



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

FACULTAD DE FÍSICA
MAESTRÍA EN FÍSICA

**Análisis de los trends generados por series
financieras**

TESIS

que como requisito para obtener el grado de:

Maestro en Física

P R E S E N T A

**CARLOS MANUEL RODRÍGUEZ
MARTÍNEZ**

ASESOR:

ALEJANDRO RAÚL HERNÁNDEZ MONTOYA

Universidad Veracruzana

Maestría en Física

Análisis de los trends generados por series financieras

por Carlos Manuel Rodríguez Martínez

Resumen

Para estudiar las variaciones de las series de tiempo diarias generadas por índices financieros se suelen utilizar los retornos, que son las diferencias entre precios en un número fijo de días consecutivos, para el estudio de sus variaciones. En este trabajo se propone una construcción diferente de los retornos, tomando las diferencias de precios entre los inicios y términos de una tendencia en los precios como nuevo valor del retorno para así poder estudiar las propiedades estadísticas de la serie de tiempo financiera a diversas escalas de tiempo.

Universidad Veracruzana

Maestría en Física

Analysis of trends generated by financial time series

by Carlos Manuel Rodríguez Martínez

Abstract

When analyzing the variations of financial time series of indices or prices, a common observable are the returns, which are the price differences between consecutive fixed time intervals. In this work, we propose a different method to study prices or indices variations, where instead of measuring the price differences between consecutive time intervals we use the price difference between the start and end of price trends, eliminating the use of a fixed time interval. We study the statistical properties of this newly defined observable, which has a time-like multiscale nature by its definition.

Agradecimientos

A mis abuelos, que desde lejos me han apoyado siempre.

A mi madre y a mi padrastro, por estar conmigo en todos los momentos.

A mi novia, por motivarme con su música.

A mi asesor de tesis, que me tuvo bastante paciencia.

A mis amigos, que me hicieron disfrutar mucho de la maestría.

A CONACYT por el apoyo económico brindado.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 2 |
| 1.1. Motivación | 2 |
| 1.2. Bolsa de valores | 3 |
| 1.2.1. Historia de la institución | 4 |
| 1.2.2. Importancia en la actividad económica | 5 |
| 1.2.3. Interpretación de los indicadores bursátiles | 6 |
| 2. Antecedentes | 9 |
| 2.1. Hipótesis del mercado eficiente (HME) | 11 |
| 2.2. Modelos para predecir precios de opciones | 12 |
| 2.2.1. Árboles binomiales | 14 |
| 2.2.2. Modelo de Black-Scholes | 18 |
| 2.3. Observables | 20 |
| 2.3.1. El problema del tamaño de la escala | 22 |
| 2.4. Hechos estilizados | 23 |
| 2.5. Eventos extremos | 28 |
| 2.5.1. Modelo microscópico | 28 |
| 2.5.2. Modelo macroscópico | 29 |
| 3. Metodología | 32 |
| 3.1. Trends | 32 |
| 3.2. Velocidades de los trends | 33 |
| 3.3. Construcción de la muestra | 35 |
| 3.4. Test de simetría | 35 |
| 3.5. Selección de puntos de corte para las colas de las distribuciones | 38 |
| 4. Resultados | 41 |
| 4.1. Series de tiempo de los retornos R_T y VR_T | 41 |
| 4.1.1. Estacionariedad | 41 |
| 4.1.2. Distribución | 43 |
| 4.2. Hechos estilizados | 43 |
| 4.3. Volatilidad | 51 |
| 5. Conclusión | 52 |

Capítulo 1

Introducción

En términos generales el objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de la bolsa de valores por medio de sus observables, que son magnitudes que representan el estado de un activo y están disponibles de manera pública. La estructura del trabajo es la siguiente, primero se dará una breve descripción de qué es una bolsa de valores, nuestro principal objeto de estudio y cuáles son sus indicadores a partir de los cuales podemos obtener información. Posteriormente en la sección de antecedentes se hará una descripción de cómo se construyen las observables a partir de los indicadores y cuáles son sus propiedades estadísticas y sus limitaciones. En metodología se hará una propuesta de construcción de tres nuevas observables que tratarán de solventar los problemas asociados con las definiciones anteriores y se detallará cómo se analizarán sus propiedades. Por último en la sección de resultados se reportarán las propiedades encontradas.

1.1. Motivación

Los sistemas económicos y las bolsas de valores son entidades de estructura compleja compuestas por una multitud de agentes que interactúan entre sí, dando lugar a una red de intercambios que directa o indirectamente afecta a todos los habitantes del mundo. Debido a su complejidad es difícil entender plenamente su funcionamiento, es por esto que para estudiar los sistemas económicos se hace uso de indicadores a partir de los cuales se construyen observables. En este trabajo se hace una propuesta de construcción de una nueva observable para los precios de acciones de la bolsa de valores.

1.2. Bolsa de valores

Cuando una empresa es creada o busca expandirse es común que no cuente con los fondos necesarios para cubrir sus gastos, entonces se vuelve necesario que busquen opciones de financiamiento. Estas opciones pueden ser préstamos con intereses o inyección de capital a través de una inversión pública. Si una empresa opta por una inversión pública realiza una *oferta pública inicial* (OPI) en la cual se vende la propiedad de la empresa al público a través de *acciones* que son porciones de la empresa, permitiendo que el público participe en su crecimiento y en sus ganancias. Esta venta de acciones se realiza en la bolsa de valores.

Una bolsa de valores es una institución económica donde se efectúan transacciones públicas de compra y venta de valores, y otras operaciones análogas. En concreto la OPI se realiza en el mercado primario de la bolsa de valores. Entre los objetivos de la bolsa de valores se encuentran:

- Realización de inversiones
- Emisión y colocación de instrumentos bursátiles
- Compraventa de productos financieros, tales como acciones, divisas commodities, opciones y futuros.

El poseer acciones proporciona beneficios al inversionista a través de los *dividendos*, que son porciones de las ganancias de la empresa, y éstos son su principal atractivo de inversión. Otro atractivo de poseer acciones es que éstas cuentan con una gran liquidez, permitiendo al inversionista deshacerse de sus acciones en caso de que considere que su inversión no es atractiva. La compra-venta de acciones entre inversionistas se realiza en el mercado secundario. Si bien el principal motivo de la existencia de la bolsa es la inyección de capital a empresas que ahí cotizan, el mercado secundario en el que se intercambian acciones, cuenta con gran liquidez, lo cual lo hace una opción atractiva para la inversión, cobertura y especulación.

El precio de una acción se determina a partir de las perspectivas de crecimiento de la empresa y por los dividendos que esta genera. Las acciones de una empresa que tienen mayores perspectivas de generar ganancias tienen mayor valor que las acciones de otra empresa con menor perspectiva de ingresos.

Las ganancias que el inversionista percibe no sólo están dadas por los dividendos, sino también por la ganancia de capital, que es la diferencia entre el precio de adquisición de una acción y el precio de su venta. Esto da lugar a que en el mercado secundario se

realice la compra-venta de acciones a través de la especulación, que es tratar de adivinar el precio futuro de las acciones. Un inversionista puede ganar a través de una predicción correcta a través de los siguientes métodos:

- Comprando acciones si cree que éstas van a aumentar su precio.
- Por medio de la *venta en corto* si cree que éstas van a disminuir su precio.

1.2.1. Historia de la institución

La presencia de sistemas financieros en los que se financian proyectos a partir de la participación de inversores data desde la antigüedad, en la que este tipo de instrumentos se establecieron para poder financiar obras públicas, aunque no sin cierta controversia ya que la noción de generar dinero a partir del propio dinero cayó en la categoría de pecado durante muchos siglos. En la antigua Grecia, Aristóteles desarrolló la noción de *precio justo* para todo lo que podía comerciarse. Desde su punto de vista los *precios justos* eran cualidades inherentes e inmutables al objeto sobre el cual se realizaba el comercio y cualquier desviación sobre este precio sería una injusticia. Santo Tomás de Aquino trabajó posteriormente sobre este concepto declarando que comprar más barato del valor real de un objeto es inmoral, y condenó el préstamo de dinero con interés. A partir de esto es comprensible que no se desarrollaran instituciones financieras en Europa durante la edad media, puesto que heredaron toda la carga cultural de ambos pensadores.

Una notable excepción fue el mercado de valores que se desarrolló en la República Romana del siglo II A.C., ajena a las cuestiones ideológicas que declaraban inmoral el beneficio financiero. El creciente comercio que se desarrolló en sus ciudades y su sistema de leyes permitió que la riqueza se acumulara de manera que se hizo posible realizar inversiones. El gobierno de la República Romana realizó muchas de sus obras públicas a partir de grupos de inversionistas privados que poseían acciones de la obra, lo cual aceleró su crecimiento y expansión. Con la caída de Roma el mercado de acciones desapareció; el sistema feudal Europeo y los gobiernos Islámicos no aprobaron este tipo de prácticas.

En el año 1602 hubo un renacimiento de este sistema en la República Holandesa. En esta época el comercio marítimo floreció haciendo cada vez más lucrativas las expediciones marítimas. Una manera de financiar estas expediciones fue a partir de la compra de acciones de las empresas marítimas por parte de inversionistas públicos que recibían los beneficios de una expedición exitosa. La principal ventaja de este sistema era que un inversionista podía vender sus acciones en cualquier momento si observaba que el riesgo era muy alto, cosa que era común ya que muchas expediciones fracasaban por naufragios.

Realmente los inversionistas que compraban acciones se comportaban como apostadores debido a que sus decisiones no podían estar basadas en ningún tipo de información más que en su intuición. No es de extrañar que muchos quedaran en la ruina.

En 1817 se creó la Bolsa de Nueva York, con el fin de agrupar y controlar la venta de acciones que se realizaba al aire libre en la calle Wall Street, donde se negociaban principalmente acciones de compañías ferroviarias. Las innovaciones que se implementaron en esta bolsa fueron el motor para que cambiara la apreciación del público general hacia la bolsa de valores. La primera gran innovación fue la integración del telégrafo para obtener información rápida de los acontecimientos lejanos. La segunda fue la creación del *Wall Street Journal*, el primer periódico que ofreció información acerca del precio de las acciones. Un indicativo muy útil que se ofreció en este periódico fue una gráfica de la serie de tiempo de los promedios de precios de las 12 principales compañías, la cual se conoció como *Dow-Jones Industrial Average*. La capacidad de basar las decisiones de inversión en información en lugar de intuiciones hizo muy popular la compra-venta de acciones por parte del público general, el cual vio aquí una oportunidad de hacer crecer sus ahorros.



FIGURA 1.2.1: Dow-Jones industrial average

Hoy en día existen bolsas de valores en la mayoría de países que cuentan con una economía desarrollada, y su existencia resulta fundamental para el crecimiento empresarial.

1.2.2. Importancia en la actividad económica

La fluctuación de precios en la bolsa de valores tiene repercusiones en el resto de la economía. Un ejemplo clásico es la caída de los precios de la bolsa de Nueva York en 1929 que fue un factor crucial en la gran depresión de 1930, no obstante las variaciones

diarias de precios en la bolsa de valores no siempre tienen gran impacto en la economía. De la misma manera, una caída en los precios no tiene necesariamente un impacto económico profundo. Cabe preguntarse entonces por medio de qué mecanismos tiene repercusión la variación de los precios de la bolsa.

1. **Riqueza:** Las variaciones de los precios de la bolsa afectan a los propietarios de las acciones. Debido a que la mayoría de los inversionistas poseen un portafolio de inversión amplio y están preparados para sufrir pérdidas, esto no suele afectar demasiado a la economía.
2. **Pensiones:** Cualquier individuo con un plan de pensiones o que se encuentra en un fondo de inversión está ligado a la bolsa de valores, de manera que si los precios bajan entonces se reduce el valor de sus fondos.
3. **Confianza:** Debido a que la bolsa de valores se considera un indicador de qué tan fuerte es la economía sus variaciones negativas pueden afectar la confianza de los consumidores, reduciendo su gasto.
4. **Inversión:** La caída de los precios puede causar que algunas empresas no sean capaces de recaudar los fondos suficientes para asegurar su crecimiento.

1.2.3. Interpretación de los indicadores bursátiles

En las bolsas se pone a disposición pública un conjunto de indicadores bursátiles que dan información al inversionista del estado inmediato de cada acción, para así poder ayudarlo a realizar una inversión razonada. A continuación se dará una breve explicación de qué representa cada tipo de indicador.

1. **Mejor Compra/Venta (Best Bid/Ask):** Es el precio más alto/bajo que se ofrece actualmente por un bloque de acciones.
2. **Objetivo a un año (1 Year target):** Es el precio estimado por un especialista de la acción dentro de un año.
3. **Alto/Bajo de hoy (Today's High/Low):** El precio más alto/bajo que la acción ha tenido durante las horas de comercio.
4. **Volumen de acciones (Share Volume):** El número de acciones negociadas durante el día.
5. **Volumen diario medio de 50 días (50 Day Avg. Daily Volume):** Promedio del volumen de acciones durante los últimos 50 días de negociación.



| Intel Corporation (INTC) | | AMD | |
|-----------------------------|---|-----------------------------|---|
| Best Bid/Ask | \$ 29.96 / \$ 29.97 | Best Bid/Ask | \$ 2.03 / \$ 2.04 |
| 1 Year Target | 38 | 1 Year Target | 2 |
| Today's High /Low | \$ 30.50 / \$ 29.45 | Today's High /Low | \$ 2.13 / \$ 1.99 |
| Share Volume | 52,122,067 | Share Volume | 15,499,368 |
| 50 Day Avg. Daily Volume | 22,872,515 | 50 Day Avg. Daily Volume | 11,729,483 |
| Previous Close | \$ 32.74 | Previous Close | \$ 2.21 |
| 52 Week High/Low | \$ 37.03 / \$ 24.87 | 52 Week High/Low | \$ 3.37 / \$ 1.61 |
| Market cap | \$ 141,428,430,000 | Market cap | \$ 1,608,567,644 |
| P/E Ratio | 12.81 | P/E Ratio | NE |
| Forward P/E(1y) | 13.76 | Forward P/E(1y) | NE |
| Earnings Per Share (EPS) | \$ 2.34 | Earnings Per Share (EPS) | \$ -1.18 |
| Annualized dividend | \$ 0.96 | Annualized dividend | N/A |
| Ex Dividend Date | Nov. 4, 2015 | Ex Dividend Date | N/A |
| Dividend Payment Date | Dec. 1, 2015 | Dividend Payment Date | N/A |
| Current Yield | 2.93 % | Current Yield | 0 % |
| Beta | 1.11 | Beta | 2.16 |
| NASDAQ Official Open Price | \$ 29.63 | NASDAQ Official Open Price | \$ 2.10 |
| Date of Open Price | Jan. 15, 2016 | Date of Open Price | Jan. 15, 2016 |
| NASDAQ Official Close Price | \$ 32.74 | NASDAQ Official Close Price | \$ 2.21 |
| Date of Close Price | Jan. 14, 2016 | Date of Close Price | Jan. 14, 2016 |
| Community Sentiment |  Bullish | Community Sentiment |  Bullish |

FIGURA 1.2.2: Comparación de indicadores bursátiles entre Intel y AMD.

6. **Cierre anterior** (Previous Close): Es el último precio registrado de la acción en el día anterior.
7. **52 Semanas alto/bajo** (52 Week High/Low): Es el precio más alto/bajo por el cual se ha comerciado la acción en las últimas 52 semanas.
8. **Capitalización de mercado** (Market cap): Es una medida del valor total de la empresa. Se obtiene de multiplicar el número de acciones en circulación por el precio de cierre anterior.
9. **Relación precio/beneficio** (P/E Ratio): Es el precio de la acción dividido por los beneficios por acción.
10. **P/B provisional (1 año)** (Forward P/E 1y): Es la estimación de la relación precio/beneficio dentro de un año.
11. **Beneficios por acción** (Earnings Per Share): Representa la porción de beneficios de una empresa que han sido asignados a cada acción en circulación de capital ordinario. Los beneficios por acción pueden ser negativos, esto indica que la empresa está perdiendo capital; esta pérdida no recae sobre el propietario de la acción.
12. **Dividendo anualizado** (Annualized dividend): Es el total de dividendos pagados por acción durante el transcurso de un año.
13. **Fecha ex dividendo** (Ex Dividend Date): Es la fecha en la que se registra quién es el poseedor de la acción para así pagar dividendos a la persona adecuada. A partir de esta fecha aunque la acción cambie de propietario el dividendo se pagará a la persona registrada antes de la fecha ex dividendo.

