

Inducción de la señal EM en las pastillas de guitarra eléctrica

Proyecto de electromagnetismo

Carlos Manuel Rodríguez y Martínez

Universidad Veracruzana

13 de octubre de 2015

Objetivo y Contenido

Objetivo

- ▶ Mostrar y discutir el funcionamiento de una pastilla para guitarra eléctrica

Distribución de la presentación

- ▶ Historia
- ▶ Pastillas, componentes, discusión cualitativa
- ▶ Maneras de modelar el problema, modelo microscópico
- ▶ Modelo realista y análisis de Fourier

Acerca del instrumento

Historia

Las primeras pastillas...

- ▶ Se experimentaba con micrófonos desde los 20's
- ▶ La necesidad fue evidente en la era de las *Big Bands*
- ▶ La sección de metales apagaba las guitarras
- ▶ Les Paul eliminó problemas de *feedback* usando guitarras de cuerpo sólido



Figura: 1931: Rickenbacker *Frying Pan*

Primeras guitarras



Figura: Les Paul en vivo



Figura: Guitarras Les Paul

Tipos de pastillas



Figura: Single coils



Figura: Humbuckers

Componentes

- ▶ Una bobina con vueltas en el orden de 10^3
- ▶ Núcleos ferromagnéticos
- ▶ Imán en la base

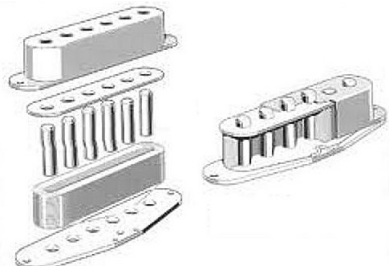
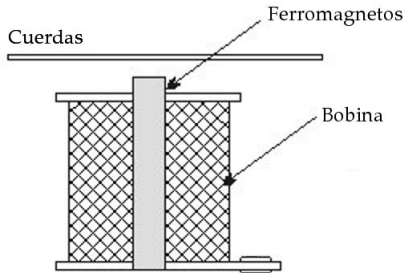


Figura: Componentes

Componentes



- ▶ Las cuerdas oscilando en el campo magnético *inducen* una corriente en el embobinado
- ▶ Los núcleos aumentan el flujo magnético a través de la pastilla

Figura: Corte transversal

Interacción con la cuerda

- ▶ La cuerda (ferromagneto) oscila en el campo magnético
- ▶ Se induce una corriente alterna con frecuencia idéntica
- ▶ La señal es procesada y amplificada en circuitos externos

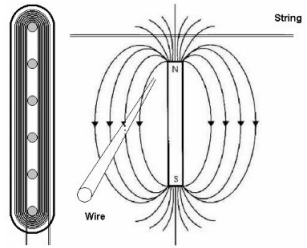


Figura: Componentes

Modelos

Sobre los modelos teóricos

- ▶ Se pueden utilizar los campos de solenoides rectos finitos para modelar los imanes de las pastillas (N. G. Horton, T. R. Moore)
 - ▶ Es matemáticamente complicado
 - ▶ No aporta más información física acerca del problema que los demás métodos.
- ▶ Se pueden modelar estas barras como simples dipolos (licenciatura)
 - ▶ Mucho más sencilla de utilizar
 - ▶ Válida en las regiones de interés (fuera del imán)
- ▶ Campo magnético de cuerda vibrante en campo externo constante.
- ▶ Modelos realistas requieren soluciones numéricas (simulación)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(3\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \right]$$

Figura: Aproximación dipolar

Modelo microscópico

- Suponemos una cuerda compuesta por dipolos magnéticos
- El campo magnético de la pastilla alinea estos dipolos
- Se induce una corriente en la bobina debida al cambio en el flujo magnético en ella
- Se establece una ΔV que alimenta una señal hacia un amplificador

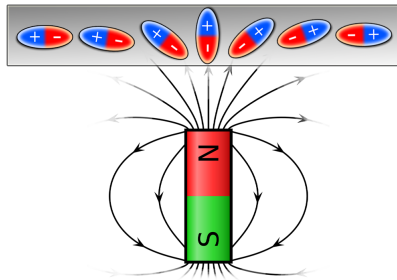


Figura: Modelo microscópico del sistema

Campo magnético producido

- Consideremos la interacción entre un dipolo de la cuerda y el imán
- Al moverse la cuerda se genera un campo magnético variable

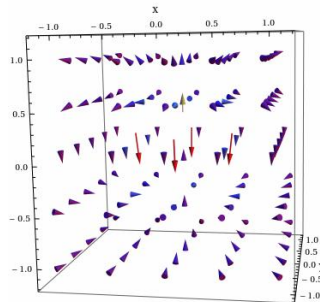


Figura: Campo magnético de dos dipolos (principio de super-posición)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3 [(\mathbf{m}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^5} + \frac{3 [(\mathbf{m}_2 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^5} - \frac{\mathbf{m}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{m}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right\}$$

