

# *Taller de Relatividad Numérica*

Alejandro Cruz Osorio

Instituto de Astronomía  
Universidad Nacional Autónoma de México.

Universidad Veracruzana, Jalapa, Ver. 18-20 de Noviembre del 2015



# Índice

- 1 Introducción a la relatividad numérica
- 2 Solución de la ecuación de Onda relativista
- 3 Solución de las ecuaciones de Euler relativista
- 4 Hidrodinámica y magnetohidrodinámica relativistas

"Matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move" *John Wheeler*

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

- Principio de equivalencia: La universalidad de las leyes de la física (Einstein).
- Principio de Mach: Las propiedades inerciales de un objeto están determinadas por la distribución local de materia (Ernest Mach).

El espacio y el tiempo como un ente. La métrica del espacio-tiempo describe el intervalo entre dos eventos

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 =^{Mink} -dt^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2$$

$$ds^2 > \text{Tipo espacio}$$

$$ds^2 = \text{Tipo nulo}$$

$$ds^2 < \text{Tipo tiempo}$$

# Ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0,$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right]$$

instituto de astronomía  
unam

Navigation icons: back, forward, search, and other presentation controls.

## Ecuación de las geodésicas

- $$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0,$$
- $$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right]$$

$$ds^2 =^{Mink} -dt^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2$$

$$ds^2 = \text{Tipo nulo}$$



"Matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move" *John Wheeler*

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

- Principio de equivalencia: La universalidad de las leyes de la física (Einstein).
- Principio de Mach: Las propiedades inerciales de un objeto están determinadas por la distribución local de materia (Ernest Mach).

El espacio y el tiempo como un ente. La métrica del espacio-tiempo describe el intervalo entre dos eventos

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 = {}^{Mink} -dt^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2$$

$$ds^2 > \text{Tipo espacio}$$

$$ds^2 = \text{Tipo nulo}$$

$$ds^2 < \text{Tipo tiempo}$$

Ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0,$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right]$$

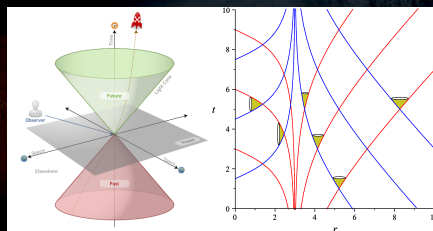


Figure: Linea mundo del espacio-tiempo

Tensor de Curvatura — — > Mide el cambio de un vector transportado paralelamente en una trayectoria cerrada

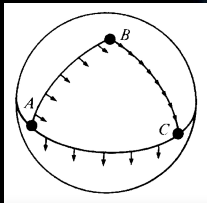


Figure: Transporte paralelo

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} + (\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu})$$

Tiene 256 componentes !!!

Tensor de Curvatura — > Mide el cambio de un vector transportado paralelamente en una trayectoria cerrada

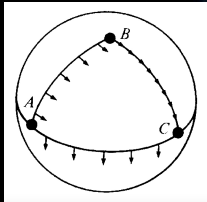


Figure: Transporte paralelo

Derivada covariante

$$v^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv \nabla_{\beta} v^{\alpha} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + v^{\mu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \quad (4)$$

$$v_{\alpha}{}_{;\beta} \equiv \nabla_{\beta} v_{\alpha} = \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - v_{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$$

Producto punto

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} v^{\alpha} u^{\beta} \Rightarrow \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (6)$$

Subir y bajar índices

$$v^{\alpha} = g^{\alpha\beta} v_{\beta}, \quad v_{\mu} = g_{\mu\nu} v^{\nu}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} \quad (7)$$

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\alpha} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} - \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} + (\Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma})$$

Tiene 256 componentes !!!

## Ecuaciones de Einstein y sus propiedades

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$R$  —> Escalar de curvatura

$T^{00}$  —> Densidad de energía

$T^{0i}$  —> Densidad de momento

$T^{ij}$  —> Flujo de momento  $i$  a través de la hipersuperficie  $j$

Esta ecuación tensorial tiene 16 componentes. El tensor de Riemann satisface la propiedad

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (11)$$

Esta propiedad se traduce en

$$G^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0 \quad T^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0$$

La conservación del tensor de energía-momento, es decir, leyes de conservación



## Ecuaciones de Einstein y sus propiedades

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$R$  —> Escalar de curvatura

$T^{00}$  —> Densidad de energía

$T^{0i}$  —> Densidad de momento

$T^{ij}$  —> Flujo de momento  $i$  a través de la hipersuperficie  $j$

Esta ecuación tensorial tiene 16 componentes. El tensor de Riemann satisface la propiedad

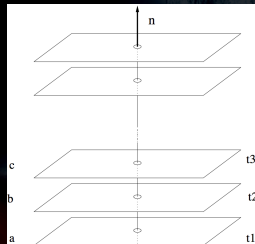
$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (11)$$

Esta propiedad se traduce en

$$G^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0 \quad T^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0$$

La conservación del tensor de energía-momento, es decir, leyes de conservación

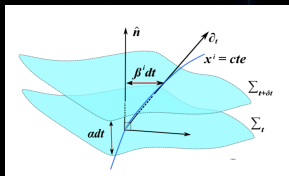
## FORMULACIÓN 1+3 DE LA RELATIVIDAD NUMÉRICA



Descomposición del espacio-tiempo en hipersuperficies de tres dimensiones  $\Sigma$  a lo largo de la coordenada temporal  $t = cte$ .