14. **Fecha de pago de dividendo** (Dividend Payment Date): La fecha en la que se pagan los dividendos.
15. **Rendimiento actual** (Current Yield): Porcentaje de dividendos respecto al precio de la acción.
16. **Beta**: Es una medida de la volatilidad de la acción. Se utiliza para conocer la relación entre el cambio del mercado de valores en conjunto respecto al cambio del precio de una acción. Donde

$$\text{Cambio del precio de la accion} = \text{cambio del mercado} \times \beta$$

.

Capítulo 2

Antecedentes

La econofísica es una rama de la física relativamente reciente que se encarga de estudiar los procesos económicos mediante técnicas matemáticas como modelos probabilísticos, cálculo estocástico, modelos de agentes, etc, que han surgido de diversas áreas de la física. Si bien la econofísica es un área reciente, el estudio de la economía es un área que lleva activa desde hace ya varios siglos, pero no fue hasta principios del siglo XX que surgen los primeros indicios de su formalización como ciencia.

Llama la atención que la economía es una de las áreas más importantes en la esfera de todas las actividades humanas; es algo que afecta la vida de millones de personas pero que a la vez comprendemos muy poco. Esto se debe en parte a que la economía es un sistema extremadamente complejo que depende de las interacciones de miles o millones de agentes que se auto organizan y por lo mismo para poder modelar un sistema así se necesitan herramientas muy sofisticadas.

Uno de los primeros intentos de formalizar la ciencia económica corresponde a Adam Smith (1723-1790). En el modelo de Smith un mercado compuesto por una multitud de agentes totalmente egoístas, esto es, que buscan maximizar sus ganancias, puede alcanzar un equilibrio donde los precios se determinan de la manera más racional posible de manera que el sistema funciona de manera óptima. Este modelo fue muy influyente porque implica que la manera de hacer que la economía de un país funcione mejor es evitar cualquier tipo de intervención gubernamental.

Otro de los primeros problemas de una ciencia económica formal fue la determinación del precio de un valor. Varios modelos han sido propuestos para explicar los precios. David Ricardo (1772-1823) propuso la teoría del valor-trabajo, la cual argumenta que el valor de un bien o servicio está determinado por la cantidad de labor necesaria para producirlo. Este modelo presenta problemas para predecir el precio de algunos productos,

por ejemplo el hierro y el diamante. Si bien ambos requieren una cantidad de trabajo similar para extraerlos su precio difiere mucho en el mercado. Otra forma de explicar el precio es obtenerlo de la utilidad que genera el producto, esto es, cuanto más útil es un valor mayor es su precio. Esta explicación no es del todo satisfactoria ya que no explica cómo algunos productos de lujo pueden tener un precio tan alto, por ejemplo, el agua es mucho más barata que el vino, pero ambos presenta una utilidad similar. De acuerdo con la teoría de utilidad marginal lo que determina el precio es la derivada de la utilidad respecto a la cantidad de oferta. Esto explicaría por qué el agua es más barata que el vino, lo cual se interpreta como que la utilidad marginal del agua es mucho menor que la del vino. El precio para el cual la oferta S será igual a la demanda D será el precio de mercado de la mercancía, esto es $S(p) = D(p)$, donde p es el precio de la mercancía.

Esta solución presenta un problema debido a la correlación entre las ofertas y demandas de ciertas mercancías. Por ejemplo, en la India los precios del arroz y la demanda pueden aumentar simultáneamente cuando el precio de otra mercancía como el grano de trigo aumenta. La solución a este tipo de problemas llevó al desarrollo de una ciencia formal de la economía por Léon Walras (1834-1910), Alfred Marshal (1842-1924) y otros. En esta nueva formulación del problema se incorpora el concepto de utilidad marginal a partir de las ecuaciones acopladas de oferta y demanda

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N, M) = S_i(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N, M),$$

donde N es el número de mercancía, M el número total de dinero en el mercado, $i = 1, 2, \dots, N$ y p_i es el precio de la mercancía i .

Entre otras observaciones notables que se han hecho de forma independiente cabe mencionar los estudios de Wilfried Pareto (1848-1923) que observó que la densidad numérica $P(m)$ de individuos adinerados en una sociedad decae lentamente. Sea m la riqueza, su distribución es de la forma $P(m) \sim m^{-\alpha}$. Otro es el desarrollo de la teoría de juegos por el matemático John Von Neumann (1903-1957) que describe la interacción basada en reglas entre agentes egoístas.

Entre los trabajos recientes cabe mencionar las contribuciones de Paul Samuelson y Benoit Mandelbrot en la descripción de las propiedades de los precios.

De forma general se puede decir que la economía es una ciencia muy compleja, describe la interacción entre una gran multitud de individuos con comportamientos diferentes y todos conectados entre sí localmente a partir de transacciones de compra y venta, dando lugar a un comportamiento global emergente que vemos reflejado en los mercados de valores, índices de crecimiento económico y demás indicadores. Inevitablemente todas las personas en el planeta dependen de alguna u otra forma del sistema económico, pero

a su vez desconocemos en gran parte cómo funciona. La utilidad de la econofísica radica en que es capaz de ofrecer una explicación descriptiva de los procesos económicos, y esto es útil para diferentes fines, como evaluar riesgos, generar estrategias que sean capaces de tener una ventaja competitiva para realizar trading, evaluar cuando es posible que ocurra una caída en un mercado financiero e incluso entender cuál es su causa.

2.1. Hipótesis del mercado eficiente (HME)

Los mercados financieros son sistemas altamente eficientes y complejos que incorporan toda la información relevante disponible en la determinación más racional del precio de un activo. Una consecuencia de que un mercado sea eficiente es que es imposible predecir los precios futuros a partir de los precios anteriores. Entonces la hipótesis del mercado eficiente formulada por Samuelson en 1965 nos dice que el valor esperado del precio del activo al tiempo $t + 1$, esto es Y_{t+1} está relacionado con los valores previos de los precios Y_0, Y_1, \dots, Y_t por medio de la relación

$$E[Y_{t+1}|Y_0, Y_1, \dots, Y_t] = Y_t.$$

Esto implica que los precios son impredecibles a partir de la serie de tiempo de los precios pasados.

Una de las consecuencias de que el mercado se comporte por lo general de manera eficiente es que los precios tienen un movimiento descrito por un caminante aleatorio, ésto es un proceso de Wiener, cuya variación está dada por

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

donde B_t es el movimiento Browniano.

Esta descripción no es totalmente adecuada debido a que si se supone que los precios siguen una caminata aleatoria existe una probabilidad distinta de cero de que un precio asuma un valor negativo. Evidentemente esto no es una solución válida, por lo que generalmente se asume que los precios se pueden describir mejor como un proceso Browniano geométrico, esto es, un proceso cuya variación está dada por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

En la figura 2.1.1 se muestra una comparación entre dos trayectorias generadas por un proceso de Wiener y un proceso Browniano geométrico.

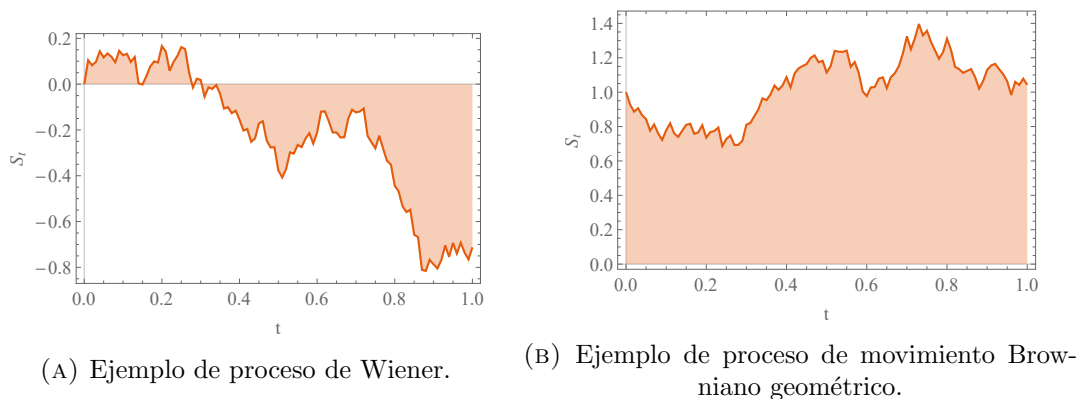


FIGURA 2.1.1: Ejemplos de procesos de Wiener y movimiento Browniano geométrico con $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.5$.

Se han hecho multitud de críticas a la HME. A través de estudios empíricos se ha encontrado que los mercados no siempre se comportan de manera eficiente, y que además, al considerar información adicional en las series de tiempo como la razón entre ganancia / precio, dividendos, etc., es posible hacer predicciones acerca de los precios a escalas mayores a un mes. Uno de los defectos de la HME es que asume que todos los agentes que conforman el mercado se comportan de manera totalmente racional en todo momento. Esto es cuestionable debido a que en la realidad existen diferentes tipos de agentes en el mercado, desde firmas hasta inversionistas individuales y todos siguen patrones de comportamiento diferentes ya que una firma puede motivar sus decisiones en cuidadosos análisis del mercado y un inversionista individual puede estar motivado por información parcial o incompleta. También sucede que muchas veces el mercado está dominado por creencias irracionales acerca de las perspectivas de crecimiento de un valor, lo que causa tendencias en los movimientos de los precios.

A pesar de éstas críticas también se ha observado que los mercados son capaces de aumentar su eficiencia con el tiempo ya que en cuanto surge una nueva estrategia para predecir el precio futuro o aparece una oportunidad de arbitraje siempre hay agentes que aprovechan la oportunidad haciendo que el precio vuelva a su valor más racional.

2.2. Modelos para predecir precios de opciones

La consecuencia principal de que el mercado sea eficiente es que resulta imposible predecir los precios futuros de las acciones a partir de los precios pasados. Esto no aplica a los contratos derivados, esto es, contratos cuyo precio depende del precio y las propiedades de otro valor.

Una *opción* es un contrato derivado que da al comprador el derecho pero no la obligación de comprar o vender una acción a un precio especificado que se denomina precio de *strike* K , a una fecha especificada que se denomina *tiempo de madurez* T . A la opción que da el derecho de compra se le denomina *call*, y a la de venta *put*. Las opciones por su naturaleza son contratos especulativos que conllevan una gran cantidad de riesgo. Por ejemplo, sea una opción *call* que da el derecho de comprar una acción que actualmente se comercializa por el precio \$50, y su precio de strike en un periodo T es \$45. Esta opción da el derecho al inversionista de comprar la acción a \$45. Evidentemente sólo tiene sentido ejercer ésta opción si al transcurrir el periodo de tiempo T el precio de la acción es mayor que \$45. Si el precio de la acción es menor que \$45 entonces la ganancia de la opción sería 0, mientras que si por ejemplo fuera mayor que \$45 entonces tendría sentido ejercer la opción. A esta ganancia hay que descontar también el precio de la opción que se le denomina *prima de la opción*.

Entonces los tipos de opción que hay son:

- *Put* option: Da al poseedor el derecho (pero no la obligación) de vender una cantidad especificada de acciones a un precio acordado en un periodo especificado.
- *Call* option: Da al poseedor el derecho (pero no la obligación) de comprar una cantidad especificada de acciones a un precio acordado en un periodo especificado.

Dado que la opción es un instrumento derivado su precio debería ser una función de los parámetros que describen el valor subyacente. Nos interesa describir éste precio. Los factores que afectan al precio de la opción son:

1. Precio actual de la acción: S .
2. Precio de strike (o precio de ejercicio): K .
3. Tiempo de madurez: T .
4. Volatilidad del stock: σ .
5. Tasa de interés libre de riesgo: r .
6. Dividendos pagados durante la vida de la acción: D .

Intuitivamente se puede entender cómo afecta cada uno de éstos factores al precio de la opción. Un aumento en la volatilidad se ve reflejado con un aumento de precio tanto de los *put* como de los *call* porque las variaciones posibles del precio son más altas. Ante un S fijo un aumento en r aumenta el precio de las *call* porque los inversores prefieren

opciones en vez de acciones debido a que una inversión sin riesgo es más atractiva. Al contrario, los precios de una *put* bajan cuando r aumenta, debido a que es más conveniente vender acciones para invertir en inversiones sin riesgo que posponer la venta por medio de una opción. Los dividendos (después de pagarse) reducen el precio de la acción de manera que disminuye el valor de la *call* y aumenta el valor de la *put*.

A continuación se describe el beneficio (descontando la prima de la opción) que da cada posición.

- Long *call* option: El inversor compra el derecho de comprar un valor. Su ganancia es

$$P_{LC} = \max[S - K, 0]$$

- Short *call* option: El inversor vende el derecho de comprar un valor. Su ganancia es

$$P_{SC} = \min[K - S, 0]$$

- Long *put* option: El inversor compra el derecho de vender un valor. Su ganancia es

$$P_{LP} = \max[K - S, 0]$$

- Short *put* option: El inversor vende el derecho de vender un valor. Su ganancia es

$$P_{SP} = \min[S - K, 0]$$

A continuación se describirá el modelo de árboles binomiales y la ecuación de Black-Scholes para predecir el precio de una opción.

2.2.1. Árboles binomiales

Para construir este modelo se supondrá que el precio de un valor sólo puede subir o bajar. Sea S el precio inicial del valor, en el siguiente instante sólo podrá tener los precios Su ó Sd , donde $u > 1$ y $d < 1$. A partir de esto se puede construir un árbol de todos los posibles precios siguientes como el que se muestra en la figura 2.2.1. Se desea describir el precio de la opción F en función de sus posibles precios futuros F_u (precio de la opción cuando el precio del valor sube) y F_d (precio de la opción cuando el valor baja). Para describir a F se toma en cuenta que ésta es sensible a los precios de S , de manera que si S sube F también, y si baja S también bajará F . La idea principal para construir éste modelo es que se pueden conocer los precios finales de los nodos debido a que en el tiempo de madurez T el precio de la opción debe converger al beneficio que se obtiene

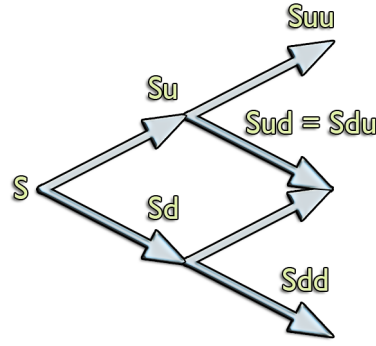


FIGURA 2.2.1: Ejemplo de construcción de los precios de una acción utilizando árboles binomiales.

de ésta. Si se conocen las proporciones u y d con la que el precio de la opción sube o baja entonces se podría calcular el precio en el nodo anterior, y haciendo ésto para todas las entradas del árbol hacia atrás entonces se puede llegar al primer nodo, que es el que nos interesa obtener.

