos los eigenvalores de A son mayores que uno.
- Se dice que A es hiperbólico si el valor absoluto de uno de sus eigenvalores es mayor a uno, y otro es menor que uno. Entonces el origen es un punto de silla.