Sistemas complejos

The Nonlinear Workbook

Carlos Manuel Rodríguez Martínez

Universidad Veracruzana

19 de febrero de 2016

Sistemas Dinámicos

- Regla determinista para describir la evolución de un sistema.
- Sea un sistema descrito por un conjunto finito de variables dinámicas $\vec{x} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}$.
- La evolución temporal del sistema estará descrita por:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t).$$

Mapeos unidimensionales

- Son mapeos $f : S \to S$, donde $S \subset \mathbb{R}$. Por lo general $S = [0, 1]$ o $S = [-1, 1]$.
- El mapeo se puede describir a partir de la relación de recurrencia

$$x_{t+1} = f(x_t),$$

  donde $t \in \mathbb{Z}^+$, y $x_0 \in S$. Esto es un sistema dinámico discreto.
- A la secuencia de puntos

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))), \ldots$$

  se le denomina órbita.

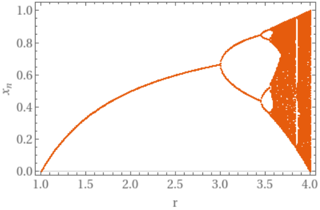
Objetivos

- Entender la naturaleza de las órbitas.
- Identificar órbitas periódicas.
- Comprender lo que ocurre cuando $t \to \infty$.

Los mapeos: Mapa logístico

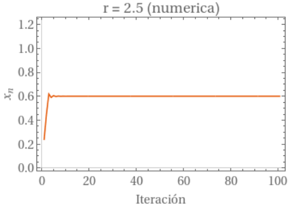
- Mapeo $f : [0,1] \to [0,1]$ dado por $f(x) = rx(1-x)$.
- La relación de recurrencia es $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$, donde $x_0 \in [0,1]$ y $x_t \in [0,1]$.
- Para $r = 4$ existe una solución exacta

$$x_t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2^t \cos(1-2x_0)\right)$$

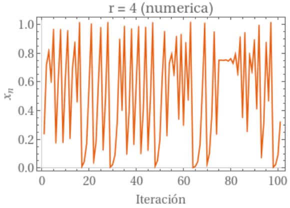


Los mapeos: Mapa logístico

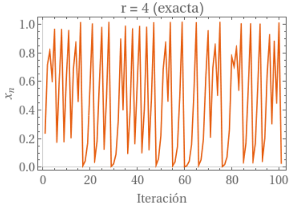
- La órbita en $r = 2.5$ converge.



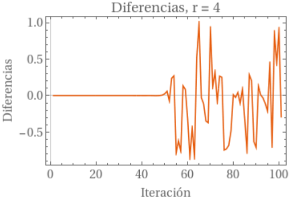
- La órbita en $r = 4$ es caótica.



- La órbita exacta en $r = 4$ es



- La diferencia entre la órbita exacta y numérica es

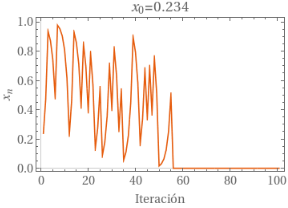


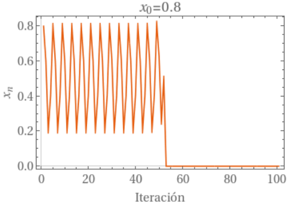
Los mapeos: Mapa de Bernoulli

- Mapeo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dado por

$$x_{t+1} = \begin{cases} 2x_t & 0 \leq x_t < \frac{1}{2} \\ 2x_t - 1 & \frac{1}{2} \leq x_t < 1 \end{cases}$$

donde $x_0 \in [0, 1)$.





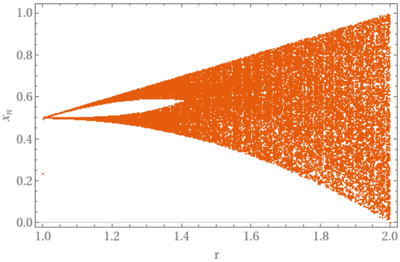
Los mapeos: Tent map

- Mapeo $f : [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$x_{t+1} = \begin{cases} rx_t & 0 \leq x_t < \frac{1}{2} \\ r(1-x_t) & \frac{1}{2} \leq x_t \leq 1 \end{cases}$$

donde $x_0 \in [0,1]$.