Considérese ahora un portafolio que consiste en Δ acciones en posición larga y una opción en posición corta. Este portafolio es libre de riesgo si su valor no depende de si el precio del valor sube o baja, esto es

$$Su \Delta - F_u = Sd \Delta - F_d.$$

Entonces el número de acciones del portafolio sin riesgo es

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd}.$$

De esta manera el portafolio con valor actual $S\Delta - F$ tiene un valor futuro $Su \Delta - F_u = Sd \Delta - F_d$. Si el intervalo de tiempo en el que se posee la acción y la opción es τ y r es la tasa de interés sin riesgo, la relación entre los valores presentes y futuros del portafolio es

$$(S\Delta - F)e^{r\tau} = Su \Delta - F_u = Sd \Delta - F_d.$$

De aquí se puede despejar F

$$F = e^{-r\tau}(F_u - Su \Delta) + S\Delta.$$

Haciendo

$$p = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}$$

se puede expresar F en la forma

$$F = e^{-r\tau} (pF_u - (1 - p)F_d). \quad (2.2.1.1)$$

Se puede interpretar a p y a $1 - p$ como las probabilidades de que el precio suba o baje. Nótese que conociendo p y $1 - p$ se puede calcular la expectación del precio siguiente del valor.

$$\begin{aligned} E[S(\tau)] &= E[pSu - (1 - p)Sd] = E\left[\frac{e^{r\tau} - d}{u - d}Su + \frac{u - e^{r\tau}}{u - d}Sd\right] \\ &= E\left[Se^{r\tau}\frac{u - d}{u - d} - S\left(\frac{du - ud}{u - d}\right)\right] = Se^{r\tau}. \end{aligned}$$

Conocer el valor de S es necesario para calcular el valor final de los nodos por medio de la expresión

$$P_{LC} = \max[S - K, 0].$$

Esto significa que el precio del valor crece en promedio con la tasa de interés sin riesgo. Los precios en el siguiente paso del árbol se pueden obtener a partir de [2.2.1.1](#),

$$F_u = e^{-r\tau} (pF_{uu} - (1 - p)F_{ud}),$$

y

$$F_d = e^{-r\tau} (pF_{ud} - (1 - p)F_{dd}).$$

Con esto ya se puede construir todo el árbol binomial. Ahora falta encontrar los valores de u y d . Para estimarlos se utilizará el hecho de que los precios de la acción siguen aproximadamente un movimiento Browniano geométrico

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB,$$

que en su forma integral es

$$S(t) = S_0 + \mu \int_0^t S d\tau + \sigma \int_0^t S dB_\tau.$$

Esta ecuación diferencial estocástica de Ito se puede resolver utilizando el lema de Ito y su solución es

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

que tiene un valor de expectación y varianza

$$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t} \tag{2.2.1.2}$$

y

$$Var[S(t)] = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1). \tag{2.2.1.3}$$

Utilizando el hecho de que

$$E[S(t)] = E[pSu + (1-p)Sd] = E[Se^{r\tau}]$$

se obtiene que

$$e^{r\tau} = pu + (1-p)d.$$

También de 2.2.1.3 y de la relación $Var(S(t)) = E[S(t)^2] - E[S(t)]^2$ se obtiene

$$e^{2rt+\sigma^2t} = pu^2 + (1-p)d^2.$$

Para resolver las ecuaciones se impone la condición adicional de que

$$ud \approx 1.$$

Resolviendo para u se obtiene

$$u = \frac{1 + e^{2rt+\sigma^2t} \pm \sqrt{(1 + e^{2rt+\sigma^2t})^2 - 4e^{2rt}}}{2e^{rt}}$$

Expandiendo por serie de Taylor a primer orden queda

$$u = 1 + \sigma\sqrt{t} + \frac{\sigma^2t}{2} + \dots$$

Para intervalos de tiempo muy pequeños

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + \dots \approx e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

y

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

En la figura 2.2.2 se muestra un ejemplo de árbol binomial. A partir de S , K y r se pueden determinar los precios finales, y de ahí se calculan las entradas anteriores del árbol hasta llegar al precio actual de la opción.

Una de las críticas más fuertes del modelo binomial es que hace asunciones que limitan la precisión del modelo debido a que supone que los precios sólo pueden subir o bajar, pero no permanecer con el mismo valor. También considera sólo variaciones discretas y equiespaciadas en el tiempo, y se considera que las variaciones de los precios tienen una volatilidad constante. Esto no corresponde a lo que se observa en los mercados financieros reales.

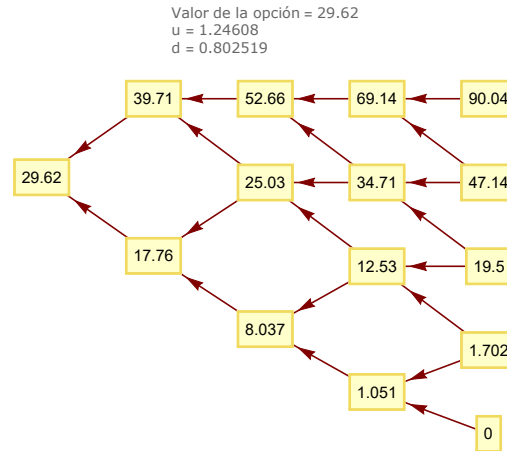


FIGURA 2.2.2: Precio de una opción del tipo *call* a partir de un árbol binomial. En éste ejemplo $\sigma = 0.22$, $r = 0.1$, $S = 50$, $\tau = 1$ y $K = 30.5$.

Para considerar que el precio puede permanecer igual existe una extensión al modelo donde se consideran árboles trinomiales, pero la crítica de las variaciones y volatilidad constantes permanece.

2.2.2. Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes trata de resolver algunos de los problemas de los árboles binomiales. La asunción principal es que el precio de la opción es una función continua del tiempo y del precio del valor,

$$F = F(S(t), t).$$

Se asume también que el precio $S(t)$ sigue un movimiento Browniano geométrico y se considera que el mercado está libre de imperfecciones, esto es, que el precio es una variable continua, no hay costos de transacción, impuestos o restricciones, no hay límite en inversiones sin riesgo, no hay arbitraje, y no hay pago de dividendos durante la vida de la opción.

Para construir la ecuación de Black-Scholes primero se expande el diferencial de $F(S(t), t)$,

$$dF(S(t), t) = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2 + \dots \quad (2.2.2.1)$$

Ahora, recordando que los precios siguen un movimiento Browniano geométrico

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dB, \quad (2.2.2.2)$$

entonces

$$dS^2 = \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dB + \sigma^2 S^2 (dB)^2,$$

donde

$$(dt)^2 \approx 0,$$

$$E[dt dB] = dt E[dB] = 0,$$

$$E[(dB)^2] = dt.$$

Así queda que

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt.$$

Sustituyendo la ecuación 2.2.2.2 en 2.2.2.1 y eliminando los términos de orden superior queda

$$dF(S(t), t) = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt. \quad (2.2.2.3)$$

Para poder trabajar esta expresión se impondrá la condición de cuál debe ser la relación entre la variación de los precios en un portafolio sin riesgo. Anteriormente (en el modelo discreto) se había establecido que en un portafolio que consiste de Δ acciones en posición larga y una opción en posición corta para que sea libre de riesgo debe ocurrir que

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{S_u - S_d}.$$

Pero si los precios son una variable continua esto es equivalente a

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}.$$

Entonces se construye un portafolio libre de riesgo con $\frac{\partial F}{\partial S}$ acciones en posición larga y una opción en posición corta. El valor del portafolio es

$$P = \frac{\partial F}{\partial S} S - F.$$

El cambio de valor del portafolio es

$$dP = \frac{\partial F}{\partial S} dS - dF.$$

Al mismo tiempo, si no hay arbitraje el cambio de valor debe ser igual al interés generado por invertir en un valor sin riesgo

$$dP = rP dt.$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial S} dS - dF = rP dt.$$

De aquí se puede despejar dF y sustituir P para que quede

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS + rF dt - rS \frac{\partial F}{\partial S} dt. \quad (2.2.2.4)$$

Igualando las ecuaciones 2.2.2.1 y 2.2.2.4 queda

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - rF = 0.$$

Para una opción *call* esta ecuación se puede resolver con las condiciones iniciales

$$F(0, t) = 0, \quad \forall t,$$

$$F(S(t), t) \rightarrow S(t), \quad \text{cuando } S(t) \rightarrow \infty,$$

$$F(S(t), T) = \max[S - K, 0].$$

A continuación se muestra una comparación numérica entre los precios que arroja el modelo de árboles binomiales y la ecuación de Black-Scholes.

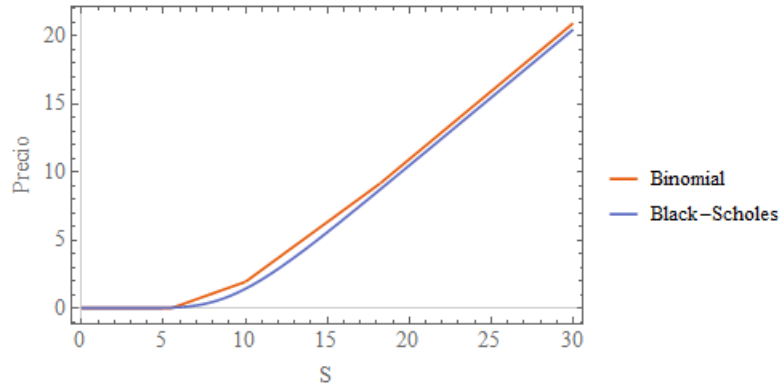


FIGURA 2.2.3: Comparación entre los precios de la opción en función del precio de la acción, dejando fijo el precio de Strike $\sigma = 0.7$, $r = 0.05$, $K = 10$.

2.3. Observables

Las observables son las magnitudes mensurables relacionadas con los mercados financieros. En finanzas existen multitud de observables disponibles públicamente y que se pueden obtener de repositorios como *Yahoo Finance* o la información que publican los

misimos mercados financieros como *NASDAQ* o la *Bolsa Mexicana de Valores*. Entre los observables disponibles están

1. Mejor Compra/Venta
2. Objetivo a un año
3. Alto/Bajo de hoy
4. Volumen de acciones
5. Vol. diario medio de 50 días
6. Cierre anterior
7. 52 Semanas alto/bajo
8. Capitalización de mercado
9. Relación precio/beneficio
10. P/B provisional (1 año)
11. Beneficios por acción
12. Dividendo anualizado
13. Fecha ex dividendo
14. Fecha de pago de dividendo
15. Rendimiento actual
16. Beta

El problema de trabajar directamente con estas observables es que no son estacionarias, esto es, que si se construye una serie de tiempo con los valores de alguna observable como por ejemplo el precio de cierre $S(t)$ en instantes entre t_1 y t_n , es decir, la serie de tiempo $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$, su distribución no es la misma que la de una serie de tiempo de los precios de cierre en los instantes entre $t_1 + \Delta t$ y $t_n + \Delta t$,

$$(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \stackrel{d}{\neq} (S_{t_1+\Delta t}, \dots, S_{t_n+\Delta t}).$$

Debido a la no estacionariedad de las observables, en finanzas es común trabajar con magnitudes derivadas de las observables. Aunque la serie de tiempo de una variable

aleatoria no sea estacionaria, es posible que sus incrementos sí lo sean, por ejemplo, para los precios

$$S_t - S_s \stackrel{d}{=} S_{t+\Delta t} - S_{s+\Delta t}, \quad \forall t, s \in T \quad \text{y} \quad t + \Delta t, s + \Delta t \in T.$$

Esto motiva a definir una nueva observable basada en los incrementos de los precios. Para evitar problemas de escala en diferentes mercados (debido a la diferencia de divisas) se utilizan los incrementos logarítmicos, y se denomina como *retorno* a la nueva observable

$$R(t, \Delta t) = \log S_{t+\Delta t} - \log S_t.$$

Otra manera alternativa de definir la observable de los retornos es

$$R(t, \Delta t) = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$$

que también conserva la propiedad de estacionariedad y escala común en todos los mercados.

Para medir el riesgo que conlleva un valor se define la observable de la volatilidad. Esta observable se puede definir en función de una medida de dispersión de los retornos en una ventana de tiempo. Otros autores prefieren definir la volatilidad en función de la desviación estándar, pero esta definición no resulta del todo conveniente ya que debido a la forma de la distribución de los retornos es frecuente que ocurran eventos mayores a 3 sigmas. Una buena medida de la volatilidad que no implica medir dispersión es definirla como

$$V(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t'=t}^{t+\Delta t} |R(t', \Delta t)|.$$

2.3.1. El problema del tamaño de la escala

Uno de los problemas asociados a la definición de las observables que se acaba de realizar consiste en decidir cómo se selecciona la escala temporal Δt con la cual se medirán los retornos. ¿Cuál es adecuada en cada situación? El problema radica en que al variar la escala varían de forma drástica los resultados, como muestra se puede observar este efecto en las figuras [2.3.1](#) y [2.3.2](#).

Es debido a este problema que en la sección de metodología se detallará una propuesta de definición de observables que no involucran un parámetro de escala que se introduce de forma manual.

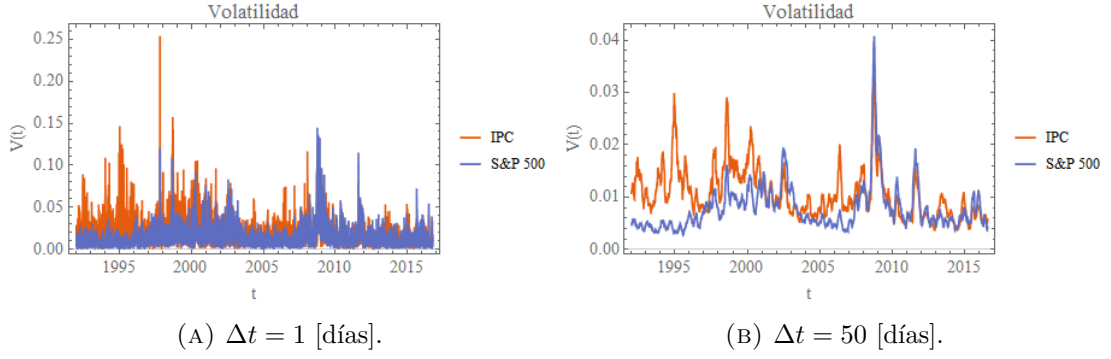


FIGURA 2.3.1: Mediciones de la volatilidad de los índices IPC y S&P.

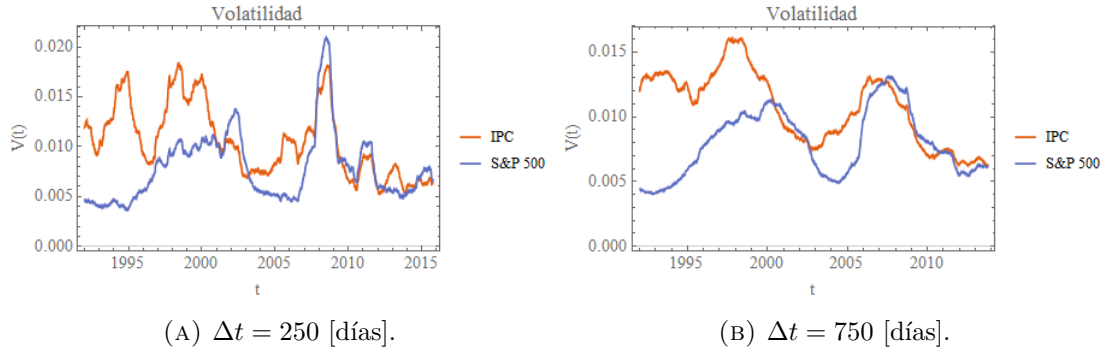


FIGURA 2.3.2: Mediciones de la volatilidad de los índices IPC y S&P.

2.4. Hechos estilizados

Existe un conjunto de propiedades estadísticas observadas que son universales, es decir, se observan sobre muestras de los diferentes mercados financieros e instrumentos y que son similares entre sí. A estas observaciones se les denomina *hechos estilizados*. Dada una serie de observaciones de retornos $R(t_1, \Delta t), \dots, R(t_n, \Delta t)$ se asumirá que la serie de tiempo es estacionaria, esto es, que la distribución conjunta de los retornos $R(t_1, \Delta t), \dots, R(t_n, \Delta t)$ será la misma que $R(t_1 + \tau, \Delta t), \dots, R(t_n + \tau, \Delta t)$. Esto significa que los hechos estilizados se presentan de forma similar en cualquier periodo que se escoja.

A partir de los retornos se pueden distinguir las siguientes propiedades comunes a todos los mercados y utilidades.

1. Ausencia de autocorrelaciones

Las autocorrelaciones de los retornos sólo se presentan en escalas de tiempo muy pequeñas menores a 20 minutos y después de este periodo decaen rápidamente. Cabe resaltar que en los mercados más eficientes las autocorrelaciones decaen más rápidamente que en los mercados menos eficientes.

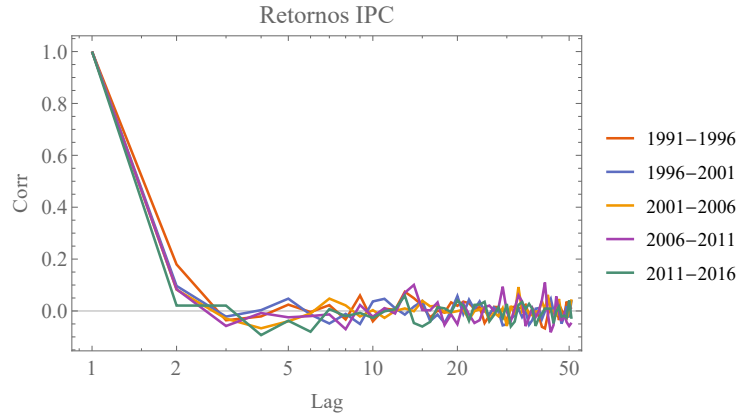


FIGURA 2.4.1: La bolsa mexicana de valores es un ejemplo de mercado relativamente nuevo, en el cual se han podido observar cambios en su eficiencia. Ésto se ve reflejado en la autocorrelación de los retornos a un día durante diferentes periodos.

