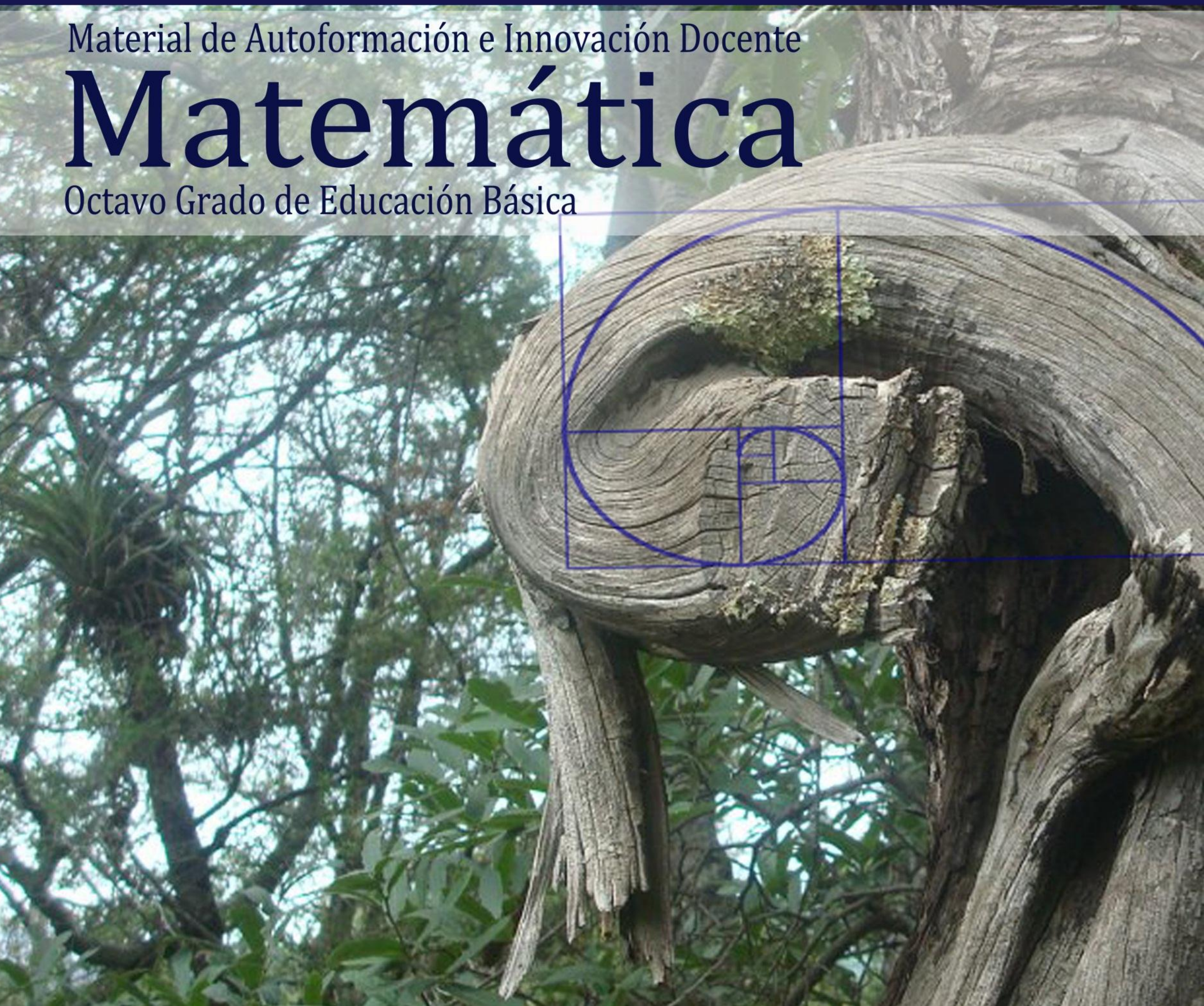
Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

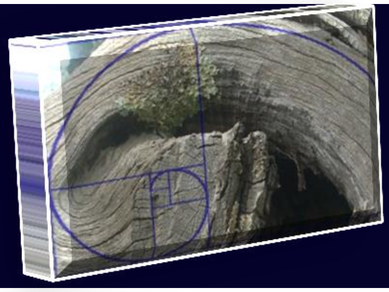
Octavo Grado de Educación Básica



Versión preliminar para plan piloto

8

Viceministerio de Ciencia y Tecnología



Rama de árbol que adopta forma de la espiral aurea, tomada en sendero hacia el Cerro las Delicias de San Esteban Catarina, San Vicente. Imagen tomada y modificada por Daniel Acevedo.

La espiral aurea es una de las representaciones más identificables en la naturaleza, la construcción obedece el patrón de Fibonacci y posee relación directa con el número áureo.

Ministerio de Educación

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Material de Autoformación e Innovación Docente

Para Matemática 8° Grado

Versión Preliminar para Plan Piloto

Plan Social Educativo

Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Mauricio Funes Cartagena
Presidente de la República

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Mejía
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Daniel Ulises Acevedo Arias
Autor

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2537-4217, + (503) 2537-4218, + (503) 2537-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo "Vamos a la Escuela" 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para los Niveles de Parvularia, Educación Básica y Educación Media. El propósito de éstos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o "pivotes" que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

I Parte

Presentación.. 8

La resolución de problemas.. 9

Uso de los cuadernillos en el aula.. 11

Matriz de ubicación de lecciones.. 14

II Parte

Números Irracionales.. 19

Números Irracionales relevantes.. 37

Operaciones con números reales.. 53

Multiplicación y división de Polinomios.. 68

Factorización de expresiones algebraicas I.. 84

Factorización de expresiones algebraicas II.. 98

Congruencia y semejanza de triángulos.. 113

Teorema de Pitágoras (Historia y demostración del teorema).. 131

Área de regiones planas (La matemática en la fundación de Cartago.. 147

Ecuaciones lineales.. 164

Primera parte

¿Por qué material de autoformación e innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y su programa "Hacia la CYMA" que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular y de autoformación para docentes.

Este material de enriquecimiento curricular para docentes tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática de Octavo Grado de Educación Básica, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica. Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes[1] considerados necesarios para la educación de calidad de la niñez salvadoreña, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, creación de conocimiento y de utilización de ese conocimiento para la innovación.

Se busca que mediante la formación científica se mejoren las condiciones sociales y económicas para alcanzar una vida digna de nuestros futuros ciudadanos. Cada tema de este cuadernillo mantiene una relación con otros materiales curriculares como los programas de estudio, y la colección Cipotas y Cipotes (Guía para Docentes y Libros de texto).

El enriquecimiento que se ha hecho partiendo de temas pivotes, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento, bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener una persona para alcanzar sus propósitos de incorporarse de manera propositiva y útil a la sociedad, y sus propósitos formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos, para mejorar su calidad de vida y la de sus comunidad.

1. Un tema pivote es un contenido curricular clave, se considera que si los docentes manejan adecuadamente dichos temas, podrá desarrollar otros contenidos con facilidad y aplicar de forma más pertinente el conocimiento a la realidad en que se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje; por otra parte podrá seleccionar qué contenidos del programa desarrollar y en qué orden, de acuerdo a las necesidades e intereses del grupo de alumnos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[2], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática[3].

---

[2] José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.
[3] Miguel de Guzmán Ozámiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya[4] en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[5].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de contenidos de cuadernillos

Para elaborar el Cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente de Matemática para Octavo Grado de Educación Básica, se han seleccionado 10 temas del programa de estudio de Matemática en vigencia para Octavo Grado. Estos temas son considerados fundamentales en el desarrollo intelectual, profesional y personal, tanto de docentes como de estudiantes. Las lecciones del cuadernillo pretenden fortalecer competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de la juventud salvadoreña, no perdiendo de vista el enfoque de *resolución de problemas*, mostrando a cada docente y estudiante, situaciones problemáticas donde tendrán que utilizar su ingenio, conocimientos y habilidades para formular estrategias y brindar una solución satisfactoria. La característica fundamental de los problemas es su relevancia y aplicabilidad en Física, Química o Biología. Además se busca introducir el elemento *historia de las matemáticas* mediante el enfoque CTS y la integración con las ciencias con el enfoque CTI.

---

[4] George Pólya (1887-1985), Matemático Húngaro, How to solve it, Pricenton University Press.
[5] Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

La selección de los contenidos considerados temas pivotes se efectuó siguiendo el siguiente proceso:

1. Revisión de la secuencia de contenidos que presentan algunos libros matemáticos, considerando los bloques: Aritmética, Álgebra, Geometría, Estadística, Probabilidad, Combinatoria, Cálculo y Trigonometría.
2. Revisión de libros que utilizan docentes para la planificación de la clase, hacer una comparación entre las secuencias de contenidos, obteniendo de este modo una perspectiva sobre la relevancia de contenidos y su secuencia.
3. Revisión de temas por unidad del Programa de Estudio de Matemática de Tercer Ciclo de Educación Básica, octavo grado.
4. Análisis de los contenidos y selección de temas específicos del programa de estudio de la asignatura de matemática, octavo grado. Se seleccionan 15 temas de los cuales se enriquecen únicamente 10.
5. Consulta a docentes de Tercer Ciclo de Educación Básica, asesores pedagógicos y personas formadoras de docentes de la Universidad de El Salvador.
6. Selección de temas pivotes de octavo grado de Educación Básica.

Descripción de la estructura de las lecciones

Las lecciones se estructuran normalmente en catorce partes, las cuales se detallan a continuación.

a. **Número de lección y ubicación de la lección en el programa de estudio.** Se detalla el grado, y la unidad a la que pertenece.
b. **Tiempo:** Es el tiempo estimado para aplicar la lección. Este es un tiempo aproximado que el docente puede readecuar según sus necesidades.
c. **Titulo.** Condensa la idea central de la lección, se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
d. **Ilustración:** Imagen o figura que está inspirada en la historia de la matemática, específicamente en matemáticos destacados cuya vida y obra inspiran el desarrollo de la lección como elemento motivador.
e. **Introducción del tema:** Presenta una breve discusión de la temática mostrando puntos relevantes que se tratarán en la lección. Es un espacio para generar interés y motivación en cada docente, para que esta curiosidad pueda trasmitirla a sus estudiantes.
f. **Competencias a fortalecer.** Son los conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiantado puede adquirir al finalizar la lección. Se pretende que este, con ayuda de su docente desarrolle las competencias esenciales en matemática para una formación científica de calidad y con capacidad de innovación. Dichas competencias son:
    i. saber argumentar.
    ii. Saber cuantificar.
    iii. Saber analizar críticamente la información.
    iv. Saber representar y comunicar.
    v. Saber resolver y enfrentarse a problemas.
g. **Objetivos:** Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.
h. **Presaberes:** es un conjunto de conocimientos y habilidades que se estima posee cada estudiante antes de iniciar la lección, los Presaberes también son nombrados *conocimientos previos*. La existencia de los conocimientos previos requeridos para la lección son identificados mediante actividades diagnóstico.
i. **Vocabulario clave:** En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda para comprender algunos términos que se utilizan en el desarrollo de la lección.
j. **Relato histórico.** Breve relato histórico que guarda estrecha relación con el título de la lección. En este relato se hace referencia a la vida y obra de diversos matemáticos de la historia. Este elemento introduce a la lección el ingrediente motivador, puesto que se identifica el surgimiento de algunas temáticas, así también, la relevancia de las mismas.
k. **Marco teórico.**
   Al final del relato histórico se llega a una idea particular, a partir de esta se construye un marco teórico que es el que guía la lección. Esta sección aborda los conceptos, proposiciones

y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar.

l. **Desarrollo de la lección.** Se presenta una secuencia de actividades donde se muestran ejercicios y aplicaciones que explican de forma detallada los objetivos, materiales a utilizar y procesos que se van a seguir. Las actividades propuestas tienen la cualidad de ser de carácter interesante e innovador, buscan relacionar aspectos teóricos, históricos y científicos con algoritmos matemáticos. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental.

m. **Guía de ejercicios y aplicaciones.** Hay que hacer una valorización importante en este apartado, la guía está integrada por ejercicios, problemas o una integración de ejercicios y problemas. Esta guía pretende fortalecer los conocimientos y habilidades tanto en docentes como en estudiantes, así también, brindar un punto de partida hacia el estudio de nuevas temáticas.

n. **Referencias bibliográficas.** Se hacen referencias a texto, videos y otros materiales para que cada docente pueda consultar y profundizar su conocimiento.

¿Cómo utilizar el cuadernillo?

En vista de que para la enseñanza de la Matemática en Octavo Grado no se cuenta con un libro de texto avalado por el Ministerio de Educación, se propone el material de Autoformación e Innovación Docente en el que se destacan 10 temas pivotes, que por su relevancia y aplicabilidad en el entorno científico y social han sido enriquecidos introduciendo el enfoque CTI, CTS y resolución de problemas, favoreciendo grandemente el desarrollo de la juventud salvadoreña. El uso de este material en el salón de clases presenta las siguientes situaciones.

a. El material ha sido elaborado pensando en primer lugar, en cada docente, en consecuencia, los conceptos y procesos que se incluyen presentan un nivel de complejidad adecuado para la misma persona docente, quien tendrá que dosificar la información y utilizar algunas de las actividades que se muestran en la lección para hacer que el estudiantado comprenda la temática.
b. La historia de la matemática es un elemento enriquecedor que favorece el desarrollo de la lección brindando el ingrediente motivación, además orienta al lector acerca de los fundamentos que dieron lugar a la concreción de un tema específico.
c. Posteriormente, es indispensable verificar los conocimientos del estudiantado mediante un diagnóstico, para corroborar si cumple o no con los presaberes necesarios para comprender la temática, considerando que algunas temáticas pueden ser abordadas de diversas formas.
d. Las actividades contenidas en cada una de las lecciones, muestran situaciones de aprendizaje donde el estudiantado en conjunto con su docente construyen conocimientos y resuelven problemas siguiendo una secuencia de pasos inspirados en el proceso de resolución de problemas de G. Polya. Los procesos que se describen no son arbitrarios, únicamente se muestra una opción, tanto docentes como estudiantes pueden proponer otras estrategias de abordaje de problemas y de desarrollo de las actividades.
e. El cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente, puede utilizarse además como guía para el desarrollo de una clase, puesto que posee elementos que orientan la utilización del mismo, así también, describe los materiales y procesos que se han de realizarse durante la clase.

Matriz de justificación de lecciones propuestas y su ubicación en el programa de estudio de Tercer Ciclo de Educación Básica, Octavo grado, Matemática.

LECCIÓN 1

Números irracionales.

LECCIÓN 2

Números irracionales relevantes.

Unidad 1: Trabajemos con números reales.

Justificación

La enseñanza de los números irracionales ha sido tratada desde puntos de vista superficiales, mostrando de estos únicamente la escritura ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$...) y simbologías matemáticas que indican algunos números irracionales relevantes, entre estos: pi (π), phi (φ) y la constante de napier (e). Es conocido que el símbolo π, indica la cantidad 3.1415... Incluso se reconoce que las cifras decimales son infinitas no periódicas, pero los orígenes y antecedentes históricos que narran el descubrimiento de estos números han sido relegados en la educación sin considerar la riqueza conceptual y didáctica que otorgan para el desarrollo de sesiones (clases) interesantes, relevantes, y que motiven al estudiantado a investigar más acerca de la temática.

LECCIÓN 3

Operaciones con números reales.

Unidad 1: Trabajemos con números reales.

Justificación

Es necesario mostrar que los números reales están conformados por la unión de números racionales e irracionales. El conjunto de números irracionales se integra por números decimales infinitos no periódicos. Toda aproximación de estas cantidades conlleva a resultados erróneos en operaciones básicas. En libros de texto utilizados por docentes se evidencia la expresión de números irracionales en forma decimal, esto conlleva a que el estudiantado considere estas cantidades por su aproximación y no por su verdadero valor. Para evitar estos errores, se sugiere desarrollar las operaciones básicas de números reales de forma análoga a las operaciones básicas de expresiones algebraicas en las que se reducen términos semejantes, y las operaciones que no poseen términos semejantes se indican mediante expresiones algebraicas con dos o más términos.

LECCIÓN 4

Multiplicación y división de polinomios.

Unidad 2: Operemos con polinomios.

Justificación

Comprender la multiplicación y división de polinomios, facilitará en gran medida el aprendizaje de la factorización, pero, esto no garantiza que se entienda con claridad el ¿Por qué? De la factorización. Para lograr este cometido es necesario hacer uso de la geometrización.

La geometrización de procesos algebraicos mediante figuras planas permiten que los resultados sean visibles y significativos, de este modo se muestran vínculos entre el álgebra y la geometría que permiten identificar aplicaciones de los polinomios en resolución de problemas geométricos.

LECCIÓN 5

Factorización de expresiones algebraicas I

LECCIÓN 6

Factorización de expresiones algebraicas II

Unidad 4. Aprendamos a factorizar.

Justificación

Para el enriquecimiento de la temática, se recomienda visualizar la factorización desde un punto de vista donde esta no se separe en casos. La división de la factorización en casos de factoreo facilita la comprensión de esta, seccionando y mostrando paulatinamente diversas formas de factorizar donde el polinomio cumple ciertas condiciones que permiten seleccionar el caso de factoreo mejor aplicable. Esto conlleva a la situación en que, si se encuentra un polinomio que no cumpla con las condiciones que proponen cada caso de factoreo, este se categoriza como no factorizable, sin considerar la posibilidad de utilizar propiedades de los números reales para cambiar la estructura de la expresión algebraica sin modificar su naturaleza. Esto se logra utilizando elementos neutros de la suma y la multiplicación, es decir, el cero y el uno respectivamente.

LECCIÓN 7

Semejanza y congruencia de triángulos

Unidad 3: Midamos y construyamos triángulos.

Justificación

En los libros de texto utilizado por docentes y el programa de estudio de octavo grado, se introduce el tema de congruencia de triángulos, guardando poca consideración a la formación de lenguaje matemático. Es necesario garantizar que el estudiante comprenda el concepto de congruencia, ya sea en su significado intuitivo a partir del lenguaje natural, o bien a través de su uso en aritmética. Considerar que en geometría, es común que se hable de congruencias en vez de igualdades.

LECCIÓN 8

Teorema de Pitágoras.

Unidad 3: Midamos y construyamos triángulos.

Justificación

El teorema de Pitágoras es considerada una herramienta muy utilizada en la resolución de problemas relacionados con algebra y geometría, pero, en el salón de clases no se comenta el surgimiento y recorrido que ha tenido tan importante teorema. Es por ello que se propone una lección en la que el elemento histórico llena de vida y significado el conocido Teorema de Pitágoras, además, se muestra una de las primeras demostraciones del teorema a partir de trazos de figuras geométricas.

LECCIÓN 9

Área de figuras planas

Unidad 5. Trabajemos con áreas de regiones planas.

Justificación

El programa de estudio de octavo grado propone que el estudiantado alcance dentro de sus competencias procedimentales a deducir y utilizar las fórmulas para encontrar el área de figuras geométricas, pero en algunos libros de texto de uso común por docentes, se identifica que el área de figuras planas se encuentra por sustitución de elementos en una fórmula.

Para que el estudiantado internalice y comprenda las fórmulas empleadas para determinar el área de figuras, es necesario que observe cómo surgen y que responda en qué se aplica.

Se propone introducir el tema mediante la lectura de relatos históricos donde la identificación de superficies soluciona problemas que invitan a utilizar conocimientos previos y a deducir procesos que orienten a la obtención de resultados.

LECCIÓN 10

Ecuaciones lineales

Unidad 9: Trabajemos con ecuaciones lineales.

Justificación

En el programa de estudio de octavo grado de educación básica y en libros de texto de usados por docentes, se evidencia que el abordaje de las ecuaciones lineales se realiza implementando procesos algebraicos y operaciones básicas con expresiones algebraicas. Se muestran diversas representaciones de ecuaciones lineales entre estas: ecuaciones enteras, fraccionarias con denominadores monomios y denominadores polinomios y técnicas de resolución.

Se propone estudiar la resolución de problemas, donde se formulan ecuaciones lineales a partir de enunciados que relatan sucesos o situaciones interesantes, motivando al estudiantado a buscar soluciones implementando conocimientos previos y procesos cognitivos que enriquecen la formación académica y personal.

Segunda parte

Lecciones

Contenidos trabajados con enfoque CTI.

Lección 1 **8° grado** **Unidad 1** **Tiempo:** 10 horas clase

Números irracionales

Figura 1. El matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540-1610) pidió que, como epitafio pusieran en su lápida las 35 cifras del número π que había calculado. Los alemanes llaman a π Ludofiano.

Introducción del tema

El estudio de conjuntos numéricos ha evolucionado continuamente, de una época a otra, teniendo por punto de partida la capacidad humana de abstraer cantidades. La creación de conjuntos numéricos cada vez más extensos y densos ha motivado a utilizar nuevas simbologías y crear nuevas definiciones.

Los números enteros y racionales fueron considerados conjuntos numéricos completos, capaces de explicar un sinfín de situaciones, tal fue su importancia que orientó a Pitágoras a formar su propia academia de formación filosófica y matemática, llamándose a sí mismos pitagóricos.

Los pitagóricos fueron capaces de encontrar el primer número que contradecía toda racionalidad, por lo que decidieron llamarle irracional. A partir de este primer encuentro, la necesidad de explicar los orígenes y naturaleza de los números irracionales, llevó a muchos matemáticos destacados de la historia de la matemática a dedicar gran parte de su vida a demostrar tal irracionalidad.

Fue en este camino que se logró identificar otros números irracionales que, por su aplicación en la realidad, poseen especial importancia. En esta lección se pretende que el estudiantado tenga un encuentro significativo con los antecedentes históricos de algunos números irracionales, y las estrategias que se emplean para obtener aproximaciones decimales, mediante sucesiones convergentes de Cauchy y el binomio de Newton para el cálculo de radicales.

Competencias por fortalecer

- Saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, resolver y enfrentarse a problemas.

Objetivos

- Interpretar relatos históricos que describen el descubrimiento de números irracionales.
- Implementar elementos geométricos en la construcción de números irracionales.
- Generar aproximaciones decimales de los números irracionales mediante sucesiones de Cauchy y el binomio de Newton.

Presaberes

- Operaciones con números

ORIGEN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

VOCABULARIO MATEMÁTICO

El número racional

Los números enteros ($\mathbb{Z}$), fraccionarios positivos y negativos, incluyendo el cero, forman el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$). Cada elemento de este conjunto es un número racional.

Los números racionales se expresan de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z} \;\wedge\; b \neq 0$.

Figura 2. Posición de los números racionales en la recta numérica.

Propiedades del conjunto de números racionales.

El conjunto de los números racionales es ordenado, dados tres números racionales a, b y c, tales que:

$a < b$ y $b < c$; en consecuencia: $a < c$.

Y tomados dos racionales a y b, existe entre ellos una y solamente una de las relaciones:

$a < b$; $a = b$; $a > b$.

Ley conocida como *tricotomía.*

El descubrimiento del primer número irracional se remonta a la Grecia clásica, en particular, a la época pitagórica. Para contextualizar tal descubrimiento se narra de forma breve la siguiente biografía.

Pitágoras nació en el año 572 a. C. en la isla de Samos, vivió y trabajó en la costa oriental del mar Egeo y según algunas leyendas, estudió con Tales. Pero cuando el tirano Polícrates accedió al poder en esa región, Pitágoras escapó a la ciudad griega de Crotona en la parte sur de Italia, donde creó su famosa Escuela pitagórica. Los pitagóricos atribuían un papel especial al número entero, tenían como creencia fundamental que todas las cosas son, en esencia, números.

A la Escuela pitagórica, se le atribuye la creación y demostración del reconocido teorema de Pitágoras. Este teorema relaciona la diagonal de un rectángulo con la longitud de dos de sus lados adyacentes.

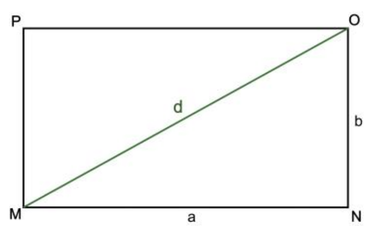


Figura 3. Diagonal del rectángulo.

La diagonal de un rectángulo MNOP, es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes $\overline{MN}$ *y* $\overline{NO}$.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es sorprendente razonar que con el surgimiento del teorema de Pitágoras aplicado para determinar la diagonal de un cuadrado, se identifique el primer número irracional. Este descubrimiento se le atribuye al pitagórico Hipasus, quien haciendo uso del famoso teorema describe el siguiente proceso:

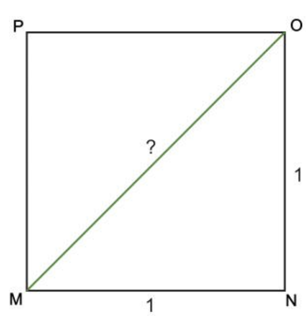


Figura 4. Diagonal del cuadrado.

Para un cuadrado de lado uno, se calcula la longitud de la diagonal d mediante la fórmula.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo a y b por la longitud de los lados $\overline{MN}$ *y* $\overline{NO}$, *se tiene:*

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Por lo que:

La longitud de la diagonal muestra un resultado no mensurable[6], es decir, si se introduce en la diagonal $\overline{MO}$ un segmento $\overline{FE}$, por muy pequeño que este sea, no dividirá la diagonal un número entero de veces.

Los esfuerzos por determinar un resultado mensurable que pudiese ser expresado con números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y $b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$, demostraron en efecto, que el número $\sqrt{2}$ no puede expresarse de la forma $\frac{a}{b}$ y presenta una cantidad incalculable de decimales no periódicos.

Los pitagóricos se enfrentaron con un nuevo número que se oponía a toda racionalidad explicada con números enteros. A este número se le llamó irracional[7].

DEFINICIÓN

Número irracional es toda representación decimal infinita no periódica, que no puede expresarse de la forma $\frac{a}{b}$, para $b \neq 0$.

La definición anterior describe las características que cumplen algunos números para ser clasificados como irracionales. Resulta necesario mencionar que los números irracionales fueron utilizados en otras épocas, anteriores al descubrimiento de la irracionalidad de raíz de dos, la diferencia reside en la actitud de los antiguos griegos que los orientó a demostrar tal irracionalidad.

En matemática es necesario demostrar la veracidad de las definiciones y teoremas, por ello se utilizan diversos métodos de demostración entre los cuales se mencionan: inducción, deducción, método directo y reducción al absurdo.

A continuación se demuestra la irracionalidad de $\sqrt{2}$, publicada por Euclides en su libro "Los elementos" tres siglos después del descubrimiento de raíz de dos. En dicha demostración se aplica el método de reducción al absurdo (reductio ad absurdum[8]).

Teorema: Raíz de dos es irracional.

La demostración comienza estableciendo que raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio.

Supongamos que el resultado de $\sqrt{2}$ puede escribirse de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

a y b son dos números enteros cuyo máximo común divisor es 1, es decir, no tienen factores comunes y por ello son considerados primos relativos[9].

6 Para indicar que algo se puede medir, cabe optar entre el adjetivo regular **medible** y el cultismo **mensurable** (del latín *mensurabilis*), se indica lo contrario, ubicando la palabra no, así no mensurable se refiere a no medible o inmedible.

7 Todo número que no es racional, entra en la categoría del conjunto de números irracionales, algunos libros indican este conjunto mediante el símbolo I, y otros lo consideran como complemento del conjunto racional con el símbolo $\mathbb{Q}'$.

8 La técnica de argumentación conocida como *Reductio ad Absurdum* está estrechamente ligada al concepto de validez deductiva. De acuerdo con una definición corriente de "argumento válido", es aquel donde resulta imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Esto implica: si la conclusión es falsa entonces o no se trata de un argumento válido o al menos una de las premisas es falsa. Tomado de: La lógica de la filosofía. (s.f.). Recuperado agosto 19, 2011, a partir de http://lalogicadelafilosofia.blogspot.com/

9 Dos números naturales se llaman primos relativos si el máximo común divisor entre ellos es 1. Los números 9 y 14 son primos relativos ya que los divisores de 9 son 1, 3 y 9, mientras que los divisores de 14 son 1, 2, 7 y 14. Por lo tanto el máximo común divisor es 1.

Si a cada expresión en ambos extremos de la igualdad se le asigna exponente dos se tiene que:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Recordando y aplicando propiedades de exponentes y radicales para simplificar las expresiones, se prosigue de la forma siguiente:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \qquad \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{2}} \qquad (x^p)^q = x^{pq}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2^1 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad x^1 = x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

La expresión resultante es:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Ahora, multiplicar ambas partes de la igualdad por el denominador de la fracción $\frac{a^2}{b^2}$.

$$2 \cdot b^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot b^2$$

$$2b^2 = a^2 \cdot \frac{b^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2 \qquad \frac{b^2}{b^2} = b^{2-2} = b^0 = 1$$

Por lo que a^2 debe ser múltiplo de 2, esto implica que a también es múltiplo de 2, es decir $a = 2k$. El valor $2k$ se sustituye en la posición de a en la expresión $2b^2 = a^2$.

$$2b^2 = (2k)^2$$

Por lo que:

$$2b^2 = 2^2k^2 \qquad (xy)^p = x^p y^p$$

Dividir ambos extremos de la igualdad entre 2 y simplificar la expresión:

$$\frac{2b^2}{2} = \frac{2^2k^2}{2}$$

$$\frac{2}{2} \cdot b^2 = \frac{2^2}{2} \cdot k^2$$

$$b^2 = 2k^2 \qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$$

La expresión resultante ($b^2 = 2k^2$) permite argumentar que b^2 es múltiplo de 2, y en consecuencia b es múltiplo de 2. Es en este argumento donde se identifica el absurdo: *se había supuesto que* a *y* b *no tenían factores comunes (es decir el máximo común divisor de* a *y* b *es 1) y se ha llegado a que*

los dos son múltiplos de 2, por lo que su MCD debe ser al menos 2. Esta es la contradicción que se buscaba, en consecuencia $\sqrt{2}$ *es irracional.*
Si $\sqrt{2}$ es irracional, se necesita un método que facilite la obtención de cifras decimales y optar por la mejor aproximación decimal. Es indispensable recordar que la aproximación muestra una posible ubicación de este número sobre la recta numérica, pero dicha aproximación posee un rango de error en comparación a la inconmensurabilidad de cifras decimales de $\sqrt{2}$.

Han sido muchos los esfuerzos por determinar un algoritmo que permita obtener una aproximación decimal de raíz de dos. Uno de los resultados se deduce del teorema del binomio de Newton.

En el transcurso de la formación académica y docente, se estudian expresiones de la forma: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, generalizando con la expresión $(a+b)^n$.
Newton desarrolló un algoritmo que permite aproximar el irracional raíz de dos mediante la expansión del binomio $(1+q)^{\frac{m}{n}}$, cuya demostración será omitida debido a la aplicación de análisis matemático y cálculo diferencial, pero en la bibliografía de esta lección se ofrece un enlace web que llevará al hábil lector o lectora a dicha demostración. Antes de utilizar el algoritmo se recomienda recordar las siguientes propiedades de exponentes y radicales.

1. $q^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{q^m}$; El numerador del exponente será exponente de la cantidad subradical y el denominador será el índice de la raíz.
2. $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{q}$;q está dentro del radical con exponente 1; $q^1 = q$.
3. $(-a)^n$ si $a > 0$, y n impar, el resultado será negativo.
4. $(-a)^n$ si $a > 0$ y n par, el resultado será positivo.

Además, es necesario recordar las propiedades de los números racionales y las operaciones entre números irracionales, como suma, resta, multiplicación y división.

ALGORITMO DEL BINOMIO DE NEWTON PARA LA APROXIMACIÓN DECIMAL DE RADICALES

El siguiente algoritmo, refuerza habilidades relacionadas a las propiedades de los exponentes, radicales y operaciones con números racionales. Durante el proceso se especifican los conocimientos necesarios que se utilizan en el algoritmo.

Forma general del algoritmo del binomio de Newton[10]

$$(1 \pm q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} \cdot q + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2} \cdot q^2 + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{(3)(2)} \cdot q^3 + \cdots$$

[10] Tomado del libro “Viaje a través de los genios” de William Dunham, Editorial Pirámide. Ver extracto en: Demostración del binomio de Newton. Tomado de: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html

Análisis de la fórmula:

La fórmula del binomio de Newton se aplica para la suma de dos cantidades, una de ellas **1** (constante) y la otra, **q** (variable) donde el valor de q pertenece al conjunto de números racionales ($q \in \mathbb{Q}$). Observar que el exponente del binomio $(1+q)$, es $\frac{m}{n}$ con $m\ y\ n\ \in \mathbb{Z}\ con\ n \neq 0$.

La expansión del binomio inicia con el número 1, a esta cantidad se adiciona el exponente de la forma $\frac{m}{n}$, multiplicada con el número q con exponente 1.

Luego, se adiciona nuevamente el exponente $\frac{m}{n}$, multiplicando a este el exponente menos 1 $\left(\frac{m}{n}-1\right)$, dividiendo el producto entre 2 y multiplicando la fracción resultante por el valor de q con exponente 2.

A partir de estos resultados, es posible predecir el comportamiento de la fórmula para el cuarto y el quinto términos.

Cuarto término:

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{(3)(2)} \cdot q^3$$

Quinto término:

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{(4)(3)(2)} \cdot q^4$$

A medida que aumenta el número de términos de la expansión del binomio, la aproximación de la cantidad será más exacta. Además, la diferencia entre un término y su antecesor será cada vez menor.

CÁLCULO DE RAÍZ DE DOS MEDIANTE EL ALGORITMO DE NEWTON

Considerar que el número $\sqrt{2}$, equivale a la expresión exponencial $(2)^{\frac{1}{2}}$. Además, el número 2 puede representarse como la suma o resta de dos cantidades.

$1+1=2; \left(1-(-1)\right)=2$

Sustituyendo esta información en la forma general del algoritmo se tiene:

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot 1^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{(3)(2)}\cdot 1^3$$

Para facilitar el cálculo de la expresión, es necesario simplificarla. En el segundo término de la expansión se observa a $\frac{1}{2}\cdot 1$. Recordar que 1 es el elemento neutro de la multiplicación y para todo número n, $n \cdot 1 = n$. En consecuencia, la expresión $\frac{1}{2}\cdot 1$, se reduce a $\frac{1}{2}$.