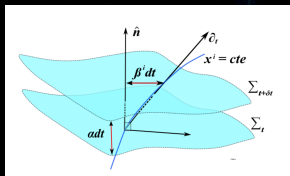
Esta técnica es conocida como la formulación ADM de la relatividad numérica. De esta manera se pueden escribir las ecuaciones de Einstein en ecuaciones de evolución que podemos resolver numéricamente

## FORMULACIÓN 1+3 DE LA RELATIVIDAD NUMÉRICA



- El lapso de tiempo propio  $d\tau = \alpha(t, x^i)dt$  entre dos hipersuperficies medido por observadores que se mueven en la dirección normal a dichas hipersuperficies, donde  $\alpha$  es conocida como la función lapso y dichos observadores son comúnmente llamados "observadores Eulerianos".
- La velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores Eulerianos y la línea de coordenada espacial  $x^i$  constante es comúnmente llamado vector desplazamiento y viene dado por la relación  $x^i_{t+\delta t} = x^i_t - \beta^i dt$ . Dicho vector es tridimensional y es tangente a la hipersuperficie  $\Sigma$ .
- La métrica  $\gamma_{ij}$  inducida por la métrica  $g_{\alpha\beta}$  sobre las hipersuperficies espaciales  $\Sigma$ . El elemento de línea asociado a ésta, mide las distancias propias dentro de dichas hipersuperficies,  $dl = \gamma_{ij}dx^i dx^j$ . Los índices  $i, j$  corren de 1 hasta 3.

## FORMULACIÓN 1+3 DE LA RELATIVIDAD NUMÉRICA



- El lapso de tiempo propio  $d\tau = \alpha(t, x^i)dt$  entre dos hipersuperficies medido por observadores que se mueven en la dirección normal a dichas hipersuperficies, donde  $\alpha$  es conocida como la función lapso y dichos observadores son comúnmente llamados “observadores Eulerianos”.
- La velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores Eulerianos y la línea de coordenada espacial  $x^i$  constante es comúnmente llamado vector desplazamiento y viene dado por la relación  $x^i_{t+\delta t} = x^i_t - \beta^i dt$ . Dicho vector es tridimensional y es tangente a la hipersuperficie  $\Sigma$ .
- La métrica  $\gamma_{ij}$  inducida por la métrica  $g_{\alpha\beta}$  sobre las hipersuperficies espaciales  $\Sigma$ . El elemento de línea asociado a ésta, mide las distancias propias dentro de dichas hipersuperficies,  $dl = \gamma_{ij}dx^i dx^j$ . Los índices  $i, j$  corren de 1 hasta 3.

- Finalmente, la curvatura extrínseca se define en términos de lo que le ocurre al vector normal  $\mathbf{n}$  al ser transportado paralelamente de un sitio a otro de la hipersuperficie. Específicamente, el tensor de curvatura extrínseca  $K_{\alpha\beta}$ , es una medida del cambio del vector normal bajo transporte paralelo.

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt),$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Donde  $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$  y  $\sqrt{g} = \alpha\sqrt{\gamma}$ . Específicamente, las componentes del vector  $\mathbf{n}$  vienen dadas por

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i), \quad n_\mu = \alpha(-1, 0).$$

Además, asociado a este observador, se puede definir una base adaptada de vectores

$$\mathbf{e}_{(\mu)} = \{\mathbf{n}, \partial_i\},$$

donde  $\partial_i$  son los tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie  $t = \text{constante}$ , que se pueden escribir como

$$(\partial_j)_\mu = (\beta_j, \gamma_{ij}).$$

Además, asociado a este observador, se puede definir una base adaptada de vectores

$$\mathbf{e}_{(\mu)} = \{\mathbf{n}, \partial_i\},$$

donde  $\partial_i$  son los tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie  $t = \text{constante}$ , que se pueden escribir como

$$(\partial_j)_\mu = (\beta_j, \gamma_{ij}).$$

Hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}},$$

$$\beta^i = \left( \frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, 0, 0 \right),$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left( 1 + \frac{2M}{r}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right).$$

Más adelante lo retomaremos!

