Análisis Del Movimiento De Un Péndulo Doble con la sección de Poincaré

Aaron de Jesús Ortíz López   Cristobal Sebastián Hernández Ortega
José Alberto Osorio Viveros   Luis Rafael Hernández Velásquez
Carlos Alexis Barrios Bello

15 de junio de 2020

Resumen

El objetivo de esta proyecto es observar el comportamiento del péndulo doble y describir lo observado al utilizar la sección de Poincaré, mostrando el análisis de las gráficas obtenidas, con este fin, la pregunta de investigación seria la siguiente: ¿Qué comportamiento logramos notar en el péndulo doble con la sección de Poincaré?
Para responder esa pregunta se utilizan diferente métodos, comenzando por analizar las ecuaciones de péndulo doble y apoyándonos en el programa “Wolfram Mathematica” para emplear métodos numéricos y de esta manera dar solución a las ecuaciones y graficar los datos obtenidos. Observamos que la mayoría de los resultados son caóticos, de lo que podemos concluir que el péndulo doble se considera como un sistema del caos, y que, sin importar los valores iniciales de sus ángulos, el sistema se terminará reiniciando, aunque se logre ver un poco de orden previo al caos.

Introducción

0.1. Péndulo

Es un sistema ideal compuesto por una partícula de una masa m sujeta a una cuerda inextensible e idealmente sin peso. En la practica es imposible la reproducción de este, pero es posible estudiarlo desde la teoría.
El movimiento se da bajo la acción de dos fuerzas: el peso mg y la tensión del hilo. Tenemos que al desplazar la masa puntual de la posición de equilibrio hasta que esta forme un ángulo determinado respecto a la vertical y lo dejamos caer partiendo del reposo, este oscilará en el plano vertical por la acción de la gravedad. Estas oscilaciones se darán entre el ángulo de partida y su contraparte simétrica vertical en el plano formando un arco de circunferencia cuyo radio será la longitud del hilo. El movimiento es periódico, pero no siempre será armónico.
Existen dos métodos para describir el movimiento del péndulo, los cuales son el Método de Newton y el Método de Lagrange. El primero describe el sistema a partir de la segunda Ley de Newton, descomponiendo las fuerzas que actúan sobre el sistema. El segundo lo describe a partir del principio de la conservación de la energía, así utilizando la energía potencial y cinética, derivándolas parcialmente.
La principal diferencia es que en la ecuación del movimiento de Lagrange no depende de un sistema de referencia.

0.2. Péndulo Doble

A diferencia del péndulo simple, este es un sistema compuesto por dos péndulos, donde el segundo queda colgando al final del primero.
Este sistema tiene la particularidad de que su movimiento resulta caótico para energías medias. En energías bajas se pueden apreciar dos modos de oscilación, uno simétrico que muestra a los dos péndulos como si fueran uno solo y asimétrico donde el primer péndulo funciona como pivote del segundo, los cuales se comportaran de forma lineal, pero conforme se va au-

mentado la energía estos entran en un régimen caótico donde se deja de apreciar un patrón reconocible y para altas energías el sistema vuelve a funcionar como un solo péndulo, por lo que se reordena y recupera la linealidad.
Estos péndulos se encuentran dentro del mismo plano y su movimiento esta descrito por dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

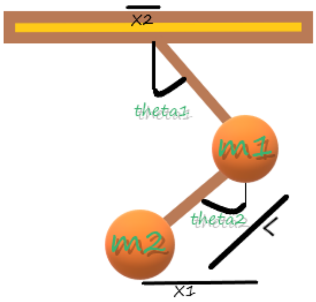

Figura 1: Péndulo doble

0.3. ¿Quién fue Jules Henri Poincaré?

Jules Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1854 en Nancy, Francia y fue quizá el matemático más eminente a finales del siglo XIX y principios del siglo XX; estudió en la École des Mines, recibiéndose en ella como ingeniero de minas en 1879, tiempo después recibió el Doctorado en Matemáticas por la Universidad de París (1879) con un trabajo realizado bajo la dirección de Charles Hermite. Después del doctorado, Poincaré enseñó análisis en la Universidad de Caen en donde su enseñanza se volvería legendaria por su calidad. En 1886 fue profesor de Física Matemática y de Probabilidad en la Faculté des Sciences de París, así como también impartió el curso de Mecánica Física y Experimental.