Señal inducida

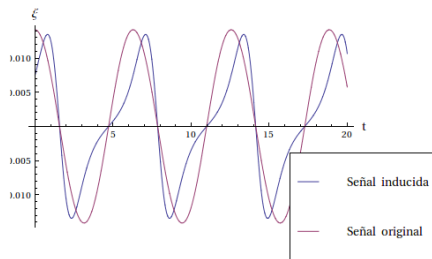


Figura: Señal inducida cuando r es pequeña

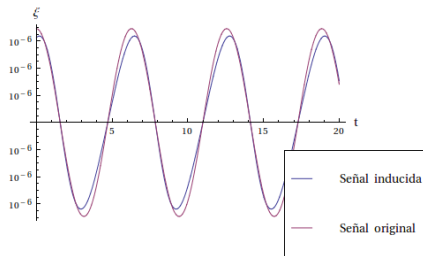


Figura: Señal inducida cuando r es grande

$$\xi = -\frac{3\mu_0}{2} \frac{m_2 a^2}{A^3} \frac{A \cos t}{(r + A \sin t)^4}$$

Un modelo más realista

- ▶ Se supondrá que la cuerda está inmersa en un campo magnético constante B_0 que permea todo el espacio.
- ▶ Al moverse la cuerda modifica el campo magnético.
- ▶ El flujo de este campo magnético modificado se induce en el solenoide.

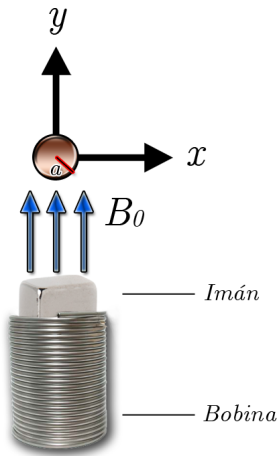


Figura: Diagrama del sistema

- ▶ Se parte de la suposición de que no hay corriente en la cuerda (material conductor), entonces $\nabla \times \vec{H} = 0$.
- ▶ El campo magnético se puede expresar en términos de un potencial escalar $\vec{H} = -\nabla \phi_m$.
- ▶ El campo magnético que proviene del imán es

$$\vec{H}_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{j} = -\nabla \frac{-B_0 r \sin \theta}{\mu_0}.$$

Nos interesa el campo magnético de se genera de la interacción con la cuerda, se resuelve la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas (por la geometría de la cuerda). El potencial no depende de z , se usa una forma conveniente de la solución a la ecuación de Laplace.

$$\phi_m(r, \theta) = A + B \ln(r) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n \sin(n\theta) + B_n r^n \cos(n\theta) + C_n r^{-n} \sin(n\theta) + D_n r^{-n} \cos(n\theta))$$

Caso $r > a$

- ▶ No hay dependencia de los términos \cos .
- ▶ Al hacer $r \rightarrow \infty$ el campo que se observa es H_0 .
- ▶ En la frontera $r = a$ el potencial es cero.
- ▶ A partir de estas condiciones el potencial se puede expresar como

$$\phi_m(r, \theta) = -\frac{B_0 r}{\mu_0} \sin \theta + \alpha \frac{a}{r} \sin \theta.$$

Caso $r < a$

- ▶ No puede diverger en $r = 0$.
- ▶ No tiene dependencia de los términos \cos .
- ▶ Sujeto a condiciones de frontera.
- ▶ A partir de estas condiciones el potencial se puede expresar como

$$\phi_m(r, \theta) = -\frac{B_0 r}{\mu_0} \sin \theta + \alpha \frac{r}{a} \sin \theta.$$

El campo magnético normal a la superficie debe cumplir la condición de continuidad

$$B_r(r = a^-) = B_r(r = a^+),$$

donde

$$B_r(r = a^-) = \mu_r \mu_0 H_r(r = a^-) = -\mu_r \mu_0 \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \right|_{r=a^-} = \left(B_0 - \frac{\mu_0 \alpha}{a} \right) \mu_r \sin \theta.$$

y

$$B_r(r = a^+) = \mu_0 H_r(r = a^+) = -\mu_0 \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \right|_{r=a^+} = \left(B_0 + \frac{\mu_0 \alpha}{a} \right) \sin \theta.$$

μ_r es la permeabilidad relativa de la cuerda.

Con esta condición de continuidad se obtiene el valor de α ,

$$\alpha = \frac{aB_0}{\mu_0} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}.$$

Al sustituir en la expresión para el potencial en el caso $r > a$ queda

$$\phi_m(r, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} \left(r - \frac{a^2}{r} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \sin \theta.$$

A partir de aquí se obtiene el campo eléctrico radial y angular.

$$B_r(r, \theta) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} = B_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \sin \theta,$$

y

$$B_{\theta}(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = B_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \cos \theta.$$

Como se desea calcular el campo magnético en la bobina se necesita el campo en dirección y.

$$B_y(x, y) = B_r \sin \theta + B_{\theta} \cos \theta = B_0 \left(1 + a^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Regresando al diagrama

- ▶ Se ubica a la bobina en la posición (x_b, y_b) .
- ▶ Se utilizará una bobina cuadrada que se extiende desde $x_b - \frac{L}{2}$ a $x_b + \frac{L}{2}$.
- ▶ La bobina tiene una separación h de la cuerda en reposo.