La ausencia de autocorrelaciones se puede ver como una evidencia de la *hipótesis del mercado eficiente*. Cuando se aumenta la escala de tiempo (lag) en algunos casos se observan aumentos de la autocorrelación en escalas de semanas o meses, pero esta observación varía de muestra a muestra, es decir, no es reproducible en todos los mercados.

2. Colas pesadas

La distribución de los retornos en las colas tiene forma de ley de potencias o distribución de Pareto, esto es, su función de distribución es de la forma $f(R) \sim |R|^{-\alpha}$, con $\alpha > 2$. Mandelbrot mostró en 1960 que la distribución normal no puede captar todas las propiedades que se observan en los retornos debido a los eventos extremos que suceden en las colas de las distribuciones. A estas colas que decaen muy lentamente se les denomina colas pesadas. Una manera de observar la forma de las colas es a partir de la kurtosis, que está definida como

$$\kappa = \frac{\langle (R(t, \Delta t) - \langle R(t, \Delta t) \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3$$

donde σ es la desviación estándar de los retornos $R(t, \Delta t)$. La kurtosis está definida de tal forma que para una distribución normal su valor es $\kappa = 0$. Para los retornos a un día del índice IPC de la bolsa mexicana de valores desde el 8 de noviembre de 1991 al 29 de junio de 2016 se obtiene un valor de la kurtosis $\kappa = 6.201$, indicando que se presentan colas mucho más pesadas que las esperadas a partir de una distribución normal. Ha habido una gran variedad de formas sugeridas para describir la distribución de los retornos: Distribución t Student, hiperbólica, Gaussiana inversa normal, exponencial truncada estable, etc., pero todavía no existe un consenso general acerca de la forma exacta de la distribución que describe bien el comportamiento de las colas.

3. Asimetría en la relación ganancia/pérdida

Se puede asumir que una serie de tiempo que caracteriza los retornos de un índice debe tener una media positiva, ya que los índices al representar las empresas más exitosas de una bolsa por lo general tienen una tendencia al crecimiento. Pero llama la atención que al observar la forma de las distribuciones generadas por precios de acciones o índices éstas no suelen tener una forma simétrica, se observa más bien que en los retornos hay una mayor cantidad de movimientos de pérdida y más drásticos que la cantidad de movimientos de ganancia. Esto es notable al graficar la distribución de los retornos como se muestra en la figura 2.4.2. En la figura se muestra la distribución de los retornos R del IPC, y es apreciable la mayor cantidad de retornos pequeños negativos. El valor de la Skewness de la muestra es -0.0250097 , indicando que en efecto es asimétrica hacia la parte negativa de la distribución.

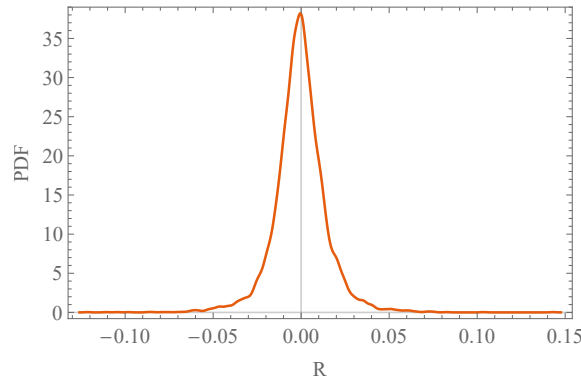
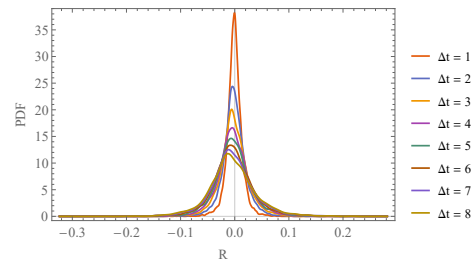
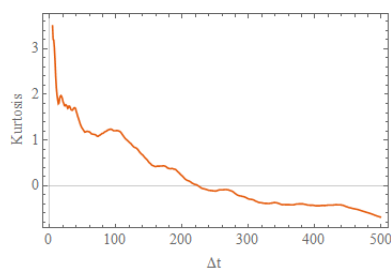


FIGURA 2.4.2: Distribución de los retornos de la serie de tiempo generada por los retornos R de los precios del IPC. Se observa mayor cantidad de movimientos de pérdida pequeños (negativos) que movimientos de ganancia.

4. Gaussianidad agregacional

La forma de la distribución de los retornos no es la misma en todas las escalas de tiempo Δt . Esto se puede observar al medir la kurtosis de la muestra de los retornos a diferentes escalas de tiempo Δt como se muestra en la figura 2.4.3.



(A) Kurtosis de los retornos variando Δt .

(B) Distribución de los retornos del índice IPC variando Δt .

FIGURA 2.4.3: La forma de la distribución cambia al variar el valor de Δt .

Al incrementarse la escala de tiempo Δt en la que se miden los retornos, la distribución se aproxima a una distribución normal. El hecho de que la forma de la distribución cambia con la escala de tiempo implica que el proceso que genera los precios tiene una estructura temporal no trivial.

5. Intermitencia

En todas las escalas de tiempo Δt los retornos muestran un grado muy alto de variabilidad. Esto se puede visualizar a través de la volatilidad. La intermitencia es causada debido a la presencia de periodos irregulares en la serie de tiempo en los cuales la magnitud de los retornos crece muy rápidamente. Ésto es notable sobre todo en las crisis y momentos de pánico en la bolsa de valores.

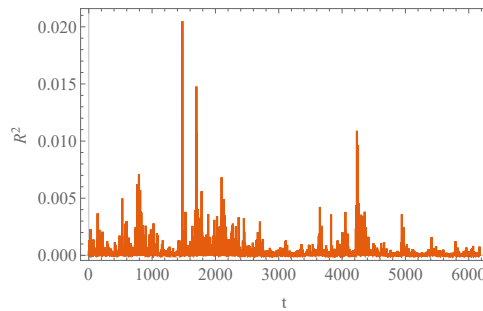


FIGURA 2.4.4: Volatilidad de los retornos. Se observa que su dinámica se puede separar en dos procesos, uno que causa un ruido Gaussiano, y otro responsable de los eventos extremos.

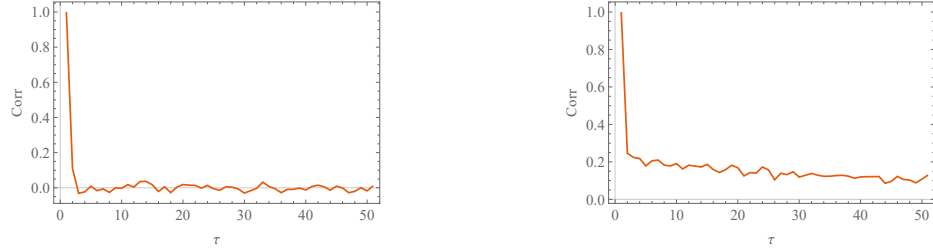
6. Agrupamiento de la volatilidad

Si bien en los retornos se ha observado una ausencia de autocorrelación, esto no implica que en los incrementos no exista autocorrelación. Para asumir independencia entre los retornos entonces se tendría que observar que cualquier función de los retornos también presenta ausencia de autocorrelación. Al tomar el valor absoluto o el valor cuadrático de los retornos se ha observado que existe una autocorrelación positiva o *persistencia*. A este fenómeno se le denomina *agrupamiento de la volatilidad*. En palabras de Mandelbrot que reportó el fenómeno en 1963 *cambios grandes suelen ser seguidos por cambios grandes de cualquier signo, y pequeños cambios suelen ser seguidos por cambios pequeños*.

Para medir el agrupamiento de la volatilidad es común utilizar la autocorrelación de los retornos absolutos, ésto es

$$C_\alpha(\tau) = \text{Corr}(|R(t + \tau, \Delta t)|^\alpha, |R(t, \Delta t)|^\alpha),$$

donde $\alpha \geq 1$.



(A) Autocorrelación de los retornos.

(B) Autocorrelación de la volatilidad.

FIGURA 2.4.5: Comparación de las autocorrelaciones de los retornos y la volatilidad utilizando la serie de precios del índice IPC. Se ha observado a partir de estudios empíricos que la autocorrelación de la volatilidad permanece positiva y decae lentamente.

La presencia de una autocorrelación positiva también se observa al utilizar otras medidas de volatilidad como

$$C_0(\tau) = \text{Corr}(\log |R(t + \tau, \Delta t)|, \log |R(t, \Delta t)|).$$

Las autocorrelaciones C_α exhiben un comportamiento de ley de potencias,

$$C_\alpha(\tau) \approx \frac{c}{\tau^\beta},$$

con un exponente $\beta < 0.5$, lo cual sugiere la presencia de dependencias a largo plazo de las amplitudes de los retornos.

La existencia de estas dependencias no lineales indica que los retornos se pueden descomponer de la forma

$$R(t, \Delta t) = \sigma(t, \Delta t)\epsilon(t)$$

donde $\epsilon(t)$ es ruido blanco y $\sigma(t, \Delta t) > 0$ es una volatilidad condicional cuyo comportamiento debe ser especificado para ajustarse a las observaciones empíricas.

Para modelar este fenómeno en las series de tiempo financieras se suelen utilizar modelos GARCH, que son idóneos para poder reproducir las características observadas. Los modelos GARCH fueron los primeros en tomar en consideración la volatilidad para modelar las series de tiempo financieras. En el modelo GARCH(1,1) por ejemplo, la volatilidad en un instante depende de los valores anteriores de la volatilidad.

$$R_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = a_0 + \sigma_{t-1}^2 + b\epsilon_t^2, \quad 0 < a + b < 1.$$

Por este motivo al agrupamiento de la volatilidad se le denomina a veces *efecto GARCH*.

2.5. Eventos extremos

Como se vio en la sección de hechos estilizados, las colas de las distribuciones decaen como una ley de potencias. La implicación de esto es que un evento con un valor de retorno R extremo es algo sumamente improbable. En realidad, los eventos extremos no suelen ser tan poco comunes, es más, se encuentran regularmente en periodos de 10 años.

En las ciencias físicas este tipo de eventos se descarta como una anomalía en el proceso experimental, pero en los valores de los precios de la bolsa de valores no existe este tipo de error experimental de manera que no se pueden descartar.

Se ha encontrado empíricamente que los eventos extremos están asociados a una transición del sistema desde un estado desordenado a uno ordenado, generando esto burbujas especulativas o pánico en la bolsa.

2.5.1. Modelo microscópico

Para modelar el comportamiento microscópico de los agentes de la bolsa se usan técnicas de simulación [5] donde por ejemplo se establece que los agentes forman una red donde a cada uno se le denota por un número entero $i = 1, \dots, n$. En cada instante cada uno de los miembros de la red está en dos posibles estados s_i , siendo $s_i = -1$ el estado cuando el agente vende una acción, y $s_i = 1$ cuando compra. Esto representa la impresión positiva o pesimista que el agente tiene de la acción que está comerciando. Otros modelos pueden considerar que los agentes se mueven libremente.

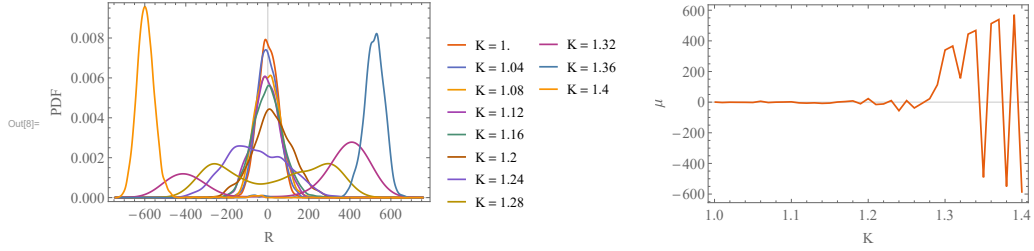
Como el precio de una acción está determinado por la totalidad de las operaciones de compra y venta que realiza cada uno de los agentes, entonces la suma de las operaciones de todos los agentes $\sum_{i=1}^n s_i$ será un causante de la variación del precio. Si la suma es negativa el precio bajará, mientras que si la suma es positiva el precio subirá. En caso de que la suma sea cero el precio no tendrá ningún cambio. Este hecho implica que si uno de los agentes desea conocer cómo cambiará el precio, una estrategia puede ser preguntar a sus pares cuál es su opinión, y de esta manera realizar una operación en base a lo que sus pares consideran que es la mejor opción. Este comportamiento se denomina *pastoreo* (*herding* en inglés) y es algo que se observa frecuentemente en los mercados financieros, esto es, que muchos inversionistas realizan operaciones en función de lo que sus colegas perciben como la mejor estrategia.

Si se modela la próxima operación de todos los agentes en función de las opiniones de sus colegas, la elección óptima de cada agente para la próxima operación está dada

por

$$s_i(t+1) = \text{sign} \left(K \sum_{j=1}^n s_j(t) + \sigma \epsilon_i \right),$$

donde K es una constante positiva que mide la intensidad de la imitación, σ mide los comportamientos idiosincráticos de cada inversionista y ϵ es una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$.



(A) Distribuciones de los retornos con diferentes valores de intensidad de imitación K . (B) Medias de distribuciones de los retornos con diferentes valores de intensidad de imitación K .

FIGURA 2.5.1: Se realizaron simulaciones del modelo con 1000 agentes y $\sigma = 1$, para distintos valores de K . Se observa que existe un valor crítico de K alrededor de 1.28 en el cual la media de los retornos deja de oscilar alrededor de 0, esto indica que los inversionistas están de acuerdo unos con otros en el precio de la acción.

2.5.2. Modelo macroscópico

Como se vio en el ejemplo anterior la variable K mide la fuerza de la imitación entre los agentes, y existe un valor $K = K_c$ donde el sistema transiciona a un estado ordenado. Cuando $K < K_c$, existe desorden en el mercado, esto es, los agentes no están de acuerdo unos con otros. Mientras K se acerca a K_c el orden empieza a emerger, se nota la aparición de grupos de agentes con un comportamiento similar, y es en este punto que el sistema resulta extremadamente inestable y sensible a cualquier cambio. Es necesario resaltar que K_c no es un valor a partir del cual habrá un crash financiero, de hecho esto puede pasar para cualquier valor de K pero la probabilidad aumenta conforme K se aproxima a K_c . Esto se puede modelar con una susceptibilidad de un crash dada en forma de ley de potencias

$$\chi \approx \frac{A}{(K_c - K)^\gamma}$$

donde A es una constante positiva y γ es llamado el exponente crítico. Sornette & Johansen [5] modelan este comportamiento definiendo una tasa de riesgo que evoluciona en el tiempo. El punto crítico es ahora t_c , que es el tiempo más probable donde ocurrirá el crash, o la muerte de una burbuja especulativa

$$h(t) = \frac{B}{(t_c - t)^\alpha},$$

donde $\alpha = (\xi - 1)^{-1}$, y ξ es el número de traders y está en el intervalo $2 < \xi < \infty$. La probabilidad de que ocurra un crash queda dada por

$$\int_{t_0}^{t_c} h(t) dt \geq 0.$$

A partir de este modelo se desea conocer la dinámica del precio durante un crash. Por simplicidad se asumirá que durante un crash el precio de un activo decae un porcentaje fijo $\kappa \in (0, 1)$. La dinámica del precio antes del crash está dada entonces por

$$dS = \mu(t)S(t) dt - \kappa p(t) dj, \quad (2.5.2.1)$$

donde j denota un proceso de salto que toma el valor de 0 antes del crash y 1 después. Imponiendo la condición de que el proceso debe ser martingale, esto es, $E[dS] = 0$, y dado que $dj = h(t) dt$ se llega a

$$\mu(t) = \kappa h(t). \quad (2.5.2.2)$$

La condición de que el proceso sea martingale implica que los inversionistas deben ser compensados por un retorno alto cuando la probabilidad del crash aumenta. Al sustituir la ecuación 2.5.2.2 en la ecuación 2.5.2.1 se obtiene

$$dS = \kappa h(t)S(t) dt - \kappa p(t) dj.$$

A partir de este punto es posible modelar el precio en el instante anterior al crash, haciendo $j = 0$ se obtiene

$$\frac{dS}{dt} = \kappa h(t)S(t),$$

cuya solución es

$$\log p(t) = \log p(t_0) - \frac{\kappa B}{\beta} (t_c - t)^\beta,$$

donde $\beta = \alpha + 1$.

En la figura 2.5.2 se muestra a modo de ejemplo una gráfica del precio respecto al tiempo conforme se aproxima al tiempo crítico, señalado por una línea vertical. Es notable que en tiempos cercanos al tiempo crítico el precio varía drásticamente. Este es el efecto que se observa en los retornos, un crash implica un retorno que supera lo predicho por la distribución en las colas.

