

Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

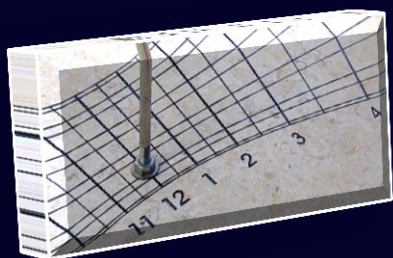
Noveno Grado de Educación Básica



Versión preliminar para plan piloto



Viceministerio de Ciencia y Tecnología



Reloj solar ubicado en el Museo Nacional de Antropología del país, Miriam de Grabs (donante) expresó que el reloj retoma conocimientos que las culturas ancestrales desarrollaron con la observación de los cambios en las sombras producidas por la luz solar (texto tomado de <http://www.elsalvador.com>) foto tomada por Omar Carbonero, modificada por Daniel Acevedo.

El reloj muestra gráficas de sistemas de ecuaciones no lineales.

Ministerio de Educación.
Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento
Subprograma Hacia la CYMA

Material de Autoformación e Innovación Docente

Para Matemática 9° Grado

Versión Preliminar para Plan Piloto.

Plan Social
Educativo
Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Mauricio Funes Cartagena
Presidente de la República

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Mejía
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Eder Alexander Jacobo
Autor

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Derechos reservados. Ministerio de Educación. Prohibida su venta y su reproducción parcial o total.

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2537-4217, + (503) 2537-4218, + (503) 2537-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo “Vamos a la Escuela” 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para los Niveles de Parvularia, Educación Básica y Educación Media. El propósito de éstos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o “pivotes” que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

I Parte

Presentación.....	8
La resolución de problemas.....	9
Uso de los cuadernillos en el aula.....	11
Matriz de ubicación de lecciones.....	14

II Parte

Lenguaje Algebraico.....	18
Interpretación analítica de la línea recta.....	27
Sistemas lineales de ecuaciones.....	39
Arco y sector circular.....	52
Principios básicos de conteo.....	62
Distintos tipos de permutaciones.....	76
Número combinatorio.....	86
Desarrollo binomial y multinomial.....	97
Triángulo de Pascal.....	106
Sistemas no lineales de ecuaciones.....	113

Primera parte

¿Por qué material de autoformación e
innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y su programa “Hacia la CYMA” que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular y de autoformación para docentes.

Este material de enriquecimiento curricular para docentes tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática de Noveno Grado de Educación Básica, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica. Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes¹ considerados necesarios para la educación de calidad de la niñez salvadoreña, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, creación de conocimiento y de utilización de ese conocimiento para la innovación.

Se busca que mediante la formación científica se mejoren las condiciones sociales y económicas para alcanzar una vida digna de nuestros futuros ciudadanos. Cada tema de este cuadernillo mantiene una relación con otros materiales curriculares como los programas de estudio, y la colección Cipotas y Cipotes (Guía para Docentes y Libros de texto).

El enriquecimiento que se ha hecho partiendo de temas pivotes, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento, bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener una persona para alcanzar sus propósitos de incorporarse de manera propositiva y útil a la sociedad, y sus propósitos formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos, para mejorar su calidad de vida y la de sus comunidad.

1. Un tema pivote es un contenido curricular clave, se considera que si los docentes manejan adecuadamente dichos temas, podrá desarrollar otros contenidos con facilidad y aplicar de forma más pertinente el conocimiento a la realidad en que se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje; por otra parte podrá seleccionar qué contenidos del programa desarrollar y en qué orden, de acuerdo a las necesidades e intereses del grupo de alumnos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico², el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática³.

² José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.

³ Miguel de Guzmán Ozámiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya⁴ en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación⁵.

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de contenidos de cuadernillos

Para elaborar el Cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente de Matemática para Noveno Grado de Tercer Ciclo de Educación Básica, se han seleccionado 10 temas, considerando para ello, el programa de estudio de matemática en vigencia para noveno grado y libros de texto especializados en las distintas áreas de matemática que se discuten en Noveno Grado. Estos temas son considerados fundamentales en la educación de jóvenes y la formación docente, las lecciones del cuadernillo pretenden fortalecer competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de la juventud salvadoreña, no perdiendo de vista el enfoque resolución de problemas.

El cuadernillo de noveno grado de educación básica, es un material de apoyo para el docente, y en consecuencia, se benefician sus estudiantes, esto mediante una propuesta en la secuencia de los contenidos del programa de estudio de matemática en un entorno participativo y de investigación, poniendo énfasis en el enfoque de resolución de problemas, donde el estudio de las ciencias (Física, Química y Biología) en conjunto con la matemática fortalecen competencias mediante la adopción de los enfoques Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) y Ciencia Tecnología y Sociedad (CTS).

⁴ George Pólya (1887-1985), matemático Húngaro, How to solve it, Princeton University Press.

⁵ Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

La selección de los contenidos considerados temas pivotes se efectuó siguiendo el siguiente proceso:

1. **Revisión:** de la secuencia de contenidos que presentan algunos libros matemáticos, considerando los bloques: Aritmética, Álgebra, Geometría, Estadística, Probabilidad, Combinatoria, Cálculo y Trigonometría.
2. **Revisión:** de libros que utilizan los docentes para la planificación de la clase, hacer una comparación entre las secuencias de contenidos, obteniendo de este modo una perspectiva sobre la relevancia de contenidos y su secuencia.
3. **Revisión:** Programas de Estudio (Ministerio de Educación de El Salvador, Libros de textos especializados en las áreas de Matemática.
4. **Propuesta de “Temas Pivotes”:** Que son considerados temas principales para el desarrollo del conocimiento matemático.
5. **Elaboración y revisión de lecciones:** por consultores especialistas en el área de matemática, especialistas de la UES encargados de la revisión teórica y metodológica.
6. **Entrega Técnica a docentes:** propósito de elaboración del presente manual.

Descripción de la estructura del cuadernillo.

El cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente para matemática de Noveno Grado, está formado por 10 lecciones elaboradas a partir de 10 temas considerados pivotes, la relevancia de estos contenidos permite introducir en su estructura elementos innovadores y propuestas de integración con las ciencias y la sociedad. Las lecciones del presente cuadernillos se ubican en 3 bloques de estudio de la matemática, entre estos: Álgebra, Geometría y Combinatoria.

La secuencia de las lecciones en relación a los contenidos del programa de estudio, no guardan relación directa, puesto que, en el cuadernillo se ha modificado el orden de algunas temáticas garantizando de este modo, que durante la lectura de las lecciones y la explicación de ejercicios y problemas, se utilicen los conocimientos que se van adquiriendo durante la lectura. Además, se han incorporado nuevas temáticas que por su relevancia en el aprendizaje de jóvenes, forman parte del material de Autoformación e Innovación Docente del libro de texto y programa de estudio. Estos contenidos serán desarrollados paulatinamente, permitiendo que el estudiantado identifique en cada etapa la utilización, importancia y complejidad.

Descripción de la estructura de las lecciones.

Las lecciones se estructuran normalmente en catorce partes, las cuales se detallan a continuación.

- a. **Número de lección y ubicación de la lección en el programa de estudio:** Se detalla el grado, y la unidad a la que pertenece.
- b. **Tiempo:** Es el tiempo estimado para aplicar la lección. Este es un tiempo aproximado que el docente puede readecuar según sus necesidades.

- c. **Titulo:** Condensa la idea central de la lección, se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
- d. **Ilustración:** Imagen o figura que representa la aplicación de la temática en la vida cotidiana.
- e. **Introducción del tema:** Presenta una breve discusión de la temática mostrando puntos relevantes que se tratarán en la lección. Es un espacio para generar interés y motivación en cada docente, para que esta curiosidad pueda transmitirla a sus estudiantes.
- f. **Competencias a fortalecer.** Son los conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiantado puede adquirir al finalizar la lección. Se pretende que este, con ayuda de su docente desarrolle las competencias esenciales en matemática para una formación científica de calidad y con capacidad de innovación. Dichas competencias son:
 - i. saber argumentar.
 - ii. Saber cuantificar.
 - iii. Saber analizar críticamente la información.
 - iv. Saber representar y comunicar.
 - v. Saber resolver y enfrentarse a problemas.
- g. **Objetivos:** Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.
- h. **Presaberes:** es un conjunto de conocimientos y habilidades que se estima posee cada estudiante antes de iniciar la lección, los Presaberes también son nombrados *conocimientos previos*. La existencia de los conocimientos previos requeridos para la lección son identificados mediante actividades diagnóstico.
- i. **Vocabulario clave:** En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda para comprender algunos términos que se utilizan en el desarrollo de la lección.
- j. **Relato histórico:** Breve relato histórico que guarda estrecha relación con el título de la lección. En este relato se hace referencia a la vida y obra de diversos matemáticos de la historia. Este elemento introduce a la lección el ingrediente motivador, puesto que se identifica el surgimiento de algunas temáticas, así también, la relevancia de las mismas.
- k. **Marco teórico:**

Al final del relato histórico se llega a una idea particular, a partir de esta se construye un marco teórico que es el que guía la lección. Esta sección aborda los conceptos, proposiciones y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar.
- l. **Desarrollo de la lección:** Se presenta una secuencia de actividades donde se muestran ejercicios y aplicaciones que explican de forma detallada los objetivos, materiales a utilizar y procesos que se van a seguir. Las actividades propuestas tienen la cualidad de ser de carácter interesante e innovador, buscan relacionar aspectos teóricos, históricos y científicos con algoritmos matemáticos. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental.
- m. **Guía de ejercicios y aplicaciones:** Hay que hacer una valoración importante en este apartado, la guía está integrada por ejercicios, problemas o una integración de ejercicios y problemas. Esta guía pretende fortalecer los conocimientos y habilidades tanto en docentes como en estudiantes, así también, brindar un punto de partida hacia el estudio de nuevas temáticas.

- n. **Referencias bibliográficas:** Se hacen referencias a texto, videos y otros materiales para que cada docente pueda consultar y profundizar su conocimiento.

¿Cómo utilizar el cuadernillo?

La organización de las actividades de la clase están de acuerdo a los objetivos y competencias de la asignatura; se sugiere que este cuadernillo de temas pivotes sea utilizado en cualquiera de los casos:

- Organizando actividades para el inicio, desarrollo y cierre de la clase; esto no quiere decir que lo ejecutará tal como se presenta, sino que puede tomar las ideas que mejor le favorezcan y alternarlas con las ideas del programa y el libro de texto que pueda utilizar en el aula, en caso de tenerlo, de manera que pueda crear su clase como mejor se ajuste a sus necesidades: tamaño de la clase, recursos didácticos, nivel de aprendizaje del estudiante, tiempo de clase, entre otros. La finalidad es que cada docente determine los mecanismos y actividades para avanzar con sus estudiantes con un ritmo de aprendizaje adecuado y de calidad.
- Como material de formación para docente, que le permita emular actividades, conceptos y estrategias en lecciones colaterales de integración con las ciencias naturales.
- Como guion de clase, siguiendo la secuencia de actividades, resolución de ejercicios y problemas.

Matriz de justificación de lecciones propuestas y su ubicación en el programa de estudio de Tercer Ciclo de Educación Básica, Noveno grado, Matemática.

En la siguiente tabla, se enumeran las lecciones del Material de Autoformación e Innovación Docente, relacionándolas con contenidos del programa de estudio de Matemática en vigencia para Noveno Grado, justificando los aspectos que permiten observar el enriquecimiento temático de las lecciones.

LECCIÓN 1	Lenguaje Algebraico
Se sugiere utilizar antes de iniciar el programa de noveno	
<p>Justificación</p> <p>El desarrollo de la escritura algebraica es de suma importancia en la matemática poder escribir en lenguaje matemático lo que está escrito en nuestro lenguaje cotidiano es un gran paso hacia la resolución de problemas, pasando el desarrollo de conjeturas, planteamiento de hipótesis, establecimiento de ecuaciones, etc.</p>	<p>En nuestro sistema educativo no se hace un trabajo dedicado exclusivamente al dominio de este nuevo idioma, se acostumbra trabajar en la resolución de problemas, sin tener bases fuertes sobre la lectura, comprensión y traducción que se debe llevar a cabo.</p> <p>Este es uno de los principales problemas que se muestran en la resolución de problemas, el no poder ver como se relacionan las variables en una determinada situación, lo cual causa que el estudiantado no logre dar el paso clave en la búsqueda de la solución.</p>

LECCIÓN 2

Línea Recta

Unidad 2: Resolvamos sistemas de dos ecuaciones lineales.

Justificación

Se pretende plantear un análisis más profundo sobre la línea recta, sobre los componentes de la

ecuación, sobre la gráfica y sobre su significado en algunos problemas prácticos.

Hacer un trabajo sobre segmentos de recta y las delimitaciones en su expresión algebraica.

LECCIÓN 3

Sistemas De Ecuaciones Lineales

Unidad 2: Resolvamos sistemas de dos ecuaciones lineales.

Unidad 7: Resolvamos sistemas de ecuaciones.

Justificación

En el camino del algebra utilizamos técnicas para resolver sistemas de dos ecuaciones desde que trabajamos problemas que caracterizamos del tipo lineal en una sola variable, esto lo hacemos de forma inconsciente, a través de la

repetición de ejercicios. Un ejemplo claro de esto son problemas de edades en los cuales nos dicen que la edad de una persona es 5 años mayor que la de su hermano, operamos las edades como x y $x + 5$ de forma directa, a veces sin

pensar que lo que ahí está escondido es la ecuación $y - x = 5$.

Se propone un estudio de los métodos tanto de igualación, sustitución y reducción, tanto para sistemas de dos y tres variables.

LECCIÓN 4

Arco Y Sector Circular

Unidad 4: Midamos ángulos.

Justificación

Es común que en el aula se trabajen estos temas únicamente como la aplicación de las fórmulas establecidas para calcular ambas medidas, desaprovechando todo el

desarrollo lógico espacial que se puede obtener de este tema.

Se propone la elaboración de problemas más interesantes, en los cuales las fórmulas básicas para calcular áreas de sectores circula-

res se mezclen con cálculo de áreas de otras figuras y otras propiedades geométricas, tratando de esta manera de crear un pensamiento lógico y ordenado orientado a la resolución de problemas.

LECCIÓN 5

Principios Básicos de Conteo

Unidad 6: Apliquemos técnicas de conteo.

Justificación

El programa actual cuenta únicamente con una revisión sobre el principio de la multiplicación para la resolución de problemas de conteo; sin embargo, en el área de

conteo los dos pilares fundamentales son el principio de la suma y el principio de la multiplicación. Es por eso importante incluir el principio de la suma, pues el co-

nocimiento de este ayudará a tener un mejor análisis de las distintas situaciones en los problemas de conteo.

LECCIÓN 6

Permutaciones

Unidad 6: Apliquemos técnicas de conteo.

Justificación

Las permutaciones resultan ser un resultado de la aplicación del principio de la multiplicación, sin embargo el programa actual hace una revisión superficial del tema

sin profundizar en los distintos casos que este tema presenta, se limita a permutaciones del tipo lineal, sin repeticiones. Se propone hacer un estudio de los ca-

sos de permutaciones circulares y permutaciones con repetición, este último tratará de construir un puente hacia el número combinatorio.

LECCIÓN 7

Número Combinatorio

Unidad 6: Apliquemos técnicas de conteo.

Justificación

La mayoría de libros de texto usados en nuestro sistema educativo únicamente trata el número combinatorio como una mera fórmula, la cual funciona para resolver problemas; sin embargo nunca se explica su procedencia

ni sus principales identidades. Este hecho de no entender de dónde provienen dichas expresiones matemáticas son las que generan confusión sobre el hecho de cómo atacar adecuadamente

los problemas en el campo del conteo.

Se propone hacer un estudio más profundo sobre el significado del número combinatorio y su íntima relación con las permutaciones con repetición.

LECCIÓN 8

Desarrollo Binomial

Unidad 8: Utilicemos potencias algebraicas.

Justificación

Es normal encontrar en los libros de texto, distribuidos en nuestro sistema educativo, que el desarrollo de este tema es simplemente mencionar el Binomio de

Newton mostrando la expansión de $(a+b)^n$ con coeficientes en forma de números combinatorios, sin embargo nunca se demuestra porque esta expansión es verda-

dera, ni se aprovecha este tipo de expansiones para mostrar algunas identidades importantes como el

$$\text{hecho que } 2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}.$$

LECCIÓN 9

Triángulos Aritméticos

Unidad 8: Utilicemos potencias algebraicas

Justificación

Los libros utilizados en nuestro medio hacen referencia a la relación existente entre el triángulo de Pascal y los coeficientes resul-

tantes de la expansión de un binomio; sin embargo, esta característica y otras no son explotadas para obtener identidades propias

del número combinatorio, por lo cual es necesario hacer un estudio más profundo de esta tabla numérica.

LECCIÓN 10

Sistemas Algebraicos No Lineales

Se sugiere ver al final de la unidad número 9.

Justificación

Si $a + b = 4$ y $a^2 + b^2 = 8$. ¿Cuál es el valor de $a^4 + b^4$?

Se plantea un tema nuevo en el sistema educativo, se trata de un conjunto de técnicas basadas en

manipulación algebraica y búsqueda de resultados intermedios para obtener resultados a problemas similares al planteado.

Se observa muchas dificultades en el estudiantado a la hora de resolver problemas de este tipo.

Segunda parte

Lecciones

Contenidos trabajados con enfoque CTI.

Lenguaje algebraico



Figura 1. Estatua de Al-Hwarizmi, considerado el padre del álgebra, ciudad de Xiva Uzbekistán, en la antigua Unión Soviética.

Introducción del tema

En la historia de la especie humana la aritmética surgió debido a la necesidad de contar y medir distintas cosas.

Pasados los siglos, el ser humano adquiere un concepto abstracto del número, lo cual genera una revolución matemática y fundamenta el origen del álgebra.

El gran desarrollo experimentado por el álgebra se debió sobre todo a los matemáticos árabes y, muy en particular, a Al-Hwarizmi (siglo IX d. C.), que sentó las bases del álgebra tal como la conocemos hoy en día.

El álgebra tiene por objeto generalizar todas las cuestiones que se pueden proponer sobre las cantidades, mientras en aritmética las cantidades se representan mediante números que expresan valores determinados, en álgebra las cantidades se representan mediante símbolos que pueden representar cualquier valor que se les asigne.

El manejo del lenguaje algebraico se vuelve fundamental para poder resolver, tanto cuestiones generales como particulares.

Competencias por lograr

- Reflexionar sobre la manipulación y aplicación del lenguaje algebraico.
- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Objetivos

- Desarrollar la habilidad de manipulación algebraica para modelar diversas situaciones.
- Refinar el lenguaje algebraico para la resolución de problemas.

Presaberes

- Operaciones básicas.

UN ESPACIO DE REFLEXIÓN

Es importante en estos momentos tomarse un poco de tiempo y reflexionar sobre la enseñanza del álgebra en estos momentos de la vida del estudiante.

Como docentes de matemática, podemos observar en la vida matemática de un estudiante, muchos momentos críticos en el desarrollo de su aprendizaje. En sus primeros años, el estudiante conoce la utilización de los números, sus representaciones gráficas y las operaciones básicas que con estos podemos hacer, en pocas palabras aprende a manipular el mundo de los números naturales.

Un poco más adelante se incorpora al mundo de los números racionales, aprende en este nuevo mundo, para él, las operaciones y los significados de estos elementos matemáticos que se incorporan a su vida. Más adelante hace lo mismo con el mundo de los enteros y de los mismos números reales, reaprende una y otra vez las operaciones aritméticas, procesos y significados.

Llegado el momento, se da un nuevo salto, se inicia el mundo del álgebra, en el cual deberá reaprender de nuevo procesos y significados de las operaciones ya conocidas por él.

Claro está, un estudiante tiene muchos momentos críticos en distintas áreas de la matemática; sin embargo, nuestro objetivo es reflexionar un poco sobre el paso de la aritmética al álgebra que es lo que marca nuestros grados del tercer ciclo de educación media, siendo el estudio del álgebra lo que ocupa la mayor parte del estudio de la matemática en estos niveles.

Note que mientras se enseña aritmética se busca que los procesos y métodos se incorporen a la vida del estudiante de una

manera natural; por lo tanto, es lógico pensar que al dar el paso al álgebra nuestro objetivo como docentes sería lograr incorporar los métodos algebraicos a la vida y pensamiento de nuestros estudiantes como algo natural; pero entonces surge la pregunta ¿cómo logramos que el método algebraico se incorpore como algo natural?

Para lograr esto es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables y para ello hay que realizar un cambio, tanto de símbolo como de significado.

Es muy común que el cambio se produce únicamente en los símbolos y solo se realiza el paso de números a letras, dejando de lado los significados. Así también se dificulta en el manejo del álgebra de parte de los estudiantes debido al significado que poseen las letras, refiriéndose al uso y significado de estas en situaciones específicas:

- a) Cuando se evalúa. Por ejemplo un polinomio evaluado para $x = 2$.
- b) Cuando es una incógnita específica. Por ejemplo si deseamos resolver alguna ecuación como $3x + 2 = 5x - 1$.
- c) Cuando es una variable. Por ejemplo en la representación algebraica de un polinomio como $x^2 + 3x + 1$.
- d) Cuando es un número generalizado. Por ejemplo decir que todos los números pares son de la forma $2x$.

Note que en cada uno de los casos, se utiliza la misma letra x , pero en cada uno de los casos, la interpretación y el uso que se le da es distinto.

Discutir este tipo de cosas con los estudiantes se vuelve fundamental para el buen aprendizaje y manejo de las expresiones algebraicas.

Esto nos conduce a reflexionar también sobre el significado de los símbolos utilizados para representar operaciones básicas, sobre lo que significan y representan en el área de la aritmética y cómo se utilizan y se representan en el mundo algebraico.

Dado que los símbolos son un recurso que nos permite denotar y manipular abstracciones, se vuelve importante reconocer la naturaleza y el significado de estos para saber cómo interpretar los resultados.

En aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número, por lo cual el significado de estos resulta ser un procedimiento para llegar a la respuesta.

Mientras tanto en el álgebra simplemente tienen un carácter de representación, dado que las operaciones que indican pueden realizarse o simplemente quedar como operaciones indicadas, por lo cual es necesario ampliar el concepto de la notación utilizada en las operaciones aritméticas.

Debe resultar preocupante que un estudiante de este nivel pueda dar respuesta a situaciones como: *si tienes \$10 y gastas \$5 cuánto te queda*. Pero no pueda responder a situaciones como: *Si al inicio del día tenías x dólares y gastaste \$5 ¿cuánto dinero tendrás al final del día?*

Este tipo de situaciones son muy recurrentes en nuestro sistema educativo, muchos de los problemas presentados por los estudiantes en este nivel, se deben a que no tienen claro el significado de las operaciones que realizamos,

y de cómo estas están presentes en todo momento, sin duda, si experimenta con sus estudiantes y hace preguntas parecidas a las dos citadas, aplicadas en distintos contextos, como edades, números, tiempo, etc., seguramente encontrará que a la pregunta aritmética todo mundo le dará respuesta; pero a la parte algebraica un buen porcentaje de los estudiantes no sabrán responder. Intente lo siguiente, pida a sus estudiantes dos números cuya diferencia sea 2, sin duda todos los estudiantes le dirán un par de números que cumplan lo pedido.

Ahora pida que escriban en lenguaje algebraico lo siguiente: dos números cuya diferencia es 2, cumplen además que su producto es 168. Notará usted que muy pocos lograrán escribir $x(x + 2) = 168$ o $x(x - 2) = 168$ o incluso $xy = 168$ con $x - y = 2$. Esto debido a la dificultad que implica escribir el lado izquierdo de la ecuación.

Detengámonos a hablar un momento del signo igual, debido a la importancia didáctica que esta presenta. Es fácil encontrar situaciones en las que la apariencia de la notación aritmética y la notación algebraica son muy similares, sin embargo, los significados de estos son muy diferentes, por lo cual se vuelve común confundirlos.

En el mundo de la aritmética representa una acción física, que es utilizada para conectar un problema con su resultado numérico.

Es normal que este significado se traslade al álgebra y se confunda con el signo igual de las ecuaciones. A lo que nos referimos, claro está, es que $(4)(3) = 12$ siempre será verdadero, mientras que en la ecuación $(4)(x) = 12$ la igualdad no será cierta para todo valor de x , y, por lo tanto, aquí se trata de encontrar un valor específico.

La manipulación correcta de los métodos algebraicos, es de suma importancia a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se muestran en diferentes procesos matemáticos como:

- a) Generalizaciones, donde términos numéricos son remplazados por variables.
- b) Simplificaciones, expresiones parciales son remplazadas por variables en expresiones dadas.
- c) Eliminaciones, variables implicadas en expresiones son suprimidas.
- d) Sustituciones, variables implicadas en expresiones son reemplazadas por expresiones dadas.
- e) Particularizaciones, variables se reemplazan por valores específicos para la verificación de ciertas expresiones.

La correcta comprensión de los métodos algebraicos abrirá al estudiante la oportunidad de un mejor aprendizaje de la matemática en otras de sus áreas y de una buena ventaja en el estudio de otras ciencias.

Sobre el lenguaje algebraico

Teóricamente muy poco se puede hablar al respecto, como con cualquier lenguaje, el arte de dominarlo únicamente se adquiere con la práctica, el estudio y la repetición de los procesos, acompañado siempre de la mano del entendimiento de las formas. El traductor experto es aquel que práctica a diario el manejo del lenguaje.

Actividad 1

Objetivo: Estudiar y profundizar sobre las expresiones del lenguaje algebraico.

Indicaciones

Para cada una de las situaciones siguientes, complete la tabla, trasladando el número de la izquierda correspondiente a las expresiones en lenguaje común, con su correspondiente expresión en lenguaje algebraico.

Dado que los estudiantes del noveno grado ya tienen experiencia en el uso de lenguaje algebraico, pues ya lo han usado durante todo el octavo grado, dedicaremos estas páginas a mostrar algunas actividades que pueden ayudar que el dominio del lenguaje adquirido durante el transcurso de los grados anteriores mejore.

Planteamos dos tipos de actividades

La primera presenta dos situaciones específicas acompañadas de una tabla y un problema, la tabla trae la escritura en lenguaje común y en lenguaje algebraico, esto con el fin que el estudiante relacione una forma con la otra, el problema versa sobre una situación que tiene que ver con la escritura practicada en la tabla; en esta actividad la primera de las situaciones muestra la solución tanto de la tabla como del problema, con comentarios acerca del trabajo por realizar con los estudiantes; mientras que la segunda situación no muestra la solución, sin embargo, el trabajo en el aula será análogo al de la primera situación.

La segunda de las actividades muestra dos situaciones en las que se pide hacer la traducción de un lenguaje a otro. Note que la diferencia de esta actividad con la anterior radica en el hecho de que acá no se muestran los dos tipos de escritura, sino se pide encontrar la forma faltante.

Luego discuta con los estudiantes el problema planteado.

Situación 1. Un problema de edades. Representemos con x la edad de Carlos

No.	Lenguaje común	No.	Lenguaje algebraico
1	El doble de la edad de Carlos.	3	$x-20$
2	La edad de Carlos hace 10 años.	4,6	$x-30$
3	La edad de Daniel, hijo de Carlos que es 20 años menor que él.	8	$2x-30$
4	La edad de Daniel hace 10 años.	4,6	$x-30$
5	La edad de Carlos dentro de 10 años.	1	$2x$
6	La edad de María, hija de Carlos, quien nació cuando él tenía 30 años.	5	$x+10$
7	La edad del padre de Carlos, quien tiene el triple de la edad que Carlos tenía hace 10 años.	10	$x/2$
8	La suma de las edades de los dos hijos de Carlos.	9	$2x-50$
9	La diferencia entre la edad del padre de Carlos y la de Carlos.	7	$3x-30$
10	La mitad de la edad de Carlos.	2	$x-10$

Es importante, para rellenar esta tabla, discutir con el grupo de estudiantes acerca del proceso de traducción desde el lenguaje común hacia el lenguaje algebraico, por ejemplo:

Decir que el doble de la edad de Carlos es $2x$, lleva inmerso el siguiente trabajo de traducción, que para algunos resulta más complicado que para otros: dado que la edad de Carlos es x , entonces el doble de la edad de Carlos es el doble de x , ahora el doble de x se escribe como $2x$, note que existe un paso intermedio entre la lectura el doble de la edad de Carlos y la escritura $2x$, el cual muestra la comprensión de lo que está pasando y es la lectura el doble de x .

Decir que la edad de Carlos hace 10 años es $x-10$, implica haber realizado el siguiente análisis: hablar de una edad en pasado, significa retroceder en la línea del tiempo, si la línea del tiempo la vemos como la recta numérica, retroceder en el tiempo sería retroceder en la recta numérica desde un punto dado, sabemos que la operación relacionada a un retroceso en la recta numérica

es la resta, por lo tanto acá tendríamos que plantear una resta.

Esto resulta muy lógico si a un estudiante, digamos de 15 años, se le pregunta la edad que tenía hace 10 años, sin pensarlo responderá 5 años, pida qué explique que hizo para responder 5, sin lugar a duda le dirá “a 15 le quité (resté) 10”.

Discutir el hecho de que estos procesos mentales no cambian sin importar que la pregunta se la hubiesen hecho a la edad de 14, 16, 17 años a cualquier otra, lo único que cambia es la respuesta en cada momento, es de suma importancia para pasar de lo particular que fue $15-10$, a lo general que es $x-10$ “la edad que tenía hace 10 años en cualquier momento x de su vida”. De forma análoga se puede hablar de las edades en el futuro, representadas con la operación suma.

Es importante detenerse unos momentos en los literales 4 y 6, reflexionar que una expresión en lenguaje algebraico puede tener muchas traducciones al lenguaje común, podría plantearseles que describan lo que podría

significar la expresión $x-30$ en una situación distinta a la de la edad.

Esta discusión es muy importante en el sentido de ver que el lenguaje algebraico utilizado en una situación específica nos puede ayudar a traducir y resolver otras situaciones muy distintas a esta.

Como diría Polya “Siempre que resuelva un problema, piense si alguna vez ha resuelto un problema con características parecidas”, esto, claro, abarca desde el uso de técnicas específicas, hasta el uso del lenguaje algebraico.

Problema: un profesor de Matemática, en sus vacaciones, se hospedó en un hotel junto con su padre y sus dos hijas. Al registrarse, la persona que los atendió, quien también era aficionado a las matemáticas, les dijo que para registrarlos necesitaba saber sus edades. Por lo cual sostuvieron el siguiente diálogo:

Profesor: Te diré que la suma de las edades de mis dos hijos, es aun 20 años menos que la diferencia entre la edad de mi padre y la mía.

Encargado: Disculpe, pero esa información aun no me es suficiente para saber sus edades.

Profesor: Quizá te sirva saber que mi hija nació el día exacto en el que yo cumplía los 30. Y que a estas alturas he vivido el doble que mi hijo.

Encargado: Aun con esa información no soy capaz de saber sus respectivas edades.

Profesor: Bueno solo te diré que mi padre tiene tres veces la edad que yo tenía hace 10 años

Encargado: Permítame, los registro en un minuto.

Profesor: Gracias.

Encargado: Es curioso, si en lugar de decirme que ha vivido el doble que su hijo me hubiese

dicho que su hijo es 20 años menor que usted, yo jamás habría sabido sus edades.

Tal como lo hizo el encargado del hotel ¿puedes determinar las edades de los cuatro huéspedes? ¿Puede explicar el último comentario del encargado del hotel?

Solución

Debemos iniciar reflexionando sobre lo que nos dice el problema, preguntar al estudiante si tiene claro qué se nos pide, qué incógnitas intervienen, qué datos conocemos, si conocemos problemas parecidos a este, qué plan de trabajo podríamos utilizar para encontrar la solución.

Luego de esto podemos enfocarnos en cuáles partes del problema nos dan ideas de cómo iniciar nuestro ataque, se vuelve claro que la primera frase del profesor se vuelve fundamental.

El primer dato dado por el profesor nos permite imaginar que podemos plantear la igualdad

Suma de las edades de los hijos = (diferencia entre las edades del abuelo y el padre) – 20.

Si logramos plantear esta igualdad en forma de ecuación, utilizando lenguaje algebraico, entonces tendremos resuelto el problema.

Aquí se vuelve importante discutir el resto de la información del problema, para ver en torno a quién gira la información, para seleccionar alguna forma conveniente de traducir nuestro problema.

Dado que la información de los demás la entrega el profesor en función de su edad, puede resultar cómodo iniciar la traducción dándole a la edad del profesor el nombre x , esto, claro está, no es obligación, la ventaja de la matemática es que los problemas se pueden

resolver de múltiples formas, alguien puede iniciar dándole el nombre de x a la edad de cualquiera de los involucrados, es interesante discutir esas variantes con los estudiantes, y ver las distintas ecuaciones que se consiguen al final, pues al no hacer eso se transmite la mala idea de que esta es la única solución posible.

Supongamos que la edad del profesor es x años, por lo tanto la hija del profesor tendrá $x-30$ años y el hijo tendrá $x/2$ años y la suma de las edades de los hijos sería $x-30+x/2$.

