

Reporte de proyecto del modelo Lotka-Volterra

Catherine Etienne Chuzeville Rosas

Daniel Farid Calvo Ramos

José Emmanuel Santos Barbosa

Fecha de entrega: 14 de julio de 2020

1. Introducción [1] [2]

El desarrollo de modelos matemáticos de epidemias tuvo gran progreso a principios del siglo XX. En teoría, debido a los contagios que azotaron a la población mundial a principios del siglo pasado, hubo una necesidad de poder medir numéricamente el avance de una enfermedad con una estimación acorde a la evolución de la población. Actualmente existe una gran cantidad de modelos tanto de la dinámica de crecimiento del contagio como de su propagación geográfica.

Una forma de entender la propagación de infecciones es a través de la modelación matemática de las epidemias. Daniel Bernoulli (1760), uno de los pioneros en desarrollar un modelo matemático, evaluó el efecto de vacunar a la población contra la viruela; hoy en día es necesaria la implementación de métodos numéricos para un mejor análisis y rápida estimación del comportamiento epidemiológico. Existen diversos modelos matemáticos que describen la evolución de una enfermedad, basadas principalmente en la solución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones.

Este trabajo se centró en el modelo de Lotka-Volterra, de amplio uso y estudio en ecología, biología y dinámica de poblaciones en general. Dado su atractivo, el modelo aparece en numerosos textos y artículos, bien sea enfocando el análisis desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos (estabilidad, bifurcaciones, etc.) o como posible modelo descriptivo de sistemas depredador-presa o de otro tipo de relaciones entre elementos de un ecosistema o sistema de

carácter más general.

El modelo de interés es la descripción de un sistema depredador-presa, que sujeto a condiciones ambientales describa el comportamiento «estable» de un contagio ocasionado por una mutación de coronavirus, hasta que se encuentre una vacuna para reducirlo.

2. Marco teórico

En este proyecto se modeló el sistema de presa-depredador de Lotka-Volterra, el cual describe la interacción entre dos especies: una presa y otra depredadora. Dicho sistema está descrito por las siguientes ecuaciones [3]

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \quad (1)$$

donde a, b, c y d son las razones de proporcionalidad de crecimiento de las especies y la interacción entre estas.

En este caso en particular se modeló el crecimiento epidemiológico de un virus

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases} \quad (2)$$

Donde x representa la población sana, y la población enferma, α la tasa de crecimiento de la población sana, β la tasa de mortalidad de la población sana debido al virus, δ la tasa de crecimiento de la población infectada y γ es la tasa de mortalidad de las personas infectadas.

Durante el transcurso de la epidemia se hace la observación de que la tasa de reproducción del virus es afectada por la temperatura, haciendo que se reproduzca más rápido en épocas frías y más lento en épocas cálidas. El efecto estacional se puede modelar añadiendo un término proporcional a $\sin(t)$ a las ecuaciones diferenciales que modelan la población:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) + \sigma \sin t \end{cases} \quad (3)$$

donde σ es un coeficiente que representa qué tanto afecta el elemento estacional.

3. Procedimiento

El sistema se resolvió bajo las condiciones iniciales de que al tiempo $t = 0$ la población de las personas sanas e infectadas sea igual a uno (esto es $x(0) = y(0) = 1$), con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$; una constante de elemento estacional de $\sigma = 0.1$, y finalmente con una tasa de reproducción y muerte del virus con $\gamma = \delta = 0.1$.

Haciendo uso del programa *Wolfram Mathematica 12.0* se procedió a buscar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la función *NDSolveValue* para las respectivas ecuaciones $x'(t)$ y $y'(t)$, con las condiciones iniciales mencionadas anteriormente y hasta un tiempo $t = 100$.

Esto da como resultado dos funciones que interpolan, una para la variable x y otra para la variable y , ambas dependientes del tiempo t ; las cuales se graficaron de dos maneras: una con ayuda de la función *Plot* donde ambas funciones están graficadas en un solo plano cartesiano, y otra haciendo uso de la función *ParametricPlot* la cual ambas funciones se grafican de forma paramétrica donde ambas dependen del parámetro t , donde este se varió desde 0 hasta 25.