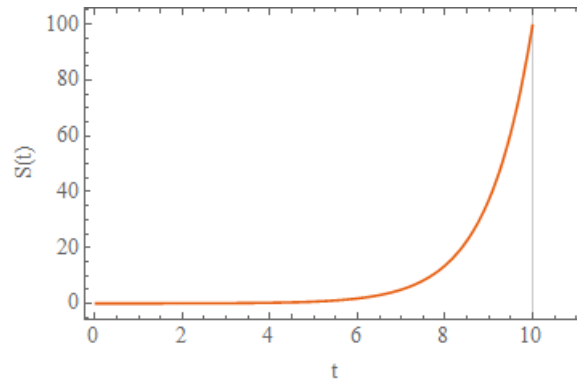


FIGURA 2.5.2: Gráfica demostrativa del precio respecto al tiempo utilizando el modelo macroscópico de eventos extremos. La red de traders es de tamaño $\xi = 100$, $\kappa = 1$, $B = 1$, $p_0 = 100$, $t_c = 10$. La elección de los parámetros fue con fines de simplicidad.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Trends

Al analizar las series de tiempo financieras es muy común observar periodos de tiempo en los que el precio tiene una variación con una tendencia de crecimiento o decrecimiento. A estas tendencias se le denominan *trends*, y estudiar sus propiedades suele ser el objetivo del análisis técnico. Para este trabajo se desea estudiar las propiedades estadísticas de los trends. Así como de los precios se construye la serie de tiempo de los retornos se puede construir una serie de tiempo de las diferencias logarítmicas entre los precios de inicio y fin de cada uno de los trends y así analizar sus propiedades estadísticas. La ventaja de estudiar los trends es que nos proporcionan una medida de los retornos que no depende del parámetro de escala, más bien éste se ajusta naturalmente. Una propiedad deseable que se espera tener de esta nueva observable es que además de ser estacionaria, sea posible reproducir un conjunto de propiedades estadísticas similares a los hechos estilizados.

Dado un tiempo t se identifican los tiempos t_i donde inicia el trend que ocurre en el tiempo t , y t_f donde termina el trend tales que $t_i \leq t < t_f$. Entonces los retornos de los trends están definidos como

$$R_T(t) = \log Y(t_f) - \log Y(t_i).$$

Por ejemplo, para la serie de precios $Y = \{5, 8, 9, 1, 4, 9, 5, 6\}$ los retornos de los trends son $R_T = \{\log(9) - \log(5), \log(1) - \log(9), \log(9) - \log(1), \log(5) - \log(9)\}$.

Esta forma de describir los retornos se puede ver como un re-escalamiento en magnitud y temporal de los retornos en la que el signo de los retornos del trend lleva la

información de la dirección del trend, siendo positivo si el trend crece y negativo si decrece (figura 3.1.1).

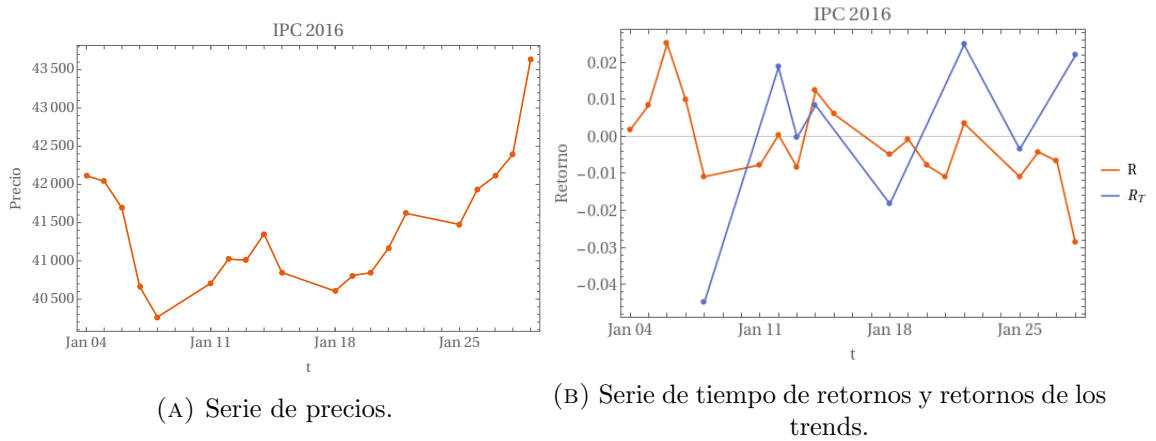


FIGURA 3.1.1: Comparación entre los retornos y retornos de los trends. Los retornos de los trends se pueden ver como un cambio de escala en la que el signo lleva la información de la dirección del trend.

Esta definición de los retornos permite definir la volatilidad de una forma más natural, ya que aprovechando las tendencias se puede reemplazar la observable

$$V(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t'=t}^{t+\Delta t} |R(t', \Delta t)|$$

por

$$V(t) = |R_T(t)|$$

con la ventaja de que así no es necesario definir una escala de tiempo arbitraria para medir la volatilidad. La manera en que se discutirá si la medida de volatilidad que se acaba de proponer es útil es verificando que esta medida es capaz de reportar los eventos donde existe más agitación en el mercado y que además se observa el agrupamiento de la volatilidad.

3.2. Velocidades de los trends

Los estudios empíricos han encontrado que los trends tienen duraciones diferentes con una distribución geométrica [4], como en la figura 3.2.1. Si se grafica en una gráfica el retornos de los trends respecto a la duración del trend se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3.2.2.

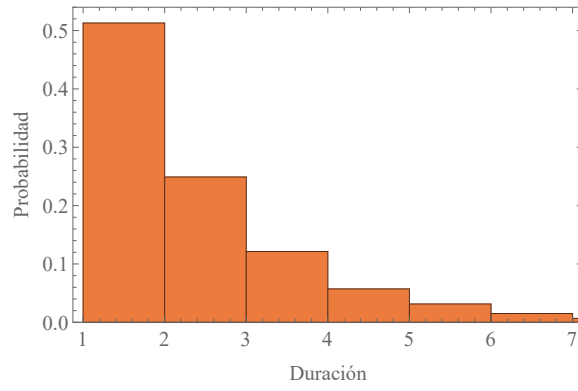


FIGURA 3.2.1: Probabilidad de duración de los trends del índice S&P 500 en el periodo del 1 de enero de 2005 a 26 de julio de 2016.

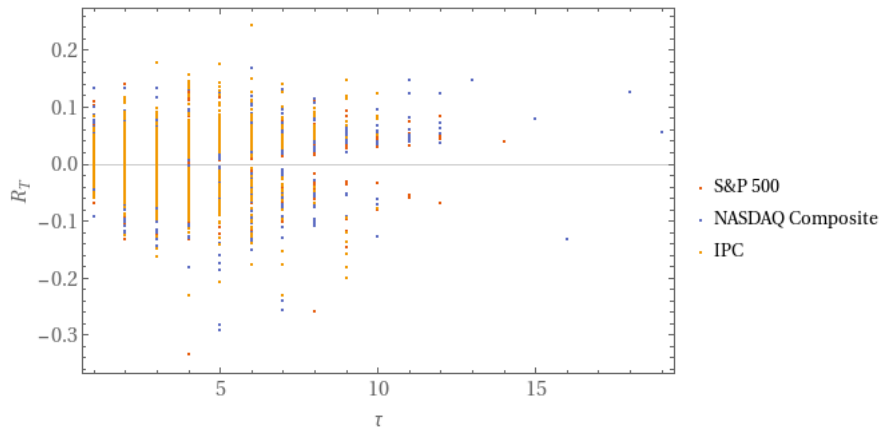


FIGURA 3.2.2: Valor de R_T respecto a la duración del trend. Se observa que la acumulación de los valores de R_T no es la misma para todas las duraciones del trend τ .

Esto nos da una idea de cómo se distribuyen los retornos en relación con la duración del trend, siendo los trends más cortos los más propensos a tener variaciones pequeñas, y los trends más largos más propensos a tener variaciones grandes.

Aprovechando esto se pueden utilizar las duraciones de los trends y su variación para caracterizar su velocidad. Sea τ la duración del trend que ocurre en el tiempo t , entonces la velocidad del trend se define como

$$VR_T(t) = \frac{\log Y(t_f) - \log Y(t_i)}{\tau}.$$

De las velocidades de los trends se obtiene información útil acerca de qué tan rápido varían las tendencias en relación con su duración.

3.3. Construcción de la muestra

Se construyó la muestra usando los valores de cierre diarios de los índices Promedio Industrial Dow Jones (DJI), NASDAQ (IXIC) e Índice de Precios y Cotizaciones (MXX) obtenidos del servicio *Yahoo Finance* de los periodos del 4 de enero 1960 al 21 de octubre 2016, del 5 de febrero 1971 a 21 de octubre 2016, y del 8 de noviembre 1991 al 21 de octubre 2016 respectivamente.

Con la definición de los retornos como

$$R_T(t) = \log Y(t) - \log Y(t_i)$$

y las velocidades de los trends como

$$VR_T(t) = \frac{\log Y(t_f) - \log Y(t_i)}{\tau}$$

se construye una muestra de $R_T(t)$ Y $VR_T(t)$ con tamaños 6833, 5072, 2873 respectivamente. Esta muestra fue utilizada para buscar si existen correlaciones lineales, agrupamiento de la volatilidad y la búsqueda de eventos extremos. Para los análisis de simetría y de colas pesadas se utilizó una muestra adicional de los índices Footsie 100, Hang Seng, NYSE Composite, CAC 40, DAX, MERCAL, FTSE Malasya y TA-100, obtenidas en los periodos del 8 de noviembre 1991 al 21 de octubre 2016, 8 de noviembre 1991 al 21 de octubre 2016, 8 de noviembre 1991 al 21 de octubre 2016, 8 de noviembre 1991 al 21 de octubre 2016, 8 de octubre 1996 al 21 de octubre 2016, 3 de diciembre 1993 al 21 de octubre 2016 y 8 de octubre 1992 al 21 de octubre 2016, generando muestras de los retornos R_T y VR_T de tamaño 3209, 3132, 3160, 3261, 3211, 2351, 2571, 4095.

3.4. Test de simetría

Se puede describir a la simetría como la *correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo* (RAE). Bajo esta definición nos podemos imaginar que dado un conjunto de datos, si queremos averiguar si su distribución es simétrica nos deberíamos fijar en que exista una correspondencia entre la forma de dos secciones de la distribución. Una forma burda de realizar esto es escoger un punto de simetría c y partir la distribución, y observar si son similares. Por ejemplo, si se grafican los retornos de los trends R_T partiendo los datos desde un punto de simetría $c = 0$ se obtienen las gráficas que se muestran en la figura [3.4.1](#).

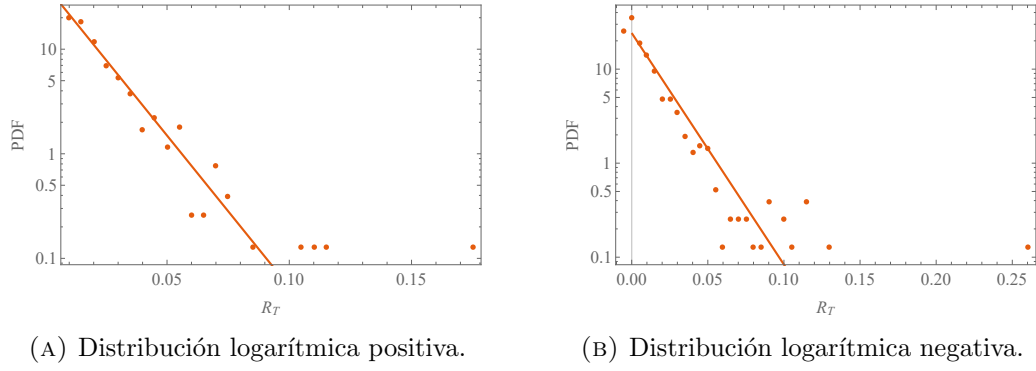


FIGURA 3.4.1: Distribuciones cortadas de los retornos de los trends R_T escogiendo un punto de simetría $c = 0$.

A estas gráficas se les podría realizar un ajuste lineal y con esto se podría verificar que si el ajuste es similar entonces la distribución es simétrica. Pero el problema de realizar este procedimiento es que es demasiado dependiente de la elección de la anchura de las particiones de la distribución y del número de datos. Para solucionar ésto se propondrá una manera alternativa de verificar la simetría de una muestra.

Para el propósito de analizar las distribuciones de los trends se utilizará el test de simetría desarrollado en [3] por Coronel-Brizio et al. Este test se basa en la estadística T_n desarrollada por Einmahl y McKeague. Para esta prueba la hipótesis nula es que existe un punto de simetría alrededor de cero, esto es $H_0 : F(0 - x) = 1 - F(x - 0)$, para todo $x > 0$ de la muestra X_1, \dots, X_n de variables independientes e idénticamente distribuidas con la función de distribución acumulada F . A partir de esto se deriva la estadística T_n dada por

$$T_n = -2 \int_0^\infty \log H(x) dG_n(x) = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \log H(|X_i|)$$

donde G_n denota la función de distribución empírica de $|X_i|$ y

$$\log H(x) = nF_n(-x) \log \frac{F_n(-x) + 1 - F_n(x-)}{2F_n(-x)} + n(1 - F_n(x-)) \log \frac{F_n(-x) + 1 - F_n(x-)}{2(1 - F_n(x-))}.$$

En esta notación $F_n(-x) = F_n(0 - x)$ y $F_n(x-) = F_n(x - 0)$. Esto es para indicar que la estadística T_n está probando la hipótesis de simetría alrededor de cero. La distribución límite converge débilmente a

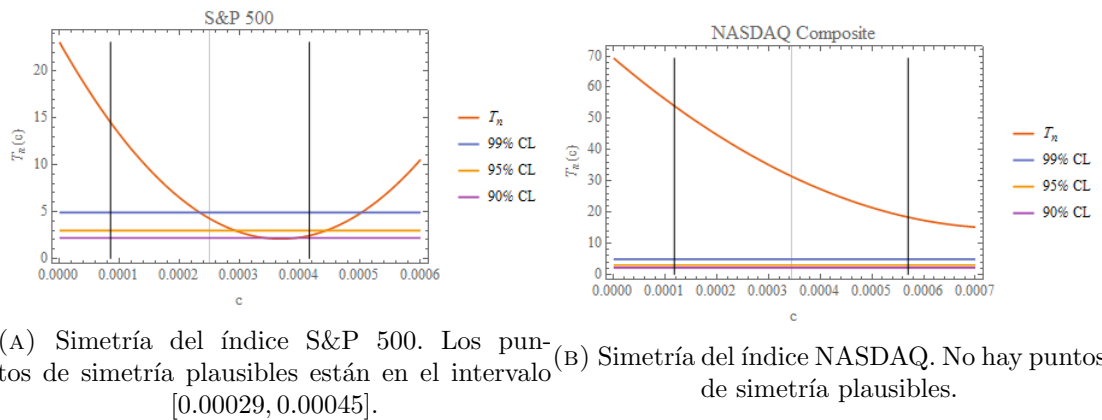
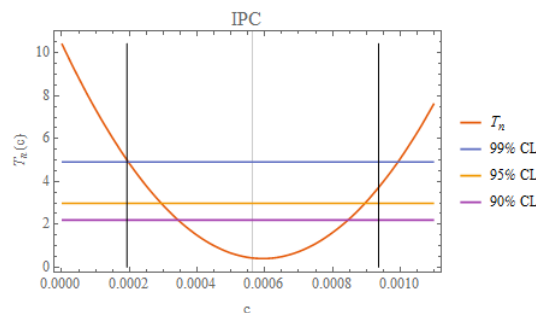
$$T_n \rightarrow \int_0^1 \frac{W(t)^2}{t} dt,$$

donde W denota un proceso estándar de Wiener. A partir de esto se pueden obtener los intervalos de confianza que se muestran en la tabla 3.1.

| Probabilidad acumulativa | Punto porcentual |
|--------------------------|------------------|
| 0.5 | 0.659 |
| 0.75 | 1.258 |
| 0.85 | 1.768 |
| 0.90 | 2.200 |
| 0.95 | 2.982 |
| 0.975 | 3.797 |
| 0.990 | 4.908 |
| 0.995 | 5.767 |
| 0.999 | 7.803 |

TABLA 3.1: Puntos asintóticos porcentuales de T_n .