## Ecuaciones diferenciales

Consideremos una ecuación diferencial

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, z, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y) = 0$$

el determinante de los coeficientes  $\Delta \equiv ac - b^2$

Tipo	Condición	Ejemplo
Hiperbólico	$\Delta < 0$	Ec. de Onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Paraólica	$\Delta = 0$	Ec. de Difusión $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial u}{\partial x} \right)$
Elíptica	$\Delta > 0$	Ec. de Poisson $\nabla^2 u = \rho(x, y)$

## Ecuaciones diferenciales

Consideremos una ecuación diferencial

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, z, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y) = 0$$

el determinante de los coeficientes  $\Delta \equiv ac - b^2$

Tipo	Condición	Ejemplo
Hiperbólico	$\Delta < 0$	Ec. de Onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Parabólica	$\Delta = 0$	Ec. de Difusión $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial u}{\partial x} \right)$
Elíptica	$\Delta > 0$	Ec. de Poisson $\nabla^2 u = \rho(x, y)$

- Ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.- Definen un problema de valores iniciales a la frontera (IVBP). La solución en un paso temporal depende del dato en el tiempo inicial. Las diferencias entre uno y otro son las velocidades características, que son finitas para ecs. hiperbólicas e infinitas para ecs. parabólicas. Para la solución numérica se usan Diferencias Finitas-MoL y HRSC-MoL.
- Ecuaciones elípticas.- Definen un problema de valores a la frontera (BVP), la solución depende de los valores dados en la frontera del dominio numérico, solo dependen de la coordenada espacial, como la ecuación de Poisson. Uno de los métodos más conocidos para la solución a este tipo de ecuaciones son los métodos espectrales.

## Discretización de ecuaciones y dominio numérico: Diferencias finitas

Como ejemplo tomaremos una función en 1D,  $u(x, t)$

$$\mathcal{L}(u) - f = 0$$

$\mathcal{L} \rightarrow$  Es el operador diferencial actuando sobre  $u(x, t)$ . La discretización en **Diferencias Finitas** es la más común para resolver ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales en el continuo los resolveremos en un espacio-tiempo discretizado.

## DISCRETIZACIÓN COORDENADA:

La coordenada espacial y temporal se discretizan de la siguiente manera.

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_x,$$

$$t^n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t$$

$\Delta t = t^{n+1} - t^n$  y  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  son los incrementos temporales y espaciales respectivamente, ó la distancia entre los puntos de la malla numérica.



## Discretización de ecuaciones y dominio numérico: Diferencias finitas

Como ejemplo tomaremos una función en 1D,  $u(x, t)$

$$\mathcal{L}(u) - f = 0$$

$\mathcal{L} \rightarrow$  Es el operador diferencial actuando sobre  $u(x, t)$ . La discretización en **Diferencias Finitas** es la más común para resolver ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales en el continuo los resolveremos en un espacio-tiempo discretizado.

## DISCRETIZACIÓN COORDENADA:

La coordenada espacial y temporal se discretizan de la siguiente manera.

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_x,$$

$$t^n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t$$

$\Delta t = t^{n+1} - t^n$  y  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  son los incrementos temporales y espaciales respectivamente, ó la distancia entre los puntos de la malla numérica.

El dominio numérico en general se definirá como:  
 $(x, t) \in ([x_0, x_{N_x}] \times [t^0, t^{N_t}])$

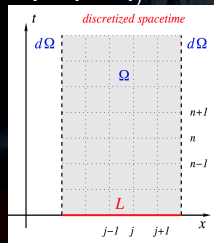


Figure: Malla numérica. Espacio-tiempo discretizado

Para recuperar el continuo, solo tenemos que llenar la malla numérica con más puntos, es decir,  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$ . Sin embargo no es tan fácil!

## DISCRETIZACIÓN DE VARIABLES:

$$u(x, t) \longrightarrow u(x_i, t^n) = u_i^n.$$

Entonces las funciones o variables de físicas estarán definidas en puntos de nuestro dominio numérico.

## DISCRETIZACIÓN DE OPERADORES:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(x, t)) &\longrightarrow \mathcal{L}(u_i^n), \\ \mathcal{L}(u_i^n) - f(u_i^n) &= 0 + \epsilon_T,\end{aligned}$$

también los operadores estarán definidas solo en los puntos de la malla.  $\epsilon_T$  es el error de truncamiento, depende de la aproximación del operador, **depende de nosotros!**.

**Error de truncamiento** es independiente de la máquina usada pero refleja la decisión humana hecha al discretizar el problema continuo, se puede expresar como

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u_i^n) - f(u_i^n) + \epsilon_T,$$

el error de truncamiento se escoge bajo el buen juicio del programador, de tal manera que la discretización se realice correctamente, acercándose al problema discreto, módulo el error de truncamiento.

## DISCRETIZACIÓN DE VARIABLES:

$$u(x, t) \longrightarrow u(x_i, t^n) = u_i^n.$$

Entonces las funciones o variables de físicas estarán definidas en puntos de nuestro dominio numérico.