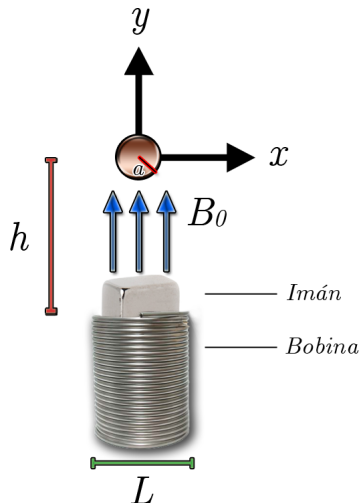


Figura: Diagrama del sistema

el flujo magnético en la bobina es

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = L \int_{x_b - \frac{L}{2}}^{x_b + \frac{L}{2}} B_y(x, y_b) dx \\ &= B_0 L \left(L + a^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left(\frac{x_b + \frac{L}{2}}{(x_b + \frac{L}{2})^2 + y_b} - \frac{x_b - \frac{L}{2}}{(x_b - \frac{L}{2})^2 + y_b} \right) \right).\end{aligned}$$

Por conveniencia se pasa al sistema de referencia de la bobina, donde $x_b = x$, y $y_b = y + h$.

$$\Phi = B_0 L \left(L + a^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{(y + h)^2 - x^2 + \frac{L^2}{4}}{\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right)^2 + 2 \left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right) (y + h)^2 + (y + h)^4} \right),$$

entonces el voltaje que se induce en la bobina es

$$\begin{aligned} V(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a^2 L^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left(\frac{2x\dot{x}(3(y+h)^4 + 2(x^2 + L^2/4)(y+h)^2 - (x^2 - L^2/4)^2) + \dot{y}(2(y+h)^5 - 4(x^2 - L^2/4)(y+h)^3 + (6x^4 - x^2 L^2/2 - L^4/8))}{((x^2 - L^2/4)^2 + 2(x^2 + L^2/4)(y+h)^2 + (y+h)^4)} \right) \\ &\approx B_0 a^2 L^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left(2x\dot{x} \frac{3h^2 - L^2/4}{(h^2 + L^2/4)^3} + \frac{2h\dot{y}}{(h^2 + L^2/4)^2} \right) \end{aligned}$$

Resultados

Señal: sin y cos

- Con $x(t) = \cos(440 \times 2\pi t)$, y $y(t) = \sin(440 \times 2\pi t)$.
- A partir de la gráfica no se observa la gran diferencia.

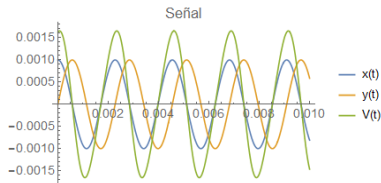


Figura: Señales

- Para observar más a fondo conviene realizar un análisis de Fourier.

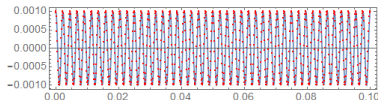


Figura: Señal en $x(t)$.

- La transformada de Fourier Discreta da como resultado,

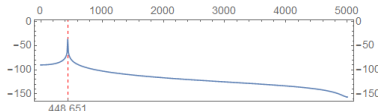


Figura: Transformada de Fourier de $x(t)$.

Señal: sin y cos

- En y se obtiene un resultado similar.

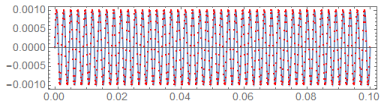


Figura: Señal en $y(t)$.

- La transformada de Fourier Discreta da como resultado,

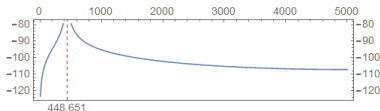


Figura: Transformada de Fourier de $y(t)$.

- El resultado interesante se observa de la transformada de $V(t)$.

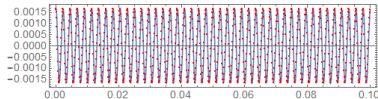


Figura: Señal en $V(t)$.

Conclusiones

Conclusiones

- ▶ Una pastilla es sensible a las variaciones en el flujo magnético a través de ella
- ▶ La frecuencia de la oscilación en cada eje determina la frecuencia de la corriente
- ▶ El mecanismo de la guitarra eléctrica induce armónicos extra que son la causa de su sonido característico.
- ▶ Podemos utilizar las ecuaciones obtenidas de modelar el mecanismo para recrear los sonidos que generarían otros instrumentos similares.

Referencias

Referencias

- 1 J. Reitz, F. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory* (1ra ed., Addison-Wesley, Massachusetts, 1960).
- 2 N. Horton, T. Moore, *Modelling the magnetic pickup of an electric guitar* Am. J. Phys. **77** (2), 144-150 (2009).
- 3 F. Ban, *Analysis of Electric Guitar Pick-ups* Graduate Student, Penn State University.
- 4 K. T. McDonald, *Electric Guitar Pickups* Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544.