- Si el punto inicial es irracional la órbita es caótica. Si es racional no lo es.



¿Qué nos interesa describir?

- **Punto fijo**: Un punto $x^* \in S$ es llamado punto fijo del mapa f si $f(x^*) = x^*$.
- **Punto periódico**: Un punto $x^* \in S$ es llamado punto periódico de periodo n si $f^{(n)}(x^*) = x^*$.
- **Punto eventualmente periódico**: Un punto x^* es llamado eventualmente periódico de periodo n si x^* no es periódico pero existe un $m > 0$ tal que

$$f^{(n+i)}(x^*) = f^{(i)}(x^*) \quad \forall\, i \geq m.$$

- **Punto hiperbólico**: Sea x^* un punto periódico de periodo n. El punto es hiperbólico si

$$|(f^{(n)})'(x^*)| \neq 1.$$

Teorema

- Sea x^* un punto fijo con $|f'(x^*)| < 1$, entonces existe un intervalo abierto U alrededor de x^* tal que si $x \in U$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = x^*$$

¿Cómo analizar la estabilidad de los puntos fijos?

- Considere el mapeo $f : [0,1] \to [0,1]$, con punto fijo x^*.
- Sea y_{t+1} la razón de variación ante una perturbación, entonces

$$y_{t+1} = \frac{d}{d\epsilon} f(x + \epsilon y)|_{\epsilon=0, x=x_t, y=y_t} = \frac{df(x = x_t)}{dx} y_t$$

- Si

$$\left| \frac{y_{t+1}}{y_t} \right| = \left| \frac{df(x = x_t)}{dx} \right| < 1$$

Ejemplo: Mapa logístico

- Puntos fijos $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$.
- En $r = 4$

$$\frac{df}{dx} = 4 - 8x,$$

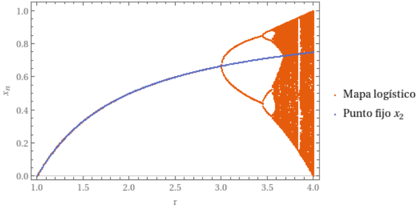
entonces

$$\left|\frac{df(x_1^*)}{dx}\right| = 4$$

y

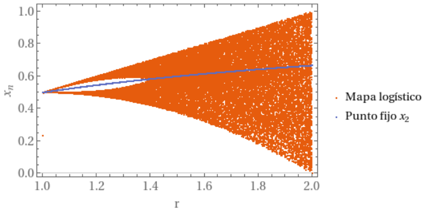
$$\left|\frac{df(x_2^*)}{dx}\right| = 2.$$

Son inestables.



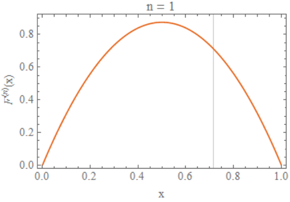
Ejemplo: Tent Map

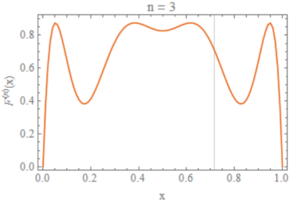
- En $r \in [1, 2]$ los puntos fijos son $x_1^* = 0$ y $x_2^* = \frac{r}{r+1}$.
- Ambos puntos son inestables. Son inestables.

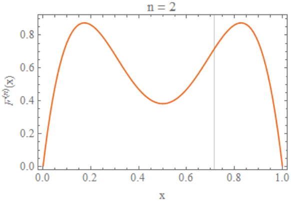


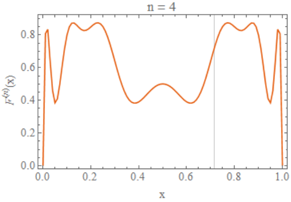
Una manera visual de encontrar los puntos fijos

En el mapa logístico
$f(x) = 3.5x(1 - x)$.