Después de esto, se creó la función *SolveWithInitial* para resolver el sistema bajo condiciones iniciales arbitrarias, en este caso $xInitial$, $yInitial$ y $tMax$, las cuales son las variables de dicha función. Comenzando con los argumentos de la misma, se encuentra un *Block* para definir a las variables temporales δ , γ y σ ; las cuales serán de ayuda en el siguiente argumento de la función. Subsecuentemente se utilizó el comando

NDSolveValue para el sistema de ecuaciones diferenciales y se aplicaron las condiciones $x(0) = xInitial = 1$, $y(0) = yInitial = 1$, así como un tiempo desde 0 hasta $tMax$. Como últimos argumentos, se agregaron los dígitos de precisión del resultado final y de cada cálculo numérico, siendo 40 la elección de estos; junto con el número máximo de pasos en generar un resultado, en este caso 1×10^6 . Posteriormente se definió la función *CalculateLyapunov* para calcular el exponente de Lyapunov y saber qué tanto divergen las órbitas de la función entre cada intervalo tomado, esto mediante cuatro variables f , $xMin$, $xMax$ y Δx . Esta función se describe por un *Block* en el cual se define la variable temporal *LyapunovPoints*, donde se va a hacer una tabla con los valores calculados del logaritmo del valor absoluto de la derivada de f , eliminando de la tabla singularidades, como por ejemplo $\ln(0)$.

Al final de todo esto, se grafica el valor del exponente de Lyapunov mediante la función λ_s que está compuesta por un ciclo *if* en donde si $xInitial \neq yInitial$, entonces se aplicará la función *CalculateLyapunov* con el último elemento del comando *SolveWithInitial*, manteniendo variables los argumentos de esta última función y fijando $t = 100$; en caso contrario, el ciclo no correrá proceso alguno. Tras este análisis se lograron los siguientes resultados.

4. Resultados

Al resolver el sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra bajo las condiciones iniciales dadas, se obtuvo una función que interpola para el eje x y para el eje y . Esta interpolación está en términos de un polinomio de Hermite, que en pocas palabras nos permite a su vez, obtener una función que sea la derivada de esta solución.

Graficando las funciones de las soluciones por separado (para el eje x y el y) se obtienen las trayectorias de la población en un tiempo t de 0 a 25, como se muestra en la figura, las funciones son estables y periódicas, analizando la figura de las funciones se puede notar que hay una periodicidad en el intervalo dado, mostrando un máximo y un mínimo. Aún así no hay un comportamiento caótico mostrado unos buenos re-

sultados.



Figura 1: Soluciones del sistema para x y y graficadas de manera separada en un solo plano cartesiano.

Ahora obtuvimos el gráfico paramétrico de ambas funciones ya que dependen del mismo parámetro t , representado en un mismo plano. Se puede mostrar cómo las órbitas permanecen estables lo que también es un buen resultado ya que cumple con el objetivo del proyecto

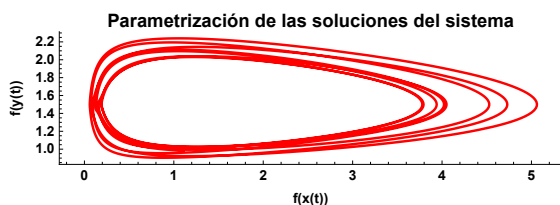


Figura 2: Soluciones del sistema para x y y graficadas de manera paramétrica, esto es, en el eje de las abscisas la solución de x y en eje de las ordenadas la solución para y .