De forma análoga, en el tercer y cuarto término es posible quitar las cantidades 1^2 y 1^3, pues en ambas potencias se obtiene como resultado 1.

Después de simplificar, queda de la forma siguiente:

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{(3)(2)}$$

Para resolver la expresión, se propone a continuación un algoritmo donde se inicia efectuando operaciones que tienen signos de agrupación, luego desarrollando los productos indicados, después resolviendo las divisiones, y así, al final efectuar las sumas y restas indicadas.

a) Operaciones indicadas en paréntesis.

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{(3)(2)}$$

$$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

b) Productos indicados.

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{2}+\frac{\frac{3}{8}}{6}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1\cdot 1}{4}=-\frac{1}{4}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{3}{8}$$

c) Efectuar divisiones.

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}}{2}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{2}{1}}=-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{8}$$
$$\frac{-\frac{3}{8}}{6}=\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{6}{1}}=-\frac{3\cdot 1}{8\cdot 6}=-\frac{3}{48}$$

d) Desarrollar sumas y restas.

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{48}}$$

El mínimo común múltiplo de 2, 8 y 48 es: 48

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{48+24-6+3}{48}$$
$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{75-6}{48}$$
$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{69}{48}$$
$$(1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1.4375 \text{ aproximadamente}$$

Sabías que . . .

Los términos $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{48}, -\frac{15}{384}$ …, pertenecen a una sucesión de infinitos términos para los que la distancia entre dos términos cualesquiera, será cada vez menor. La suma de estos infinitos términos converge en un valor que corresponde al irracional $\sqrt{2}$, cuya aproximación decimal a 70 posiciones decimales es:

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621.

Este tipo de sucesiones, que cumple con las características descritas, son conocidas con el nombre de **sucesiones de Cauchy.**

APROXIMACIÓN DE RAÍZ DE DOS MEDIANTE SUCESIONES DE CAUCHY Y EL BINOMIO DE NEWTON

Con ayuda del binomio de Newton, se identifican los términos de la sucesión. La suma de estos términos se acerca a $\sqrt{2}$, a continuación se propone un esquema gráfico que permite apreciar el acercamiento según el número de términos que se suman de la sucesión.

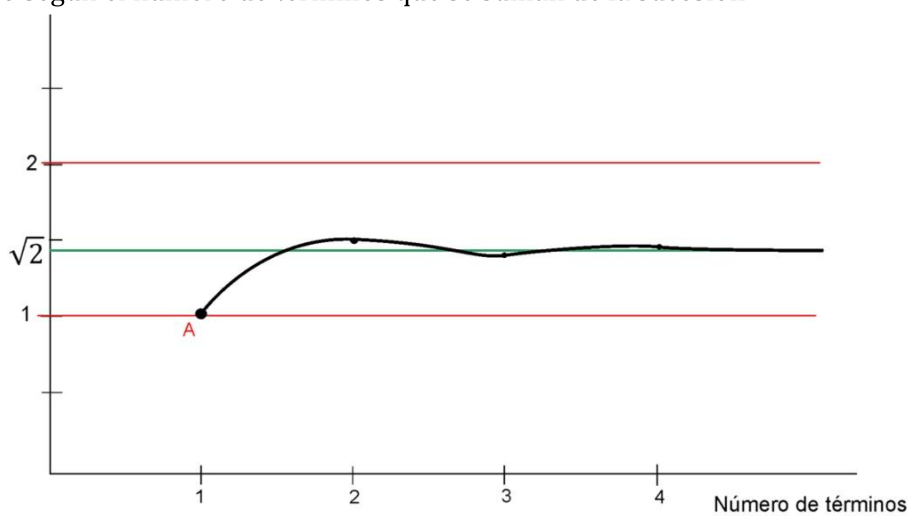


Figura 5. Aproximación de raíz de 2 mediante el binomio de Newton y sucesiones de Cauchy.

En una consideración inicial, se sostiene que $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1 y 2 (entre dos números racionales). Para el primer término obtenido del desarrollo del binomio de Newton la aproximación de raíz de dos se encuentra en el extremo inferior (1).

Sumando dos términos de la sucesión de Cauchy $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, se tiene el extremo superior para 1.5, en este momento $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 1.5. Ahora bien, si se suman tres términos de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)$, resulta 1.375, por lo que, el rango de valores se limita al conjunto de números comprendidos entre 1.375 y 1.5. Si el proceso continúa de forma indefinida, aumentando el número de términos, la suma de estos se acerca indefinidamente al irracional $\sqrt{2}$.

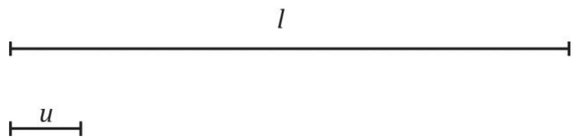
DESARROLLO DE LA LECCIÓN

A continuación se plantea un conjunto de actividades por desarrollar con el estudiantado. Dichas actividades facilitarán la introducción y desarrollo del tema en el salón de clases. En estas se presentan ejemplos, problemas de aplicación que involucran los números irracionales.

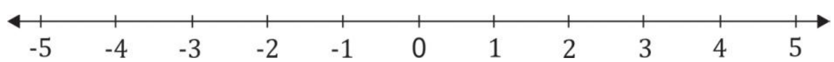
Actividad 1. Antes de iniciar.

Objetivo: Explorar los conocimientos previos del grupo de estudiantes para tener un panorama inicial y orientar la temática a la obtención de buenos y mejores resultados.

1. ¿Cuántas veces contiene la longitud l a la unidad u de la figura 5?



2. Ubica en la recta numérica las siguientes cantidades.
   $2,\ -\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{4};\ \frac{6}{7}-\frac{4}{3};\ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right);\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8};\ 1.73;\ 3.14$



3. Aplica propiedades de los exponentes y radicales para realizar las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3=$

b) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\frac{\left(\frac{2}{3}-4\right)}{2}=$

c) $\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2=$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}}$

Actividad 2. Números decimales.

Objetivo: Identificar características de los números decimales en contraste con la expresión fraccionaria de números decimales.

Indicaciones

Explicar al estudiantado, que los números decimales son aquellos que pueden representarse en forma de fracción decimal.

¿Qué es una fracción decimal?

Las fracciones se denotan de la forma $\frac{a}{b}$, con $a\ y\ b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$; donde a es "numerador" y b "denominador". El denominador y el numerador indican la cantidad de porciones que componen la unidad y el número de porciones que se toman de la unidad. Toda fracción es representable de forma decimal, mediante la notación decimal utilizando el punto decimal.

Algunos números decimales se expresan en forma de fracciones decimales, y pueden representarse con un numerador entero y un denominador de potencia 10. Ejemplo:

$$\frac{3}{10}, \frac{2}{100}, \frac{20}{1000}$$

De este modo, se tienen las cantidades, tres décimos, 2 centésimos y 20 milésimos. Cuya notación decimal es apreciable mediante el análisis de la tabla 1, donde se representa la cantidad 12.12568, indicando la posición que le corresponde a cada cifra.

Tabla 1. Posición decimal de la cantidad 12.12568

1	2	.	1	2	5	6	8
Una decena	Dos unidades	Punto decimal	Un décimo	Dos centésimos	Cinco milésimos	seis diezmilésimos	ocho cienmilésimos
Decenas	Unidades	Punto decimal	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos	Cienmilésimos

¿Cómo indicarías con notación decimal la fracción decimal $\frac{3}{10}$?

Según la tabla 1, los décimos se encuentran a una posición hacia la derecha del punto decimal, en consecuencia $\frac{3}{10}$, se indica 0.3?

¿Qué sucede con la fracción $\frac{2}{100}$?

La cantidad pertenece a los centésimos, que se encuentra a dos posiciones a la derecha del punto decimal, por lo que: $\frac{2}{100} = 0.02$.

¿Y con 20/1000?

La posición para 20 milésimas, es equivalente a decir que 0 se encuentra en la posición de las milésimas y 2 en la posición de las centésimas. Observar la tabla 2:

Tabla 2. Posición decimal de 0.020

0	0	.	0	2	0
Cero decenas	Cero unidades	Punto decimal	Décimos	Dos centésimos	Cero milésimos
Decenas	Unidades	Punto decimal	Décimos	Centésimos	Milésimos

De este modo, 20 milésimo, equivale a decir 2 centésimos. Por lo que $\frac{2}{100}$ y $\frac{20}{1000}$, son fracciones equivalentes.

¿Podrías mostrar por qué son fracciones equivalentes?

Al descomponer 20 en factores primos, se tiene; $2 \times 2 \times 5 = 20$, además $2 \times 10 = 20$, de forma análoga, 1000 se expresa como el producto de 100×10. De este modo, la fracción se reescribe como:

$$\frac{20}{1000} = \frac{2 \times 10}{100 \times 10} = \frac{2}{100} \times \frac{10}{10} = \frac{2}{100}$$

En consecuencia $\frac{2}{100} = \frac{20}{1000}$

Argumenta

En toda expresión decimal, de la forma 0.020, el 0 a la derecha del número 2, no es significativo, además, se reconoce que para toda notación decimal, se puede escribir infinitos ceros a la derecha de cualquier número distinto de cero, y la expresión no varía, ejemplo:

0.004= 0.0040000= 0.00400000…

La acción de aumentar ceros a la derecha, facilita la ejecución de operaciones de sumas y restas de números decimales que tienen diferentes números de cifras decimales.

¿Crees que las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{25}{20}$ son fracciones decimales?

Al observar los denominadores de las fracciones se identifica que estas no poseen denominador con potencia 10. ¿Qué harías para que las fracciones tengan potencias de base 10?

Observar la expresión $\frac{1}{2}$, si multiplicas numerador y denominador por la constante 5, obtienes:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

En consecuencia, $\frac{1}{2}$, se indica en notación decimal como 0.5.

Si en lugar de multiplicar el numerador y denominador de $\frac{1}{2}$, por 5, este fuese multiplicado por 50, se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 50}{2 \times 50} = \frac{50}{100}$$

Donde, 0 corresponde a la posición de las centésimas y 5 en las décimas; la expresión decimal resultante es 0.50, además 0.5 =0.50.

De forma análoga, puedes deducir la representación decimal de $\frac{3}{5}$ y $\frac{25}{20}$.

Solución

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$

$\frac{25}{20} = \frac{25 \times 5}{20 \times 5} = \frac{125}{100}$

6 forma parte de las décimas.

5 forma parte de las centésimas, 2 de las décimas y 1 se ubica a la izquierda del punto decimal:

1.25.

¿Qué hace que las fracciones anteriores tengan un número de decimales exactos?

¿Qué características observas en las fracciones?

Analizar los denominadores de las fracciones. ¿Qué relación existe entre los denominadores y la potencia de base 10?

Solución: 2, 5 y 20, son divisores exactos de 100, en consecuencia, lo serán de 1000 y de toda expresión de la forma 10^n, con $n \in \mathbb{N}$.

PRÁCTICA

Convierte la fracción decimal $\frac{45}{250}$ a número decimal.

Tomar el denominador (250), y determinar el número que se debe multiplicar para obtener una potencia de base 10. La potencia de base 10 más cercana a 250 es 1000, que se obtiene al multiplicar 250×4, por lo que, el numerador y el denominador de la fracción tendrán que multiplicarse por 4.

$$\frac{45}{250} = \frac{45 \times 4}{250 \times 4} = \frac{180}{1000}$$

La expresión decimal corresponde a ciento ochenta milésimos, observa la tabla 3, para orientar la ubicación de las cifras decimales:

Tabla 3. Ciento ochenta milésimos

0	0	.	1	8	0
Decenas	Unidades	Punto decimal	Décimos	Centésimos	Milésimos

En consecuencia: $\frac{180}{1000} = 0.180$ o $\frac{18}{100} = 0.18$.

Resuelve

1. Observa que las fracciones $\frac{180}{1000} = \frac{18}{100}$, ¿mencionar por qué son equivalentes?
2. Utiliza tu ingenio y formula una estrategia que te permita convertir un número decimal a fracción decimal. Simplificar las fracciones si es necesario.
3. Formular y argumentar un proceso que permita identificar si las expresiones: 0.025; $\frac{25}{1000}$; $\frac{1}{40}$ y $\frac{2500}{100000}$, son equivalentes.
4. Verifica la siguiente igualdad: $1.4144 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000}$. Convierte las fracciones decimales a notación decimal y efectúa la suma. Argumenta tu respuesta.

Para la siguiente etapa, considera las fracciones de la forma: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{30}$ ¿es posible expresarlas con denominador de potencia base 10? Discute y argumenta tu respuesta.

En la fracción $\frac{1}{3}$, el denominador (3), no es divisor de 10 ni de 100, en consecuencia, de ninguna potencia de base 10 de la forma 10^n, por lo que no se considera fracción decimal.

Con ayuda de la calculadora, expresa 1/3 en notación decimal.

¿Qué observas?

$\frac{1}{3}$=0.3333333333333333333…

La expresión decimal correspondiente a la fracción $\frac{1}{3}$, describe un periodo infinito con el número 3. Por ello se les llama decimales infinitos periódicos. La unión de los números decimales exactos, producto de fracciones decimales y las expresiones decimales infinitas periódicas, forman el conjunto de los números racionales.

Resuelve

Considera las siguientes fracciones decimales e identifica aquellas que poseen decimal infinito periódico y las que tienen cifras decimales exactas.

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{30}{45}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{97}{30}, \quad \frac{45}{250}$$

¿Qué criterio utilizarías para identificar los decimales exactos?

¿Cómo identificarías las fracciones decimales que muestran decimales infinitos periódicos?

¿Escribe 10 fracciones que muestren periodos en sus infinitas cifras decimales?

Es necesario mostrar que también hay expresiones decimales que no corresponden a los números racionales y que son aquellas cuya parte decimal es infinita y no periódica.

Identificar los números que pueden convertirse a fracciones, mediante el análisis de sus cifras decimales, identifica el periodo, en caso de que este exista.

34. 09343434343434…	0,193650278443757…	1.618033988749…
2.4554455445544554…	0,101001000100001…	
3.141592653589793…	2.718281828459045…	

De las expresiones decimales anteriores ¿cuántas poseen periodo definido?

Las expresiones decimales infinitas periódicas pueden expresarse mediante fracciones; si la expresión decimal no posee periodo definido, la expresión con fracciones resulta imposible.

A las expresiones decimales que no pueden representarse de la forma $\frac{a}{b}$, se les llama irracionales. Los números irracionales se indican de forma aproximada mediante una expresión con punto decimal.

Actividad 3. Los números irracionales.

Para contextualizar la actividad, narrar el relato histórico de los números irracionales, mencionando a los pitagóricos y mostrar cómo surge el primer número irracional al aplicar el teorema de Pitágoras en cuadrados de lado 1. A continuación plantea la situación que se describe en las siguientes líneas.

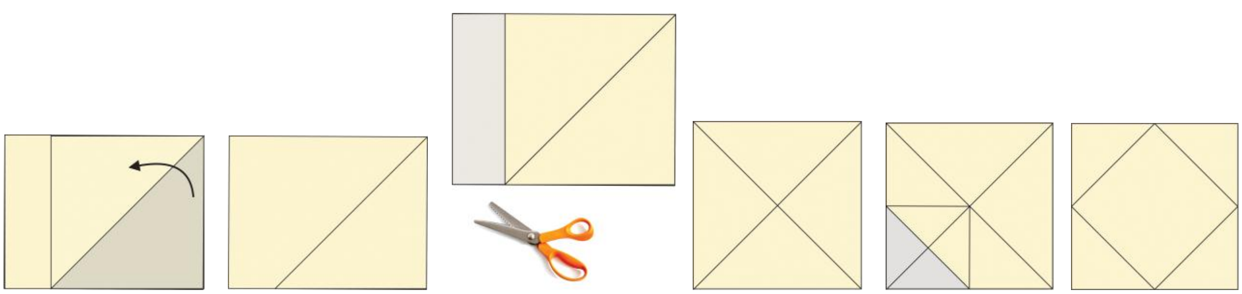
Matemática con recortes y dobleces

Objetivo: Condicionar situaciones de aprendizaje, donde el estudiante utilice aritmética, algebra y geometría para identificar relaciones entre figuras geométricas y los números irracionales.

Materiales
Una página de papel tamaño carta por estudiante.
Tijeras.
Marcador o bolígrafo.

Indicaciones
Entregar a cada estudiante una página de papel tamaño carta, y preguntarles:
¿Qué crees que llevó a que Hipasus dedujera la irracionalidad? ¿Crees que tal irracionalidad fue aceptada en su época?
Mencionar que gracias al descubrimiento de la irracionalidad de algunos números, es posible interpretar algunas situaciones cotidianas, como el ejemplo que se detalla a continuación.
Antes, describir el siguiente proceso:

1. Con la página de papel, formar el máximo cuadrado posible. Preguntar a los estudiantes cómo cumplirían esta indicación. (observar Figuras 6a, 6b).
2. Recortar el papel sobrante, formando un cuadrado. (Figuras 6c, 6d).
3. Trazar la diagonal restante del cuadrado. (Figura 6d).
4. Tomar los vértices del cuadrado y doblarlos haciendo que coincidan con el punto de intersección de las dos diagonales (Figura 6e).
5. Desdoblar y observar la figura resultante, esta será la herramienta de la que se obtendrá la información necesaria para resolver problemas (Figura 6f).



a b c d e f

Figura 6. Proceso de construcción.

Invitar al grupo de estudiantes a descubrir la relación que existe entre el cuadrado exterior y el cuadrado interior. Para facilitar la interpretación, posicionar en la pizarra una ilustración similar a la que se muestra en la Figura 7.

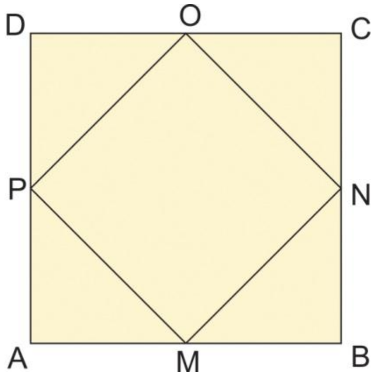


Figura 7. Cuadrado inscrito.

Permitir que el estudiantado analice la ilustración y comience a formular estrategias para responder la pregunta. Si después de unos momentos no hay propuestas, brindar la orientación necesaria.

Propuestas de solución

1. Método algebraico.
   Después de analizar la figura, enunciar los elementos que se conocen de ella y los que no se conocen.

- El cuadrilátero ABCD es cuadrado, por lo que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, según definición de cuadrado.
- Los puntos M, N, O y P, son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente.

  ¿La información será suficiente para señalar que MNOP es cuadrado también? ¿Qué se necesita para afirmar tal proposición?

  Y la pregunta clave ¿Qué relación existe entre la figura ABCD y la figura MNOP.

Para responder las preguntas es necesario agregar a la figura elementos auxiliares. Dado que $\overline{AB}$=$\overline{BC}$=$\overline{CD}$=$\overline{DA}$, se puede llamar a cada lado mediante una variable algebraica. De este modo, se designa la variable n para indicar la longitud de uno de sus lados.

Si $\overline{AB} = n$; ¿Cuánto mide $\overline{MB}$?

Recordar que M es punto medio de $\overline{AB}$, por lo que $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\overline{AB} = 2\overline{MB}$ es decir, $\overline{MB}$ es la mitad de $\overline{AB}$. Ahora bien, si $\overline{AB} = n$, esto implica que $\overline{MB} = \frac{n}{2}$.

De forma análoga se prosigue con el segmento $\overline{BC}$ y $\overline{BN}$, donde se deduce que $\overline{BN} = \frac{n}{2}$.

El trabajo desarrollado hasta este momento se refleja en la figura 7a.

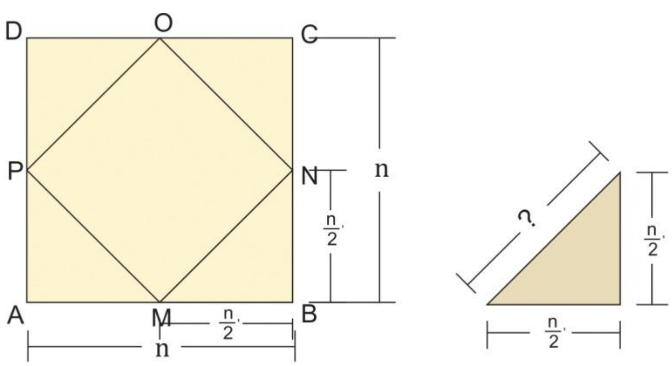


Figura 7a. superficie del cuadrado inscrito en ABCD.

Extrayendo el triángulo $\triangle MBN$, se asegura que este es triángulo rectángulo, por lo que cumple las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Pitágoras en él. Este queda indicado de la forma siguiente:

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

Resolviendo la expresión anterior, se describe el siguiente proceso:

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4}} \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{n^2 + n^2}{4}}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{2n^2}{4}} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Luego, es necesario simplificar la expresión aplicando propiedades de los radicales.

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{2n^2}{4}} = \frac{\sqrt{2n^2}}{\sqrt{4}} \qquad \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{n^2}}{\sqrt{4}} \qquad \sqrt{pq} = \sqrt{p}\sqrt{q}$$

Extraer raíz cuadrada a los cuadrados perfectos.

$$\overline{MN} = \frac{n}{2}\sqrt{2}$$

Si se efectúa el proceso anterior para determinar la diagonal de los triángulos $\varDelta NCO$, $\varDelta ODP$, $\varDelta PAM$. ¿Qué resultado se obtiene?

En efecto, la longitud de las diagonales $\overline{NO}$, $\overline{PO}$, $\overline{PM}$, coincide con $\overline{MN}$, por lo que: $\overline{MN}$=$\overline{NO}$=$\overline{OP}$=$\overline{PM}$ y MNOP es un cuadrado.

Hasta este momento se ha demostrado que la figura inscrita es un cuadrado. Pero, ¿qué relación tienen?

Posiblemente sea que ambos son cuadrados.

¿Podría existir otra relación?

¿Será la longitud de sus lados?

¿O la superficie? En efecto, se podría plantear la pregunta ¿Qué relación existe entre las superficies del cuadrado inscrito MNOP y el cuadrado ABCD?

Para responder se debe determinar la superficie de las figuras mediante la fórmula del área de un cuadrado.

Recordar que: $A = l \cdot l$ o $A = l^2$

Iniciar el cálculo con el cuadrado ABCD, puesto que $\overline{AB} = n$ y $\overline{BC} = n$.

$$A_1 = n \cdot n$$
$$A_1 = n^2$$

Ahora con el cuadrilátero MNOP, si $MN = \frac{n}{2}\sqrt{2}$, y $NO = \frac{n}{2}\sqrt{2}$, la superficie se determina de la forma siguiente:

$$A_2 = \left(\frac{n}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{n}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$A_2 = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)(\sqrt{2})(\sqrt{2})$$

El orden de los factores no altera el producto.

$$A_2 = \frac{n^2}{4}(2) \qquad \sqrt{p}\sqrt{p} = \left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 = p$$

Simplificando la expresión. Se obtiene:

$$A_2 = \frac{n^2}{2}$$

Se tienen los siguientes resultados:

$A_1 = n^2$; $A_2 = \frac{n^2}{2}$.

¿Qué relación existe entre las superficies?

- La superficie del cuadrado mayor (ABCD) es el doble del cuadrado inscrito (MNOP).
- La superficie del cuadrado MNOP es la mitad de la superficie del cuadrado ABCD.

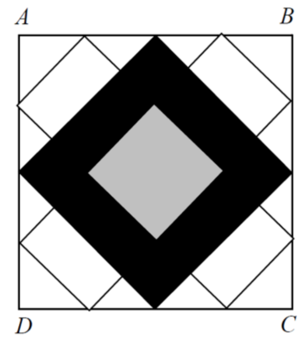
2. Método aritmético.

   El método aritmético se realiza de forma análoga al algebraico, la diferencia reside en que la longitud de los lados del cuadrado estará determinada por un número entero cualquiera, del cual se deduce la relación entre el cuadrado ABCD y el cuadrado MNOP.

Mostrar al estudiantado el algoritmo de Newton para determinar cifras decimales de $\sqrt{2}$, y proponer solución para $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

GUÍA DE PROBLEMAS

Problema 1



Sea $ABCD$ un cuadrado de 20 cm de lado. Se sabe que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ están divididos en cuatro partes iguales.

a) Comprobar que el perímetro del cuadrado negro es el doble del perímetro del cuadrado gris.

b) El valor que representa el perímetro de cada uno de los cuadrados, ¿Es un número natural? ¿Es irracional?

Resuelve

Utiliza el teorema de Pitágoras para identificar las longitudes de los catetos, procurando que la hipotenusa tenga un valor equivalente a:

$$\sqrt{3}, \qquad \sqrt{7}, \quad \sqrt{15}$$

Mediante el binomio de Newton, aproxima los radicales anteriores mediante notación decimal.

Investiga

Argumenta por qué son necesarios los números irracionales e investiga los números irracionales que son identificables en la actividad cotidiana del ser humano.

Analiza aspectos históricos que influyen a que el hombre defina el conjunto de los números irracionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Dunham W. (1993), *Viaje a través de los genios*. Editorial Pirámide.
2. Kline M. (1992), *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Editorial Alianza.
3. Flores Gil F. (2001), *Historia y Didáctica de los números racionales e irracionales*, Ittakus.
4. Núñez Cabello R. (2007), *Números racionales e introducción de los números irracionales*, Ittakus.
5. Demostración del binomio de Newton. Tomado de: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html

Lección 2 8° grado Unidad 1 Tiempo: 12 horas clase

Números Irracionales relevantes

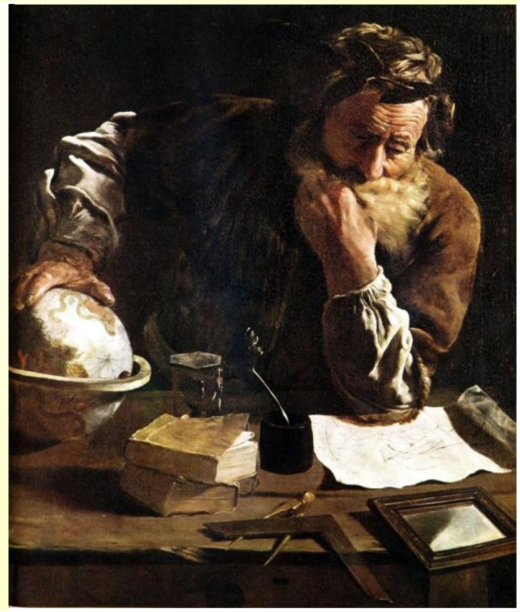


Figura 1. **Arquímedes pensativo.** Óleo sobre tela, del pintor Domenico Fetti (1620). Arquímedes es considerado uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad, dio una aproximación extremadamente precisa del número π.

Introducción del tema

Los antecedentes históricos narran la utilidad de los números irracionales en diversos ámbitos: arquitectura, escultura, arte, medición de superficies circulares, identificación de crecimientos poblacionales, economía, astronomía, y el análisis de la catenaria descrita por una cuerda de densidad constante que tiene sus extremos en dos puntos fijos.

Los números irracionales cuya aplicabilidad es evidente en actividades humanas, y que además, se identifican en la naturaleza, son comúnmente nombrados **números irracionales relevantes**, entre ellos se listan, el número pi (π), el número áureo (Φ), también conocido como número de oro y el número e, cuyo símbolo fue utilizado inicialmente en las tablas de logaritmos de Napier y la aproximación decimal de e fue estimada por Bernoulli, pero la notación matemática que demostró la existencia de e como número irracional, se debe principalmente a Leonhard Euler.

En esta lección se estudian aspectos históricos que orientan al estudiantado a interpretar el algoritmo empleado para estimar aproximaciones decimales de los números irracionales, así también, discutir la aplicabilidad de estos en la resolución de problemas.

Competencias por fortalecer

- Saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, resolver y enfrentarse a problemas.

Objetivos

- Interpretar relatos históricos que describen el descubrimiento de π, Φ y **e**.
- Analizar la importancia de los números irracionales y su representatividad en el entorno.
- Generar aproximaciones decimales de los números irracionales mediante sucesiones de Cauchy y el binomio de Newton.

Presaberes

NÚMEROS IRRACIONALES RELEVANTES (EL NÚMERO π)

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Números decimales exactos

Tienen un número definido de cifras decimales. Expresiones de la forma, 0.45; 4.89; 4.9098; etc., cuyas cifras decimales son cuantificables, pueden expresarse en notación fraccionaria de la forma $\frac{a}{b}$, con $a\ y\ b\ \in\ \mathbb{Z}^9\quad y\quad b \neq 0$.

Números decimales infinitos periódicos

Son expresiones decimales que poseen infinitas cifras que presentan una o varias cifras que se repiten periódicamente en toda su expansión. Para indicar la cifra o cifras que se repiten se ubica sobre esta una línea horizontal, ejemplo: $0.\overline{3}$, indica que 3 es el periodo, por lo que, la expansión decimal es 1.33333333…

Números decimales infinitos no periódicos

Si un número decimal no presenta un periodo definido en toda su expansión, este no puede expresarse en forma de fracción, en consecuencia, no pertenece a los números racionales, por lo que se conoce como *irracional.*

Tradicionalmente, el número pi (π) se define como el cociente entre la longitud L de una circunferencia y su diámetro D, por lo que se denota con la letra griega π, que se encuentra en la palabra $\underline{\pi\,\varepsilon\,\rho\,\iota\,\mu\,\varepsilon\,\tau\,\rho o}$ que significa perímetro. La notación π fue otorgada por William Jones y popularizada en 1737 por ***Leonhard Euler.***

El valor de π, se evidencia desde civilizaciones antiguas, quienes emprendieron un viaje incansable hacia la determinación de los decimales de π.

El primer valor asignado a π se le atribuye a los babilonios quienes aproximaron la longitud L de una circunferencia mediante 6r que es el perímetro del hexágono regular inscrito, de esta relación se tiene que:

$$6r = 2\pi r$$

Si la expresión se divide entre $2r$ en ambos extremos de la igualdad y luego se efectúan las operaciones indicadas, se obtiene el resultado:

$$\frac{6r}{2r} = \frac{2\pi r}{2r}$$
$$3 = \pi$$

Esta primera aproximación, no hace referencia a la irracionalidad de π, y fue considerada verdadera por miles de años, hasta que llegó a manos de Arquímedes, quien determinó una aproximación más exacta de π. Para lograr tal hazaña, el plan de ataque de Arquímedes fue utilizar polígonos regulares inscritos[10] y circunscritos[11], considerando como elemento clave los perímetros de estos. Arquímedes sabía perfectamente que cada lado del hexágono era igual al radio, de longitud r, del círculo. Por consiguiente,

$$\pi = \frac{\text{perímetro del círculo}}{\text{diámetro del círculo}}$$

Por lo que,

$$\pi > \frac{\text{perímetro del hexágono}}{\text{diámetro del círculo}} = \frac{6r}{2r} = 3$$

Obteniendo así, el mismo resultado conocido por los babilonios años atrás.

9. El conjunto de números enteros es integrado por los números naturales, también llamados enteros positivos, unidos con los enteros negativos incluyendo el cero. Cero es el único número que no tiene signo.
$\mathbb{Z} = (\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$
10. Polígono dibujado dentro de un círculo, siendo cada vértice del polígono tangente del círculo.
11. Polígono dibujado fuera de un círculo, siendo cada lado del polígono tangente del círculo.

A continuación, duplicó el número de lados de su polígono inscrito para obtener un dodecágono cuyo perímetro debía calcular. A partir de aquí, Arquímedes siguió dividiendo por la mitad todos los lados del dodecágono para obtener un polígono regular de 24 lados, luego, de 48 y finalmente, uno de 96. De forma similar circunscribió polígonos a un círculo de radio r (Figura 2).
Todos estos esfuerzos entregan como resultado la siguiente aproximación de pi.

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}$$

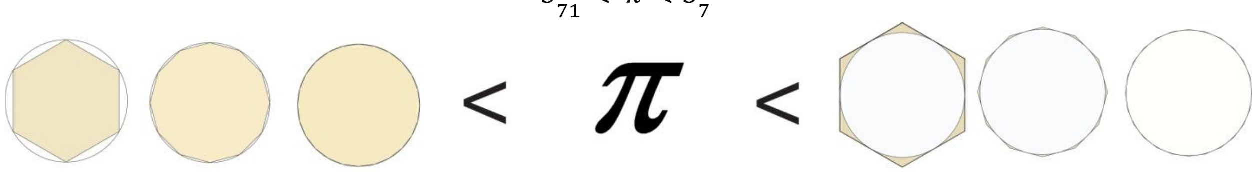


Figura 2. Aproximación de π, mediante el método de Arquímedes.

ESTIMACIÓN DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Consideremos un polígono regular N_1 inscrito en una circunferencia C y nombremos P_1 a su perímetro (Figura 3). Construir otro polígono regular N_2, inscrito en C, pero con el doble de lados que N_2, y llamemos P_2 a su perímetro; entonces, para P_1 y P_2 se cumple que $P_1 < P_2$.
Si se continúa construyendo polígonos inscritos a la circunferencia C, duplicando el número de sus lados indefinidamente, los perímetros serán cada vez mayores y más cercanos a la medida del perímetro de la circunferencia.
$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < \cdots < P_n < \cdots < 2\pi r$
(Longitud de la circunferencia).

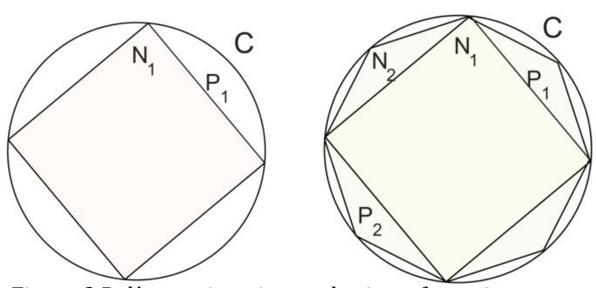


Figura 3. Polígonos inscritos en la circunferencia.