Densidad invariante

- Se define la densidad invariante de un mapeo como

$$\rho(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \delta(x - f^{(t)}(x_0)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \delta(x - x_{t+k})$$

- Se pide que la densidad esté normalizada

$$\int_0^1 \rho(x)\, dx = 1.$$

Densidad invariante

- Sea

$$\sigma(y) \equiv \int_0^1 \delta(y - f^{(k)}(x))\rho(x)\, dx \tag{1}$$

- Sea g una función integrable arbitraria en $[0, 1]$, entonces

$$\int_0^1 \sigma(y)g(y)\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \delta(y - f^{(k)}(x))\rho(x)g(y)\, dy\, dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \int_0^1 \int_0^1 \delta(y - f^{(k)}(x))\delta\left(x - f^{(t)}(x_0)\right) g(y)\, dy\, dx$$

Densidad invariante

- Una propiedad de la delta de dirac es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

- Entonces

$$\int_0^1 \sigma(y)g(y)\,dy = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\int_0^1 \delta\left(x - f^{(t)}(x_0)\right) g\left(f^{(k)}(x)\right)\,dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} g\left(f^{(k+t)}(x_0)\right)$$

Densidad invariante

- De aquí se puede regresar el procedimiento cambiando la variable de la delta

$$\int_0^1 \sigma(y) g(y)\, dy = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \int_0^1 \delta\left(y - f^{(t+k)}(x_0)\right) g(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \rho(y) g(y)\, dy,$$

entonces $\sigma(y) = \rho(y)$.

- Sustituyendo en la ec. 1 queda

$$\rho(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x)) \rho(x)\, dx$$

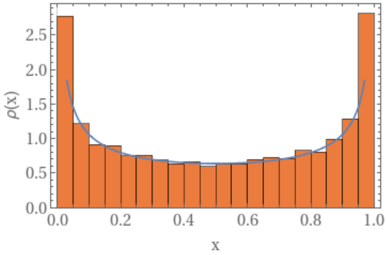
Densidad invariante: Mapa logístico

- Para el mapa logístico

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},$$

satisface la ecuación integral y

$$\int_0^1 \rho(x)\, dx = 1.$$



Densidad invariante: Solución numérica

- Se puede encontrar una solución numérica a la ecuación integral a través de la iteración

$$\rho_{t+1}(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x))\rho_t(x)\, dx$$

- Método
  - Suponer una densidad inicial $\rho_0(x) = 1$.
  - Repetir N veces
    - Crear tabla con elementos

$$\int_0^1 \delta(y - f(x))\rho_t(x)\, dx,$$

      con y entre $[0, 1]$.
    - Interpolar datos para construir $\rho_{t+1}(y)$.

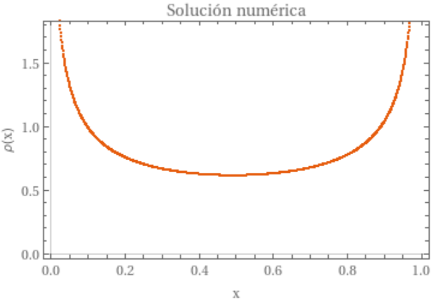
Densidad invariante: Solución numérica

- Implementación en Mathematica.

```
LogMap[x_, r_] := r x (1 - x);
Dens[y_] := NIntegrate[DiracDelta[y - LogMap[x, 4]], {x, 0, 1}];
dx = 0.001;
init = Table[{x, 1}, {x, 0 + dx, 1 - dx, dx}];
ρ = Interpolation[init];
Do[
  ρy = Table[{y, Integrate[DiracDelta[y - LogMap[x, 4]] ρ[x], {x, 0, 1}]}, {y, 0 + dx, 1 - dx, dx}];
  ρ = Interpolation[ρy];,
  {i, 10}
 ];
```

Densidad invariante: Solución numérica

- Resultado para el mapa logístico.



Exponente de Lyapunov

- Es una medida de esta divergencia entre dos trayectorias infinitesimalmente cercanas.
- Se comienza suponiendo dos trayectorias cercanas, x_0 y $x_0 + \epsilon$.

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= F^n(x_0 + \epsilon) - F^n(x_0) \\ &= F^n(x_0) + \epsilon \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} + \cdots - F^n(x_0),\end{aligned}$$

donde n denota el número de iteraciones del sistema y F^n es el sistema iterado n veces. Considerando que $F^n = F(F^{n-1})$, entonces

$$\epsilon_n = \epsilon_0 \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} = \epsilon_0 F'(F^{n-1}(x_0)) \frac{dF^{(n-1)}(x_0)}{dx_0} = \epsilon_0 \prod_{k=0}^{n-1} F'(x_k).$$