Otro resultado destacado y de suma importancia fue el exponente de Lyapunov para el sistema depredador-presa de Lotka-Volterra, considerando las restricciones implementadas en el código. Se calculó el exponente para las diferentes condiciones iniciales establecidas con anterioridad. Este procedimiento fue computacionalmente tardado¹, sin embargo se obtuvo como resultado un exponente de Lyapunov con

¹En el archivo *Proyecto_L-V.nb* se muestra un ejemplo de la función que calcula el exponente de Lyapunov aplicado a la solución de y con $y_{Initial} = 1$ y con un tiempo que va de $t = 0$ a $t = 200$ con un intervalo de 0.01

valor de -2.07637 , el cual claramente es negativo, recordando que si el exponente de Lyapunov es menor que cero entonces las órbitas convergen.

Finalmente se logró obtener la gráfica del exponente de Lyapunov para las diferentes condiciones iniciales de x y de y , los cuales se representan en sus respectivos ejes como se muestra en la figura

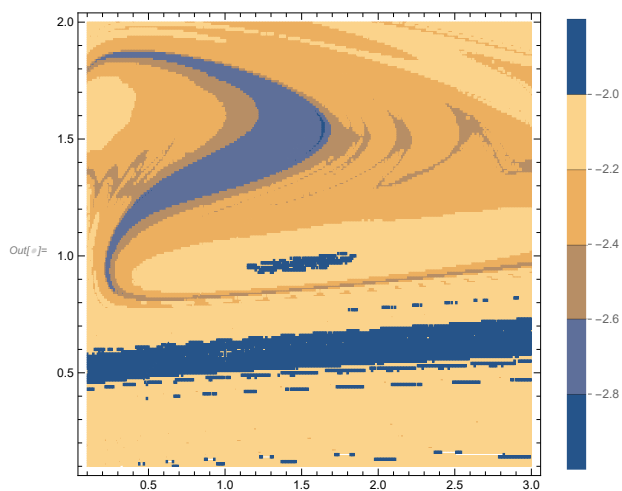


Figura 3: Gráfica del exponente de Lyapunov para diferentes valores iniciales de x y de y , siendo estos correspondientes al eje horizontal y vertical de esta gráfica respectivamente.

Se observa que dependiendo de las condiciones iniciales vamos a obtener una dinámica que bien converge o que bien diverge. Apreciando los puntos de convergencia en color azul y los puntos de divergencia en color café. Se puede apreciar bajo qué condiciones iniciales hay un comportamiento regular en el sistema dinámico y cuando empieza un comportamiento caótico. Cuando x y y son cercanos a 1, la trayectoria empieza a converger hasta $(2, 1)$ como se muestra en la parte central, de igual manera los puntos situados en $y = 0.5$ son convergentes para todo x y cuando los puntos se acercan a $(1.5, 1.5)$ hay una ligera tendencia a una convergencia, fuera de estos pequeños intervalos el comportamiento tiende a ser irregular, por lo que se aprecia que solo para estos valores mencionados existirán órbitas estables.

5. Conclusiones

Llevar a cabo este proyecto no resultó ser sencillo debido a la situación actual; sin embargo, se logró el propósito de seguir adelante a pesar del confinamiento y el distanciamiento social. Se pudo determinar las condiciones iniciales que se pueden presentar en un caso extremo en el que un virus comienza a mutar y las personas infectadas comienzan a acabar con la vida de las personas sanas. De lo más destacado, resultan ser las condiciones iniciales que se tienen que presentar para mantener viva tanto a la especie humana como a los infectados hasta que se encuentre una vacuna contra el virus; mismas que se muestran en el apartado de resultados, concluyendo así, que al tiempo $t = 25$ ambas poblaciones permanecen estables.

Referencias

- [1] Guillermo Abramson, La matemática de los sistemas biológicos. Universidad Nacional de Cuyo. Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro y CONICET
- [2] M.J. Keeling, H.B. Wilson, S.W. Pascala (200) Science 290 1758-1761 y G. Marion Stochastic modelling in mathematical biology: Predator-Prey systems and epidemic models
- [3] Zill, D., 2009. Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones De Modelado. 9th ed. México, D.F.: Cengage Learning, pp.107,108.