Poincaré dejó como legado una vasta obra con ramificaciones y contribuciones directas a la física, una de sus principales contribuciones fue al electromagnetismo maxwelliano y de igual forma es uno de los precursores de la relatividad especial, de la teoría cuántica, de la teoría de los fenómenos no lineales y del caos determinista.

En el siglo XIX los científicos descubrieron que era imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales, debido a esto varios sistemas físicos de interés no podrían ser resueltos; Poincaré entendía estas dificultades, por lo que él tenía la necesidad de conocer y comprender la naturaleza de las soluciones a las ecuaciones mencionadas. Una de las herramientas que Poincaré diseñó fue la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, con ella se podía conocer la naturaleza de las soluciones a una ecuación diferencial sin la necesidad de resolverla previamente (se aplicó al caso simple del péndulo físico). Además, Poincaré se empeñaba en solucionar el problema de los tres cuerpos. A partir de estos métodos se llega a los análisis, de los cuales estos desempeñan un papel importante en los puntos críticos (soluciones de equilibrio). Sin embargo, Poincaré introduce otras nuevas herramientas para el análisis, entre ellas las secciones de Poincaré, un ejemplo de ello es en las órbitas en el espacio de fases de un cierto sistema mecánico, ahora una cierta (hiper-)superficie se interpone en el camino de las trayectorias del sistema, ciertamente las trayectorias del sistema cruzarán esta superficie pues, por hipótesis, la sección es transversal y no paralela al flujo del sistema, a las huellas que dejan sobre la superficie estos puntos de cruce se les llama una sección de Poincaré y pueden dar información sobre la naturaleza de las soluciones a la ecuaciones diferenciales.

0.4. ¿Qué es la sección de Poincaré?

Una sección de Poincaré es aquella sección de la trayectoria por un plano normal en las que los puntos de cruce dejan sus huellas en la superficie. También existe el mapeo de Poincaré al cual se le interpreta como “un sistema dinámico discreto cuyo espacio de estados es una dimensión más pequeña que el del sistema dinámico original”. [1]

Un mapeo de Poincaré tiene muchas de las propiedades del sistema original, pero este es de menor dimensionalidad, por lo cual es utilizado frecuentemente para el análisis. Así, un mapeo de Poincaré difiere de un diagrama de recurrencia en que no es el tiempo sino el espacio el que determina los puntos a graficar. Un ejemplo de dicho mapeo es el siguiente: "considere a las sucesivas posiciones de la Luna cuando la Tierra está en el perihelio, se puede considerar un mapeo de recurrencia; pero a las sucesivas posiciones lunares cuando esta atraviesa el plano perpendicular a la órbita de la Tierra y que pasa por las posiciones del Sol y de la Tierra cuando están en el perihelio, se le puede considerar un mapeo de Poincaré". [1]

En los mapeos se llega a observar las soluciones regulares y las soluciones irregulares (caóticas) de las ecuaciones de movimiento, así la aparición de este caos es debido al trazado de dichas trayectorias irregulares, por lo que, se recurre a una definición clásica: el caos determinista aparece debido a la sensibilidad extrema que muestran muchos sistemas ante pequeñísimos cambios en las condiciones iniciales. Para entender cómo es el comportamiento de dicho caos se puede interpretar como la compleja interacción que se da entre el movimiento rotacional y el oscilatorio, el que, a energías relativamente bajas y dada la falta de espacio de fases suficiente, provoca oscilaciones irregulares que se montan sobre las pendulaciones que son también irregulares, dando lugar a amplias zonas caóticas y dejando a las trayectorias regulares con muy poco espacio disponible; también se sabe que a energías muy altas el péndulo va a comenzar a girar alrededor del punto se suspensión y el efecto del movimiento oscilatorio afectará muy poco a la rotación.