Para probar la hipótesis de simetría sobre un punto c se usarán los retornos desplazados, esto es $r(c) = r - c$. A partir de esto se pueden establecer intervalos de confianza para los cuales es plausible un punto de simetría c . En las figuras 3.4.2 y 3.4.3 se muestra el cálculo de los puntos de simetría plausibles para la serie de tiempo de los retornos R de los mercados S&P 500, NASDAQ e IPC. Se observa que en ninguno de los casos el punto de simetría plausible está alrededor de cero, de manera que se puede concluir que las distribuciones no son simétricas alrededor de cero.

FIGURA 3.4.2: Gráfica de la estadística T_n de los retornos R .FIGURA 3.4.3: Gráfica de la estadística T_n de los retornos de los trends R_T del índice IPC. Esta gráfica nos dice que hay un punto de simetría plausible en el intervalo $[0.00029, 0.0009]$ con un nivel de significancia de 0.05.

3.5. Selección de puntos de corte para las colas de las distribuciones

A la hora de seleccionar la parte de la distribución que corresponde a las colas surge el problema de que no es claro dónde posicionar el punto a partir del cual se va a realizar el corte, lo cual descarta la posibilidad de hacer una selección *manual*. Para que el punto de corte sea reproducible es necesario seleccionarlo a partir de un método capaz de identificar el punto óptimo de corte.

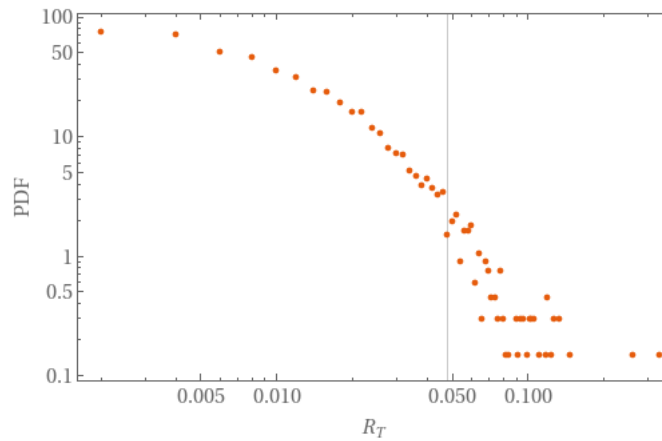


FIGURA 3.5.1: Distribución de los retornos R_T para el índice S&P 500. El punto de corte que se obtiene a partir del test de Anderson-Darling es $\gamma = 0.04805$.

El método que se utilizará se basa en la estadística de Anderson-Darling, y ya ha sido usado [2] por Coronel-Brizio y Hernández-Montoya para seleccionar los puntos de corte para las distribuciones de los retornos R de los índices IPC y DJIA.

Para realizar la prueba se asumirá que existe un punto de corte γ a partir del cual los retornos siguen una distribución de Pareto-Levy

$$F_0(s) = 1 - \left(\frac{\gamma}{s}\right)^\alpha,$$

donde $\alpha > 0$, y $s > \gamma$. La idea es hacer la prueba de Anderson-Darling para diferentes valores de γ (lo cual implica que también se hará una selección de valores de los retornos tal que $R_t \geq \gamma$). El valor de γ que de un resultado de la estadística de Anderson-Darling más pequeño (mejor ajuste a F_0) es el que corresponde al punto de corte óptimo.

El procedimiento para la selección del punto de corte es el siguiente. Sean $r_{(1)} \leq r_{(1)} \leq \dots \leq r_{(n(\gamma))}$ los valores observados, donde $s(t_i) \geq \gamma$, $i = 1, \dots, n(\gamma)$, y $n(\gamma)$ denota el número de observaciones restantes. La fórmula que nos da el valor de la estadística de Anderson-Darling para F_0 es

$$A^2(\gamma) = -n(\gamma) - \frac{1}{n(\gamma)} \sum_{i=1}^{n(\gamma)} (2i-1) [\log z_{(i)} + \log (1 - z_{(n-i+1)})],$$

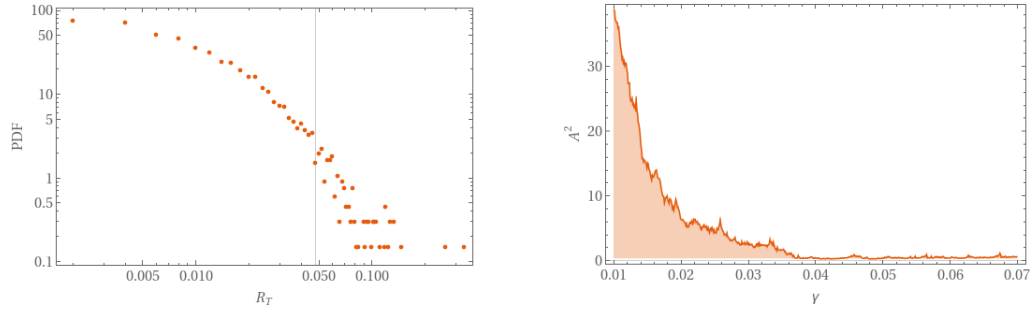
donde

$$z_{(i)} = 1 - \left(\frac{\gamma}{s_{(i)}} \right)^{\alpha(\gamma)}$$

y

$$\alpha(\gamma) = \left[\frac{1}{n(\gamma)} \sum_{i=1}^{n(\gamma)} \log \left(\frac{s_i}{\gamma} \right) \right]^{-1}.$$

En la figura 3.5.2 se muestra una comparación entre la distribución de los retornos R_T del índice S&P 500 y el cálculo de la estadística de Anderson-Darling donde se encuentra que el punto de corte está en $\gamma = 0.04805$.



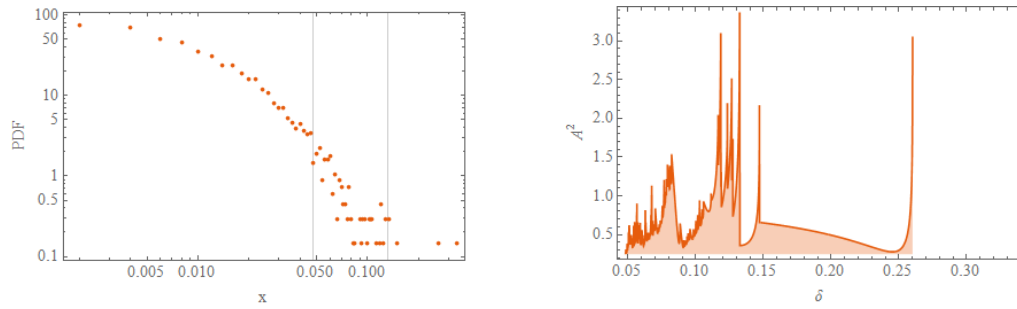
(A) Distribución de los retornos R_T . La línea vertical representa el punto de corte. (B) Resultado de la estadística de Anderson-Darling para diferentes valores de γ .

FIGURA 3.5.2: Comparación entre la gráfica de la distribución de los retornos del índice S&P 500 y sus respectivos cálculos de la estadística de Anderson-Darling para diferentes valores de γ . Se encuentra que el mínimo que representa el punto de corte está en $\gamma = 0.04805$.

Este procedimiento si bien funciona para seleccionar las colas de las distribuciones, se puede extender para seleccionar también de una forma reproducible los valores extremos. Esto es particularmente útil porque a la hora de seleccionar valores extremos en las distribuciones de ley de potencias no es posible utilizar medidas de dispersión para exponentes menores a 3, y esto es precisamente lo que se obtiene en algunos casos al ajustar los datos de los retornos de los trends. Para clarificar se denotará que el punto de corte que se acaba de describir, esto es, el que corresponde al inicio de la distribución de ley de potencias se denotará por γ_L , y el punto de corte que corresponde al fin de la ley de potencias se denotará por γ_R .

El procedimiento que se propone para seleccionar el punto de corte derecho a partir del cual se consideran los valores como extremos funciona de manera similar, pero se

calculan los valores de A^2 con valores de γ que van desde el valor más extremo hasta el valor de corte izquierdo γ_L .



(A) Distribución de los retornos R_T . Las líneas
verticales representan los puntos de corte. (B) Resultado de la estadística de Anderson-Darling para diferentes valores de γ .

FIGURA 3.5.3: Comparación entre la gráfica de la distribución de los retornos del índice S&P 500 y sus respectivos cálculos de la estadística de Anderson-Darling para diferentes valores de γ . Se encuentra que el máximo que representa el punto de corte derecho está en $\gamma_R = 0.132439$.

Capítulo 4

Resultados

En esta sección se reportarán los resultados de las pruebas aplicadas a las series de tiempo generadas por los retornos de los trends R_T y las velocidades de los retornos de los trends VR_T utilizando una muestra de precios de los índices S&P 500, NASDAQ e IPC.

4.1. Series de tiempo de los retornos R_T y VR_T

Se generaron las series de tiempo de los retornos R_T y VR_T a partir de la metodología detallada en la sección 3.3.

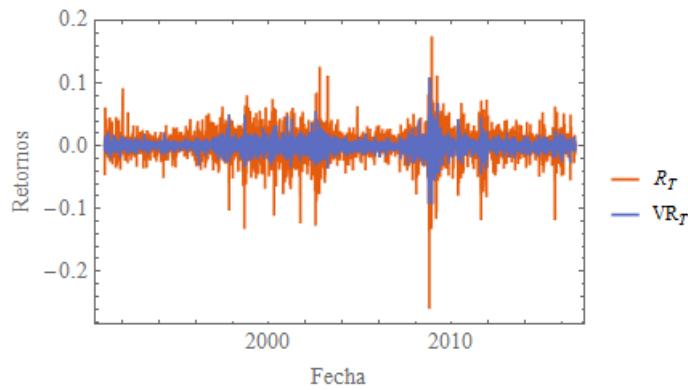


FIGURA 4.1.1: Series de tiempo de los retornos R_T y VR_T del índice S&P 500.

4.1.1. Estacionariedad

Los retornos diarios R , los cuales son los más comúnmente utilizados, no son perfectamente estacionarios, más bien son débilmente estacionarios. Esto también aplica aunque

con un grado mayor de estacionariedad para el caso de los retornos de los trends R_T y las velocidades de los retornos de los trends VR_T . Para verificar que también estos cumplen la propiedad de estacionariedad se realizó la prueba de Dickey-Fuller sobre las series de tiempo generadas. Los resultados se muestran en las figuras 4.1.2 y 4.1.3, donde se observa que las series de tiempo de R_T y VR_T muestran un mayor grado de estacionariedad que los retornos simples R .

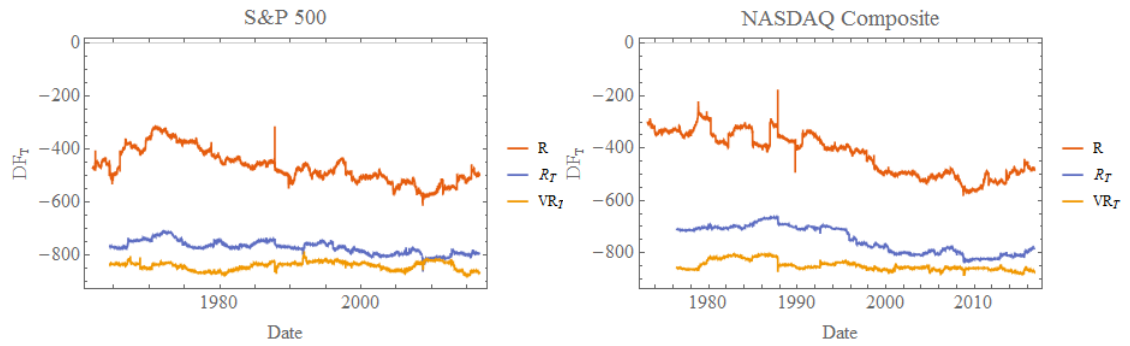


FIGURA 4.1.2: Resultados de la estadística de Dickey-Fuller para R , R_T , y VR_T .

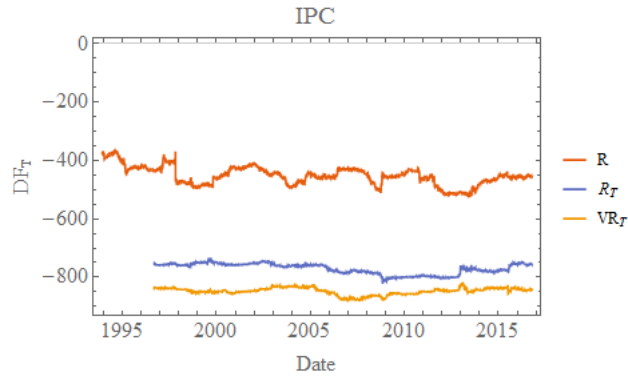
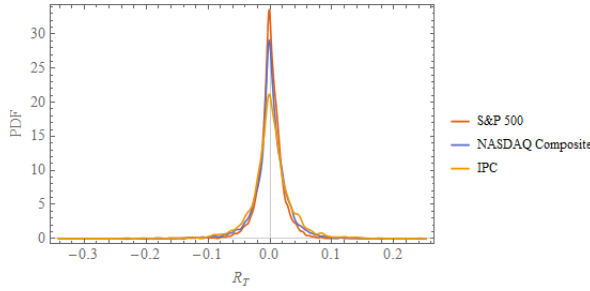


FIGURA 4.1.3: Resultados de la estadística de Dickey-Fuller para R , R_T , y VR_T .

4.1.2. Distribución

En las figuras 4.1.4 y 4.1.5 se muestran las distribuciones de las series de tiempo de R_T y VR_T . Es notable que la forma de la distribución de R_T no varía demasiado con respecto a los retornos simples R , mientras que para las velocidades de los retornos de los trends VR_T la forma de la distribución cambia por completo, adquiere forma bimodal y al mismo tiempo se puede observar que el parámetro de skewness adquiere una forma más simétrica.

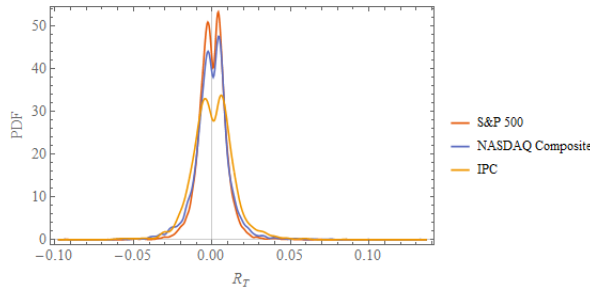


(A) Distribuciones.

| | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC |
|----------|-------------|------------------|------------|
| μ | 0.000523393 | 0.00078061 | 0.00122767 |
| σ | 0.021545 | 0.0290565 | 0.0346069 |
| Skewness | -0.981303 | -0.918156 | -0.240663 |
| Kurtosis | 19.85 | 13.5653 | 9.56447 |

(B) Tabla de propiedades.

FIGURA 4.1.4: Distribuciones y propiedades de las series de tiempo de los retornos VR_T .



(A) Distribuciones.

| | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC |
|----------|-------------|------------------|-------------|
| μ | 0.000137079 | 0.0000343074 | 0.000487703 |
| σ | 0.0094718 | 0.0117839 | 0.0132226 |
| Skewness | 0.0828032 | 0.554302 | 0.159326 |
| Kurtosis | 15.5364 | 12.6386 | 5.78328 |

(B) Tabla de propiedades.

FIGURA 4.1.5: Distribuciones y propiedades de las series de tiempo de los retornos VR_T .

4.2. Hechos estilizados

1. Correlaciones lineales

Debido a la forma de construcción de los retornos de los trends R_T y velocidades de los retornos de los trends VR_T se introducen artificialmente correlaciones lineales en la muestra. Esto es debido a que los elementos de la muestra necesariamente cambian de signo en cada iteración, pero por otro lado esto favorece estudiar la simetría de los mercados.

2. Agrupamiento de la volatilidad

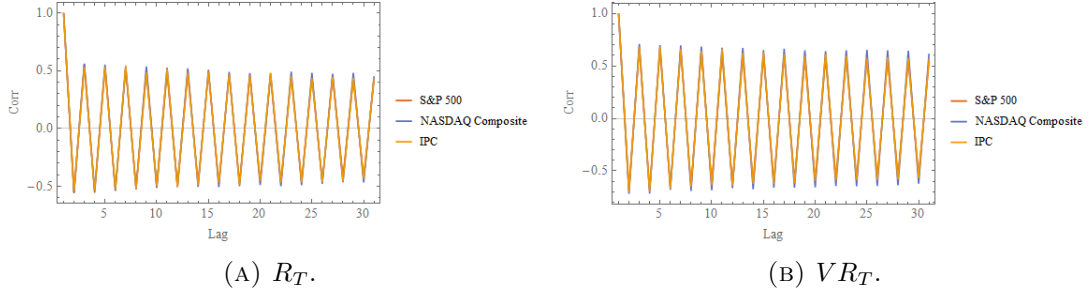


FIGURA 4.2.1: Autocorrelación de las muestras de los retornos de los trends R_T y VR_T .