De forma análoga, consideremos un polígono regular M_1 circunscrito a la circunferencia C y nombremos P_1 a su perímetro. Siguiendo con el proceso, construyamos otro polígono regular M_2, circunscrito a C pero con el doble de lados que M_1, llamemos P_2al perímetro de M_2 (Figura 4). En consecuencia, se cumple que $P_1 > P_2$. Si duplicamos indefinidamente el número de lados, los perímetros de los polígonos obtenidos serán cada vez menores y más cercanos a la medida del perímetro de la circunferencia.

$P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > \cdots > P_n > \cdots > 2\pi r$
(Longitud de la circunferencia).

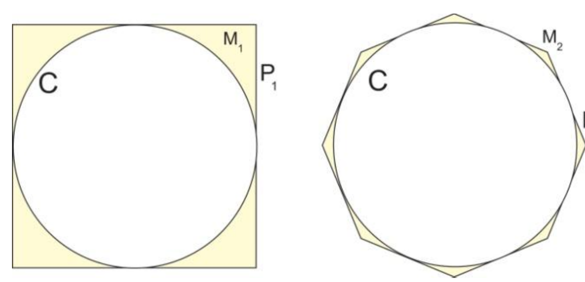


Figura 4. Polígonos circunscritos en la circunferencia.

Calculando los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos, se nota que se aproximan a un mismo valor L. Estos perímetros son valores aproximados de L (figura 5).

Figura 5. Aproximación de la longitud de una circunferencia.

APROXIMACIÓN DECIMAL DE π

Han sido muchos los esfuerzos por determinar la mayor cantidad posible de decimales para el irracional π.

La búsqueda de algoritmos que faciliten este arduo trabajo, guió al matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540-1610) a dedicar toda su vida para obtener 35 cifras decimales, siendo superado cuatro siglos después por el matemático inglés William Shanks, quién dedicó 20 años de su vida calculando decimales de π, consiguiendo 707 cifras decimales, de los cuales, solo eran correctas 527 cifras.

El error fue descubierto 63 años más tarde. Con los avances tecnológicos e informáticos, fue posible encontrar cada vez más cifras decimales, de tal forma que para el año 1997, Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi obtuvieron $51{,}539_1600{,}000$ cifras con 1,024 procesadores. Actualmente se conocen cerca de 5 trillones de cifras decimales.

La sucesión de Cauchy, cuya suma de infinitos elementos, permite acercarse a π, es de la forma: $4\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. De tal forma que π se indica mediante la sumatoria de todos los términos de la sucesión, que se indica mediante la expresión:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

Actividad 1. Utilicemos el número π.

Objetivo: Analizar situaciones problemáticas en las que se involucre el uso de aproximaciones del numero π.

Materiales

- Ilustración de odómetro.
- Marcador, lápiz y lapicero.

El número pi, aplicado en las tecnologías de automóviles

Iniciar la actividad preguntando a los estudiantes ¿qué uso se le puede dar al irracional π?

Dentro de las posibles respuestas, se pueden mencionar, medición de áreas, mediante el perímetro de un círculo se puede determinar el espacio que este recorre al rodar. De igual forma, se puede determinar la cantidad de revoluciones necesarias para recorrer ciertas distancias.

¿Dónde o en qué utilizarías esta cualidad?

Esta cualidad es útil para determinar la distancia que recorre un automóvil, para tal propósito fue inventado un instrumento tecnológico llamado odómetro.

La palabra odómetro, proviene del griego hódos que significa camino y metrón que significa medida, es un dispositivo que indica la distancia recorrida en un viaje por un vehículo.

¿Cómo funciona el odómetro?

Para responder esta pregunta considere la resolución del siguiente problema:

Cuántas revoluciones

El odómetro de la Figura 6, muestra el total de metros recorridos por un automóvil. ¿Puede determinar el número de revoluciones de la rueda trasera del auto para recorrer tal distancia, si esta mide 50 cm de diámetro? ¿Y si mide 60? ¿70?

Figura 6. Odómetro.

Es necesario orientar la resolución del problema, elaborando preguntas que orienten al estudiante y permitan que este razone y proponga estrategias de resolución.

¿Qué distancia ha recorrido el automóvil?

En la imagen se observa que la distancia total corresponde a 151, 517 metros.

¿Tenemos más información?

¿Cuánto mide el diámetro de la rueda trasera del automóvil?

Considere que es posible determinar el perímetro de la rueda trasera, para lo cual, es necesario recordar la fórmula matemática que relaciona la medida del diámetro y el irracional pi, además permite deducir la longitud o perímetro de la circunferencia:

$$P = 2\pi r$$

En la fórmula se relaciona radio y π, el diámetro de la circunferencia es dos veces el radio de esta, por lo que:

$$2\pi r = D\pi$$
$$P = D\pi$$

Con este resultado es posible determinar el perímetro de la rueda conociendo su diámetro.

Si la rueda mide 50 cm de diámetro, se tiene:

$P_1 = 50\pi = 157.07963267 \ldots$ cm

Utilizar una aproximación hasta la quinta cifra decimal.

$P_1 = 157.07963$

Analizando este resultado, se argumenta que la rueda de 50 cm de diámetro, recorre en cada revolución 157 cm aproximadamente. Pero, ¿Cuántas revoluciones hará en 151,517 km?

¿Qué estrategia seguirías para conseguir el resultado?

Si en una revolución, recorre 157.07963 cm aproximadamente, en dos revoluciones tendrá que recorrer el doble de distancia, y así sucesivamente hasta completar los 151,517 m.

¿Qué operación plantearía?

Si se divide la distancia total recorrida entre la distancia de cada revolución, ¿podrá hacer este proceso de forma inmediata? No, pues, la primera longitud está dada en metros y la segunda en centímetros.

¿Qué podría hacer para solventar la situación?

Al convertir 151,517 metros a centímetros, Por algoritmo de regla de tres simple se tiene:

Si 1 m equivale a 100 cm entonces ¿a cuánto equivale 151,517 m?

$$1\ m \Leftrightarrow 100\ cm$$
$$151{,}517\ m \Rightarrow n$$

Por lo que:

$$n = \frac{151{,}517\ m \cdot 100\ cm}{1\ m}$$
$$n = 15_{1}151{,}700\ cm$$

Ahora que se ha solventado el problema de las magnitudes, se prosigue con la idea principal de dividir la distancia total recorrida entre la distancia recorrida por revolución:

$$\#\ de\ revoluciones = \frac{15_1 151{,}700\ cm}{157.07963\ cm}$$

$$\#\ de\ revoluciones = 96{,}458.719695\ldots$$

Por lo que, la rueda de 50 cm de diámetro necesita poco menos de noventa y seis mil cuatrocientos cincuenta y nueve revoluciones para recorrer la distancia indicada.

Resolver de forma análoga las preguntas restantes.

EL RECTÁNGULO ÁUREO

¿Imagínese que hubiera un número que dominara la naturaleza? ¿Alguna vez ha pensado en algún patrón matemático por el cuál se rigiesen la música, las creaciones de los pintores, las construcciones de edificios, la dinámica de los agujeros negros, la estructura microscópica de algunos cristales y muchas cosas más? Ese patrón, ese número, es el *Número de Oro, Áureo o simplemente fi,* conocido por muchos como la *divina proporción.* Cuando hablamos de la belleza de la matemática, podemos referirnos a la belleza artística que posee un rectángulo en particular, este rectángulo es llamado rectángulo áureo.

El rectángulo de oro, debe su belleza al número áureo, también conocido como número de oro, que se representa mediante la letra griega Φ (phi) en honor al escultor griego Fidias, maestro de las proporciones. El número Φ resulta de dividir el largo sobre el ancho del rectángulo. La importancia de este número se debe a que es común identificarlo en la naturaleza (plantas y animales) en pinturas, esculturas, y en construcciones arquitectónicas de gran estética. Algunos ejemplos son: el Partenón de Atenas, La Gioconda de Leonardo da Vinci, Semitaza gigante volando de Salvador Dalí. (Figura 7).

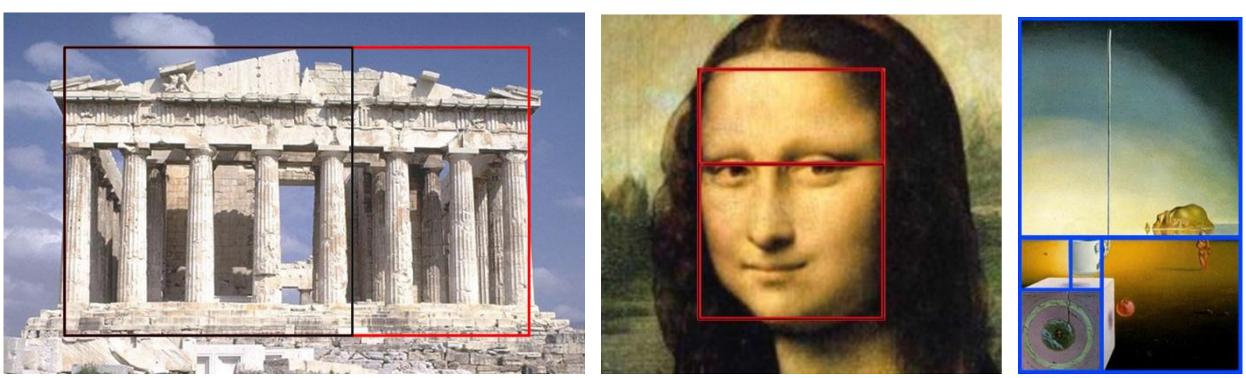


Figura 7. Rectángulo de oro.

Actividad 2. Construcción del rectángulo de oro.

Objetivo: incentivar al estudiantado a construir el rectángulo de oro y definir el irracional Φ.

Materiales

- Páginas de papel cuadriculado.
- Cartel cuadriculado.
- Lápiz, lapicero y marcador.
- Compás.
- Regla graduada en milímetros y centímetros.

Construcción del rectángulo de oro

Indicar al estudiantado que dibuje en el papel cuadriculado un cuadrado con dimensiones de 1 dm de lado. Hacer el mismo dibujo en el cartel cuadriculado (Figura 13 a).

Nombrar los vértices con las letras A, B, C y D.

En el segmento AB, identificar el punto medio M. Unir mediante un segmento, el punto medio M y el vértice C.

Con el compás, hacer centro en el punto medio M y hacer coincidir el otro extremo con el vértice C. Marcar una semicircunferencia con radio MC haciendo que se intercepte con la prolongación del segmento AB. Llamar a este punto, P (Figura 13 b).

Completar el rectángulo APQD.

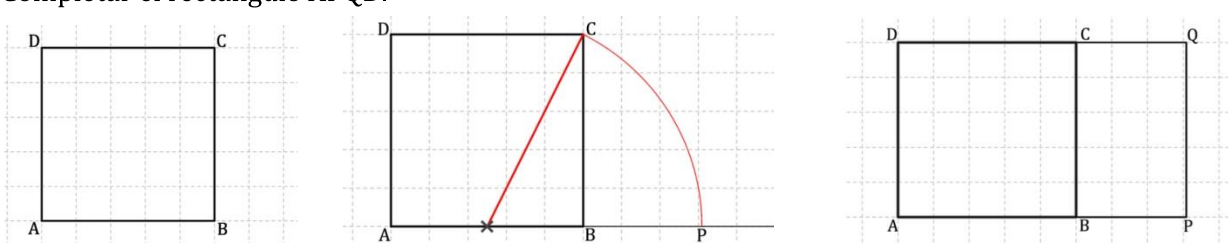


Figura 8. Construcción del rectángulo áureo.

En el rectángulo APQD, el cociente de dividir AP y PQ, es el número áureo Φ.

Identificar el número áureo

En la ilustración del rectángulo áureo se identifican dos longitudes, La base $\overline{AP}$ y la altura $\overline{PQ}$, además, la razón de $\overline{AP}$ y $\overline{PQ} = \Phi$, si $\overline{PQ} = 1$, entonces $\overline{AP} = \Phi$.

$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AM} + \overline{MP} = \Phi$

A continuación se ejemplifica un proceso que pretende deducir el valor de Φ. Se recomienda recordar el proceso que se empleó para construir el rectángulo.

1. El primer paso fue construir un cuadrado de lado igual a 1 dm (10 cm). Por lo que: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1\ dm$.
2. Marcar el punto medio de $\overline{AB}$, llamar a este punto M. Si $\overline{AB} = 1$, entonces: $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{1}{2}$.
3. Unir el punto M con el vértice C. El segmento $\overline{MC}$ es radio de la circunferencia que pasa por C y corta la prolongación de $\overline{AB}$ en el punto P. (Figura 14).

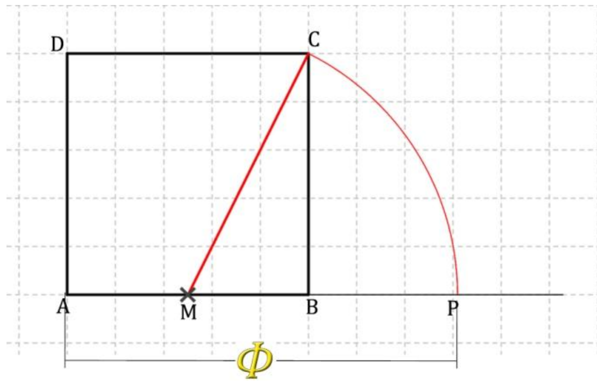


Figura 9. Número áureo.

¿Cuál es la longitud de $\overline{MC}$?

$\overline{MC}$ es uno de los lados del triángulo rectángulo ΔMBC, para determinar la longitud de MC, es necesario aplicar el teorema de Pitágoras.

Para la fórmula: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; se tiene que $a = \overline{MB} = \frac{1}{2}$ $\quad b = \overline{BC} = 1 \quad$ y $\quad d = \overline{MC}$

Sustituyendo a y b en la fórmula del teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\overline{MC} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

Desarrollando las potencias:

$$\overline{MC} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1+4}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Aplicando propiedades de radicales:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Resolviendo la pregunta, se identifica la longitud de $\overline{MC}$ y en consecuencia la longitud $\overline{MP}$.

¿Por qué?

Dado que $\overline{MC}$ es radio de la circunferencia con centro en M, $\overline{MP}$ también será radio de la misma circunferencia, por lo que:

$\overline{MC} = \overline{MP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Volviendo a la condición inicial que asegura que $\overline{AP} = \Phi$, es necesario considerar que:

$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AM} + \overline{MP}$

Si $\overline{AM} = \frac{1}{2}$ y $\overline{MP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, entonces:

$$AP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AP = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En consecuencia:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Aproximación decimal de Φ.

$\Phi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$

EL NÚMERO e

El símbolo e fue utilizado por primera vez en matemática en 1618, en un apéndice del trabajo de Napier sobre logaritmos, en la tabla aparecían logaritmos naturales de varios números; sin embargo, no se reconoció que estos fueran logaritmos de base e. La primera aproximación decimal de e, fue en 1683, cuando Jacobo Bernouilli examinó el problema del interés compuesto y durante su análisis se enfrentó con la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para la cual trató de encontrar el valor numérico al que se acerca la expresión cuando n tiende a cantidades cada vez mayores.

Utilizó el teorema del binomio de Newton, para asegurarse que el valor se encuentra entre los enteros 2 y 3. La situación que planteó Bernouilli, es utilizada en la actualidad para determinar el comportamiento de capital depositado con tasas de intereses fijas en periodos de tiempo, además describe todo tipo de crecimiento poblacional.

El reconocimiento de e como número irracional se debe a la notación matemática actual que brindó Euler, la notación e aparece por primera vez en una carta que escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a e en los años siguientes, pero no fue sino hasta 1748, con la publicación de *Introductio in Analysin infinitorum*[11], donde Euler dio un tratamiento completo a las ideas que se tenían de e. En dicha publicación demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Además, retomó la expresión de Bernouilli y demostró que el resultado de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para n con tendencia al infinito, converge en el número irracional e, cuya aproximación es: $e = 2.718281828459045235$

¿Dónde encuentro el número e?

Observar las ilustraciones que se muestran en la Figura 10, en ella se muestran diversas aplicaciones del número e desde la curva formada por los cables de tendido eléctrico, cuya constante corresponde a e. En consecuencia, será aplicado a toda curva que surja como producto de colgar un cable o hilo (flexible o no flexible) entre dos puntos distintos. A esta curva se le conoce con el nombre de *catenaria*[13]. Además, se evidencia una fuerte influencia en procesos bancarios y el crecimiento exponencial de poblaciones.

12. **Introductio in analysin infinitorum (Introducción al Análisis del Infinito)** es una obra en dos volúmenes por Leonhard Euler, que establece las bases del análisis matemático. Publicado en 1748, la Introductio contiene 18 capítulos en la primera parte y 22 capítulos en la segunda.
13. La catenaria es la curva cuya forma es la que adopta una cuerda de densidad uniforme sujeta por sus dos extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. En sentido estricto, no es una curva, sino una familia de curvas, cada una de las cuales está determinada por las coordenadas de sus extremos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y por su longitud L.

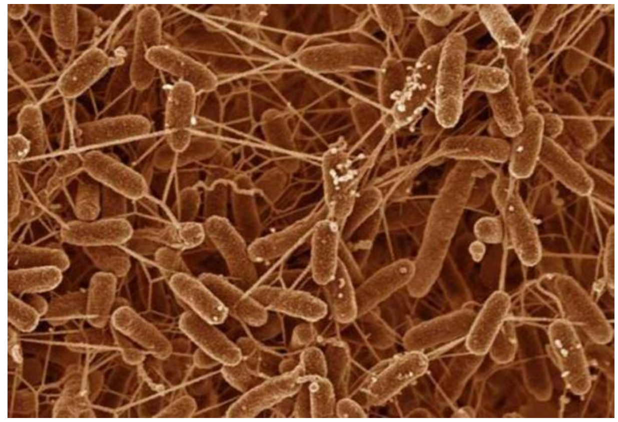



Figura 10. El número e en nuestro entorno, en las catenarias de los cables de tendido eléctrico, y en biología mediante el estudio de crecimientos en el cultivo de bacterias.

Actividad 3. Aproximación decimal de e.

Objetivo: Estimar la aproximación decimal de e aplicando el algoritmo de Bernouilli para determinar intereses compuestos.

Indicaciones

Preguntar al estudiantado y dar una breve explicación a las siguientes interrogantes: ¿Conoces a qué se refiere la palabra interés, en economía? ¿Qué indica un interés del 12%? Si depositas en el banco US$ 20, y le es aplicado el interés de 5%, al cabo de un año ¿cuánto dinero tienes? Si el interés fuese de 10% ¿cuánto tendrías al cabo de un año?

Lee el siguiente enunciado y completa la síguiente tabla.

Si invierto en un banco la cantidad inicial de US$ 100 con un interés del 5% capitalizable al cabo de un año ¿cuánto dinero tendré? (Tabla 1).

Tabla 1. Interés simple

Monto inicial	Interés (5%)	Cantidad al final del año (monto inicial+interés)
US$ 100	$100 \times 0.05 = 5$	US$ 105

La tasa de interés al 5% indica que de cada 100 unidades se tomaran 5; de este modo, si el monto inicial corresponde a 100, este será dividido en 100 partes iguales, cada una de estas partes es 1, por lo que, si se toman 5 de ellas, se tienen 5 partes iguales correspondientes a 5 US$.

Otra forma de realizar el cálculo es, recordando que la expresión 5%, expresa la fracción decimal $\frac{5}{100}$, para convertir esta fracción a notación decimal, se identifica que el número 5 corresponde a la posición de las centésimas, y en la posicion de las décimas se ubica cero, por lo que: $\frac{5}{100} = 0.05$.

A continuación el monto inicial se multiplica por el interés aplicado, resulta: $100 \times 0.05 = 5$.

En la casilla de la derecha, se ubica la cantidad de dinero final que se tiene al cabo de un año, lo que indica que, al monto inicial (US$ 100) se agrega el interés acumulado durante el año (US$ 5), en consecuencia: $\text{US\$ } 100 + \text{US\$ } 5 = \text{ US\$ } 105$

Si en lugar de aplicar el interés al finalizar un año, este es aplicado cada tres meses ¿cuánto dinero se tiene al cabo de un año? (Tabla 2)

El interés es aplicado al final de cada tres meses, por lo que en un año, se completan cuatro periodos de tres meses.

Tabla 2. Interés compuesto

Periodo	Monto	Interés*	Cantidad al final de cada periodo
1	100 US$	1.25 US$	101.25 US$
2	101.25 US$	1.26 US$**	102.51 US$
3	102.51 US$	1.28 US$	103.79 US$
4	103.79 US$	1.30 US$	105.09 US$

*Debido a que el interés es aplicado cada tres meses, se divide este en 4 partes, una por cada periodo, de este modo, si el interes es del 5% (0.05), al dividirse en 4 partes, se tiene que: $\frac{0.05}{4} = 0.0125$, equivalente al 1.25%.

**Utilizar las aproximaciones a cifras decimales, recordar que, si te posicionas en la segunda cifra decimal y la cifra que le sigue es mayor que 5, entonces la cifra actual aumenta en una unidad, si la siguiente cifra es igual a 5, entonces aumenta solo si la cifra actual es impar, y si la siguiente cifra es menor que cinco, entonces la cifra actual no varía.

Al finalizar el primer periodo, al monto inicial le es agregado el interés al 1.25%, el interés corresponde a $100 \times 0.0125 = 1.25$, en consecuencia, la cantidad final es:

$100 \text{ US\$} + 1.25 \text{ US\$} = 101.25 \text{ US\$}$

La cantidad final, es invertida nuevamente para el segundo periodo, y se prosigue de forma análoga para determinar el interés que corresponde al segundo periodo. Repetir el proceso hasta completar los cuatro periodos.

Luego de llenar la Tabla 2, preguntar ¿qué sucedió? ¿Si elige entre interés simple e interés compuesto cuál tomaría? Si en lugar de aplicar el interés en periodos de tres meses y este se aplicase cada mes ¿cree que obtendrá aun más dinero?, ¿y si fuese capitalizable diariamente?

Para responder cada una de las preguntas, se propone la siguiente actividad:

Actividad 4. Aproximación de e.

Objetivo: Proponer algoritmo matemático que brinde una aproximación decimal de e.

Indicaciones

Para el desarrollo de la actividad se utilizarán procesos tratados en la actividad 3, explicando al estudiantado que una de las aplicaciones evidente de e, es visto en economía.

Para la aproximación de e, se estudia una situación ficticia en la que supondremos que, en un banco cualquiera se deposita 1 dólar con una tasa de interés al 100%. Partiendo de este hecho ficticio, desarrollaremos los siguientes análisis.

i) Considerando que el interés es del 100%, para un monto inicial de 1 US$, al cabo de 1 año la cantidad se duplica.
ii) El 100% en notación fraccionaria se expresa como $\frac{100}{100}$, y esto es igual a la unidad (1).

A partir de la información anterior, completar los siguientes procesos.

1. Primero se asignará a cada dato un símbolo que permitirá expresar procesos de forma general mediante expresiones algebraicas.
   I: interés.
   n: número de periodos en un año.
2. Llenar las tablas a raíz de la situaciones propuestas.

Situación 1: Se deposita en el banco 1 US$ con una tasa de interés anual del 100%.

Tabla 3. Interés anual capitalizable al cabo de un mes

Periodo	Monto inicial	Interés (100%)	Cantidad final	Forma general
1	1 US$	1 US$	2 US$	$(1+1)^1$

Situación 2: Se deposita en el banco 1 US$, con una tasa de interés del 100% anual aplicable cada 6 meses.

Tabla 4. Interés semestral

Periodo	Monto inicial	Interés (100%)	Cantidad final	Forma general*
1	1 US$	$1 \times 0.5 = 0.5$	1.5 US$	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^1$
2	1.5 US$	$1.5 \times 0.5 = 0.75$	2.25 US$	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

* Para determinar la forma general, se utiliza la factorización de polinomios mediante el análisis de sus factores comunes.

Situación 3: Se deposita en el banco US$ 1, con una tasa de interés del 100% anual, aplicable cada cuatro meses.

Tabla 5. Interés aplicable cada cuatro meses

Periodo	Monto inicial	Interés (100%)	Cantidad final	Forma general
1	1 US$	$1 \times 0.33333 = 0.33333$	1.33333 US$	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^1$
2	1.33333 US$	1.33333×0.33333 $= 0.44444$	1.77777 US$	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^1+\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$
3	1.77777 US$	1.77777×0.33333 $= 0.59258$	2.37035 US$	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)$ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$

Situación 4: Se deposita en el banco 1 US$, con una tasa de interés del 100% anual, aplicable cada 3 meses.

Tabla 6. Interés aplicable cada tres meses

Periodo	Monto inicial	Interés (100%)	Cantidad final	Forma general
1	1 US$	$1 \times 0.25 = 0.25$	1.25 US$	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^1$
2	1.25 US$	$1.25 \times 0.25 = 0.3125$	1.5625 US$	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^1+\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$
3	1.5625 US$	$1.5625 \times 0.25 = 0.390625$	1.953125 US$	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^3$
4	1.953125 US$	1.953125×0.25 $= 0.48828125$	2.44140625 US$	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^3+\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\left(1+\frac{1}{4}\right)$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$

De los resultados obtenidos de la tabla 3 a la tabla 6, que describen las situaciones 1 ,2, 3 y 4. Completar el cuadro resumen y deduce la cantidad que se obtiene para 5 y 6 periodos, luego generaliza y elabora una fórmula general para n periodos.

Tabla 7. Interés aplicable cada dos meses

No de periodos en un año	Cantidad final al cabo de un año	Formula general
1	2	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$
2	2.25	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$
3	2.37035	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$
4	2.44141	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$
5	2.48832	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$
6	2.52163	$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6$

Para indicar el número de periodos no determinados durante un año, utilizaremos la letra n. De esta forma, para n periodos la fórmula general se expresa de la siguiente manera:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

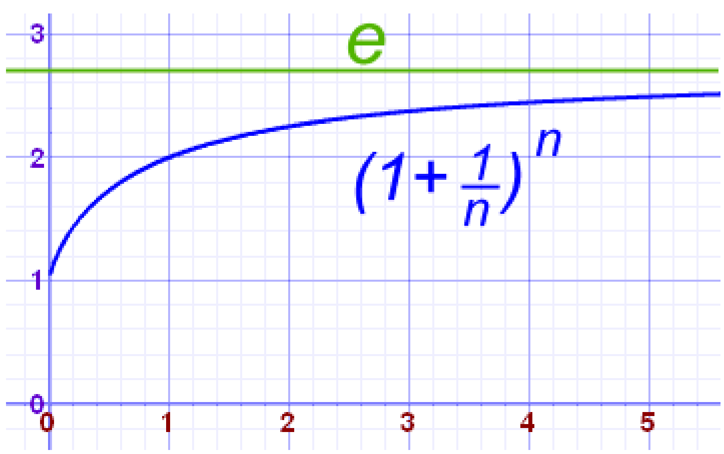
A partir de la fórmula anterior, completar la siguiente tabla:

Tabla 8. Interés aplicable según el número de periodos en que se divide un año

No. de periodos en un año	Fórmula	Valor resultante
20	$\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}$	2.6532977…
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2.70481382…
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2.71692393…
1000000	$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	2.71828046…
10000000000	$\left(1+\frac{1}{10000000000}\right)^{10000000000}$	2.7182805

Cuando el número de periodos tiende a valores cada vez más grandes, la fórmula muestra un acercamiento infinito al número e, cuya aproximación a 50 cifras decimales es:

e ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995…



El número e, puede expresarse como:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

La comprobación de la fórmula anterior, queda a disposición del lector, se recomienda comprobar los resultados con los obtenidos en las tablas 7 y 8.

GUÍA DE PROBLEMAS

Problema 1

El diámetro de la tierra a nivel ecuatorial es de 12,756.8 kilómetros. Puedes determinar con esta información ¿cuánto mide el ecuador terrestre?

Considerando que la Tierra da una rotación completa en 24 horas, ¿cuál es la velocidad con que gira la Tierra?

Investiga la forma adecuada de calcular tal velocidad y escribe tu respuesta.

Problema 2

Investigue, analice y responda: Imagínese que una organización espacial internacional le hace la propuesta de viajar a Venus. Le ofrecen dos millones de dólares si se queda en Venus durante un día o cuatro millones de dólares si te quedas en Venus durante un año.

De cualquier manera, tendrás suficiente alimento, suficiente agua, la temperatura será la que tú desees, tendrás televisión por cable, etc.

¿Qué opción elegirás?

Problema 3

La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610…aparece con frecuencia en la naturaleza, en la reproducción de los conejos, en la posición de tallos en una planta, etc.

a) Busca la regla que permite pasar de un término al siguiente e identifica el término que sigue.
b) Comprueba que el cociente de un término y el anterior se aproxima hacia el número de oro. Es decir, calcula 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13… etc

Problema 4

Crecimiento exponencial. Si se considera la variable "población de especies" es necesario reflexionar que algunas especies poseen crecimientos exponenciales. Toda población que experimenta crecimiento exponencial se estructura de la forma siguiente:

$$F = Ce^{rn}$$

Cuya asignación es:
F: Cantidad final o valor futuro.
C: Valor inicial.
r: tasa de crecimiento.
n: tiempo transcurrido.

Un cultivo está constituido por 400 bacterias, las cuales tienen una tasa de crecimiento de 25% cada día ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 30 días?

Utiliza la información anterior para deducir la fórmula de crecimiento exponencial, sustituye las variables que consideres necesarias y contesta la pregunta que se plantea en el problema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

6. Beskin N. (1987) *Fracciones Maravillosas,* Lecciones populares de matemática, Moscú: Editorial Mir.
7. Dunham W. (1993), *Viaje a través de los genios*. New York: Editorial Pirámide.
8. Ghyka, M (1992). *El Número de Oro*. Barcelona: Poseidón, S.L.
9. Kline M. (1992), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Editorial Alianza Universidad.
10. Maor E. (1994), *the story of a number*, Princeton.
11. Coolidge J. L. (1950), *The number e, Amer*. Math.
12. Vorobiov N. N(1974), *Números de Fibonacci*. Moscú: Editorial Mir.
13. Schreiber M. (2007), *Golden Section Demonstrations* Project , Editorial Poseidon.

Lección 3 **8° grado** **Unidad 1** **Tiempo: 12 horas clase**

Operaciones con números reales

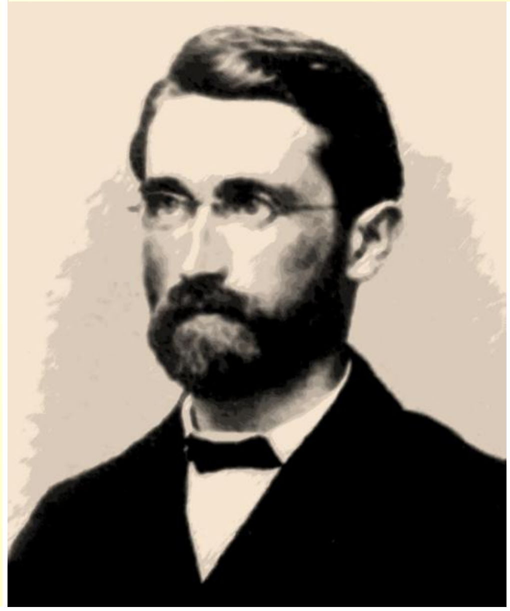


Figura 1. **Julius Wilhelm Richard Dedekind** (1831-1916) En su libro titulado *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* describe el uso de cortaduras para identificar números irracionales entre dos números reales.

Para definir el conjunto de números reales, sus propiedades y axiomas, se han realizado exhaustivos análisis, uno de ellos es el propuesto por Richard Dedekind, quien identificó la necesidad de fundamentar teóricamente la definición de números reales, para tal propósito escribió en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* un proceso para explicar la existencia de los números irracionales a partir de los números reales.

En tal proceso utiliza la definición de Cortaduras, es así como en muchos libros matemáticos se reconoce el proceso como **Cortaduras de Dedekind**.

En esta lección se describen procesos que buscan que docente y estudiante comprendan la definición de cortaduras y las utilicen para determinar aproximaciones decimales de números irracionales.

Se estudia, además, propiedades de los números reales a partir de la definición de cuerpo, que se define para la suma y producto de números reales; también se ilustra geométricamente la ubicación de algunos números irracionales sobre la recta real, mediante la aplicación de herramientas geométricas tales como el teorema de Pitágoras y el teorema de Thales.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, resolver y enfrentarse a problemas.

Objetivos

– Interpretar relatos históricos que describen el descubrimiento de π, Φ y e.
– Analizar la importancia de los números irracionales y su representatividad en el entorno.
– Generar aproximaciones decimales de los números irracionales mediante sucesiones de Cauchy y el binomio de Newton.

Presaberes

– Operaciones con números racionales.
– Propiedades de exponentes y radicales.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Números irracionales
Los números irracionales se caracterizan porque no pueden representarse como el cociente de dos números enteros, debido a que en sus infinitas cifras no presentan un periodo.
Los números irracionales más conocidos son: π=3.141592…, Φ=1.618033…, e=2.718281…

Cuerpo
En álgebra abstracta un **cuerpo** o **campo** es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso multiplicativo, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división entre cero).

Para contextualizar la historia de la fundamentación teórica de los números reales, se describe a continuación la biografía y aportes realizados por Dedekind, considerado uno de los matemáticos más destacados del siglo XIX.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916). Nació en Brunswick. En 1848 entró en el Colegium Cardinum de su ciudad natal y en 1850 ingresó con sólidos conocimientos matemáticos a la Universidad de Gotinga.

Dedekind aprendió matemática en los departamentos de Matemática y Física de la Universidad de Gotinga, siendo uno de sus profesores Moritz Abraham Stern[14] y Willhelm Weber[15]. Su tesis doctoral titulada *Über die Theorie der Eulerchen integrale* (Sobre la teoría de las integrales Eurelianas) fue supervisada por Gauss. Dedekind recibió su doctorado en 1952, siendo el último alumno de Gauss, durante los siguientes años estudió la teoría de los números y otras materias con Gustav Dirichlet[15].