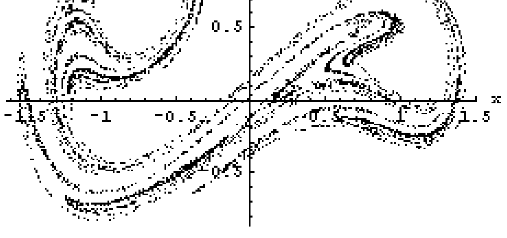

Figura 2: Sécción de Poincaré [1]

0.5. Uso de este método

Principalmente se utiliza para distinguir y estudiar trayectorias, construyendo un plano y a partir de eso ver qué ocurre cuando dicha trayectoria pasa por ahí (además se reduce en una unidad la dimensión necesaria para su representación). Entonces se tienen las siguientes consideraciones: Si siempre pasa por el mismo punto se dirá que la órbita tiene soluciones T-periódicas. Si no coincide exactamente, pero se mantiene en un toro topológico, la órbita tiene soluciones cuasi-periódicas.
Si las trayectorias llenan el plano (o salen de él y luego vuelven de manera aleatoria), la órbita tiene soluciones caóticas. Entonces se llega a la conclusión de que en lugar de estudiar una trayectoria en tres dimensiones, se estudia en dos dimensiones y a partir de ello se registran los impactos que las trayectorias marcan sobre el plano cada vez que pasan en él.

0.6. Aplicación

Se le llama aplicación de Poincaré a la aplicación definida en un subespacio de dimensión inferior al cual nos referimos como la sección de Poincaré, cabe señalar que la aplicación definida no se lleva a cabo en el espacio de estados del sistema; esta aplicación lleva cada punto de dicha sección en el primer punto en el que la órbita que lo contiene retorna a la misma. Un requisito para que la aplicación se lleve a cabo es que la sección de Poincaré sea transversal al flujo del sistema, así, esta transversalidad obliga a que las órbitas que empiezan en la sección fluyan a través de ésta y no al contrario (que fluyan paralelamente).
También a una aplicación de Poincaré se le puede interpretar como un sistema dinámico discreto (muy usada en este campo), con un espacio de estado que tiene una menor dimensión que el sistema continuo original; ahora, se sabe que esto se puede usar como una alternativa para analizar el sistema original, pues se preservan algunas características que son importantes para dicho sistema, lo cual permite que sea una ventaja más para utilizar en su estudio, sin embargo, no es posible hacer esto siempre, debido a que no existe un método general para realizar las aplicaciones de Poin-

caré. La elección de esta suele ir precedida de un análisis de la estabilidad lineal del sistema, para asegurar que la sección interseque a todas las órbitas de interés.
Así la correspondencia entre ellas es:

1. Una órbita periódica simple del sistema dinámico original se convertirá en un único punto fijo, esto en la sección de Poincaré.

2. Una trayectoria cuasi periódica en la imagen de una curva cerrada.

3. Un movimiento caótico que se da en una zona con puntos que se distribuyen de modo errático.

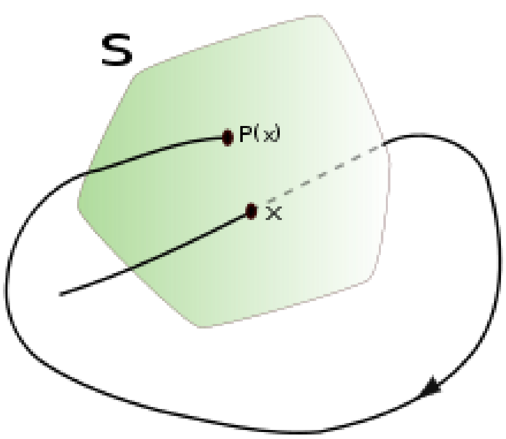

Figura 3: Aplicación de Poincaré P lleva el punto x a P(x) [1]

1. La sección de Poincaré en el péndulo doble

Ahora, vamos a analizar la sección de Poincaré para un doble péndulo, para ello nos vamos apoyar de las siguientes ecuaciones [3]:

Para la primer ecuación ...

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1-2\theta_2)}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2)} \quad (1)$$

$$\cdots\frac{-2\sin(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2{}^2 l_2+\dot{\theta}_1{}^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2)}$$

Para la segunda ecuación ...