Exponente de Lyapunov

- Aquí se supone que las trayectorias divergen exponencialmente, de manera que

$$\epsilon_n = \epsilon_0 e^{n\lambda},$$

- Entonces

$$e^{n\lambda} = \left|\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0}\right| = \prod_{k=0}^{n-1} F'(x_k).$$

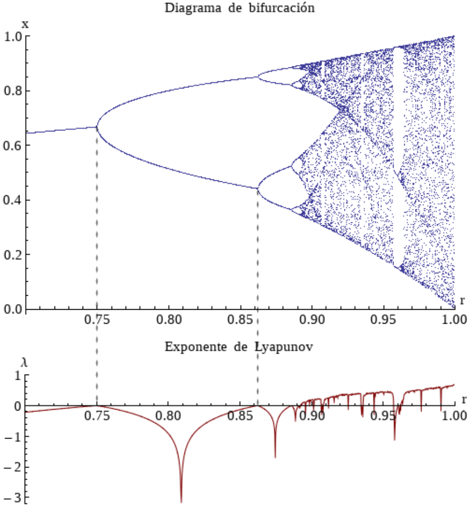
- El *exponente de Lyapunov* queda definido como

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|F'(x_k)\right|.$$

- Si $\lambda < 0$ la órbita tiende hacia algún valor, si $\lambda > 0$ no tiende hacia ningún valor. Cuando $\lambda = 0$ la trayectoria no diverge.

Exponente de Lyapunov: Mapa logístico

- En el mapa logístico se observa que el exponente de Lyapunov es mayor que 0 en la zona caótica.



Función de autocorrelación

- **Covarianza**: Valor esperado del producto de las desviaciones de las medias.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$$

Si las variables aleatorias son independientes

$$\mathrm{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = \mathrm{E}[X-\mu_x]\,\mathrm{E}[Y-\mu_y] = 0.$$

Función de autocorrelación

- **Correlación**: Valor esperado del producto de las desviaciones de las medias.

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

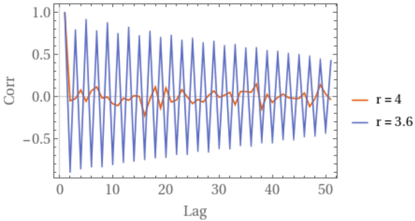
- **Autocorrelación**: Correlación con la misma serie de tiempo a un *lag* τ.

$$C(\tau) = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+\tau}).$$

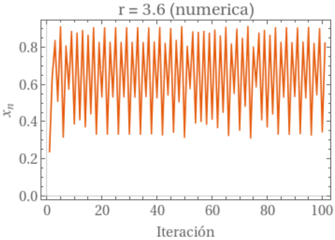
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

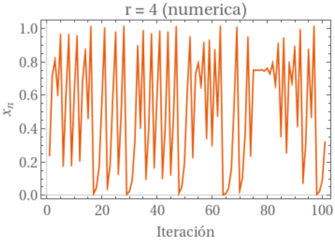
Función de autocorrelación: Mapa logístico

- Aplicando la función de autocorrelación al mapa logístico se obtiene el siguiente correlograma.



- Interpretación: El comportamiento es caótico en $r = 4$. En $r = 3.6$ la órbita es periódica.





Fourier: Serie

- Se tiene una señal periódica.
- Queremos descomponerla en sus armónicos.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt, \; c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} \, dt.$$

Transformada de Fourier

- Si la señal que se quiere estudiar no es periódica se usa la transformada de Fourier.
- Puede interpretarse como el límite de la serie de Fourier cuando el periodo $T \to \infty$.
- Es un mapeo $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$.
- Está dada por

$$\hat{x}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i k t} \, dt.$$

Transformada de Fourier

- Si la señal que se quiere estudiar no es periódica se usa la transformada de Fourier.
- Puede interpretarse como el límite de la serie de Fourier cuando el periodo $T \to \infty$.
- Es un mapeo $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$.
- Está dada por

$$\hat{x}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i k t}\, dt.$$

Transformada Discreta de Fourier

- En el caso en el que la función $x(t)$ tiene valores discretos se usa la Transformada Discreta de Fourier (DFT).