Dedekind fue nombrado en 1858 profesor de matemática en la Escuela Politécnica de Zurich, donde, preparando la primera parte de cálculo diferencial e integral para el semestre de invierno del curso 1858-1859, sintió la necesidad de elaborar una teoría de los números reales, encontrando los fundamentos aritméticos y rigurosos del análisis infinitesimal.

La teoría de Dedekind respecto a los números reales fue revisada entre 1858 y 1872; escribió en el prólogo del libro que las consideraciones que se va a exponer datan del otoño de 1858, que es cuando sintió la necesidad de conjeturar una base realmente científica de la aritmética, particularmente de la noción de límite.

El trabajo con números reales, tiene como punto de partida el cuerpo ordenado de los números racionales $\mathbb{Q}$, del cual se deducen dos propiedades.

---

13. **Moritz Abraham Stern** (1807-1894). Matemático Alemán. Stern, se convirtió en *Ordinarius* (profesor titular) en la Universidad de Gotinga en 1858, sucediendo a Carl Friedrich Gauss. Stern fue el primer profesor judío de tiempo completo en una universidad alemana.
14. **Weber, Wilhelm E.** (1804-1891). Cursó estudios en la Universidad de Halle y siguió en la misma como profesor hasta 1831, año en el que ingresó como profesor en la Universidad de Gotinga. En esta ciudad entabló amistad con Carl F. Gauss, colaborando con este en estudios sobre electricidad y magnetismo.
15. **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) matemático alemán al que se le atribuye la definición “formal” moderna de una función.

2. Para[15] $a \in \mathbb{Q}$ ($número\ a\ perteneciente\ al\ conjunto\ de\ números\ racionales$) se induce una partición $(A_1,\ A_2)$ de $\mathbb{Q}$, llamada *cortadura*, de forma que cada elemento a_1 de A_1, verifica $a_1 \leq a$ y cada elemento a_2 perteneciente a A_2 cumple que $a \leq a_2$. El número a, puede estar en A_1 o en A_2 indistintamente, por lo que es necesario considerar como no esencialmente diferentes las dos cortaduras que resultan.

Con ayuda de las *cortaduras,* Dedekind escribió en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* un capítulo llamado "Creación de los números irracionales*",* en la que generaliza la noción de cortadura como una partición (A_1, A_2) de $\mathbb{Q}$, tal que $a_1 \leq a_2$ para cada $a_i \in A$; con $i = 1{,}2$.

Cada cortadura (A_1, A_2) define un nuevo número a irracional, completamente definido por esta cortadura (A_1, A_2). A toda cortadura le corresponde un número racional o irracional siendo dos números diferentes o no iguales si y solo si corresponden a dos cortaduras esencialmente desiguales[16].

En el hecho de que no en todas las cortaduras se engendren números racionales, reside la incompletitud o discontinuidad del cuerpo de los números racionales. Se prueba que la relación de orden de Q se extiende a R, que es continua.

Números reales (definición)

El conjunto de los números racionales está definido por el conjunto de números que se expresan de la forma $\frac{a}{b}$ con $a\ y\ b \in \mathbb{Z}$, y $b \neq 0$, a cada número racional le corresponde uno y sólo un punto de la recta numérica. Con ayuda de las cortaduras de Dedekind, se identifica que en relación a la posición de los números racionales en la recta numérica, estos presentan ciertos vacíos en los que se encuentran aquellos números que no pueden representarse en notación fraccionaria debido a que poseen infinitas cifras decimales que no presentan período en toda su extensión, a este conjunto se le denomina Irracional.

Si en la recta numérica se ubican números racionales y números irracionales, la unión de los elementos de ambos conjuntos posee relación biunívoca con cada punto de la recta numérica.

La unión del conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales recibe el nombre de números reales, este conjunto se simboliza con la letra$\mathbb{R}$, simbólicamente escribimos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$$

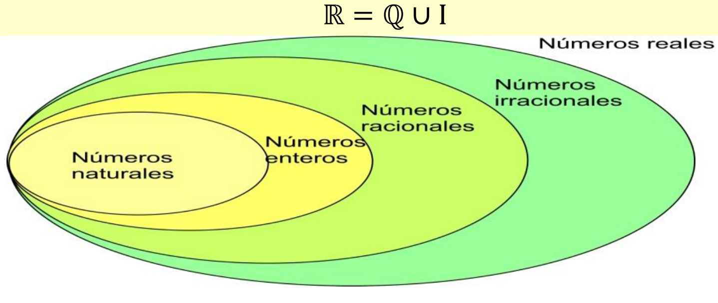


Figura 2. Números reales.

16. Dedekind R. (1969), *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* 7ª edición, Vieweg, Brauschweig, Primera edición (1872); Traducido al inglés por W. W. Beman, Dover, New York (1963).

Los números reales en la recta real

Es posible establecer una correspondencia biunívoca[17] entre los números reales y los puntos que pertenecen a una recta (recta real); esto significa que a todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta un número real. La recta real es una representación geométrica del conjunto de los números reales.

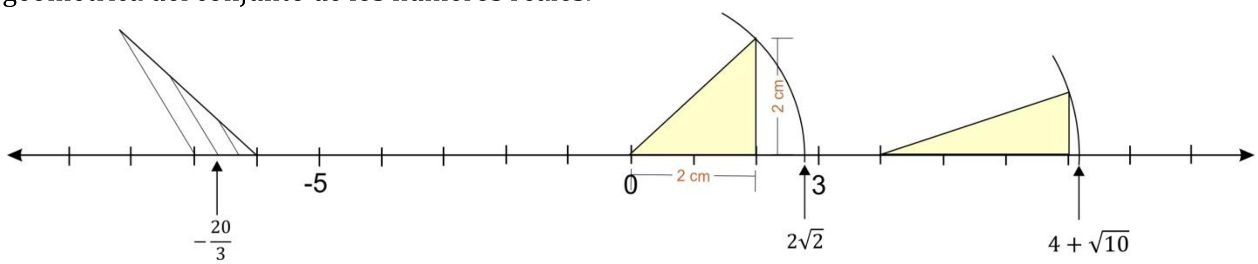


Figura 3. Recta real.

Ubicación de números reales en la recta real

El conjunto de números naturales y enteros[16] que están incluidos en el conjunto de números racionales y en consecuencia son considerados números reales, se ubican en la recta numérica atendiendo al valor absoluto de la cantidad y el signo que la precede. De este modo, graficar las cantidades 5 y -5, indica que la distancia entre el punto cero y 5 es de 5 unidades, el signo indica que si la cantidad es positiva (signo +) esta se ubica 5 unidades hacia la derecha de cero; en caso contrario, si la cantidad es negativa (signo -) esta será ubicada a una distancia igual, pero a la izquierda de cero, las cantidades 5 y -5 son consideradas opuestos aditivos debido a su ubicación simétrica con respecto a cero.

La ubicación de números racionales en la recta real, precisa de la utilización de herramientas y algoritmos tales como la noción de fracciones y la aplicación del teorema de Thales mediante los criterios de semejanza entre segmentos.

El algoritmo para ubicar números racionales en la recta numérica mediante el teorema de Thales, se esboza de la siguiente secuencia:

1. Dibujar la recta numérica, recordando que la distancia entre un número entero y otro debe ser constante.
2. Para ubicar la fracción, identificar que esta esté expresada como fracción propia o fracción mixta, así por ejemplo, para graficar la fracción $\frac{8}{5}$, esta fracción se puede convertir a fracción mixta escribiendo el número 8 como la suma de dos números enteros menores que 8, los números podrían ser $5 + 3$, luego, distribuir el denominador de la fracción para cada uno de los sumandos del denominador y al final, simplificar las expresiones.

17. Una correspondencia biunívoca, o correspondencia uno a uno indica que a cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto.

$$\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$$

La fracción mixta de $\frac{8}{5}$ es $1\frac{3}{5}$ (Un entero tres quintos).

3. La fracción mixta se ubica en la recta, posicionando inicialmente la parte entera (1), luego se traza una segmento transversal a la recta real cortando esta en 1 (a_1), trazar otro segmento desde el extremo superior de a_1 que corte a la recta real en 2 (a_2). Seccionar el segmento a_1 en tantas partes como indique el denominador de la fracción (5), y luego contar el número de unidades que indique el numerador (3), en esta posición trazar un segmento de recta paralelo a a_2 que corte a la recta numérica en un punto comprendido entre 1 y 2. El punto de corte indica la posición de la fracción $\frac{8}{5}$.

Figura 4. Números racionales en la recta real.

Ubicación de números irracionales en la recta real

Expresiones como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, presentan infinitas cifras decimales no periódicas, por lo que forman parte del conjunto de números irracionales, estos números se obtienen con la aplicación del teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la diagonal de rectángulos o la longitud de la hipotenusa en triángulos rectángulos.

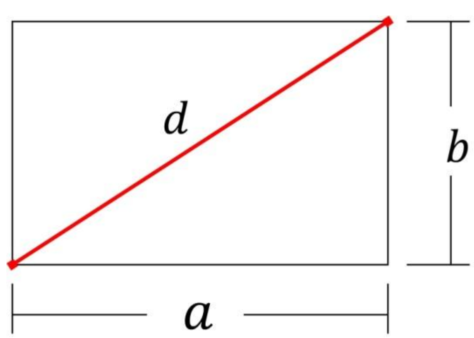


Figura 5. Diagonal de un cuadrilátero.

El teorema de Pitágoras se enuncia de la siguiente forma:

El cuadrado de la diagonal de un rectángulo, corresponde a la suma de los cuadrados de dos de sus lados.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

En consecuencia: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

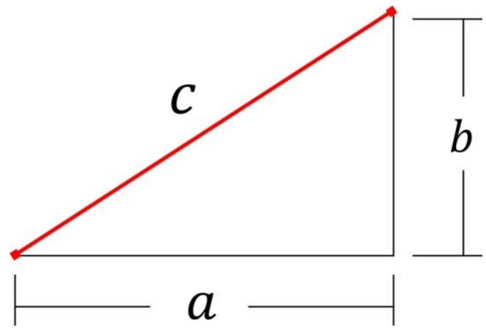


Figura 6. Hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Para un triángulo rectángulo, el lado que tiene mayor longitud es llamado hipotenusa y los demás lados se llaman catetos; de este modo, el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos se enuncia de la siguiente forma:

El cuadrado de la hipotenusa, corresponde a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Es indispensable que cada estudiante deduzca a partir de un número en expresión radical, las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo. De este modo para la expresión $\sqrt{2}$, el número 2, pude reescribirse como la suma de $1 + 1$, además, considerando que $1^2 = 1$, y relacionando este resultado con el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por lo que: $a = 1$ y $b = 1$, las longitudes de los lados son 1 y 1 respectivamente.

¿Cómo se ubica raíz de dos en la recta real?

Puesto que $a = 1$ es la base de un triángulo rectángulo de altura 1, es necesario dibujar sobre la recta numérica un triángulo rectángulo con base en el segmento de recta que va de cero a uno. La longitud de la hipotenusa se expresa en el irracional $\sqrt{2}$. Para trasladar la longitud de la hipotenusa al plano cartesiano, con ayuda de un compás se trazará un sector de circunferencia, cuyo radio será la diagonal y el centro en el punto 0, y es necesario extender el sector de circunferencia hasta que este haga contacto con la recta real.

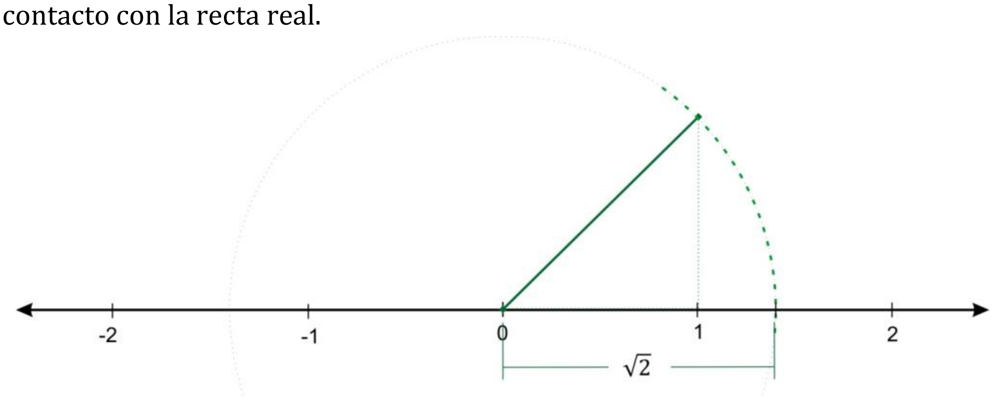


Figura 7. Ubicación en la recta de números irracionales.

Para ubicar sobre la recta numérica $\sqrt{3}$, se dibuja un triángulo rectángulo cuya base deberá ser $\sqrt{2}$. Observar la siguiente comprobación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$$
$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2+b^2}$$

Se necesita de un número que multiplicado por sí mismo resulte 2, se verifica además que $\sqrt{2}$ indica tal número, por lo que:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

En consecuencia $b = \sqrt{2}$

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Definición axiomática de R

Axioma 1

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de *cuerpo de los números reales* y se denota por $\mathbb{R}$.

A continuación se detalla cada término mencionado en el axioma[17].

Cuerpo

Significa que hay dos operaciones internas en $\mathbb{R}$, llamadas suma y producto donde para dos números $x \wedge y \in \mathbb{R}$[18], el resultado de efectuar la suma o producto, $x+y, x\cdot y$ respectivamente, también pertenece al conjunto de números reales.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longleftrightarrow x+y & \qquad (x,y) \longleftrightarrow x\cdot y \end{array}$$

A raíz de la definición de cuerpo de números reales surgen las siguientes propiedades para la suma y el producto.

Propiedades para la suma

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$.	(Propiedad asociativa)
2. $x+y=y+z$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$.	(Propiedad conmutativa)
3. En el conjunto $\mathbb{R}$, existe un elemento denotado con 0 (cero) que cumple $x+0=x$ para todo $x\in \mathbb{R}$.	(Elemento neutro de la suma)
4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+(-x)=0$.	(Elemento opuesto)

Propiedades para la multiplicación

5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo x,y,z.	(Propiedad asociativa)
6. $x\cdot y = y\cdot x$ para todo $x,y \in \mathbb{R}$.	(Propiedad conmutativa)
7. Existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0 (cero), denotado con 1, con la propiedad e que $1\cdot x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.	(Elemento neutro del producto)

[17] Un axioma es aquello que es verdad sin ninguna necesidad de prueba (definición etimológica).
[18] El símbolo $\wedge$, es un operador que denota la conjunción "y".

8. Para cada $x \epsilon \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ existe $x' \epsilon \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x \cdot x' = 1$, dicho x' se denota mediante $\frac{1}{x}$ o también mediante x^{-1}. (Elemento inverso)

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

En la estructura básica del conjunto de números reales no aparecen las cuatro operaciones, sino solamente dos: suma y producto; la resta y la división se definen mediante el uso de propiedades de suma y multiplicación de números reales. De este modo, $x - y = x + (-y)$, es decir, la resta de dos números reales no es más que la suma del primer número con el opuesto del segundo, desde luego, esta operación no es conmutativa puesto que para $x \ \wedge y$

En la división de números reales se prosigue de forma análoga, para dos números $x \ \wedge y \,\epsilon\, \mathbb{R}\, con\, y \neq 0$, se describe la operación división de la forma $\frac{x}{y}$; utilizando propiedades del producto se deduce que: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, es decir, el producto entre la primera cantidad y el inverso de la segunda; además, el producto es conmutativo. Luego da lo mismo poner el inverso a la izquierda o a la derecha.

La división no es asociativa, en consecuencia es necesario ser tener cuidado cuando se realizan divisiones reiteradas:

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{z} \ no\ es\ lo\ mismo\ que \frac{x}{\left(\frac{y}{z}\right)}$$

A continuación se proponen actividades que orientarán a que el estudiantado adquiera habilidades para ubicar los números reales en la recta numérica, así también procesos que facilitarán la aproximación y redondeo de números irracionales, aplicando todos estos conocimientos en las operaciones con números reales.

Actividad 1. Números irracionales en la recta numérica.

Objetivo.

Proponer situaciones en las que el estudiantado formule estrategias para ubicar números irracionales en la recta real. Algunos números irracionales son obtenidos como resultado de la extracción de raíz cuadrada, pero es necesario aclarar que no todos los radicales indican un número irracional, tal es el caso de $\sqrt{4}$, que resulta 2, que es número entero. Para graficar radicales con resultado irracional se utiliza el ya conocido teorema de Pitágoras, mediante el cual se deduce un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa depende de las longitudes de los catetos que la conforman. Explicar al estudiantado el proceso para graficar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

Ejemplo 1

Ubicar en la recta real la expresión $\sqrt{8}$.

Considerar la expresión:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 + 4}$$

Recordar que $4 = 2^2$, por lo que:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

En vista que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, con a y b lados del triángulo rectángulo, se tiene que: $a = 2$ y $b = 2$.

Dibujar en la recta real, tomando como punto de referencia el cero, un triángulo de base 2 y altura 2, el valor de la hipotenusa indica $\sqrt{8}$. Con ayuda de un compás dibujar la circunferencia de centro en cero y radio correspondiente a la longitud de la hipotenusa; el punto de corte entre la circunferencia y el eje de las x, indica el irracional $\sqrt{8}$ en la recta real.

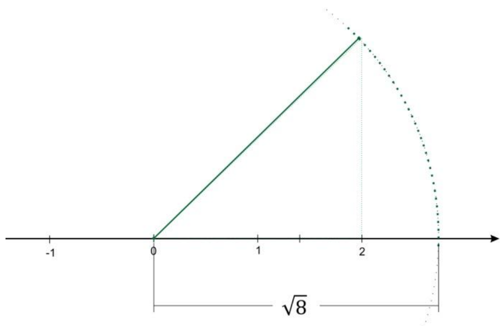


Figura 8. Ubicación en la recta numérica.

Otras formas de ubicar $\sqrt{8}$ en la recta real.

Preguntar al estudiantado si considera otras formas de ubicar $\sqrt{2}$ en la recta real, proponer el siguiente proceso.

Considerar que el número 8, puede reescribirse como 2^3, además se verifica la igualdad:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

Aplicando propiedades de los exponentes, $2^3 = 2^2 2$. por lo que:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 2}$$

Haciendo uso de propiedades de radicales donde $\sqrt{2^2 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2}$

Entonces:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

1. Describe el proceso para ubicar la expresión $2\sqrt{2}$ en la recta real.
2. ¿Qué concluyes de los resultados $\sqrt{8}$, $2\sqrt{2}$?
3. ¿Puedes mencionar otros números que cumplan con las mismas características y que brinden resultados similares?
4. Ubica en la recta real los siguientes valores.

Actividad 2. Operaciones con números reales en la recta real

Objetivo.
Aplicar propiedades de suma y producto de números reales para efectuar operaciones básicas e indicar estas en la recta numérica.

Efectúa la operación.

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

Para visualizar la operación mediante figuras geométricas, sustituir $\sqrt{2}$ por una figura que simbolice tal cantidad, ¿qué figura ubicarías?

En efecto, $\sqrt{2}$ es la longitud de la diagonal de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1. De este modo, la operación ilustra en la Figura 9, en la Figura 10 se indica la posición que corresponde al resultado de la operación.

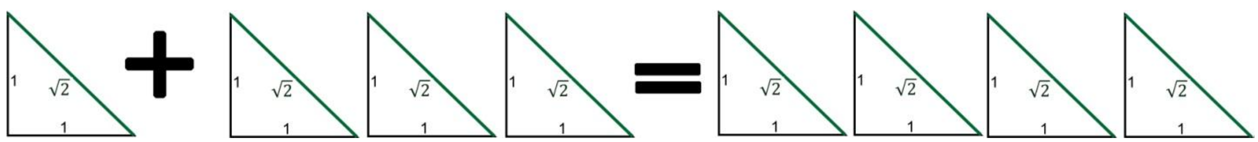


Figura 9. Operación con números reales.

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

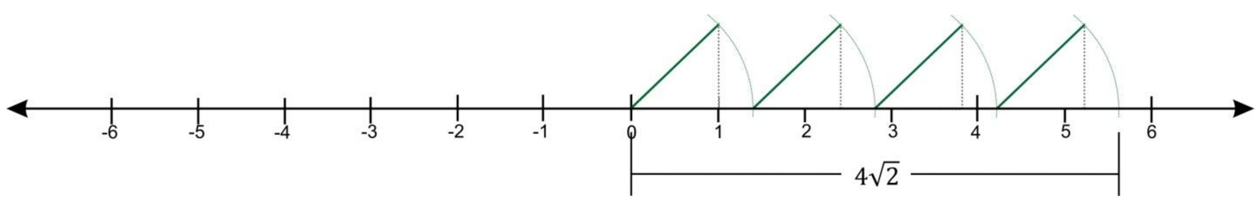


Figura 10. Ilustración en la recta numérica.

De forma análoga es posible efectuar la operación:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$$

Para $\sqrt{3}$ se utilizará un triángulos rectángulo cuyos catetos miden respectivamente $\sqrt{2}$ y 1, de forma análoga, para $\sqrt{5}$, se necesita de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y 2. Ambas igualdades se verifican con ayuda del teorema de Pitágoras.

$\sqrt{3} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}$, entonces $\sqrt{3} = \sqrt{2+1}$

$\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$, entonces $\sqrt{1+4}$

Una vez verificadas ambas igualdades, ilustrar mediante figuras geométricas la operación, luego ubicar el resultado en la recta real y proponer una aproximación del resultado.

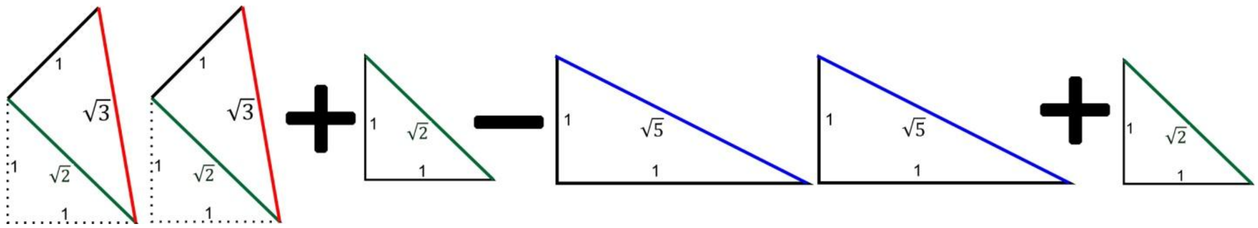


Figura 11. Operación con números reales.

$$2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$$

Observar que en la expresión $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$, la constante 2 aparece en todos los términos, recordando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, simbólicamente se expresa que: $a(b+c+d)=ab+ac+ad$

Para pasar de la expresión derecha a la izquierda, se toma el elemento que se repite y se multiplica por la suma o resta de los elementos no repetidos.

De esta forma:

$$2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$$

Para ubicar este resultado en la recta real, primero se posiciona la resultante de la expresión $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ para ello se ubican $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ sobre la recta real (figura 12a), luego se ubica $-\sqrt{5}$ bajo la recta real y en sentido contrario (figura 12b), después se duplica la longitud restante (figura 12c)

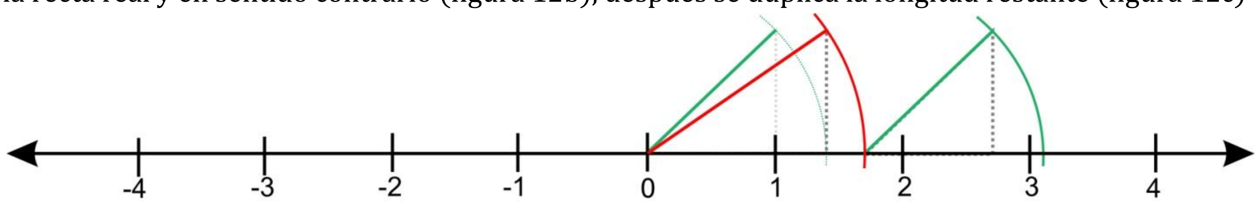


Figura 12a. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

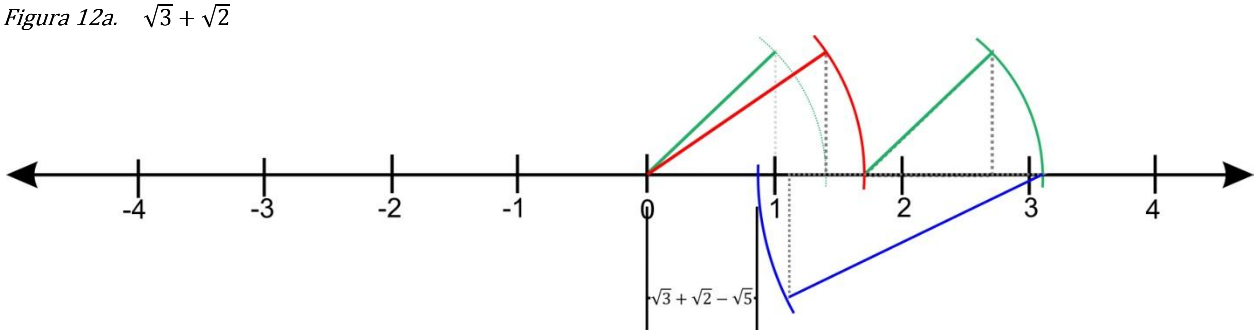


Figura 12b. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$

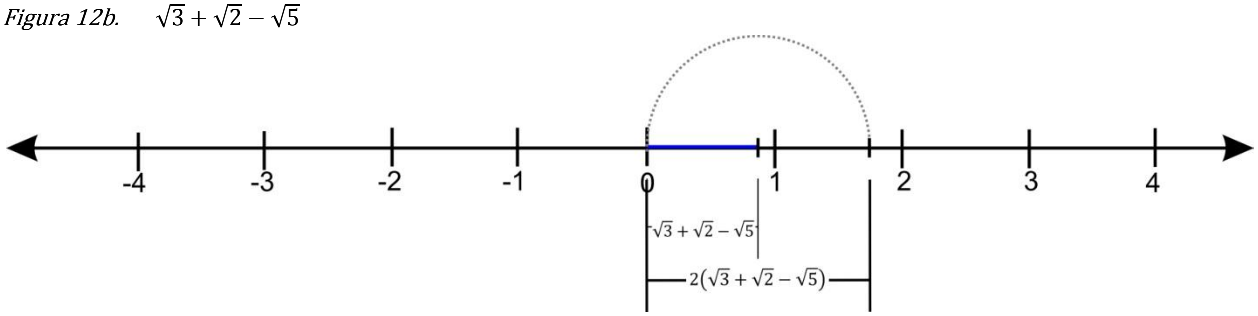


Figura 12c. $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

Actividad 3. Aproximación decimal de números reales.

Objetivo

Mostrar algoritmo para deducir una aproximación decimal de números irracionales mediante las Cortaduras de Dedekind.

En la recta real, se identifica a $\sqrt{8}$ entre la posición 2 y 3. Mediante el uso de cortaduras de Dedekind es posible determinar una aproximación decimal de $\sqrt{8}$, por lo que es necesario explicar el siguiente proceso.

1. Puesto que entre 2 y 3 se encuentran infinitos números reales, se debe definir un número real al que llamaremos n, tal que $n^2 = 8$. El número n se encuentra entre dos extremos a los que llamaremos cortaduras (2,3), para tales extremos se define que $n_1 \leq n \leq n_2$ donde n_1 y n_2 se acercan indefinidamente a n. Si se divide el segmento que va de 2 a 3 en diez partes iguales, es posible aproximar el valor de $\sqrt{8}$ a las décimas.
   Para obtener una aproximación decimal de $\sqrt{8}$, se sugiere completar la información requerida en la tabla 1.

Tabla 1. Aproximación decimal de $\sqrt{8}$

Número decimal (n)	Cuadrados (n^2)	Número decimal (n)	Cuadrados (n^2)
2.1	4.41	2.6	6.76
2.2	4.84	2.7	7.29
2.3	5.29	2.8	7.84
2.4	5.76	2.9	8.41
2.5	6.25	3.0	9.00

En la tabla se observa que los valores (en décimas) más próximos a $\sqrt{8}$ son 2.8 y 2.9. En consecuencia, se estima que $\sqrt{8}$ está entre estos dos valores, y la relación se expresa con la siguiente desigualdad: $2.8 \leq \sqrt{8} \leq 2.9$

2. A partir de la desigualdad anterior, se deduce que el irracional $\sqrt{8}$ se aproxima hasta las décimas con una aproximación por defecto de 2.8 y 2.9, por lo que es una aproximación por exceso.
   Para definir una aproximación más exacta debe aumentarse el número de cifras decimales de esta, por lo que a continuación se divide el segmento que va de 2.8 a 2.9 en diez partes iguales. Con esta acción será posible aproximar el valor de $\sqrt{8}$ hasta las centésimas, para ello completar la Tabla 2.

Tabla 2. Aproximación decimal de $\sqrt{8}$ hasta las centésimas

Número decimal (n)	Cuadrados (n^2)	Número decimal (n)	Cuadrados (n^2)
2.81	7.90	2.86	8.18
2.82	7.95	2.87	8.24
2.83	8.01	2.88	8.29
2.84	8.07	2.89	8.35
2.85	8.12	2.90	8.41

Los valores que más se acercan a 8 por defecto y por exceso son 7.95 y 8.01 respectivamente, en consecuencia, $\sqrt{8}$ está comprendido entre 2.82 y 2.83.

$$2.82 \leq \sqrt{8} \leq 2.83$$

3. Si se repite el proceso se tendrá la aproximación de $\sqrt{8}$ hasta las milésimas, para lo cual, es necesario dividir el segmento comprendido entre 2.82 y 2.83 en diez partes iguales. Elaborar una tabla y completar esta de forma similar a la Tabla 2.

A medida que se aproximan los extremos, haciendo la longitud entre estos cada vez menor, la aproximación será aun más exacta. En vista de ello, se deduce que entre dos extremos a_1 y a_2, que pertenecen al conjunto de números racionales, se encuentra un número irracional cuyas cifras decimales son infinitas no periódicas.

La aproximación decimal de $\sqrt{8}$ hasta su duodécima cifra decimal es:

$$\sqrt{8} = 2.828471247461$$

Actividad 4. Redondeo y truncamiento de números reales.

Objetivo.

Mostrar procesos de aproximación y redondeo de cifras decimales infinitas periódicas y no periódicas.

Los números reales tienen infinitas cifras decimales, por lo que no es posible dar un valor exacto. Los números racionales que presentan fracciones decimales, así también algunos radicales, sí es posible representarlos de manera exacta. Pero, en muchos otros casos, por ejemplo el número π, e, Φ, y algunos radicales cuyo resultado no es racional, no es posible expresarlos de forma exacta.

Comúnmente, para expresar magnitudes físicas de longitud, área y volumen, se necesitan números que poseen infinitas cifras decimales, pero en la práctica se utilizan valores aproximados para obtener un valor aceptable.

Considera las siguientes actividades y estima una aproximación por defecto y por exceso de cada resultado.

Define los siguientes términos y explica su utilización mediante el llenado de la Tabla 3.

Cuando en un decimal se seleccionan únicamente las primeras n cifras decimales, se dice que se ha realizado un **truncamiento** con n cifras significativas.

Se realiza un **redondeo** con n cifras significativas, si truncamos con n cifras, y aplicando las siguientes propiedades.

1. Si la cifra que le sigue a la cifra n-ésima es menor que cinco, entonces esta no cambia.
2. En caso contrario, si la siguiente cifra es mayor que cinco, entonces al valor de la cifra n-ésima se aumenta en uno.
3. Si la cifra siguiente es igual a 5, la cifra n-ésima aumentará en uno solo si esta es impar.

Completa la siguiente tabla:

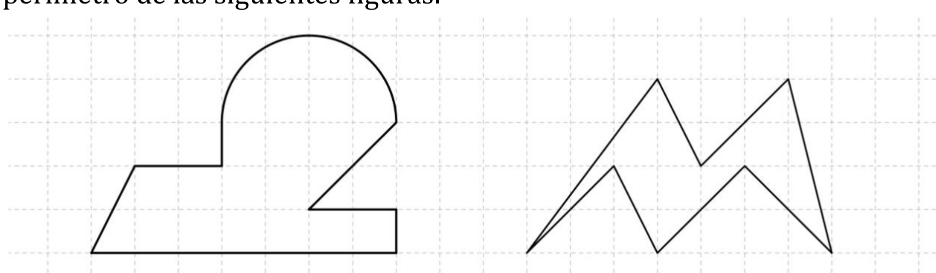
Número	Aproximación por defecto (cuarta cifra)	Aproximación por exceso (cuarta cifra)	Truncado en la cuarta cifra	Redondeo en la cuarta cifra
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{3}$				
π				
e				
Φ				

GUÍA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dados los números:
   A=2.7
   B=3.292929…
   C=0.01030303…
   Calcula los valores de A+B, C – A y A – C
   (Calcular las fracciones generatrices de A, B y C)

2. Efectúa las siguientes operaciones con números reales y representa el resultado en la recta numérica.
   a) $3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$
   b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

3. Calcula el perímetro de las siguientes figuras.



4. Considerando 7.4833147735… como el valor exacto de $\sqrt{56}$, escribe las aproximaciones por defecto, por exceso y redondeo de orden primero y segundo (décimas y centésimas).

5. Considera el ejemplo de la actividad 3, y determina el desarrollo decimal aproximado para $\sqrt{20}$, $\sqrt{15}$ y $\sqrt{3}$.