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1{}^2 l_1(m_1+m_2)}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2)} \quad (2)$$

$$\cdots\frac{+g(m_1+m_2)\cos\theta_1+\dot{\theta}_2{}^2 l_2 m_2\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2)}$$

Las anteriores ecuaciones expresan el movimiento que tendrá cada péndulo respecto del otro.
Como no tiene una posible solución en términos elementales para las anteriores ecuaciones y recordando lo que se recabo en la sección de Poincaré, nos damos cuenta que este sistema tiene una naturaleza caótica. Sin embargo, existen los métodos numéricos, de los cuales vamos a hacer uso de ellos para solucionar las ecuaciones diferencias.
Para ello usamos el programa "Wolfram Mathematica".
En el primer caso, usamos el ángulo θ_2 en términos de ángulo inicial, a θ_1 lo fuimos variando de 0 hasta 1, con incrementos de 0.1 y con un tiempo inicial igual a cero, después de guardar en una lista los datos, los graficamos y obtuvimos lo siguiente:

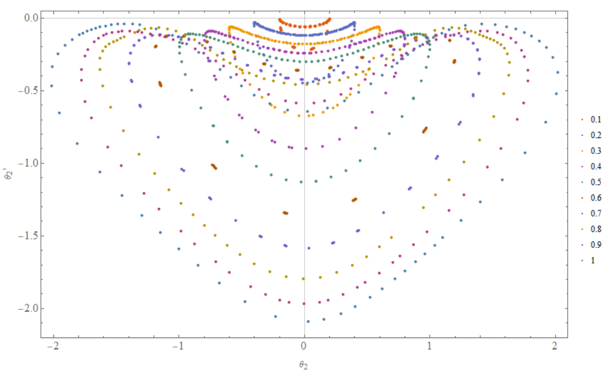

Figura 4: Gráfica de θ_1 variado de 0 a 1 y con θ_2 con un valor inicial fijo

Como se aprecia, tiene una transición no caótica en el intervalo de (0,1).
Ahora si hacemos las mismas condiciones anteriores, sólo que ahora lo variamos de 1 a 2 con incrementos de 0.1, nos queda lo siguiente:

Y nos percatamos que existe todo un caos. Sólo hay una pequeña sección que se concentra bien, pero no es suficiente para neutralizar todo el caos que existe desde que se le da el valor de 1.1 a θ_1 hasta 2.

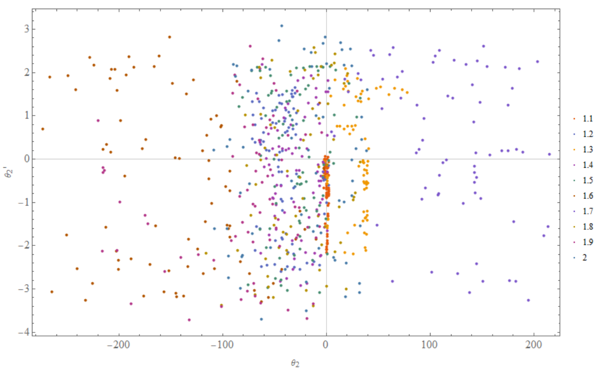

Figura 5: Gráfica de θ_1 variado de 1 a 2 y con θ_2 con un valor inicial fijo

Sin embargo, esto sucede si ahora variamos los valores de θ_2 de 0 a 2 y a θ_1 con un valor fijo de 0.5.

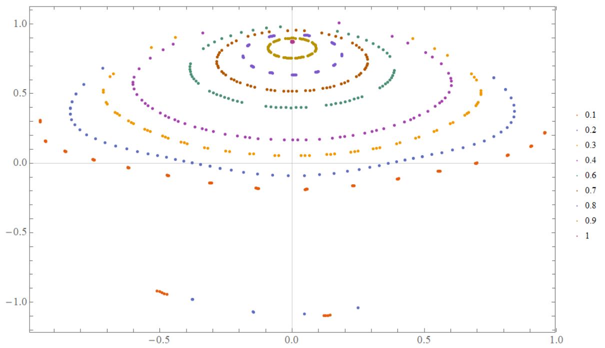

Figura 6: Gráfica de θ_2 variado de 0 a 1 y con θ_1 con un valor fijo de 0.5

Sí existe caos, pero es muy mínimo, cosa que en la anterior imagen de ésta no se puede observar bien, e igual si hacemos un acercamiento nos damos cuenta que la mayoría de los puntos siguen una trayectoria.
Ahora veremos en dónde sí hay caos teniendo los mismos valores iniciales sólo que variamos el valor de θ_2 en 1 a 2.