Tendríamos que nuestra igualdad tendría la forma

$$x-30+x/2 = (\text{edad del abuelo}) - x-20$$

Para encontrar la edad del abuelo tenemos que la edad del profesor hace 10 años fue $x-10$ y el triple de esto sería $3(x-10)$. Así nuestra igualdad tomaría la forma

$$x-30+x/2 = 3(x-10) - x-20$$

En cada uno de los momentos previos es importante discutir la forma de construcción de las expresiones en lenguaje algebraico y nos podemos apoyar de la discusión previa realizada para completar la tabla.

Al resolver esta ecuación tendríamos $x = 40$, por lo que las edades son 90, 40, 20 y 10.

La segunda pregunta se vuelve muy interesante para estudiar, note que simplemente se ha cambiado un dato por otro, veamos qué es lo que sucede.

Si el dato del hijo cambia a ser 20 años menor, es decir $x-20$, nuestra igualdad sería

$$x-30+x-20 = 3(x-10) - x-20$$

o lo que es lo mismo al operar

$$2x-50 = 2x-50$$

$$0 = 0$$

Por lo cual es imposible determinar las edades.

Note que la sustitución de un dato por otro hace que la ecuación se transforme en una identidad, la igualdad que obtuvimos se cumple para todo x , sin embargo, no se cumple para todas las edades del grupo familiar, pues aunque las edades de los hijos y del padre el próximo año seguirán representados por el mismo lenguaje algebraico, la expresión de la edad del abuelo, no será representada de la misma forma.

Hay que reflexionar lo siguiente, en muchas ocasiones las traducciones algebraicas que usamos nos pueden conducir a callejones, que pueden aparentar o ser sin salida, como este que encontramos acá, en muchas ocasiones eso se debe a que hemos hecho una traducción no útil, por ejemplo tomar como inicio de nuestra traducción un dato que no era el más óptimo, por lo tanto el estudiante debe comprender que las traducciones a lenguaje algebraico se pueden hacer de muchas maneras, cada una de las cuales nos lleva a una expresión distinta; sin embargo, en este caso el encargado del hotel tenía razón, con ese dato todas las posibles traducciones eran caminos sin salida, eso hace que tengamos la siguiente reflexión, es necesario que usted, como docente, se tome el cuidado de revisar la información planteada en los problemas que se proponen en el aula, para evitar frustraciones de parte de los estudiantes.

Situación 2. Un problema de números. Dados dos números el primero a , el segundo b .

No.	Lenguaje común	No.	Lenguaje algebraico
1	El doble del primero		$a - b$
2	La suma de ambos números		$(a+b)^2$
3	La diferencia del primero con el segundo		$3b a$
4	El producto de ambos números		2^a
5	El producto del doble del primero con el segundo		$a+b$
6	Sustraer del segundo el primero		$b - a$
7	El cuadrado de la suma de los dos números		$2a b$
8	La suma de los cuadrados de los dos números		$3(a-b)$
9	El triple del segundo por el primero		$a^2 + b^2$
10	El triple de la diferencia de los dos números		ab

Problema: Juan y Óscar mantienen el siguiente diálogo:

Juan: He pensado dos números y sé que no los podrás adivinar.

Óscar hábil con el álgebra le dice:

Óscar: Si me respondes tres preguntas seguramente los encontraré.

Juan: Dime tus preguntas.

Óscar: ¿Cuál es el producto de los números?

Juan: 84.

Óscar: ¿Cuál es la suma de sus cuadrados?

Juan: 193.

Óscar: ¿Cuál es la diferencia entre los números?

Juan: 5.

Óscar: Fácil, los números son 7 y 12.

Juan: Increíble, acertaste.

Puedes explicar cómo Óscar encontró los dos números.

Nota: Es importante ver en este problema que a pesar que no es un problema de los que a estas alturas se conocen por los estudiantes, resulta útil para repasar el binomio al cuadrado, esto, pues, las dos primeras preguntas que hace Oscar son los elementos de una expansión binomial. La tercera pregunta ayuda a cambiar la forma $(a+b)^2$ a la forma $(a+a+5)^2$.

Actividad 2

Objetivo: Desarrollar la habilidad y manipulación sobre las expresiones del lenguaje algebraico.

Indicaciones: Para cada una de las situaciones siguientes, traduzca al lenguaje algebraico cada caso escrito en lenguaje común.

Situación 1. Un problema de dinero. Representemos con n la cantidad de dinero de Jorge

- Enrique tiene 10 dólares más que Jorge.
- Ana tiene 15 dólares menos que Enrique.
- Juan tiene la misma cantidad de dinero que Jorge con Enrique.
- Carlos tiene el doble de dinero que Ana.
- Manuel tiene 5 dólares menos que el doble de lo que tiene Ana.

Situación 2. Un problema de áreas. Suponga un rectángulo de base b

- a) La altura es 15 unidades mayor que la base.
- b) El perímetro del rectángulo.
- c) El área del rectángulo.
- d) El doble del área del rectángulo.
- e) La razón entre el área y el perímetro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Arcavi, A. (1995). El sentido de los símbolos. Generación de intuiciones en matemáticas formal.
2. Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra* en D.A. GROWS (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. MacMillan Et N.C.T.M. Nueva York.
3. Thaeler, J.S. (1986). *A New Solution to an Old Problem-Solving Word Problems in Algebra* en Mathematics Teacher.

Referencias de imágenes

1. Figura 1: Fuente
<http://www.naciodigital.cat/blocdefotos/index.php?seccio=noticies&accio=veure&id=27358&autor=1187>

Interpretación analítica de la Linea recta

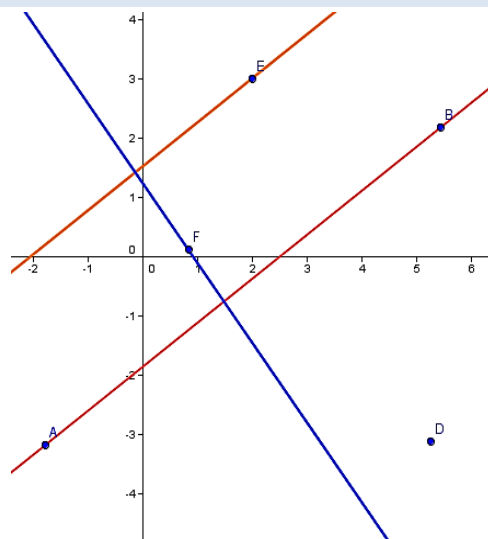


Figura 1. Intersección de rectas en el plano, paralelas con una perpendicular en el plano cartesiano.

Introducción del tema

La interpretación de la recta como una ecuación en dos variables en el inicio de la Geometría Analítica.

La idea que llevó a la geometría analítica fue: a cada punto en un plano le corresponde un par ordenado de números y a cada par ordenado de números le corresponde un punto en un plano.

Lo novedoso de la geometría analítica es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$.

Tanto en el campo teórico-académico, como en la vida cotidiana, la geometría nos rodea, y es parte imprescindible de nuestra propia humanidad.

Competencias por lograr

- Construir e interpretar modelos matemáticos

Objetivos

- Desarrollar la habilidad de manipulación algebraica para modelar diversas situaciones.
- Refinar el lenguaje algebraico para la resolución de problemas.

Presaberes

- Operaciones básicas.

INTRODUCCIÓN

Considere un plano w . Las rectas x, y pertenecen a este plano, se cortan en O y son perpendiculares.

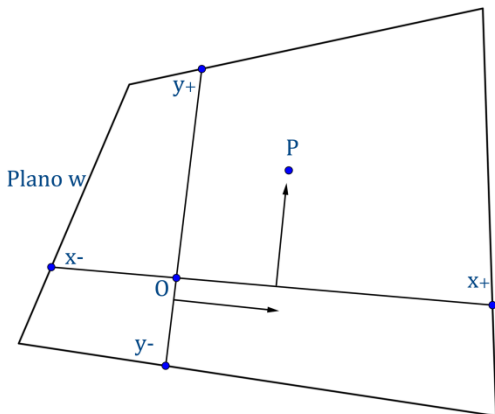


Figura 2. Plano w , conteniendo dos rectas perpendiculares.

Al punto O le llamaremos origen del plano. Partiendo de O es posible llegar a cualquier otro punto del plano, únicamente utilizando dos clases de movimientos: uno sobre la recta x y el otro paralelo a la recta y .

Diremos que ambos movimientos son *dirigidos* puesto que moverse s unidades sobre la recta x partiendo de O y hacia la derecha no es lo mismo que moverse las mismas s unidades, pero hacia la izquierda.

Las rectas x, y son llamadas ejes coordenados. Por convención asignaremos un signo a cada clase de movimiento: moverse hacia arriba será positivo y hacia abajo será negativo, Moverse hacia la derecha será positivo y a la izquierda negativo.

Si para llegar al punto P partiendo del origen O es necesario moverse m unidades dirigidas (con signo) sobre el eje x y n unidades dirigidas en dirección paralela al eje y entonces diremos que el punto P posee *coordenadas* (m, n) .

A cada punto del plano se le asocia un par ordenado de números reales (m, n) . Inversamente, a cada par ordenado de números reales es posible asociarle uno y sólo uno de los puntos del plano. La *biyección* existente entre los puntos del plano y los pares ordenados $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ nos permite definir un *punto* como cualquier par ordenado de números reales (m, n) . De aquí en adelante utilizaremos los conceptos *punto* y *par ordenado* para referirnos a lo mismo.

ÁREAS

Nuestro objetivo es encontrar las propiedades que cumplen las coordenadas de familias de puntos alineados. Antes de desarrollar tal tema nos concentraremos en algunas propiedades elementales de área en términos de coordenadas de puntos que utilizaremos más adelante.

En geometría elemental se define el área de todo triángulo como un medio del producto de la base por su correspondiente altura. Suponer que el punto P tiene coordenadas (x_1, y_1) y sea A la proyección de P sobre el eje x . Por definición el triángulo OAP es rectángulo en A de donde el área de OAP , que simbolizaremos como $[OAP]$, será igual a:

$$\frac{1}{2} x_1 y_1$$

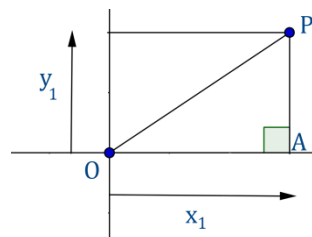


Figura 3. Ilustración de la forma geométrica de encontrar el área de un triángulo

El área $[OAP]$ será positiva cuando las coordenadas del punto P tengan el mismo

signo (negativa en los otros casos). Por convención diremos que

$$\frac{1}{2}x_1y_1$$

es el *área orientada* (con signo) del triángulo OAP . Considere ahora un segundo punto Q de coordenadas (x_2, y_2) y sean C, D las proyecciones de Q sobre los ejes x, y respectivamente.

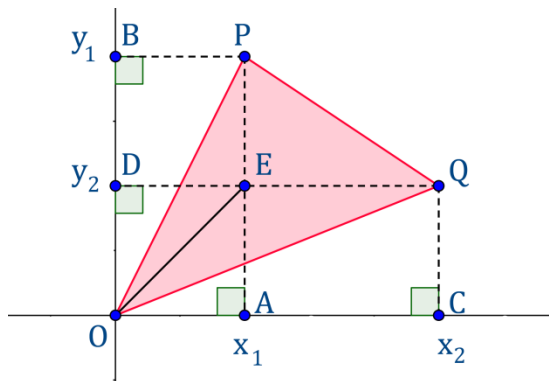


Figura 4. Proyecciones de puntos hacia los ejes X y Y.

La proyección de P sobre el eje y es B . Finalmente, sea E la intersección de las rectas PA, QD . El área del triángulo OPQ puede calcularse observando que

$$[OPQ] = [OEQ] + [EPQ] + [PEO]$$

Por otro lado es evidente que el área de OEQ es la mitad del área del cuadrilátero $EQCA$. El área de OEP es un medio del área del cuadrilátero $EDBP$. Finalmente, dado que

$$[EQCA] = (x_2 - x_1)y_2$$

$$[EDBP] = (y_1 - y_2)x_1$$

$$[EQP] = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

se obtiene la siguiente ecuación, cierta para cualesquiera dos puntos P, Q del plano:

$$[OPQ] = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)y_2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$$

LA LÍNEA RECTA

Considerar un tercer punto R de coordenadas (x_3, y_3) . Fácilmente se observa

$$[PQR] = [OQR] + [ORP] - [OQP]$$

Haciendo uso del resultado que deducimos en la sección anterior se tiene:

$$[PQR] = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3) - \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$$

Que es una manera elegante y fácil de encontrar el área de un triángulo en función de sus coordenadas. En especial, aplicando esta fórmula varias veces es posible encontrar el área de todo polígono si son conocidas las coordenadas de sus vértices.

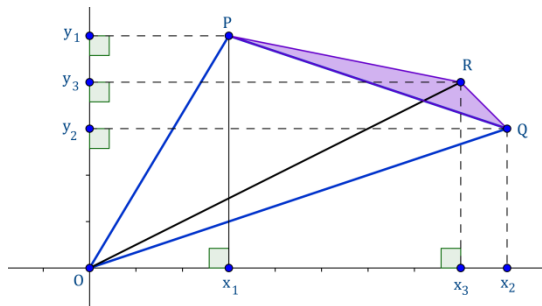


Figura 5. Vista geométrica de la suma de $[PQR] = [OQR] + [ORP] - [OQP]$

Ahora estamos listos para encontrar la ecuación o condición que deben cumplir tres puntos para que estén alineados. Considere los tres puntos P, Q, R de coordenadas $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ respectivamente.

Si suponemos que los puntos P, Q, R están alineados, entonces el área del triángulo PQR debe ser cero.

Inversamente, supongamos que los puntos P, Q, R son tales que el área del triángulo PQR es cero. Dado que la distancia de P a Q es

distinta de cero y el área de todo triángulo es proporcional a su altura, concluimos que la distancia del punto R a la recta PQ es cero. En consecuencia los puntos P, Q, R están alineados.

Hemos demostrado que los puntos P, Q, R están alineados sí y sólo si el área del triángulo PQR es cero. Analíticamente, utilizando el resultado expuesto al inicio de esta sección, concluimos que los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ están alineados sí y solo si la siguiente igualdad es cierta:

$$(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) - (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

A manera de ejercicio demostraremos que los puntos $(1,1); (3,2)$ y $(7,4)$ están alineados:

$$(3 \times 4 - 7 \times 2) + (7 \times 1 - 1 \times 4) - (3 \times 1 - 1 \times 2) = (-2) + (3) - (1) = 0$$

que en efecto demuestra lo planteado.

Fijemos dos puntos P, Q de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente y encontremos todos los puntos R de coordenadas (x, y) que pertenecen a la recta PQ . Dado que todos esos puntos que nos interesan pertenecen a la recta PQ , entonces el área de PQR siempre debe ser cero. En consecuencia la siguiente igualdad deberá cumplirse:

$$(x_2y - xy_2) + (xy_1 - x_1y) - (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

Ahora podemos reagrupar los términos en la ecuación anterior para obtener:

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) = x_2y_1 - x_1y_2$$

que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$y = x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

que es la ecuación *estándar* de la línea recta pasando por los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$. Para cada número real x es posible encontrar un número real y tal que el punto (x, y) pertenezca a la recta pedida.

El coeficiente que acompaña a la variable x en la que hemos llamado la ecuación *estándar* de la recta es conocido como la *pendiente* de la recta.

Observar que el eje x es la línea que une los puntos $(0,0); (1,0)$ de donde la ecuación del eje x viene dada por

$$\begin{aligned} x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) &= x_2y_1 - x_1y_2 \\ x(0 - 0) + y(1 - 0) &= 0 - 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

De igual manera, la ecuación del eje y está dada por

$$x = 0$$

En el caso en que $x_2 = x_1$ el denominador $x_2 - x_1$ se convierte en cero y la ecuación estándar encontrada no es válida.

En tales casos se dice que la recta que une los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ es vertical.

INTERSECCIÓN DE RECTAS

Ya hemos demostrado que la ecuación de toda recta tiene la forma

$$y = mx + t$$

donde m, t son números reales. Considere una segunda recta de ecuación $y = nx + u$.

Llamemos P al punto de intersección de tales rectas. Dado que el punto P pertenece a la primera recta, entonces sus coordenadas (x, y) cumplen la primera ecuación. Dado que el punto P también pertenece (por definición) a la segunda recta, entonces sus coordenadas

(x, y) también satisfacen la segunda ecuación. Concluimos que las coordenadas del punto de intersección deben satisfacer el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x, y :

$$\begin{cases} y = mx + t \\ y = nx + u \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene

$$0 = x(m - n) + (t - u)$$

de donde, asumiendo $m \neq n$, se obtiene

$$x = -\frac{t - u}{m - n}$$

En el caso en que las rectas sean distintas y además $m = n$ se obtiene $t - u = 0$ que es una contradicción puesto que en tal caso ambas rectas tienen igual ecuación, y por tanto son la misma. Para tales parejas de rectas no existirá un punto (x, y) que pertenezca a ambas rectas y por tanto no se cortan. En otras palabras, las rectas

$$\begin{cases} y = mx + t \\ y = nx + u \end{cases}$$

Son paralelas sí y sólo si $m = n$.

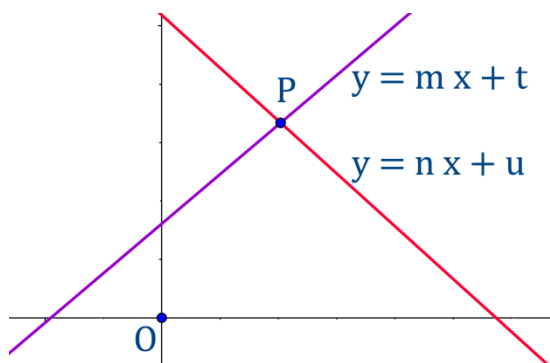


Figura 6. Intersección de rectas.

Los coeficientes m, n son comúnmente conocidos como pendientes de la recta. Observar que para poder afirmar que m es la pendiente de una recta, la ecuación de tal recta debe poder expresarse en la forma $y = mx + t$

Considere una recta aleatoria de ecuación

$$l: y = mx + t$$

Ya hemos demostrado que la ecuación del eje x es $y = 0$. El punto de intersección (x, y) de la l con el eje x deberá cumplir

$$\begin{cases} y = mx + t \\ y = 0 \end{cases}$$

De donde inmediatamente $x = -\frac{t}{m}$ y por tanto el punto de intersección será

$$\left(-\frac{t}{m}, 0\right)$$

Ahora encontraremos la intersección de l con el eje y . Puesto que la ecuación del eje y es $x = 0$, tal punto de intersección debe cumplir el siguiente sistema ecuaciones en las variables x, y :

$$\begin{cases} y = mx + t \\ x = 0 \end{cases}$$

de donde directamente se obtiene $y = t$. El punto de intersección buscado es

$$(0, t)$$

Es común encontrar en libros de Geometría Analítica que a la constante t se le llame *intercepto* puesto que indica el punto en donde la línea corta al eje y .

PENDIENTE

Como ya demostramos, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ tiene la forma

$$y = x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

para los casos en que $x_2 \neq x_1$. Hemos definido la pendiente de tal recta como el coeficiente que acompaña a la variable x . En otras palabras: la pendiente que pasa por los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Este cociente no depende de los puntos que escojamos sobre una recta l fija. Ahora daremos una interpretación geométrica-trigonométrica de tal número.

Observar el gráfico a continuación

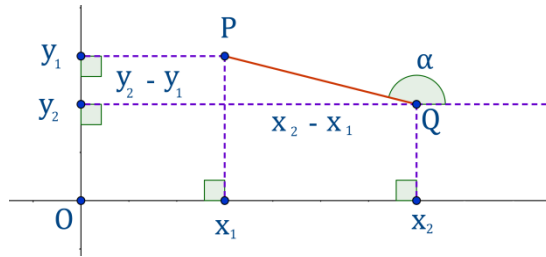


Figura 7. Gráfico que muestra los puntos para obtener la pendiente de una recta.

Es fácil deducir que la pendiente de la recta PQ corresponde a $\tan \alpha$ donde α es el ángulo *dirigido* (medido en dirección contraria al sentido en que giran las agujas del reloj) que forma la recta PQ con el eje x . De aquí que si tres puntos P, Q, R están alineados, entonces la pendiente entre los puntos P, Q es igual a la pendiente entre los puntos Q, R .

Para toda recta l definimos m_l como su pendiente.

Fácilmente se comprueba que si la recta l es paralela al eje x entonces su pendiente es cero. Para rectas l paralelas al eje y la pendiente no está definida.

RECTAS PERPENDICULARES

Encontraremos una condición necesaria y suficiente para que las rectas

$$l: y = mx + t$$

$$k: y = nx + u$$

sean perpendiculares. Asumiremos de entrada que ninguna de ellas es paralela a los ejes

coordenados, es decir, tanto m como n son números reales definidos y diferentes de cero.

Sea α el ángulo en que l corta al eje x . Sea β el ángulo en que k corta al eje x . De la sección anterior obtenemos

$$\tan \alpha = m$$

$$\tan \beta = n$$

De donde

$$\alpha = \tan^{-1}(m)$$

$$\beta = \tan^{-1}(n)$$

Las rectas l, k son perpendiculares sí y solo si la resta $\alpha - \beta$ es múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ que es sí y solo si $\tan(\alpha + \beta)$ está indefinida.

Por otro lado sabemos que

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\tan^{-1}(m) + \tan^{-1}(n))$$

$$= \frac{m + n}{1 - mn}$$

que está indefinida solo para el caso $mn = -1$.

Se concluye que las rectas l, k son perpendiculares sí y solo si el producto de sus pendientes es -1 .

Ejemplo: Demostrar que la recta que une los puntos $(-6, -1); (3, 2)$ es perpendicular a la recta que une los puntos $(1, 5); (3, -1)$.

Solución: La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-6, -1); (3, 2)$ es

$$m = \frac{2 - (-1)}{3 - (-6)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 5); (3, -1)$ es

$$n = \frac{-1 - 5}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Tendremos $mn = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$ de donde las rectas deben ser perpendiculares y la demostración finaliza.

RECTA DADO UN PUNTO Y LA PENDIENTE

Se desea encontrar una recta que pase por un punto (x_0, y_0) y además, tenga pendiente m . Observar que todo punto (x, y) sobre la recta deseada debe cumplir la igualdad

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

de donde

$$y = m(x - x_0) + y_0 = mx + (y_0 - mx_0)$$

que claramente tiene pendiente m .

DISTANCIA

Una aplicación directa del teorema de Pitágoras es que la distancia entre los puntos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ está dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

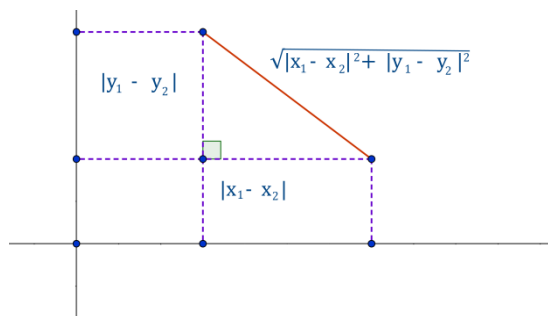


Figura 8. Distancia entre dos puntos.

PUNTO MEDIO

Sea M el punto medio del segmento AB . Los puntos A, B tienen coordenadas $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ respectivamente.

Las proyecciones de A, B sobre el eje x son R, T respectivamente. En el cuadrilátero $ABTR$ los lados AR, BT son paralelos. Aplicando el teorema de Thales, la proyección de M sobre el eje x debe ser el punto medio del segmento RT . Se concluye que la coordenada en x del punto medio del segmento AB es $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

De manera análoga se encuentra la coordenada en el eje y . El punto M tendrá coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

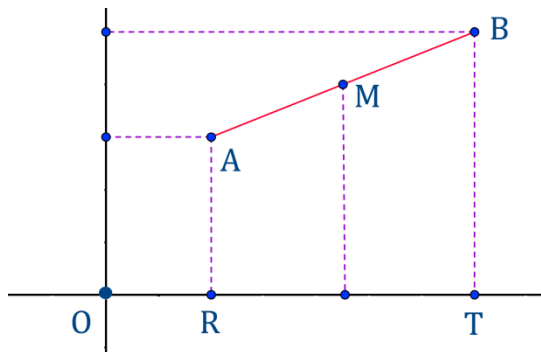


Figura 9. Punto medio de una recta AB

Los pasos generales para la demostración del resultado anterior, sin hacer uso del teorema de Thales, son los siguientes:

El punto M equidista de los puntos A, B y por tanto la siguiente igualdad debe satisfacerse:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Además, dado que el punto M pertenece a la recta uniendo A y B entonces debe satisfacer la ecuación de esa recta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Simultaneando se obtiene la respuesta deseada.

CONCURRENCIA

Son dadas tres rectas

$$p: y = lx + t$$

$$q: y = mx + u$$

$$r: y = nx + w$$

Estamos interesados en encontrar la condición necesaria y suficiente para que tales rectas concurren.

Simultaneamos las primeras dos ecuaciones para encontrar su punto de intersección:

$$y = lx + t = mx + u \Rightarrow x(m - l) = t - u$$

Despejando:

$$x = \frac{t - u}{m - l}$$

$$y = \frac{m(t - u)}{m - l} + u$$

El punto de intersección de las rectas p, q será

$$\left(\frac{t - u}{m - l}, \frac{m(t - u) + u(m - l)}{m - l} \right)$$

La recta r pasará por el punto de intersección de p y q sí y solo si el punto encontrado satisface la ecuación de r :

$$\frac{m(t - u) + u(m - l)}{m - l} = n \left(\frac{t - u}{m - l} \right) + w$$

Reescribiendo:

$$m(t - u) + u(m - l)$$

$$= n(t - u) + w(m - l)$$

Que es sí y solo si

$$(nt - wl) - (mt - ul) + (mw - nu) = 0$$

Retrocediendo un poco hasta la primera sección de este escrito encontraremos que esta es la condición necesaria y suficiente para que los puntos $(l, t); (m, u); (n, w)$ estén alineados.

Hemos demostrado la siguiente propiedad:

Propiedad: Las rectas

$$p: y = lx + t$$

$$q: y = mx + u$$

$$r: y = nx + w$$

concurrentes sí y solo si los puntos $(l, t); (m, u); (n, w)$ están alineados.

Ejemplo: Demostrar que las rectas que pasan por las parejas de puntos siguientes son concurrentes:

$$(1,5) \quad (6,0)$$

$$(1,2) \quad (7,5)$$

$$(2,1) \quad (4,5)$$

Solución: Primeramente encontraremos las ecuaciones de cada una de las tres rectas:

$$l_1: \frac{y - 5}{x - 1} = \frac{5 - 0}{1 - 6} = -1$$

$$l_1: y = -x + 6$$

$$l_2: \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2 - 5}{1 - 7} = \frac{1}{2}$$

$$l_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$l_3: \frac{y - 1}{x - 2} = \frac{1 - 5}{2 - 4} = 2$$

$$l_3: y = 2x - 3$$

Aplicando el resultado que hemos demostrado con $l = -1; t = 6; m = \frac{1}{2}; u = \frac{3}{2}; n = 2;$

$w = -3$ se tiene

$$(nt - wl) - (mt - ul) + (mw - nu)$$

$$= (12 - 3) - \left(\frac{6}{2} + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{-3}{2} - 3 \right) = 0$$

que demuestra lo pedido.

CENTROIDE

Demostraremos que las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos concurren.

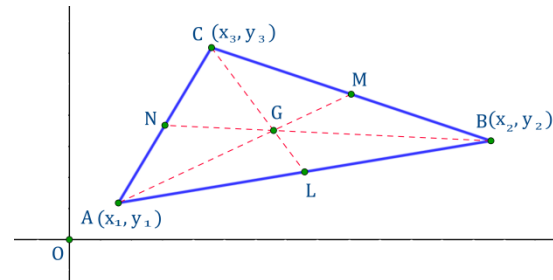


Figura 10. Centroide de un triángulo.

Considerar los puntos A, B, C de coordenadas $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ respectivamente. Llamemos G al punto de coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Llamemos M, N, L a los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente.

En secciones anteriores encontramos las coordenadas del punto medio de un segmento. Fácilmente se verifica que las coordenadas de los puntos M, N, L son

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

respectivamente. La pendiente de la recta que une G y M es:

$$\frac{\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} - \frac{y_2 + y_3}{2}}{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - \frac{x_2 + x_3}{2}} = \frac{2y_1 - (y_2 + y_3)}{2x_1 - (x_2 + x_3)}$$

Calcularemos ahora la pendiente de la recta que une los puntos A y M :

$$\frac{y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}}{x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2}} = \frac{2y_1 - (y_2 + y_3)}{2x_1 - (x_2 + x_3)}$$

Como las rectas AM, MG tienen igual pendiente entonces son paralelas. Como además comparten el punto G entonces coinciden y por tanto los puntos A, G, M están alineados.

De manera análoga se concluye que las rectas BN, CL contienen al punto G y por tanto las medianas del triángulo ABC concurren en G . A este punto llamaremos el *baricentro* del triángulo.

El método utilizado en la demostración de este resultado no siempre es “factible” puesto que en determinados problemas no es fácil adivinar las coordenadas del punto buscado.

Actividad 1.

Objetivo

Definir y estudiar las propiedades del *baricentro de un cuadrilátero*.

Baricentro: Considerar un cuadrilátero no degenerado $ABCD$. Las coordenadas de los vértices A, B, C, D son $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4)$ respectivamente. Se definen G_A, G_B, G_C, G_D como los baricentros de los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC respectivamente. El baricentro del cuadrilátero $ABCD$ se define como el punto de concurrencia de las rectas AG_A, BG_B, CG_C, DG_D .

Nuestro objetivo será demostrar el resultado anterior para el caso especial en que $A = (2,1), B = (4,5), C = (7,2), D = (2,-1)$.

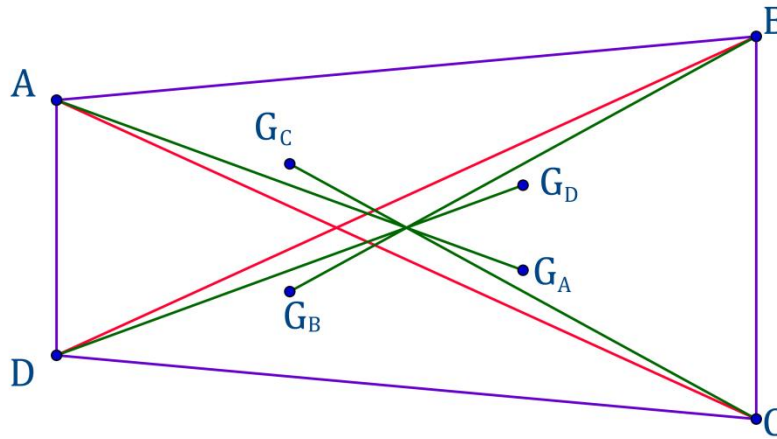


Figura 11. Baricentro de un cuadrilátero.

Sugerencias para resolver el problema

- Permita a sus estudiantes encontrar las coordenadas del baricentro de cada uno de los triángulos mencionados.
- Discuta las posibles formas en que se puede demostrar la concurrencia de las rectas AG_A, BG_B, CG_C, DG_D .
- Permita a sus estudiantes utilizar su propio método (el que resulte más conveniente para ellos)
- Sugiera construir un punto G de coordenadas $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.
- Sugiera demostrar que el punto G anteriormente definido, está sobre cada una de las rectas AG_A, BG_B, CG_C, DG_D y haga referencia a la demostración dada para el baricentro de un triángulo.
- Permita que sus estudiantes concluyan el problema.

ADICIONAL

- Discuta las posibles maneras de resolver el caso general.
- Demuestre el caso general.

Actividad 2

Objetivo

Desarrollar un método que permita encontrar la distancia entre dos rectas paralelas.

Son dadas las ecuaciones de dos rectas paralelas

$$y = mx + t$$

$$y = mx + u$$

Se desea encontrar la distancia que separa a tales rectas.

Nuestro objetivo específico será encontrar la distancia que separa a las rectas

$$l_1: y = x + 1$$

$$l_2: y = x - 3$$

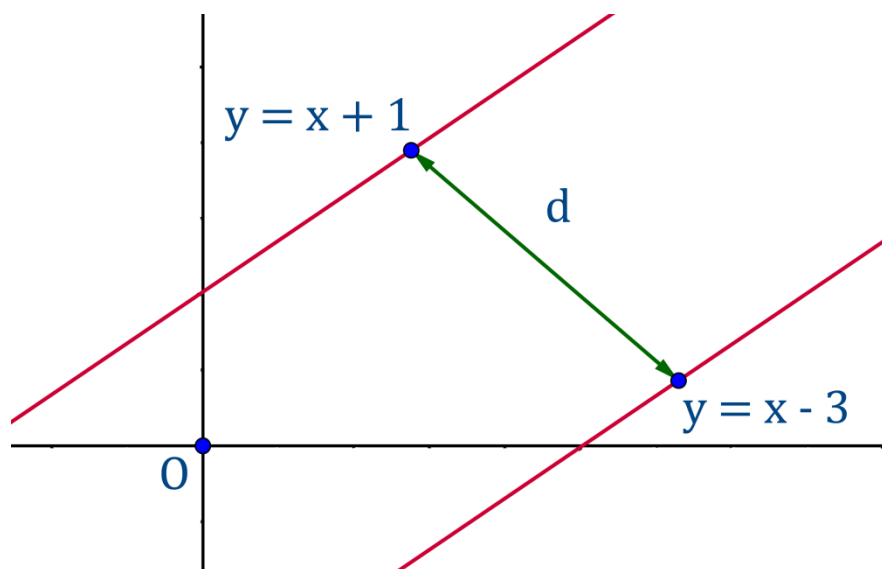


Figura 12. Distancia entre rectas paralelas.