6. El radio de una circunferencia es 3.96 m. Utiliza la calculadora y el valor de π y determina.
   a) La longitud de la circunferencia truncando el resultado en centímetros.
   b) La longitud de la circunferencia redondeando el resultado en decímetros.
   c) El área del círculo truncando en m^2.
   d) El área del círculo redondeando en cm^2.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Astorga A., Rodríguez J. (1984), *El conjunto de los números Reales.* Capítulo I, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela Matemática.
2. Collete, J. P. (1985), *Historia de las matemáticas II*. Siglo XXI de España editores S. A., Madrid.
3. Dedekind R. (1969), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. 7ª. edición, Vieweg, Braunschweig. Primera edición 1872. Traducido al inglés por W. W. Neman, Dover, New York 1963.
4. Dedekind R. (1969), *Was sind und was sollen die Zahlen*. Primera edición 1888. Traducción al inglés por W. W. Beman, Dover, New York 1963.
5. Dugac, P (1976), *Richard Dedekind et les fondements de I'analyse*, Vrin, París.
6. García M., Zaldívar Y., Gálvez C. *Los números reales*. Avalado por Dra. Rita Roldan, Universidad de La Habana.
7. Hinrichsen, Diedrich (1973), *Análisis Matemático I: Segunda Parte*. Editorial Pueblo y Educación.
8. Ribnikov, K. (1991) *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir, Moscú.
9. Trejo C. (1968), *El concepto de número.* Departamento de Asuntos Científicos, Unión Panamericana, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Lección 4 **8° grado** **Unidad 2** **Tiempo:** 10 horas clase

Multiplicación y división de Polinomios

Figura 1. **Al-Sabit Thabit Ibn Qurra al-Harrani** (826-901) hizo importantes descubrimientos en el álgebra, la geometría y la astronomía. En astronomía, es considerado uno de los primeros reformadores del sistema de Ptolomeo, y en la mecánica fue fundador de la estática.

Introducción del tema

Los polinomios han sido utilizados a lo largo de la historia, para describir y representar situaciones cotidianas que precisan ser generalizadas, inicialmente fueron utilizados con fines puramente geométricos, pero posteriormente se identificaron diversas aplicaciones en diversos ámbitos, entre estos: construcción, agricultura, astronomía, física, química, biología.

Con polinomios es posible efectuar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). En la presente lección se trabaja únicamente la multiplicación y división, debido a la complejidad y requerimientos lúdicos que precisa el aprendizaje de estas operaciones.

Por ese motivo, se propone un conjunto de actividades que pretenden guiar tanto a estudiantes como a docentes a descubrir y aplicar conocimientos relacionados al álgebra geométrica en la ejemplificación de procesos algebraicos. De este modo, se garantiza una mejor comprensión por parte del estudiantado, y un paso satisfactorio de lo lúdico a las matemáticas abstractas.

Las herramientas que se utilizan para la geometrización del álgebra consisten en un legado milenario, tratado inicialmente en la antigua Grecia y escrito por Euclides en su obra "Los elementos" y ejemplificados por Al-Sabit Ibn Qurra al-Harrani, cuyo pensamiento algebraico y geométrico lo guió a idear la caja de polinomios que hasta la actualidad es considerada un recurso didáctico primordial para el aprendizaje de las operaciones con polinomios.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, resolver y enfrentarse a problemas.

Objetivos

– Interpretar relatos históricos que describen surgimiento y aplicación del álgebra geométrica en la representación y resolución de polinomios.
– Implementar elementos geométricos para ilustrar polinomios y facilitar la comprensión lúdica de la multiplicación y división de polinomios.

Presaberes

– Sumas y restas con polinomios.
– Área de figuras planas.
– Plano cartesiano.

BREVE HISTORIA DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan **variables** o **incógnitas**.

Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Polinomio

En matemática, se le llama **polinomio** a la suma de varios monomios. Un monomio es un producto de un coeficiente y una variable elevado a un número natural, que se llama el exponente del monomio.

Antes de la aparición de los símbolos de los números y las fórmulas, todo era expresado con palabras. En muchos escritos antiguos se destaca la razón por la que símbolos y letras fueron adoptados para expresar modelos matemáticos.

Los egipcios crearon muchos problemas aritméticos referidos a la vida cotidiana, en papiros como los de Rhind (16,000 a. C.) como también algunos de tipo algebraico. Polinomios del tipo $P(x) = x + ax - b$ o $P(x) = x^2 + ax + bx$, eran resueltas por egipcios por el método de la "regula falsi"[18].

El trabajo de los babilonios se concentró principalmente en el estudio de polinomios de grados 1 y 2, además, con ecuaciones lineales y cuadráticas. La mayor cantidad de documentos de los babilonios corresponde al periodo 600 a. C., al 300 a. C., en ellos se encontraron soluciones aproximadas de ecuaciones de la forma:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

A pesar que los griegos se dedicaron más a la geometría, existen aportes interesantes, por parte de Pitágoras y Euclides, aplicables a conceptos algebraicos.

Pitágoras (580-520 a. C.) concibe la primer propuesta de matematizar fenómenos naturales. Los pitagóricos crearon un método de Cálculo Geométrico General conocido como álgebra geométrica, como vía de extensión del dominio numérico de los números racionales. Fue en este contexto en que se enfrentaron con el concepto de irracionalidad debido a la imposibilidad de expresar la diagonal del cuadrado como múltiplo de sus lados, esto los guió a pensar que hay más segmentos que números[19].

Mediante la geometrización del álgebra, operaciones básicas como la suma de números, era expresada como adición de segmentos y la multiplicación como área de rectángulos de lados a y b.

---

18. También conocido como "falsa posición". Este método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probar con él y si se verifica la igualdad ya se tiene la solución, si no, mediante reiterados cálculos se obtiene la solución exacta. (Socas, p. 46).
19. Pijeira Cabrera, Hector E; *Matemática, La Época Dorada* (600 a. C.–415 d. C.) El aporte científico y metodológico de los sabios de la Grecia Antigua. Departamento de Matemática, Universidad de Matanzas, Cuba, p. 6.

En el libro II de *Los elementos*, de Euclides (300 a. C.), hay 14 proposiciones para resolver problemas algebraicos con métodos geométricos. Los griegos resolvían ecuaciones cuadráticas por medio del proceso de aplicación de áreas. Por ejemplo, es posible probar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, a partir de la proposición 1 de los Elementos de Euclides, mediante la siguiente afirmación:

"Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores"[20]

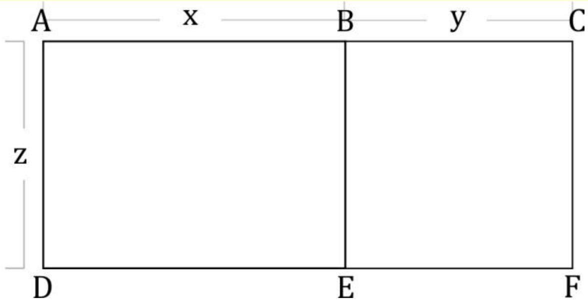


Figura 2. Propiedad distributiva.

$\overline{AB} = x$; $\overline{BC} = y$; $\overline{AD} = z$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = x + y$

La superficie de ABCD, se define con el producto de AD y AC, por lo que:

$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

En consecuencia: $z(x + y) = zx + zy$

De forma análoga es posible verificar la expresión: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ mediante áreas de figuras planas, siguiendo la proposición 4.

"Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos"[21]. Ver Figura 3.

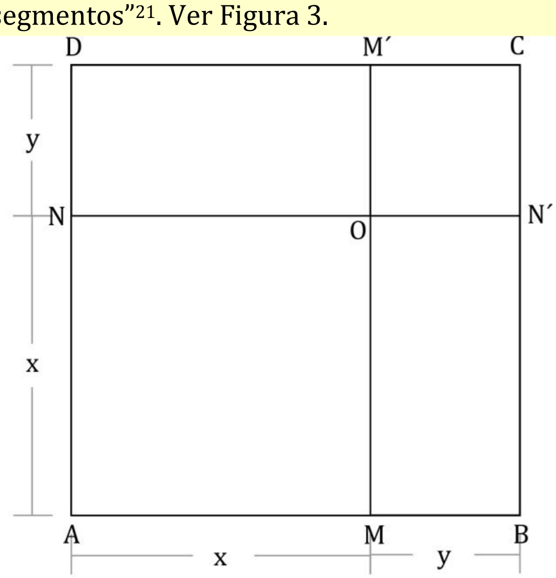


Figura 3. Cuadrado de un binomio.

Análisis de la figura 3.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, por lo que ABCD es un cuadrado. El área de este se define por $(\overline{AB})^2$.

Si $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$ con $AM = x \wedge MB = y$, el área de ABCD, se define por $(x + y)^2$.

Observar que el cuadrado ABCD está formado por dos cuadrados uno de ellos AMON y el otro ON'CM', también dos rectángulos idénticos NOM'D y MBN'O.

Con ayuda de estas figuras es posible determinar el desarrollo de la expresión $(x + y)^2$, como la suma superficie de los cuadriláteros internos a ABCD.

20. En Socas Robaina y otros; *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis. 1989. p. 42.
21. En Socas Robaina y otros; *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis. 1989. p. 42.

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AM} + \overline{MB})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{ON'})^2 + \overline{NO} \cdot \overline{OM'} + \overline{MB} \cdot \overline{BN'}$$

Dado que $\overline{AM} = x$; $\overline{ON'} = y$, $\overline{NO} = x$, $\overline{OM'} = y$, $\overline{MB} = y$, $\overline{BN'} = x$, sustituir estos valores en la expresión anterior.

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx$$

Efectuando operaciones con términos semejantes y ordenando el polinomio en relación a la letra x, se tiene:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

La expresión algebraica anterior describe el desarrollo del cuadrado de un binomio. Es necesario relacionar este resultado con las figuras geométricas relacionadas a cada monomio.

A las expresiones algebraicas que pueden expresarse mediante figuras geométricas, y que además, pueden unirse para formar estructuras complejas, se les denomina polinomios. En el siguiente apartado se explican aspectos conceptuales y de nomenclatura de polinomios en Matemática.

ESTUDIO DE POLINOMIOS (nomenclatura y definiciones importantes)

En matemática, a las expresiones algebraicas que constan de un solo término se les llama monomios. Si son dos términos se llaman binomios y si son tres, trinomios. Si una expresión tiene varios términos y la variable de estos términos tienen exponentes enteros positivos, entonces se opta por llamarla polinomio.

A los polinomios se les denomina con una letra (en la presente lección se utilizarán letras mayúsculas) y entre paréntesis se indica la variable que se utiliza. De preferencia, se utilizará la letra P, para representar la inicial de la palabra POLINOMIO. En caso de que sea necesario y se hable de varios polinomios, se emplearán otras letras: $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.

La forma general del polinomio está dada por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{x-1} + a_{n-2} x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Coeficientes

Los coeficientes son todos los números o letras que afectan a las diferentes potencias de la variable x (también puede utilizarse cualquier letra, siempre y cuando se defina esta como variable).

En un polinomio, se destacan dos coeficientes, Uno de ellos pertenece al término de mayor exponente en la variable, por lo que se le llama **primer coeficiente o coeficiente principal**[22]**.** El otro coeficiente es el que tiene la variable con exponente cero, a este se le llama **término independiente**[23]**.**

Ejemplo:

$P(x) = -4x^2 + 2x + 5$

Coeficiente principal: -3

22. El grado de un polinomio lo indica el mayor exponente de la variable, así en el polinomio $P(x) = 5x^3 + 3x + 23$, el máximo exponente es 3, el coeficiente de esta potencia es 5 que se le conoce con el nombre de coeficiente principal.
23. En un polinomio, el término independiente se expresa de la forma ax^0, donde $x^0 = 1$, en otras palabras, el término independiente será aquel que no preceda a la variable x, de esta forma, en el polinomio: $P(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x + 10$, El término independiente es 10.

Término independiente: 5

Se recomienda analizar con los estudiantes los polinomios, identificando en ellos el número de términos, término que contiene la variable con mayor exponente, coeficientes de cada término, el término independiente o constante. Observar el siguiente ejemplo:

Dado $A(x) = x^3 + (2a - b)x^2 - 5a + b$, identifique sus coeficientes.

Solución

La variable del polinomio es x, los coeficientes son:

Coeficiente del término con x^3: 1 Coeficiente principal.

Coeficiente del término con x^2: $2a - b$

Coeficiente del término con x^0: $-5a + b$ Término independiente.

Cuando todos los coeficientes de los términos de un polinomio son cero, entonces estamos en presencia de un *polinomio nulo*.

Dado: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$

$P(x) = 0 \iff a_i = 0 \;\; \forall\, i = 0 \; a \; n,$ además $i \in \mathbb{N}$.

¿Cómo determinar el grado de un polinomio?

El grado de un polinomio reducido[24] lo determina el término que contiene la variable con su mayor exponente. De este modo, para los polinomios A(x), B(x), C(x) y D(x) se determina de la forma siguiente:

$A(x) = -2x^3 + x^2 + 3 \longrightarrow$ es de grado 3.

$B(x) = x^2 - 4x + 4 \longrightarrow$ es de grado 2.

$C(x) = 5x - 4 \longrightarrow$ es de grado 1.

$B(x) = x^2 - 4x + 4 \longrightarrow$ es de grado 2.

¿Cuándo dos polinomios son idénticos?

Dos polinomios son idénticos y se escribe $A(x) = B(x)$, si tienen en su expresión reducida el mismo grado y los términos que tienen igual exponente en x tienen los mismos coeficientes.

Esta definición se verifica en la siguiente situación:

Dado: $A(x) = x^3 + 2ax^2 + 7;\; B(x) = bx^2 + x^3 + 4x^2 + (c - 2)$. Determine los valores de a, b y c.

Recordar que, si dos polinomios son idénticos, entonces son iguales los coeficientes de los términos que tienen la variable con igual exponente.

De este modo, se verifica la información en la siguiente tabla.

24. Se entiende por polinomio reducido aquel que se obtiene después de hacer las operaciones indicadas por términos semejantes del polinomio.

Tabla 1. Comparación de coeficientes de A(x) y B(x)

Coeficientes de A(x)	Variable y exponente	Coeficiente de B(x)
0	x^4	b
1	x^3	1
$2a$	x^2	4
0	x^1	0
7	x^0	$c-2$

Al igualar los coeficientes de la columna 1 y la columna 3, resulta:

$0 = b$ o $b = 0$
$1 = 1$
$2a = 4$ ¿Cuál tiene que ser el valor numérico de a para que multiplicado por 2 resulte 4?
$0 = 0$
$7 = c - 2$ ¿Cuál tiene que ser el valor numérico de c, para que al restar 2 resulte 7?

A partir del análisis anterior, se deduce que los valores que corresponden a a, b y c, son 0, 2 y 9 respectivamente.

Valor numérico de un polinomio

Cuando en un polinomio se sustituyen la variable x por un número y se efectúa las operaciones indicadas, se obtiene un resultado que se llama *valor numérico* del polinomio, que se obtiene para un valor específico de x.

Si la variable del polinomio es sustituida para $x = 0$, entonces el resultado corresponde al término independiente del polinomio y es de la forma: $P(0) = a_0$.

Ejemplo: $P(x) = x^3 + ax^2 - x - 4$, calcular el valor de a, para que el polinomio evaluado en -2, resulte 6. ($P(-2) = 6$).

Para resolver la situación es necesario sustituir en el polinomio la variable x, y ubicar en lugar de esta el valor -2.

$$P(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 - (-2) - 4$$
$$P(-2) = -8 + 4a + 2 - 4$$
$$P(-2) = -10 + 4a$$

Ahora bien, si se desea que el resultado de la operación $-10 + 4a$ sea 6, se necesita de un número que multiplicado por 4 y restado en 10 resulte 6. ¿Puedes deducir el número que se necesita?

En el resultado anterior, se deduce un valor a que hace verdadera la igualdad $P(-2) = 6$. Pero aparte de este resultado, existe uno que es aun más importante. Al valor de la variable que hace cero el valor numérico del polinomio, se le llama raíz del polinomio.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

A continuación se proponen actividades que introducen al estudiantado paso a paso a la comprensión del algebra geométrica y a la aplicación de esta en la representación de monomios y polinomios, así también en el desarrollo de operaciones de multiplicación y división.

Actividad 1. Reconocimiento de monomios y polinomios mediante figuras geométricas.

Objetivo.

Brindar al estudiantado herramientas geométricas que faciliten la comprensión de operaciones con monomios y polinomios.

Materiales

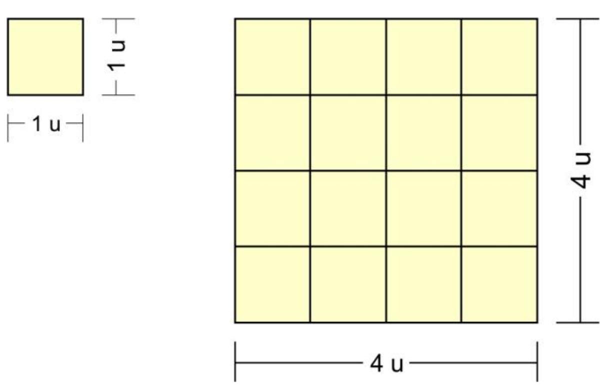
Regla.
Papel de color.
Tijera.
Marcador.

Indicaciones

Seguir los pasos que se plantean y elaborar las piezas que se utilizan en la actividad con anticipación o mostrar al estudiantado cómo elaborar sus propias herramientas.

Elaborar piezas cuadradas (20 en total) que tengan 5 cm de lado, cada lado simboliza una unidad, por lo que el área de cada cuadro corresponde a una unidad de área.

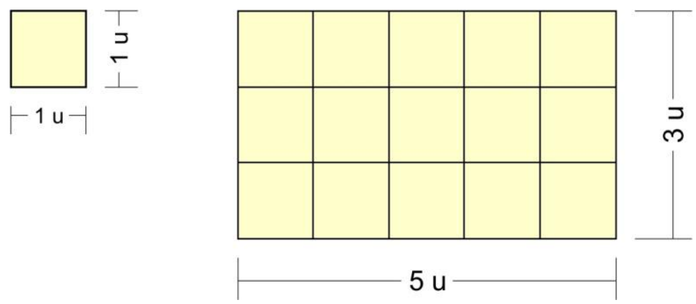
Con ayuda de las piezas, formar un cuadrado que tenga 4 unidades de lado, determinar su área.



Es necesario destacar la importancia de identificar las longitudes de los lados para el cálculo del área o superficie de figuras planas, del mismo modo que es necesario deducir la longitud de los lados a partir de la superficie de figuras cuadradas. En la figura 4, se considera un cuadrado de lado 4 unidades, cuya superficie es 16 unidades cuadradas.

Figura 4. Cuadrado.

Ahora, con las piezas de una unidad de área, formar un rectángulo con cinco unidades de base y 3 unidades de altura. ¿Cuántas unidades de área son necesarias para determinar la superficie del rectángulo?



Mediante la Figura 5, se pretende recordar que el área de un rectángulo se define por el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura. Así, en la figura, la base y la altura miden 5 u y 3 u respectivamente, en consecuencia el área de la figura se define por 15 unidades cuadradas.

Figura 5. Rectángulo.

Si se desea construir un cuadrado cuya longitud de uno de sus lados es desconocida; entonces se le asigna a esta longitud una variable, de tal modo que x determina la longitud de los lados del cuadrado, en consecuencia la superficie del cuadrado de lado x está definida por el producto de dos de sus lados o por el cuadrado de la longitud de un lado.

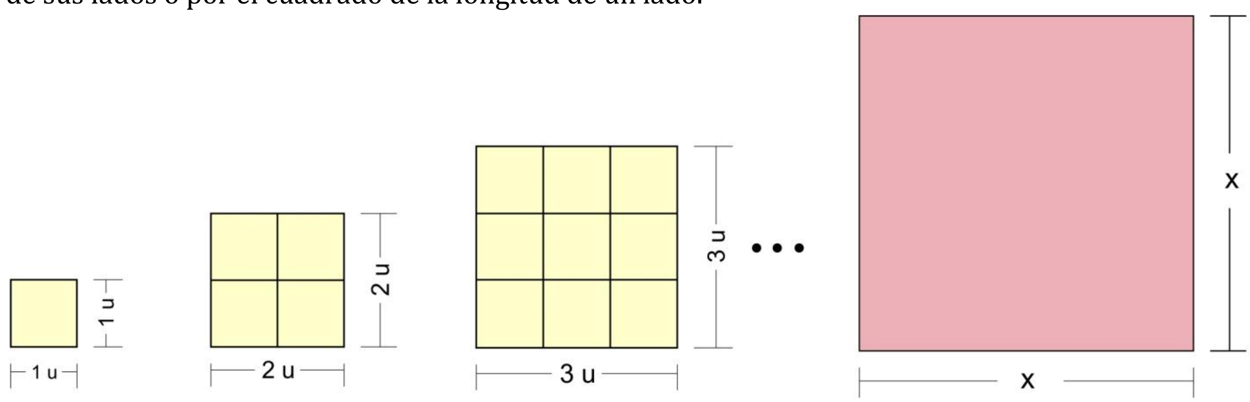


Figura 6. Cuadrado de lado x.

El área del cuadrado se define por la expresión $A = x^2$, de esta forma queda definido el polinomio $P(x) = x^2$. ¿Cómo indicarías el polinomio A(x)=$3x^2$? ¿Y el polinomio $B(x) = 4x^2 + 4$? Utiliza para ello piezas que corresponden a una unidad de área, y piezas de la forma x^2.

Solución

$A(x) = 3x^2$

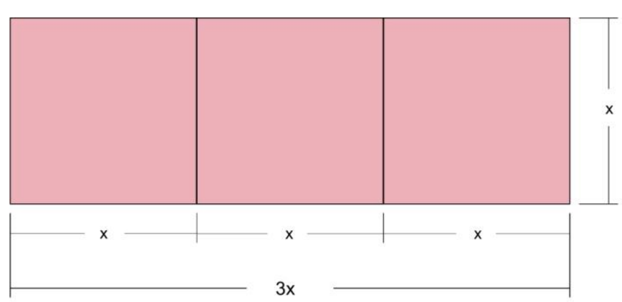


Figura 7. Geometrización de A(x)

El polinomio $A(x) = 3x^2$, se expresa mediante la unión de tres figuras geométricas, cada una indica el polinomio $P(x) = x^2$, por lo que $A(x) = 3P(x)$. Luego de ubicar las tres figuras, una después de la otra, se forma un rectángulo cuya base corresponde a la suma de los lados de cada cuadrado. La superficie de esta figura se determina por: Área = (3x)(x) = 3x², en consecuencia:

$$A(x) = (3x)(x) = 3x^2$$

$B(x) = 4x^2 + 4$

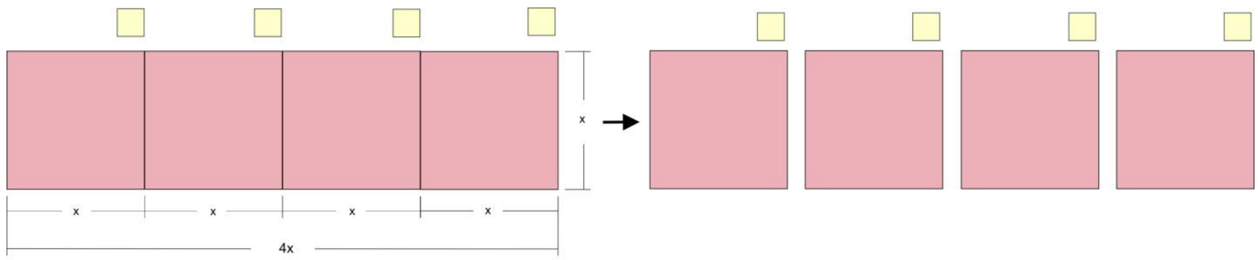


Figura 8. Geometrización de B(x).

Se necesitan 4 cuadrados de lado x para indicar el término $4x^2$, a continuación se agregan 4 unidades. En la Figura 8, se ilustra la ubicación estratégica de la representación geométrica de $4x^2$ y 4, ambos términos de $B(x)$. Para el polinomio $P(x) = x^2$, el polinomio $B(x)$ queda de la forma $B(x) = 4P(x) + 4$. Es posible identificar la correspondencia biunívoca que existe entre cada ilustración de x^2 y las piezas de una unidad. De este modo, es posible hacer 4 grupos, donde cada grupo está conformado por una pieza de x^2 y una unidad. En consecuencia el polinomio $B(x) = 4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1)$. Comprobar el resultado mediante la ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma y deducir futuras aplicaciones.

Discutir y aprender

En equipos de trabajo, discute y argumenta las siguientes situaciones:

1. Utilizando rectángulos ¿cómo indicarías las expresiones algebraicas que se listan a continuación?

   $A(x) = x$
   $B(x) = 3x$
   $C(x) = 2x^2 + 4$
   $D(x) = 5x^2 + 2x + 1$
   $E(x) = x^2 + 4x + 4$
   $F(x) = 4(x + 1) + 3$

Actividad 2. Multiplicación de polinomios (caja de polinomios).

Objetivo

Proponer situaciones donde el estudiante utilice figuras geométricas para expresar multiplicación de polinomios con ayuda de la caja de polinomios.

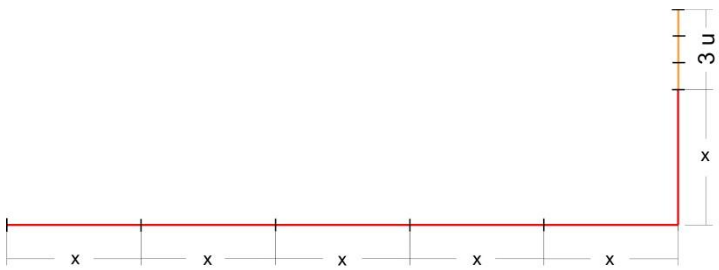
¿Qué es la caja de polinomios? Es una herramienta matemática que motiva el aprendizaje lúdico de la multiplicación de expresiones algebraicas, la caja de polinomios posibilita el paso de lo tangible a lo simbólico y a la abstracción del conocimiento algebraico. Desde el punto de vista histórico, rescata el pensamiento algebraico de Al-Sabit Ibn Qurra al-Harrani, quien nació en el año 826 en Mesopotamia y murió en 901 en Bagdad (actual Irak).

A continuación se propone un conjunto de situaciones que orientan a la comprensión de polinomios, iniciando con polinomios cuyos términos poseen signo positivo, y luego se profundiza en la multiplicación de polinomios que tienen en su extensión signos negativos.

Dados $A(x) = 5x$ y $B(x) = x + 3$, encuentre el polinomio $P(x)$, tal que $P(x) = A(x) \cdot B(x)$.

Solución

Para efectuar la multiplicación y deducir su producto mediante la geometrización del álgebra, es necesario formar un rectángulo cuyas longitudes están definidas por A(x) y B(x).



Definir a A(x) como base del rectángulo y B(x) como altura. Ver figura 9.

Figura 8. Ilustración de A(x) y B(x).

Luego de ubicar la base y la altura del rectángulo, es necesario dibujar los dos lados restantes para completar los cuatro lados. Posteriormente, introducir dentro de este las figuras geométricas necesarias para cubrir por completo la superficie del rectángulo, para tal propósito, brindar al estudiante diversas formar geométricas que indiquen las expresiones algebraicas x^2, $x \ \wedge 1$.

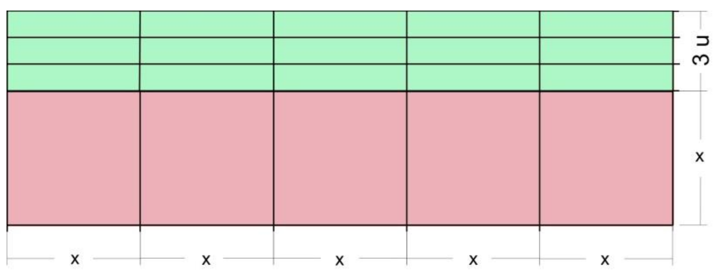


Figura 10. Superficie del rectángulo de base A(x) y altura B(x).

El producto de $A(x) \cdot B(x)$, está determinado por la suma de las superficies de las figuras que se encuentran dentro del rectángulo de la figura 10.

De este modo: $P(x) = 5x^2 + 15x$

La representación geométrica del producto de A(x) y B(x), facilita la comprensión de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. Para $A(x) = 5x \quad y \ B(x) \ = \ x + 3$. Al efectuar la multiplicación, el polinomio 5x, multiplica a cada uno de los términos de x+3.

$$5x(x + 3) = (5x)(x) + (5x)(3) = 5x^2 + 15x$$

Para multiplicar binomios por binomios, se procede de forma análoga al caso anterior, considerar el siguiente ejemplo:

Dados: $C(x) = 3x + 2$ y $D(x) = 2x + 4$, determine un polinomio $P(x) = C(x)D(x)$

Solución

Los polinomios C(x) y D(x), indican la base y la altura respectivamente, del rectángulo cuya superficie está dada por P(x).

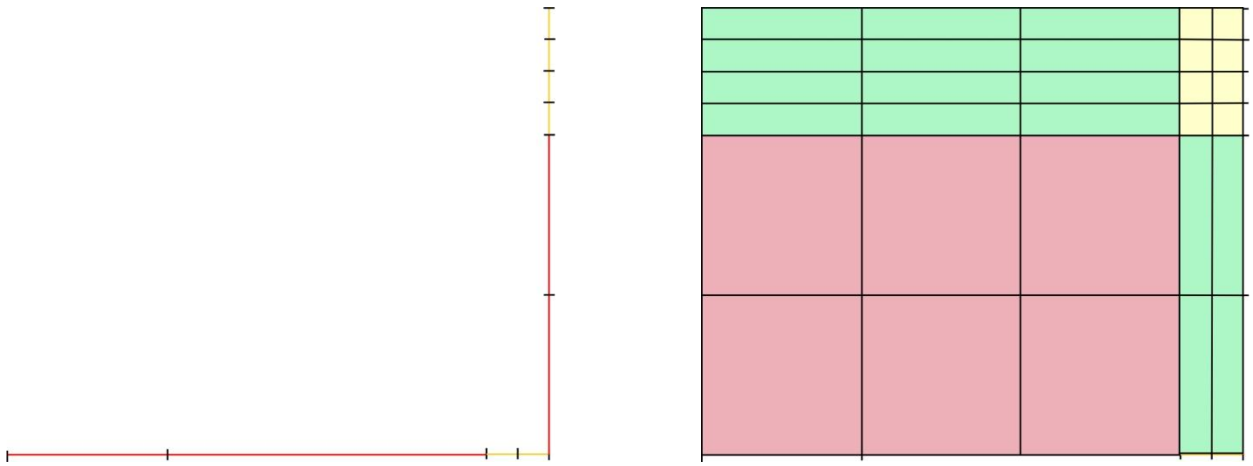


Figura 11. Superficie del rectángulo de base C(x) y altura D(x).

Mediante la figura 11 se identifica la superficie del rectángulo de base $C(x) = 3x + 2$ y altura $D(x) = 2x + 4$, de este modo, se concluye que el producto de $C(x)$ y $D(x)$ está dado por:

$$P(x) = (3x + 2)(2x + 4) = 6x^2 + 16x + 8$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma para realizar el producto de polinomios, se tiene que, cada término de $C(x)$ multiplica a cada término de $D(x)$, tal como se muestra en la siguiente solución:

$$\begin{aligned}
(3x + 2)(2x + 4) &= 3x(2x + 4) + 2(2x + 4) \\
(3x + 2)(2x + 4) &= (3x)(2x) + (3x)(4) + 2(2x) + 2(4) \\
(3x + 2)(2x + 4) &= 6x^2 + 12x + 4x + 8 \\
(3x + 2)(2x + 4) &= 6x^2 + 16x + 8
\end{aligned}$$

Verificando de esta forma el algoritmo de la multiplicación de dos binomios.

En las situaciones anteriores, se ha trabajado con polinomios cuyos términos poseen signos positivos. ¿Cómo efectuarías la multiplicación de polinomios que estén formados por términos con signo negativo? Para lograr tal propósito se hará uso del plano cartesiano. En él, los rectángulos que se ubiquen en el primer o tercer cuadrante se consideran con coeficientes positivos y los ubicados en el segundo o cuarto cuadrante tendrán coeficientes negativos. Así, para multiplicar polinomios con rectángulos de dos dimensiones que expresen polinomios de la forma $A(x) = ax + b$ y $B(x) = cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ se prosigue de la forma siguiente:

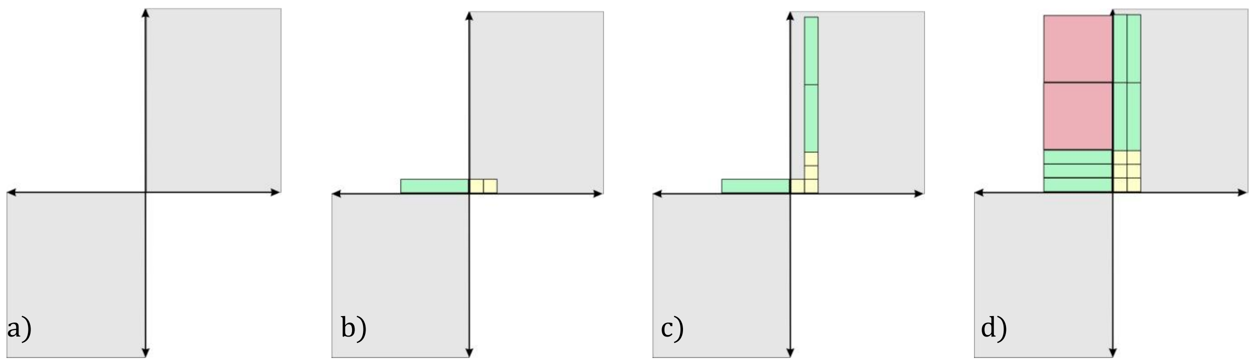
Cada producto se obtiene construyendo rectángulos cuya base es uno de los factores lineales y la altura el otro, luego se seleccionan las piezas que cubran en su totalidad la superficie definida por el rectángulo dibujado, haciendo encajar una con otra pieza como si se tratase de un muy elaborado rompecabezas.