## DISCRETIZACIÓN DE OPERADORES:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(x, t)) &\longrightarrow \mathcal{L}(u_i^n), \\ \mathcal{L}(u_i^n) - f(u_i^n) &= 0 + \epsilon_T,\end{aligned}$$

también los operadores estarán definidas solo en los puntos de la malla.  $\epsilon_T$  es el error de truncamiento, depende de la aproximación del operador, **depende de nosotros!**.

**Error de truncamiento** es independiente de la máquina usada pero refleja la decisión humana hecha al discretizar el problema continuo, se puede expresar como

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u_i^n) - f(u_i^n) + \epsilon_T,$$

el error de truncamiento se escoge bajo el buen juicio del programador, de tal manera que la discretización se realice correctamente, acercándose al problema discreto, módulo el error de truncamiento.

## ERRORES

**Error de precisión de máquina** Refleja la precisión de la máquina usada para realizar alguna operación.

$$f_p(1.0) = f_p(1.0) + \epsilon_M,$$

Es decir, el error de la máquina refleja la capacidad de la máquina para distinguir dos números de punto flotante y por lo tanto está relacionado con el número de cifras significativas utilizadas por ejemplo:

$$\epsilon_M = 2^{-\sqrt{4}} \quad (18)$$

**Error "Round-off"** es la acumulación de errores de la máquina de precisión como consecuencia de  $N$  operaciones de punto flotante.

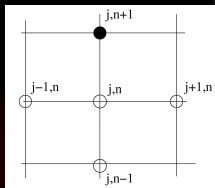
$$\epsilon_{RO} \sim \sqrt{N} \epsilon_M \quad (19)$$

es decir, que un cálculo numérico debe restringir el número de operaciones cuidando no rebasar este error.



## Diferencias finitas

La idea básica de aproximaciones en **diferencias finitas** es sustituir el espacio-tiempo continuo con un conjunto de puntos discretos de la malla. Esto se hace mediante la aproximación de los operadores diferenciales por diferencias finitas entre los valores de nuestras funciones en los puntos vecinos de la malla. De esta manera se obtiene una ecuación algebraica en cada punto de la malla para cada ecuación diferencial.

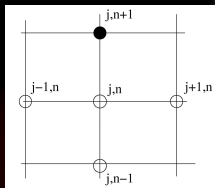


**Figure:** Puntos vecinos donde la función es evaluada para construir un operador.

de esta manera la solución de una ecuación diferencial parcial (EDP) consiste en definir una versión discreta de la EDP, y calcular una solución a dicha aproximación discreta.

## Diferencias finitas

La idea básica de aproximaciones en **diferencias finitas** es sustituir el espacio-tiempo continuo con un conjunto de puntos discretos de la malla. Esto se hace mediante la aproximación de los operadores diferenciales por diferencias finitas entre los valores de nuestras funciones en los puntos vecinos de la malla. De esta manera se obtiene una ecuación algebraica en cada punto de la malla para cada ecuación diferencial.



**Figure:** Puntos vecinos donde la función es evaluada para construir un operador.

de esta manera la solución de una ecuación diferencial parcial (EDP) consiste en definir una versión discreta de la EDP, y calcular una solución a dicha aproximación discreta.

**Derivada de primer orden**

Consideremos una función en la malla numérica  $f_j^n$ , es posible calcular valores aproximados de la función en los puntos adyacentes a partir de expansiones en serie de Taylor truncadas de  $f$  en torno a  $f_j^n$ . La precisión de la aproximación dependen de el error e truncamiento y el numero de puntos vecinos que usemos. Usaremos una aproximación a segundo orden ( $f''(x_j)$  considerando segundas derivadas), es decir, un error de truncamiento  $O(\Delta x^3)$

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_j) = f(x_j),$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

la prima, es la derivada espacial. Sumando la tercera expresión menos la primera se obtiene la **derivada centrada de  $f_j^n$**  aproximada a segundo orden

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (20)$$

que pasa cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ !

Derivada *upwind* de primer orden de  $f_j^n$

$$f(x_{j-2}) = f(x_j) - 2\Delta x f'(x_j) + \frac{4\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_j) = f(x_j),$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_{j+2}) = f(x_j) + 2\Delta x f'(x_j) + \frac{4\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

Ahora la combinación es  $f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j)$  para eliminar términos que no nos interesan,

$$f'(x_j)_{up} = -\frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (21)$$

Por otro lado la derivada *downwind*

$$f'(x_j)_{down} = \frac{f(x_{j-2}) - 4f(x_{j-1}) + 3f(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (22)$$

Derivada *upwind* de primer orden de  $f_j^n$

$$f(x_{j-2}) = f(x_j) - 2\Delta x f'(x_j) + \frac{4\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_j) = f(x_j),$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

$$f(x_{j+2}) = f(x_j) + 2\Delta x f'(x_j) + \frac{4\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3),$$

Ahora la combinación es  $f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j)$  para eliminar términos que no nos interesan,

$$f'(x_j)_{up} = -\frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 3f(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (21)$$

Por otro lado la derivada *downwind*

$$f'(x_j)_{down} = \frac{f(x_{j-2}) - 4f(x_{j-1}) + 3f(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (22)$$

En resumen para la primera derivada  $(f'')_j^n$  a segundo orden:

$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$
	1	0	-1	
1	-4	3		
		-3	4	-1

Es importante recalcar aquí de porque la necesidad de la derivada *downwind*, centrada y *upwind*.