Sugerencias para resolver el problema

- Comience discutiendo el significado de la distancia de un punto a una recta.
- Discuta el significado de distancia entre rectas paralelas.
- Sugiera tomar un punto específico P sobre una de las rectas (l_1).
- Sugiera encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que es perpendicular a l_1 .
- Discuta la manera en que puede encontrarse el punto de intersección Q de esta recta perpendicular a l_1 y la recta l_2 .
- Permita a sus estudiantes llegar a una respuesta concreta.

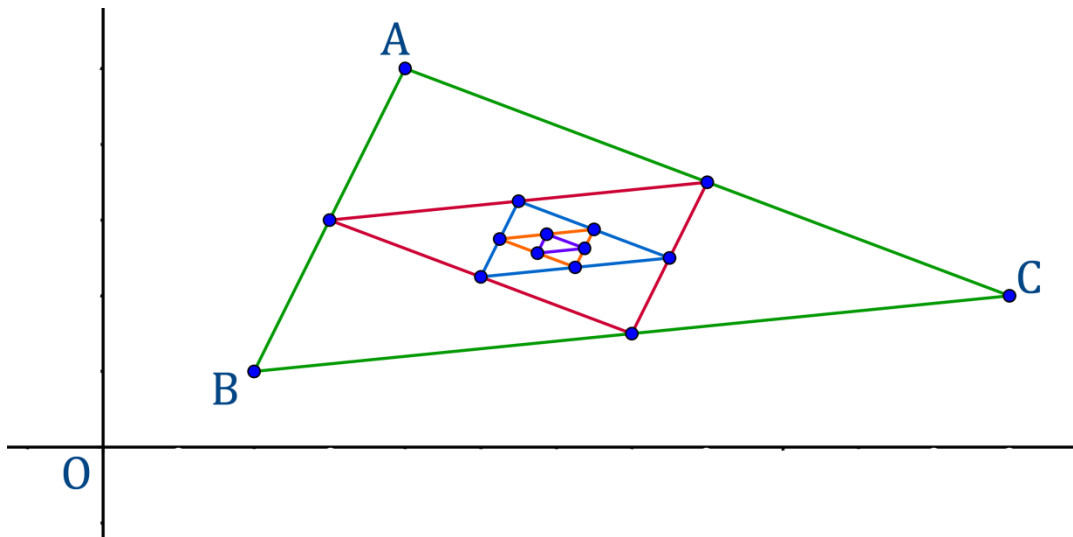
Actividad 3:

Objetivo

Aplicar las propiedades de la pendiente en la resolución de problemas analíticos sencillos.

Es dado un triángulo ABC . Sea $A_1B_1C_1$ el triángulo formado por los puntos medios de los lados de ABC . Sea $A_2B_2C_2$ el triángulo formado por los puntos medios de los lados de $A_1B_1C_1$. De manera análoga se definen los triángulos $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, $A_5B_5C_5$.

Nuestro objetivo específico será demostrar que los baricentros de todos estos triángulos coinciden para un caso específico y para el caso general. Para el caso específico se pide trabajar con los puntos $(1,2)$; $(2,5)$; $(4,3)$.



Sugerencias para resolver el problema

- Comience discutiendo el caso específico en que $A = (1,2)$; $B = (2,5)$; $C = (4,3)$.
- Encuentre los baricentros de los triángulos ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.
- Sugiera a los alumnos encontrar un patrón que permita generalizar el problema.
- Para el caso general sugiera demostrar colinealidad de puntos.
- Discuta con los alumnos qué colinealidades conviene demostrar.
- Demuestre el caso general guiándose por el caso específico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Kletenik, (1979). *Problemas de Geometría Analítica*. Editorial MIR, Moscú,
2. Lehmann Charles, (1980). *Geometría Analítica*, Editorial LIMUSA, México.
3. Ya.S. Burgrov S.M. Nikolski, *Elementos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica*, Editorial MIR, Moscú.

Sistemas lineales de ecuaciones

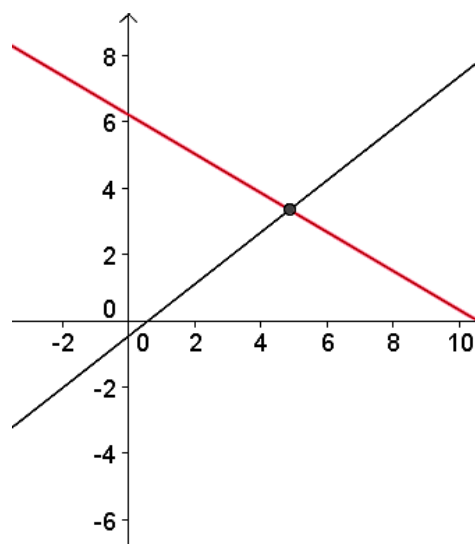


Figura 1. Un sistema de ecuaciones lineales en el plano solo puede tener una solución, ninguna solución o infinitas soluciones.

Introducción del tema

Encontrar las soluciones de un sistema lineal es uno de los principales temas estudiados en el Álgebra Lineal. La teoría de Matrices y determinantes es de especial importancia en la solución de sistemas lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales son ampliamente utilizados en la geometría analítica, y tienen aplicaciones en el campo de las ciencias naturales y en las ciencias sociales.

La importancia de la matemática en el desarrollo científico y tecnológico de la humanidad está determinado por la posibilidad de elaborar modelos matemáticos de sucesos reales, ya sea de la ciencia o de la técnica.

Competencias por lograr

- El Cálculo Simbólico.
- Dominio Algebraico.
- Modelaje Matemático.

Objetivos

- Comprender los distintos métodos de solución de ecuaciones lineales de cuatro o menos incógnitas.
- Aplicar los diferentes métodos en la solución de problemas que requieran el uso de sistemas lineales.

Presaberes

- Operaciones algebraicas elementales.

INTRODUCCIÓN

Por sistema lineal de ecuaciones se entenderá un conjunto o familia de ecuaciones que presenta una o más incógnitas, todas ellas con exponente uno. El siguiente es un ejemplo de un sistema lineal de ecuaciones que consta de tres ecuaciones y tres variables

$$\text{Sistema lineal} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

En la primera ecuación de este sistema aparecen tres variables, todas ellas con exponente uno. En la segunda ecuación aparecen nuevamente las tres variables, pero esta vez el coeficiente que acompaña a la variable x es cero.

Finalmente, en la tercera ecuación, vuelven a aparecer las mismas tres variables, pero esta vez el coeficiente de la variable z es cero. Notar que es posible reescribir el sistema de la siguiente manera:

Sistema lineal equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 0x + y + z = 0 \\ x + 2y + 0z = 1 \end{cases}$$

en el cual todas las variables aparecen de manera explícita en todas las ecuaciones que conforman el sistema, pero por comodidad y para simplificar futuros cálculos algunas veces será más conveniente no escribir las variables en aquellas ecuaciones en que su coeficiente sea cero.

Algunas veces los sistemas de ecuaciones aparecen acompañados de constantes que se desconocen. En tal caso llamaremos parámetros a los valores constantes y variables a los valores que se desea encontrar. Será necesario que el problema por resolver

especifique cuáles son parámetros y cuáles variables.

Para ejemplificar, consideremos la ecuación $2x + 1 = 7$. Esta ecuación presenta una única variable a la cual se ha llamado x . La ecuación anterior puede ser obtenida de $2x + 1 = a$ al darle al parámetro a el valor 7. Para cada valor del parámetro a se obtiene una solución x .

Para problemas de este tipo es necesario saber de antemano si a representa un valor por encontrar o si es un parámetro.

Consideremos una ecuación lineal del tipo

$$ax + by + cz = d$$

donde x, y, z son las variables. Toda solución (x, y, z) de esta ecuación también es solución de

$$(at)x + (bt)y + (ct)z = dt$$

Si además, escogemos t tal que $t \neq 0$ entonces toda solución de la última es una solución de la primera. Esto es puesto que la igualdad

$$(at)x + (bt)y + (ct)z = dt$$

implica

$$t(ax + by + cz - d) = 0$$

y puesto que $t \neq 0$ necesariamente debe cumplirse

$$(ax + by + cz - d) = 0$$

En tal caso diremos que las ecuaciones

$$ax + by + cz = d$$

$$(at)x + (bt)y + (ct)z = dt$$

son *equivalentes*.

Dos ecuaciones lineales son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

En general un sistema lineal puede no tener igual cantidad de ecuaciones que variables. Para un sistema que presenta m ecuaciones y n variables diremos que una ecuación es *deducible* o es *consecuencia de las restantes* si es posible obtenerla mediante sumas o restas de las restantes $m - 1$ ecuaciones (o de ecuaciones equivalentes a ellas).

En sistemas de m ecuaciones que presentan una ecuación deducible de las $m - 1$ restantes es posible borrar tal ecuación y trabajar con las restantes, sin temor a perder soluciones en el proceso.

Si el nuevo sistema de $m - 1$ ecuaciones posee, nuevamente, una ecuación deducible de las restantes entonces es posible borrar tal ecuación. El proceso se puede repetir varias veces.

SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA

Para un sistema que posee n ecuaciones con n incógnitas el siguiente proceso nos lleva a la solución del sistema:

1. Se despeja la primera variable en la primera ecuación del sistema.
2. Se *sustituye* el valor de esta variable en la segunda ecuación.
3. Se despeja la segunda variable de la segunda ecuación.
4. Se sustituye lo encontrado en la expresión que se obtuvo al despejar la primera variable.
5. Se sustituyen las expresiones encontradas para las primeras dos variables en la tercera ecuación.
6. Se despeja la tercera variable de la tercera ecuación.

7. Se sustituye lo encontrado en las expresiones que se encontraron para las primeras dos variables.
8. Se sustituyen las expresiones encontradas para las primeras tres variables en la cuarta ecuación
9. Repetir el proceso hasta obtener una ecuación que solo contenga una variable.

Después de haber aplicado cierta cantidad de veces el proceso descrito anteriormente se habrán encontrado todos los valores de las variables y por tanto, se habrá resuelto el sistema.

Ejemplo: Encontrar los valores de las variables x, y, z, w si se sabe que:

$$x + y + z + w = 0 \quad (1)$$

$$x + y + z + 2w = 2 \quad (2)$$

$$2x + y + z + w = -2 \quad (3)$$

$$x + y + 2z + w = 1 \quad (4)$$

Solución: Despejando x en (1) se obtiene

$$x = -y - z - w$$

Sustituyendo en (2) se obtiene

$$w = 2$$

Sustituyendo este valor en la expresión encontrada para la variable x se tiene:

$$x = -y - z - 2$$

Sustituyendo los valores encontrados para x, w en (3) se tiene:

$$2(-y - z - 2) + y + z + 2 = -2$$

De donde

$$-y - z = 0$$

Despejando y :

$$y = -z$$

Sustituyendo en las expresiones encontradas para x, w se tiene

$$x = -y - z - 2 = -2$$

$$w = 2$$

Sustituyendo las expresiones encontradas para las variables x, y, w en (4) se tiene:

$$-2 + (-z) + 2z + 2 = 1$$

De donde $z = 1$ que finalmente nos da $y = -z = -1$. La solución al sistema será

$$(x, y, z, w) = (-2, -1, 1, 2)$$

IGUALACIÓN ALGEBRAICA

Los pasos por seguir son más sencillos de memorizar. Se dispone de un sistema de dos ecuaciones y dos variables.

1. Despejar la misma variable en ambas ecuaciones.
2. Igualar las expresiones obtenidas.
3. Despejar la segunda variable
4. Regresar a cualquiera de las ecuaciones iniciales y encontrar el valor de la primera variable.

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solución: Despejando la primera variable en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{5 - y}{2}$$

$$x = \frac{8 - 2y}{3}$$

Igualando:

$$\frac{5 - y}{2} = \frac{8 - 2y}{3}$$

que es equivalente a

$$15 - 3y = 16 - 4y$$

Que al reescribir se obtiene:

$$y = 1$$

Regresando a la ecuación $x = \frac{5 - y}{2}$ se obtiene:

$$x = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La única solución al sistema es

$$(x, y) = (2, 1).$$

REDUCCIÓN

Se dispone de dos ecuaciones con dos variables.

1. Multiplicar ambas ecuaciones de tal forma que la primera variable en ambas ecuaciones aparezca con el mismo coeficiente, pero con diferente signo.
2. Sumar las ecuaciones
3. Despejar la segunda variable.
4. Regresar al sistema original, sustituir el valor de la segunda variable y encontrar el valor de la primera.

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solución: Multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 2 .

$$\begin{cases} -6x - 3y = -15 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases}$$

Sumar ambas ecuaciones:

$$(-6x - 3y) + (6x + 4y) = -15 + 16$$

$$y = 1$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2x + 1 = 5$$

de donde $x = 2$ y la única solución será $(x, y) = (2, 1)$.

EL CASO MÁS BÁSICO

Se comenzará por encontrar, en caso que existan, todas las soluciones al sistema lineal más sencillo:

$$ax = b$$

donde a, b son parámetros y x el valor por encontrar. Este sistema está formado por una ecuación, una variable y dos parámetros. Los parámetros pueden tomar cualquier valor real de donde se pueden presentar varios casos:

1. En el caso en que $a \neq 0$ la ecuación tiene una única solución dada por $x = \frac{b}{a}$.
2. En el caso en que $a = 0$ y $b = 0$ la ecuación tiene infinitas soluciones puesto que todo número real satisface la igualdad $0 \cdot x = 0$.
3. En el caso en que $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación no tiene soluciones ya que al sustituir x por cualquier número real, se obtiene cero en el miembro izquierdo, igualado a un número diferente de cero en el miembro derecho.

Hemos encontrado todas las soluciones a tal sistema en todos los casos posibles. Es de especial importancia notar que para $a \neq 0$ siempre existe una única solución, independiente del valor que se le asigne a b .

DOS INCÓGNITAS, DOS SISTEMAS

Considerar ahora un sistema *más general*, que el anterior:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = l \end{cases}$$

Se dice que es un sistema *más general*, puesto que este se reduce al anterior bajo la condición

$b = m = n = l = 0$, en donde se tiene solo una ecuación y una variable. Llamaremos *solución del sistema* a toda pareja de valores reales $x = \alpha$, $y = \beta$ que al ser introducidos en cada una de las ecuaciones del sistema, las convierte en identidades.

Para resolver este sistema conviene multiplicar la primera ecuación por n , la segunda por $-b$ y luego sumarlas:

$$\begin{cases} ax + by = c \Rightarrow anx + bny = cn \\ mx + ny = l \Rightarrow -bmx - bny = -bl \end{cases}$$

$$anx - bmx = cn - bl$$

Que al reagrupar se obtiene

$$x(an - bm) = cn - bl$$

Notar que se ha reducido el sistema inicial, de dos ecuaciones con dos incógnitas, a un sistema de una ecuación con una incógnita. Como ya se demostró, este sistema tiene *solución única* solo en el caso en que $an - bm \neq 0$. Considere el siguiente ejemplo en que la condición $an - bm \neq 0$ no es cierta:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 10x + 6y = 3 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 se obtiene $10x + 6y = 2$ que al restarle la segunda ecuación del sistema se obtiene $0 = -1$ que es una contradicción evidente. Se concluye que el sistema no tiene solución.

Considerar ahora otro ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 10x + 6y = 2 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 se obtiene $10x + 6y = 2$ que al restarle la segunda ecuación del sistema se obtiene $0 = 0$ que es una identidad puesto que todo número real es igual a él mismo.

Se concluye que el sistema posee infinitas soluciones pues bastará con que x, y cumplan

la primera ecuación del sistema. La segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicándola por 2 y por tanto son *equivalentes* en el sentido que toda solución de la primera ecuación es una solución de la segunda y viceversa.

En este sistema en particular, basta asignarle un valor real arbitrario a la variable y para obtener un valor para la variable x . Puesto que y puede tomar cualquier valor real (y hay infinitos números reales) podemos encontrar infinitas soluciones, una para cada valor real de y .

Regresando al caso en que $an - bm \neq 0$ tendremos:

$$x = \frac{cn - bl}{an - bm}$$

Ahora es posible sustituir en la igualdad $ax + by = c$ para obtener

$$a\left(\frac{cn - bl}{an - bm}\right) + by = c$$

que al reagrupar se tiene

$$\begin{aligned} by &= c - a\left(\frac{cn - bl}{an - bm}\right) \\ by &= \frac{c(an - bm)}{an - bm} - \frac{a(cn - bl)}{an - bm} \\ by &= \frac{abl - cbm}{an - bm} = \frac{b(al - cm)}{an - bm} \\ y &= \frac{al - cm}{an - bm} \end{aligned}$$

Se ha encontrado la solución única correspondiente al caso $an - bm \neq 0$. Cuando tal condición no se cumple, el sistema de ecuaciones puede tener infinitas soluciones o ninguna. Notar que cuando tal sistema tiene infinitas soluciones no necesariamente se cumplirá que todos los valores reales de las variables sean solución.

También notar que si el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas cumple $an - bm = 0$, y además posee una solución, entonces el sistema admitirá infinitas soluciones.

TRES INCÓGNITAS, TRES SISTEMAS

Considerar ahora un sistema más general que los anteriores:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

en donde se tiene tres variables x, y, z .

Se llama solución del sistema a toda terna de números reales $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ que al ser introducidos en cada una de las ecuaciones del sistema las convierte a todas en identidades.

Para encontrar las soluciones a tal sistema proceder de manera similar al caso anterior:

1. Multiplicar la primera igualdad por $b_2c_3 - b_3c_2$.
2. Multiplicar la segunda ecuación por $b_3c_1 - b_1c_3$
3. Multiplicar la tercera ecuación por $b_1c_2 - b_2c_1$
4. Sumar todas las ecuaciones anteriores.

Mediante este algoritmo se obtendrá una ecuación con una incógnita (variable x). Se podrá despejar x para luego sustituir en las ecuaciones del sistema y poder encontrar las variables restantes.

El proceso anterior es mucho más tedioso cuando la cantidad de ecuaciones y variables aumenta.

DETERMINANTES

Aunque la teoría de Determinantes y matrices es extensa, en esta ocasión se estudiarán únicamente las soluciones de sistemas de dos y tres incógnitas mediante el uso de determinantes.

Por conveniencia definiremos el término *Determinante*. Para un arreglo de números de dos columnas y dos filas se define el determinante de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

El arreglo de números ha sido encerrado entre barras para indicar que se trata de su determinante.

Ya hemos encontrado que la solución al sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = l \end{cases}$$

está dado por

$$x = \frac{cn - bl}{an - bm} \quad y = \frac{al - cm}{an - bm}$$

Utilizando la notación de determinante recién introducida puede escribirse

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ l & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}$$

Las igualdades anteriores son usualmente conocidas como las reglas de Cramer para un sistema de dos ecuaciones con dos variable.

Se define el determinante del arreglo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

mediante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ p & q & r \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} n & l \\ q & r \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} m & l \\ p & r \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$$

A manera de ejercicio el lector podrá demostrar, siguiendo el método descrito en la sección anterior, que las soluciones al sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Están dadas por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Que son consistentes siempre que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

sea diferente de cero. Para el caso en que tal determinante es cero no es posible asegurar si el sistema posee infinitas o ninguna solución.

SISTEMAS NO LINEALES QUE SE RESUELVEN EMPLEANDO SISTEMAS LINEALES

Es común encontrar sistemas en los cuales no todas (o todas) las variables aparecen con exponente uno. Algunas veces es posible aplicar uno o más *Cambios de Variable* que transformen el sistema en un sistema lineal. Considerar el sistema no lineal siguiente:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 8 \end{cases}$$

en donde todas las variables aparecen elevadas al exponente -1 . Para resolver este sistema vasta con definir $z = \frac{1}{x}$ $w = \frac{1}{y}$ El sistema tendrá la forma

$$\begin{cases} 2z + w = 5 \\ 3z + 2w = 8 \end{cases}$$

que puede ser resuelto utilizando cualquiera de los métodos estudiados en las secciones anteriores. En particular este sistema ya se resolvió en la sección que lleva el nombre IGUALACIÓN ALGEBRAICA donde se obtuvo la única solución $(z, w) = (2, 1)$. Pero de la manera en que se definieron las variables z, w inmediatamente tendremos

$$x = \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{w} = \frac{1}{1} = 1$$

Obtenemos así la única solución

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Algunos cambios de variable pueden resultar más difíciles que otros. Considerar el sistema

$$\begin{cases} y^3 + 6y^2 + 2x^2 + 4x + 12y = -5 \\ 2y^3 + 12y^2 + 3x^2 + 6x + 24y = -11 \end{cases}$$

que NO es un sistema lineal en las variables x, y . Reescribiremos el sistema para que las ecuaciones parezcan más sencillas:

$$\begin{cases} (y^3 + 6y^2 + 12y) + (2x^2 + 4x) = -5 \\ (2y^3 + 12y^2 + 24y) + (3x^2 + 6x) = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) + (2x^2 + 4x + 2) = 5 \\ (2y^3 + 12y^2 + 24y + 16) + (3x^2 + 6x + 3) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y + 2)^3 + 2(x + 1)^2 = 5 \\ 2(y + 2)^3 + 3(x + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

Hacer el cambio de variable $z = (x + 1)^2$
 $w = (y + 2)^3$ para obtener el siguiente sistema lineal en las variables z, w :

$$\begin{cases} 2z + w = 5 \\ 3z + 2w = 8 \end{cases}$$

que como ya sabemos tiene la única solución $(z, w) = (2, 1)$. Regresando a las variables originales se tendrá

$$x = \pm\sqrt{z} - 1 = \pm\sqrt{2} - 1$$

$$y = \sqrt[3]{w} - 2 = \sqrt[3]{1} - 2 = -1$$

Se concluye que las únicas soluciones son

$$(x, y) = (\sqrt{2} - 1, -1)$$

$$(x, y) = (-\sqrt{2} - 1, -1)$$

INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS

Muchas veces la resolución de un problema puede implicar resolver un sistema lineal de ecuaciones

Un primer ejemplo sencillo es el siguiente:

1-La suma de dos números es 5 y su diferencia es 1. Encontrar los números.

Solución: Llamemos x al primer número y y al segundo. A continuación se presentan las diferentes partes del enunciado acompañadas de su expresión algebraica correspondiente:

- La suma de dos números es 5.
 $x + y = 5$
- Su diferencia es 1.
 $x - y = 1$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Sumando ambas ecuaciones se obtiene $2x = 6$ que implica directamente $x = 3$.

Sustituyendo en la primera ecuación se encuentra $y = 2$.

Como puede observarse, la correcta interpretación algebraica del enunciado conduce a una solución rápida y sencilla.

Un enunciado un poco más complicado es el siguiente:

2-Tres números son tales que el primero disminuido en el doble del segundo y aumentado en el triple del tercero es 11. Cuatro veces el primero aumentado en el segundo y disminuido en el tercero es 4. Dos veces el primero disminuido en el segundo y

aumentado en el triple del tercero es 10. Encontrar los números.

Solución: Denotamos por x, y, z los tres números. A continuación las diferentes partes del enunciado con su respectiva expresión algebraica:

- El primero disminuido en el doble del segundo y aumentado en el triple del tercero es 11.

$$x - 2y + 3z = 11$$

- Cuatro veces el primero aumentado en el segundo y disminuido en el tercero es 4.

$$4x + y - z = 4$$

- Dos veces el primero disminuido en el segundo y aumentado en el triple del tercero es 10.

$$2x - y + 3z = 10$$

Nuevamente se obtiene un sistema lineal. Restando de la segunda ecuación dos veces la tercera se tiene:

$$3y - 7z = -16 \quad (1)$$

Restando de la tercera ecuación dos veces la primera se tiene:

$$3y - 3z = -12 \quad (2)$$

Restando (1) de (2) se tiene

$$4z = 4$$

Que implica directamente $z = 1$. Sustituyendo se tiene $3y - 3 = -12$ de donde $y = -3$. Finalmente, sustituyendo estos valores en la primera ecuación de este problema se tiene $x + 6 + 3 = 11$ de donde $x = 2$. Su concluye que la única solución es $(x, y, z) = (2, -3, 1)$.

Actividad 1

Objetivo

Desarrollar un método eficiente para resolver sistemas lineales de ecuaciones.

Método de Gauss: Se tiene un arreglo de números de m filas y n columnas. Las operaciones permitidas son las siguientes:


- Multiplicar cada elemento de una fila por un número real arbitrario t distinto de cero.
- Multiplicar cada elemento de una fila por un número real t diferente de cero y luego sumar esta fila a cualquiera otra. Para realizar la suma de dos filas debe sumar los términos correspondientes.
- Intercambiar dos filas.

Nuestro objetivo será resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables haciendo uso

del método de Gauss. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Borrar todas las variables y los signos de igualdad. El resultado será un arreglo de números de dimensión 3×4 . Tal arreglo se muestra a continuación (no olvidar los signos):

1	-2	3	11	
4	1	-1	4	
2	-1	3	10	

La figura anterior muestra un arreglo de tres filas y cuatro columnas. Los números sombreados conforman lo que llamaremos la diagonal del arreglo.

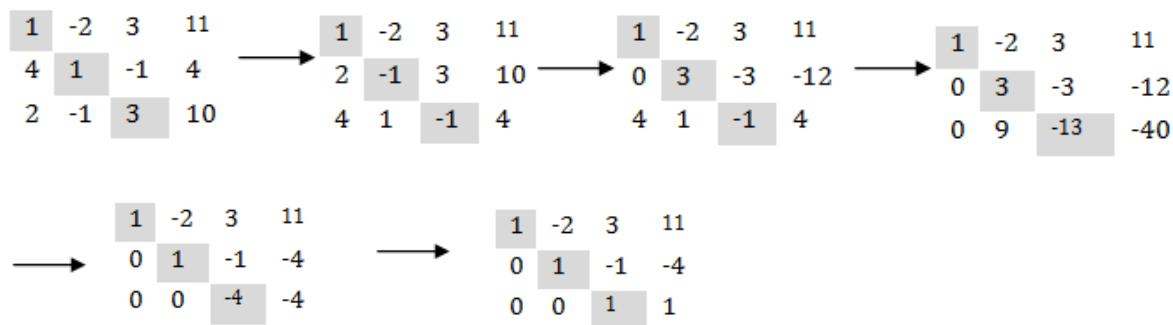
El método de Gauss consiste en aplicar varias veces las operaciones descritas al inicio de esta actividad, al arreglo de números que se ha obtenido del sistema de ecuaciones. Se desea que todos los elementos debajo de la diagonal sean ceros, mientras que todos los elementos sobre la diagonal sean unos. Cuando esto haya sido hecho bastará con insertar las variables en sus lugares correspondientes y resolver el nuevo sistema, comenzando de abajo hacia arriba.

Sugerencias para trabajar el problema

- Permita al grupo estudiantil intentar resolver el problema antes de darle una pequeña ayuda.

- Pídales el paso que debe realizarse para colocar un cero en la posición (2,1): fila 2, columna 1.
- Solicíteles que coloquen un cero en la posición (3,1): fila 3, columna 1.
- Que coloquen un cero en la posición (3,1): fila 3, columna 1.
- Discuta el siguiente comentario: para hacer ceros todos los elementos debajo de la diagonal en la primera columna, debe utilizarse siempre la primera fila.
- Pida a los alumnos que hagan cero a todos los elementos de la segunda columna que están debajo de la diagonal.
- Permita que los alumnos concluyan el problema.

Extra: Los pasos por realizar en la solución a este problema son los siguientes



Actividad 2

Objetivo

Interpretar enunciados de manera algebraica.

Rompecabezas: Se dispone de una cantidad fija pero desconocida de piezas de los siguientes tipos:



Piezas del primer tipo.



Piezas del segundo tipo.



Piezas del tercer tipo.

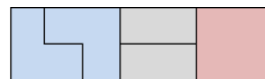
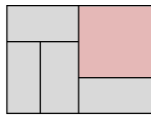
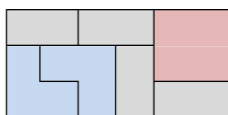
Nuestro objetivo es averiguar cuántas piezas hay de cada tipo si se conoce que ellas cumplen las siguientes condiciones:

- Con todas las piezas es posible cubrir, sin superposiciones y sin dejar cuadros vacíos, un rectángulo de dimensiones 6×3 .
- Si no se utiliza ninguna pieza del segundo tipo es posible cubrir, sin superposiciones y sin dejar cuadros vacíos, un rectángulo de dimensiones 4×3 .
- Si no se utilizan la mitad de las figuras del primer tipo es posible cubrir, sin superposiciones y sin dejar cuadros vacíos, un rectángulo de dimensiones 7×2 .

Sugerencias para trabajar el problema

- Inicie pidiendo al grupo una interpretación algebraica, en forma de ecuación, de la primera condición.

- Sugiera que llamen x, y, z a la cantidad de piezas del tipo 1, 2, 3 respectivamente.
- Discuta con sus estudiantes una manera de expresar el enunciado de la primera condición en forma de ecuación.
- Permita al estudiantado escribir su propia interpretación de las siguientes dos condiciones que plantea el problema.
- Discuta las diferentes maneras de resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido.
- Permita a sus estudiantes comprobar que los valores encontrados en efecto son coherentes con el enunciado del problema.
- Muestre las siguientes figuras a los estudiantes (con el objetivo de respaldar la respuesta obtenida):



Actividad 3

Objetivo

Utilizar cambios de variable apropiados que ayuden a la transformación de sistemas no lineales en sistemas lineales.

Estamos interesados en resolver el siguiente sistema de ecuaciones que no es lineal:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 6 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{z}} = 10 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{2}{\sqrt{z}} = 9 \end{cases}$$

Sugerencias para trabajar el problema

- Permita al estudiantado deducir que no se trata de un sistema lineal de ecuaciones.
- Sugiera utilizar un cambio de variable sencillo.
- Discuta los diferentes cambios de variables que son favorables.
- Concluya, con ayuda con la intervención de la clase, que el mejor cambio de variable es el siguiente:
- $a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{y}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{z}}$
- Pídales reescribir el sistema de ecuaciones haciendo uso de tales cambios de variable.
- Pídales resolver el sistema lineal resultante.
- Aclare que siempre es necesario regresar a las variables originales puesto que es lo que el problema pide explícitamente.

GUÍA DE PROBLEMAS

- En el siguiente sistema lineal de ecuaciones, encontrar todos los números reales a para los cuales es posible reescribir el sistema con dos ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ 3x + 4y + 5z = a^2 \end{cases}$$

- Encontrar todos los valores del parámetro a , para los cuales el siguiente sistema tiene infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

- Cierta persona posee monedas de 25 centavos, 50 centavos y 1 dólar. En total posee 6 dólares. Mientras caminaba se le cae la mitad de las monedas de 25 centavos. Ahora solo tiene 5 dólares. Mientras intentaba recoger estas monedas se le cae la mitad de las monedas de 50 centavos. Actualmente solo tiene 4 dólares. ¿Cuántas monedas de cada tipo poseía al principio?
- Enlistar todas las soluciones (x, y) del siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 + 5y^2 = 16 \end{cases}$$

- Un sistema lineal de ecuaciones posee tres incógnitas y dos ecuaciones. ¿Será posible que el sistema no posea ninguna solución?
- Un sistema lineal de ecuaciones posee dos incógnitas y dos ecuaciones. Se conoce que el sistema posee dos soluciones distintas $(x, y) = (x_0, y_0)$ y $(x, y) = (x_1, y_1)$. ¿Será posible deducir que las ecuaciones son equivalentes?
- Encuentre todas las parejas de parámetros reales (a, b) para las cuales el siguiente sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases}$$

No tiene ninguna solución (x, y) .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Golovina L.I. *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*, Editorial MIR, Moscú.
2. Grossman I Stanley, 2002, *Álgebra Lineal*, Editorial Mc Graw Hill, México.

