Metodos Numericos   10 de Mayo de 2020

Tarea 7

Alumno: José Emmanuel Santos Barbosa.

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz dada

Dada la matriz $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{bmatrix}$

Entonces $\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} k+k'-\lambda & -k' \\ -k' & k+k'-\lambda \end{bmatrix}$

$= (k+k'-\lambda)(k+k'-\lambda) - (-k' \cdot -k') = (k+k'-\lambda)^2 - (k')^2 = 0$

$p(\lambda) = \left((k+k')^2 - 2(k+k')\lambda + \lambda^2 - k'^2\right) = (k^2 + 2kk' + \cancel{k'^2}) - 2(k+k')\lambda + \lambda^2 - \cancel{k'^2}$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(2k+2k') + 2kk' + k^2 = 0$

Hallando las raices de $P(\lambda)$ con la fórmula general

$\lambda = \frac{(2k+2k') \pm \sqrt{(-2k-2k')^2 - 4(1)(2kk'+k^2)}}{2(1)} = \ldots$

$= \frac{(2k+2k') \pm \sqrt{(-2k)^2 - 2(-2k)(2k') + (-2k')^2 - 4(2kk'+k^2)}}{2}$

$= \frac{2k+2k' \pm \sqrt{\cancel{4k^2} + \cancel{8kk'} + 4k'^2 - \cancel{8kk'} - \cancel{4k^2}}}{2} = \frac{2k+2k' \pm \sqrt{4k'^2}}{2}$

Así $\lambda_1 = \frac{2k+2k'+2k'}{2} = \frac{2k+4k'}{2} = k+2k'$

$\lambda_2 = \frac{2k+2k'-2k'}{2} = \frac{2k}{2} = k$

Donde $\lambda_1, \lambda_2 = k+2k', k$ son los eigenvalores

Para encontrar los eigenvectores se resuelve $(A-\lambda I)\vec{v}=0$

Entonces

Para λ_1 $\begin{bmatrix} K+K'-(K+2K') & -K' \\ -K' & K+K'-(K+2K') \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K' & -K' \\ -K' & -K' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Se tiene
$$-K'x - K'y = 0$$
$$-K'x = K'y$$
$$x = -y$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para λ_2 $\begin{bmatrix} K+K'-K & -K' \\ -K' & K+K'-K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K' & -K' \\ -K' & K' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Se tiene
$$K'x - K'y = 0$$
$$K'x = K'y$$
$$x = y$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así los eigenvectores para la matriz dada son

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$