Vemos y se hace el análisis de que aumentó el caos, aunque aún hay una trayectoria que siguen todos los puntos.
En conclusión: El péndulo doble se considera como un sistema de caos, dado que no importa qué valores iniciales tome sus ángulos, en algún punto dado el caos reinará en el sistema. Sin embargo, antes de encontrar el caos en dicho sistema, encontraremos un poco orden en sus trayectorias. El primer caso de los primeros valores iniciales, nos dimos cuenta que su movimiento caótico empieza a

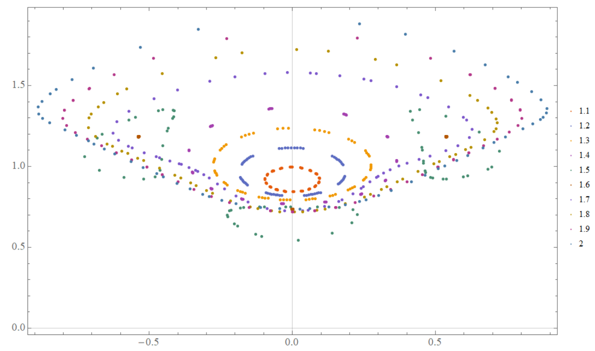

Figura 7: Gráfica de θ_2 variado de 1 a 2 y con θ_1 con un valor fijo de 0.5

partir del valor 1.1; en el segundo caso, no tenía un valor en específico, ya que en cada incremento se van agregando puntos que no siguen a la trayectoria no caótica.

Anexamos las dos primeras gráficas en una sola, y las dos últimas en otra para mayor análisis.

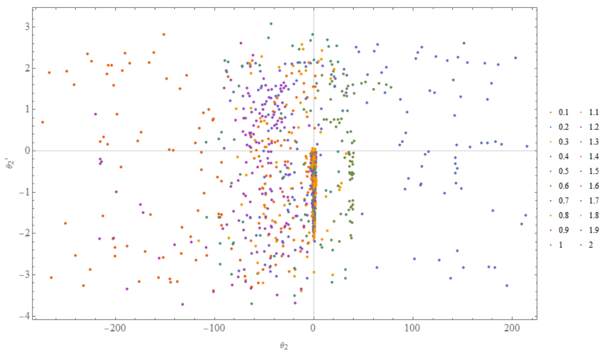

Figura 8: Gráfica de θ_1 variado de 0 a 2 y con θ_2 con un valor inicial fijo

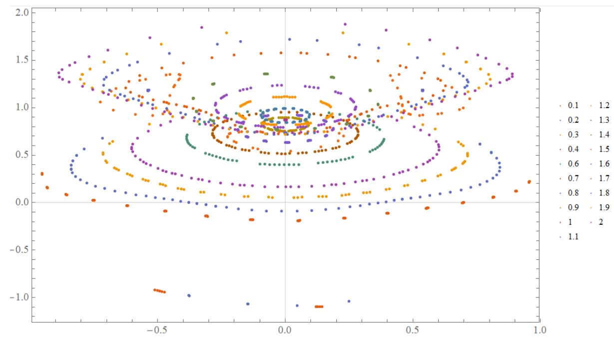

Figura 9: Gráfica de θ_2 variado de 0 a 2 y con θ_1 con un valor fijo de 0.5

Referencias

[1] H. N. Núnez-Yépez. (2013). *Poincare, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia.* Revista:Revista Mexicana de Física.

[2] Nápoles V., J.E. (2004). *Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.*

[3] Marion, Jerry B. (1996) *Dinámica clásica de las partículas y sistemas.* Barcelona: Ed. Reverté.

[4] Resnick, Robert y Halliday, David (2004) *Física 4^a*

[5] Angel Franco García. (2016) Oscilaciones. `http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo/pendulo.html`. Junio, 2020.

[6] José L. Fernández. (Desconocido) Movimiento Armónico Simple en Péndulos. `https://www.fisicalab.com/apartado/mas-y-pendulos`. Junio, 2020.