Arco y sector circular

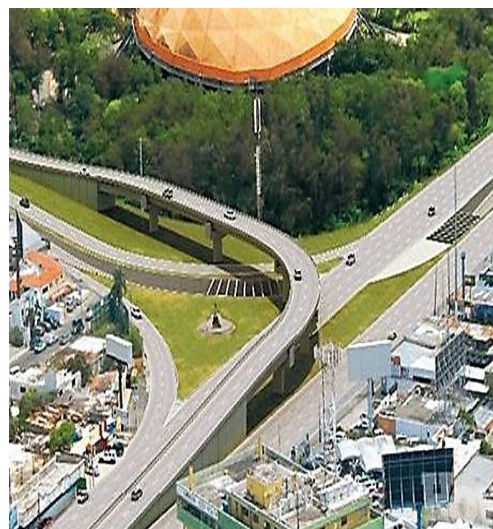


Figura 1. Construcción del elevado Ortega y Gasset. El elevado en forma de trompeta que construye el Ministerio de Obras Públicas y Comunicaciones, en la intersección de las avenidas 27 de Febrero y Ortega y Gasset, en República Dominicana, es un claro ejemplo de sector circular.

Introducción del tema

La percepción de las formas y la búsqueda de explicaciones para los fenómenos de la naturaleza han guiado las acciones humanas a través de los tiempos. Así, la naturaleza inspiró la construcción de las casas, de los medios de transporte y de los artefactos confeccionados para cargar o guardar alimentos, en donde cada una de ellas se ven de cierta manera elaboradas por un arco o sector.

Civilizaciones como la griega y la egipcia se destacaron por sus construcciones notables y por aprovechar los recursos naturales con sabiduría.

Entre los pueblos amazónicos existen grupos como los yagua, los cocama, los baniwa y los tikuna, que producen objetos cuyo origen se inspiró en la naturaleza y en la necesidad de supervivencia, objetos que merecen admiración, en principio por su belleza, pero también por presentar ideas o nociones matemáticas que se perciben una vez finalizados o durante el proceso de su confección.

Es importante recalcar que estas formas, nos ayudarán con la aplicación de los casos de factorio, para resolver problemas de arcos y sectores circulares.

Competencias por lograr

- Saber representar, comunicar, resolver problemas y utilizar instrumentos matemáticos.

Objetivos

- Conocer en una circunferencia.
- Identificar y resolver las fórmulas de áreas y perímetros en un sector circular.
- Mostrar seguridad a la hora de resolver un problema de arco y sectores circulares.

Presaberes

- Operaciones básicas con números reales.
- Reconocimiento de figuras planas.
- Medidas de ángulos.
- Factorización.

Vocabulario Matemático

Arco: Es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.

Sector circular: Es la región del círculo determinada por dos radios.

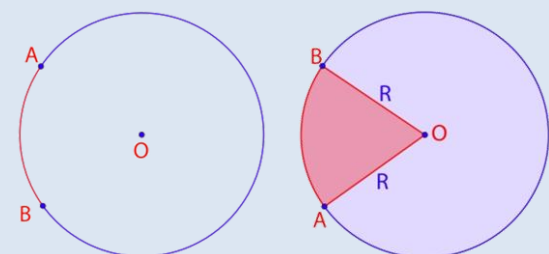


Figura 2. Arco AB de la circunferencia y sector circular AOB.

Segmento circular: se llama segmento circular a la región del círculo determinada por una cuerda.

Zona circular: es la región delimitada por dos cuerdas paralelas.

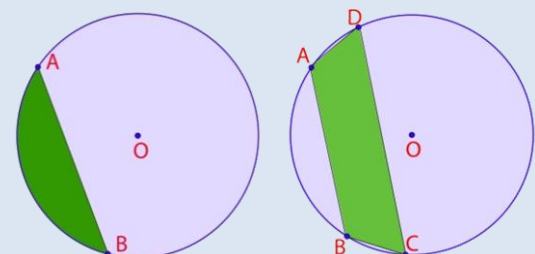


Figura 3. Segmento circular determinado por la cuerda AB y zona circular limitada por las cuerdas paralelas AB y CD.

Corona circular: es la región determinada por dos circunferencias concéntricas.

Trapezio circular: se le llama así al corte de una corona circular por dos radios.

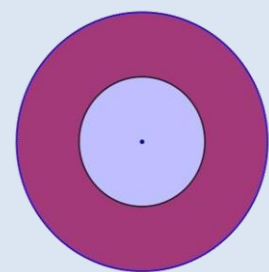


Figura 4. Corona circular determinada por dos circunferencias concéntricas y trapezio circular cortada por los radio OA y OB.

Figuras circulares

Es posible determinar en un círculo varias figuras geométricas de interés. Sector circular, segmento circular, zona circular, corona circular, trapezio circular.

Los radios, cuerdas y circunferencias concéntricas determinan diversas figuras circulares.

Para trabajar las áreas de estas figuras geométricas se conocerá un poco sobre los ángulos en una circunferencia.

Ángulo central

Se llama ángulo central a cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de la circunferencia. Todo ángulo central corta a la circunferencia en dos puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de 360° comprende a la circunferencia completa, un ángulo de 180° divide a la circunferencia en dos arcos iguales y un ángulo recto comprende un arco que es la mitad de una semicircunferencia.

De esta manera es posible identificar cada ángulo central con su arco de circunferencia correspondiente.

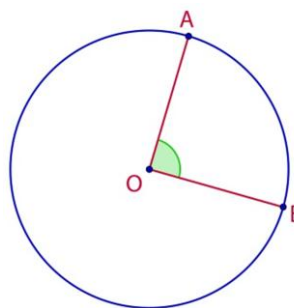


Figura 5. Ángulo central de una circunferencia, que está formado por dos puntos A y B, con centro O.

Ángulo inscrito

Se llama ángulo inscrito al ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia, de forma que sus lados son secantes con la circunferencia.

Si A y B son los puntos en que los lados del ángulo inscrito APB cortan a la circunferencia y consideramos el ángulo central AOB que queda determinado por los puntos A y B, resulta entonces que este ángulo central AOB tiene amplitud doble que el ángulo inscrito APB.

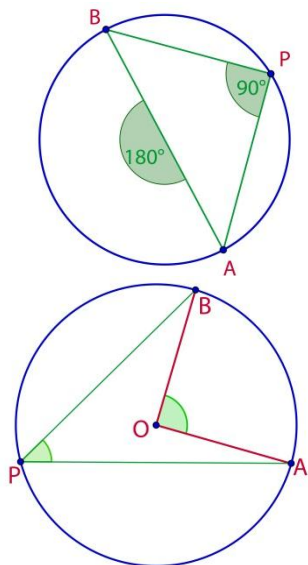


Figura 6. Ángulo inscrito APB en la circunferencia.

Figura 7. Ángulo inscrito a la semicircunferencia con amplitud de 90°.

Así que la amplitud de cualquier ángulo inscrito es la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente.

Ángulo inscrito en la semicircunferencia

Como consecuencia de la relación existente entre las amplitudes de los ángulos centrales y sus correspondientes ángulos inscritos, resulta fácil obtener la amplitud de un ángulo inscrito en una semicircunferencia. Un diámetro de la circunferencia determina una semicircunferencia, que se corresponde con un ángulo central de 180° (llano). Así, cualquier ángulo inscrito determinado por el diámetro tendrá una amplitud que es la mitad del ángulo llano. Por lo tanto, todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Áreas y perímetros en un círculo

Corona circular es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas, esto es que comparten el mismo centro. Para encontrar el área de una corona o anillo se obtiene como: “La diferencia o resta de las áreas de los dos círculos que la componen” lo que significa que $A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

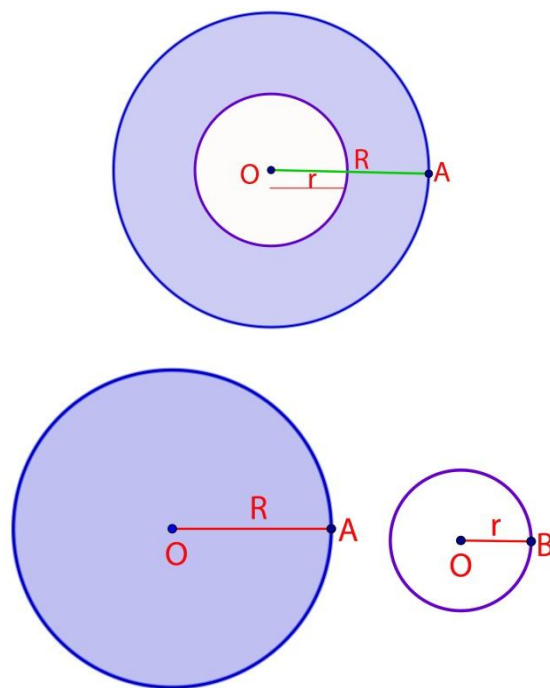


Figura 8. Representación de la corona circular formada por dos círculos concéntricos en donde R es el radio del mayor y r es el del círculo menor.

En cuanto el anillo de todo perímetro circular debemos considerar la suma de perímetros de las dos circunferencias que los definen de radio R y r.

Así el perímetro es: $P = 2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r)$

Trapezio circular

Un trapezio circular es una región de un anillo o corona circular, limitado por los lados que determina un ángulo del centro en el interior de un círculo.

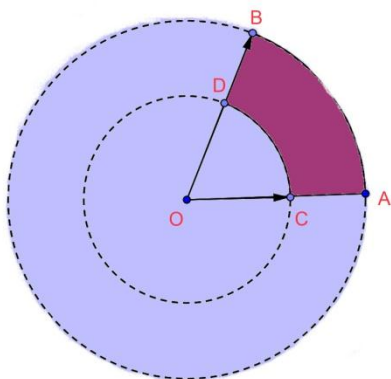


Figura 9. Trapecio circular de arco AB y arco CD

El perímetro de un trapecio circular viene dado por:

$$P = \text{perímetro de } (\widehat{AB} + \widehat{CD} + \overline{AC} + \overline{DB})$$

$$P = \frac{2\pi R \cdot \alpha}{360^\circ} + \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ} + (R - r) + (R - r)$$

$$P = (R + r) \left(\frac{2\pi \cdot \alpha}{360^\circ} \right) + 2(R - r)$$

$$P = (R + r) \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right) + 2(R - r)$$

Donde el perímetro de cada arco es proporcional a la medida del ángulo α respecto a los 360° , que componen el perímetro $2\pi R$ y $2\pi r$ de cada una de las circunferencias concéntricas del centro O.

El área del trapecio circular viene dado por la diferencia de los sectores circulares que determinan los lados que definen el ángulo del centro sobre el círculo.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = (R^2 - r^2) \left(\frac{\pi \alpha}{360^\circ} \right) \\ &= (R - r)(R + r) \left(\frac{\pi \alpha}{360^\circ} \right) \text{ ó } \left(\frac{L_1 + L_2}{2} \right) n \end{aligned}$$

Donde L_1 y L_2 son las longitudes de arco y n es la diferencia entre sus radios.

Sector circular: Es la superficie comprendida entre dos radios y el arco que subtiende entre si, se denomina sector circular.

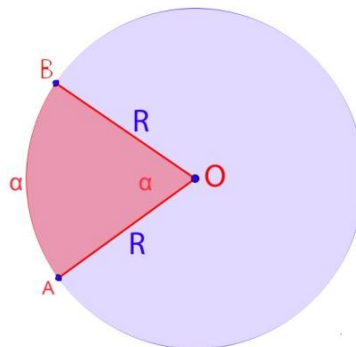


Figura 10. Sector circular formado por dos radios de longitud R y el arco AB.

El área de un sector circular cuyo ángulo del centro o arco mide α , se determina mediante proporcionalidad directa. Clasificando ángulos en la circunferencia completa con α y sus respectivas áreas, como sigue: efectuando el producto cruzado y despejando x

Grados	Áreas
360°	πR^2
α	x

Así $360^\circ x = \alpha \pi R^2 \Rightarrow x = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$ donde x es la medida del área de un sector circular cuyo ángulo del centro y el arco que subtiende miden α° .

En tanto, el perímetro de un sector circular puede obtenerse usando también una proporción, pero lógicamente no con el área, sino con el perímetro de una circunferencia.

Ejemplo: la medida lineal del arco $\widehat{BA} = x$, es

Grados	Perímetro
360°	$2\pi R$
α	x

Así

$$360^\circ x = \alpha \cdot 2\pi R \Rightarrow x = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \frac{\alpha \cdot \pi R}{180^\circ}$$

Y el perímetro al final del sector circular de radio r es

$$\begin{aligned} P &= OA + OB + \widehat{BA} = R + R + \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ} \\ &= 2R + \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ} \text{ ó } P \\ &= 2R + \frac{\alpha \cdot \pi R}{180^\circ} \end{aligned}$$

Así en resumen el área es $A = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$ y el perímetro es $P = 2R + \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ}$ ó $P = 2R + \frac{\alpha \cdot \pi R}{180^\circ}$

También se puede expresar, para el perímetro se calcula multiplicando el número de radianes del ángulo central el cual subtiende por la longitud del radio, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ así, $L = r\alpha$. Y el área del sector circular $S = \frac{R^2 \alpha}{2}$.

Actividad 1

Conozcamos los ángulos inscritos en la circunferencia

Objetivo

Identificar algunos ángulos inscritos en la circunferencia.

Supongamos el siguiente caso:

Vemos a unos futbolistas en posición de lanzar el balón contra la portería.

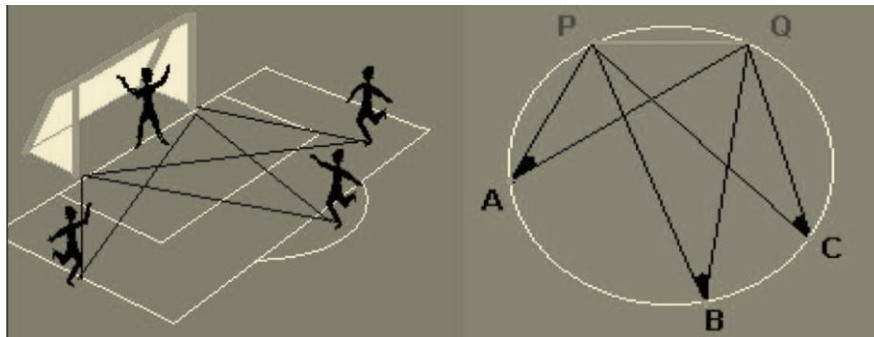


Figura 11. Posición de jugadores para obtener el mismo ángulo de tiro.

El ángulo de tiro es el formado por el pie del jugador (vértice) y las trayectorias a los postes (lados).

¿Qué posiciones deberán ocupar los jugadores para que todos tengan el mismo ángulo de tiro?

El problema consiste en averiguar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el ancho de la portería con el mismo ángulo.

Para solucionar este problema es importante darles un tiempo prudencial para pensar qué lugar geométrico les servirá, sin embargo, debes mostrar a los estudiantes los ángulos centrales, e inscritos en la circunferencia. Este problema está relacionado con la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco PQ (misma cuerda). La cual nos dice que todos estos ángulos miden lo mismo: la mitad del ángulo central correspondiente.

Con este planteamiento se pretende que usted, como docente, aproveche la atención del estudiantado, mediante las posiciones de los jugadores; podemos formular la figura plana de la circunferencia y conocer que entre los jugadores se pueden dar las posiciones en las cuales podrá optar por el mismo ángulo de tiro.

Además, aprovechar para introducir los conceptos de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia.

Actividad 2

Encontremos ángulos centrales e inscritos

Objetivo: Identificar ángulos centrales e inscritos en la circunferencia.

Indicaciones

Pedir a sus estudiantes que se reúnan en equipos de cinco integrantes y resuelvan los siguientes planteamientos.

1. Identifica los siguientes tipos de ángulos, por su posición en la circunferencia.

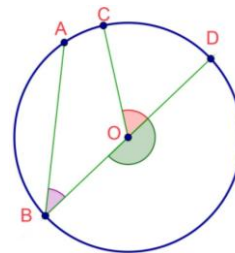


Figura 12. Ángulos centrales e inscritos en la circunferencia.

Solución

El ángulo ABD es un ángulo inscrito en la circunferencia; los ángulos COD y BOD son ángulos centrales.

2. En la siguiente figura indica la amplitud de los ángulos señalados, sin utilizar el transportador, sabiendo que el ángulo AOC mide 54° .

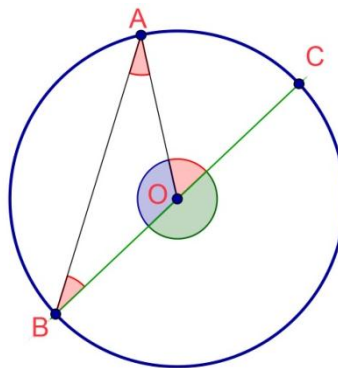


Figura 13. Encontrando la medida de los ángulos inscritos y centrales.

Solución

El ángulo ABC es el inscrito correspondiente con el ángulo central AOC, así que su amplitud será 27° ; el ángulo AOB mide 136° por ser el suplementario al ángulo AOC; y el ángulo BAO mide 27° porque el triángulo ABO es isósceles; por estar formado por dos radios, y el ángulo BOC es un ángulo llano.

- Representa sobre la circunferencia de la figura un ángulo inscrito recto y su correspondiente ángulo central. Calcula la amplitud del ángulo central, sin medirlo con el transportador.

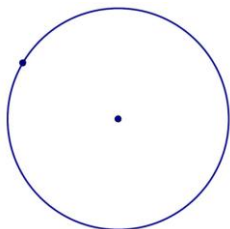


Figura 14. Círculo para hacer los trazos correspondientes.

Solución

El ángulo central tiene amplitud doble que su correspondiente ángulo inscrito, por lo que su amplitud será un ángulo llano.

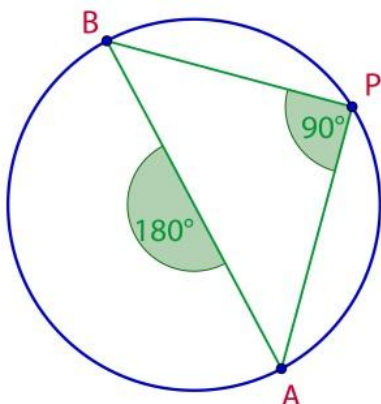


Figura 15. Encontrando la amplitud del ángulo.

Actividad 3

Conocer áreas y perímetros en un círculo

Objetivo: Identificar en los siguientes planteamientos áreas y perímetros en un círculo.

Indicaciones

Pedir a la clase que se reúna en equipos de cinco integrantes y resuelva los siguientes planteamientos.

- Encuentre en el sector circular, el área y el perímetro.

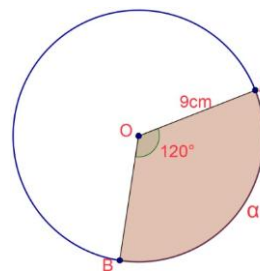


Figura 16. Sector circular, con arco $\alpha = 120^\circ$.

Solución

Según la figura notamos que el radio de dicha círculo es $R = 9\text{cm}$

Así para el $A = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$

$$A = \frac{120^\circ \pi (9\text{cm})^2}{360^\circ}$$

Al simplificar el resultado es:

$$A = 27\text{cm}^2$$

Y el perímetro es

$$P = 2R + \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ}$$

$$P = 2(9\text{cm}) + \frac{120^\circ \cdot 2\pi(9\text{cm})}{360^\circ}$$

Simplificando se tiene que:

$$P = 18\text{cm} + 6\pi\text{cm} = 6(3 + \pi)\text{cm}.$$

- Encuentre el área y perímetro del siguiente trapecio circular. Si $R = 8\text{cm}$ y $r = 5\text{cm}$ sabiendo que su ángulo mide 150° .

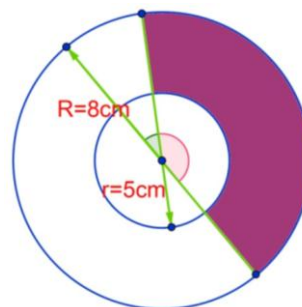


Figura 17. Trapecio circular de $R = 8\text{cm}$ y $r = 5\text{cm}$ y de ángulo $\alpha = 150^\circ$.

Solución del 2

3. Como el $R = 8cm$ y $r = 5cm$ entonces el perímetro del trapezio circular es

$$P = (R + r) \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \right) + 2(R - r)$$

$$P = (8cm + 5cm) \left(\frac{\pi \cdot 150^\circ}{180^\circ} \right) + 2(8cm - 5cm)$$

Simplificando se tiene:

$$P = \left(\frac{65\pi}{6} + 6 \right) cm$$

Y el área es

$$A = (R^2 - r^2) \left(\frac{\pi \alpha}{360^\circ} \right)$$

$$A = ((8cm)^2 - (5cm)^2) \left(\frac{\pi(150^\circ)}{360^\circ} \right)$$

Simplificando se tendrá entonces

$$A = \frac{195}{12} \pi cm^2$$

4. Encuentre en cada una de las siguientes coronas o anillos circulares, el área y el perímetro en cm.

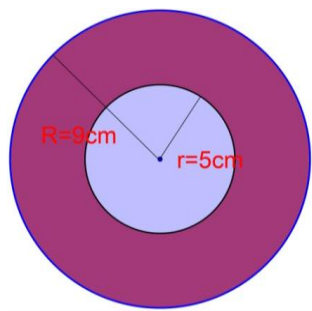


Figura 18. Corona o anillo circular de $R = 9cm$ y $r = 5cm$.

Solución

Reemplazando $R = 9cm$ y $r = 5cm$.

Respectivamente en las fórmulas de área y perímetro tendremos.

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A = \pi((9cm)^2 - (5cm)^2)$$

$$A = \pi(81 - 25)cm^2$$

$$A = 56\pi cm^2$$

Y el perímetro es:

$$P = 2\pi(R + r)$$

$$P = 2\pi(9cm + 5cm)$$

$$P = 2\pi(14cm)$$

$$P = 28\pi cm$$

Sugerencia metodológica

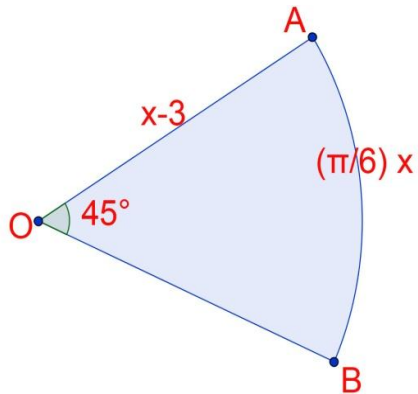
Puedes seguir practicando con los estudiantes proporcionando ejemplos en donde se vean involucrados las áreas y perímetros de los sectores circulares, trapezio circular y la corona circular o anillo circular.

Antes de proporcionar estos ejercicios es importante que muestres a los estudiantes las tres clases de áreas y perímetros en un círculo.

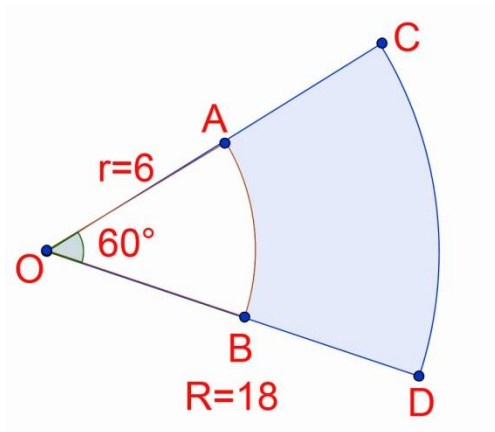
Puedes mostrar un ejemplo y luego trabajar con los ejercicios, o bien optar porque el estudiante descubra o averigüe cómo se realizan este tipo de ejercicios.

GUÍA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

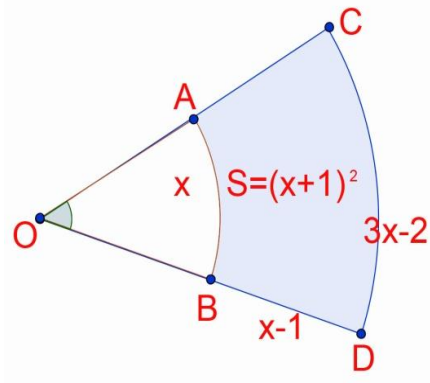
1. Halle la longitud del arco de un círculo de radio 18m y un ángulo central de 80° .
2. Del gráfico halla el radio del sector AOB.



3. A partir del grafico hallar el área sombreada



4. De la figura encontrar el valor de x , sabiendo que el área del sector sombreado es $(x+1)^2$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Corbacho, G. (2009). *Circunferencias y círculos*, Universidad Católica de Chile. Parinacota Quilicura.
2. Ejercicios + solucionarios circunferencia y círculo. (s.f.). . Recuperado agosto 22, 2011, a partir de <http://www.slideshare.net/Julio1960/ejercicios-solucionarios-circunferencia-y-circulo>
3. Quispe, E. (1995) *Geometría - Primer nivel* primera edición, Lima-Perú.
4. Imagen de la construcción del elevado Ortega y Gasset.
<http://israelvalenzuela.com/2010/04/28/fotos-contruccion-del-elevado-ortega-y-gasset/>

Principios básicos de conteo

Introducción del tema

“Ligget sel!” (¡Ahí está!)

En variedad de problemas de conteo y más adelante en la combinatoria y la permutación de elementos de un conjunto, se observa la necesidad de conocer algunos resultados que son de enorme importancia en el desarrollo y apelación de conocimientos colaterales, este desarrollo de métodos de conteo permitió entrar a la humanidad en el análisis de problemas cada vez más complejos y de aplicación como la criptografía, computación, comunicaciones, probabilidades y toma de decisiones, Gauss es un referente por un ejemplo excepcional de conteo que a los nueve años asiste a sus clases de Aritmética y su profesor Büttner propone un problema inocente en apariencia: *calcular la suma de los cien primeros números*.

El jovencito Gauss deposita en la mesa del maestro exclamando: “Ligget sel!” (¡Ahí está!) Había escrito 5,050. La respuesta correcta.

Ante los ojos atónitos de Büttner y del resto de sus compañeros, Gauss había aplicado, por supuesto sin saberlo, el algoritmo de la suma de los términos de una progresión aritmética. Se había dado cuenta de que la suma de la primera y la última cifra daba el mismo resultado que la suma de la segunda y la penúltima, etc., es decir: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 101$

Como hay 50 parejas de números de esta forma el resultado se obtendrá multiplicando $101 \times 50 = 5,050$.

W. K. Bühler: Gauss A biographical Study. Springer-Verlag. New York. 1981.

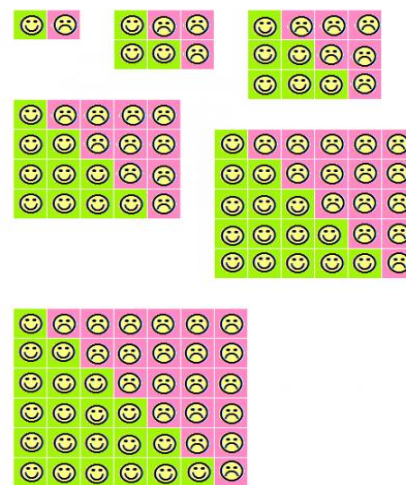


Figura 1. Gauss a la edad de dieciocho años encontraría uno de sus primeros descubrimientos matemáticos, estableció que todo número natural puede ser expresado con la suma de no más de tres números triangulares.

Competencias por lograr

- Reflexionar y construir un plan de abordaje de problemas, bajo distintas situaciones.
- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Objetivos

- Introducir los principios básicos de conteo.
- Desarrollar la habilidad de aplicar correctamente tales principios.

Presaberes

- Operaciones con números naturales.

Una breve introducción

Esta nueva área en el gran mundo de la Matemática, se denomina Combinatoria. ¿Qué es la Combinatoria?

Una de las maneras más simples de definirla es como aquella área de la matemática que trata el problema de contar, y aunque no es únicamente ese su punto de estudio, es la mejor manera de definirla en los momentos que se inicia con su estudio.

Pero dirá ¡contar!, ¡eso lo hacemos todos desde muy pequeños!, tiene razón, es una actividad natural en nuestra vida, sin embargo, el arte de contar va mucho más allá que la enumeración de objetos, como veremos en estas pocas páginas, existen problemas en donde el listar y enumerar exhaustivamente se vuelve un proceso complicado y largo, es por eso que la Combinatoria desarrolla técnicas para hacer estos procesos más simples de calcular.

Veremos cómo problemas que a simple vista parecen de pocos casos, tienen como

resultados números sorprendentemente grandes.

Recuerde que el arte de contar implica tener presente dos cosas fundamentales:

1. Hay que considerar TODAS las posibilidades.
2. Cada elemento del conteo hay que contarlos EXACTAMENTE una vez.

Son estos dos hechos fundamentales los que generan la mayoría de problemas cuando de contar se trata, pues si no tenemos el cuidado suficiente, se nos puede escapar algún caso, o podemos contar en más de una forma un mismo elemento.

La práctica de resolver problemas de forma continua se convertirá en su mejor aliada para mejorar y convertirse en un artista del conteo.

Iniciamos mostrando y recordando las sumatorias básicas de números consecutivos.

Algunas sumatorias importantes

En primer lugar calculemos la suma de números naturales a partir de 1 hasta un n cualquiera, esta está dada por

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Una demostración sencilla establecida por primera vez por el matemático Carl Friedrich Gauss cuando él estaba en lo que hoy día denominamos educación Primaria. Escribamos en orden creciente y orden decreciente la sumatoria y luego sumemos por columna

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ 2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{aligned}$$

donde el término $n + 1$ aparece n veces, entonces

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

tal como lo queríamos demostrar

Calculemos ahora la suma de los primeros n números cuadrados.

La próxima demostración es una técnica útil para calcular todas las sumatorias de este tipo, incluso la anterior.

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Utilizaremos el siguiente hecho

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k^3 &= 3k^2 + 3k + 1 \\ 1^3 - 0^3 &= 1 \\ 2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\ \vdots &= \vdots \\ n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Sumando obtenemos

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{(n+1)}{3} \left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2} \right] \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{(n+1)}{3} \left[\frac{2n^2 + n}{2} \right] \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Dejaremos la demostración del siguiente resultado como una práctica para usted.

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

En este caso la demostración se basará en el desarrollo de $(k+1)^4 - k^4$.

Principio de la Suma

Iniciemos con un ejemplo introductorio. Se trata de encontrar la cantidad de pares $\{a, b\}$ de números distintos tomados del conjunto $\{1, 2, \dots, 25\}$ que cumplen la propiedad que $|a - b| \leq 5$.

Hagamos, en primer lugar, un análisis sobre la propiedad exigida a los pares de números, ¿cuáles son los resultados permitidos de la diferencia en valor absoluto? en efecto como la condición es que el resultado sea menor o igual a 5 y los valores absolutos devuelven exclusivamente valores no negativos, los únicos resultados posibles son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Sin embargo, para que el resultado de la resta sea 0 es necesario que $a = b$, lo cual no es posible pues se nos piden pares de números distintos, así que descartamos este caso. Además, como nos dicen que son pares $\{a, b\}$, esto implica que $\{a, b\} = \{b, a\}$ por lo que podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a > b$.

Notemos en este momento que en el proceso de resolución hemos hecho un análisis de cada una de las propiedades pedidas en el enunciado y de las características descritas. Ahora el problema inicial se ha dividido en cinco nuevos problemas, uno para cada valor posible de la diferencia en valor absoluto, para ello se ha identificado cada uno de los casos posibles, y observamos a la vez que cada uno de los casos se da de forma independiente de los demás. Resolvamos cada uno:

Si $|a - b| = 1$. Tenemos acá que $a = b + 1$, por lo tanto tenemos 24 valores posibles desde $a = 2$ hasta $a = 25$.

Si $|a - b| = 2$. Tenemos acá que $a = b + 2$, por lo tanto tenemos 23 valores posibles desde $a = 3$ hasta $a = 25$.

Si $|a - b| = 3$. Tenemos acá que $a = b + 3$, por lo tanto tenemos 22 valores posibles desde $a = 4$ hasta $a = 25$.

Si $|a - b| = 4$. Tenemos acá que $a = b + 4$, por lo tanto tenemos 21 valores posibles desde $a = 5$ hasta $a = 25$.

Si $|a - b| = 5$. Tenemos acá que $a = b + 5$, por lo tanto tenemos 20 valores posibles desde $a = 6$ hasta $a = 25$.

Dado que cada uno de los casos es independiente de los demás, entonces el número total de pares buscado es la suma de las respuestas obtenidas en cada uno de los casos así $20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110$ pares en total.

La técnica más elemental para contar los elementos de un conjunto es separar sus elementos en clases disjuntas, de forma tal que su reunión incluya todos los elementos del conjunto. En otras palabras se requiere que cada elemento del conjunto debe pertenecer a una sola de las clases y que todo elemento del conjunto pertenece a una de las clases en las que se separa el conjunto.

En el ejemplo inicial hemos identificado cinco clases distintas. Estas están definidas por el valor de la diferencia obtenida es decir los de diferencia 1, diferencia 2, y así hasta los de diferencia 5.

Uno de los pilares fundamentales del Conteo es el Principio de la Suma, el cual en su forma más simple nos dice lo siguiente: si un suceso A puede ocurrir de n maneras, un suceso B puede ocurrir de m maneras y ambos sucesos no pueden ocurrir simultáneamente, entonces el suceso A o B puede ocurrir de $(n + m)$ formas.