- Derivada *upwind*. Esta será indispensable en la frontera izquierda del dominio numérico donde solo conocemos puntos a la derecha del punto de interés  $j$ .
- Derivada centrada. Esta en los puntos dentro del dominio numérico, en medio!
- Derivada *downwind*. Esta será indispensable en la frontera derecha del dominio numérico donde solo conocemos puntos a la izquierda del punto de interés  $j$ .

Ahora si queremos calcular la primera derivada de la función  $f_j^n$  a **cuarto orden** tenemos que considerar los siguientes términos

$$f(x_{j-2}) = f(x_j) - 2\Delta x f'(x_j) + \frac{2^2 \Delta x^2}{2} f''(x_j) - \frac{2^3 \Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{2^4 \Delta x^4}{4!} f''''(x_j) + O(\Delta x^5),$$

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{2^4 \Delta x^4}{4!} f''''(x_j) + O(\Delta x^5),$$

$$f(x_j) = f(x_j),$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{2^4 \Delta x^4}{4!} f''''(x_j) + O(\Delta x^5),$$

$$f(x_{j+2}) = f(x_j) + 2\Delta x f'(x_j) + \frac{2^2 \Delta x^2}{2} f''(x_j) + \frac{2^3 \Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{2^4 \Delta x^4}{4!} f''''(x_j) + O(\Delta x^5),$$

igual que para la primera derivada hay que encontrar una combinación lineal de estas expresiones de tal manera que obtengamos la segunda derivada centrada, y a segundo orden de  $f_j^n$ , entonces hay que hacer un poco de algebra para encontrar los coeficientes de la expresión  $af(x_{j-2}) + bf(x_{j-1}) + cf(x_j) + df(x_{j+1}) + ef(x_{j+2})$  para que los términos  $f''$ ,  $f'''$  y  $f''''$  se eliminen.

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j-2}) - 8f(x_{j-1}) + 8f(x_{j+1}) - f(x_{j+2}))}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (23)$$



**Segunda derivada centrada de  $f_j^n$  a segundo orden** Ahora queremos calcular la aproximación de la segunda derivada de una función  $f_j^n$  respecto a  $x$ , se busca una combinación de las expansiones en serie de Taylor de los puntos vecinos de  $x_j$ , imponiendo la condición de que los coeficientes de las derivadas de orden cero, orden uno, tercero y superiores sean cero. Esta vez las expansiones se truncan en  $O(\Delta x^4)$ .

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (24)$$

En resumen, los coeficientes de las combinaciones lineales para calcular la segunda derivada, *centrada*, *downwind* y *upwind* son:

$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$
		1	-2	1		
-1	4	-5	2			
			2	-5	4	-1

Como se mencionó antes la aproximación se puede realizar tan precisa como nosotros lo deseemos, para ellos aquí un ejemplo: <http://bit.ly/20Y9Sty>

**Segunda derivada centrada de  $f_j^n$  a segundo orden** Ahora queremos calcular la aproximación de la segunda derivada de una función  $f_j^n$  respecto a  $x$ , se busca una combinación de las expansiones en serie de Taylor de los puntos vecinos de  $x_j$ , imponiendo la condición de que los coeficientes de las derivadas de orden cero, orden uno, tercero y superiores sean cero. Esta vez las expansiones se truncan en  $O(\Delta x^4)$ .

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (24)$$

En resumen, los coeficientes de las combinaciones lineales para calcular la segunda derivada, *centrada*, *downwind* y *upwind* son:

$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$
		1	-2	1		
-1	4	-5	2			
			2	-5	4	-1

Como se mencionó antes la aproximación se puede realizar tan precisa como nosotros lo deseemos, para ellos aquí un ejemplo: <http://bit.ly/20Y9Sty>

**Convergencia** Debido a que se está resolviendo la versión aproximada de una EDP, es necesario verificar que al aumentar la resolución de la malla, es decir,  $\Delta x \rightarrow 0$  la solución numérica *converge* a la solución del continuo.

Primero definamos la condición Courant-Friedrichs-Lewy  $\Delta t = C_{CFL} \Delta x$ , con  $C_{CFL} < 1$ .

Esta condición asegura que el dominio de dependencia sea más grande de lo necesario, y que la propagación de las velocidades de propagación de alguna perturbación física sea siempre más pequeña que la numérica  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Es decir, la condición CFL impide que cualquier señal física se propague más allá de una celda en la malla numérica en un solo paso de tiempo.