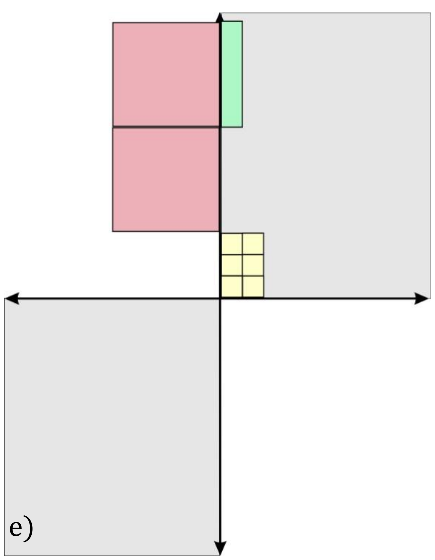
De forma análoga a las operaciones anteriores, el número de fichas de cada forma y color indican el resultado del producto. Si las fichas se encuentran en el primer y tercer cuadrante, se suman aquellas que tengan forma semejante, pero, si dos fichas semejantes se encuentran en el primer y segundo cuadrante, estas serán anuladas. ¿Por qué son anuladas? Discute y define propiedades que faciliten las operaciones.

Dados: $E(x) = -x + 2,\ F(x) = 2x + 3$, determina el polinomio P(x), tal que $P(x) = E(x) \cdot F(x)$.

Solución

Elaborar un plano cartesiano como el que se muestra en la Figura 12a, luego ubicar cada término del primero polinomio (base del rectángulo) en el plano cartesiano, recordar que en el primero y tercer cuadrante se ubican los términos con signo positivo y en el segundo y tercer cuadrante, los términos con signo negativo (Figura 12b). Después ubicar el segundo polinomio en posición vertical (Figura 12c), completar el rectángulo y determinar su superficie para definir el producto (figuras 12d-12e).





En la Figura 12e, se han eliminado algunas piezas, explica la razón por la que se efectuó la eliminación.

A partir de la figura resultante, se deduce el producto de los factores $E(x)$ y $F(x)$, por lo que se tiene el polinomio $P(x)$ que se define de la siguiente forma:

$$P(x) = -2x^2 + x + 6$$

Verificar esta expresión realizando el producto indicado:

$$(-x + 2)(2x + 3) = (-x)(2x + 3) + 2(2x + 3)$$
$$(-x + 2)(2x + 3) = (-x)(2x) + (-x)(3) + (2)(2x) + (2)(3)$$
$$(-x + 2)(2x + 3) = -2x^2 - 3x + 4x + 6$$
$$(-x + 2)(2x + 3) = -2x^2 + x + 6$$

Figura 12. a) Plano cartesiano, b) Polinomio E(x), c) Polinomio F(x), d) Superficie del rectángulo, e) Producto $P(x) = E(x) \cdot F(x)$

Actividad 3. División entera.

Objetivo

Brindar los lineamientos básicos para comprender el algoritmo de la división.

En esta actividad, se explican conceptos y procesos necesarios para utilizar el algoritmo de la división para dividir polinomios.

Definición de división entera. Sean dos números naturales a (dividendo) y b (divisor), tales que $b \neq 0$ y $a \geq b$. Dividir a entre b consiste en encontrar dos números naturales q (cociente) y r (residuo) que cumplan dos condiciones:

$$a = bq + r \qquad \wedge \qquad r < b$$

Esta división entera, suele indicarse con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Si el residuo r es nulo (r=0), resulta que a es múltiplo de b, en consecuencia a es divisible entre b. Por lo tanto b divide a a si y sólo si existe un natural q tal que $a = bq$.

División de polinomios. Dividir un polinomio P(x) (dividendo), entre otro D(x) (divisor), consiste en encontrar dos polinomios Q(x) (Cociente) y R(x) (Residuo), tal que el dividendo sea igual al divisor multiplicado por el cociente más el residuo, y que el residuo sea menor que el divisor[25].

División geométrica. Con ayuda de la caja de polinomios, es posible efectuar divisiones de polinomios cuadráticos de la forma $ax^2 + bx + c$ entre un binomio $dx + e$, de forma análoga a la multiplicación, consiste en armar con el dividendo, un rectángulo cuya base es el divisor $dx + e$. Para formar el rectángulo es necesario añadir pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero, tal es el caso de $x - x$, $3 - 3$, $x^2 - x^2$. El cociente es la altura del rectángulo y el residuo es la cantidad de fichas de valor 1 que no forman parte de dicho rectángulo. Considerar el siguiente ejemplo:

Realizar la división de $P(x) = x^2 + x + 1$ entre $D(x) = x - 2$.

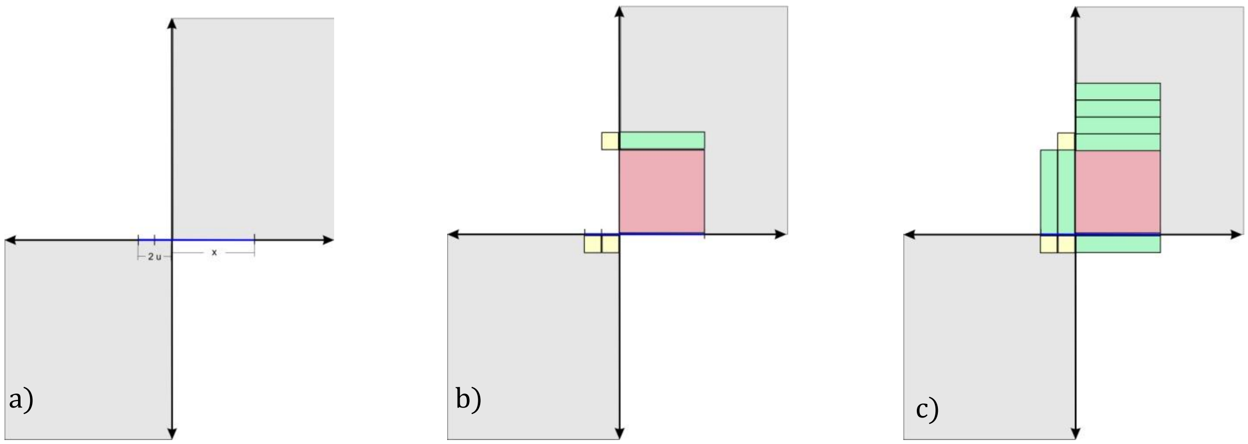
Solución

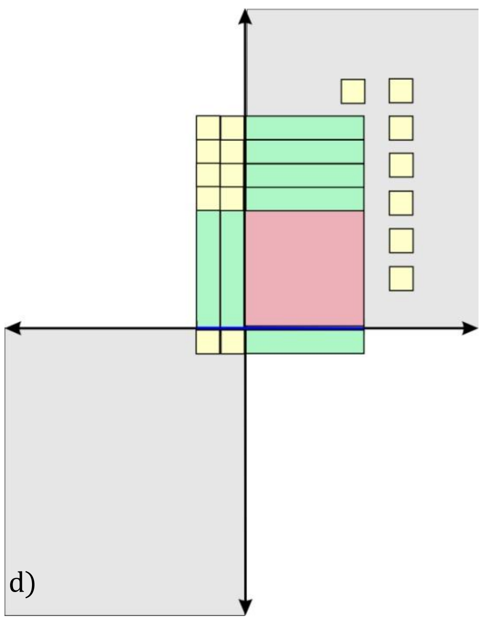
Marcar en el eje de las x, el divisor $D(x) = x - 2$, para ello se ubica una longitud que represente x en el primer cuadrante y en el segundo cuadrante se marcan 2 unidades a partir del punto origen (Figura 13a), en la Figura 13b se muestra el dividendo $P(x) = x^2 + x + 1$, dispuesto en una franja de longitud igual al divisor $D(x) = x - 2$, para lo cual se ha agregado un cero conformado por una pareja de piezas de una unidad.

La Figura 13c muestra el proceso inicial de completar el rectángulo con parejas de ceros, indica que el rectángulo completo se obtendrá únicamente si se añaden 7 fichas de área, una en el segundo cuadrante; si se agregan 7 fichas, es necesario agregar también 7 fichas en el primer cuadrante, indicando que las parejas de fichas algebraicamente equivalen a cero.

---

25. Dos polinomios A(x) y B(x) tienen entre sí una de las 3 relaciones: A(x) < B(x) (el grado de A(x) es menor que el grado de B(x)), A(x)>B(x) (el grado de A(x) es mayor que el grado de B(x)) y A(x)=B(x) si y solo si los coeficientes de las variables de A(x) corresponden a los coeficientes de las variables de B(x).
Con respecto a los grados de los polinomios, se tendrá que si P(x) es de grado n y D(x) es de grado m, con n>m, resulta que Q(x) es de grado (n-m), y el resto R(x) es de grado menor a m, o no tiene grado.





La figura 12d muestra el resultado de dividir $P(x) = x^2 + x + 1$ entre $D(x) = x - 2$, el cociente de la división se identifica en la altura del rectángulo y el residuo está en las piezas sobrantes ubicadas fuera del rectángulo.

De este modo, el cociente resulta de la operación:

$$Q(x) = -1 + x + 4$$

Por lo que:

$$Q(x) = x + 3$$

Además, el residuo $R(x)$, está dado por:

$$R(x) = 7$$

Figura 12. a) Ubicación de $D(x) = x - 2$; b) Ubicación de $P(x) = x^2 + x + 1$ en la franja definida por $D(x)$; c) Construcción del rectángulo, agregando piezas que algebraicamente son cero; d) Resultado de la división (cociente y residuo).

Problema 1

Vaciado de una pileta

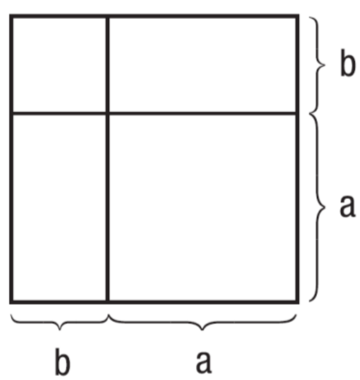
Se necesita vaciar una pileta que contiene 48,000 L de agua. Para ello dispone de una bomba que desagua 6,000 L por hora.

1. Escriba una expresión que le permita ir calculando el volumen de agua que queda en la pileta en relación a la variable t (tiempo) del funcionamiento de la bomba, para ello responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuánta agua quedará al cabo de 1 hora?, ¿y al cabo de 2?
   b) ¿Y luego de 5 horas?
   c) ¿Cuánto tiempo se necesitará para vaciar la pileta?
   d) Escriba un polinomio de la forma P(t) .
   e) Deduzca un valor t para que el polinomio P(t) sea cero. ¿Qué indica t?

Problema 2

Geometrización

Podemos asociar algunas expresiones algebraicas con el cálculo de áreas de figuras geométricas. Por ejemplo, tenemos un cuadrado de lado $(a+b)$, donde a y b son dos números reales cualesquiera. Ver figura.



¿Cuáles de las siguientes igualdades pueden relacionarse con el gráfico? Para los casos que se seleccionen, indicar si son verdaderas, o no, las igualdades.

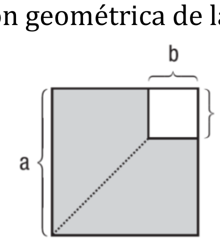
i) $4(a+b) = a^2 + b^2$
ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
iii) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a^2b^2$
iv) $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$

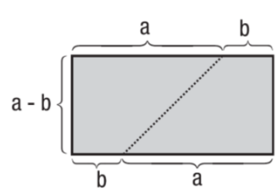
Problema 3

Diferencia de cuadrados

Mediante la ilustración que se muestra a continuación, se observa que recortando el cuadrado de lado a en la línea punteada, se deduce un rectángulo de lados $a-b$, $a+b$. Deduce a partir de la ilustración una justificación geométrica de la identidad:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$





REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Acevedo de M., Myriam y Folk de L. (1997), *Redescubriendo el Álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia-Colciencias.
2. Boyer, Carl (1996), *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid.
3. Canon L. *Baldosas Algebraicas*. Biblioteca Nacional de manipuladores virtuales. Disponible en http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_1_t_2.html?open=activities. Accesado en 12/09/2011.
4. Dante L. (2004), *Tudo é matemática*. Editorial Ática. Sao Paulo.
5. Dienes Z., (1971), *El aprendizaje de las matemáticas*, Ed. Ángel Estrada y Cia. S. A. S. Argentina.
6. Grupo Arzaquiel (1993), *Ideas y actividades para la enseñanza del álgebra*, Madrid, Editorial Síntesis, S. A.
7. Miguel A. (2004), *História na Educaçao Matemática: Proposttas e Desafíos*. Belo Horizonte, Auténtica.
8. Pijeira C. *Matemáticas: La Época Dorada (600 a. C.-415 d. C.) El aporte Científico y Metodológico de los Sabios de la Grecia Antigua*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Matanzas, Cuba.
9. Sánchez P. (1991), *Elementos de Euclides*. Madrid, Editorial Gredos.
10. Soto F., Mosquera S., Gómez C. (2005), *La caja de polinomios.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria, junio, año/vol. XIII, número 001, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Lección 5 | 8° grado | Unidad 4 | Tiempo: 10 horas clase

Factorización de expresiones algebraicas I

Figura 1. **Pierre de Fermat** nació el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne, Francia. Murió el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Es reconocido en matemática por su famoso último teorema de Fermat, además propuso un método de factorización el cual es conocido en la actualidad como **método de factorización de Fermat.**

Introducción del tema

La factorización es un proceso que permite expresar un número entero como producto de dos cantidades más pequeñas, tales que, para un número n, se identifican a y b como divisores de n y, en consecuencia, se tiene que $a \cdot b = n$.

En matemática, han sido muchos los esfuerzos por definir procesos que faciliten la factorización de cantidades o al menos elaborar criterios para decidir qué cantidades son o no son factorizables. Todas estas herramientas son adoptadas en Álgebra para determinar factores de expresiones algebraicas, conocido este proceso como **factorización de expresiones algebraicas.**

La enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas en la juventud salvadoreña, es tratada mediante el uso de los ya conocidos casos de factoreo. Cada caso de factoreo responde a un conjunto de polinomios que cumplen características comunes, es así como se mencionan los diversos casos de factoreo para diversas expresiones algebraicas con características diferentes.

En la presente lección se propone a docente y a estudiantes un proceso que no esté ligado directamente al uso de casos de factoreo; más bien, se busca que docente y estudiantes aprendan a factorizar mediante la geometrización de expresiones algebraicas y las herramientas brindadas con la multiplicación y división de polinomios con la caja de polinomios; además, se explica una interesante aplicación de la factorización mediante el método de factorización de Fermat.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, cuantificar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Interpretar relatos históricos que describen la creación de métodos y técnicas que facilitan la comprensión de la factorización.
– Implementar elementos geométricos para ilustrar polinomios e identificar mediante figuras los factores que multiplicados entre sí generan una determinada expresión algebraica.

Presaberes

– Multiplicación y división de polinomios.
– Área de figuras planas.

LA FACTORIZACIÓN EN LA HISTORIA

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Factorización

La **factorización** es una operación algebraica utilizada para expresar un **número** o expresión algebraica como el producto de otros factores más pequeños. Es decir, la multiplicación de estos factores da como resultado el número o expresión original.

Elemento neutro

En aritmética y álgebra, se denomina elemento neutro a un número al que llamaremos n, tal que el producto de una cantidad a con n, resulta a.

$$a \cdot n = a$$

La igualdad anterior solo es verdadera si $n = 1$, por lo que el elemento neutro de la multiplicación es 1.

Pierre de Fermat, nació el 17 de agosto de 1601, en Beaumont-de-Lomagne, Francia. Murió el 12 de enero de 1665, en Castres, Francia.

Su padre era comerciante de cueros y segundo cónsul de Beaumont-de-Lomagne. Se dice que existe un conflicto acerca de la fecha de su nacimiento debido a que tuvo un hermano mayor llamado Pierre, quien murió siendo aún joven. Aunque hay poca evidencia sobre su formación escolar, lo más probable es que fue en el monasterio franciscano local donde la recibió.

Asistió a la Universidad de Toulouse antes de mudarse a Burdeos, durante la segunda mitad de la década de 1620. En Burdeos comenzó sus primeras investigaciones matemáticas serias y en 1962 le dio una copia de su restauración del *Plane loci*[26] de Apolonio a uno de los matemáticos de allí.

Desde Burdeos Fermat fue a Orleáns donde estudió leyes en la Universidad. Recibió una licenciatura en derecho civil y ocupó las oficinas de consejero en el parlamento de Toulouse. Así que en 1631, Fermat era abogado y funcionario del gobierno en Toulouse, y por el cargo que tenía adquirió el derecho a cambiar su nombre de Pierre Fermat a Pierre de Fermat.

En el campo de la factorización, se reconoce un proceso llamado **factorización de Fermat**. Este proceso consiste en factorizar un número al que llamaremos n. La idea que propone Fermat se explica a continuación.

Si n es igual a la diferencia de dos cuadrados[27], se tiene la expresión:

$$n = x^2 - y^2$$

Entonces n puede factorizarse de forma de la forma siguiente:

$$n = (x + y)(x - y)$$

---

ancia de otros objetos en el plano. Por ejemplo, un círculo es un lugar plano, ya que cada
cia desde el punto en el centro.
orma $x^2 - y^2$, se deduce el producto de dos binomios cuyos términos son iguales y la única
los binomios, de esta forma, el producto de la suma y la diferencia de dos cantidades x y y,
drados $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

Para que la diferencia $x^2 - y^2$ resulte n, con n positivo, el valor correspondiente a x^2 tiene que ser mayor que n ($x^2 > n$); en consecuencia, x debe ser mayor que $\sqrt{n}$. A partir de esto comenzamos a introducirnos en el método de factorización de Fermat.

Dado un número entero positivo n que se quiere factorizar, se toma un entero positivo x, tal que x tiene que ser mayor que $\sqrt{n}$, luego se calcula x^2 y se le resta n. Si al hacer este proceso se obtiene un cuadrado perfecto[28], hemos terminado; en caso contrario, se toma $x + 1$ y se calcula $(x + 1)^2$, restamos n y si se obtiene un cuadrado perfecto, se acaba el proceso; en caso contrario, se procede de la misma forma hasta encontrar un cuadrado perfecto.

Para verificar la afirmación anterior, se describe a continuación un ejemplo:

Se desea factorizar el número 13837. Al extraer la raíz cuadrada a 13837 se verifica que está comprendida entre 117 y 118. Se asigna a la variable $x = 118$. Pero al elevar la variable al cuadrado y restando a este resultado el número 13837 se tiene:

$x^2 - n$; Si $x = 118 \quad y \quad n = 13837$, entonces:
$118^2 - 13837 = 87$

Observar que 87 no es un cuadrado perfecto. Por lo que es necesario tomar el valor que sigue después de 118, es decir, 118+1 que es 119. Para $x = 119 \;\; y \;\; n = 13837$ se tiene:

$$119^2 - 13837 = 324$$

324 equivale a 18^2, por lo tanto la factorización de 13837 se expresa mediante la diferencia de $119^2 \; y \; 18^2$.

$$13837 = 119^2 - 18^2$$

Por lo que:

$$13837 = (119 + 18)(119 - 18)$$
$$13837 = (137)(101)$$

Para comprobar la efectividad del método de Fermat para factorizar números mediante la diferencia de cuadrados, es necesario utilizar cantidades cada vez más grandes. Para tal propósito se propone el siguiente ejemplo:

Se desea factorizar el número 2027651281 mediante el método de Fermat. La raíz cuadrada del número está comprendida entre 45029 y 45030. Se inicia con $x = 45030$, y se efectúa el siguiente proceso:

$$45030^2 - 2027651281 = 49619$$

28. Un número cuadrado perfecto es aquel cuya raíz cuadrada es un número entero, por ejemplo 9 es un cuadrado perfecto porque su raíz cuadrada es 3.

En vista de que 49619 no es cuadrado perfecto, se repite el proceso hasta obtener la cantidad cuya raíz cuadrada sea un número entero.

$$
\begin{aligned}
&45031^2 - 2027651281 = 139680 \\
&45032^2 - 2027651281 = 229743 \\
&45033^2 - 2027651281 = 319808 \\
&45034^2 - 2027651281 = 409875 \\
&45035^2 - 2027651281 = 499944 \\
&45036^2 - 2027651281 = 590015 \\
&45037^2 - 2027651281 = 680088 \\
&45038^2 - 2027651281 = 770163 \\
&45039^2 - 2027651281 = 860240 \\
&45040^2 - 2027651281 = 950319 \\
&45041^2 - 2027651281 = 1020^2 \qquad\qquad ¡¡EUREKA!!
\end{aligned}
$$

[29]

La expresión $45041^2 - 2027651281$ resulta 1040400 y en efecto, 1040400 es un cuadrado perfecto ($\sqrt{1040400} = 1020$).

Por lo tanto, la factorización de 2027651281 se define para la diferencia de cuadrados $45041^2 - 1020^2$.

$$
\begin{aligned}
2027651281 &= 45041^2 - 1020^2 \\
2027651281 &= (45041 + 1020)(45041 - 1020) \\
2027651281 &= (46061)(44021)
\end{aligned}
$$

El método de factorización de Fermat muestra los factores que tienen como producto un número n, todo número n está formado por el producto de dos o más números primos.

Los números primos también son conocidos como números enteros "indivisibles", estos números juegan un papel muy importante dentro de la teoría de la divisibilidad pues a partir de productos de ellos se construyen todos los demás enteros. De forma concreta, se define que un entero $n \neq \pm 1$ es primo y sus únicos divisores son ± 1 y $\pm n$. Un número entero distinto de ± 1 $(n \neq \pm 1)$ es compuesto si este no es primo. Los enteros 1 y -1 no son primos ni compuestos, se llaman unidades. El número cero no se considera en ninguna de estas categorías. De este modo, se tiene que son números primos: ± 2, ± 3, ± 5, ± 7, ± 11, ± 13, ± 17… Son compuestos: ± 4, ± 6, ± 8, ± 9, ± 10, ± 12, ± 14, ± 15, ± 16,…

En las siguientes líneas se analiza un importante resultado llamado *Teorema Fundamental de la Aritmética,* que habla sobre la construcción de los enteros a partir de productos de primos; el contenido del teorema es un resultado que ha sido utilizado desde los inicios del aprendizaje de la aritmética mediante la escritura de números como producto de números primos, por ejemplo:

29. Eureka, ¡Eureka! o Heureka (en griego εὕρηκα, héurēka, "¡Lo he encontrado!"), es una famosa exclamación atribuida al matemático griego Arquímedes.

$12 = 2 \times 2 \times 3$. También se reconoce que la forma de hacerlo no es única, de este modo, $12 = (-2) \times 2 \times (-3)$.

Teorema fundamental de la aritmética: Todo entero distinto de 0 y de ± 1 es producto de primos.

Demostración: Sea $n \neq 0$ y $n \neq \pm 1$ y consideremos primero el caso en que n sea positivo. Si n es primo, entonces se deduce que los factores que lo forman son n y la unidad ($n = n \cdot 1$). Si n no es primo entonces es compuesto, así que es posible escribir n como producto de dos factores primos llamados a y b ($n = a \cdot b$), con a y b enteros positivos y distintos de 1 y de n. Además, se observa que a y b son menores que n. Si a y b son primos, entonces el proceso termina, pero, si alguno de ellos no lo es, entonces se escribe como producto de otros dos números, y así sucesivamente.

El caso en que a sea negativo se reduce al anterior pues podemos aplicar el resultado a $-a$ (que es positivo) y después agregar el signo a alguno de los primeros en la descomposición de $-a$.

Factorización de polinomios

De forma similar a la descomposición factorial de números enteros, los polinomios también se descomponen de forma única en un producto de factores irreductibles[30].

Los polinomios irreductibles son de dos clases:

a) Polinomio de grado uno, de la forma: $ax + b$, donde a y b no poseen divisores comunes.
b) Polinomios de grado dos, con ambas raíces complejas. Es decir: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$.

¿En qué consiste la factorización de polinomios?

Dado un polinomio P(x), se determinan dos productos A(x) y B(x) llamados factores. Se les denomina factores de un polinomio, a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre si dan como producto el polinomio original. Ver figura 2.

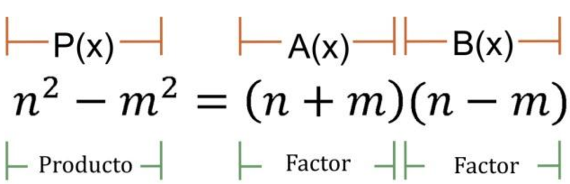


Figura 2. Factorización de polinomios.

Factorizar un polinomio consiste en convertirlo en el producto indicado de sus factores.

Para la enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios se sugiere utilizar materiales que faciliten la abstracción de estos conceptos mediante procesos concretos. De este modo, se propone un conjunto de actividades en el que se utiliza figuras geométricas, específicamente rectángulos y cuadrados, para indicar los términos de un polinomio P(x), y haciendo corresponder el área de la figura con el polinomio del cual se deducen los factores que generan P(x), asignando a cada factor el ancho y largo de la figura.

30. Eureka, ¡Eureka! o Heureka (en griego εὕρηκα, héurēka, "¡Lo he encontrado!"), es una famosa exclamación atribuida al matemático griego Arquímedes.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Las siguientes actividades pretenden acercar al estudiantado a la factorización mediante el uso de figuras planas (cuadrados y rectángulos). La visualización geométrica de expresiones algebraicas fue desarrollada en la lección 4, de multiplicación y división de polinomios. Se recomienda utilizar de referencia la información contenida en dicha lección y utilizar los conocimientos previos para visualizar la factorización y que el estudiantado la utilice de forma natural sin tener que memorizar casos de factoreo.

Actividad 1 Geometrización de expresiones algebraicas.

Objetivo

Brindar al estudiante herramientas que faciliten la comprensión de la factorización de expresiones algebraicas.

Materiales

Regla.
Papel de color (rosado-rojo, verde, amarillo).
Tijera.
Marcador.

Indicaciones

Elaborar figuras geométricas: cuadrados pequeños de color amarillo ($2cm \times 2cm$), cuadrados de color rosado ($10cm \times 10cm$) y rectángulos de color verde ($10cm \times 2cm$). Ver Figura 3.

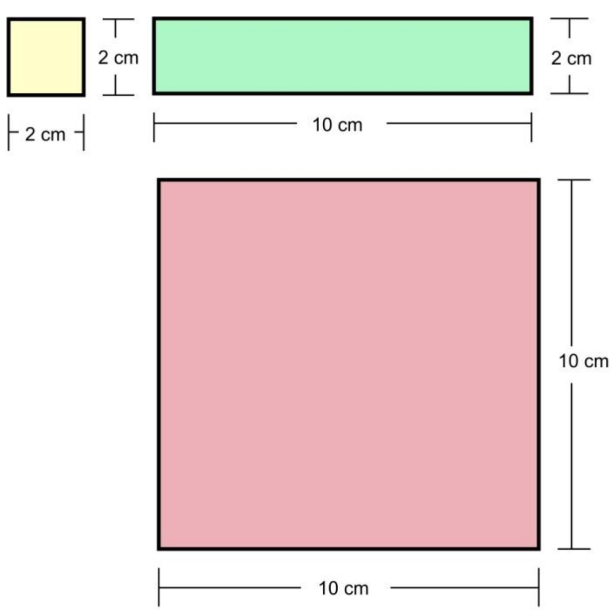


Figura 3. Dimensiones de las piezas que se utilizarán en la actividad.

Invitar al estudiantado a elaborar las piezas con los materiales descritos. Es indispensable que cada estudiante tenga un juego de piezas como las que se describe en la Figura 3. Aclarar que a cada pieza le corresponde un valor específico; de este modo, el cuadrado de 2cm de lado equivale a una unidad, el cuadrado de 10 cm de lado indica la expresión algebraica x^2, y el rectángulo de 10cm x 2 cm indica la expresión x.

Al agrupar dos o más figuras representan expresiones algebraicas que hacen referencia a polinomios, pero, además de agrupar diversas piezas, es necesario establecer un arreglo entre estas, es decir, el objetivo primordial al utilizar estas piezas es generar rectángulos o cuadrados.

Con ayuda de las piezas que se han creado, resolver las situaciones que se plantean a continuación:

Descubre cómo se forman las secuencias de las figuras y anota en la tabla su perímetro y área.

Secuencia 1

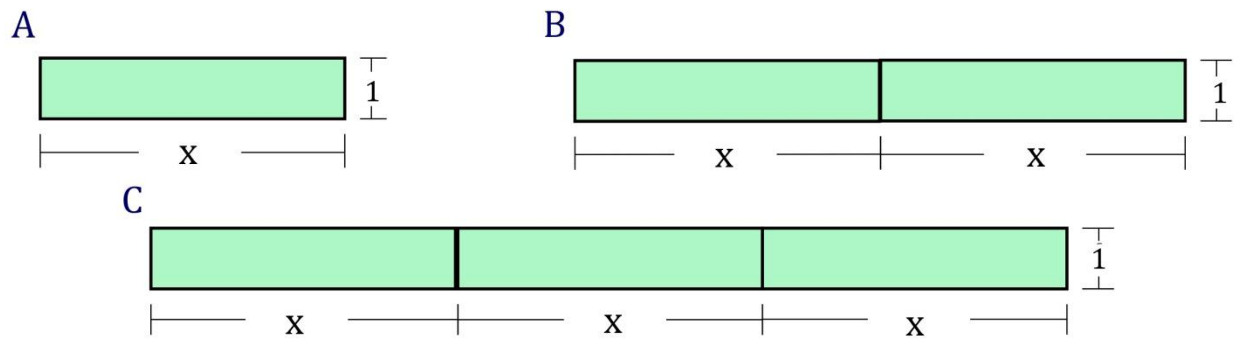


Figura 4. Secuencia 1, ilustraciones A, B y C.

Secuencia 2.

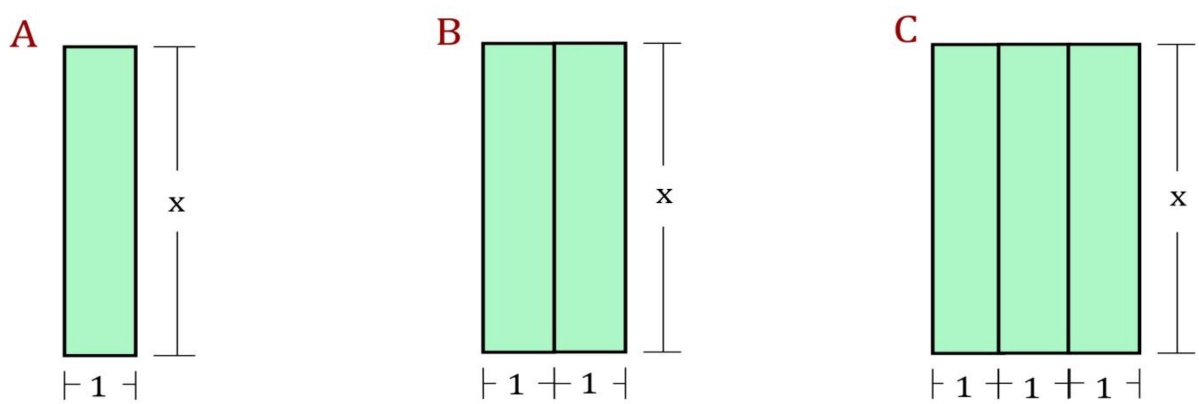


Figura 5. Secuencia 2, ilustraciones A, B y C.

Llenar las siguientes tablas con ayuda de las figuras que se muestran en la secuencia 1 y 2. A partir de los resultados obtenidos, elaborar conclusiones y deducir lo que sucede con el perímetro y área de las diversas representaciones.

Tabla 1. Análisis de las secuencias 1 y 2

Secuencia 1		
Figura	Perímetro	Área
4A		
4B		
4C		

Secuencia 2		
Figura	Perímetro	Área
5A		
5B		
5C		

A partir de la información anterior, deduce el perímetro y área de las figuras que consideres que siguen según la secuencia.

D		
E		
F		

D		
E		
F		

Argumenta las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué va cambiando en los perímetros de la secuencia 1?
2. ¿Qué va cambiando en los perímetros de la secuencia 2?
3. Observa la información de la tabla 1, analiza el área de las figuras de las secuencias 1 y 2. Analiza la expresión algebraica resultante y argumenta lo que sucede con el área de las figuras.

Actividad 2. Perímetro y área de figuras geométricas compuestas.

Objetivo

Deducir expresiones algebraicas a partir de representaciones geométricas.

Materiales

Cuadrados de color amarillo (2 cm x 2 cm).
Cuadrados de color rosado-rojo (10 cm x 10 cm).
Rectángulos de color verde (10 cm x 2 cm).

Indicaciones

Brindar a cada estudiante los materiales que se describen en la Actividad 2. Con estos materiales tendrá que formar las superficies que se detallan en la Figura 6 y a continuación deducir el perímetro y área. Se recomienda hacer preguntas indagatorias acerca de las longitudes de los lados de las figuras y el resultado que se obtiene al multiplicar las longitudes del **largo y ancho** (base y altura del rectángulo). Observar la correspondencia entre el producto de las longitudes de las figuras y la suma de los elementos que las conforman.

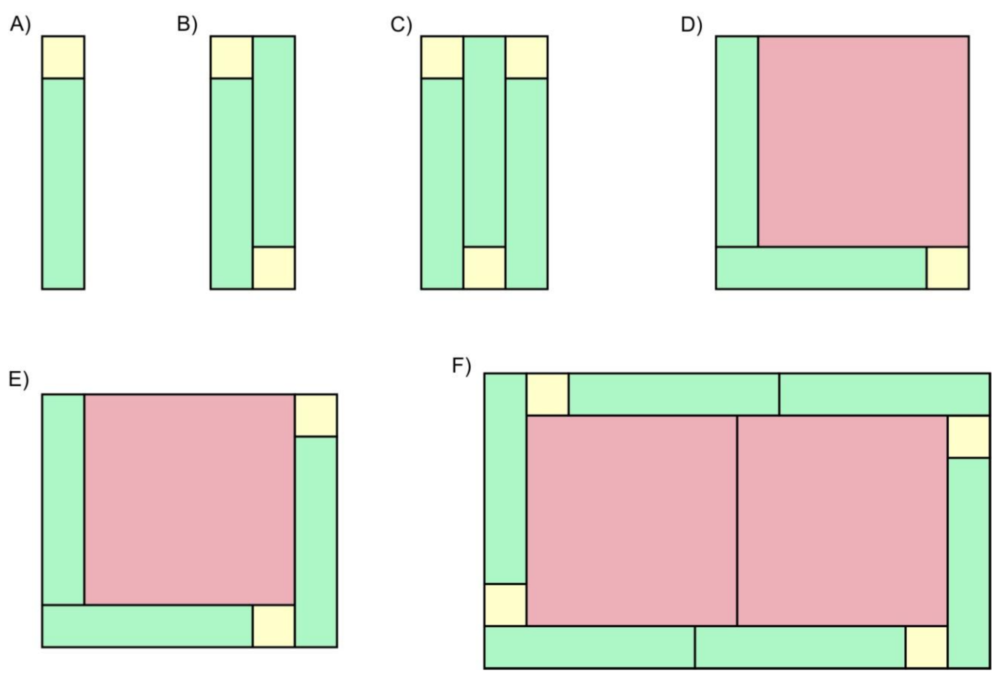


Figura 6. Relación entre superficie y el producto de las longitudes.