Claro que este enunciado se puede extender a un mayor número de sucesos, tal como lo evidencia la solución del ejemplo planteado. Al establecerlo en un lenguaje conjuntista sería descrita de la siguiente manera: Si el conjunto A puede ser separado en clases disjuntas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ entonces el total de elementos de A es igual a la suma de los cardinales de las clases:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Veamos un ejemplo más. Se trata de encontrar la cantidad de cuadrados que tienen sus cuatro vértices en el arreglo de puntos de 10×10 que muestra la figura 2.

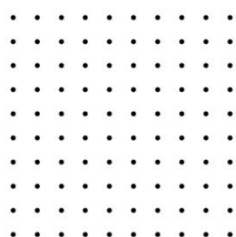
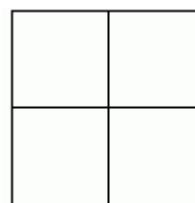


Figura 2. Cuadrícula de 10×10

Parece ser un problema simple, analícelo un poco. Se nos pide que encontremos los cuadrados cuyos vértices son puntos pertenecientes al arreglo, entonces la pregunta natural es ¿cuáles son esos cuadrados?, la respuesta natural es decir que son aquellos de

tamaño 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, hasta llegar a los de 9 unidades, que tienen sus lados paralelos a los bordes del arreglo. Hemos identificado hasta acá nueve clases distintas; pero ¿son realmente estas nuestras únicas posibilidades? la respuesta a esta pregunta es no. Si reflexionamos un poco más notaremos que hay cuadrados que no tienen sus lados paralelos a estos bordes. Podríamos tratar de hacer un conteo exhaustivo de estos cuadrados o buscar alguna propiedad que nos haga más fácil el conteo. Sabemos que cada ángulo del cuadrado es recto, eso nos indica que si trazamos una línea cualquiera por uno de los vértices, que deje a ambos lados del cuadrado en un mismo semiplano, la suma de los otros dos ángulos formados será 90° . En particular tracemos las rectas horizontales y verticales que pasan por los vértices del cuadrado, tal como observamos en la figura se forman dos triángulos que además de semejantes son congruentes, al construir los cuatro triángulos podemos observar que cada cuadrado de lados no horizontales ni verticales, es inscribible en un cuadrado cuyos lados sí lo son. Así en cada cuadrado de dimensión $k \times k$ existen k cuadrados inscritos en él, incluido él mismo. La figura muestra un cuadrado de 4×4 y los cuatro cuadrados inscritos.



Ahora si tenemos definidas de buena forma nuestras únicas nueve clases, las mencionadas al inicio, es fácil ver que un cuadrado de dimensión $k \times k$ aporta $(10 - k)^2$ cuadrados, basta con desplazar el cuadrado de forma horizontal y vertical. Cada uno de estos cuadrados aporta en realidad k cuadrados,

debido a los inscritos, así por el Principio de la Suma el total estaría dado por

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^9 (10-k)^2 k &= \sum_{k=1}^9 (100k - 20k^2 + k^3) \\
 &= 100 \sum_{k=1}^9 k - 20 \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 k^3 \\
 &= 100 \left(\frac{9(10)}{2} \right) \\
 &\quad - 20 \left(\frac{9(10)(19)}{2} \right) + \left(\frac{9(10)}{2} \right)^2 \\
 &= 825
 \end{aligned}$$

Principio de la Multiplicación

Consideremos el siguiente ejemplo: necesitamos saber la cantidad de puntos en el plano cartesiano que poseen ambas coordenadas enteras, y además deben cumplir $-2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$.

Veamos las condiciones para cada una de las variables, la variable x tiene cinco posibles valores que son $-2, -1, 0, 1, 2$. La variable y toma en cada uno de los cinco casos, tres posibles valores $1, 2, 3$.

Ahora aplicando el Principio de la Suma podemos dividir el problema en cinco casos si tomamos la variable x como variable por analizar, o en tres casos si analizamos la variable y . Tomaremos la variable x y tenemos:

Caso $x = 1$, tenemos 3 pares.

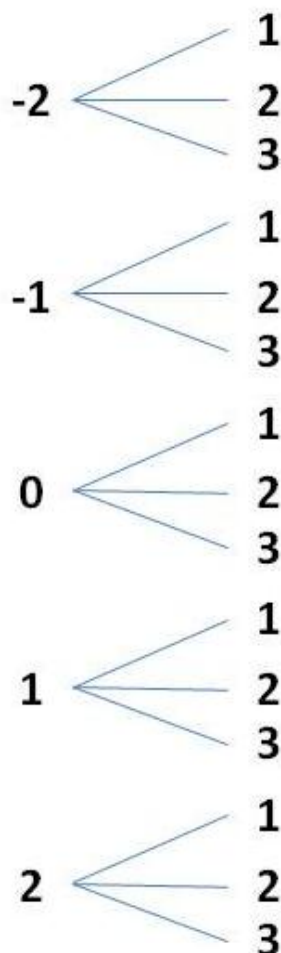
Caso $x = 2$, tenemos 3 pares.

Y análogamente para los tres casos restantes. En total tendríamos que la cantidad de pares ordenados es $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

Observemos que la respuesta final no es nada más que $5 \cdot 3 = 15$. Donde 5 representa justamente el número de casos o de posibles valores que puede tomar la variable x ,

mientras que 3 representa el número de posibles valores que puede tomar la variable y .

Veamos gráficamente qué sucede, a través de un diagrama de árbol.



Como podemos observar, en la gráfica se identifican cinco ramas en el primer nivel, de las cuales se desprenden de cada una tres ramas en el segundo nivel. Cada ramificación recorrida nos da las coordenadas de un punto, además identificamos cinco bloques, uno por cada una de las ramas del primer nivel, con la misma cantidad de ramificaciones. Note que este hecho es muy importante para realizar el conteo de forma rápida, no importa el valor de

la rama del primer nivel, la cantidad de ramificaciones en el segundo nivel es siempre la misma. Si este hecho no fuera cierto estaríamos obligados a hacer un conteo exhaustivo utilizando el Principio de la Suma.

Podemos decir entonces que si queremos formar pares ordenados (x,y) y conocemos la cantidad de opciones posibles, tanto para la primera componente como para la segunda, y la cantidad de opciones posibles no cambia sin importar qué valor tome la otra, entonces la cantidad total de pares que se pueden construir es el producto del número de alternativas que se dispone para la primera componente por el número de alternativas para la segunda componente.

Revisemos un par de ejemplos más

Suponga que una persona desea viajar de Occidente a Oriente pasando por San Salvador para ello debe de tomar las siguientes decisiones:

De Occidente hacia San Salvador él puede viajar en tres clases de autobús, un autobús de clase ordinario, uno clase directo, y uno clase especial.

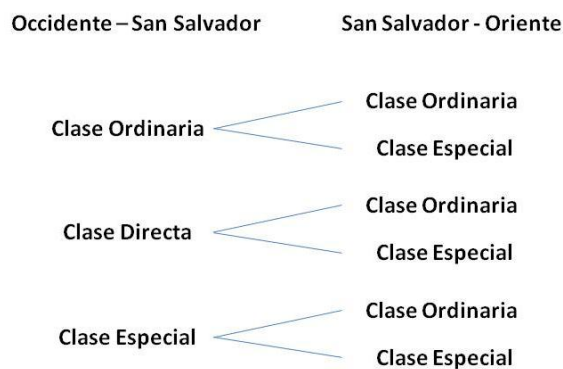
De San Salvador a Oriente él tiene que elegir entre dos clases de autobús, el de clase ordinario y el de clase especial.

¿De cuántas maneras distintas puede realizar esta persona su recorrido?

Notemos, en primer lugar, que no importa la elección que tome para viajar de Occidente a San Salvador, siempre podrá escoger cualquiera de las dos opciones para viajar de San Salvador a Oriente. En este caso la variable x representa el viaje Occidente-San Salvador, mientras que la variable y representa el viaje San Salvador-Oriente. Por lo que la cantidad de

formas posibles de realizar el viaje está dado por el producto $3 \cdot 2 = 6$.

Podemos verificar esto a través del siguiente diagrama de árbol.



Revisemos un último ejemplo.

Suponga que se lanza al aire un dado dos veces y anotamos los posibles resultados, estos los podemos registrar mediante un par (x,y) registrando en la primera componente el resultado de la primera tirada y en la segunda componente el resultado de la segunda tirada. En cada tirada hay seis posibles resultados: 1; 2; 3; 4; 5; 6, el total de posibles pares es 36.

En efecto, para cada uno de los posibles resultados, para la primera tirada tenemos seis posibles resultados, de igual manera tenemos seis posibles resultados para la segunda tirada, el total de resultados será de $6 \cdot 6 = 36$.

Lo invitamos a verificar este resultado mediante un diagrama de árbol.

Los ejemplos desarrollados hasta este momento, tratan situaciones de pares ordenados donde cada uno de los eventos del par mantiene independencia de la cantidad de opciones con respecto al valor o elemento asignado a la otra variable.

Esta idea de pares ordenados puede extenderse a tripletas ordenadas, cuartetos,

etc. siguiendo el mismo procedimiento lógico que se realiza en los pares.

Retomemos de nuevo el ejemplo del viaje de Occidente a Oriente y ahora supongamos que el viajero en San Salvador puede tomar dos decisiones, pasar la noche en la ciudad o viajar inmediatamente hacia Oriente.

Ahora el número de formas en que puede realizar su recorrido, ha cambiado debido a esta nueva decisión por tomar, el problema ahora consiste en formar tripletas (x, y, z) donde tenemos tres opciones para la primer componente, la forma de viajar de Occidente a San Salvador, 2 para la segunda componente decidir qué hacer en San Salvador, 2 para la tercera componente, la forma de viajar de San Salvador a Oriente.

No importa cómo viajemos de Occidente a San Salvador, estando en San Salvador se pueden tomar dos decisiones siempre por lo que se tiene $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas hasta acá, para cada una de estas formas siempre es posible tomar cualquiera de las dos opciones para viajar hasta Oriente, por lo tanto la cantidad de formas de hacer el recorrido sería $6 \cdot 2 = 12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Enunciamos entonces el Principio de la Multiplicación.

Principio de la Multiplicación: Si A_1, A_2, \dots, A_k es una sucesión de conjuntos con cardinales n_1, n_2, \dots, n_k respectivamente, entonces el conjunto que se obtiene haciendo el producto cartesiano de tales conjuntos tiene por cardinal el producto de los cardinales de los conjuntos dados.

Es decir

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

Dicho de otra manera el principio de la multiplicación se presenta de la forma siguiente:

Si hay n_1 alternativas de seleccionar un primer objeto x_1 , para seleccionar un segundo objeto x_2 se dispone de n_2 formas, y así sucesivamente hasta que para seleccionar un objeto x_k se dispone de n_k , la cantidad de formas en que se puede seleccionar un conjunto ordenado (x_1, x_2, \dots, x_k) está dado por $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Principio de Inclusión-Exclusión

En la sección donde se habló del principio de la Suma, se mencionó que una característica necesaria era el hecho de que los eventos fueran disjuntos. Si tomamos el caso de dos conjuntos finitos digamos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces se cumple que

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Tal como lo vimos en los ejemplos desarrollados. Pero ¿qué pasa cuando la condición de intersección vacía no se cumple? Veamos un ejemplo para ver si podemos intuir una respuesta.

Nos interesa saber cuántos de los números en el intervalo de 1 a 50, cumplen con la característica de tener entre sus divisores al 3 o al 7.

Si aplicáramos el principio de la suma diríamos que tenemos dos casos que 3 sea un divisor y que 7 sea un divisor.

Caso1. Podemos encontrar todos los números múltiplos de 3 en el intervalo haciendo la división $50/3$ y tomando solo la parte entera del resultado, esto es 16.

Caso 2. Análogo al anterior solo debemos calcular $50/7$ y tomar la parte entera que es 7.

Aplicando el principio de la suma tendríamos que el resultado sería la suma de los subproblemas resueltos en cada uno de los casos. Es decir $16 + 7 = 23$. Los números que cumplen son:

3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 45, 48, 49

Que son en total 21, distinto del resultado 23 obtenido anteriormente. ¿A qué se debe esto? La razón es simple, hemos descuidado la característica fundamental para aplicar el principio de la suma el hecho de que no existan elementos comunes en ambos casos.

Si hacemos un listado de los números para cada uno de los casos, ¡realízalo!, veremos que en efecto, hay elementos comunes y estos son los que tienen dentro de sus divisores tanto a 3 como a 7, es decir, los múltiplos de $3 \cdot 7 = 21$.

Observamos que los números que se repiten en ambas listas son el 21 y el 42, en efecto, únicamente dos números, justo la diferencia entre nuestro resultado incorrecto y nuestro resultado real, $23 - 21 = 2$. Esto se debe a que en efecto los números múltiplos de 21 son contados dos veces, una vez en cada uno de los casos.

Para superar este error de conteo, y dado que un buen conteo es aquel en el cual cada elemento es contado una única vez, debemos modificar el principio de la Suma construyendo así lo que se conoce como el principio de Inclusión-Exclusión, quedando entonces de la siguiente manera

$$(\text{Múltiplos de } 3) + (\text{Múltiplos de } 7) - (\text{Múltiplos de } 21) = 16 + 7 - 2 = 21$$

En notación conjuntista tendríamos: Si tenemos dos conjuntos finitos digamos A y B tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces se cumple que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Este hecho puede ser visualizado por medio de un diagrama de Venn tal como lo muestra la figura, en la cual, la parte sombreada representa la parte común que es contada tanto en el cardinal del conjunto A, como en el cardinal del conjunto B, debiendo ser este descontado para que solamente se cuente una vez, como debe de ser.

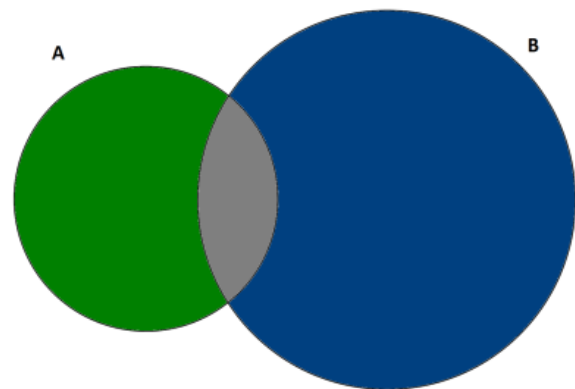


Figura 3. Diagrama de Venn para dos conjuntos.

Esta visión del principio de Inclusión-Exclusión, para dos conjuntos, es el caso más simple, este se puede extender a casos con muchos más conjuntos, analizaremos acá únicamente para dos y tres conjuntos.

Veamos el caso para tres conjuntos a través de operadores de conjuntos. Supongamos tres conjuntos finitos A, B, C y busquemos una relación que nos ayude a calcular $|A \cup B \cup C|$.

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| \text{ Ley Asociativa}$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \text{ Aplicando el caso para dos conjuntos}$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \text{ Ley Distributiva}$$

$$= |A| + |B| - |(A \cap B)| + |C| - (|(A \cap C)| + |(B \cap C)| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|)$$

$$= |A| + |B| + |C| - (|(A \cap B)| + |(A \cap C)| + |(B \cap C)|) + |A \cap B \cap C|$$

Tenemos entonces que la relación para tres conjuntos es la siguiente

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|(A \cap B)| + |(A \cap C)| + |(B \cap C)|) + |A \cap B \cap C|$$

Lo invitamos a dibujar el diagrama de Venn correspondiente a este caso y verificar que en efecto la igualdad anterior cuenta exactamente una vez cada uno de los elementos pertenecientes a la unión de los tres conjuntos.

De igual manera, lo invitamos a resolver un problema parecido al resuelto en el caso de dos conjuntos, este diría así: nos interesa saber cuántos de los números en el intervalo de 1 a 50, cumplen con la característica de tener entre sus divisores al 2 o al 3 o al 7. Tendrá que obtener como resultado la cantidad de 36 números.

Actividad 1

Objetivo

Desarrollar el análisis de casos

Distintos juegos de Damas. Todos al menos una vez hemos jugado a las Damas, resulta interesante saber que hay a lo largo del mundo variantes para este entretenido juego. Recordemos un poco las reglas: se juega en un tablero como el de ajedrez, con piezas de dos colores distintos, blancas y negras, y las piezas se mueven en diagonal por las casillas negras, una ficha come a otra cuando estas se encuentran en casillas vecinas, por un vértice, y una salta por encima de la otra colocándose en la siguiente casilla.

Cuando una ficha logra llegar al otro lado del tablero, esta se convierte en Dama y puede comer una ficha de otro color que se encuentre en la misma diagonal que ella.

Nos interesa saber la cantidad de formas en que dos fichas de distinto color pueden ser colocadas en el tablero, tal que la ficha negra pueda comer a la ficha blanca.

Una variante interesante de este juego es la variante Rusa en la cual las fichas no solo comen hacia adelante, sino que también lo pueden hacer hacia atrás, esto sin duda vuelve el juego más complicado, y nos hace pensar un poco más.

Puedes encontrar la cantidad de formas pedidas también para esta modalidad.

Sugerencias para trabajar el problema

- Reparta a cada estudiante dos fichas, una negra y una blanca, dos tableros para

damas, estos pueden haber sido dibujados en hojas de papel. Sugiera que ellos se coloquen en la posición del jugador de fichas negras.

- Pida a cada estudiante que seleccione una casilla del tablero para colocar su ficha negra, y que diga en cuántas casillas puede colocar a la ficha blanca para poder comerla.
- Discuta con ellos si las cantidades dichas son todas las posibles, recuerde que una ficha que esté en la última fila es ahora una Dama.
- Una vez identificada la cantidad de posiciones de la ficha blanca para cada casilla en que se ubica la ficha negra, pida que realicen un conteo y encuentren el total buscado.
- Para el conteo basta con colocar en cada casilla la cantidad de posiciones para la ficha blanca en que la ficha negra la puede comer desde esa posición y luego sumar los números escritos en el tablero.
- Repite el proceso para el juego en la variante Rusa, en el segundo de los tableros.

Problema supersticioso. Hay en el mundo mucha gente que cree tanto en la buena como en la mala suerte. Uno de los principales símbolos de mala suerte, son los días viernes 13 de cualquier mes. En este tema nos interesa saber dos cosas, la primera existirá algún año en el cual la gente esté libre de este mal día, es decir existen años en los cuales no hay en el calendario viernes 13; la segunda es saber cuál es la mayor cantidad de viernes 13 que pueden aparecer en un año.

Sugerencias para trabajar el problema

- Revisa en compañía de todos los estudiantes dos o tres calendarios de años consecutivos, para buscar la cantidad de viernes 13 en cada calendario, de preferencia no bisiestos.
- Pide a los estudiantes que mencionen características al respecto de cada calendario, estas pueden ser: los meses en que aparece cada viernes 13, el día en que inicia el año, los días en que inician cada mes, los días en que termina cada mes, el día en que es 13 durante cada mes, etc. Es importante notar cada uno de esos hechos, si no son mencionados por los estudiantes habría que sugerirlos.
- Pida a sus estudiantes que supongan que no existen años bisiestos, y pregunte dado un calendario, dentro de cuántos años este se repetirá. ¿Por qué? En efecto solo hay siete calendarios distintos uno que inicia con cada uno de los días de la semana.
- Pida que encuentren la cantidad en cada uno de los casos.
- Suponga que los años ahora son bisiestos y resuelva.

Una petición imposible. Como todos sabemos la pasión por el fútbol en nuestro país es muy grande, a tal grado que todas las instituciones educativas quieren participar en los torneos estudiantiles de fútbol que se juegan año tras año.

Nos encontramos con una institución educativa con muy poco estudiantado, su equipo de fútbol cuenta exactamente con los 11 jugadores necesarios para competir.

El técnico del equipo, un amante de los cubos, decide dar un amuleto a cada uno de sus jugadores, y pedirle al profesor de artesanía que le construya 11 cubos distintos utilizando

en cada cara uno de los dos colores de la institución, azul y gris.

El profesor de matemática que pasaba en ese momento escuchó la petición y, luego de analizar un poco el pedido, interrumpió la plática y dijo “Eso que pide usted amigo mío, es algo imposible de lograr”. Nos interesa saber si el profesor de Matemática tiene razón en lo que dice y para esto debemos saber cuántos cubos distintos se pueden construir.

Sugerencias para trabajar el problema

- Pida a sus estudiantes que realicen un listado de los posibles cantidades de caras

pintadas de cada color, por ejemplo (azul, gris) = (0,6) o (2,3), verifique en grupo que estén todas las alternativas.

- Reflexione el siguiente hecho, los cubos no son figuras estáticas, pueden rotarse, más aún, pueden rotarse en tres sentidos distintos, la Figura 4 muestra este hecho.
- Discuta en grupo formas para contar cada uno de los casos encontrados al inicio. Existen conteos simples, por ejemplo el caso (0,6) es un único cubo.
- Establezcan características para cada uno de los casos y realicen el conteo.

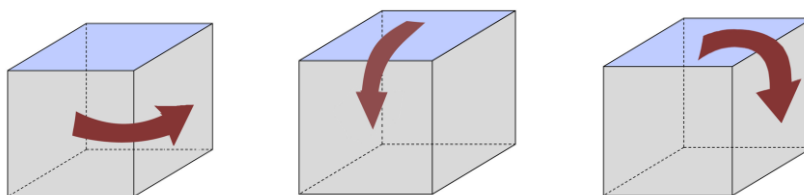


Figura 4. Distintas rotaciones de un cubo.

Actividad 2

Objetivo: Desarrollar las distintas técnicas de conteo.

La cantidad de divisores positivos de un número: Nos interesa encontrar una forma rápida de calcular la cantidad de divisores positivos para cualquier número natural n .

Sugerencias para trabajar el problema:

- Sugiera al grupo participante distintos valores para n y pida que para cada valor listen los números que son divisores de ese valor. Recuerde que 1 y n deben estar en la lista.
- Analice en conjunto con el grupo las características de cada número, y las características de los divisores. Hable sobre

la descomposición en números primos para cada valor en la lista.

- Todos los divisores están formados por los factores primos de cada n . Pero ¿qué pasa con 1?, ¿cómo lo relaciono? Recuerde a los estudiantes que todo número elevado a potencia 0 es igual a 1.
- Dado el último hecho, exprese cada divisor como producto de todos los factores primos de n , algunos elevados a potencia 0.
- En conjunto con el grupo, discuta sobre una forma de encontrar la cantidad de divisores, utilizando los exponentes de los factores primos de n .

- Oriente la discusión de forma tal que los estudiantes establezcan que si

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

entonces la cantidad de divisores positivos de n está dado por

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

Dato curioso: *Sabía usted que todo número natural que tiene una cantidad impar de divisores positivos es un cuadrado, el recíproco también es cierto, en síntesis, todo número que sea un cuadrado posee una cantidad de divisores impares. ¿Puede usted brindar un argumento al respecto de este hecho? ¡Utilice el resultado anterior!*

Actividad 3

Guía de ejercicios y problemas

Objetivo

Practicar los conocimientos adquiridos.

Problema 1

Considere un tablero 8×8 , como el del ajedrez. Determine el número de cuadrados formados por vértices de la cuadrícula cuyos lados son paralelos a los lados del tablero.

Problema 2

Un marino tiene cuatro banderas distintas para hacer señales. ¿Cuántas señales diferentes puede hacer si coloca tres banderas en un mástil, una sobre otra?

Problema 3

Usando las números 1, 2, 3, 4, 5, ¿de cuántas formas es posible formar un número de tres dígitos en cada uno de los siguientes casos?

- Si la repetición de números está permitida.
- Si no se permite la repetición de números.
- Sin repetición de números y que el dígito de las decenas sea 4.
- Con repetición de números y que el 3 siempre esté presente.

Problema 4

En cada uno de los siguientes casos, determine el número de divisores positivos de n , además diga cuántos de esos son múltiplos de 3.

- $n = 240$.
- $n = 600$.
- $n = 91800$.

Problema 5

Un grupo de 102 estudiantes se examinaron en Matemática, Química y Física. Se sabe que 92 pasaron Química; 75, Física y 63, Matemática; a lo sumo 65 pasaron Química y Física; en concreto 54 pasaron Química y Matemática, y específicamente 48 pasaron Física y Matemática. Determine el mayor número de estudiantes que lograron pasar las tres asignaturas.

Problema 6

Determine la cantidad de enteros positivos que son divisores de al menos uno de los números 10^{60} , 20^{50} , 30^{40} .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Andrescu Titu, (2005), *A Path to Combinatorics*, Estados Unidos.
2. Chuan-Chong Chen y Khee-Meng Koh, (1992), *Principles And Techniques In Combinatorics*, Word Scientific Publishing, Singapur.
3. Niven Ivan, (1995), *Matemática de Las Opciones*, Red Olímpica, Argentina.
4. Vilenkin N, (1972), *¿De cuántas formas?*, Editorial Mir, Moscú.

Distintos tipos de permutaciones



Figura1. El grupo de todas las permutaciones posibles del Cubo de Rubik es $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$.

Introducción del tema

Usualmente, en la vida cotidiana, nos enfrentamos con actividades en las que encontrar el conjunto de opciones que tenemos nos resulta difícil y quizá hasta imposible. Al reflexionar cómo en una compañía telefónica asignan infinidad de números sin repetir ninguno, es algo que nos resulta extraño.

No así, bajo el contenido de las permutaciones, que podemos comprender que situaciones como esta y muchas más, no son tan complicadas como parece. Bastará con entender cuándo y cómo hacer uso de ellas.

Las aplicaciones de las permutaciones están desarrolladas hasta en campos tan alejados de la matemática discreta como es la física estadística; por ejemplo, se nos enseña a diferenciar microestados y macroestados, se trabaja el significado de distribuciones más probables de energía, al hablar de temperatura y entropía.

Para tales estudios se habla de sistemas aislados de partículas con niveles propios de energía, los cuales generan un nivel de energía para cada sistema en particular, los pequeños cambios en los niveles de las partículas producen cambios significativos en los niveles de energía del sistema en sí, el estudio de la distribución de estos sistemas hace usos específicamente de Permutaciones con Repetición para cálculos específicos de variación en los niveles de energía

Todo esto ayuda a encontrar el estado más probable de energía para cada sistema.

Competencias por lograr

- Reflexiona y construye un plan de abordaje de problemas, en distintas situaciones.
- Construye e interpreta modelos matemáticos vinculados a las permutaciones.

Objetivos

- Identificar las principales diferencias entre los distintos tipos de permutaciones.
- Desarrollar la habilidad de aplicar correctamente las estrategias para resolver los diferentes tipos de problemas con permutaciones.

Presaberes

- Principios Básicos de Conteo.

UNA BREVE INTRODUCCIÓN

En el mundo de la Combinatoria es muy común que problemas que parecen sumamente simples tengan como respuestas números increíblemente grandes, por ejemplo colocar 6 personas en una fila se puede hacer de 720 maneras distintas.

Ahora si el número de personas aumenta a 7 el total de formas en que la fila se puede hacer es de 5,040; notamos que un pequeño aumento en el número de personas genera un gran incremento en la cantidad de formas en que se pueden colocar en la fila; la cantidad de filas distintas que se pueden lograr con 12 personas es un número de 9 cifras, lo invitamos a que averigüe más adelante qué número es. Es debido a la presencia de estos números tan grandes que en la Combinatoria se hace uso de símbolos matemáticos que representan números que son conocidos o calculables, pero que a la vez son inmensamente grandes.

Uno de esos símbolos es el llamado *factorial* de un número natural n , el cual se representa como $n!$, se lee “factorial de n ” y se define de la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Hay que notar que $1! = 1$.

Permutaciones y arreglos

Definiremos ahora ordenar los elementos de un conjunto como la acción de asignar a cada elemento una posición, o sea, definir qué elemento ocupa la primera posición, qué elemento ocupa la segunda posición y así sucesivamente hasta la última posición. De esta forma diremos que dos ordenamientos son iguales si en cada posición el elemento que la ocupa es el mismo en ambos. Diremos que dos ordenamientos son distintos si existe al menos una posición en la cual el elemento que la

ocupa en uno de los ordenamientos es distinto del que la ocupa en el otro.

El tipo de preguntas que contestaremos en este caso son del tipo: cuantos números de tres cifras se pueden formar utilizando los tres dígitos 1, 2, 3. Veamos que formar los números de tres dígitos no es más que ordenar de alguna forma los tres elementos. Estos ordenamientos son las seis formas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} 123 & 213 & 312 \\ 132 & 231 & 321 \end{array}$$

Note que estas seis ordenaciones pueden ser contadas utilizando el principio de la multiplicación, pues el problema es análogo a contar tripletas ordenadas (x, y, z) donde cada una representa la posición por ocupar en el número. Tenemos tres opciones para la primera posición, dos opciones para la segunda y una opción para la tercera posición, en total $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números.

En general, cuando tenemos n objetos distintos, el número total de formas de ordenarlos es $n!$

Pues la primera posición puede ser ocupada por uno cualquiera de los n objetos; la segunda posición por cualquier objeto que no sea el colocado en la primera posición, por lo que las alternativas se deducen a $(n - 1)$; para la tercera posición se tiene $(n - 2)$ alternativas, y así sucesivamente, dejando a la última posición con una única alternativa; aplicando el principio de la multiplicación, las alternativas de ordenar los objetos estaría dado por

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1) = n!$$

A cada ordenamiento de los n objetos se le denomina una permutación, y al total de

permutaciones se denota por P_n . Tenemos entonces el resultado siguiente:

El total de permutaciones de n elementos, denotado por P_n , está dado por

$$P_n = n!$$

Estamos en condiciones para responder preguntas como los datos mencionados al inicio, el número de formas de hacer una fila con n personas es, en efecto, el número de permutaciones de n objetos y por lo tanto la respuesta sería P_n o simplemente $n!$

Para los casos mencionados como por ejemplo $n = 6$ personas tenemos que la cantidad de filas que se pueden conseguir son en efecto $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ maneras.

Nuestro torneo mayor de fútbol consta de 10 equipos, nos interesa saber entonces cuántas son las posibles formas en que las 10 posiciones quedarían repartidas al final de dicho torneo, suponemos que no hay posibilidad de empates en cuanto a las posiciones.

Este problema trata únicamente sobre la cantidad de permutaciones que se pueden dar de los 10 equipos en una fila, que claro está, es simplemente $P_{10} = 10!$, un número de siete cifras, lo invitamos a calcularlo.

Pero qué sucede si nos interesa solo una parte de la información y no el paquete completo, nos referimos a preguntas, como por ejemplo, en el problema anterior qué resultaría si en lugar de querer saber de cuántas formas se pueden ordenar los 10 equipos, nos interesara únicamente saber de cuántas formas pueden quedar el primero, el segundo y el tercer lugar.

Para esta situación tenemos para el primer lugar 10 posibles equipos, para el segundo lugar tenemos únicamente 9 posibles equipos, y para la tercera posición, únicamente 8

equipos. Aplicando el principio de la multiplicación tendríamos $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas.

Note que el anterior es siempre un problema de ordenamientos, pero en el cual nos interesa solo una parte del ordenamiento completo, para dicho caso podríamos decir que nos da lo mismo cuál de los siete equipos restantes ocupe la cuarta posición.

Este tipo de problemas trata acerca de ordenamiento de objetos en la cual la cantidad de objetos es mayor o igual que la cantidad de espacios disponibles; en donde la pregunta general sería ¿cuántas configuraciones de longitud k puede formarse si se tienen n objetos distintos $k \leq n$?

Este tipo de configuraciones son llamados en algunos textos *Arreglos*, pues reservan el término permutación a únicamente un ordenamiento del total de los elementos, mientras que otros textos los llaman *permutaciones de longitud k* o simplemente *k -permutaciones*.

Este problema es una aplicación directa del principio de la multiplicación, para resolver el caso general se tiene que: tenemos k espacios, en el primero puede ubicarse a cualquiera de los n objetos, hay entonces n opciones; en el segundo espacio puede ubicarse a cualquiera de los n objetos, exceptuando el que se colocó en la primera posición, por lo que hay $(n - 1)$ opciones; en el tercer espacio puede colocarse a cualquiera de los n objetos exceptuando el que se colocó en la primera posición y el que se colocó en la segunda posición, por lo que hay $(n - 2)$ opciones; este argumento se puede seguir, hasta que en el espacio k puede ubicarse a cualquiera de los n objetos, exceptuando los que se colocaron en las

anteriores $k - 1$ posiciones, por lo que hay $n - (k - 1)$ opciones.

Así el total de k -permutaciones dados n objetos distintos con $k \leq n$ es

$$P_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)$$

Esta expresión se puede volver más compacta si multiplicamos y dividimos por $(n - k)!$, obteniendo:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Permutaciones y arreglos circulares

Las permutaciones revisadas hasta el momento tienen que ver con problemas donde lo importante es ordenar objetos en una fila. Analizaremos ahora un tipo distinto de permutación en el cual los objetos son ordenados en forma de circunferencia, estas son conocidas como permutaciones circulares. Consideremos como un ejemplo introductorio la siguiente situación:

Tres estudiantes se toman de las manos y forman una ronda, digamos Luis, Ana y José, y pidámosle que giren, en tres momentos distintos tendremos las situaciones siguientes

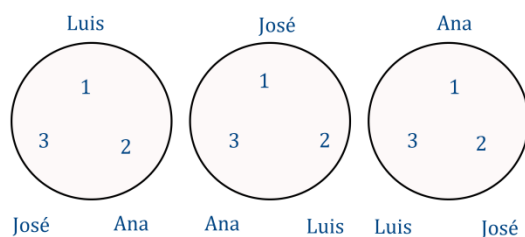


Figura 2. Permutaciones circulares.

