Ejemplo de motivación:

$$x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 0, 1$$

$$x^2 - \cos(x) = 0$$

término no lineal

No hay una solución algebraica
¿cómo se obtiene una solución?
Aproximación por un método numérico

Método de Newton-Rhapson

Sea $F(x)$ una función de la cual se desea conocer sus raíces, y sea x_0 un punto inicial. Se quiere encontrar un número ε tal que $x_0 + \varepsilon$ esté más próximo a la raíz que x_0. Para ello se expande $F(x_0+\varepsilon)$ alrededor de x_0 por medio de una serie de taylor:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n ,$$

$\Rightarrow$

$$f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon F'(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 F''(x_0) + \dots$$

Tomando valores pequeños de ε queda la aproximación

$$f(x_0+\varepsilon) \simeq f(x_0) + \varepsilon F'(x_0) .$$

Si $x_0+\varepsilon$ es un punto cercano a la raíz se tiene que cumplir que $F(x_0+\varepsilon) \simeq 0$,

$\Rightarrow$

$$F(x_0) + \varepsilon F'(x_0) \simeq 0 .$$

Despejando ε queda

$$\varepsilon = -\frac{F(X_0)}{F'(X_0)}$$

Haciendo

$$X_1 = X_0 + \varepsilon = X_0 - \frac{F(X_0)}{F'(X_0)}$$ obtenemos un punto más cercano a la raiz.

A partir de esto se puede construir un método iterativo que nos aproxime a la raiz:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)}{F'(X_n)}$$

Ejemplo: $F(X) = X^2 - \cos(X) = 0$

$\Rightarrow F'(X) = 2X + \operatorname{sen}(X)$

Sea $X_0 = 1$

$\Rightarrow$

$$X_1 = 1 - \frac{1^2 - \cos(1)}{2X + \operatorname{sen}(1)} = 1 - \frac{1 - 0.5403}{2 + 0.8414} = 0.8382$$

$$X_2 = 0.8382 - \frac{(0.8382)^2 - \cos(0.8382)}{2(0.8382) + \operatorname{sen}(0.8382)} = 0.8242$$

$X_3 = 0.8241$

Ejercicio: repetir comenzando con $X_0 = -1$.

Ejemplo: $F(z) = z^3 - 1$
$F'(z) = 3z^2$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$$

sea $z_0 = 3$

$$z_1 = 3 - \frac{3^3 - 1}{3 \cdot 3^2} = 3 - \frac{27 - 1}{27} = 3 - \frac{26}{27} = 2.037$$

$z_2 = 1.4383$, ... $z_5 = 1.01$

Sea $z_0 = -2$, $z_1 = -1.25$, $z_2 = -0.62$, $z_3 = 0.95$, $z_4 =$
$z_7 = 1.09$

Según el teorema fundamental del álgebra debe haber 3 soluciones. ¿Dónde están?

Temario

- Introducción a Mathematica
- Solución de ecuaciones algebraicas
  - Método de la bisección
  - Método de la posición Falsa
  - Método de Newton-Rhapson
- Solución de ecuaciones diferenciales
  - Método de Euler
  - Método de Runge-Kutta
- Interpolación
- Integración numérica
- Analisis de Fourier.

Evaluación

Tareas y Proyectos: 60%
Examenes: 40%

Representación del sistema numérico

Los números son la base de los métodos numéricos, sin **embargo** a la hora de implementar métodos numéricos **no** trabajamos directamente con ellos, sino con representaciones finitos de los números.

	Tipo de número	Dominio	Representación	Dominio
(naturales)	$\mathbb{N}$	$[0,1,2,\ldots,\infty)$	unsigned	$[0, 2^{32}]$
(enteros)	$\mathbb{Z}$	$(-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty)$	int	$[-2^{31}, 2^{31}]$
(Racional)	$\mathbb{Q}$	$(-\infty, \infty)$	Fixed Point	$[-2^{31-d}, 2^{31-d}]$
(real)	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	Floating Point	$[-1.7\times10^{308}, 1.7\times10^{308}]$

Existen principalmente 3 maneras de representar los números en un sistema de computo:

- números contables:

0		00000000000000000000000000000000
1		00000000000000000000000000000001
2	=>	" 10
3		" 11
⋮		
4,294,967,296		11111111111111111111111111111111

Mapeo 1 a 1 con los números naturales en un intervalo cambiando de base 10 a base 2.