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-\frac{2\pi ikt}{T}}.$$

- La transformada inversa es

$$x(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \hat{x}(k) e^{2\pi it\frac{k}{T}}.$$

Transformada Discreta de Fourier: Significado

- Sea n el número de muestras.
- f_s la frecuencia de muestreo de manera que el intervalo de tiempo entre las muestras es

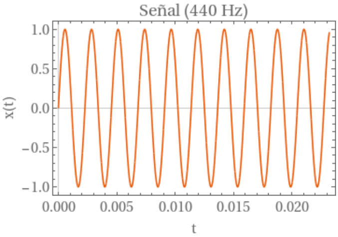
$$dt = \frac{1}{f_s}.$$

- El elemento k-ésimo de la DFT nos devuelve la amplitud del armónico con frecuencia

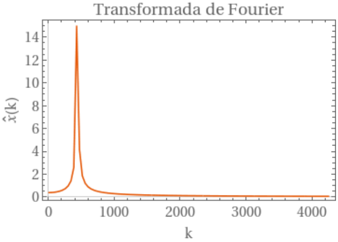
$$f = \frac{kf_s}{n}.$$

Transformada Discreta de Fourier: Ejemplo

- Se crea una señal con frecuencia 440 Hz.



- La DFT es



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- DFT posee complejidad $O(N^2)$. La FFT $O(N \log N)$.
- La transformada de Fourier Discreta

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

Sea

$$W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}.$$

Entonces

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n\ par} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\ impar} x(n) W_N^{kn}$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2kr} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) \left(W_N^2\right)^{kr} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) \left(W_N^2\right)^{kr},$$

pero

$$W_N^2 = e^{-\frac{2\pi i 2}{N}} = e^{-\frac{2\pi i}{N/2}} = W_{N/2},$$

entonces

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{kr},$$

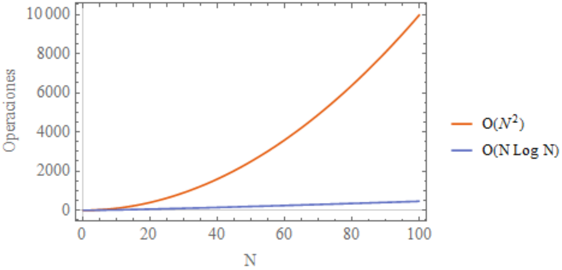
esto es

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_{par}(k) + W_N^k \, \hat{x}_{impar}(k),$$

donde cada una de estas transformadas opera sobre $N/2$ términos.

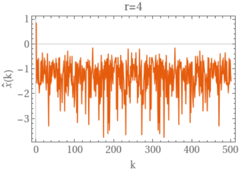
Transformada Rápida de Fourier (FFT): Complejidad

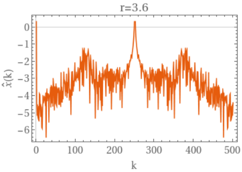
- Los beneficios de usar la transformada rápida de Fourier cuando el número de muestras es grande son evidentes.



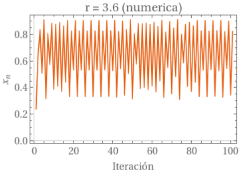
Transformada de Fourier: Mapa logístico

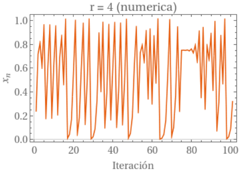
- Aplicando la transformada de Fourier al mapa logístico se obtiene el siguiente periodograma.





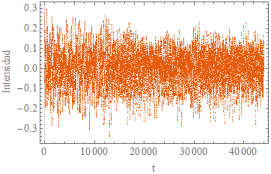
Interpretación: El comportamiento es caótico en $r = 4$. En $r = 3.6$ la órbita es periódica.



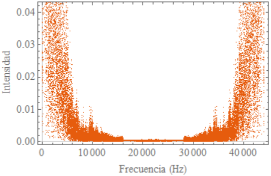


Transformada de Fourier: Señal de audio

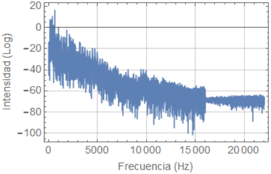
- La transformada de Fourier es muy útil para analizar señales muy complejas como audio.



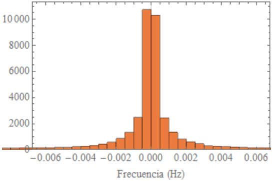
- Con DFT se obtiene el espectro de frecuencias



- En algunos casos conviene más usar la escala logarítmica.



- En este caso en particular es útil conocer la distribución de frecuencias.



Conclusión

Gracias por su atención.