Notemos que en la figura las posiciones están numeradas y además la forma de ordenarse es la misma, pues los estudiantes han girado sin soltarse de la mano, así que la permutación no ha cambiado el orden original.

Ahora, si colocamos a los estudiantes en fila tal como muestran las posiciones tendríamos:

Luis, Ana, José

Ana, Luis, José

José, Luis, Ana

Podemos observar que linealmente una misma permutación circular de tres objetos hacer referencia a tres permutaciones lineales de tres objetos.

Esta relación directa nos dice que cada permutación circular de tres elementos genera tres permutaciones lineales distintas, generan cada una un grupo distinto de permutaciones lineales.

Listemos las permutaciones lineales de 3 elementos, sabemos que hay $P_3 = 3! = 6$

Luis, Ana, José	Luis, José, Ana
Ana, José, Luis	José, Ana, Luis
José, Luis, Ana	Ana, Luis, José.

El bloque de la izquierda es justo la primera permutación circular. Podemos intuir que el segundo bloque, por ser otras tres, representa otra permutación circular. Verifiquémoslo.

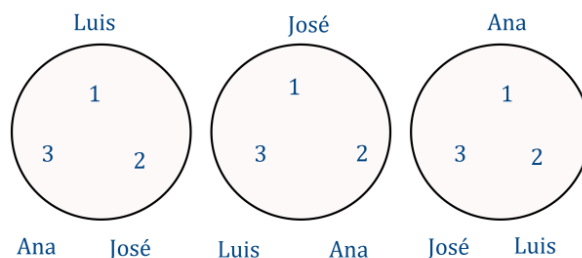


Figura 3. Permutaciones circulares.

En efecto pertenecen a la misma permutación circular.

Notemos que la gran diferencia entre las permutaciones del tipo lineal y las del tipo circular, es la presencia en las del primer tipo de una posición de inicio y una posición de final y la carencia de estas en la segunda.

En el tipo lineal podemos hablar de una primera posición, una segunda posición, una tercera posición, etc., hasta llegar a una n -ésima posición, mientras que en las del tipo circular no podemos identificar dichas posiciones, sin embargo acá podemos identificar “posiciones relativas”, y estas tienen que ver con respecto a qué objetos están tanto a su derecha como a su izquierda.

Debemos ahora encontrar el número total de estas permutaciones circulares. Para esto podemos plantear las siguientes interrogantes:

¿Cuál es el número de permutaciones circulares para $n=4$? ¿y para $n=5$? Dichas permutaciones circulares las denotaremos por Q_n .

Para responder estas preguntas tome como ejemplo el caso $n=3$ recordando que cada permutación circular reproduce un conjunto de permutaciones lineales. Recuerde que cada permutación circular se puede escribir como permutación lineal y viceversa. Para $n=3$, $n=4$ y $n=5$ ¿cuántas permutaciones lineales tiene cada conjunto?

En estos momentos tenemos los valores de $Q_3 = 2$; $Q_4 =$; $Q_5 =$.

Tomemos un momento para crear conjeturas. Encontremos Q_6 sin tener que hacer una búsqueda exhaustiva de las distintas permutaciones.

Con base en los casos anteriores cada permutación circular de tamaño 6 ¿cuántas permutaciones lineales producirá? Tomando en cuenta ese dato ¿cuál es el valor esperado

de Q_6 ? ¿Podrías calcular Q_7 ? ¿Cuál sería la regla general para calcular Q_n ?, como ejercicio escribe un argumento que explique y muestre por qué la regla general de Q_n es válida.

Las dos demostraciones vistas son sumamente importantes pues nos dejan una enseñanza muy valiosa. La primera nos enseña a descontar a través del cociente las permutaciones que se repiten, para que estas sean contadas una única vez, lo cual como apreciaremos en el futuro, es una técnica utilizada en muchos problemas de conteo.

La segunda nos muestra un hecho muy importante en el tratamiento de problemas de permutación circular, y es precisamente que luego de colocado un objeto dentro de la circunferencia, el hecho de colocar los $n-1$ objetos se vuelve un problema lineal, desde el punto de vista de quien está a la derecha (o izquierda) del último elemento colocado.

Pasemos ahora a desarrollar un ejemplo que muestra el uso de permutaciones circulares y puntos fijos.

¿Cuántos cubos distintos se pueden construir si cada cara del cubo debe ser pintada con un color distinto de entre seis colores disponibles? Dos cubos son iguales si se pueden colocar de forma tal que todas las caras coincidan en color.

Observemos que este problema tiene las características de un problema de permutación circular, pues el cubo se puede rotar, sin embargo, tiene la complejidad extra de que puede ser rotado en tres formas distintas, tal como se mostró en la lección de principios de conteos.

Debemos entonces encontrar una forma de visualizar este problema de forma tal que esta dificultad sea superada. Para esto imagine lo

siguiente: un cubo ya pintado con los seis colores disponibles, supongamos azul, blanco, verde, rojo, gris, y amarillo.

Digamos que usted ve el cubo desde arriba, y que su color favorito es el verde ¿puede usted lograr que la cara que observa desde arriba sea la verde? ¿Lo puede lograr sin importar la forma en que esté pintado el cubo? ¡Analícelo y responda! Luego continúe la lectura.

La respuesta a estas dos interrogantes es sí, en efecto no importa cómo sea la coloración del cubo, bastará rotarlo para conseguir que el color verde esté ubicado en la cara superior.

Este hecho es muy importante, pues nos da una idea de cómo quitar la problemática de las rotaciones en tres sentidos. Podemos fijar el color verde en la cara superior, esto es posible siempre, como ya dijimos, ahora el cubo solo puede rotar en una forma horizontal.

Esto ahora transforma el problema en dos preguntas, la primera ¿qué color ocupa la cara opuesta a la verde? Y ¿de cuántas formas se pueden colocar los cuatro colores restantes en la franja horizontal?

La respuesta a la primera de las preguntas es cualquiera de los 5 colores restantes; en otras palabras, hay 5 opciones. Para pintar la franja central tenemos 4 colores, pero como esta puede rotar es un problema de permutación circular y sabemos que la forma de hacerlo es $Q_4 = 6$.

Así tenemos 1 forma de pintar la cara superior, 5 formas de pintar la cara inferior, 6 formas de pintar la franja central. Por el Principio de la multiplicación las formas de pintar el cubo son en total $1 \cdot 5 \cdot 6 = 30$.

Permutaciones con repetición

Hemos resuelto hasta el momento permutaciones que únicamente involucran

elementos distintos en cada una de las posiciones, ¿pero qué sucede cuando hay más de un solo elemento de un mismo tipo?

Consideremos el siguiente ejemplo: nos interesa saber cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar tales que están escritos con dos dígitos 1 un dígito 2 y un dígito 3.

Sabemos que $P_4 = 4! = 24$, por lo que el resultado esperado será a lo sumo 24, pero que tanto afecta el tener elementos repetidos, realicemos el listado de los números y contemos cuántos son:

1123	1132	1213	3112
1213	1312	2131	3121
1231	1321	2311	3211

Siendo un total de 12 números únicamente la mitad, $12 = \frac{24}{2}$.

Ahora qué pasa si los números utilizados fueran tres dígitos 1 y un dígito 2, el listado de números sería:

1112	1211
1121	2111

Tenemos entonces únicamente 4 permutaciones para este caso, $4 = \frac{24}{6} = \frac{24}{3!}$.

Ahora, si los cuatro dígitos son iguales tenemos una única permutación 1111, de donde $1 = \frac{24}{24} = \frac{24}{4!}$.

Esto nos permite conjeturar si vamos a permutar n objetos de los cuales k objetos son iguales, entonces el número de permutaciones posibles esta dado por $\frac{n!}{k!}$.

Qué pasa si los símbolos repetidos son más que un solo tipo, por ejemplo, estudiemos las

permutaciones dentro de las cadenas binarias: nos interesa saber cuántas cadenas binarias de longitud seis existen, tales que estén formadas por dos dígitos 1 y cuatro dígitos 0. Sabemos que la cantidad de permutaciones de seis elementos está dado por $P_6 = 6! = 720$. Listemos las permutaciones y veamos que es un número mucho menor que este.

110000	011000	001010
101000	010100	001001
100100	010010	000110
100010	010001	000101
100001	001100	000011

Podemos observar que únicamente son 15. Ahora si lo que hubiésemos tenido fueran 4 objetos de un tipo y 2 objetos de tipos distintos, la cantidad de permutaciones estaría dada por $\frac{6!}{4!} = 30$, y si hubiésemos tenido 2 objetos de un tipo y 4 objetos de tipos distintos la cantidad de permutaciones estaría dada por $\frac{6!}{2} = 360$.

Actividad 1

Objetivo: Desarrollar el análisis de situaciones en las que se involucran problemas de permutaciones circulares.

Los collares para el carnaval: El alcalde de un pueblo le pidió a un hábil artesano que construyera collares distintos para las fiestas patronales, para esto le dijo el disponía de la cantidad de piedras que quisiera en diez distintos colores, le pidió como condición que cada collar estuviera formado por únicamente seis piedras, todas de colores distintos. Nos interesa saber en este caso, cuál es la mayor

Ahora el resultado obtenido lo podemos escribir de la siguiente manera $15 = \frac{30}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$ ó $15 = \frac{360}{24} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$.

Podemos conjeturar entonces lo siguiente: Si tenemos n objetos de los cuales hay k objetos de un tipo y $n - k$ objetos del otro tipo, el número de permutaciones de los n objetos estará dado por

$$P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Plantearemos ahora el enunciado en la forma general.

Dados k_1 objetos idénticos de la clase 1, otros k_2 objetos idénticos de la clase 2, y así sucesivamente hasta que tenemos k_r objetos idénticos de la clase r , tomando $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, el total de permutaciones de los n objetos está dado por

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

cantidad de collares distintos que el artesano puede fabricar.

Sugerencias para trabajar el problema Inicie discutiendo con los estudiantes los distintos tipos de collares que se pueden elaborar. Esta discusión debe orientarse a si el collar tiene broche o no lo tiene, pues ambos casos plantean condiciones distintas.

- Una vez hechas las dos distinciones, analice qué tipo de problema corresponde a cada

tipo de collar. Observe que el collar con broche se puede abrir y transformar en una fila de piedras, la pregunta sería ¿con qué tipo de permutación nos encontramos?

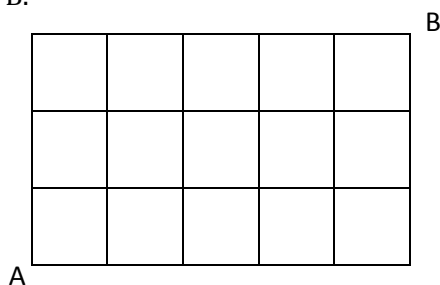
- Resuelva este caso. Cuando los estudiantes manifiesten sus soluciones muestre un collar de este tipo y muestre que el collar se puede tomar en un sentido o en el sentido contrario y sigue siendo el mismo collar, para este caso el punto de inicio puede ser también visto como el punto final, en tal caso el valor obtenido en la permutación debemos dividirlo por 2.

- Resuelva ahora el caso en el que no hay broche. Dado que no hay broche, el collar no tiene inicio ni tampoco final, la pregunta en este caso sería ¿con qué tipo de permutación nos encontramos?
- Resuelva este caso. Muestre que al igual que en el caso anterior un collar de este tipo puede verse en los dos sentidos al ser girados; en otros términos, las posiciones relativas pueden ser vistas tanto como derecha o como izquierda de una misma piedra.

Actividad 2

Objetivo: Desarrollar el análisis de situaciones que pueden traducirse a problemas de permutaciones con repetición.

La decisión del turista: Un turista se encuentra en un pueblo en el cual cada cuadra mide exactamente 100 m. y las calles tienen forma de líneas rectas horizontales y líneas verticales. Él tiene en sus manos un mapa del pueblo e identifica con el punto A el lugar en el que se encuentra en ese momento, él debe trasladarse a pie hasta su hotel que se encuentra en el punto B.



Nos interesa saber de cuántas maneras distintas puede hacer el recorrido el turista si quiere hacerlo lo más corto posible.

Sugerencias para trabajar el problema

- Inicie preguntando cuál es la distancia mínima que debe recorrer el turista.

¿Cuánto de esta distancia es en sentido vertical y cuánto en sentido horizontal?

- Pida a cada estudiante que marque el camino de su preferencia, cuidando siempre que sea de tamaño mínimo.
- Discuta sobre las diferencias entre los caminos mostrados, haciendo énfasis en que en cada esquina se debe tomar una decisión, ¿viajar en vertical o viajar en horizontal?
- Pida a sus estudiantes que describan los caminos mostrados. Se pueden utilizar descripciones del tipo Derecha-Arriba o notaciones similares como D-A.
- Discuta el hecho que cada camino marcado puede traducirse a un ordenamiento de palabras o de símbolos y viceversa. ¿Cuántas D y cuántas A necesita?
- Concluya con el hecho que todo se reduce a un problema de permutaciones con repetición para el caso de dos tipos de símbolos.
- Trabaje distintos mapas.

Actividad 3

Objetivo: Desarrollar el análisis de casos y la aplicación del cálculo de permutaciones lineales y con repetición.

Niveles de energía para sistemas aislados.

Consideremos un sistema aislado compuesto por un gran número de partículas, en el cual, cada partícula puede ocupar alguno de los niveles de energía E_0, E_1, E_2 , etc.

Estos pueden estar cuantizados (como los estados rotacionales o vibracionales de una molécula) o bien, pueden formar un espectro continuo (como la energía cinética de las moléculas de un gas).

Por ejemplo, en el modelo de sólido de Einstein, los átomos se representan por osciladores armónicos unidimensionales. Los osciladores interaccionan muy débilmente, de modo que la energía de la interacción se puede considerar despreciable frente a la energía del oscilador. La energía del nivel i será $E_i = i\epsilon$, siendo ϵ la diferencia de energía entre dos niveles consecutivos. En un momento dado, las partículas están distribuidas entre los diferentes niveles de modo que n_0 tienen energía E_0 , n_1 partículas tienen energía E_1 y así, sucesivamente.

El nivel de energía del sistema estará dado por la suma de la energía de las partículas que forman el sistema. Suponga $\epsilon = 1$.

Nos interesa saber en este caso particular cuántos sistemas distintos existen que tengan

Energía total 10, ejemplos de estos son (1,2,3,4) son cuatro partículas una en el nivel 1, otra en el nivel 2, otra en el nivel 3 y la última en el nivel 4, note que este sistema es diferente al sistema (1,2,4,3) pues aunque las partículas se encuentran en los mismos niveles, en el segundo caso la tercera partícula está en el cuarto nivel mientras que en el primer caso la tercera partícula está en el tercer nivel; dicho con otros términos, dos sistemas serán distintos si el orden de los niveles de las partículas son distintos, en al menos una partícula.

Sugerencias para trabajar el problema

- Inicie pidiendo al estudiantado que realice una lista de todas las posibilidades de niveles utilizados y partículas en cada nivel, de tal forma que el nivel de energía total sea 10.
- Realice una discusión en conjunto para verificar que se tenga un listado completo.
- Discuta la utilización del principio de la suma para el cálculo total de los distintos sistemas que existen.
- Para cada uno de los casos pida al grupo participante que identifique si se trata de un problema de permutación con o sin repetición. Pida que resuelvan cada caso.

GUÍA DE PROBLEMAS

1. Para confeccionar un examen, se dispone de tres problemas de geometría, cuatro de combinatoria y dos de álgebra. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse los problemas si los que corresponden a un mismo tema deben aparecer en forma consecutiva?
2. Un bebé recién nacido puede tener uno, dos o tres nombres ¿de cuántas formas puede llamarse, si se puede escoger de 300 nombres disponibles?
3. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cuatro hombres y cuatro mujeres alrededor de una mesa redonda, si no deben de haber dos hombres sentados en asientos adyacentes?
4. ¿Cuántos cubos diferentes, con sus caras numeradas de uno a seis pueden ser fabricados, si la suma de los números que se encuentran sobre cada par de lados opuestos debe ser siete?
5. ¿Cuál es la cantidad de configuraciones distintas que pueden generar los n semáforos ubicados sobre la calle principal?
6. ¿Cuántas cadenas ternarias de longitud 15, se pueden formar con cuatro 0, cinco 1 y seis 2?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Andrescu Titu, (2005), *A Path to Combinatorics*, Estados Unidos.
2. Chuan-Chong Chen y Khee-Meng Koh, (1992), *Principles And Techniques In Combinatorics*, Word Scientific Publishing, Singapur.
3. Combinatoria (2010), *Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
4. Ivan Niven, (1995), *Matemática de las Opciones*, Red Olímpica, Argentina.
5. N. Vilenkin, (1972), *¿De cuántas formas?*, Editorial MIR, Moscú.
6. Recuperado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/estadistica/boltzmann/formula/formula.htm>

Número combinatorio

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_n^k = C_{n-2}^k + 2 C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$$

$$C_n^k = C_{n-3}^k + 3 C_{n-3}^{k-1} + 3 C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$$

$$\vdots$$

Figura 1. Propiedades de los números combinatorios

Introducción del tema

En esta vista aérea de San Salvador, se tiene una cuadrícula casi “perfecta”, donde los cuadraditos representan manzanas de casas y las líneas divisorias las calles circundantes.

La pregunta es: ¿cuántos caminos conducen desde la Biblioteca Nacional hasta el mercado ex-Cuartel, cada una de las intersecciones, accediendo por la esquina superior-izquierda, avanzando o descendiendo, nunca retrocediendo ni ascendiendo?



Figura 2. Posibles caminos de la biblioteca al mercado ex cuartel.

Al finalizar esta lección podrá confirmar que en efecto son C_8^3 es decir 56 formas y responder además que el número de rectángulos que se observan son $C_6^2 \times C_4^2 = 90$.

Competencias por lograr

- Reflexionar y construir un plan de abordaje de problemas, bajo distintas visiones.
- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Objetivos

- Reflexionar y construir un plan de abordaje de problemas, bajo distintas visiones.
- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Presaberes

- Principios básicos de conteo.
- Permutaciones.

UNA BREVE INTRODUCCIÓN

No siempre nos interesa el orden en que se distribuyen los elementos. Por ejemplo, en el torneo local de fútbol mayor participan 10 equipos, al final de este los cuatro mejores equipos clasifican a la fase final, en la que todo puede pasar, el campeón al final puede resultar ser el equipo que se clasificó en cuarto lugar.

De igual manera, en otras competencias se realizan fases previas, donde lo importante es terminar entre los mejores del grupo y no el lugar en el que se clasifica.

Por ejemplo un estudiante que quiera ser parte del equipo nacional de Matemática, debe competir en la Olimpiada Nacional de Matemática, lograr quedar entre los mejores para participar en los entrenamientos.

Luego participar en la ronda de selección en la cual debe ser uno de los mejores cuatro. Pasa a un segundo plano si es el primero o si es el cuarto, de igual manera será parte del equipo nacional.

En los casos en que no nos interesa el orden de los elementos en la distribución, sino solamente su composición, se dice que se trata de una combinación.

De este modo, se llaman r -combinaciones de n elementos las r -distribuciones posibles, formadas a partir de estos elementos y que se diferencian entre sí por la composición de los elementos, pero no por su orden. El número de r -combinaciones que se pueden formar a partir de n elementos se denota mediante

$$\binom{n}{r} = C_n^r$$

VISIÓN DE CADENAS BINARIAS

Esta visión es una de las más sencillas para determinar la forma algebraica de determinar el número combinatorio, esto se debe

principalmente a que en la lección anterior se han abordado problemas del tipo que este modela.

A pesar que el estudio de esta sección no será a simple vista muy amplio, veremos en el transcurso de esta lección cómo la mayoría de problemas que involucran al número combinatorio pueden ser traducidos a problemas de este tipo.

Para empezar, definiremos una cadena binaria como una sucesión de símbolos, en la cual participan a lo sumo dos símbolos, estos serán comúnmente 0 y 1 aunque pueden variar.

Definiremos acá el símbolo $\binom{n}{r}$ como la cantidad de cadenas binarias de longitud n , tales que poseen r símbolos 1 y $(n-r)$ símbolos 0.

Está claro que esto se reduce a contar el número de permutaciones de los n elementos que como sabemos no es otra cosa más que

$$P_n^{r,n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$P_n^{r,n-r} = \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

VISIÓN CONJUNTISTA

Veamos esto, ahora, desde el punto de vista de los conjuntos, esta es una de las mejores visiones pues en la misma definición de conjunto nos dice que el orden de los elementos no importa, simplemente interesa los elementos que componen el conjunto, estudiaremos entonces lo concerniente al número de subconjuntos de un conjunto dado.

Veremos dos formas de llegar al resultado deseado, la primera, como siempre,

relacionada con cadenas binarias y la segunda utilizando la relación entre conjunto y permutaciones lineales.

Veamos entonces el siguiente ejemplo: supongamos que tenemos el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y nos interesa saber cuantos subconjuntos de tres elementos posee.

Estudiemos algunos de estos subconjuntos por ejemplo tenemos $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$ por mencionar algunos. Ahora surge una pregunta importante ¿cuál es la diferencia entre estos conjuntos?

Claro, la respuesta es simple, cambian en el tercer elemento, en el primero aparece el 3, en el segundo el 4, en lugar del 3 y así podemos decir del tercero en el que aparece el 5 y en el cuarto el que aparece es el 6, pero veamos un poco más allá, en el primero de los subconjuntos lo que se hizo fue decirle si pertenece al 1,2,3 y no pertenece a los restantes; en el segundo se le dice sí al 1 y 2, no al 3, sí al 4 y no al resto; en el tercero se dice sí al 1 y 2, no al 3 y 4, sí al 5 y no al resto.

Observe que la formación de cada subconjunto se reduce a decirle sí a tres elementos para que esté en el subconjunto y no a los restantes seis. Podemos entonces hacer la traducción de cada conjunto a una cadena de sí y no, por ejemplo:

$$\{1,2,3\} = \text{SSSNNNNNN}$$

$$\{1,2,4\} = \text{SSNSNNNNN}$$

$$\{2,3,8\} = \text{NSSNNNNSN}$$

Y cada cadena de tres s y seis n puede traducirse a un subconjunto de tres elementos por ejemplo:

$$\text{NNSNNSNSN} = \{3,6,8\}$$

La cadena se leería no al 1, no al 2, sí al 3, no al 4, no al 5, sí al 6, no al 7, sí al 8, no al 9. Dada la relación uno a uno existe entre las cadenas de

tres s y seis n y los subconjuntos de tres elementos tenemos que el número de subconjuntos es igual al número de cadenas:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!}$$

Este resultado puede ser generalizado de la siguiente forma:

Para un conjunto con n elementos, el número de subconjuntos de r elementos, con $0 \leq r \leq n$, es igual a la cantidad de cadenas que se pueden formar con r símbolos S y n-r símbolos N.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Veamos ahora una demostración utilizando permutaciones lineales, tenemos ahora un solo subconjunto, supongamos el $\{1,2,3\}$ si de permutaciones lineales habláramos, estos tres elementos formarían $p_3 = 3! = 6$ permutaciones que son

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3 & 2,1,3 & 3,1,2 \\ 1,3,2 & 2,3,1 & 3,2,1 \end{array}$$

Pero acá esas seis permutaciones representan un único subconjunto $\{1,2,3\}$.

Podemos plantear que el total de permutaciones lineales es de seis veces el número de subconjuntos pues por cada subconjunto había 6 permutaciones como hemos mostrado, el total de permutaciones de longitud 3 tomados de 9 elementos es:

$$P_9^3 = \frac{9!}{6!}$$

Tenemos entonces que:

$$6 \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!}$$

$$3! \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!}$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!}$$

Este resultado puede ser generalizado de la siguiente manera:

Para un conjunto de n elementos, el número de subconjuntos de tamaño r , con $0 \leq r \leq n$, es igual al número de permutaciones de tamaño r tomados de n elementos divididos por el número de permutaciones formada por los r elementos del subconjunto, es decir $r!$.

Tendríamos entonces:

$$r! \binom{n}{r} = P_n^r$$

$$r! \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

IDENTIDADES COMBINATORIAS, ARGUMENTOS COMBINATORIOS

Cuando nos referimos a un argumento combinatorio, o una prueba combinatoria, que explican ciertos resultados modelando problemas conocidos, dejando de lado la manipulación algebraica.

Veamos esto, demostrando una de las identidades más importantes de la combinatoria, nos referimos claro a la identidad de Pascal que dice

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Donde n, r pertenecen a los naturales con $r \leq n$.

Esta identidad es fácilmente demostrable de forma algebraica, para eso invitamos a usted, amigo lector, a desarrollar el lado derecho, simplificar y compactar hasta obtener el lado izquierdo. Mostraremos ahora esta identidad

utilizando argumentos de los tres tipos de visión que hemos descrito:

Argumentos usando cadenas binarias

Tenemos que $\binom{n}{r}$ representa las cadenas en las cuales hay en total r símbolos. Ahora estas cadenas tienen dos opciones, iniciar con 1 o iniciar con 0.

Si inician con 1 tenemos que el resto son cadenas de longitud $n-1$ pues ya usamos uno al inicio. Estas cadenas son en total $\binom{n-1}{r-1}$.

Si inicia con 0 tenemos que lo que sigue es una cadena de longitud $n-1$ con r símbolos 1, esta cadena son en total $\binom{n-1}{r}$.

Dado que los casos son excluyentes, tenemos entonces por el principio de la suma que

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Tal como queríamos mostrar.

Argumentos usando caminos

Tenemos que $\binom{n}{r}$ representa el total de rutas cortas de longitud n de los cuales r movimientos son hacia la derecha. Veamos un mapa que lo modela.



Figura 3. Mapa de modelo de cuadrícula de $\binom{n}{r}$ rutas.

Los dos puntos marcados son las dos posiciones previas en las que la persona pudo haber estado antes de llegar al final.

El punto marcado con X, está una posición a la izquierda, por lo tanto solo recorre $r - 1$ hacia la derecha para llegar, de $n - 1$ pasos necesarios. La forma de llegar a X son $\binom{n-1}{r-1}$.

El punto marcado con Y está alineado con el punto final, por lo tanto para llegar a Y hay que dar r pasos a la derecha, de $n - 1$ pasos necesarios. Las formas de llegar a Y son $\binom{n-1}{r}$.

Si pasamos por X no pasamos por Y, y viceversa, por el principio de la suma tenemos que

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Tal como queríamos mostrar.

Argumentos por conjuntos

Tenemos que $\binom{n}{r}$ es el total de subconjuntos de r elementos tomados de n . Nos fijaremos acá en el primer elemento, realmente puede ser cualquier elemento, este tiene dos opciones, estar o no estar en el subconjunto.

Si está, de entre los $n - 1$ elementos restantes se deben escoger los $r - 1$ para completar el subconjunto, esto es $\binom{n-1}{r-1}$.

Si no está, de entre los $n - 1$ elementos restantes se deben escoger los r para formar el subconjunto, esto es $\binom{n-1}{r}$.

Dado que los casos no se pueden dar al mismo tiempo, por el principio de la suma tenemos

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Tal como queríamos mostrar.

Hemos enseñado la forma de utilizar estos argumentos a través de estas tres visiones. Es necesario remarcar lo siguiente: si bien estas visiones son herramientas fuertes para el trabajo en la demostración de problemas e identidades combinatorias, existen situaciones

en las cuales las tres visiones no funcionan de igual manera y será usted quien deba decidir cómo abordar dichas situaciones.

APLICACIÓN DEL NÚMERO COMBINATORIO. TÉCNICA DE LOS SEPARADORES

Iniciemos estudiando la siguiente situación: En una tienda de deportes se venden cuatro tipos de balones: azules, blancos, verdes y negros. Para un instituto necesitamos comprar un total de 10 balones. ¿De cuántas formas se puede realizar esta compra?

Notamos que este no es un problema sobre permutaciones con repetición, ya que el orden en que se compran los balones es indiferente. Por esto, se halla más próximo a los problemas de combinaciones.

Pero a la vez se diferencia de estos en que en las disposiciones pueden figurar elementos repetidos, por ejemplo, se pueden comprar todos los balones de un mismo color. Estos problemas se llaman problemas sobre combinaciones con repetición.

Mostraremos en la resolución de este problema una técnica muy fuerte en el área de la combinatoria, la técnica de Separadores. Para cada compra que sea posible realizar ubiquemos los balones de un mismo color en una misma caja, balones de distinto color estarán ubicados en cajas distintas.

Ahora establezcamos un código para la compra realizada, para eso utilizaremos ceros y unos.

Lo realizaremos de la siguiente manera, en primer lugar escribimos un 1 por cada balón en la caja de los azules, al terminar escribiremos un 0 para indicar que pasamos a la siguiente caja, la de los balones blancos, repetimos el proceso y colocamos un 1 por cada balón blanco y luego un 0 para indicar que pasamos a

la caja de los balones verdes, colocamos un 1 por cada balón verde y un 0 para indicar que pasamos a la caja de los balones negros y finalmente un 1 por cada balón negro.

Si en algún momento alguna de las cajas está vacía, simplemente colocamos el 0 correspondiente al cambio de caja; en otras palabras, en el código podrían aparecer dos o más ceros consecutivos.

Por ejemplo, si se han adquirido 3 balones de azules, 2, blancos, 2 verdes y 3 negros, obtenemos el siguiente código: 1110110110111.

Si, en cambio, fueron comprados 3 balones de azules y 7 verdes se obtiene el siguiente código 1110011111110. Está claro que a distintas compras les corresponden diferentes códigos de diez símbolos 1 y tres símbolos 0.

Recíprocamente, a cada disposición de diez símbolos 1 y tres símbolos 0 le corresponde alguna compra. Por ejemplo, al código 0101111011111 le corresponde de la compra de 1 balón blanco, 4 verdes y 5 negros.

Así, pues, el número de compras diferentes es igual al de permutaciones con repetición que pueden ser formadas de diez símbolos 1 y tres símbolos 0, lo cual también sabemos es igual a simplemente escoger la posición que ocuparían en la cadena los tres símbolos 0 que se utilizan como separadores.

Este número es igual a:

$$P_{13}^{10,3} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{10!3!} = 286$$

Una generalización de este problema está dado de la siguiente manera:

Dada una colección de objetos clasificados en r tipos de objetos, donde los objetos del mismo tipo son iguales entre sí, y distintos de

cualquier objeto de otro tipo. El total de formas de escoger n objetos es

$$P_{n+r-1}^{n,r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$$

Para demostrar esto realizamos el mismo proceso que en el ejemplo anterior, suponemos los n objetos todos iguales y los representamos con un símbolo 1, para distinguir a qué clase pertenece necesitamos $r-1$ símbolos 0, el problema se reduce a calcular las permutaciones con repetición de este conjunto de símbolos.

Una versión muy utilizada de separadores es la siguiente:

El total de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

Está dado por

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

UNA SOLUCIÓN INGENIOSA

Presentamos en esta sección una solución al problema de los balones, que hace uso de mucho ingenio y por lo tanto es bueno que el lector la conozca para empaparse de estas ideas tan ingeniosas que pueden resultar útiles en problemas futuros. La solución dice así:

Para cada compra ordenemos los balones de la siguiente manera: balones azules, blancos, verdes y negros, los enumeraremos del 1 al 10. Pero al efectuar esto, agregamos 1 al número de los blancos, 2 a los verdes y 3 a los de los balones de negros, mientras que los números de los azules no cambiarán.

Esto haría que en cualquier enumeración el valor más pequeño fuese el 1, pues los números de los azules nunca cambian, mientras que si el décimo balón fuera negro, el

mayor número en la enumeración sería 13 que es 10 de la posición, más 3 del color.

Por ejemplo, supongamos que se han comprado 2 balones azules, 4 blancos y 4 negros, estos balones se enumerarían así: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13. Este tipo de numeración permite que ningún número se repita.

Recíprocamente, a cada sucesión creciente de 10 números del 1 al 13 le corresponde cierta compra. Por ejemplo, a la sucesión 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13 le corresponde la compra de 2 azules, 3 blancos, 4 verdes y 1 negro.

Para estar seguro de esto es suficiente restar a los términos de la cadena los números del 1 al

10, obtendríamos de esta manera 0011122223, es decir dos 0, tres 1, cuatro 2 y un 3, pero esos son los números que sumamos a cada tipo de balón.

Obtenemos, en nuestro caso, solo sucesiones crecientes de números y, por lo tanto, cada sucesión queda totalmente determinada por sus integrantes. Por esto, el número de estas sucesiones de 10 términos es igual a escoger 10 números de entre el conjunto de 1 a 13. Dicho número es:

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{10!3!} = 286$$

Hemos obtenido el mismo resultado.

Actividad 1

Objetivo: Desarrollar de las distintas visiones de número combinatorio. Cálculo de algunos combinatorios sin la utilización de cálculo algebraico.