- números de Punto Fijo:

$$3.14159 \Rightarrow \frac{314159}{100000} \Rightarrow 0000,0000,0000,0100.1100,1011,0010,1111$$

El número de decimales es fijo. Cuantos más decimales se desee representar menor será el intervalo de posibles valores.

- números de Punto Flotante:

$$\underbrace{0.314159}_{\text{Mantisa}} \times 10^{1}$$

exponente

Seleccionando 10 bits para el exponente y 22 para la Mantisa:

$$[-0.2097152 \times 10^{512}, 0.2097152 \times 10^{512}]$$

Es similar a la notación científica, el número se representa por una mantisa y un exponente. Ambos se guardan en una sola cadena de bits.

Notas:

- La proporción de bits para la mantisa y exponente es una elección de diseño.
- El intervalo en el lenguaje de Programación C++ (y por consecuencia, cualquier lenguaje implementado en C++: Mathematica, Python, Java) se define usualmente entre $[-1.7 \times 10^{308}, 1.7 \times 10^{308}]$
- Los detalles internos pueden variar entre compiladores.

Supóngase una representación con 3 decimales
y exponente [-9,9]

Números de punto Flotante

Los números de punto flotante poseen algunas propiedades poco familiares que son causantes de errores en los procedimientos numéricos.

Primero, el cero $0 = 0.000 \times 10^{-9}$ está relativamente separado de los números adyacentes. Por ejemplo, los dos números positivos siguientes:

$$0.001 \times 10^{-9} \quad y \quad 0.002 \times 10^{-9}$$

están a una separación de 1×10^{-12}

Segundo, cada potencia tiene exactamente la misma cantidad de números, 999.

Ej:

Exponente		
3	1, 2, ..., 999	0.001×10^3, 0.002×10^3, ..., 0.999×10^3
4	10, 20, ..., 9990	0.001×10^4, 0.002×10^4, ..., 0.999×10^4
5	100, 200, ..., 99900	

Para medir el error inducido por la representación de coma flotante es común usar el error relativo:

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{\text{Verdadero} - \text{calculado}}{\text{Verdadero}} \right|$$

Ej: suma de $0.857 \times 10^4 + 0.132 \times 10^5$

$$\begin{array}{r} 0.132 \times 10^5 \\ + \quad 0.085 \times 10^5 \\ \hline 0.217 \times 10^5 = 21700 \end{array}$$

$8570 + 13200$
$= 21770$

$$ER = \left| \frac{21770 - 21700}{21770} \right|$$

$= 0.00321$
$\simeq 0.32\%$

El uso del error relativo falla cuando el valor verdadero es cero, por ejemplo $\operatorname{sen}(\pi)$:

$$ER = \left| \frac{\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}(0.314 \times 10^{1})}{\operatorname{sen}\pi} \right|$$

Por esto es más conveniente definir el error relativo como

$$ER = \frac{|F(X) - F_{calc}(X)|}{\max\{|X|, |F(X)|\}}$$

Solución de ecuaciones algebraicas: Ceros reales

El problema de encontrar ceros reales de una función ocurre frecuentemente en ciencia y ingeniería.
Para una función $F(X)$ se desea encontrar el punto X^* tal que $F(X^*) = 0$. Dada la precisión limitada de los números de punto flotante, la solución es una aproximación.

Método de la bisección

Sea (X_1, X_2) un intervalo en el cual la función cambia de signo (lo cual indica la presencia de al menos una raíz en el intervalo). Esto se puede comprobar verificando que:

$$F(X_1) F(X_2) < 0.$$

Se escoge un punto intermedio X_3 y se evalúa $F(X_1)F(X_3)$.
Si

$$F(X_1)F(X_3) = \begin{cases} < 0 & \text{hay un cambio de signo en } (X_1, X_3) \\ > 0 & \text{hay un cambio de signo en } (X_3, X_2) \\ = 0 & X_3 \text{ es una raíz.} \end{cases}$$

Al repetir el procedimiento nos aproximamos al intervalo que contiene la solución.

