Introducción a la Mecánica Teórica: Tarea 1

Carlos Manuel Rodríguez Martínez

5 de octubre de 2020

Resumen

Tarea de aplicación del principio de D´Alembert y ecuaciones de Euler-Lagrange

1. Introducción

El principio de D'Alembert y el formalismo Lagrangiano nos permiten expresar y obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico a través de un formalismo diferente al de Newton. El objetivo de esta tarea es que los estudiantes exploren el planteamiento de soluciones a partir de estos formalismos de manera que puedan apreciar cómo se diferencían del formalismo Newtoniano.

2. Principio de D'Alembert

Resolver los siguientes problemas usando el principio de D'Alembert.

2.1. 1- Máquina de Atwood

Consideremos dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo que pasa por una polea ideal (sin masa y sin rozamiento) tal como se muestra en la figura 1, de forma que ambas cuelgan verticalmente. ¿Cuál es el valor de la aceleración con la que se mueven las masas?

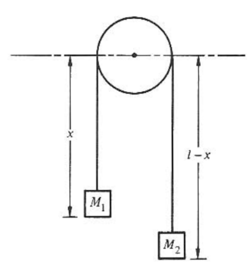

Figura 1: Diagrama de la máquina de Atwood

Hint: Las coordenadas están relacionadas por la constricción $x_1 + x_2 = l$ que se puede expresar como $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l = 0$. El diferencial de f está dado por:

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0.$$

A partir de esta expresión podemos obtener la variación de f en términos de la variación de sus coordenadas:

$$\delta f = \nabla f \cdot \delta\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0,$$

así que en este problema tenemos que

$$\delta f = \delta x + \delta y = 0$$

2.2. 2- Plano inclinado

Consideremos ahora el caso de una partícula que desciende sin rozamiento por un plano inclinado de base b y altura h. ¿Cuál es el valor de su aceleración?

2.3. 3- Péndulo simple cartesiano

Consideremos el caso de un péndulo simple en el que una masa m pende de un punto fijo a través de un hilo ideal de longitud L. La única fuerza aplicada sobre la masa es el peso, que actúa en la dirección vertical. Obtener las ecuaciones de movimiento en el sistema de coordenadas cartesianas.

Hint: Podemos expresar la constricción por medio de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - L^2 = 0$, comience por calcular la variación δf.

2.4. 4- Péndulo simple parametrizado

Resuelva el mismo problema del péndulo simple pero esta vez parametrice el vector $\vec{r}(x, y)$ en términos del ángulo, esto es $\vec{r}(\theta)$.

3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Resolver los problemas 1, 2 y 3 de la sección anterior utilizando el formalismo Lagrangiano.