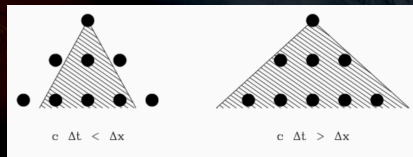


Figure: Estable - Inestable

Consideremos una resolución numérica  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , usando una aproximación de segundo orden, el error se define como

$$Error_1 = E\Delta x^2,$$

$E$  es el coeficiente del error en diferencias finitas. Si se considera una nueva resolución  $\Delta x_k = \frac{\Delta x}{k}$  con  $k > 1$ , se tiene que

$$Error_k = E \frac{\Delta x^2}{k^2}, \quad (25)$$

Consideremos una resolución numérica  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , usando una aproximación de segundo orden, el error se define como

$$Error_1 = E \Delta x^2,$$

$E$  es el coeficiente del error en diferencias finitas. Si se considera una nueva resolución  $\Delta x_k = \frac{\Delta x}{k}$  con  $k > 1$ , se tiene que

$$Error_k = E \frac{\Delta x^2}{k^2}, \quad (26)$$

$$\frac{Error_1}{Error_k} = k^2 \quad (27)$$

esto quiere decir, que si la resolución aumenta por un factor de  $k$ , la solución numérica se aproxima al continuo de manera cuadrática. Si la aproximación es a orden cuatro el exponente de  $k$  será 4, y así con aproximaciones de mayor orden.

Consideremos una resolución numérica  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , usando una aproximación de segundo orden, el error se define como

$$Error_1 = E\Delta x^2,$$

$E$  es el coeficiente del error en diferencias finitas. Si se considera una nueva resolución  $\Delta x_k = \frac{\Delta x}{k}$  con  $k > 1$ , se tiene que

$$Error_k = E \frac{\Delta x^2}{k^2}, \quad (26)$$

$$\frac{Error_1}{Error_k} = k^2 \quad (27)$$

esto quiere decir, que si la resolución aumenta por un factor de  $k$ , la solución numérica se aproxima al continuo de manera cuadrática. Si la aproximación es a orden cuatro el exponente de  $k$  será 4, y así con aproximaciones de mayor orden.

Considérese una función  $f$ , solución numérica de una EDP en un tiempo dado, usando una aproximación de **segundo orden**. Si  $f_0$  es la solución exacta, entonces la solución numérica se puede expresar como

$$f(x) = f_0(x) + E(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3),$$

el error  $E(x)$  se puede calcular numericamente usando dos valores de  $\Delta x$ .

Ahora si conocemos  $f_1$  y  $f_2$  soluciones con dos resoluciones diferentes,  $\Delta x$  y  $\frac{\Delta x}{2}$ , es decir  $K = 2$ , el cociente de los errores sería

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x), \quad (29)$$

El cuatro se llama **factor de convergencia**, debe satisfacerse en cada punto de la malla. Cuando la aproximación es de segundo orden el factor de convergencia es  $4 = 2^2$ , cuando la aproximación es de cuarto orden el factor de convergencia es  $16 = 4^2$ , ...

LA SOLUCIÓN NUMÉRICA CONVERGE A SEGUNDO  
ORDEN SI EL FACTOR OBTENIDO ES EL PREDICHO  
POR LA TEORÍA

Estaremos satisfechos con nuestros resultados numéricos!

LA SOLUCIÓN NUMÉRICA CONVERGE A SEGUNDO  
ORDEN SI EL FACTOR OBTENIDO ES EL PREDICHO  
POR LA TEORÍA

Estaremos satisfechos con nuestros resultados numéricos!

Aún no del todo!. Que pasa cuando no se conoce la  
solución exacta?

LA SOLUCIÓN NUMÉRICA CONVERGE A SEGUNDO ORDEN SI EL FACTOR OBTENIDO ES EL PREDICHO POR LA TEORÍA

Estaremos satisfechos con nuestros resultados numéricos!

Aún no del todo!. Que pasa cuando no se conoce la solución exacta?

Entonces se consideran tres soluciones numéricas calculadas con diferentes resoluciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  con  $\Delta x$ ,  $\frac{\Delta x}{2}$ ,  $\frac{\Delta x}{4}$  respectivamente.

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x), \quad (30)$$

ahora el factor se llama **factor de auto-convergencia**.

Veremos mas adelante que podemos calcular la convergencia en cada punto de la malla numérica. Pero también podemos calcular una convergencia global para todo el dominio a un tiempo dado.

La convergencia es algo fundamental en la solución numérica de EDP's, de tal manera que cuando se pierde la convergencia los resultados obtenidos pierden credibilidad.



