Métodos Numéricos

Sistemas dinámicos, caos y sección de Poincaré

Carlos Manuel Rodríguez Martínez

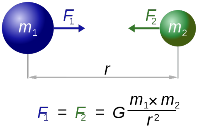
Facultad de Física - Universidad Veracruzana

9 de marzo de 2020

Motivación

- La interacción gravitacional entre dos cuerpos está dada por

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^2}\hat{\mathbf{r_{12}}}$$



- Entonces considérese la interacción entre tres cuerpos

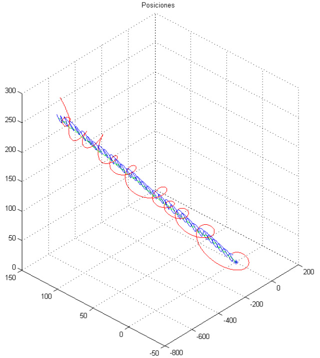
$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3} - \frac{Gm_3(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_3})}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_3}|^3}$$

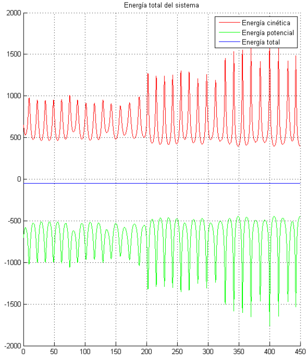
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_3})}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_3}|^3} - \frac{Gm_1(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1})}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}|^3} - \frac{Gm_2(\mathbf{r_3} - \mathbf{r_2})}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_2}|^3}$$

Motivación

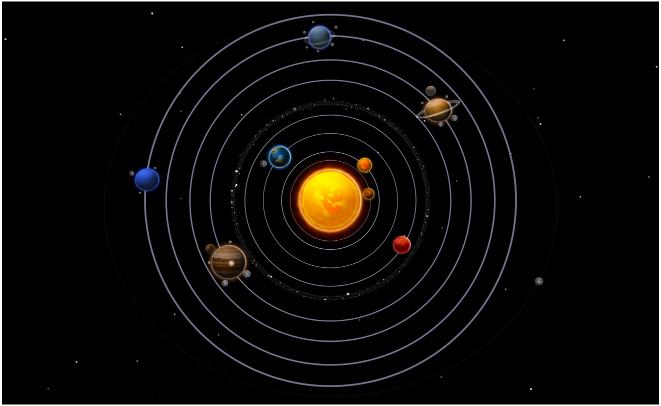
- Son 9 ecuaciones diferenciales acopladas.
- Un ejemplo de lo complicado que puede llegar a ser





Motivación

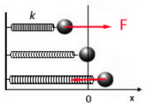
- ¿Cómo saber si esta cosa es estable?



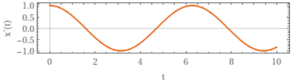
- Una herramienta para analizar este tipo de dinámica complicada es la sección de Poincaré.

Sección de Poincaré

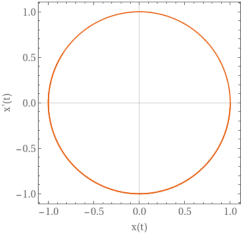
- Supongamos que tenemos un oscilador armónico.
  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$.



- Su órbita es

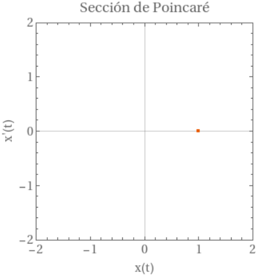


- En el espacio fase



Sección de Poincaré

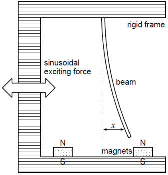
- Vamos a ir tomando muestras cada vez que se cumpla cierto evento, tal que de las muestras se obtenga un mapeo que caracterice la dinámica del sistema.
- En el caso del oscilador dado que es periódico con periodo 2π, se puede tomar muestras cada 2π.
- El resultado es el siguiente



- Es decir, la dinámica de este sistema se puede caracterizar por un mapeo que siempre mapea al mismo punto.

Sección de Poincaré

- Ahora veamos un sistema más complicado, el oscilador de Duffing.



cuya ecuación de movimiento es
$\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t)^3 = \gamma \cos(t)$.

