Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Método de euler:
Supongamos una EDO de la forma

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x,y)$$ la cual también se puede expresar

como

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = F(x,y).$$ Tomando una aproximación para h pequeño

$$\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} \simeq \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = F(x,y)$$ y despejando

$\Rightarrow$

$$y_{n+1} = y_n + hF(x,y)$$ que es la fórmula del método de Euler.

Ejemplo: Resolver $y'(x) = 2xy(x)$, $y(1) = 1$

$\Rightarrow$ Analíticamente

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow 2xy\,dx - dy = 0$$

Haciendo $y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$

$\Rightarrow$

$$2x^2u\,dx - (u\,dx + x\,du) = 0$$
$$(2x^2u - u)\,dx - x\,du = 0$$
$$u(2x^2 - 1)\,dx - x\,du = 0$$
$$\Rightarrow \int \frac{2x^2 - 1}{x}\,dx - \int \frac{du}{u} = 0$$

$$x^2 - \log x - \log u + c = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - \log x - \log \frac{y}{x} + c = 0 \quad \log \frac{y}{x} = x^2 - \log x + c$$

$$\frac{y}{x} = \exp(x^2 - (\log x + c)) = e^{x^2} \cdot e^{-\log x}\ e^{c}$$

$$y = cx\,e^{x^2} \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\,e^{x^2}$$

Imponiendo la restricción $y(1) = 1$

$\Rightarrow$

$$y(1) = c\,e^{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = e^{-1} e^{x^2} = e^{x^2 - 1}.$$

Solución numerica:

con $h = 0.1$

$F(x_n, y_n)$	x_n	y_n	Valor real	Error relativo	Error absoluto
	1.00	1.00	1.00	0.00 %	0.0
2	1.10	1.20	1.2337	2.73 %	0.0337
2.64	1.20	1.464	1.5527	5.71 %	0.0887
3.5136	1.30	1.8154	1.9937	8.95 %	0.1784
4.7200	1.40	2.2874	2.6117	12.42 %	0.3244

En el ejemplo de la clase se calculó el error producido al resolver la ecuación diferencial y’(x) = 2x y(x) con la condición inicial y(1) = 1.

Tarea: Resolver la misma ecuación diferencial con el método de Euler mejorado y calcular error relativo y error absoluto. Comparar ambos errores. ¿Qué método produce mejores resultados?