Actividad 3. Expresiones algebraicas equivalentes.

Objetivo

Reconocer que los factores de un polinomio son una expresión de equivalencia de la forma $P(x) = (ax \pm b)(bx \pm c) \ldots$

Materiales

Cuadrados de color amarillo (2 cm x 2 cm).
Cuadrados de color rosado-rojo (10 cm x 10 cm).
Rectángulos de color verde (10 cm x 2 cm).

Indicaciones

Observa las figuras que se muestran a continuación, deduce las longitudes del ancho y largo, luego determina el área de los cuadrados y rectángulos que las conforman, y después relaciona los datos de la figura mediante la expresión algebraica que denota el área de rectángulos y cuadrados ($A = b \times h$; $A = ancho \times largo$).

Recordar que para indicar la multiplicación de expresiones algebraicas es común utilizar la notación de punto o paréntesis ($a \cdot b$; $(a)(b)$). El símbolo ($\times$) no se utiliza para evitar confusión con la variable x.

Ejemplo:

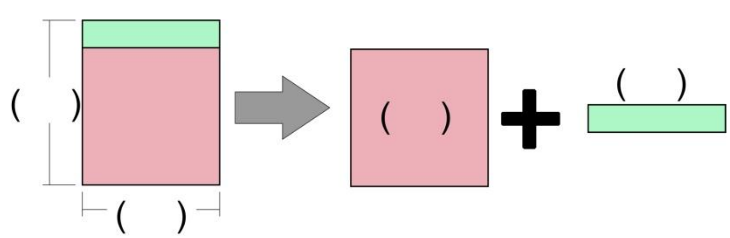


Tabla 2. Área de figura 7.

Ejemplo		
base	**altura**	**Área**
x	$x + 1$	$x^2 + x$

Figura 7. Representación algebraica de la operación propuesta mediante figuras geométricas

Explicación

La Figura 7 muestra un rectángulo conformado por dos figuras, la base del rectángulo es definida por la base del cuadrado de lado x, en consecuencia la base del rectángulo será x. De forma análoga, la altura del rectángulo está conformada por dos partes, una de ellas corresponde al cuadrado de lado x y la otra parte a la unidad, por lo que la altura se define por la suma $x + 1$. La superficie de la figura total está dada por la superficie de cada una de las partes que la conforman.

Si se descompone la figura se visualiza el cuadrado de lado x, cuya área es x^2; también se tiene el rectángulo de base x y altura 1, cuya área es x. En definitiva, el área se identifica como la suma de cada una de sus partes $x^2 + x$.

Verificar este proceso, realizando el producto de la base y altura del rectángulo inicial y comparar este resultado con el que se obtuvo con las figuras geométricas. Explicar que la superficie del rectángulo corresponde al polinomio $P(x) = x^2 + x$, al factorizar p(x) se tienen los factores x y $x + 1$, que son la base y altura del rectángulo respectivamente, por lo que $x^2 + x = (x)(x + 1)$.

Proponer al estudiantado resolver las siguientes situaciones:

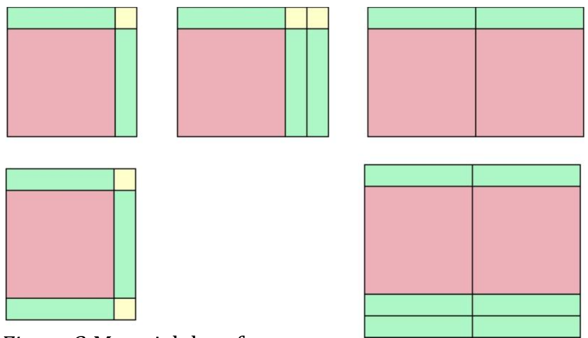


Figura 8. Material de refuerzo.

Para resolver las situaciones que se plantean en la Figura 8, usar como ejemplo el proceso descrito en la Figura 7. Motivar al estudiantado a deducir los elementos que se indican y completar la tabla 2 para cada uno de los casos.

En los ejemplos e ilustraciones de las actividades que se han mostrado en esta lección, se detallan procesos donde cada estudiante construye expresiones algebraicas a partir de figuras geométricas. El factor común de las actividades reside en que únicamente se ha trabajado con figuras agrupadas, con la intención de formar con estas, cuadrados y rectángulos. A continuación, se propone el abordaje metodológico con ayuda de figuras geométricas de la factorización de expresiones algebraicas que se restan, y posteriormente se aterriza en el estudio de la factorización por el método de Fermat.

Se tiene un cuadrado de lado a, cuya área se indica por la expresión a^2, luego en la esquina superior derecha de este cuadrado se ubica un segundo cuadrado de longitud b tal que $a > b$ (son longitudes de figuras geométricas, en consecuencia las longitudes deben ser positivas). El área del segundo cuadrado está dada por b^2. Al poner un cuadrado sobre el otro, se observa que existe una región que no es cubierta por b^2 (figura 9). ¿Puedes determinar la superficie de esta región?

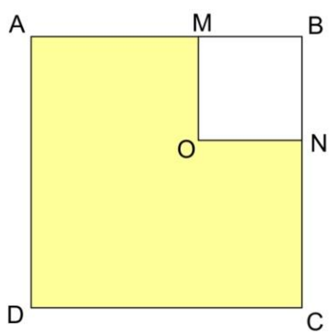


Figura 9. Diferencia de cuadrados.

La superficie de la región sombreada está determinada por la diferencia $a^2 - b^2$.

En la Figura 9, se ha ubicado en cada vértice de los cuadrados una letra, esto facilitará el análisis y resolución de la situación.

En el cuadrado ABCD, los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ son iguales, en consecuencia $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$, sobre este cuadrado se ha dibujado el cuadrado MBNO, donde $\overline{MB}, \overline{BN}, \overline{NO}, \overline{OM}$ son iguales, y se tiene que $\overline{MB} = \overline{BN} = \overline{NO} = \overline{OM} = b$.

$\overline{MB}$ Está sobre $\overline{AB}$, y se identifica que $\overline{AB} > \overline{MB}$, de forma análoga BN se encuentra sobre $\overline{BC}$ y $\overline{BC} > \overline{NB}$, dado que $\overline{MB} = \overline{BN}$ y $\overline{AB} = \overline{BC}$ se deduce que $\overline{AM} = \overline{NC}$.

¿Cuánto mide $\overline{AM}$ en función de a y b? Puesto que $\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB}$ con $\overline{AB} = a$ y $\overline{MB} = b$, se tiene que $AM = a - b$, además $AM = NC = a - b$. De este modo, es posible encontrar el área de la región sombreada trazando un segmento de recta; prolongando el segmento MO y cortando el lado DC del cuadrado ABCD, se forman dos rectángulos, ONCP y AMPD, cuyas longitudes se muestran en la Figura 10.

La superficie del polígono irregular ADCNOM está dada por la suma de las superficies de los rectángulos ADPM y OPCN.

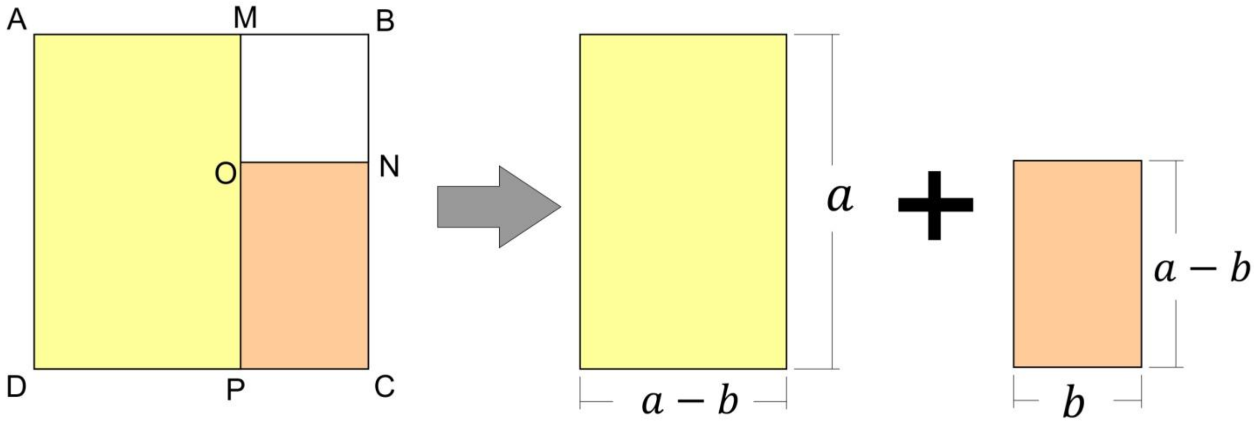


Figura 10. Superficie del polígono ADCNOM.

Los rectángulos que se extraen del polígono ADCNOM, tienen un lado en común, cuya longitud es $a-b$, si se toman los dos rectángulos y se unen estos, haciendo coincidir el lado común se forma el rectángulo que se muestra en la Figura 11.

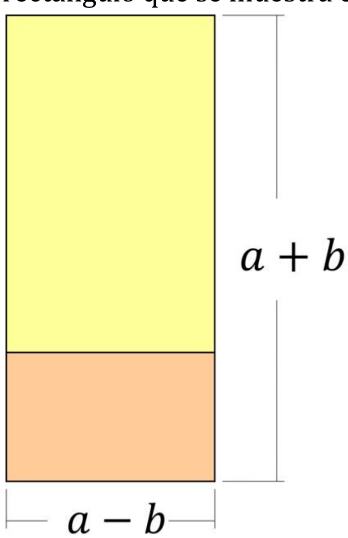


Figura 11. Factores de la diferencia de cuadrados.

Según la Figura 11, la expresión a^2-b^2, que se indicó en la figura 9, puede expresarse como el producto de los binomios $a+b$ y $a-b$; esto se deduce a partir de que la primera y segunda expresión hacen referencia a la misma superficie. De este modo, se tiene la siguiente expresión.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Esta expresión es comúnmente conocida como diferencia de cuadrados y fue utilizada por Fermat para elaborar su método de factorización.

Fermat propone que todo número entero positivo puede expresarse en términos de la diferencia de dos cuadrados perfectos y, en consecuencia, también pueden expresarse como la suma por la diferencia de la raíz cuadrada de las cantidades.

Para comprobar la veracidad del método de factorización de Fermat, se tomará inicialmente el número 7; de antemano se reconoce que 7 es un número primo, además es impar y sus factores son 7 y 1.

Para aplicar el método de factorización de Fermat, es necesario conocer una aproximación decimal de la raíz cuadrada de 7, dado que $\sqrt{7}=2.6457\ldots$[31]

31. Recordar que el resultado de $\sqrt{6}$ pertenece al conjunto de los números irracionales, debido a que posee infinitas cifras decimales no periódicas.

De la expresión decimal de $\sqrt{7}$, se estima que su ubicación en el plano se encuentra entre los números 2 y 3. Tomar el número 3 y efectuar una prueba que consiste en elevarlo al cuadro ($3^2 = 9$), y posteriormente restar el número 7, ($3^2 - 7 = 2$). Puesto que 3 no es un cuadrado perfecto, se realizará la misma prueba, pero ahora con el número 4.

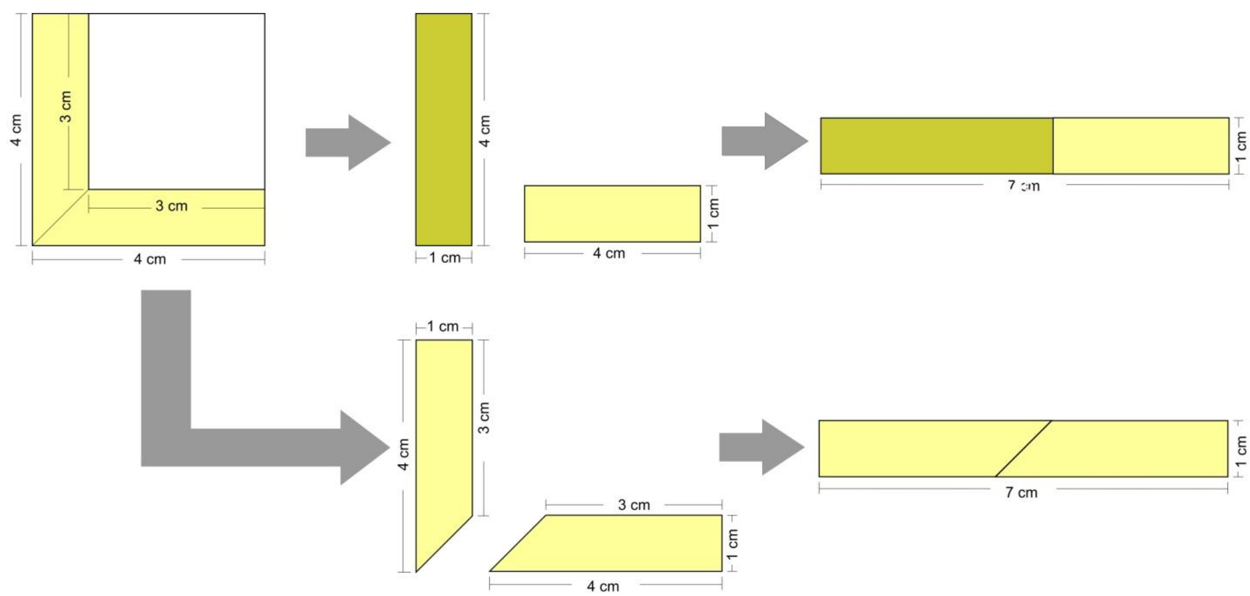
$$4^2 - 7 = 9$$

El número nueve es cuadrado perfecto puesto que $\sqrt{9} = 3$, además $3^2 = 9$. Con los datos anteriores se deduce que 7 puede escribir como la diferencia de cuadrados de 9 y 4, de la siguiente forma:

$$7 = 4^2 - 3^2$$

Con ayuda de construcciones geométricas es posible determinar los factores de 7 aplicando la diferencia de cuadrados, por lo que se sugiere que los estudiantes elaboren dibujos o recortes de cuadrados de longitud 4 y 3.

$$7 = 4^2 - 3^2 = (4 + 3)(4 - 3)$$



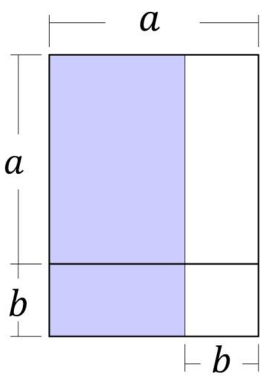
Analiza, comprueba y argumenta

1. ¿El método de factorización de Fermat es aplicable para cualquier número entero?
2. ¿Qué sucede si el número es par y no es primo?
3. ¿Y si el número es impar y no primo?

A partir de la información obtenida en las preguntas 1, 2 y 3, analiza con tu grupo y argumenta en qué casos es posible aplicar el método de factorización de Fermat.

Problema 1. Diferencia de cuadrados.

Un participante ha analizado las fases I y II del proyecto tecnológico y, con base en sus necesidades, planea como alternativa el cultivo de plantas medicinales (las condiciones del terreno y clima son favorables para el crecimiento de éstas). En su pueblo cuentan con un terreno rectangular; una parte será destinada al cultivo (región sombreada); a partir de la figura, deducir las longitudes del ancho y largo del terreno, además determina la longitud del área a cultivar.



Encuentra el área de los dos rectángulos pequeños que no fueron cultivados.

Encuentra la diferencia de las áreas en la parte a y la parte b.

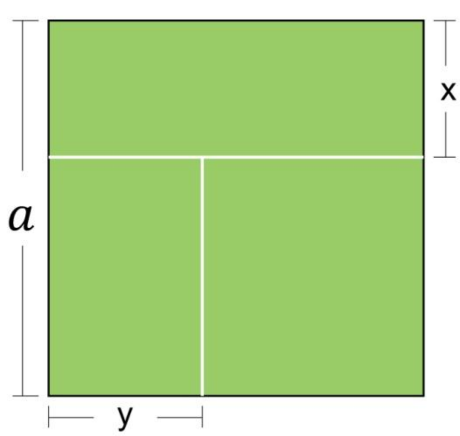
Problema 2. Cambio de dimensiones.

María, Juana y Francisca han heredado de su abuelo el terreno que aparece en la figura, que tiene forma de cuadrado de lado a.

A María le corresponde la franja vertical de x metros; a Juana, la franja horizontal de y metros y a Emilia, el resto.

Escribe mediante polinomios las siguientes medidas:

a) La superficie de terreno correspondiente a Francisca.
b) El área que heredan María y Elvira. Calcula la relación entre estas dos áreas si el terreno inicial tiene de lado 100 metros , y las anchuras de las franjas son de 30 y 40 metros, respectivamente.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

11. Acevedo de M., Myriam y Folk de L. (1997), *Redescubriendo el Álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia-Colciencias.
12. Andrews G. (1994). *Number Theory*. Editorial Dover Publications, New York.
13. Boyer, Carl (1996), *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial. Madrid.
14. Canon L. *Baldosas Algebraicas*. Biblioteca Nacional de manipuladores virtuales. Disponible en http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_1_t_2.html?open=activities. Accesado en 12/09/2011.
15. Gaussianos *La factorización de Fermat*, tomado de: http://gaussianos.com/la-factorizacion-de-fermat/
16. Jones, B. (1969). *Teoría de los Números*. Editorial F. Trillas, S.A., México.
17. Miguel A. (2004), *Historia na Educaçao Matemática: Proposttas e Desafios*. Belo Horizonte, Auténtica.
18. O'Connor J and Robertson E. F. (1996), *Pierre de Fermat Biography*, tomado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat.html
19. Pijeira C. *Matemáticas: La Época Dorada (600 a. C.-415 d. C.) El aporte Científico y Metodológico de los Sabios de la Grecia Antigua*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Matanzas, Cuba.
20. Sánchez P. (1991), *Elementos de Euclides*. Madrid, Editorial Gredos.
21. Sanabria G. *Un vistazo a la historia: Fermat y Euler*, tomado de: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/contribuciones-v6-n1-set2005/factorizacion/pag1.html
22. Vorobiov, N. 1984. *Criterios de Divisibilidad*. Lecciones populares de matemática. Editorial Mir, Moscú.

Lección 6 **8° grado** **Unidad 4** **Tiempo:** 10 horas clase

Factorización de expresiones algebraicas II

Figura 1. **Marie-Sophie Germain.** Nació el 1 de abril de 1776 y falleció el 27 de junio de 1831. Entre sus trabajos realizados durante este periodo, está el realizado con el último teorema de Fermat y el que se conoce como teorema de Germain, así también, una propuesta para la factorización mediante la Identidad de Germain.

Introducción del tema

La factorización es una operación que permite expresar un número o expresión algebraica como el producto de dos o más factores primos. Para el conjunto de números naturales se demuestra que todo número natural mayor que 2 tiene al menos dos factores primos.

Con el estudio de números irracionales se abre la brecha hacia el análisis con números reales, esto conlleva a que la factorización no brinde precisamente factores enteros, más bien se considera la factorización como producto de dos factores reales.

A lo largo de la historia, la necesidad de factorizar expresiones algebraicas guió a notables matemáticos a elaborar métodos de factorización para expresiones algebraicas, que fueron consideradas por mucho tiempo como no factorizables en el conjunto de números racionales, para ello se aceptan factores con cantidades que pertenecen al conjunto de números reales.

Es así como Sophie Germain en su estudio de la matemática y en consecuencia de su arduo trabajo por buscar una explicación al último teorema de Fermat, propone una identidad con la que explica que toda expresión de la forma $x^4 + 4y^4$ es compuesta y factorizable.

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy)$$

Esta expresión es conocida como identidad de Germain.

En esta lección se incluyen actividades que pretenden mostrar mediante herramientas algebraicas, la factorización de expresiones algebraicas; además, se muestra el análisis de la fórmula cuadrática para estimar el número de soluciones de un polinomio y en consecuencia identificar el número de factores de expresiones de la forma $ax^2 + bx + c$, con ayuda de la complementación de cuadrados.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, cuantificar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Interpretar relatos históricos que describen la creación de métodos y técnicas que facilitan la comprensión de la factorización.
– Implementar la identidad de Germain para factorizar expresiones algebraicas e identificar mediante figuras los factores que multiplicados entre sí generan una determinada expresión algebraica.

Presaberes

– Multiplicación y división de polinomios.
– Área de figuras planas.
– Método de factorización de Fermat.

LA FACTORIZACIÓN EN LA HISTORIA

Marie-Sophie Germain. Nació el 1 de abril de 1776 y falleció el 27 de junio de 1831. Fue la hija mediana de Ambroise-François, un próspero comerciante de seda, y Marie Madelaine-Gruguelin. El hogar de Sophie fue un lugar de encuentro para los interesados en las reformas liberales por lo que estuvo expuesta a discusiones políticas y filosóficas durante sus primeros años.

A la edad de trece años, Sophie leyó un relato de la muerte de Arquímedes[32] a manos de un soldado romano. Ella se conmovió por esta historia y decidió que ella también debía convertirse en un matemático. Sophie prosiguió sus estudios, aprendió por si misma latín y griego. Leía a Newton y Euler envuelta en mantas durante las noches, mientras sus padres dormían.

Con la intención de separar a Sophie del mundo de las matemáticas, la privaron de fuego, luz y sus libros, pero esto no fue suficiente para detenerla en su afán por descubrir nuevos conocimientos matemáticos. Con el tiempo sus padres disminuyeron su oposición a sus estudios, y aunque Germain no se casó ni obtuvo una posición profesional, fue apoyada económicamente por su padre durante toda su vida.

Sophie obtuvo apuntes de clase de muchos cursos de la Escuela Politécnica. Las mujeres no han podido estudiar en la Escuela politécnica de París hasta 1972, pero eso no impidió que tuviera acceso a las enseñanzas de Lagrange[33], consiguió los apuntes a través de un antiguo alumno que era amigo de la familia, Antoine Auguste Le Blanc, y llegó a presentar a Lagrange un trabajo firmado con el seudónimo de M. Leblanc.

Presentó un documento cuya originalidad y perspicacia hizo que Lagrange se decidiera a busca al autor. Cuando descubrió que M. Leblanc era mujer, sintiendo respeto por su trabajo se convirtió en su patrocinador y consejero matemático.

Germain escribió a Legendre sobre los problemas sugeridos en el libro *Essai sur le Théorie des Nombres.*

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Identidad algebraica

Se conoce como identidad algebraica a la igualdad entre expresiones algebraicas que se verifica siempre a partir de cualquier valor de las variables que intervienen: Así $xm + xn = x(m + n)$ es una identidad, ya que, cualquiera sea el valor de las variables, la igualdad persiste.

Trinomio cuadrado perfecto

Expresión algebraica que posee tres términos, dos de ellos son cuadrados perfectos, y el tercero corresponde a dos veces el producto de las raíces cuadradas de las otras dos cantidades.

$$a^2 + 2ab + b^2$$

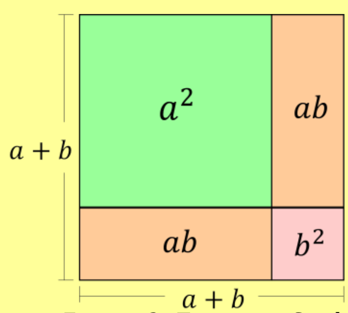


Figura 2. Trinomio Cuadrado Perfecto.

33. Después de tres años de guerra, las legiones romanas consiguieron tomar la ciudad de Siracusa y Marcelo permitió a sus tropas saquear la ciudad, pero ordenó que no mataran a Arquímedes. Un legionario llegó a un jardín donde se encontraba el sabio estudiando las figuras geométricas trazadas en la arena. Arquímedes no sabía que la ciudad había sido tomada, y al ver al legionario gritó "¡No me pises las figuras!". El legionario, que no sabía cómo era Arquímedes lo atravesó con su espada. Tomado de: http://historiasdelahistoria.lacoctelera.net
34. Joseph-Louis de Lagrange (Turín, 1736-París, 1813). Matemático francés de origen italiano. Contribuyó en el estudio de la Astronomía, Álgebra, Teoría de número, Mecánica analítica o lagrangiana.

La información que Germain compartió por correspondencia, gradualmente se convirtió en un importante apoyo en la elaboración de nuevos escritos matemáticos. Legendre incluyó algunos de sus descubrimientos en la segunda edición de la *Théorie,* varias de sus cartas fueron publicadas más tarde en su *Oeuvres Philosophique* [35] de Sophie Germain.

Sin embargo, la correspondencia más famosa de Germain fue con Gauss. Ella había desarrollado un profundo conocimiento de los métodos presentados en su obra *Disquisiciones*[36] *aritméticas*. Entre 1804 y 1809 escribió una docena de cartas dirigidas a Gauss, en un principio, adoptó de nuevo el seudónimo de "M. LeBlanc" porque temía ser ignorada por ser mujer.

Entre sus aportes realizados durante este periodo, está el trabajo con el último teorema de Fermat y el teorema de Germain, así también, una propuesta para la factorización mediante la Identidad de Germain. Este seguirá siendo uno de los resultados más importantes relacionados con el último teorema de Fermat, desde 1738 hasta las contribuciones de Kummer[37] en 1840.

IDENTIDAD DE GERMAIN

La identidad de Germain es reconocida en matemática por su amplia aplicación en la factorización de expresiones algebraicas, que por mucho tiempo fueron consideradas irreductibles. Es conocido que expresiones de la forma $x^2 - y^2$, son factorizables y que a partir de la geometrización de la expresión algebraica, es posible construir un rectángulo cuyas longitudes son $(x + y)$; $(x - y)$. De este modo, se deduce que la superficie de la figura está dada por el producto $(x + y)(x - y)$, y este resultado equivale a la expresión $x^2 - y^2$, en consecuencia: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

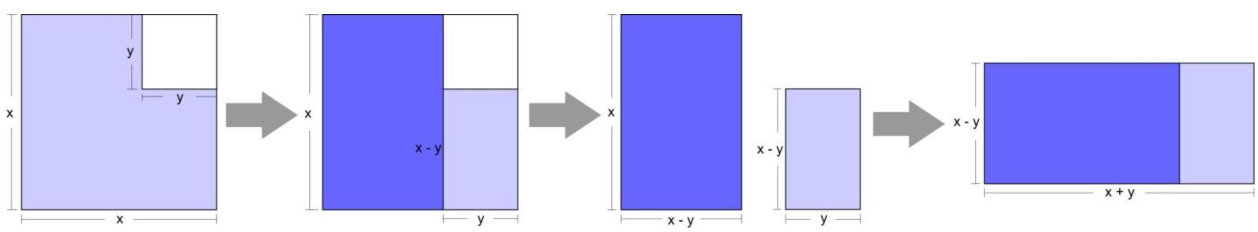


Figura 3. Diferencia de cuadrados.

A raíz del resultado que se obtiene de la descomposición factorial de $x^2 - y^2$, se busca deducir ¿qué ocurre con la expresión $x^2 + y^2$? Comúnmente escuchamos que es una expresión irreductible, por lo tanto no puede ser factorizable.

Sophie Germain, propone una identidad algebraica con la que explica que una expresión de la forma $x^4 + 4y^4$ es compuesta; por ello, es posible encontrar dos factores primos A y B, tales que $A \cdot B = x^4 + 4y^4$.

La demostración de esta importante identidad será estudiada en el desarrollo de la lección.

35. Oeuvres Philosophique; obras psicológicas.
36. Disquisición: análisis, examen y explosión rigurosa y detallada de alguna cuestión matemática.
37. Ernst Eduard Kummer 29 de enero de 1810 en Sorau, Brandeburgo, Prusia-14 de mayo de 1893 en Berlín, Alemania. Fue un matemático alemán. Altamente capacitado para la matemática aplicada, Kummer entrenó en balística a oficiales de la armada alemana; tras esto, enseñó durante 10 años en un Gymnasium, que es el equivalente alemán a un instituto.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$

El polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, es una expresión cuadrática, si $P(x) = 0$. Entonces $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que es posible identificar dos valores para x, tales que al sustituir x en la expresión esta resulta cero, a estos valores se les denomina raíz del polinomio.

Es importante aclarar que no todos los polinomios tendrán dos raíces diferentes, también puede suceder que exista una única raíz o que la expresión no tenga raíces. Para determinar el número de raíces de un polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ es necesario analizar el resultado que se obtiene al evaluar los coeficientes de los términos del polinomio en el discriminante.

El discriminante se obtiene cuando en un polinomio $ax^2 + bx + c = 0$, se efectúa el despeje de variable x, obteniendo como resultado una expresión algebraica que se denomina fórmula cuadrática.

A continuación se explica el proceso por seguir para generar la fórmula cuadrática a partir del polinomio $ax^2 + bx + c$. Es necesario mencionar que dicho proceso necesita de conocimientos relacionados con la resolución de ecuaciones cuadráticas, por lo que la demostración en octavo grado es reservada únicamente para docentes.

Fórmula cuadrática

Partimos de la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b \; y \; c \in \mathbb{R}$, además $a \neq 0$, esto garantiza que la expresión es cuadrática o de segundo grado. Si dividimos la expresión entre a, se obtiene la siguiente expresión, que se ilustra en la Figura 4.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

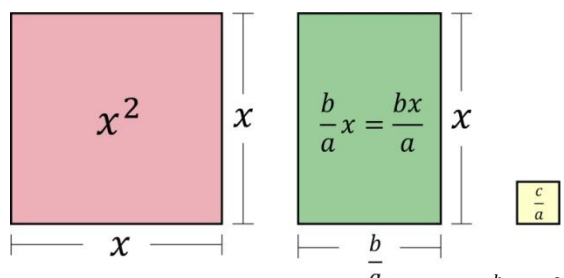
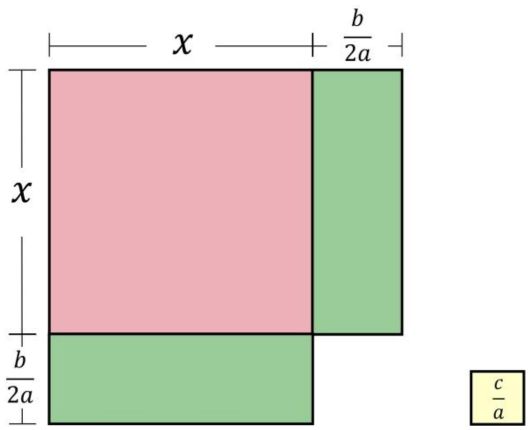


Figura 4. Representación geométrica del polinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

En la Figura 4 se muestra la geometrización del polinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$. Con ayuda de las figuras dibujadas es sencillo continuar con la deducción de la formula cuadrática. Para ello es necesario realizar recortes y adherir piezas. El rectángulo $\left(\frac{a}{b}x\right)$, tendrá que dividirse en dos partes iguales y cada una de estas partes se adhiere a los lados del cuadrado (x^2)

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$



La superficie de la figura que resulta al unir x^2 con $\frac{b}{a}$ es equivalente a la expresión $x^2+\frac{b}{a}x$.

Para completar el cuadrado de lado $x+\frac{b}{a}$, es necesario agregar un cuadrado cuya superficie corresponda a la del cuadrado de lado $\frac{b}{a}$. Para ello se podría utilizar el cuadrado de superficie $\frac{c}{a}$ para ello se tiene que cumplir la igualdad $\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$.

Figura 5. Expresión equivalente a $x^2+\frac{b}{a}x$.

Si la superficie $\frac{c}{a}$ es distinta a $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces será necesario agregar un cuadrado cuya área sí corresponda a $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Para ello se agrega a la expresión $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, un cuadrado de longitud $\frac{b}{2a}$. Para no alterar la expresión, también se restará un cuadrado de la misma longitud, de este modo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$, cero es el elemento neutro de la suma, por lo que la expresión no se modifica.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0$$

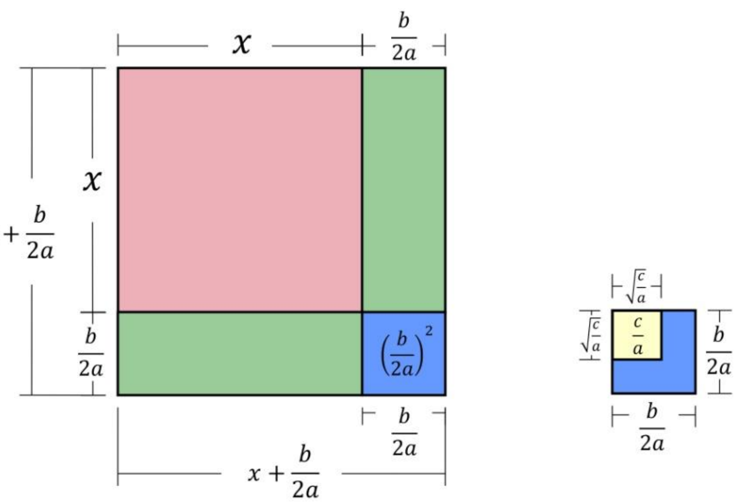


Figura 6. Complementación de cuadrados.