## 16 / 23

La ecuación de onda en un espacio-tiempo general se puede escribir como el d'Alembertiano de la función de onda  $\phi$

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0 \quad (37)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y  $\sqrt{-g} = \alpha$ . Consideremos  $\phi = \phi(t, x)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{t\nu}\partial_\nu\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{x\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{tt}\partial_t\phi + \alpha g^{tx}\partial_x\phi] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{xt}\partial_t\phi + \alpha g^{xx}\partial_x\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t\left[-\frac{1}{\alpha}\partial_t\phi + \frac{\beta}{\alpha}\partial_x\phi\right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\partial_x\left[\frac{\beta}{\alpha}\partial_t\phi + \alpha\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\partial_x\phi\right] \end{aligned}$$

La ecuación de onda en un espacio-tiempo general se puede escribir como el d'Alembertiano de la función de onda  $\phi$

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0 \quad (37)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y  $\sqrt{-g} = \alpha$ . Consideremos  $\phi = \phi(t, x)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{t\nu}\partial_\nu\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{x\nu}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t[\alpha g^{tt}\partial_t\phi + \alpha g^{tx}\partial_x\phi] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\partial_x[\alpha g^{xt}\partial_t\phi + \alpha g^{xx}\partial_x\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t\left[-\frac{1}{\alpha}\partial_t\phi + \frac{\beta}{\alpha}\partial_x\phi\right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\partial_x\left[\frac{\beta}{\alpha}\partial_t\phi + \alpha\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\partial_x\phi\right] \end{aligned}$$

Definamos variables de primer orden:  $\psi \equiv \partial_x\phi$  y  $\pi = (\partial_t\phi - \beta\partial_x\phi)/\alpha$ . Se obtienen entonces las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\alpha}\partial_t\left[-\pi\right] + \frac{1}{\alpha}\partial_x\left[\beta\pi + \alpha\psi\right] \\ \partial_t\pi &= \partial_x\left[\alpha\psi + \beta\pi\right] \end{aligned}$$

Sea  $\phi$  de clase  $C^2$ , entonces  $\partial_t\psi = \partial_t(\partial_x)\phi = \partial_x(\partial_t)\phi$  por los tanto

$$\partial_t\psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\pi) \quad (40)$$

Las ecuaciones de evolución son entonces

$$\partial_t\phi = \alpha\pi + \beta\psi \quad (41)$$

$$\partial_t\psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\psi) \quad (42)$$

$$\partial_t\pi = \partial_x[\alpha\psi + \beta\pi] \quad (43)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como una ley de balance

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = -\partial_x (\mathbf{A}) \mathbf{u},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

las velocidades características de este sistema de ecuaciones son  $\lambda = \beta \pm \alpha$ , entonces se puede definir la matriz diagonal  $\hat{\Lambda} \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ .

La ecuación en forma conservativa se reescribe como

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{w} = -\partial_x (\mathbf{\Lambda}) \mathbf{w},$$

donde ,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\pi - \psi, \pi + \psi)^T = (R, L)^T \quad (46)$$

es el vector cuyas componentes son las variables características. Obteniendo así un modo que se mueve a la derecha  $R$  y uno que se mueve a la izquierda  $R$ . **Constricción**

Debido a que la variable auxiliar  $\psi$  también se evoluciona, su definición nos servirá para monitorear el error numérico

$$\begin{aligned} \psi &= \partial_x \phi, \\ C &= \psi - \partial_x \phi. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como una ley de balance

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = -\partial_x (\mathbf{A}) \mathbf{u},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

las velocidades características de este sistema de ecuaciones son  $\lambda = \beta \pm \alpha$ , entonces se puede definir la matriz diagonal  $\hat{\Lambda} \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ .

La ecuación en forma conservativa se reescribe como

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{w} = -\partial_x (\mathbf{\Lambda}) \mathbf{w},$$

donde ,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\pi - \psi, \pi + \psi)^T = (R, L)^T \quad (46)$$

es el vector cuyas componentes son las variables características. Obteniendo así un modo que se mueve a la derecha  $R$  y uno que se mueve a la izquierda  $L$ . **Constricción**

Debido a que la variable auxiliar  $\psi$  también se evoluciona, su definición nos servirá para monitorear el error numérico

$$\begin{aligned} \psi &= \partial_x \phi, \\ C &= \psi - \partial_x \phi. \end{aligned}$$

**Datos Iniciales** Para proceder a la solución numérica necesitamos conocer los valores  $\phi(0, x)$ ,  $\psi(0, x)$  y  $\pi(0, x)$ . Los perfiles que propondremos corresponden a un pulso gaussiano:

$$\begin{aligned} \phi(0, x) &= Ae^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}, \\ \psi(0, x) &= -2 \frac{(x-x_0)}{\sigma^2} \phi(0, x), \\ \pi(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

### Solución exacta

Se sabe que la solución de la ecuación tiene dos modos, uno a la derecha y otro a la izquierda  $\phi(t, x) = f(x + vt)g(x - vt)$

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \frac{1}{2} Ae^{-((x+vt)-x_0)^2/\sigma^2}, \\ &+ \frac{1}{2} Ae^{-((x-vt)-x_0)^2/\sigma^2}, \end{aligned}$$

### Error numérico

$$\text{Error} = \phi_{\text{exacta}} - \phi_{\text{numérica}}.$$



**Condiciones de frontera Condiciones de frontera de onda saliente** La condición consiste en hacer :

*i)* Cero el modo  $R = 0$  en la frontera izquierda del dominio y *ii)* hacer cero el modo  $L$  en la frontera derecha del dominio.