Ejemplo: Calcular numericamente $\sqrt{2}$. Se reformula el problema para encontrar la raiz de
$y = x^2 - 2$.

- Comenzamos "ingenuamente" a buscar un intervalo.

$y(0) = -2$
$y(1/2) = -7/4$
$y(1) = -1$
$y(3/2) = 1/4$

encontramos que hay una raiz en el intervalo $(1, 1.5)$

- La primera bisección es $x_3 = 1.25$. $F(1.25) = -0.43$

$\Rightarrow$ $F(x_1)F(x_3) > 0$ el nuevo intervalo es $(1.25, 1.5)$

- Segunda bisección: $x_3 = 1.37$. $F(1.37) = -0.12$

$\Rightarrow$ $F(x_1)F(x_3) = F(1.25)F(1.37) > 0$ el nuevo intervalo es $(1.37, 1.5)$

- Tercera bisección: $x_3 = 1.43$ $F(1.43) = 0.04$

$F(x_1)F(x_3) = F(1.37)F(1.43) < 0$

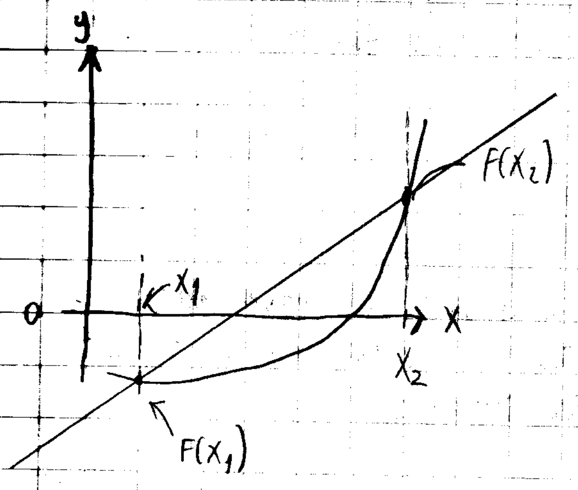
$\Rightarrow$ $(1.37, 1.43)$

$\vdots$

Notas: El método por lo general es robusto siempre y cuando la función sea continua.

Método de la posición Falsa

Este método es una mejora al método de bisección, en el que el punto entre el intervalo (x_1, x_2) se escoge como la intersección de la línea que pasa entre $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, F(x_2))$ con el eje X.



Esto es

$$y(x_3) = y(x_1) + \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) = 0$$

$\Rightarrow$

$$y(x_1) + \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} x_3 - \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} x_1 = 0.$$

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} x_3 = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} x_1 - y(x_1)$$

$\Rightarrow$

$$x_3 = x_1 - y(x_1)\frac{x_2 - x_1}{y(x_2) - y(x_1)}.$$

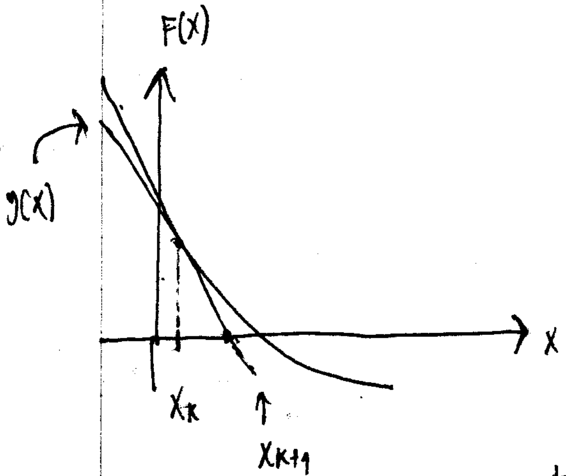
$$x_3 = \frac{x_1 y(x_2) - x_2 y(x_1)}{y(x_2) - y(x_1)}$$

Ej: Calcular $\sqrt{2}$ con posición falsa

Convergencia del método de Newton-Rhapson

Visualmente se puede interpretar el método de NR expandiendo la función $F(x)$ por serie de taylor a primer orden

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$



Para analizar la convergencia se expresa la expansión de taylor con residuo integral.