A diferencia de las correlaciones lineales, la construcción de las observables no afecta a los resultados de las mediciones de agrupamiento de la volatilidad, la cual como se puede apreciar en la figura 4.2.2, se sigue observando para R_T y VR_T . Es notable sin embargo que las velocidades de los retornos de los trends presentan una tasa mayor de agrupamiento de la volatilidad.

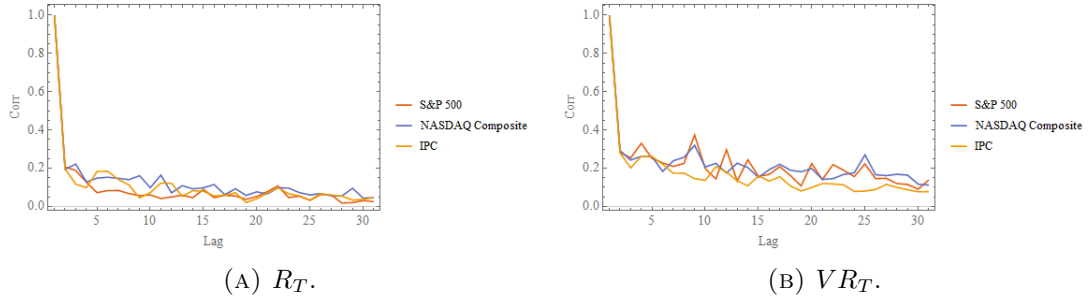
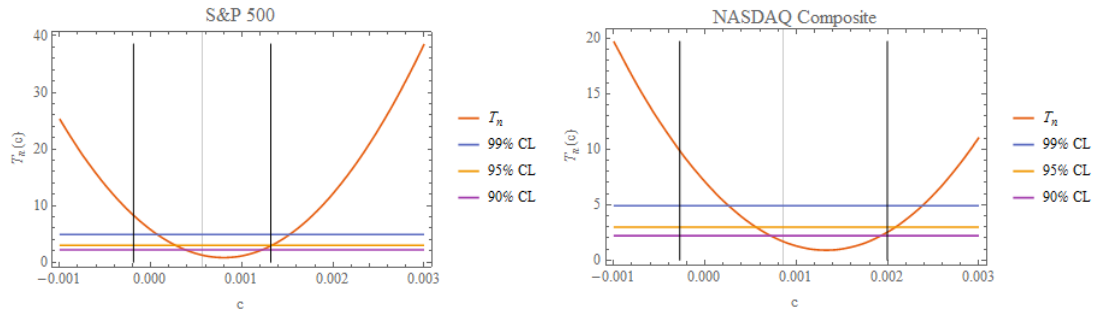


FIGURA 4.2.2: Autocorrelación de las muestras de los retornos cuadráticos de los trends R_T , y VR_T (agrupamiento de la volatilidad).

3. Pruebas de simetría

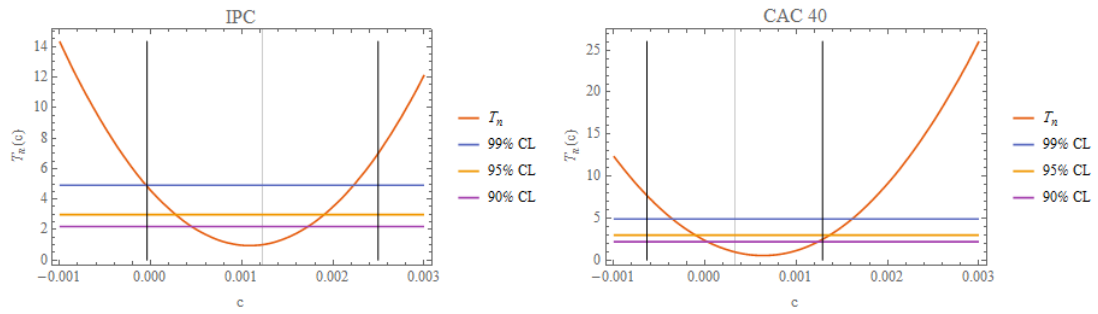
Se aplicó la prueba de simetría descrita en la sección 3.4 a las muestras de los retornos de los trends R_T y las velocidades de los retornos de los trends VR_T . Los resultados de las pruebas se muestran en las figuras 4.2.3 y 4.2.4 para R_T y 4.2.5 y 4.2.4 para VR_T . En las tablas que se muestran en las figuras 4.2.7, 4.2.8 y 4.2.9 se listan los resultados del test de simetría utilizando todos los mercados de los cuales se generó la muestra de los retornos R_T y VR_T .

Se observa que los resultados de R_T por lo general no son simétricos, mientras que para las velocidades VR_T en la mayor parte de los casos existe un punto de simetría plausible alrededor de cero. Esto contrasta con los resultados de la prueba para los retornos simples R en los cuales ninguna muestra genera una distribución simétrica.



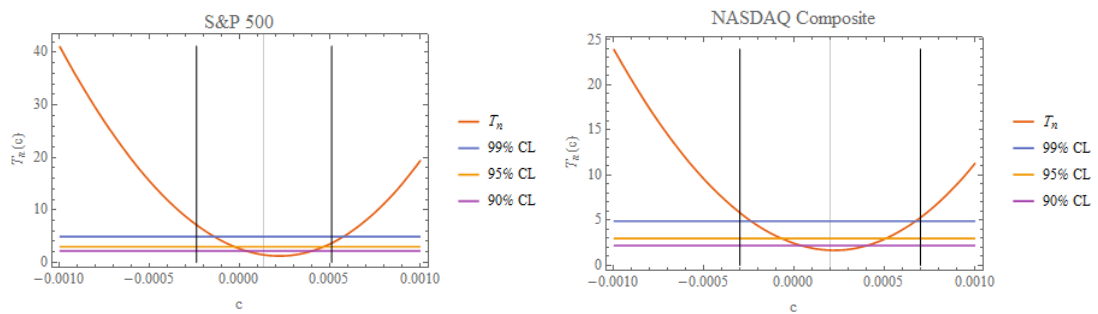
(A) Simetría del índice S&P 500. No es simétrico alrededor de cero. (B) Simetría del índice NASDAQ. No es simétrico alrededor de cero.

FIGURA 4.2.3: Análisis de simetría de los retornos de los trends. Parte 1.



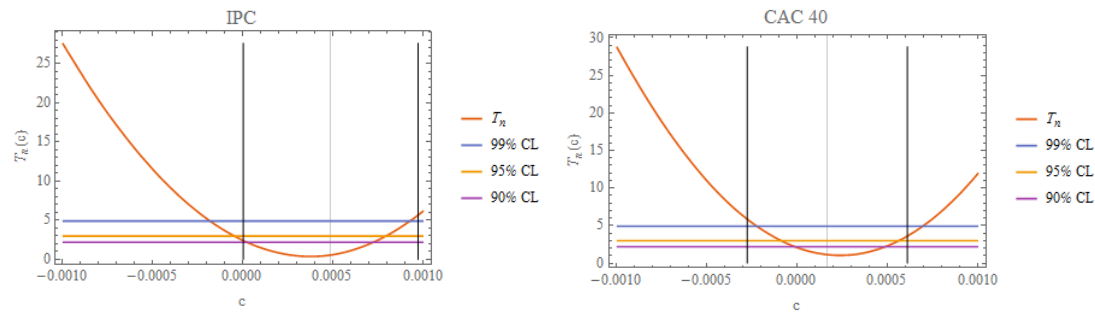
(A) Simetría del índice IPC. No es simétrico alrededor de cero. (B) Simetría del índice CAC40. Existe un punto de simetría plausible alrededor de cero.

FIGURA 4.2.4: Análisis de simetría de los retornos de los trends. Parte 2. Se observa que por lo general no son simétricos.



(A) Simetría del índice S&P 500. No es simétrico alrededor de cero. (B) Simetría del índice NASDAQ. Existe un punto de simetría plausible alrededor de cero.

FIGURA 4.2.5: Análisis de simetría de las velocidades de los retornos de los trends. Parte 1.



(A) Simetría del índice IPC. Existe un punto de(B) Simetría del índice CAC40. Existe un punto
simetría plausible alrededor de cero. de plausible alrededor de cero.

FIGURA 4.2.6: Análisis de simetría de las velocidades de los retornos de los trends.
Parte 2. Se observa que por lo general son simétricos.

| Mercado | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC | Footsie 100 | Hang Seng | NYSE Composite | CAC 40 | DAX | MERVAL | FTSE Malasya | TA-100 |
|-----------------|------------|------------------|------------|-------------|------------|----------------|------------|------------|------------|--------------|------------|
| R | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico |
| R _T | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Asimétrico |
| VR _T | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico |

FIGURA 4.2.7: Resultados de la prueba de simetría utilizando un intervalo de confianza
de 90 %.

| Mercado | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC | Footsie 100 | Hang Seng | NYSE Composite | CAC 40 | DAX | MERVAL | FTSE Malasya | TA-100 |
|-----------------|------------|------------------|------------|-------------|------------|----------------|------------|------------|------------|--------------|------------|
| R | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico |
| R _T | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Asimétrico |
| VR _T | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico |

FIGURA 4.2.8: Resultados de la prueba de simetría utilizando un intervalo de confianza
de 95 %.

| Mercado | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC | Footsie 100 | Hang Seng | NYSE Composite | CAC 40 | DAX | MERVAL | FTSE Malasya | TA-100 |
|-----------------|------------|------------------|------------|-------------|------------|----------------|------------|------------|------------|--------------|------------|
| R | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico | Asimétrico |
| R _T | Asimétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Asimétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico |
| VR _T | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Simétrico | Asimétrico |

FIGURA 4.2.9: Resultados de la prueba de simetría utilizando un intervalo de confianza
de 99 %.

4. Colas pesadas

En los retornos simples R se observan colas pesadas, y se procedió a investigar si en efecto los retornos de los trends y sus velocidades poseen el mismo tipo de comportamiento en las colas. Para eso se hizo una prueba de bondad de ajuste seleccionando los puntos que pertenecen a las colas por medio de la prueba de Anderson-Darling que se describió en la sección 3.5. Los resultados se muestran en las figuras 4.2.10, 4.2.11 y 4.2.12 para los retornos de los trends R_T y las figuras 4.2.13, 4.2.14 y 4.2.15 para las velocidades de los retornos de los trends VR_T .

En las tablas que se muestran en las figuras 4.2.16 y 4.2.17 se listan los p-valores utilizando todos los mercados de los cuales se generó la muestra de los retornos R_T y VR_T .

En los retornos de los trends R_T por lo general al menos una de sus colas es pesada, teniendo un p-valor mayor a 0.9, lo que coincide con lo que se observa en los retornos simples, aunque es notable que los retornos simples R tienen mayor tendencia a presentar al menos una cola pesada, cosa que no sucede siempre en los retornos de los trends R_T . Para las velocidades no se encontró evidencia suficiente para afirmar que existen colas pesadas. Parte del problema con las velocidades es que si bien la forma de la distribución de los retornos de los trends no varía demasiado con respecto a los retornos simples, la distribución de las velocidades de los retornos de los trends cambia por completo, haciendo inválida la prueba de selección de puntos de corte, que asume que las colas decaen en forma de ley de potencias.

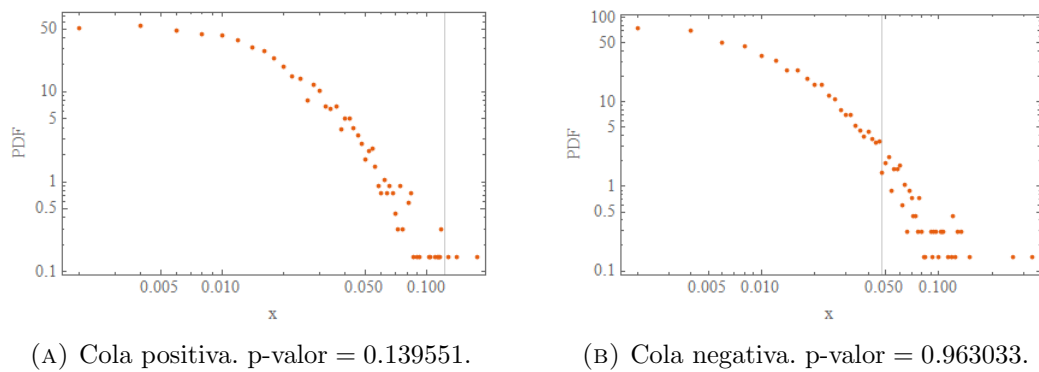


FIGURA 4.2.10: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para los retornos de los trends R_T del índice S&P 500. La línea vertical representa el punto de corte.

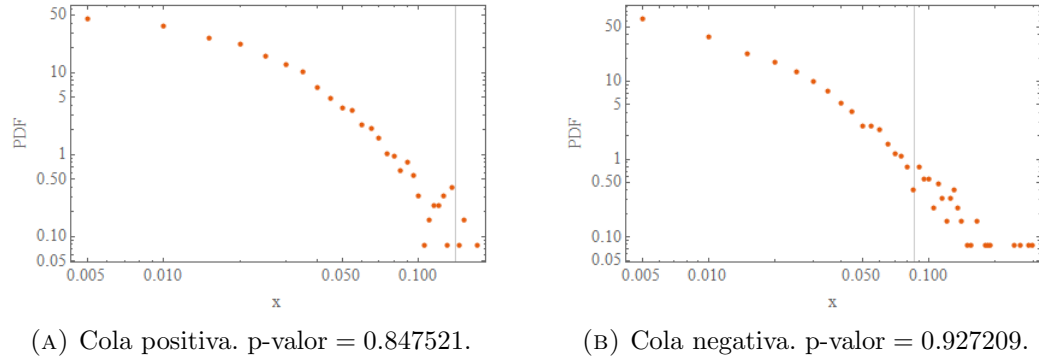


FIGURA 4.2.11: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para los retornos de los trends R_T del índice NASDAQ. La línea vertical representa el punto de corte.

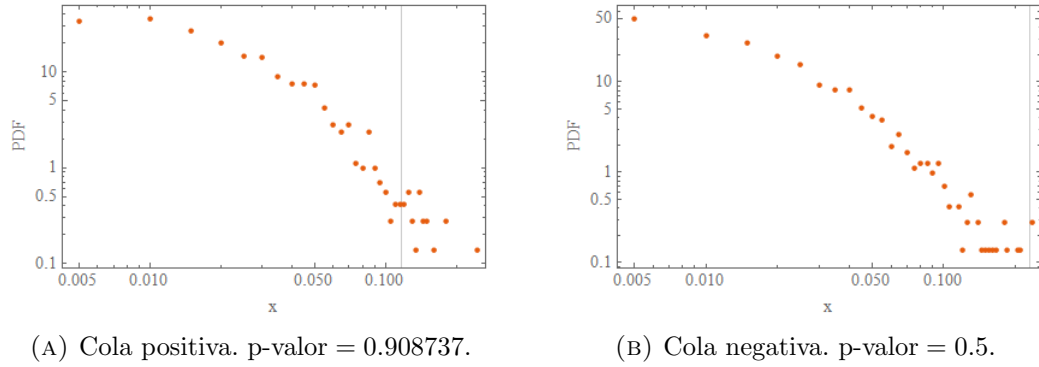


FIGURA 4.2.12: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para los retornos de los trends R_T del índice IPC. La línea vertical representa el punto de corte.