- ¿Cómo tomar la sección de Poincaré? Primero se observa que si se tiene una solución $x(t)$ entonces $x(t + 2\pi)$ también es solución.

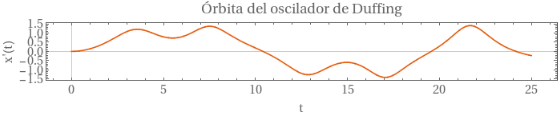
$$\ddot{x}(t+2\pi) + \delta\dot{x}(t+2\pi) + \alpha x(t+2\pi) + \beta x(t+2\pi)^3$$
$$= \gamma \cos(t+2\pi)$$
$$\ddot{x}(t+2\pi) + \delta\dot{x}(t+2\pi) + \alpha x(t+2\pi) + \beta x(t+2\pi)^3 = \gamma \cos(t)$$

Sección de Poincaré

- Y cambiando $x(t+2\pi) = x_1(t)$ queda

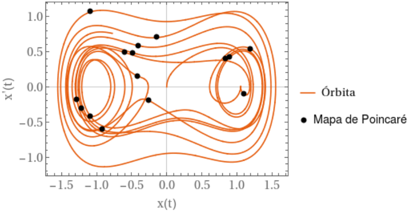
$$\ddot{x}_1(t) + \delta \dot{x}_1(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_1(t)^3 = \gamma \cos(t).$$

- Sea $x_N(t) = x(t + 2N\pi)$, esto quiere decir que si se resuelve la ecuación diferencial a partir de cualquiera de los puntos x_N siempre estaremos describiendo al mismo sistema. Por lo tanto tomar la sección de Poincaré cada 2π nos dará un mapa representativo de la dinámica del sistema.
- La órbita es

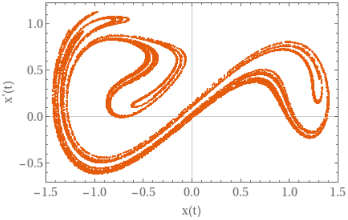


Sección de Poincaré

- Su trayectoria en el espacio fase



- La sección de Poincaré



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Volviendo al problema de 3 cuerpos

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3} - \frac{Gm_3\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\right)}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3} - \frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right|^3} - \frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right|^3}$$

- Una manera de enfrentarlo es haciendo que $m_3 << m1, m2$.

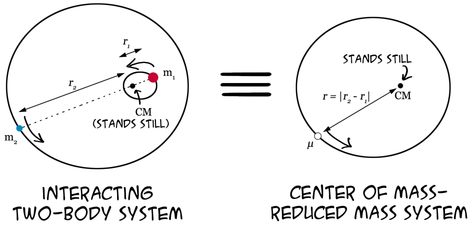
Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Esto simplifica mucho el problema, ya que desacopla las dos primeras ecuaciones.

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right|^3} - \frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right|^3}$$

- Las primeras dos ecuaciones son el problema de 2 cuerpos, que tiene solución analítica.



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Con respecto a las masas grandes se harán las siguientes simplificaciones.

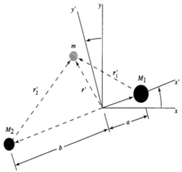
$$|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}| = 1, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3}} = 1,$$

$$G(m_1 + m_2) = 1, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

de manera que

$$Gm_2 = \frac{Gm_2}{G(m_1 + m_2)} = \alpha, \quad Gm_1 = 1 - \alpha.$$

- Por último se escoge un sistema de referencia en el cual las dos masas grandes están estáticas.



Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Entonces la relación entre ambos sistemas de referencia es

$$x(t) = x'(t)\cos t - y'(t)\sin t, \quad y(t) = x'(t)\sin t + y'(t)\cos t.$$

- La interacción gravitacional en este sistema de referencia es

$$\begin{aligned}
\ddot{x}' &= 2\dot{y}'(t) - \frac{\alpha(\alpha + x'(t) - 1)}{\left((\alpha + x'(t) - 1)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} \\
&\quad - \frac{(1-\alpha)(\alpha + x'(t))}{\left((\alpha + x'(t))^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} + x'(t) \\
\ddot{y}' &= -2\dot{x}'(t) - \frac{(1-\alpha)y'(t)}{\left((\alpha + x'(t))^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} + y'(t) \\
&\quad - \frac{\alpha y'(t)}{\left((\alpha + x'(t) - 1)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