Se comienza con la identidad

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(s)\,ds$$

Haciendo $u = y'(s)$ $\quad dv = ds$

$du = y''(s)ds$ $\quad v = -(x-s)$

$\Rightarrow$

$$y(x) = y(a) - \left[(x-s)\,y'(s)\right]\Big|_a^x + \int_a^x y''(s)(x-s)\,ds$$

$$= y(a) + (x-a)\,y'(a) + \int_a^x y''(s)(x-s)\,ds \quad . \qquad (1)$$

El segundo resultado que necesitamos es el teorema: si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y $f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(\theta)\int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad a < \theta < b .$$

Demostración:
Sea g el mínimo de $g(x)$ y G el máximo en el intervalo (a,b).
$\Rightarrow$

$$g \leq g(x) \leq G$$

Multiplicando por $F(x)$
$\Rightarrow$

$$g F(x) \leq F(x)\, g(x) \leq G F(x).$$

Luego al integrar

$$g\int_a^b F(x)\,dx \leq \int_a^b F(x) g(x)\,dx \leq G\int_a^b F(x)\,dx \qquad (2).$$

Por último considere la función de t

$$\phi(t) = g(t)\int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F(x) g(x)\,dx \quad ,$$

debido a (2) tenemos que si $g(t)=g \Rightarrow \phi(t) \leq 0$
si $g(t)=G \Rightarrow \phi(t) \geq 0$

Tenemos que dado que $\phi(t)$ es continua, hay un valor $t=\theta$ tal que

$$\phi(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b F(x) g(x)\,dx = g(\theta)\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (3).$$

La demostración comienza con la expansión de taylor (1) haciendolo $a = X_k$, y X es la ~~solución~~ raiz.

$$F(X) = 0 = F(X_k) + (X - X_k)\, F'(X_k) + \int_{X_k}^{X} (X-s)\, F''(s)\,ds \qquad (4)$$

La Fórmula del método de Newton-Rhapson nos da el siguiente X_{K+1}

$$F(X_K)+(X_{K+1}-X_K)F'(X_K)=0 \qquad (5)$$

Restando (4) y (5)

=>

$$(X-X_{K+1})F'(X_K)+\int_{X_K}^{X}(X-S)F''(S)\,dS=0$$

Usando el resultado (3) tenemos que

$$(X-X_{K+1})F'(X_K)+F''(\theta)\int_{X_K}^{X}(X-S)\,dS=0$$

=>

$$(X-X_{K+1})F'(X_K)+F''(\theta)\frac{(X-X_K)^2}{2}=0\,.$$

Definimos: $X-X_{K+1}=\varepsilon_{K+1}=$ error paso siguiente

$X-X_K=\varepsilon_K=$ error paso actual.

Queda

$$\frac{\varepsilon_{K+1}}{\varepsilon_K^2}=-\frac{F''(\theta)}{2F'(X_K)}\,.$$

En general:

$$\frac{\Delta X_{K+1}}{(\Delta X_K)^2}\simeq-\frac{F''(X_{K+1})}{2F'(X_{K+1})}\,.$$

Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Método de euler:
Supongamos una EDO de la forma

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x,y)$$ la cual también se puede expresar como

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = F(x,y).$$ Tomando una aproximación para h pequeño

$$\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} \simeq \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = F(x,y)$$ y despejando

$\Rightarrow$

$$y_{n+1} = y_n + hF(x,y)$$ que es la fórmula del método de Euler.