En la frontera Izquierda, en  $x(0)$  las condiciones de frontera son

$$\psi_0^n = L_0^n,$$

$$\pi_0^n = L_0^n,$$

Y en la frontera derecha en  $x(N_x)$

$$\pi_{N_x}^n = -R_{N_x}^n, \quad (52)$$

$$\pi_{N_x}^n = R_{N_x}^n, \quad (53)$$

**Condiciones de frontera Periódicas** Esta condición consiste en unir las fronteras del dominio, de tal manera que tengamos un loop cerrado

$$\psi_0^n = \psi_{N_x-1}^n$$

$$\psi_{N_x}^n = \psi_1^n,$$

**Condiciones de frontera**

**Condiciones de frontera de onda saliente** La condición consiste en hacer : i) Cero el modo  $R = 0$  en la frontera izquierda del dominio y ii) hacer cero el modo  $L$  en la frontera derecha del dominio.

En la frontera Izquierda, en  $x(0)$  las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned}\psi_0^n &= L_0^n, \\ \pi_0^n &= L_0^n,\end{aligned}$$

Y en la frontera derecha en  $x(N_x)$

$$\pi_{N_x}^n = -R_{N_x}^n, \quad (52)$$

$$\pi_{N_x}^n = R_{N_x}^n, \quad (53)$$

**Condiciones de frontera Periódicas** Esta condición consiste en unir las fronteras del dominio, de tal manera que tengamos un loop cerrado

$$\psi_0^n = \psi_{N_x-1}^n$$

$$\psi_{N_x}^n = \psi_1^n,$$

**Condiciones de frontera Estáticas** Esta condición consiste en hacer cero las funciones en las fronteras.

$$\begin{aligned}\psi_0^n &= 0 \\ \psi_{N_x}^n &= 0,\end{aligned}$$

**Condiciones de frontera Reflejantes** Esta condición consiste en copiar el penúltimo punto.

$$\psi_0^n = -\psi_1^n, \quad (58)$$

$$\pi_0^n = \pi_1^n, \quad (59)$$

$$\psi_{N_x}^n = -\psi_{N_x-1}^n, \quad (60)$$

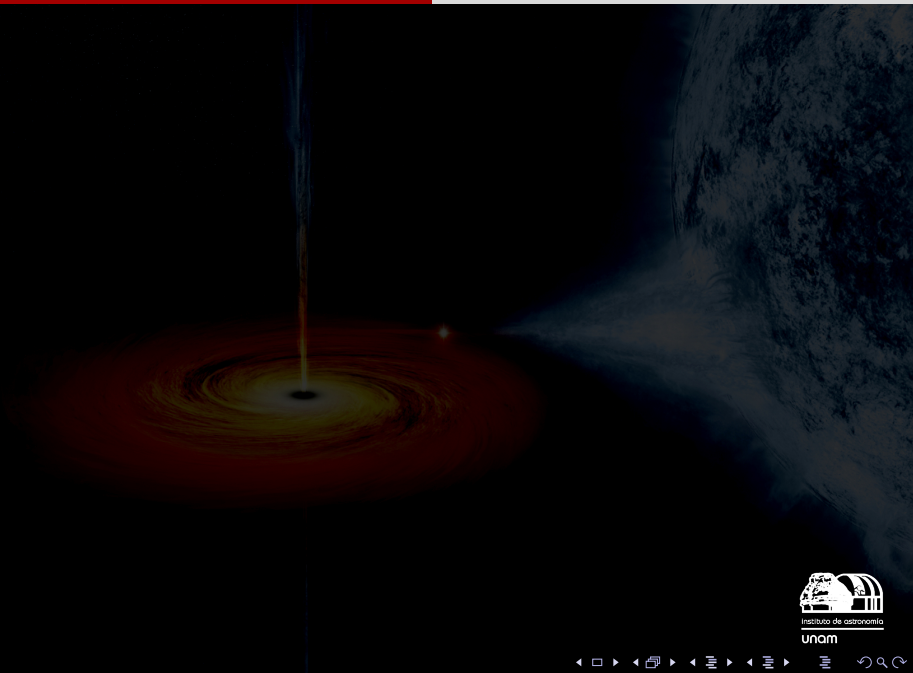
$$\pi_{N_x}^n = \pi_{N_x-1}^n, \quad (61)$$

Manos a la obra!









# GRACIAS!