- Este es el problema de 3 cuerpos restringido.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- Esta solución contiene órbitas periódicas y caóticas

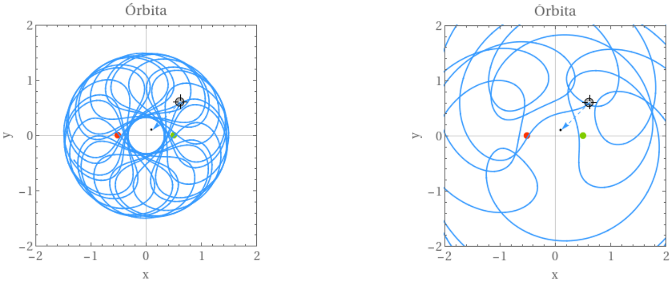
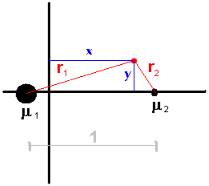


Figura: Órbita estable y caótica. Depende del valor de α.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

- El problema de 3 cuerpos restringido conserva una cantidad que se llama constante o integral de Jacobi.



$$
\begin{aligned}
C_J &= \frac{2\pi}{T}(x'^2 + y'^2) + 2G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \dot{x}'^2 - \dot{y}'^2 \\
&= x'^2 + y'^2 + 2\frac{r_2 + \alpha}{r_1 r_2} - \dot{x}'^2 - \dot{y}'^2.
\end{aligned}
$$

- Cuando la órbita pasa por el punto $y = 0$ la velocidad en y puede tener dos valores.

$$
\dot{y} = \pm\sqrt{x'^2 + 2\frac{r_2 + \alpha}{r_1 r_2} - \dot{x}'^2 - C_J}.
$$

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

Entonces si nos fijamos en los valores $(x'(t), \dot{x}'(t))$ cada vez que $y(t) = 0$ con $\dot{y}(t) > 0$ ó $\dot{y}(t) < 0$ tendremos un mapa que describe por completo la dinámica del sistema.

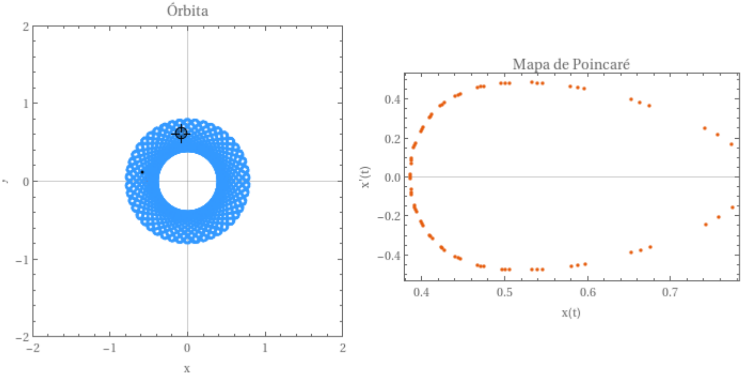


Figura: $\alpha = 1$.

Sección de Poincaré para 3 cuerpos

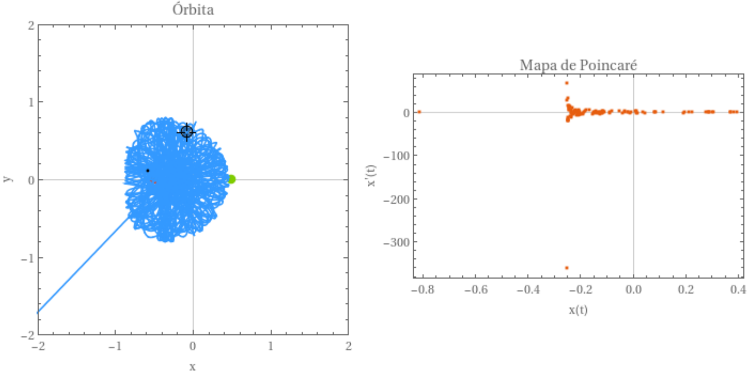


Figura: $\alpha = 1.25$.