Ejemplo: Resolver: $y'(x) = 2xy(x)$, $y(1) = 1$

$\Rightarrow$ Analíticamente

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow 2xy\,dx - dy = 0$$

Haciendo $y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$

$\Rightarrow$

$$2x^2u\,dx - (u\,dx + x\,du) = 0$$
$$(2x^2u - u)\,dx - x\,du = 0$$
$$u(2x^2 - 1)\,dx - x\,du = 0$$
$$\Rightarrow \int \frac{2x^2 - 1}{x}\,dx - \int \frac{du}{u} = 0$$

$$x^2 - \log x - \log u + c = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - \log x - \log\frac{y}{x} + c = 0 \qquad \log\frac{y}{x} = x^2 - \log x + c$$

$$\frac{y}{x} = \exp(x^2 - \log x + c) = e^{x^2} \cdot e^{-\log x}\, e^c$$

$$y = cx\, e^{x^2} \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\, e^{x^2}$$

Imponiendo la restricción $y(1) = 1$

$\Rightarrow$

$$y(1) = c\, e^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = e^{-1} e^{x^2} = e^{x^2 - 1}$$

Solución numerica:

con $h = 0.1$

$F(x_n, y_n)$	x_n	y_n	Valor real	Error relativo	Error absoluto
	1.00	1.00	1.00	0.00 %	0.0
2	1.10	1.20	1.2337	2.73 %	0.0337
2.64	1.20	1.464	1.5527	5.71 %	0.0887
3.5136	1.30	1.8154	1.9937	8.95 %	0.1784
4.7200	1.40	2.2874	2.6117	12.42 %	0.3244

Para deducir una fórmula para el error de truncamiento local del método de Euler se parte de la fórmula de Taylor:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Si una función $y(x)$ tiene $K+1$ derivadas que son continuas en un intervalo abierto que contiene a "a" y X entonces

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{X-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c)\frac{(X-a)^{k+1}}{(K+1)!} \qquad (1)$$

donde C es un punto entre a y X.

Demostración: El teorema de estimación del residuo define el error como:

$$\overset{\swarrow \text{Residuo}}{R_n(x)} = y(x) - P_n(x),$$

Entonces para toda X en un intervalo I que contiene a "a":

$$|R_n(x)| \le \frac{M|X-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$ donde M es el valor máximo de $|y^{(n+1)}(x)|$ en el intervalo.

Debe existir un punto c entre a y x tal que

$$R_n(x) = y^{(k+1)}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \blacksquare$$

Si en (1) se establece que $K=1$, $a = X_n$ & $X = X_{n+1} = X_n + h$ se obtiene

$$y(X_{n+1}) = y(X_n) + h y'(X_n) + y''(c)\frac{h^2}{2!}$$

$$y(X_{n+1}) = \underbrace{y_n + h f(X_n, y_n)}_{y_{n+1} \text{ según el método de Euler.}} + \underbrace{y''(c)\frac{h^2}{2!}}_{\text{Error de Truncamiento.}} \qquad X_n < C < X_{n+1}.$$

El error máximo es

$$R_{Max} = \frac{h^2}{2} \max_{X_n < X < X_{n+1}} |y''(x)|$$

Ejemplo: Determinar un límite superior del error de truncamiento del método de Euler aplicado a $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

=>

A partir de la solución obtenemos la segunda derivada

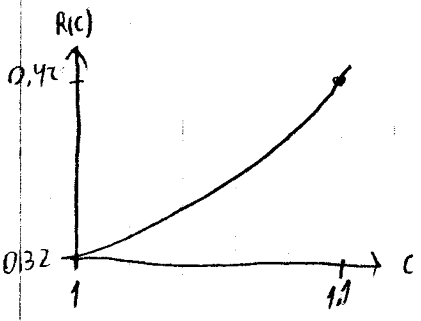
$$y(x) = e^{x^2-1} \Rightarrow y''(x) = (2+4x^2)\,e^{x^2-1}.$$