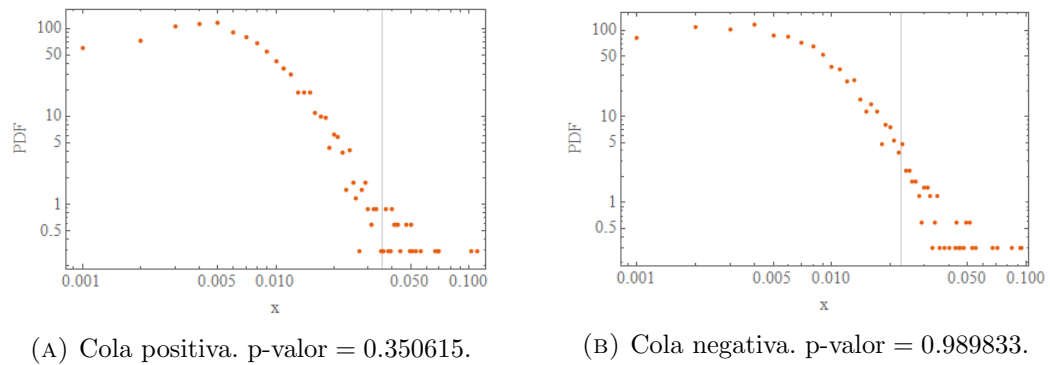


FIGURA 4.2.13: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para las velocidades de retornos de los trends VR_T del índice S&P 500. La línea vertical representa el punto de corte.

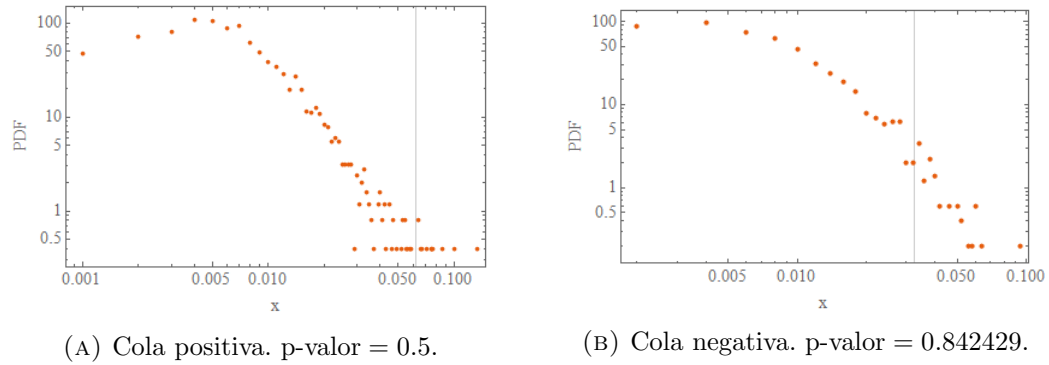


FIGURA 4.2.14: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para las velocidades de retornos de los trends VR_T del índice NASDAQ. La línea vertical representa el punto de corte.

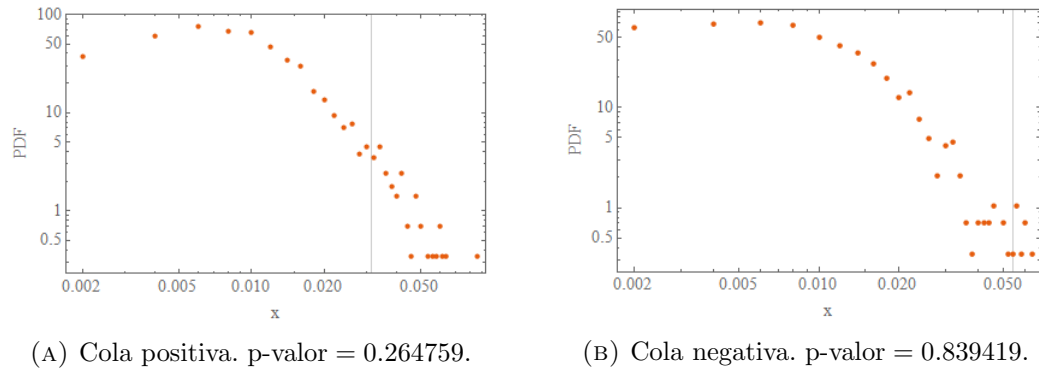


FIGURA 4.2.15: Ajuste de las colas a distribución de Pareto para las velocidades de retornos de los trends VR_T del índice IPC. La línea vertical representa el punto de corte.

| Mercado | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC | Footsie 100 | Hang Seng | NYSE Composite | CAC 40 | DAX | MERVAL | FTSE Malasya | TA-100 |
|---------------|----------|------------------|--------|-------------|-----------|----------------|----------|----------|----------|--------------|----------|
| Cola positiva | 0.777778 | 0.90625 | 0.8446 | 0.5 | 0.995947 | 0.988733 | 0.883428 | 0.708565 | 0.987295 | 0.999217 | 0.734984 |
| Cola negativa | 0.963033 | 0.927209 | 0.5 | 0.777778 | 0.989724 | 0.909719 | 0.998116 | 0.975938 | 0.837886 | 0.497492 | 0.853284 |

FIGURA 4.2.16: p-valores de ajuste de ley de potencias para las colas de las distribuciones de los retornos de los trends R_T de diferentes índices. Se marcan de verde los p-valores mayores a 0.9.

| Mercado | S&P 500 | NASDAQ Composite | IPC | Footsie 100 | Hang Seng | NYSE Composite | CAC 40 | DAX | MERVAL | FTSE Malasya | TA-100 |
|---------------|----------|------------------|----------|-------------|-----------|----------------|----------|----------|---------|--------------|----------|
| Cola positiva | 0.980446 | 0.777778 | 0.996718 | 0.777778 | 0.5 | 0.985311 | 0.90625 | 0.777778 | 0.5 | 0.995964 | 0.996445 |
| Cola negativa | 0.95502 | 0.9616 | 0.983077 | 0.99818 | 0.991318 | 0.999983 | 0.777778 | 0.938346 | 0.99388 | 0.978183 | 0.930945 |

FIGURA 4.2.17: p-valores de ajuste de ley de potencias para las colas de las distribuciones de los retornos simples R de diferentes índices. Se marcan de verde los p-valores mayores a 0.9.

5. Eventos extremos

Dado que los retornos de los trends R_T sí presentan colas pesadas, se procedió a seleccionar los puntos extremos de las distribuciones tal como se detalló en la sección 3.5. En la figura 4.2.18 se muestra un ejemplo de selección de puntos de corte, donde la línea vertical derecha representa los puntos que se considerarán como extremos.

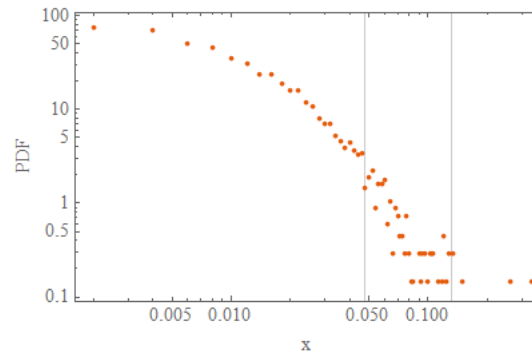


FIGURA 4.2.18: Distribución de los retornos R_T . Se seleccionaron los puntos de corte γ_L y γ_R .

Esto se hace con el objetivo de observar cuáles son los puntos que pueden corresponder a crisis económicas utilizando las observables de los retornos simples R y los retornos de los trends R_T . Esto se hizo para los índices S&P 500, NASDAQ e IPC, y los resultados se muestran en las figuras 4.2.19, 4.2.20 y 4.2.21.

De los resultados se observa que los retornos de los trends R_T son más sensibles que los retornos simples R como indicador de eventos extremos, ya que en muchos casos los retornos de los trends reportan un evento extremo en fechas donde los retornos simples no detectan nada.

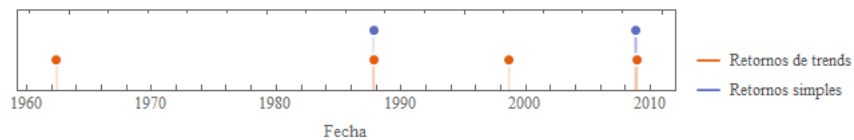


FIGURA 4.2.19: Fechas de eventos extremos utilizando diferentes definiciones de retornos para el índice S&P 500.

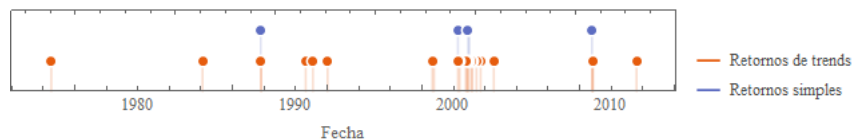


FIGURA 4.2.20: Fechas de eventos extremos utilizando diferentes definiciones de retornos para el índice NASDAQ.

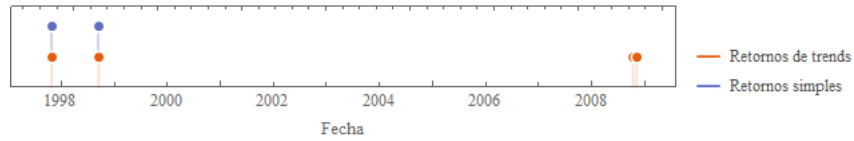


FIGURA 4.2.21: Fechas de evento extremos utilizando diferentes definiciones de retornos para el índice IPC.

4.3. Volatilidad

Por último, se realizaron las mediciones de la volatilidad tal como se definió en la sección 3.1 y se procedió a verificar si las fechas que presentan una mayor volatilidad corresponden a periodos de mayor agitación en el mercado. Para esto se asumirá que en las fechas donde ocurren los eventos extremos es donde existe mayor agitación y se procedió a señalar esas fechas en forma de líneas verticales superpuestas a los valores de la volatilidad. Esto se muestra en las figuras 4.3.1 y 4.3.2. Bajo esta medida de volatilidad los eventos extremos coinciden con los instantes donde la volatilidad reporta mayor agitación en los mercados financieros.

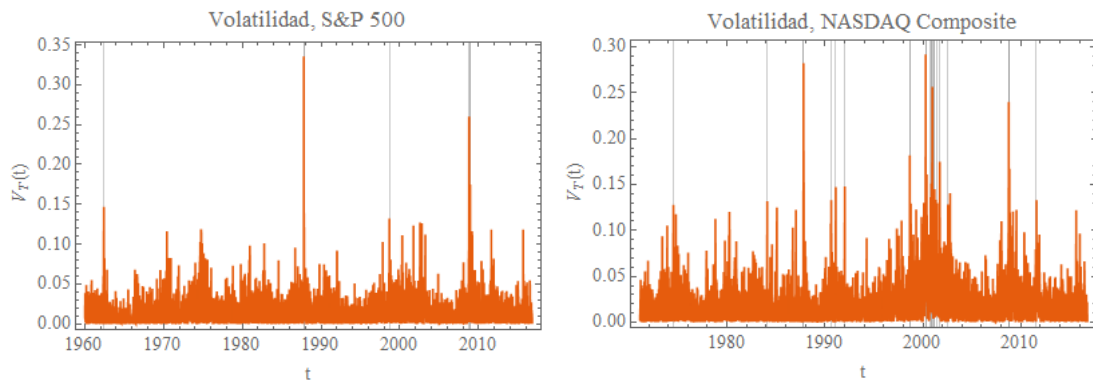


FIGURA 4.3.1: Volatilidad para diferentes mercados con sus respectivas fechas donde ocurren eventos extremos que se muestran como líneas verticales.

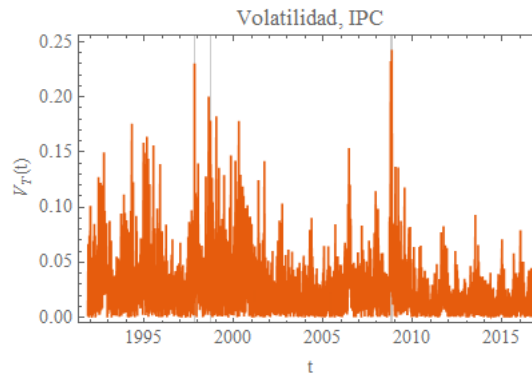


FIGURA 4.3.2: Volatilidad para diferentes mercados con sus respectivas fechas donde ocurren eventos extremos que se muestran como líneas verticales.

Capítulo 5

Conclusión

Como conclusión se dará una breve revisión acerca de lo que se propuso y se reportó.

- Primero, se hizo una descripción de cómo se definen las observables con las que se estudian los mercados financieros, y cuáles son sus propiedades estadísticas, las cuales se conocen como hechos estilizados. La forma en la que se definen las observables involucra la introducción de un parámetro de escala temporal que se debe introducir de forma manual, afectando así las mediciones, ya que al variar la escala se observan resultados diferentes.
- En este trabajo se propuso que para solventar el problema de la escala temporal arbitraria se puede aprovechar que los precios suelen seguir tendencias, y se definieron las observables de los retornos de los trends, velocidades de los retornos de los trends y volatilidad en función de los retornos de los trends de forma que se pudiera aprovechar el comportamiento de las tendencias de los precios para evitar escoger una escala temporal arbitraria.
- Bajo estas definiciones se procedió a verificar cuáles son las propiedades estadísticas de las observables, esto es, verificar si se presentan hechos estilizados. Se encontró que los retornos de los trends R_T presentan muchos de los hechos estilizados que también presentan los retornos simples R como agrupamiento de la volatilidad, asimetría de ganancia/pérdida, colas pesadas y que además a la hora de detectar eventos extremos, que son síntomas de una posible susceptibilidad del mercado a un crash, los retornos de los trends muestran un grado mayor de sensibilidad. En las velocidades de los retornos de los trends también se presenta un agrupamiento de la volatilidad, pero las distribuciones resultaron ser simétricas, esto es, que la velocidad con la que los precios suben suele ser similar a la velocidad con la que los precios bajan. Sin embargo, debido a la forma de la distribución, aparentemente no

se presentan colas pesadas lo cual la hace poco idónea para la selección de eventos extremos. Por último, se observó que bajo la medida de volatilidad que se propone, se reportan como fechas de mayor agitación del mercado las mismas en las cuales se observan eventos extremos, y además se observa el efecto de agrupamiento de la volatilidad, lo cual es una buena señal para concluir que medir la volatilidad de esta forma nos da información válida acerca del estado del mercado.

Bibliografía

- [1] Grupo bmv. <http://www.bmv.com.mx>. Accessed: 2016-01-16.
- [2] H.F. Coronel-Brizio and A.R. Hernández-Montoya. On fitting the pareto–levy distribution to stock market index data: Selecting a suitable cutoff value. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 354:437–449, aug 2005.
- [3] H.F. Coronel-Brizio, A.R. Hernández-Montoya, R. Huerta-Quintanilla, and M. Rodríguez-Achach. Assessing symmetry of financial returns series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 383(1):5–9, sep 2007.
- [4] HF Coronel-Brizio, AR Montoya, HR Olivares Sánchez, and Enrico Scalas. Analysis of short term price trends in daily stock-market index data. *arXiv preprint arXiv:1211.3060*, 2012.
- [5] Anders Johansen, Olivier Ledoit, and Didier Sornette. Crashes as critical points. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(02):219–255, 2000.
- [6] Anders Johansen and Didier Sornette. Large stock market price drawdowns are outliers. *Available at SSRN 244563*, 2000.
- [7] Yanhui Liu, Parameswaran Gopikrishnan, H Eugene Stanley, et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Physical Review E*, 60(2):1390, 1999.
- [8] John J. Murphy. *Technical Analysis of the Financial Markets*. Penguin Publishing Group, 1999.
- [9] Lodewijk Petram. *World’ s First Stock Exchange*. Columbia Univers. Press, 2014.
- [10] Arturo García Santillán. *El sistema financiero mexicano y el mercado de derivados*. Juan Carlos Martínez Coll, 2007.
- [11] Sitabhra Sinha, Arnab Chatterjee, Anirban Chakraborti, and Bikas K. Chakrabarti. *Econophysics*. Wiley VCH Verlag GmbH, 2010.

-
- [12] B. Mark Smith. *A History of the Global Stock Market: From Ancient Rome to Silicon Valley*. UNIV OF CHICAGO PR, 2004.
 - [13] D Sornette. Critical market crashes. *Physics Reports*, 378(1):1–98, apr 2003.
 - [14] Didier Sornette. Dragon-kings, black swans and the prediction of crises. *Swiss Finance Institute Research Paper*, (09-36), 2009.

Anexo

El código fuente que se utilizó para realizar los cálculos que se muestran en este trabajo se encuentra en un repositorio público que se puede acceder desde el siguiente enlace:

<https://github.com/CarlosManuelRodr/TrendAnalysisFinancialTS>

El código está implementado en el lenguaje Wolfram y se encuentra en notebooks de Mathematica. Para realizar los análisis de simetría es necesario generar un ejecutable que se debe colocar en el mismo directorio donde se encuentran los notebooks de Mathematica. El código fuente del ejecutable se encuentra en el repositorio

<https://github.com/CarlosManuelRodr/TnSymmetryStatistic>

Las instrucciones para generar un archivo ejecutable se encuentran en el archivo README del repositorio.