Nota: Se recomienda utilizar esta actividad en el aula antes de definir el valor de $\binom{n}{r}$ en términos de factoriales. Utilizar simplemente la definición de cadena binaria, camino y conjunto, para realizar los conteos, esto ayudará a que el grupo estudiantil se relacione con las distintas visiones y la forma de utilizarlas.

Los combinatorios básicos: En el cálculo de números combinatorios, para toda persona que se introduce en este mundo, llega un momento en el cual algunos de estos números son conocidos sin necesidad de recurrir a cálculos algebraicos, esta capacidad se adquiere debido a la resolución continua de problemas y la constante aparición de algunos de ellos, decir sin necesidad de pensar mucho que $\binom{5}{2} = 10$ podría parecer algo sorprendente, seguramente usted tiene en estos momentos la

inquietud de saber si en efecto ese dato es verdadero. El camino de este tipo de conocimientos tiene sin lugar a duda un inicio, y este sin duda comienza por definir algunos números combinatorios que resulta obligado conocer, nos referimos claro a

$$\binom{n}{0} ; \binom{n}{1} ; \binom{n}{n-1} ; \binom{n}{n}$$

Lo invitamos a encontrar los valores para estos números.

Sugerencias para trabajar el problema $\binom{n}{0}$:

Es importante mencionar a los estudiantes que cada número se calculara en tres distintos contextos, y en los tres el resultado debe ser el mismo, pues el valor del número combinatorio no depende del contexto en el que se estudie.

Visión de cadenas binarias

- Discuta con sus estudiantes cuál es el significado en cadenas binarias de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿cuántos símbolos 1 deben aparecer en la cadena? ¿Qué tipo de símbolos deben aparecer entonces? ¿Cuántas cadenas de este tipo podemos construir entonces? ¡¡Escríbalas!! Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio.

Visión de caminos

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en el contexto de caminos de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿Cuántos movimientos hacia la derecha deberíamos realizar en el recorrido? ¿Qué tipo de movimientos debemos de utilizar en el recorrido? Dibuje un mapa reticular que modela esta situación ¿Cuántos caminos podemos seguir? Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio.

Visión de conjuntos

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en el contexto de conjuntos de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿cuántos elementos debe contener el subconjunto? ¿Puede listarlos? ¿Cuántos son? Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio.

Es importante verificar que en efecto en los tres casos $\binom{n}{0} = 1$, no importa quién sea n .

Sugerencias para trabajar el problema $\binom{n}{n}$:

- Repita la discusión realizada en $\binom{n}{n}$, el análisis para los dos casos es análogo.

- Verifique que en efecto en los tres casos $\binom{n}{n} = 1$, no importa quien sea n .

Sugerencias para trabajar el problema $\binom{n}{1}$:

Visión de cadenas binarias

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en cadenas binarias de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿cuántos símbolos 1 deben aparecer en la cadena? Encuentre una forma ordenada de listar las cadenas. ¿Cuántas cadenas de este tipo aparecerían en la lista completa? Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio.

Visión de caminos

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en el contexto de caminos de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿cuántos movimientos hacia la derecha deberíamos realizar en el recorrido?, ¿cuántos movimientos hacia arriba deberíamos realizar en el recorrido?

Dibuje un mapa reticular que modela esta situación ¿cuántos caminos podemos seguir? Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio. Recuerde que puede utilizar un llenado numérico del mapa para calcular el número de caminos en cada punto.

Visión de conjuntos

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en el contexto de conjuntos de este número combinatorio. Las preguntas por discutir serían ¿cuántos elementos debe contener el subconjunto? ¿Puede listarlos? ¿Cuántos son? Esta última pregunta nos da el valor del número combinatorio.

Es importante verificar que en efecto en los tres casos $\binom{n}{1} = n$, no importa quién sea n .

Sugerencias para trabajar el problema $\binom{n}{n-1}$:

- Repita la discusión realizada en $\binom{n}{1}$, el análisis para los dos casos es análogo.
- Para la visión conjuntista note lo siguiente, por cada sub conjunto unitario, el resto de los elementos forman un subconjunto de $n - 1$ elementos.
- Verifique que en efecto en los tres casos $\binom{n}{n-1} = n$, no importa quién sea n .

Despejando una duda: Hemos calculado ya los números combinatorios más básicos, pero esto aun no nos quita la inquietud si en efecto $\binom{5}{2} = 10$. Vamos entonces a superar esa inquietud. Tenemos entonces la intención clara de calcular el valor de $\binom{n}{2}$.

Sugerencias para trabajar el problema:

Visión de cadenas binarias

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en cadenas binarias de este número combinatorio. La primera pregunta por discutir sería: ¿Cuántos símbolos 1 deben aparecer en la cadena?
- Podrá discutir con el estudiantado el hecho que la aparición de dos símbolos 1 vuelve un poco más complicado el conteo. La misión entonces es encontrar una forma ordenada de listar las cadenas, pues esto nos ayudará a hacer el conteo. Pida al grupo estudiantil sugerencias para hacer el conteo y discuta los pros y los contras de estos.
- Recuerde que es posible que algún estudiante determine directamente que se encuentra con un caso de permutación con repetición y sugiera la utilización directa de la fórmula para hacer el cálculo. Si bien

esto es correcto y muy satisfactorio, trate de impulsar al estudiante al análisis del caso, pues en muchos problemas esto es muy importante.

- La sugerencia final para terminar el cálculo es justamente el análisis de casos. Fijemos el primero de los 1 ¿cuántas posiciones distintas puede tener? Para cada posición del primer 1 ¿cuántas opciones tenemos para poner el segundo 1? ¿Nota algún patrón? En efecto son números que decrecen desde $n - 1$ hasta 1. Aplique el principio de la suma y determine la solución.

Visión de caminos

- Discuta con sus estudiantes cuál es el significado en el contexto de caminos de este número combinatorio. La pregunta sería ¿cuántos movimientos hacia la derecha deberíamos realizar en el recorrido?
- Dibuje un mapa reticular que modele esta situación.
- ¿Cuántos caminos podemos seguir? Esta última pregunta nos dará el valor del número combinatorio; pero ¿cómo calcularlo?
- Utilice un llenado numérico del mapa para calcular el número de caminos en cada punto. Apóyese en el mapa utilizado en el cálculo de $\binom{n}{1}$ y trate de completar, se vuelve complicado. Existen dos sugerencias a continuación para terminar el cálculo.
- Primera sugerencia: Note que al punto inferior derecho solo se puede llegar de una forma, calcule las formas de llegar a los puntos superiores a este, pero no exprese esto como un número sino como la suma de los número utilizados. ¿Nota un patrón? En efecto las expresiones obtenidas para los puntos de la última columna son la suma de

los números naturales desde 1 hasta el nivel en el que se encuentra el punto, dado que $\binom{n}{2}$ está en el nivel $n - 1$ ¿la expresión que obtendríamos en ese nivel sería?

- Segunda sugerencia: Note que al punto final, definido con $\binom{n}{2}$, solo se puede llegar desde dos puntos anteriores, el marcado con $n - 1$ a su izquierda y el inmediato inferior. Realice el mismo análisis para el punto inferior y repita hasta llegar a la base, verá cómo se genera la misma sumatoria.

Visión de conjuntos

- Discuta con los estudiantes cuál es el significado en el contexto de conjuntos de este número combinatorio. La pregunta principal es ¿cuántos elementos debe contener el subconjunto?
- Buscaremos en este caso una forma alternativa de contarlos, observe que el conjunto debe contener en efecto dos

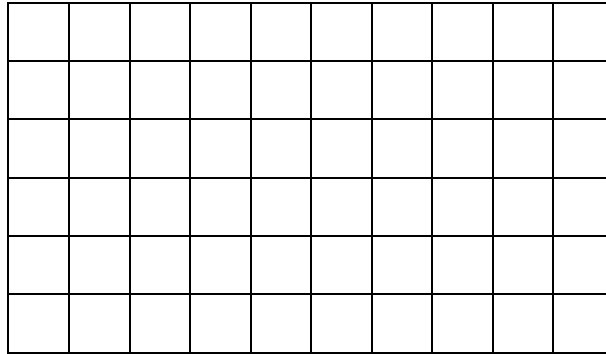
elementos, esto se puede traducir a tener dos posiciones.

- Aplique para estas posiciones el principio de la multiplicación. ¿Cuántas opciones tiene para la primera posición? ¿Cuántas para la segunda?
- Aún no hemos terminado, no hay que descuidar el hecho que estamos tratando con conjuntos y en estos el orden no cuenta ¿cuántas veces está contado cada conjunto? Dividimos por este número para corregir las cuentas.
- Es importante verificar que en efecto en los tres casos obtuvimos la misma respuesta, en los primeros dos de forma expandida, en el tercer caso de forma compacta.
- $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$
- Podría proporcionar un argumento, por alguna de las tres visiones, de por qué la siguiente igualdad es cierta.
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$

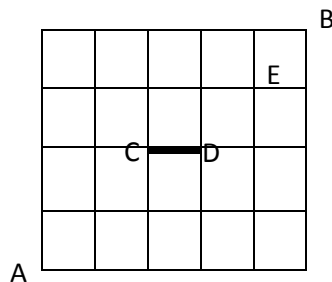
GUÍA DE PROBLEMAS

1. ¿De cuántas maneras puede formarse un comité si se necesitan para él 6 personas, y para ello se cuenta con 10 estudiantes y 4 docentes, en cada uno de los siguientes casos
 - No hay restricción en la selección?
 - El comité debe tener exactamente dos estudiantes?
 - El comité debe tener exactamente tres estudiantes?
 - Un profesor en particular y un estudiante en particular ¿no pueden estar en el comité al mismo tiempo?
2. Muestre que para todo conjunto no vacío, la cantidad de subconjuntos que contienen al elemento mayor es igual a la cantidad de subconjuntos que no lo contienen.

3. En la siguiente figura determine la cantidad de rectángulos que se pueden construir.



4. Encuentre la cantidad de cadenas binarias de longitud 15 que se pueden construir con diez símbolos 1 y cinco símbolos 0. Determine cuántas de estas no tienen dos símbolos 0 consecutivos.
5. Determine la cantidad de caminos para ir de A hacia B en cada uno de los siguientes casos:
- Sin restricciones.
 - Pasando por C.
 - Pasando por el segmento CD.
 - Pasando por D pero no por E.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Chuan-Chong Chen y Khee-Meng Koh, (1992), *Principles And Techniques In Combinatorics*, Word Scientific Publishing, Singapur.
2. Combinatoria (2010), *Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
3. Ivan Niven, (1995), *Matemática de las Opciones*, Red Olimpica, Argentina.
4. N Vilenkin, (1972), *¿De cuántas formas?*, Editorial Mir, Moscú.

Desarrollo binomial y Multinomial

Introducción del tema

El teorema del binomio, descubierto hacia 1664-1665, fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677), secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época.

En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema.

Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas.

El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban. Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su Álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

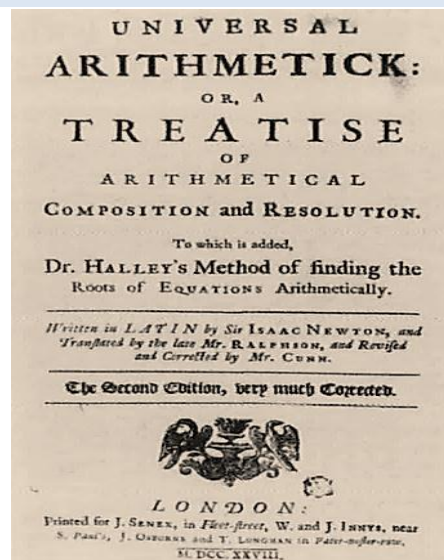


Figura1. Aritmética Universal. Ed. 1707. Escrita entre 1673-1683, contiene el desarrollo binomial.

Competencias por lograr

- Reflexionar y construir un plan de abordaje de problemas, bajo distintas visiones.
- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Objetivos

- Introducir una visión algebraica sobre el número combinatorio.
- Desarrollar la habilidad de manipulación algebraica que involucran combinaciones.

Presaberes

- Permutaciones.
- Número combinatorio.

DESARROLLO BINOMIAL

Cualquier suma de dos términos distintos es conocida como un binomio, algunos ejemplos de estos son

$$x + y ; x + x^2 ; 1 + x$$

Llamaremos desarrollo binomial a la expansión de las potencias de un binomio. Algunos de estos ejemplos los podemos encontrar fácilmente, listemos las primeras potencias para un binomio en particular

$$\begin{aligned}(x + y)^1 &= x + y \\(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + x^2 \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + x^3\end{aligned}$$

Estos resultados son conocidos, y fácilmente calculables al realizar los productos indicados por el exponente correspondiente a cada binomio. Pero este resulta un proceso muy engorroso para exponentes mayores, por ejemplo, resultaría demasiado largo y tedioso realizar el desarrollo binomial de $(x + y)^{10}$ pues tendríamos que realizar una multiplicación tras otra, hasta obtener todos los términos y realizar las simplificaciones necesarias.

De esto resulta razonable preguntarse si existe alguna forma más fácil de conocer el resultado de una de estas expansiones. La respuesta para esta inquietud es afirmativa, existe un método más sencillo de encontrar cada uno de los términos de esta expansión. Veamos entonces de dónde surge este método y cuál es.

Tomemos como ejemplo el cálculo de la expansión de $(x + y)^4$. Vemos la siguiente igualdad:

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$$

Para el desarrollo de dicho binomio debemos de tomar de cada término una x o una y , para luego efectuar el producto y obtener cada uno de los términos, generaríamos en total, por el principio de la multiplicación, $2^4 = 16$ términos, claro está, luego tendríamos que operar términos semejantes.

La escritura de estos términos se realizaría de la siguiente forma, si se selecciona una x del primer factor, otra x del segundo factor, una y del tercer factor y otra y del cuarto factor generaríamos el término $xxyy = x^2y^2$. Veamos entonces cuáles son estos 16 resultados:

$xxxx = x^4$	$xyxx = x^3y$	$yxxx = x^3y$	$yyxx = x^2y^2$
$xxxy = x^3y$	$xyxy = x^2y^2$	$yxyx = x^2y^2$	$yyxy = xy^3$
$xyyx = x^3y$	$xyyx = x^2y^2$	$yxyx = x^2y^2$	$yyyx = xy^3$
$xyyy = x^2y^2$	$xyyy = xy^3$	$yxyy = xy^3$	$yyyy = y^4$

Observamos de este conjunto de términos que existen cinco clases distintas que son x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4 . El coeficiente que acompaña a cada término estará dado por la cantidad de veces que aparece en el listado, por ejemplo el coeficiente de x^3y es 4, mientras que el coeficiente de x^2y^2 es 6. Veamos dos formas de analizar el porqué de esos coeficientes:

Primera forma: Note que para el caso del término x^3y sus cuatro formas están dados por las expresiones $xxxy$, $xyxx$, $xyxx$, $yxxx$ que son justamente las 4 permutaciones que resultan al permutar 3 símbolos x , con un símbolo y . El total de estas permutaciones está dado por

$$\frac{4!}{3! 1!} = \binom{4}{3}$$

en el caso del término x^2y^2 es fácil verificar que en efecto todas las expresiones son las resultantes al permutar 2 símbolos x acompañados de 2 símbolos y . El total de estas permutaciones está dado por

$$\frac{4!}{2! 2!} = \binom{4}{2}$$

podemos verificar entonces que la expansión estaría dada por

$$(x + y)^4 = \binom{4}{4} x^4 + \binom{4}{3} x^3y + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{1} xy^3 + \binom{4}{0} y^4$$

Resulta ahora fácil generalizar este resultado, para la expansión de $(x + y)^n$ tendríamos la siguiente igualdad

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ factores}}$$

En cada uno de estos n factores se tomará ya sea una x o una y , así cada uno de los términos que aparecerán en el desarrollo binomial tendrá la forma $x^k y^{n-k}$ es decir estará compuesta por k símbolos x , además de $n - k$ símbolos y . El total de permutaciones de dichos símbolos está dado por

$$\frac{n!}{k! (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

donde k toma los valores $0, 1, 2, \dots, n$.

Segunda forma: Note que cada uno de los términos está definido cuando se seleccionan cuáles de los factores aportarán al producto un símbolo x pues en ese momento los restantes están obligados a aportar al producto un símbolo y . Por ejemplo el término $xyxx$ viene de haber decidido que el primero, el tercero y el cuarto factor serán los que aporten el símbolo x , para formar x^3y .

Entonces es suficiente saber de cuántas maneras se puede realizar esta selección, sabemos que la forma de seleccionar tres elementos de entre un total de cuatro está dado por $\binom{4}{3}$. De forma análoga podemos concluir para los demás términos y ver que

$$(x + y)^4 = \binom{4}{4}x^4 + \binom{4}{3}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{1}xy^3 + \binom{4}{0}y^4$$

Resulta ahora fácil generalizar este resultado, para la expansión de $(x + y)^n$ tendríamos la siguiente igualdad

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ factores}}$$

Basta para cada término seleccionar los factores que aportarán los k símbolos x , pues los $n - k$ factores restantes aportarán el símbolo y para la construcción del término $x^k y^{n-k}$. La selección de esos k factores se puede realizar de

$$\binom{n}{k}$$

maneras, donde k toma los valores $0, 1, 2, \dots, n$.

Podemos ahora pasar a enunciar el teorema correspondiente al Desarrollo Binomial.

Teorema: Para $n \in \mathbb{N}$

$$(x + y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{0}y^n$$

La mayoría de textos hacen referencia al nombre de Binomio de Newton para el desarrollo binomial de $(x + y)^n$, este hecho podría generar en el pensamiento del lector adjudicar a Newton esta fórmula para la expansión del binomio, lo cual sería un error.

Históricamente este desarrollo ya era conocido por matemáticos en Europa Occidental y Asia Central, entre los que se encuentran Blas Pascal, Omar Hayyam (*Matemático persa Ghiyath al-Din Abu l-Fath Omar ibn Ibrahim Al-Nishaburi al-Jayyam 18 de mayo de 1048-4 de diciembre de 1131, quien fue el primero que describió el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente natural*) y otros más.

Sin embargo, se popularizó como Binomio de Newton debido al gran trabajo que Newton realizó al lograr generalizar la fórmula para el caso de exponentes no enteros. Este desarrollo se puede ver en el libro de Octavo grado para el cálculo de raíces cuadradas en la lección de números irracionales.

COEFICIENTE MULTINOMIAL

Iniciemos calculando la expansión del polinomio $(x + y + z)^2$ esta es fácil de encontrar multiplicando $(x + y + z)(x + y + z)$, tendríamos entonces:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Pero cómo calculamos estos coeficientes de manera más ágil, para exponentes mayores o para un mayor número de términos.

Hasta este momento tenemos que para cualesquiera dos variables x, y la expansión binomial se escribe de la siguiente manera

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Resulta natural preguntarse qué ocurre cuando la expansión se hace, no sobre un binomio, sino sobre polinomio, con más de dos términos, dicho de otra manera, qué sucede cuando expandimos:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

donde $n, k \in \mathbb{N}$ y $k > 2$.

Para respondernos esta pregunta, recordemos lo que sucede en la expansión de un binomio. Si el binomio es $(x_1 + x_2)^n$ para cada uno de los términos que se encuentran en la expansión tomamos r_1 factores para tomar de ahí el término x_1 , y tomamos los $r_2 = n - r_1$ factores restantes para tomar de ellos el término x_2 .

La primera de las selecciones se puede hacer de $\binom{n}{r_1}$ formas, mientras que para la segunda selección se puede hacer de $\binom{n-r_1}{r_2} = \binom{n-r_1}{n-r_1} = 1$ forma. Además cada término en la expansión es de la forma $x_1^{r_1} x_2^{r_2}$.

Ahora veamos la extensión de este resultado, si ahora la expansión se realiza sobre $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ tendríamos que los términos serían de la forma:

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

donde los $r_i \geq 0$ y además $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

El coeficiente que acompañara a dicho término se construye haciendo una extensión al proceso en el binomio de la siguiente forma:

$\binom{n}{r_1}$ formas de seleccionar r_1 factores para tomar de ahí el término x_1 .

$\binom{n-r_1}{r_2}$ formas de seleccionar r_2 factores para tomar de ahí el término x_2 .

$\binom{n-(r_1+r_2)}{r_3}$ formas de seleccionar r_3 factores para tomar de ahí el término x_3 .

Así sucesivamente hasta tener

$\binom{n-(r_1+r_2+\dots+r_{k-1})}{r_k} = 1$ formas de seleccionar r_k factores para tomar de ahí el término x_k , esto último debido a que el último término toma todos los factores que no han sido seleccionados hasta este punto.

Tenemos entonces que el coeficiente en esta expansión está dado por el siguiente producto de coeficientes binomiales

$$\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \binom{n-(r_1+r_2)}{r_3} \dots \binom{n-(r_1+r_2+\dots+r_{k-1})}{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!}$$

Esta última igualdad es conocida por los resultados vistos en la lección de Permutaciones.

Introduciremos acá un nuevo símbolo para denotar este resultado. Diremos que

$$\binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!}$$

Los números representados en la forma del lado izquierdo de la igualdad son llamados generalmente Coeficientes Multinomiales.

Podemos ahora plantear el Teorema Multinomial.

Teorema: Para $n, k \in \mathbb{N}$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$$

donde la suma es tomada sobre todas las secuencias de k términos $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_k)$ de enteros no negativos con $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Revisemos ahora la expansión del ejemplo inicial

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= \binom{2}{2,0,0} x^2 + \binom{2}{0,2,0} y^2 + \binom{2}{0,0,2} z^2 + \binom{2}{1,1,0} xy + \binom{2}{1,0,1} xz + \binom{2}{0,1,1} yz \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

tal como teníamos en un inicio.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE ESTOS COEFICIENTES

En la lección anterior hemos trabajado y demostrado a través de argumentos combinatorios la siguiente identidad

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

pero este es un resultado mucho más fácil de probar al aplicar el desarrollo binomial, veamos cómo.

Tenemos por el teorema del desarrollo binomial que

$$(x + y)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{0} y^n$$

lo cual se cumple para cualesquiera par de valores de x, y . Podemos observar que los coeficientes de cada término en el lado derecho de la igualdad son justamente los elementos de la suma que estamos buscando, ahora bien, nosotros necesitamos la suma únicamente de estos elementos y necesitamos de alguna forma desaparecer las variables que las acompañan, para esto vemos que si hacemos la sustitución $y = 1$ obtenemos

$$(x + 1)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n-2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{0}$$

de donde hemos logrado desaparecer todos los símbolos y . Ahora resulta natural hacer la sustitución $x = 1$, obteniendo

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{0}$$

tal como queríamos mostrar.

El hecho de esta demostración, nos hace preguntarnos si existe alguna identidad para

$$\sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k}$$

donde la suma es tomada sobre todas las secuencias de k términos $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_k)$ de enteros no negativos con $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. En efecto la respuesta a esta pregunta es afirmativa, es suficiente recordar que por el teorema multinomial tenemos que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

siguiendo el análisis realizado para el desarrollo binomial debemos hacer la sustitución $x_i = 1$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Tendríamos entonces

$$k^n = (1 + 1 + \cdots + 1)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k}$$

Estos dos resultados dan lugar a obtener una gran cantidad de resultados, al establecer valores para específicos para el exponente n , y sustituciones específicas para los términos dentro del binomio o el multinomio correspondiente, veamos algunas formas de escribir 4^3

$$4^3 = (1 + 3)^3 = (2 + 2)^3 = (1 + 1 + 2)^3 = (1 + 1 + 1 + 1)^3$$

desarrollaremos acá las expresiones para los primeros dos binomios y el primer multinomio, tendríamos

$$(x + y)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{0} y^n$$

si $x = 1, y = 3, n = 3$ obtenemos

$$4^3 = (1 + 3)^3 = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} 3 + \binom{3}{1} 3^2 + \binom{3}{0} 3^3$$

si $x = 2, y = 2, n = 3$ obtenemos

$$4^3 = (2 + 2)^3 = \binom{3}{3} 2^3 + \binom{3}{2} 2^2 \cdot 2 + \binom{3}{1} 2 \cdot 2^2 + \binom{3}{0} 2^3$$

Por el teorema multinomial tenemos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

si $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, n = 3$ obtenemos

$$\begin{aligned} 4^3 &= (1 + 1 + 2)^3 \\ &= \binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{0,3,0} + \binom{3}{0,0,3} 2^3 + \binom{3}{2,1,0} + \binom{3}{2,0,1} 2 + \binom{3}{0,2,1} 2 + \binom{3}{1,2,0} \\ &\quad + \binom{3}{1,0,2} 2^2 + \binom{3}{0,1,2} 2^2 + \binom{3}{1,1,1} \end{aligned}$$

Se puede observar que el número de términos acá es mayor que en el desarrollo binomial, todas estas expresiones se pueden generalizar para el exponente n , y cualquier combinación de términos. Dejamos al lector encontrar el desarrollo multinomial de $(1 + 1 + 1 + 1)^3$ ¿cuántos términos cree que se generarán? Esta pregunta nos da para la siguiente característica por estudiar, el número de términos en una expansión.

Esta característica es un poco más simple de revisar. Realicemos un análisis de ambas situaciones:

Para el caso del desarrollo binomial tendríamos

$$(x + y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{0}y^n$$

Dado que este resultado es válido para cualquier binomio y para cualquier exponente entero, podemos observar que el total de términos está dado por el total de coeficientes distintos, en este caso podemos ver que los coeficientes son en total $n + 1$ y por lo tanto ese será justamente el número de términos en la expansión.

Para el caso del desarrollo multinomial tendríamos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

Aquí al igual que en el caso anterior, contar el número de términos es equivalente a contar la cantidad de coeficientes distintos que se pueden formar, la condición para formar un coeficiente es $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$, con $r_i \geq 0$, resulta entonces que contar el número de coeficientes es equivalente a encontrar la cantidad de soluciones de esta ecuación, este es un problema resuelto en la lección 7 y sabemos que la cantidad de soluciones y por tanto la cantidad de términos en la expansión es

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. El Desarrollo del binomio $(x + y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{0}y^n$

Puede ser utilizado para escribir fórmulas importantes de la combinatoria, demuestre que para distintos valores de x, y se tiene

- a. $\binom{n}{n} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} - \cdots = 0$
- b. $(3)^n = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}2^{n-1}y + \binom{n}{n-2}2^{n-2} + \cdots + \binom{n}{0}$
- c. $(2)^{2n} = \binom{n}{n}2^n + \binom{n}{n-1}2^n + \binom{n}{n-2}2^n + \cdots + \binom{n}{0}2^n$

2. Calcule $(2 + y)^5; (3 - x)^4; \left(x + \frac{1}{x}\right)^2; (6 + x)^5$
3. Calcule $(x + y + z + w)^3$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Chuan-Chong Chen y Khee-Meng Koh, (1992), *Principles And Techniques In Combinatorics*, Word Scientific Publishing, Singapur.
2. Combinatoria (2010), *Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
3. Ivan Niven, (1995), *Matemática De Las Opciones*, Red Olimpica, Argentina.
4. N Vilenkin, (1972), *¿De cuántas formas?*, Editorial Mir, Moscú.

Triángulo de Pascal

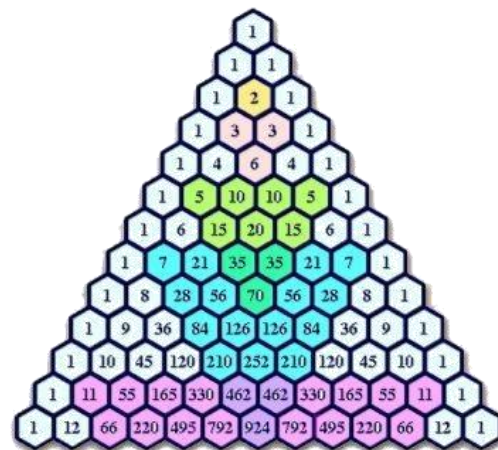


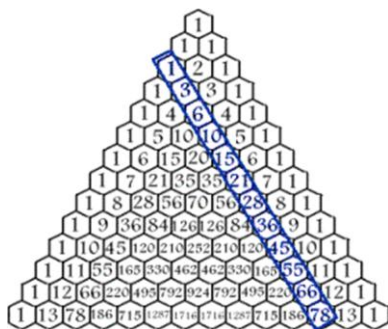
Figura 1. Triángulo de Pascal.

Introducción del tema

El Triángulo de Pascal debe su nombre al filósofo y matemático Blaise Pascal (1623-1662). Sin embargo, como en muchos casos matemáticos, su origen es muy anterior. Se tienen referencias que datan del siglo XII en China. De hecho, algunas de sus propiedades ya fueron estudiadas por el matemático chino Yang Hui (siglo XIII), así como el persa Omar Khayyam (siglo XII).

Recordemos brevemente su construcción. El triángulo se construye desde la cúspide hacia abajo. El primer elemento es el número 1, formando la fila 0. La fila 1 está formada por dos elementos, ambos también el número 1.

A partir de aquí, la construcción es como sigue: cada fila está formada por un elemento más que la anterior. El elemento primero y último de cada una siempre será el número 1, y cada elemento interior será el número resultado de sumar los dos elementos que se sitúan encima de él y adyacentes en la fila superior.



El Cuadrado Aritmético

Tomemos un tablero infinito de ajedrez limitado únicamente por dos de sus lados, el lado superior y el lado izquierdo, en la casilla superior izquierda, que llamaremos casilla origen, podemos colocar una torre, recuerde que las torres únicamente se mueven en forma vertical y en forma horizontal.

El problema que nos interesa en este caso es encontrar la cantidad de maneras en que esta torre puede llegar a cada una de las casillas del tablero, utilizando la menor cantidad de movimientos.

Necesitamos entonces establecer un sistema de coordenadas para numerar cada una de las casillas, tomemos para la casilla origen la coordenada (0,0) es decir estará en la columna 0, fila 0.

De este modo podemos numerar cada columna a la derecha de esta, aumentando, en una unidad la numeración es decir quedarían numeradas como columna 0, columna 1, columna 2, columna 3, y así sucesivamente aumentando de izquierda a derecha.

Para las filas establecemos una numeración análoga aumentando de arriba hacia abajo, tal como lo muestra el dibujo.


	0	1	2	3	4	...
0						...
1						...
2						...
3						...
:	:	:	:	:	:	

Figura3. Movimientos en filas y columnas.

Dada la necesidad de que la cantidad de movimientos sea mínima, es necesario que no existan movimientos de retroceso, esto obliga a que los únicos movimientos permitidos sean hacia la derecha y hacia abajo, esto nos recuerda los movimientos permitidos en el clásico problema de caminos, notamos que justamente nos encontramos con una variante de este problema de conteo, en donde la diferencia radica en que en el problema clásico de caminos nos trasladábamos de vértice a vértice, mientras que acá lo hacemos de cuadrado a cuadrado; sin embargo, las soluciones serán las mismas.

Y están dados por el número combinatorio

$$\binom{k}{n}$$

donde n , representaba la cantidad de movimientos y k la cantidad de estos que son hacia la derecha. En el caso del tablero n representar la distancia desde la casilla origen a la distancia a la que nos dirigimos y k representa el número de la columna en la cual se encuentra la casilla a la que nos dirigimos.

Escribiendo para cada una de las casillas el número de formas en que la torre puede llegar hasta ella, nos quedaría:

Actividad inicial 1. Determine los números combinatorios que representan la cantidad de formas en que la torre puede llegar a cada una de las casillas.

Objetivo: Recordar la visión de caminos y su significado.

Metodología: Discuta con el grupo la visión de caminos tome casos particulares para el tablero, obtendrá un tablero como el siguiente:

	0	1	2	3	4	...
0	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{4}$...
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{4}$...
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{4}$...
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{4}$...
:	:	:	:	:	:	

Figura 4. Tablero para visualizar posibles caminos.

Todo eso debido a la relación existente con el problema de caminos, sin embargo nos interesa ver algunas de las propiedades numéricas de este cuadrado, por lo cual nos interesa observar el comportamiento de los valores numéricos que equivalen a este número combinatorio, quedando el cuadrado de esta forma:

Actividad inicial 2. Determine los valores numéricos de los números combinatorios que representan la cantidad de formas en que la torre puede llegar a cada una de las casillas.

Objetivo: perfeccionar el cálculo de los valores numéricos del número combinatorio.

Metodología: Pida al estudiantado que calcule cada uno de los valores buscados, obtendrá un tablero como el siguiente:

	0	1	2	3	4	...
0	1	1	1	1	1	...
1	1	2	3	4	5	...
2	1	3	6	10	15	...
3	1	4	10	20	35	...
:	:	:	:	:	:	

Figura 5. Cuadro aritmético

Esta última tabla de números es la que conocemos con el nombre de cuadrado aritmético, un análisis acerca de los números que lo conforman nos permitirá establecer algunas identidades combinatorias, para ello haremos uso de las dos tablas obtenidas hasta este momento, la segunda para identificar algunos comportamientos específicos de los números en las casillas y la primera para establecer identidades combinatorias útiles.

Actividad inicial 3: Identificación de identidades.