=>

$$R(c) = (2+4c^2)\,e^{c^2-1}\,\frac{h^2}{2}$$

En el primer paso $x_n = 1.0$ $x_{n+1} = 1.1$

=> Graficando



El error máximo ocurre en $c = 1.1$

=>

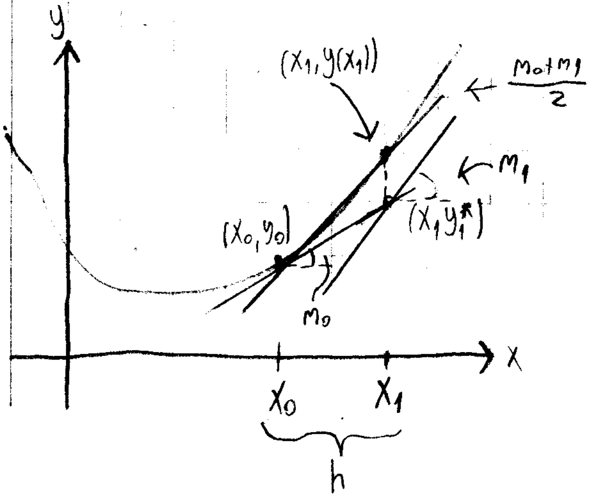
$$R_{max} = R(1.1) = 0.0422 \Leftrightarrow \overset{\text{Rel}}{3.42\ \%}$$

En la tabla vemos que el error fue $0.0337 < R_{max}$.

Si h se reduce a la mitad, $h = 0.05$ el error máximo ahora es

$$R_{max} = 0.0105 \Leftrightarrow 0.85\ \%.$$

Método de Euler mejorado



Una mejora al método se da agregando un paso extra que corrija la pendiente a partir de la nueva posición.

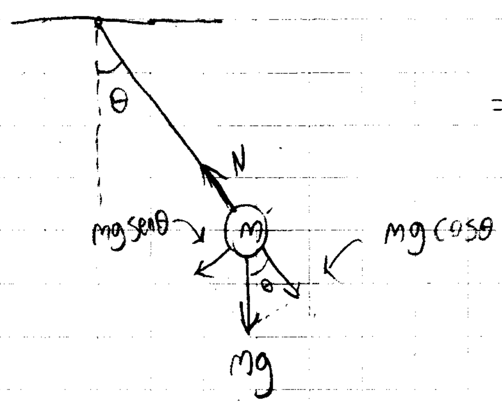
Esto se hace calculando el siguiente valor por el método de Euler:

$$y^*_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n).$$

y promediando el valor de la función en los puntos x_n y x_{n+1}, se usa este valor promedio para obtener y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}$$

Ejemplo: Péndulo simple



$$F = -mg\, sen(\theta)$$

$$\Rightarrow ma = -mg\, sen(\theta),$$

$$ml\ddot{\theta} + mg\, sen(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sen(\theta) = 0$$

Para resolver numéricamente una ecuación diferencial de segundo orden se separa en un sistema de dos ec. dif acopladas de primer orden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen(\theta) = 0 \quad \text{haciendo} \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta} + \frac{g}{l} sen(\theta) = 0$$

y

$$\frac{d}{dt}\theta - \dot{\theta} = 0$$

$\Rightarrow$ Por el método de Euler

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\dot{\theta}_n$$

y

$$\dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n - h\frac{g}{l} sen(\theta_n).$$

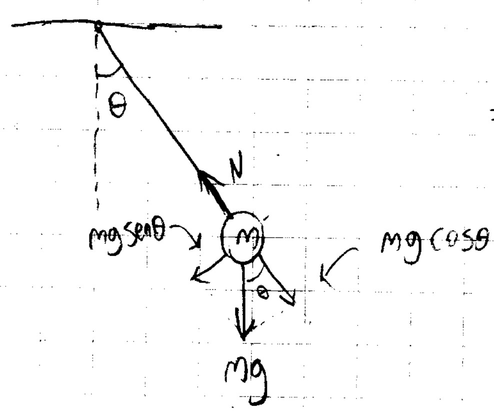
Esto se hace calculando el siguiente valor por el método de Euler:

$$y_{n+1}^{*} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

y promediando el valor de la función en los puntos x_n y x_{n+1}, se usa este valor promedio para obtener y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{*})}{2}$$

Ejemplo: Péndulo simple



$$F = -mg\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\Rightarrow\ ma = -mg\,\mathrm{sen}(\theta),$$

$$ml\ddot{\theta} + mg\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

Para resolver numéricamente una ecuación diferencial de segundo orden se separa en un sistema de dos ec. dif acopladas de primer orden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \qquad \text{haciendo} \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

y

$$\frac{d}{dt}\theta - \dot{\theta} = 0$$

$\Rightarrow$ Por el método de Euler

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\dot{\theta}_n$$

y

$$\dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n - h\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta_n).$$