Objetivo: Desarrollar el planteamiento de conjeturas e inducir pequeñas demostraciones.

Metodología: Oriente al grupo estudiantil al estudio de las características de determinadas casillas, cómo el valor en una puede ser obtenida como suma de otros valores en otras casillas:

Observe la siguiente tabla

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	1	1	1	1	1	...
1	1	2	3	4	5	6	...
2	1	3	6	10	15	21	...
3	1	4	10	20	35	56	...
4	1	5	15	35	70	126	
:	:	:	:	:	:	:	

Figura 6. Cuadro aritmético de valores.

Vea que el valor de cada casilla verde es exactamente lo mismo que suman las casillas grises que están conectadas con ellas, se tiene

- $3=2+1$
- $15=1+4+10$
- $126=1+5+15+35+70$

Cada una de estas configuraciones es un caso particular de identidades específicas del número combinatorio y por lo tanto deben de ser tratadas dentro de la actividad de formas independientes.

En el primer caso tenemos que la casilla que contiene el número 3 es igual a la suma de los valores en la casilla a su izquierda y de la casilla arriba de ella. Verifique si esta igualdad se cumple para otras casillas de nuestro cuadrado aritmético.

En efecto se dará usted cuenta que la relación se mantiene no importando la casilla que se seleccione. Tomemos ahora el cuadrado con los números combinatorios y tomemos en lugar de los valores numéricos los respectivos valores combinatorios para plantear las igualdades obtenidas. Tendremos expresiones como por ejemplo:

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

Después de listar algunas de estas, nuestro objetivo es establecer un resultado general.

Tendríamos entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

la conocida identidad de Pascal.

Las otras dos igualdades deben ser trabajadas de forma análoga a esta, cada una en un tablero distinto. Obtendríamos las siguientes reglas:

- Cada número en el cuadrado aritmético es igual a la suma del número de la casilla que está sobre él, sumado con todos los números a la izquierda de este.
- Cada número en el cuadrado aritmético es igual a la suma del número de la casilla que está a la izquierda de él, sumado con todos los números sobre él.

Las identidades obtenidas serían, respectivamente

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

De igual manera podemos trabajar casillas de igual valor para obtener la igualdad

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

EL TRIÁNGULO ARITMÉTICO

Tomemos ahora un tablero delimitado solamente por el lado superior y coloquemos en una casilla de fila cero una ficha del juego de damas, de la siguiente forma


0	...						...
1
2
:		:	:	:	:	:	

Figura 7. Casillas para designar el triángulo aritmético.

Recuerde que esta ficha únicamente puede moverse en diagonal hacia abajo, tanto en la dirección de la izquierda como la de la derecha, esta ficha puede llegar a cualquier fila, sin embargo, solo puede llegar a un número limitado de casillas por fila.

Como en el apartado anterior, realicemos las dos actividades iniciales, previamente desarrollemos la actividad de marcar todas las casillas a las que la ficha puede llegar.

Recordemos que en la Actividad 1 corresponde escribir en nuestro tablero en las casillas a las cuales se puede llegar, la cantidad de formas en que se puede llegar en forma de número combinatorio, recuerde que en este caso siempre se puede hablar de número de pasos; dicho de otra modo, cuántas filas baja y de esos cuántos son movimientos a la derecha.

Mientras que la actividad 2 corresponde al cálculo de estos combinatorios.

Obtendríamos los siguientes tableros:

0	...				$\binom{0}{0}$...
1	...			$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$...
2	...		$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$...
3	...	$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$...
:		:	:	:	:	:	:	:	

y

0	...				1				...
1	...			1		1			...
2	...		1		2		1		...
3	...	1		3		3		1	...
:		:	:	:	:	:	:	:	

Figura 8. Tablas obtenidas para del cuadro aritmético para encontrar el Triángulo aritmético.

Entre más grande sea nuestro tablero podremos notar que los números escritos coinciden, en esencia, con los del cuadrado aritmético, estando solo distribuidos de otra forma. Esto no debe extrañarnos: si se gira el tablero en 45° , la ficha se moverá según las líneas horizontales y verticales, y el problema se transforma en el de los movimientos de una torre.

Los números del tablero se representan comúnmente en forma de triángulo. Aquí cada número es igual a la suma de los dos números de la fila anterior, entre los cuales este se encuentra.

Este triángulo es llamado con frecuencia triángulo de Pascal, sin embargo, lo conocía y había trabajado el matemático italiano Tartaglia. Incluso muchos años antes que Tartaglia, este triángulo se podía ver en los trabajos de otros matemáticos como el árabe Omar Hayyam o el chino Jia Xian. Es por esta razón por la que acá se ha titulado como triángulo aritmético.

Aunque Pascal no fue el primero en estudiar el triángulo de Pascal, su trabajo sobre el tema en el Tratado del Triángulo Aritmético fue el más importante sobre este tema y, a través de la obra de Wallis, el trabajo de Pascal sobre los coeficientes binomiales llevó a Newton a su descubrimiento del teorema general del binomio para potencias fraccionarias y negativas

Destaquemos, además, las siguientes particularidades del triángulo aritmético: los números que se encuentran en la n -ésima fila del triángulo aritmético; expresado de otra forma, los números $\binom{n}{k}$ para un n fijo, son justamente los coeficientes del desarrollo binomial de $(x + y)^n$.

Resulta fácil argumentar porque los términos de la fila n del triángulo suman 2^n , que es otra de las propiedades importantes de nuestro triángulo.

Este hecho se debe a que en cada cambio de fila la ficha tiene dos posibilidades: bajar hacia la derecha o bajar hacia la izquierda, por lo tanto el número de posibilidades de una fila a otra se duplica, si en las dos filas iniciales la suma de los términos son 1 y 2 respectivamente, al duplicarse a partir de 2 genera todas las potencias de 2.

Actividad: Identificación de identidades en el triángulo aritmético.

Metodología: Oriente a los estudiantes al estudio de características de determinadas casillas, como el valor en una puede ser obtenida como suma de otros valores en otras casillas. Realizando una actividad análoga a la realizada con el cuadrado aritmético.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Chuan-Chong Chen y Khee-Meng Koh, (1992), *Principles And Techniques In Combinatorics*, Word Scientific Publishing, Singapur.
2. Combinatoria (2010), *Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
3. Ivan Niven, (1995), *Matemática de las Opciones*, Red Olimpica, Argentina.
4. N Vilenkin, (1972), *¿De cuántas formas?*, Editorial Mir, Moscú.

Sistemas no lineales de ecuaciones

Introducción del tema

Los sistemas no lineales de ecuaciones son parte importante de las ciencias aplicadas. A menudo se encuentran en física, problemas que exigen aproximar los posibles valores de variables. Esto es debido a que los sistemas implicados no son lineales y por tanto no son fáciles de resolver, ni existe un método general que lleve a la solución.

En esta lección se hace un análisis de sistemas de ecuaciones no lineales que permitirá adoptar algunos métodos para su resolución. En muchas ocasiones será necesario el uso eficiente del álgebra de la factorización de expresiones, y la mayoría de veces estrategias innovadoras que permitirán alcanzar cuotas de razonamiento matemático complejo pero eficaz.

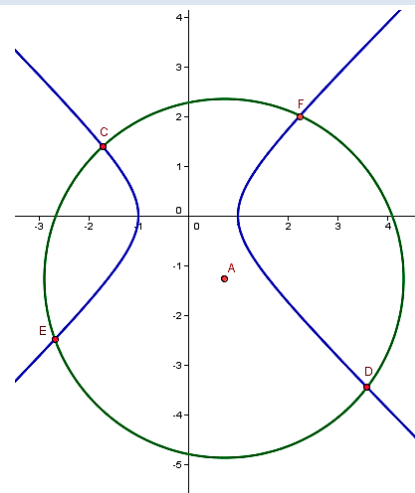


Figura 1. Para conocer los valores de los puntos comunes entre la circunferencia y la hipérbola, será necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales.

Competencias por lograr

- Construye e interpreta modelos de desigualdades no lineales.
- Resuelve y analiza problemas de ecuaciones no lineales.

Objetivos

- Diferenciar igualdades simétricas de las asimétricas.
- Expresar polinomios simétricos en función de los polinomios simétricos elementales.
- Resolver problemas algebraicos utilizando la simetría de las expresiones.

Presaberes

- Operaciones con polinomios elementales: suma, resta y multiplicación.
- Raíces de una ecuación cuadrática.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones pueden clasificarse en dos tipos: Lineales y no Lineales.

Un sistema de ecuaciones es llamado lineal si todas las variables involucradas aparecen con exponente 1 en cada una de las ecuaciones del sistema.

En este texto estudiaremos las propiedades elementales de los sistemas de ecuaciones no lineales. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el siguiente:

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$|x + y| = 2$$

En general, un sistema de ecuaciones no lineales puede no poseer una única solución. En el ejemplo precedente (1,1) y (-1,-1) son ambas soluciones al sistema.

Nos encargaremos de resolver sistemas no lineales en reales, en otras palabras, nos interesa encontrar todos los valores reales que hacen verdadera determinada igualdad.

Para que un sistema lineal en n variables tenga una única solución es necesario tener al menos n ecuaciones. Esto no es necesariamente cierto para sistemas no lineales. Considere el siguiente sistema en tres variables que posee una única ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Todos los números x^2, y^2, z^2 son positivos o cero. Si al menos uno de ellos es distinto de cero, entonces $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ y se obtiene contradicción. Por tanto, para que la igualdad anterior sea verdadera necesariamente se debe tener $x = y = z = 0$, que es la única solución.

Considerar el siguiente sistema

$$x + y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$xyz = 1$$

Hacer el cambio de variable $x \rightleftharpoons y$, es decir, colocar x en todos los lugares en donde se encuentra la variable y y colocar y en todos los lugares en donde aparezca la variable x . Se obtendrá el siguiente sistema

$$y + x + z = 1$$

$$y^2 + x^2 + z^2 = 2$$

$$yxz = 1$$

Observar que en el nuevo sistema cada una de las ecuaciones es idéntica a la original exceptuando el orden de los términos. Lo mismo ocurre si se aplica cualquiera de los cambios de variables: $y \rightleftharpoons z$, $z \rightleftharpoons x$.

Ecuaciones de este tipo son llamadas ecuaciones simétricas. En general, una ecuación en las variables x_1, x_2, \dots, x_n es llamada simétrica si es invariante bajo los $\frac{n(n-1)}{2}$ cambios de variables siguientes:

$$x_1 \rightleftharpoons x_2, x_1 \rightleftharpoons x_3 \dots x_{n-1} \rightleftharpoons x_n$$

Un sistema de ecuaciones es simétrico si cada una de las ecuaciones que lo conforman es simétrica.

Debe aclararse que hay ecuaciones que aparentan ser simétricas, pero no lo son. Un ejemplo común es la siguiente ecuación:

$$x^2y + y^2z + z^2x = 1$$

Mediante el cambio de variable $x \rightleftharpoons y$ se obtiene

$$y^2x + x^2z + z^2y = 1$$

que es diferente a la original y por tanto no es simétrica. Para concretar, observar que $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$ es una solución de la ecuación original, pero no lo es de la segunda.

1. Sistemas no simétricos de ecuaciones

Para esta clase de sistemas de ecuaciones no existe un método específico. A menudo es necesario trabajar con desigualdades para *acotar* los valores de las variables en un intervalo. Existe una infinidad de problemas de este tipo y se hace imposible dar un método general.

Lo más apropiado es hacer reacomodos algebraicos que simplifiquen las ecuaciones del sistema o que las lleve a una forma conocida y fácil de trabajar. Esta forma conocida puede ser una ecuación cuadrática o cúbica o algún otro tipo de ecuación que se haya resuelto con anterioridad.

2. Sistemas simétricos de ecuaciones

Al inicio de este texto se definió el significado de ecuación simétrica. Nos encargaremos ahora del estudio de tales ecuaciones.

Dentro de los sistemas de ecuaciones simétricas existen aquellos en los cuales todas sus ecuaciones son polinomiales. Una ecuación polinomial se define como cualquier expresión en la cual todas las variables aparecen elevadas a un número entero positivo. Por ejemplo,

$$x^3 + y^2 = 1$$

es una ecuación polinomial en las variables x, y , mientras que

$$x + \frac{1}{y} = 2$$

no lo es. Suponer que cierto sistema de ecuaciones es simétrico en las variables x, y y está conformado únicamente por ecuaciones polinomiales. Para tal sistema se definen los polinomios simétricos elementales en las variables x, y como sigue:

$$s_1 = x + y$$

$$s_2 = xy$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones inicial y haciendo los cambios de variable apropiados, es posible transformar el sistema inicial en uno nuevo en el cual desaparecen las variables x, y y se introducen en su lugar las nuevas variables s_1, s_2 .

Las propiedades elementales que deben tenerse en cuenta son las siguientes:

- La suma de dos expresiones simétricas sigue siendo simétrica.
- El producto de dos expresiones simétricas sigue siendo simétrico.
- La suma de dos polinomios es un polinomio.
- El producto de dos polinomios es un polinomio.

Estas propiedades, aunque fáciles de demostrar, son muy útiles cuando se trabaja con expresiones simétricas.

Uno de los problemas comunes cuando se trabaja con expresiones simétricas es cómo expresar un polinomio simétrico como sumas y productos de los polinomios simétricos elementales. El siguiente problema es de gran utilidad en una amplia gama de problemas, algunos ajenos al álgebra de números reales:

Ejemplo

Expresar $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ en función de

$$x + y + z$$

$$xy + yz + zx$$

$$xyz$$

Solución

Basta observar que la expresión pedida puede expresarse como

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

A continuación ejemplificaremos con más ejemplos:

Ejemplo de aplicación:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$x^4 + y^4 = 2$$

$$|xy| = 1$$

Solución:

Paso 1: Reescribir cada una de las ecuaciones del sistema en término de $x + y$ y xy . Para ello notar que la segunda ecuación ya está escrita en esta forma. Mediante transformaciones algebraicas elementales es posible llevar la primera ecuación a la forma deseada:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 \\ &= [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2(xy)^2 = 2 \end{aligned}$$

Paso 2: Hacer los cambios de variable

$$x + y \rightarrow s_1 \quad xy \rightarrow s_2$$

y escribir el nuevo sistema:

$$(s_1^2 - 2s_2)^2 - 2s_2^2 = 2$$

$$|s_2| = 1$$

Paso 3: Resolver el sistema anterior. Para ello dividir el problema en casos. Primeramente considerar el caso $s_2 = 1$. Para este caso se tendrá $(s_1^2 - 2)^2 = 4$ de donde $s_1^2 = 0$ ó $s_1^2 = 4$. Se concluye que para este caso existen tres soluciones a s_1 : -2 , 0 y 2 .

Para el caso $s_2 = -1$ se obtiene $(s_1^2 + 2)^2 = 4$ donde $s_1^2 = 0$ ó $s_1^2 = -4$. De estas igualdades se obtiene $s_1 = 0$.

El sistema tendrá las soluciones

$$(s_1, s_2) = (-2, 1)$$

$$(s_1, s_2) = (0, 1)$$

$$(s_1, s_2) = (2, 1)$$

$$(s_1, s_2) = (0, -1)$$

Paso 4: Regresar a las variables originales. En este paso generalmente se tendrá que dividir en subcasos puesto que la ecuación original puede admitir más de una solución.

- Si $s_1 = -2$ y $s_2 = 1$ se tendrá $x + y = -2$ y $xy = 1$ de donde

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

y se obtiene $x = -1$, $y = -1$.

- Si $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$ se tendrá $x + y = 0$ y $xy = 1$ de donde

$$x^2 + 1 = 0$$

que claramente no tiene solución en reales.

- Si $s_1 = 2$ y $s_2 = 1$ se tendrá $x + y = 2$ y $xy = 1$ de donde

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

y se obtiene $x = 1$, $y = 1$.

- Si $s_1 = 0$ y $s_2 = -1$ se tendrá $x + y = 0$ y $xy = -1$ de donde

$$x^2 - 1 = 0$$

y se obtiene $x = 1, y = -1$ ó $x = -1, y = 1$.

Paso 5: Debe darse la respuesta a la pregunta específica que el problema original plantea. En este ejemplo:

Utilizando paso 4 se concluye que las soluciones al sistema original son:

$$(-1, -1), (1, 1), (1, -1) \text{ y } (-1, 1)$$

Nota: Generalmente es necesario verificar que estas soluciones son en efecto soluciones al sistema original. Aquellas que no cumplen las condiciones del sistema original son comúnmente llamadas *soluciones extrañas*.

Los mismos pasos pueden aplicarse para sistemas que contengan más variables si cada

una de las ecuaciones involucradas es simétrica en estas variables.

Para un sistema simétrico de ecuaciones en n variables existirá otro sistema equivalente (no necesariamente simétrico) cuyas variables son los n polinomios simétricos elementales correspondientes.

Un primer ejemplo sencillo es el siguiente:

Ejemplo

Encontrar los valores de x, y, z si se conoce que

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\x^3 + y^3 + z^3 &= 8\end{aligned}$$

Solución:

Los polinomios simétricos elementales en las variables x, y, z son

$$\begin{aligned}s_1 &= x + y + z \\s_2 &= xy + yz + zx \\s_3 &= xyz\end{aligned}$$

Por las condiciones del problema se tendrá $s_1 = 2$. La ecuación puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) &= 6 \\(2)^2 - 2s_2 &= 6 \\s_2 &= -1\end{aligned}$$

La tercera ecuación puede parecer difícil de trabajar si no se conoce el método. La suma de potencias cúbicas $x^3 + y^3 + z^3$ aparece en la expansión de $(x + y + z)^3$. Observar que

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

de donde

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 &= (x + y)^3 + z^3 \\&\quad + 3(x + y)z(x + y + z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x \\&\quad + z^2x + z^2y) + 6xyz\end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y) &= \\(xy + yz + zx)(x + y + z) - 3xyz &= \\= s_1s_2 - 3s_3\end{aligned}$$

de donde finalmente

$$s_1^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(s_1s_2 - 3s_3) + 6s_3$$

que se reescribe como

$$x^3 + y^3 + z^3 = s_1^3 - 3(s_1s_2 - 3s_3) - 6s_3$$

De las condiciones iniciales se tiene $x^3 + y^3 + z^3 = 8$ de donde

$$s_1^3 - 3(s_1s_2 - 3s_3) - 6s_3 = 8$$

Como además $s_1 = 2$, $s_2 = -1$ se tendrá

$$\begin{aligned}8 - 3(-2 - 3s_3) - 6s_3 &= 8 \\3s_3 &= -6 \\s_3 &= -2\end{aligned}$$

Regresaremos ahora a las variables originales:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\xy + yz + zx &= -1 \\xyz &= -2\end{aligned}$$

Multiplicando por z la primera ecuación y reagrupando se obtiene

$$yz + zx = 2z - z^2$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$yz + zx = -1 - xy$$

Igualando:

$$2z - z^2 = -1 - xy$$

De la tercera ecuación se obtiene fácilmente $xy = -\frac{2}{z}$ de donde

$$2z - z^2 = -1 + \frac{2}{z}$$

Reescribiendo nuevamente y reagrupando se tendrá

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

Este polinomio en z es fácil de factorar:

$$\begin{aligned} z^3 - 2z^2 - z + 2 &= (z - 1)(z^2 - z - 2) \\ &= (z - 1)(z - 2)(z + 1) = 0 \end{aligned}$$

y por tanto los únicos valores de z son $-1, 1, 2$.

Asignando a z cada uno de estos valores se encuentran x e y . No es de extrañar que si z toma el valor 2, entonces x, y toman los valores 1, -1 en algún orden. Esto es debido a las relaciones de Vieta, tema que no discutiremos, pero que es de gran importancia a la hora de resolver este tipo de problemas.

Se concluye que el sistema en cuestión posee seis soluciones. Estas seis soluciones corresponden a las permutaciones de $-1, 1$ y 2 .

En general, si un sistema simétrico posee una solución, entonces cualquier permutación de esta solución también será solución.

Existen problemas en los cuales se pide demostrar una igualdad bajo cierta condición inicial. Si las ecuaciones involucradas presentan simetría, entonces lo más conveniente es trabajar con polinomios simétricos. Observar el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Demostrar que si $a + b + c = 0$, entonces

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$$

Solución

Todas las ecuaciones involucradas presentan simetría. Recordar que los polinomios

simétricos elementales en las variables a, b, c son

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$abc$$

Lo primero que debe notarse es que $a^4 + b^4 + c^4$ presenta simetría y por tanto es posible expresarlo en función de los polinomios simétricos elementales.

Las transformaciones algebraicas siguientes detallan el proceso:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ &\quad - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= [(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)]^2 \\ &\quad - 2[(ab + bc + ca)^2 \\ &\quad \quad - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)] \end{aligned}$$

Utilizando la condición $a + b + c = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= 4(ab + bc + ca)^2 \\ &\quad - 2(ab + bc + ca)^2 \\ &= 2(ab + bc + ca)^2 \end{aligned}$$

La última igualdad demuestra lo pedido. Notar que no fue necesario encontrar valores específicos para las variables a, b y c . Como se mencionó anteriormente, en muchos de estos problemas lo más conveniente es un reacomodo algebraico que aproveche la simetría de las expresiones involucradas. Tal reacomodo algebraico será posible si las expresiones son polinomios o expresiones racionales (división de polinomios).

Algunas veces se pide encontrar el valor de ciertas expresiones que presentan simetría dadas algunas condiciones sobre las variables. En muchos de estos casos no es necesario encontrar el valor exacto de las variables. Lo

más conveniente es hacer reacomodos algebraicos que permitan usar la simetría. Uno de tales casos es el siguiente:

Ejemplo

Encontrar el valor de $x^4 + y^4 + z^4$ sabiendo que

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\xyz &= -2\end{aligned}$$

Solución

Para esta clase de problemas lo primero que debe hacerse es encontrar el valor exacto de cada uno de los polinomios simétricos elementales en las variables x, y y z .

Como dato inicial se conoce el valor de $x + y + z$ y xyz . Resta encontrar el valor de $xy + yz + zx$. Este puede encontrarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) \\&\quad + 2(xy + yz + zx) \\3^2 &= 9 + 2(xy + yz + zx)\end{aligned}$$

Se obtiene $xy + yz + zx = 0$. A continuación debe escribirse la expresión que se desea conocer en función de los polinomios simétricos elementales, previamente encontrados.

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\&\quad - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\end{aligned}$$

Notar que $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ y $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ son ambos polinomios simétricos. Resulta mucho más fácil expresar cada uno de ellos en función de los polinomios simétricos elementales y luego sustituir:

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\&= [(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)]^2\end{aligned}$$

$$= (3^2 - 2(0))^2 = 3^4 = 81$$

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$= (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$

$$= (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)$$

$$= 0^2 - 2(-2)(3) = 12$$

Finalmente, sustituyendo se tendrá

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\&\quad - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\&= 81 - 2(12) = 57\end{aligned}$$

y el problema termina.

Comentario: El sistema de ecuaciones del problema anterior poseía tres incógnitas y tres ecuaciones. Tratar de encontrar los valores concretos de cada una de las variables que hacen cierta la igualdad podría ser engorroso. Incluso existe la posibilidad de no tener solución en números reales.

Es por esta razón que se insiste en que para tal clase de problemas lo más apropiado es utilizar la simetría. Tratar de encontrar los valores concretos de las variables puede tomar demasiado tiempo.

Existen ecuaciones irracionales en una variable (ecuaciones que involucran una variable bajo signos radicales) que son fácilmente resueltas mediante el método descrito anteriormente.

Ejemplo

Encontrar todos los valores reales de x para los cuales

$$\sqrt[4]{272 - x} + \sqrt[4]{x} = 6$$

Solución

La ecuación posee una sola variable. El único polinomio simétrico en la variable x es el

polinomio x . Un cambio de variable de este tipo no aportaría mucho a la solución del problema. Se necesita algo que nos permita hacer uso de la simetría. Tal simetría no es evidente a simple vista.

Considerar el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt[4]{272 - x} = p \quad \sqrt[4]{x} = q$$

La condición inicial se reescribe de la siguiente manera:

$$p + q = 6$$

A simple vista no se ha ganado nada con este cambio de variable puesto que al inicio se contaba con una ecuación en una variable y ahora se debe trabajar con una ecuación y dos variables. Esto no es del todo cierto. Observar que adicional a la ecuación original se tiene

$$p^4 + q^4 = 272$$

Reuniendo la información anterior, se deberá resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} p + q &= 6 \\ p^4 + q^4 &= 272 \end{aligned}$$

En este momento hemos obtenido un sistema de ecuaciones simétrico en las variables p, q .

Como en los ejemplos anteriores, la forma más fácil de trabajarlo es haciendo uso de los polinomios simétricos elementales en tales variables: $p + q$ y pq .

Notar que

$$\begin{aligned} p^4 + q^4 &= (p^2 + q^2)^2 - 2p^2q^2 \\ &= [(p + q)^2 - 2pq]^2 - 2p^2q^2 \\ &= 272 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $p + q$ se tiene

$$\begin{aligned} (36 - 2pq)^2 - 2p^2q^2 &= 272 \\ 2p^2q^2 - 144pq + 1024 &= 0 \end{aligned}$$

$$p^2q^2 - 72pq + 512 = 0$$

Observar que se ha obtenido una ecuación cuadrática en la variable pq . Utilizando la fórmula general para una ecuación cuadrática se tendrá

$$\begin{aligned} pq &= \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 4(1)(512)}}{2} \\ pq &= 64 \quad \text{ó} \quad pq = 8 \end{aligned}$$

Caso 1: Si $pq = 64$, entonces se tendrá el sistema

$$\begin{aligned} p + q &= 6 \\ pq &= 64 \end{aligned}$$

de donde $p + \frac{64}{p} = 6$ y se obtiene

$$p^2 - 6p + 64 = 0$$

Esta ecuación cuadrática posee discriminante menor a cero y por tanto no existe valor real de p que satisfaga las condiciones.

Caso 2: Si $pq = 8$ se tendrá el siguiente sistema

$$\begin{aligned} p + q &= 6 \\ pq &= 8 \end{aligned}$$

de donde $p + \frac{8}{p} = 6$, que al reescribir se obtiene

$$p^2 - 6p + 8 = 0$$

Esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales: $p = 4$ y $p = 2$.

Finalmente se debe regresar a la variable original, en este caso: x .

$$\begin{aligned} x &= 272 - p^4 \\ x &= 272 - 4^4 = 16 \\ x &= 272 - 2^4 = 256 \end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba que estos valores para x cumplen las condiciones iniciales del problema.

En ciertos problemas es necesario trabajar con expresiones que no necesariamente son polinomios en las variables involucradas. En tales casos es conveniente expresar las igualdades en forma de fracción, cuyo numerador y denominador sean ambos polinomios simétricos.

Ejemplo

Sean a, b, c números que satisfacen

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Encontrar el valor de la expresión

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

Solución

La condición inicial del problema no presenta simetría. La expresión que se pide encontrar es simétrica en las variables a, b, c . Para demostrar que esto es cierto notar que

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

Es simétrico. Notar además que la expresión por encontrar puede escribirse como

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

que es simétrica en las variables a, b, c .

Para modificar algebraicamente la condición inicial se necesita un poco de creatividad: Observar que todos los numeradores de las fracciones difieren por el signo de un sumando. Para lograr que todas las fracciones tengan igual numerador es suficiente con sumar 2 a cada miembro de las igualdades:

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b} + 2$$

de donde

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

Para que esta última igualdad sea cierta existen dos posibilidades:

$$a+b+c=0 \quad \text{ó} \quad a=b=c$$

En el primero de los casos se tendrá

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(-a)(-b)(-c)}{abc} = -1$$

En el segundo de los casos se tendrá

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(2a)(2a)(2a)}{a^3} = 8$$

Se concluye que los posibles valores de la expresión pedida son -1 y 8 de acuerdo con que $a+b+c=0$ ó $a=b=c$, respectivamente.

Actividad 1

Objetivo: Resolver un sistema simétrico de ecuaciones que presente expresiones racionales.

Problema: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$a + b + c = \frac{13}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{13}{3}$$

$$abc = 1$$

Sugerencias para resolver el problema

- Permita al estudiantado identificar la cantidad de variables involucradas.
- Permítale descubrir que se trata de un sistema simétrico.
- Pídales plantear los polinomios simétricos elementales en tales variables.
- Déjeles resolver el problema utilizando los métodos tradicionales: sustitución, igualación, etc.
- Coméntele en qué consiste el método de polinomios simétricos.
- Pídales expresar cada una de las igualdades en función de los polinomios simétricos elementales.
- Permitir que sean ellos mismos quienes encuentren los valores concretos de $a + b + c$, $ab + bc + ca$ y abc .
- Permitirles resolver el nuevo sistema.

Actividad 2

Objetivo: Demostrar la veracidad de una igualdad simétrica utilizando condiciones iniciales sencillas para los polinomios simétricos elementales.

Problema:

Los números a, b, c satisfacen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

Demostrar que para valores impares de n se cumple

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

Sugerencias para resolver el problema:

- Permita al estudiantado trabajar el problema durante los primeros 15 minutos.
- Pídales observar que las expresiones involucradas son simétricas en las variables a, b, c .
- Sugerir reescribir la condición

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

en una forma más sencilla.

- Pedirles que lleven la igualdad anterior a la forma
- $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$
- Permita que el grupo estudiantil trabaje el problema 10 minutos adicionales, sin ayuda docente.
- Sugiera tomar $a+b=0$.
- Demostrar el problema para este caso.
- Aclarar que lo mismo sucede para los casos $b+c=0$ y $c+a=0$. Especificar que lo mismo sucede para estos casos, puesto que las expresiones son simétricas.

Actividad 3

Objetivo: Determinar la paridad de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones en dos variables.

Definición: Un par ordenado de números (x_1, y_1) se dice que es una solución de la ecuación $f(x, y) = 0$ si $f(x_1, y_1) = 0$.

En general no es cierto que si (x_1, y_1) es una solución, entonces (y_1, x_1) también es solución.

Problema: Sea n la cantidad de soluciones reales del siguiente sistema

$$(y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1)$$

$$(x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1)$$

Se sabe que n es finito. Encontrar la paridad de n .

Sugerencias para resolver el problema:

- Permita al grupo de la clase tratar de resolver el problema con sus propias ideas.
- Pregúnteles si son o no simétricas las ecuaciones involucradas. La respuesta debe ser NO.
- Defina (x_1, y_1) como una solución del sistema. ¿Es (y_1, x_1) una solución del sistema? La respuesta debe ser SÍ.
- Explique a sus estudiantes que si (x_1, y_1) es una solución con $x_1 \neq y_1$ entonces (y_1, x_1) es una solución diferente a la anterior.
- Deduzca, junto al estudiantado, que la paridad de n viene dada por la cantidad de soluciones (x, y) que cumplen $x = y$.
- Permítales resolver el sistema bajo la condición $x = y$.
- Permítales dar una respuesta al problema.
- Resolver el problema detalladamente en la pizarra.

Actividad 4

Objetivo: Encontrar el valor exacto de una expresión simétrica haciendo uso de condiciones iniciales sobre las variables.

Problema: Los números a, b, c son tales que $a + b + c = 0$ con $a^5 + b^5 + c^5 \neq 0$. Encontrar el valor de

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$$

Sugerencias para resolver el problema

- Comenzar notando que la expresión por encontrar es simétrica.
- Pedir al estudiantado expresar $a^3 + b^3 + c^3$ en función de los polinomios simétricos elementales: $a + b + c$, $ab + bc + ca$ y abc .
- Hacer uso de la condición inicial $a + b + c = 0$ para llegar a la forma
 - $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- Permitirles hacer lo mismo con las expresiones $a^4 + b^4 + c^4$ y $a^5 + b^5 + c^5$.
- Sugerir utilizar la siguiente idea:
 - $a^4 + b^4 + c^4 = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - (ab^3 + ac^3 + ba^3 + bc^3 + ca^3 + cb^3)$
 - $a^5 + b^5 + c^5 = (a + b + c)(a^4 + b^4 + c^4) - (ab^4 + ac^4 + ba^4 + bc^4 + ca^4 + cb^4)$
 - Deberá obtenerse lo siguiente:
 - $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$
 - $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$
- Permitirles terminar el problema.
- Resolver el problema completo en la pizarra. Deberá llegarse a la siguiente respuesta:
 - $\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \frac{18}{25}$

ADICIONAL

Se sugiere resolver el siguiente problema

- Se sabe que a, b, c son números tales que $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ y $abc = 4$. Encontrar el valor de

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}$$

Sugerencia: Observar que $xy + z - 1 = (x - 1)(y - 1)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Andreescu Titu and Feng Zuming. (2001), *101 Problems in Algebra from the training of the USA IMO Team*, AMT Publishing, Rumania.
2. Herman Jiri Kucera Radan and Simsa Jaromir. (1999), *Equations and Inequalities*, Editorial Springer, Canadá.
3. Magalhaes Cícero, Barbosa Treinamento Samuel. (2010), *Cone Sul, Volume 2*, Bruno Holanda, Yuri Lima, Editorial REALCE, Brasil.

Viceministerio de Ciencia y Tecnología Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera “viva” en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación).