Descubre, analiza, interpreta

La diferencia de cuadrados $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$, es factorizable en el conjunto de números racionales si y solo si $\frac{c}{a}$ es cuadrado perfecto; en caso contrario, no es factorizable, debido a que la raíz cuadrada de $\frac{c}{a}$, no siempre será racional. Por ello, es necesario conocer que la factorización también puede efectuarse para números reales, cuyos factores no son racionales. De este modo, la diferencia 3-2 puede factorizarse mediante la suma por la diferencia de la raíz cuadrada de ambas cantidades: $3-2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Esto implica que $1=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, de forma análoga se pueden factorizar expresiones algebraicas, por ejemplo: $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})-(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

A continuación un proceso llamado *Transposición de términos*, que consiste en mover uno o varios términos de un lado de la igualdad al otro; para ello, se recomienda que se relacione la igualdad con el funcionamiento de una balanza, en la que se procura que los pesos de cada extremo sean iguales y que esta se mantenga en equilibrio. En estudios posteriores se mostrará el proceso de despeje de variables en ecuaciones lineales con una incógnita.

Para transponer $-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})$ del miembro izquierdo al miembro derecho, se debe sumar esta expresión en ambos extremos de la igualdad. Por lo que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

La suma algebraica de $-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)$, es cero, en consecuencia:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Ahora bien, en el miembro derecho de la igualdad se indica una diferencia entre fracciones con distinto denominador. Al desarrollar la diferencia se tiene:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Posteriormente se efectúa el despeje de variable x, por lo que se describe el siguiente proceso:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este resultado se llama *Fórmula cuadrática*, y mediante esta fórmula se pueden identificar lo valores numéricos que sustituidos en el polinomio ax^2+bx+c hagan que resulte cero. En la fórmula cuadrática se identifica la expresión b^2-4ac, que se llama *discriminante*. Analizando el resultado del discriminante se puede estimar la existencia de dos raíces, una raíz o ninguna raíz para un polinomio.

CLASIFICACIÓN DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO MEDIANTE EL DISCRIMINANTE $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

a) $b^2 - 4ac > 0$; en este caso se obtienen dos raíces reales distintas, dadas por: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para una expresión cuadrática completa de la forma $ax^2 + bx + c$.
Por lo que, al factorizar $ax^2 + bx + c$, se tienen dos factores, que se indican a continuación:
$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$.

b) $b^2 - 4ac = 0$; si el discriminante es cero, entonces hay una única raíz real. Por lo que $x_1 = x_2$.
La factorización de $ax^2 + bx + c$, se indica a continuación:
$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2$
Este tipo de polinomios se conoce con el nombre de **trinomio cuadrado perfecto.**
El discriminante cero también corresponde a la expresión $ax^2 + ax_1$.

c) $b^2 - 4ac < 0$; en este caso el polinomio no tiene raíces reales. Posee dos raíces complejas[38] conjugadas y distintas.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Las siguientes actividades pretenden acercar a los estudiantes a la factorización mediante el uso de figuras planas (cuadrados y rectángulos). La visualización geométrica de expresiones algebraicas fue desarrollada en la lección 4 de multiplicación y división de polinomios, se recomienda utilizar de referencia la información contenida en dicha lección y utilizar los conocimientos previos para visualizar la factorización y que el estudiante la utilice de forma natural sin tener que memorizar casos de factoreo.

Actividad 1. factorización de expresiones algebraicas.

Objetivo

Brindar al estudiante herramientas que faciliten la comprensión de la factorización de expresiones algebraicas mediante actividades de cortar y pegar.

Materiales

Regla.
Páginas de papel.
Tijera.
Marcador.

Indicaciones

Algunas expresiones algebraicas pueden representarse mediante la adición de figuras geométricas. En esta actividad se plantean ejercicios en los que el estudiantado construye, a partir de cuadrados y rectángulos, otras figuras equivalentes, mediante procesos de cortar y pegar. Este método de

38. Las raíces complejas pertenecen al conjunto de números complejos. Un número complejo puede ser escrito de la forma a+bi, donde a y b son números reales e i es un número imaginario resultante de la extracción de raíz cuadrada de cantidades negativas.

factorización consiste en cortar y mover las figuras recortadas a cualquier otra posición y pegarla a la figura, para formar otra.

Explicar al estudiantado que este método es muy antiguo y fue usado por civilizaciones antiguas, los babilonios lo utilizaron para resolver problemas relacionados con áreas. Representar geométricamente un problema en el que su solución es un área, es una forma más comprensiva para encontrar su solución, ya que el origen del álgebra tiene sus raíces en la geometría[39].

Este método será ejemplificado mediante la factorización de la expresión $x^2 + bx = -c$ ($x^2 + bx + c = 0$).

Para comenzar, definamos a b y c como dos números positivos, es decir $b > 0 \ \wedge \ c > 0$. El polinomio $x^2 + bx$ se representa con una figura cuadrada de lado x y una figura rectangular de base b y altura x, tal como se muestra en la Figura 7.

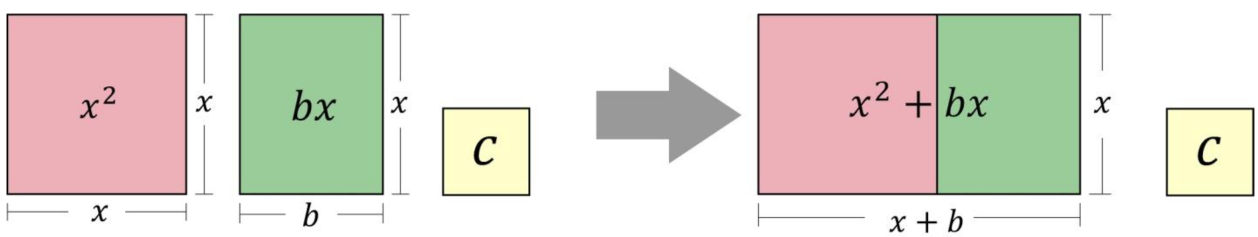


Figura 7. Geometrización del polinomio P(x)=$x^2 + bx + c$.

Se corta la mitad del rectángulo bx, cada una de las partes tiene un área que corresponde a $\frac{1}{2}bx$, se toma una de estas áreas y se pega en la parte inferior del cuadrado de lado x, de tal forma que coincidan los lados de igual longitud (Figura 8).

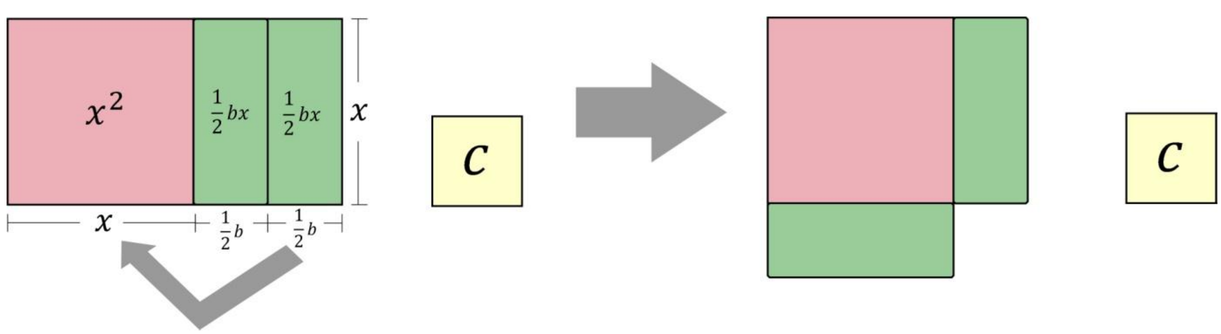


Figura 8. Figuras con superficie equivalente.

Después de pegar el rectángulo de superficie $\frac{1}{2}bx$ en la parte inferior del cuadrado de lado x, queda la ilustración que se muestra en la Figura 8. El área de la figura resultante es equivalente al área del rectángulo de lados $x + b$, x, y la superficie total es $(x^2 + bx)$.

39. Hoyrup, 1987, citado por Radford, 1996, p, 40.

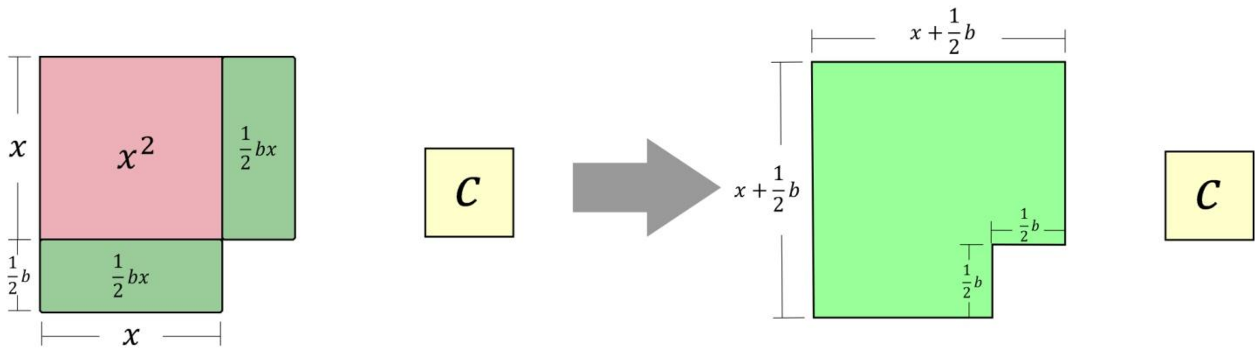


Figura 9. Complementación de cuadrado.

En la Figura 9 se muestra un cuadrado incompleto. Para determinar el área del cuadrado es necesario rellenar el espacio cuadrado de lado $\frac{1}{2}b$, proceso que se denomina *Complementar cuadrado*.

Para complementar el cuadrado se debe evaluar si la superficie de c es suficiente para rellenar este espacio, para ello, es necesario realizar un análisis de la correspondencia entre el valor de c y la superficie del cuadrado de lado $\frac{1}{2}b$.

Análisis

La superficie del cuadrado de lado $\frac{1}{2}b$, está dada por la expresión $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$, si el valor de c es igual a la superficie del cuadrado, es decir $\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = c$; entonces, c es suficiente para complementar el cuadrado, por lo que la expresión $x^2 + bx + c$ se denomina **Trinomio cuadrado perfecto**.

En caso contrario, si $\left(\frac{1}{2}b\right)^2 < c$, entonces es necesario complementar el cuadrado, para ello se agrega a la expresión un cero algebraico, es decir, si se agrega un cuadrado de superficie $\frac{1}{2}b^2$ también hay que quitar el mismo cuadrado. De este modo se garantiza que $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^2 = 0$, y puesto que cero es el elemento neutro de la suma, la expresión algebraica $x^2 + bx + c$ no se modifica.

El proceso de complementar el cuadrado se ilustra en la Figura 10, se ha agregado un cuadrado de lado $\frac{1}{2}b$. La expresión algebraica que se describe mediante la figura es:

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + c - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 \quad \text{(I)}$$

La expresión $x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$ es factorizable, observando el cuadrado se identifica que la longitud de sus lados es $x + \frac{1}{2}b$.

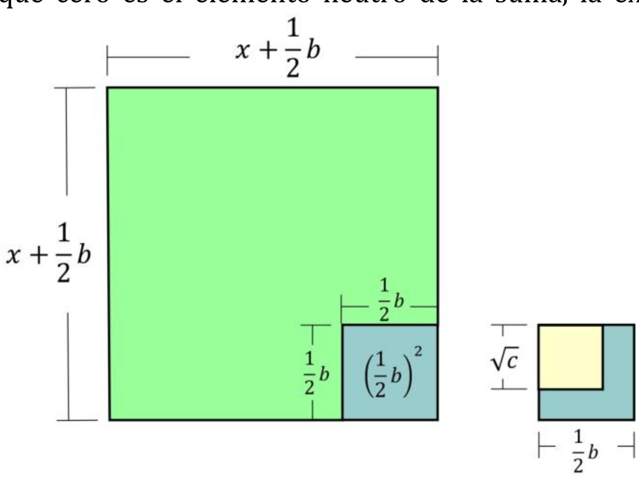


Figura 10. Complementación de cuadrado y diferencia de cuadrados.

Por lo que, los factores de $x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$ son:

$$x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)\left(x + \frac{1}{2}b\right)$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 \quad (II)$$

Sustituyendo este resultado (II) en la expresión (I) , se tiene:

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 + c - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 \quad (III)$$

Ahora se analiza $c - \left(\frac{1}{2b}\right)^2$, esta expresión puede reescribirse como $-\left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c\right)$, que es equivalente. Sustituyendo este resultado en (III) , resulta:

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c\right)$$

Factorizando mediante diferencia de cuadrados $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c\right) = \left[\left(x + \frac{1}{2}b\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\right]\left[\left(x + \frac{1}{2}b\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\right]$$

$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c\right) = \left(x + \frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\right)\left(x + \frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\right)$$

Factorización de expresiones algebraicas aplicando el procedo de complementación de cuadrados.

Ejemplo 1: Factorizar la expresión $x^2 + 8x + 2$.

Ejemplificar el polinomio con ayuda de figuras geométricas, luego tomar el rectángulo que equivale a $8x$ y dividir este en dos partes iguales. Ubicar las partes en los lados de x^2, y posteriormente complementar el cuadrado, ver Figura 11.

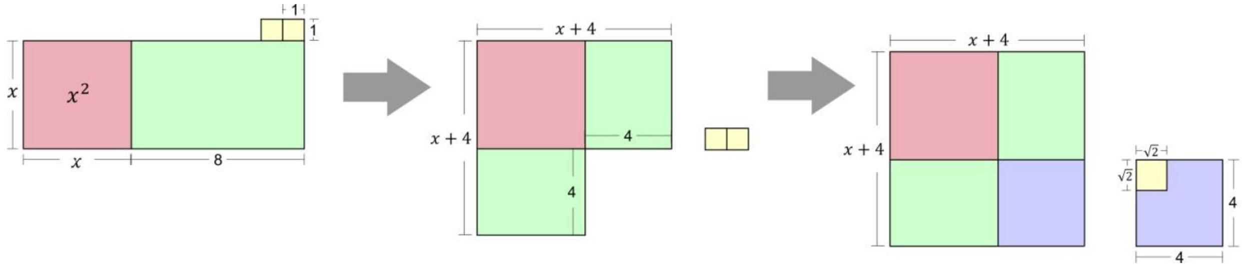


Figura 11. Factorización del polinomio $x^2 + 8x + 2$.

Algoritmo

Con ayuda de las ilustraciones de la Figura 11, se puede elaborar el siguiente algoritmo de factorización.

Se inicia con el polinomio x^2+8x+2, utilizar los términos x^2+8x, y a partir de estos se complementa el cuadrado. Para ello se divide en dos el coeficiente de la variable x de exponente 1, y este resultado se eleva a exponente 2. En consecuencia, de la complementación del cuadrado es necesario quitar el valor agregado, y de este modo se garantiza que $\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2=0$.

$$x^2+8x+2=x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2+2-\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$x^2+8x+2=x^2+8x+4^2+2-4^2$$

El polinomio x^2+8x+4 se indica en la Figura 11 como un cuadrado de lado $x+4$. El resultado de factorizar este polinomio está dado por: $x^2+8x+4=(x+4)(x+4)=(x+4)^2$. Además, la operación $2-4^2$ puede reescribirse como: $-(4^2-2)$. Sustituyendo estos resultados, se tiene:

$$x^2+8x+2=(x+4)^2-(4^2-2)$$
$$x^2+8x+2=(x+4)^2-(16-2)$$
$$x^2+8x+2=(x+4)^2-14$$

Efectuando la diferencia de cuadrados para $(x+4)^2-14$, obtenemos:

$$x^2+8x+2=\left[(x+4)+\sqrt{14}\right]\left[(x+4)-\sqrt{14}\right]$$
$$x^2+8x+2=\left(x+4+\sqrt{14}\right)\left(x+4-\sqrt{14}\right)$$

La factorización de x^2+8x+2, muestra los factores $(x+4)+\sqrt{14}$ y $(x+4)-\sqrt{14}$, el producto de estas dos expresiones generan el polinomio original. Para comprobar el resultado, se sugiere efectuar la multiplicación.

Efectúa y aprende

Brindar al estudiantado un conjunto de polinomios e invitarlo a ilustrar la expresión algebraica mediante figuras geométricas; luego, que aplique el proceso de recortar y pegar; después, que analice y determine el valor que complementa el cuadrado y efectuar la factorización.

x^2+6x+3

x^2+5x+1

$x^2+4x+10$

Factoriza el siguiente polinomio. $x^2-13x+9$

Actividad 2. Factorización mediante la identidad de Sophie Germain.

Al inicio de esta lección se narra la breve biografía de una ejemplar mujer que destacó en el estudio de las matemáticas: Sophie Germain. Ella ha propuesto un método de factorización de expresiones de la forma $a^2 + b^2$, cuyo resultado es llamado *Identidad de Germain.*

Objetivo

Brindar al estudiante herramientas que faciliten la comprensión de la factorización de expresiones algebraicas utilizando conocimientos previos y la relación de estos con nuevas teorías.

Indicaciones

Deducir la identidad de Sophie Germain para la factorización de expresiones de la forma $a^2 + b^2$ mediante el uso de figuras geométricas, posteriormente representar el proceso mediante expresiones algebraicas.

Para el polinomio $a^2 + b^2$ que se ilustra en la Figura 12, se utilizan dos cuadrados de diversos tamaños de longitud a y b. Se busca rellenar los espacios con rectángulos, cuyos lados miden a y b; la superficie de cada rectángulo es ab, puesto que los dos rectángulos son iguales la superficie total de las figuras que se han agregado es $2ab$. Luego, se quita la expresión $2ab$, garantizando de este modo que $2ab - 2ab = 0$.

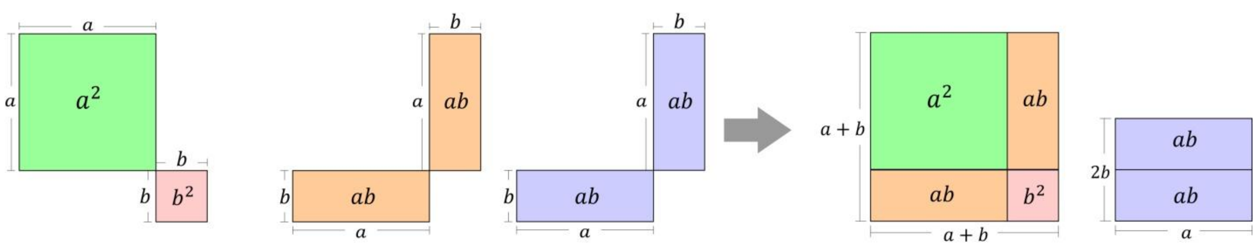


Figura 12. Identidad de Sophie Germain.

Como resultado, se tiene un cuadrado de lado $a + b$ con superficie $(a + b)^2$ y un rectángulo de lados a y $2b$ de superficie $2ab$.

Proceso algebraico.

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$$
$$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$
$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

La expresión $(a + b)^2 - 2ab$ puede factorizarse mediante diferencia de cuadrados.

$$a^2 + b^2 = \left[(a+b) + \sqrt{2ab}\right]\left[(a+b) - \sqrt{2ab}\right]$$
$$a^2 + b^2 = \left(a + b + \sqrt{2ab}\right)\left(a + b - \sqrt{2ab}\right) \quad Ver\ figura\ 13$$

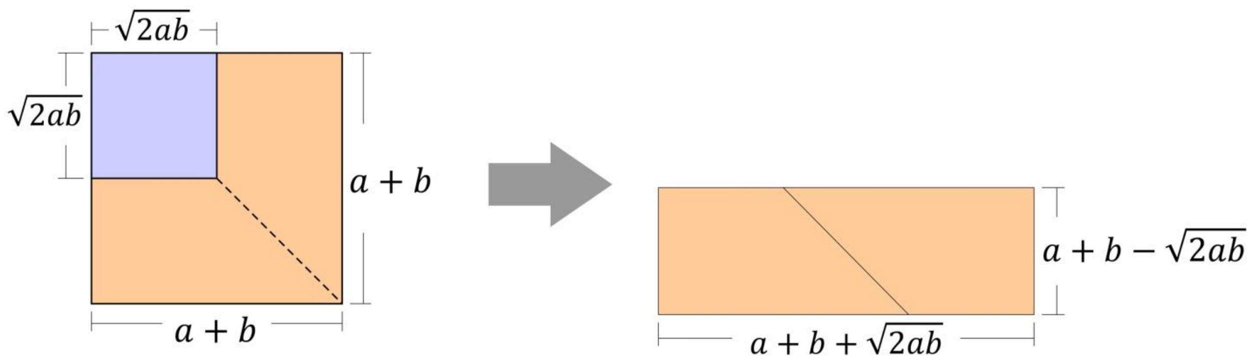


Figura 13. Factorización de $a^2 + b^2$.

Factorización del polinomio $x^4 + 4y^4$

La factorización del polinomio $P(x) = x^4 + 4y^4$, requiere de ciertas modificaciones. Inicialmente, se recomienda sustituir la variable x^4 por a^2, de este modo se tiene que $a = x^2$. De forma análoga se sustituye la variable y^4 por b^2, en consecuencia $b = y^2$. Sustituyendo estos valores en el polinomio original, se tiene:

$$x^4 + 4y^4 = a^2 + 4b^2; \qquad para\ a = x^2 \wedge b = y^2$$

Aplicando el proceso descrito anteriormente, ¿qué término se debe agregar para formar un trinomio cuadrado perfecto? Recordar la geometrización de las expresiones a^2 y $4b^2$. El cuadrado de superficie a^2 tiene lado a y el cuadrado de superficie $4b^2$ tiene lado $2b$. En consecuencia, los lados de los rectángulos que complementan los espacios vacíos tienen lados a y $2b$, y la superficie está dada por $2ab$, puesto que son dos rectángulos; la superficie total de las figuras que se han agregado es $2(2ab) = 4ab$. Recordar que si se agrega $4ab$, es necesario quitar la misma cantidad, de modo que $4ab - 4ab = 0$.

$$a^2 + 4b^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab - 4ab$$
$$a^2 + 4b^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - 4ab$$
$$a^2 + 4b^2 = (a + 2b)^2 - 4ab$$

La expresión $(a + 2b)^2 - 4ab$ puede factorizarse mediante diferencias de cuadrados:

$$a^2 + 4b^2 = \left(a + 2b + \sqrt{4ab}\right)\left(a + 2b - \sqrt{4ab}\right)$$

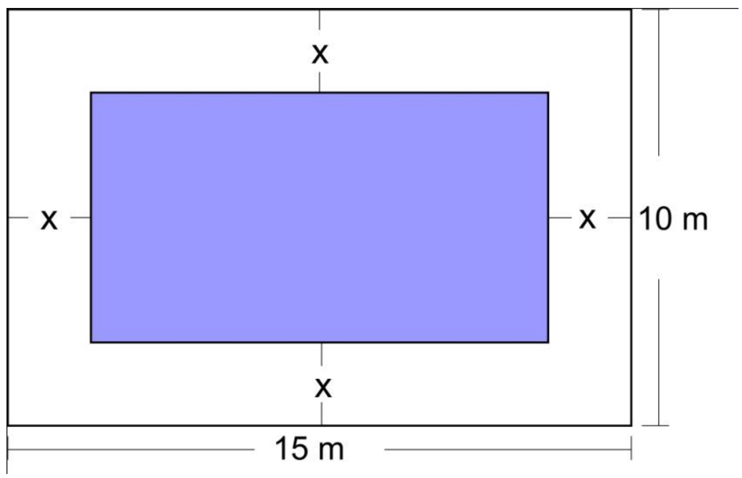
Recordar que $a = x^2 \quad \wedge \quad b = y^2$, sustituyendo estos valores en la expresión anterior, se tiene:

$$x^4 + 4y^4 = \left(x^2 + 2y^2 + \sqrt{4x^2y^2}\right)\left(x^2 + 2y^2 - \sqrt{4x^2y^2}\right)$$
$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \qquad Identidad\ de\ Sophie\ Germain$$

GUÍA DE EJERCICIOS Y APLICACIONES

Ejercicio 1. Áreas de figuras planas.

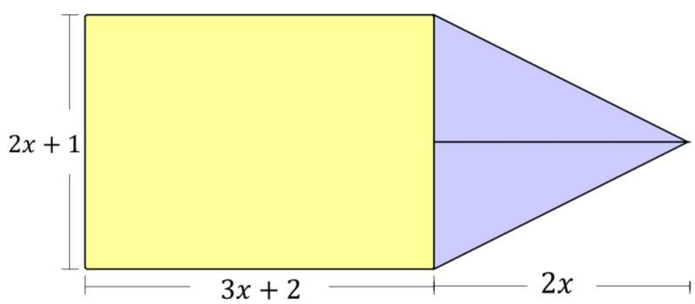
Se construye una piscina rectangular, como muestra la figura:



- Exprese, en función de x el área de la superficie de la piscina.
- Exprese en función de x el área de los azulejos.
- Desarrolle la expresión obtenida y pruebe que el área de los azulejos es $2x(25-2x)$.

Ejercicio 2. Área de figuras planas.

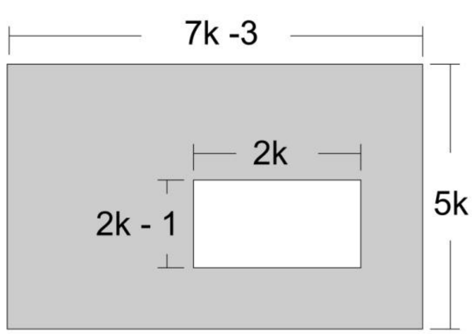
La siguiente figura está compuesta por un triángulo y un rectángulo, cuyas longitudes están expresadas en las mismas unidades, y $x > 0$.

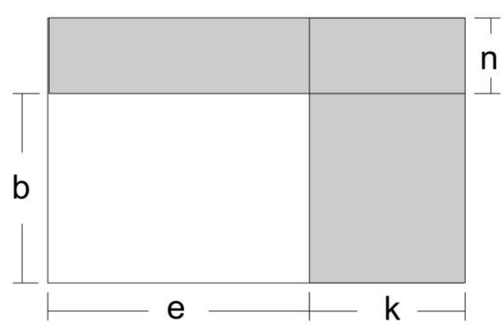


- Deduzca el área de la figura.
- Desarrolle la expresión del área.
- Factorice la expresión del área.
- Encuentre el área si $x = 3\ cm$.

Ejercicio 3. Figuras geométricas.

Exprese el área de las siguientes figuras de dos formas diferentes:





REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

23. Acevedo de M., Myriam y Folk de L. (1997), *Redescubriendo el Álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia-Colciencias.
24. Boyer, Carl (1996), *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid.
25. Canon L. *Baldosas Algebraicas.* Biblioteca Nacional de manipuladores virtuales. Disponible en http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_1_t_2.html?open=activities. Accesado el 12/09/2011.
26. Historia de la historia (2007). *La muerte de Arquímedes*, web page , tomado de: http://historiasdelahistoria.lacoctelera.net/post/2006/12/07/la-muerte-arquimedes. Accesado el 12/10/2011.
27. J.J. O'Connor y E.F. Robertson (1996) *Marie-Sophie Germain, Biografía*. Facultad de Matemática y Estadística, Universidad de St. Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Germain.html. Accesado el 05/10/2011.
28. Miguel A. (2004). *Historia na Educaçao Matemática: Proposttas e Desafios*. Belo Horizonte, Auténtica.
29. Mujeres matemáticas (2006) *Sophie Germain La mujer, innovadora en la ciencia*. Blog de IES Luna de la Sierra–Adamuz, web page, tomado de: http://matematicas.lunadelasierra.org/mujeres/exposicion/sophie-germain/ . Accesado el 07/10/2011.
30. Muñoz A. (2010), *Teorema de Germain*, Matemática en tus manos, web page, tomado de: http://matematicaentusmanos.blogspot.com/2010/08/teorema-de-germain_21.html. Accesado el 10/19/2011.
31. Varios autores (2009), *Álgebra de números reales y complejos*. Curso de posgrado para profesores especialidad en matemática, 27 de noviembre de 2009, Ministerio de Educación.
32. Vorobiov, N. 1984. *Criterios de Divisibilidad*. Lecciones populares de matemática. Editorial Mir, Moscú.

Lección 7 **8° grado** **Unidad 3** **Tiempo:** 10 horas clase

Congruencia y semejanza de triángulos

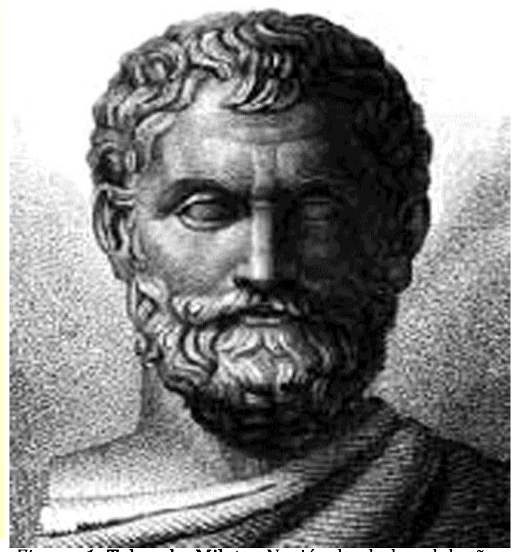


Figura 1. **Tales de Mileto.** Nació alrededor del año 624 a. C. en Mileto, Asia Menor (hoy Turquía). Murió alrededor del año 547 a. C. en Mileto. Es reconocido por haber deducido la altura de las pirámides de Egipto a partir de la sombra que se proyectaba en una hora específica, aplicando para ello conocimientos relacionados con la semejanza de triángulos.

Introducción del tema

La geometría ha sido de gran utilidad en el desarrollo económico y cultural de muchas civilizaciones, la mayor parte de conocimientos empíricos relacionados con la geometría fueron tomados de la cultura egipcia. Existen relatos que comentan que Thales de Mileto al viajar a Egipto, logró medir la altura de las pirámides, midiendo únicamente la longitud de las sombras que eran proyectadas por él y la pirámide en una hora específica.

La técnica empleada hace referencia a conocimientos relacionados con la semejanza de triángulos, estos conocimientos fueron demostrados posteriormente por los antiguos griegos, y a raíz de esto se enuncia el ya conocido teorema de Thales.

La semejanza de triángulos se determina a partir de los elementos que estos poseen. Los elementos de un triángulo son tres lados y tres ángulos, dados dos triángulos es posible determinar la semejanza entre estos, si la medida de los tres ángulos internos de uno de ellos, corresponde biunívocamente a la medida de los tres ángulos internos del otro. Además de cumplir esta condición, los lados que son opuestos a ángulos iguales son proporcionales.

Para determinar la semejanza entre dos o más triángulos, no es necesario comprobar que todos los elementos de los triángulos cumplan con las condiciones que se mencionaron, para ello se enuncian criterios, que a partir de algunas características proporcionan los insumos para deducir la semejanza de triángulos.

Resulta indispensable mencionar que si los lados de dos triángulos semejantes son iguales, estos triángulos son llamados congruentes, es así como la congruencia de triángulos se enuncia como un caso especial de semejanza.

En esta lección, se muestran conceptos y procesos esenciales para realizar las actividades, ejercicios y aplicaciones que se muestran en las siguientes páginas, además se vincula la temática a aspectos relevantes como arquitectura, ecología, arqueología, y el descubrimiento de estructuras y figuras semejantes en la naturales mediante el estudio de fractales y la ejemplificación de un fractal geométrico en el análisis de los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Análisis de relatos históricos que describen el método utilizado por Tales de Mileto para determinar la altura de las pirámides.
– Mostrar métodos para solucionar problemas que requieran de conocimientos relacionados con semejanza y congruencia de triángulos.
– Conocer la aplicación de los criterios de semejanza y congruencia de triángulos y otro polígonos en el estudio de fractales.

Presaberes

– Punto, línea y plano.
– Razones y Proporcionalidad.

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (SEMEJANZA Y CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Semejanza

En matemática, el concepto de semejanza entre dos figuras geométricas está relacionado con la proporcionalidad en correspondencia biunívoca de cada uno de los lados.

Dos triángulos son semejantes si los lados correspondientes son proporcionales.

Congruencia

Es un caso especial de semejanza, dos figuras son congruentes cuando los lados y ángulos que las conforman, corresponden biunívocamente y la longitud de cada uno de estos elementos es igual.

Analogía

Una analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos, mientras que objetos análogos concuerdan en ciertas relaciones entre sus respectivos elementos.

Thales de Mileto. Nació alrededor del año 624 a. C. en Mileto, Asia Menor (hoy Turquía). Murió alrededor del año 547 a. C. en Mileto. Fue el hijo de Examyes y Cleobuline. Algunos aseguran que sus padres eran de Mileto pero otros reportan que eran fenicios. James Longrigg escribe: “Sin embargo, la opinión de la mayoría lo consideraba un verdadero descenso de Mileto, y de una distinguida familia”.

Thales parece ser el primer filósofo griego conocido, además de ser científico y matemático. Se cree que fue profesor de Anaximandro[40] (611 a. C.-545 a. C.) y fue el primer filósofo en la Escuela de Mileto. Sin embargo, ninguno de sus escritos sobrevive por lo que es difícil determinar sus puntos de vista o para tener la certeza acerca de sus descubrimientos matemáticos. De hecho no está claro si Thales escribió algunos trabajos y, si lo hizo, se perdieron durante la época de Aristóteles.

Por otro lado, hay quien aduce que él escribió un libro sobre navegación, pero esta aseveración se basa en poca evidencia. En el libro de navegación se sugiere que utilizó la constelación de la Osa Menor, a la que definió como una característica importante en sus técnicas de navegación. Incluso si el libro es ficticio, es muy probable que Thales, efectivamente haya definido la constelación de la Osa Menor.

Proclo[41], el último de los grandes filósofos griegos, quien vivió alrededor del 450 d. C., escribió: “Tales fue primero a Egipto y después introdujo el estudio de la geometría en Grecia. Descubrió muchas proposiciones por sí mismo, e instruyó a sus sucesores en los principios fundamentales de muchas otras”.

Hay dificultad en escribir sobre Thales y otros filósofos, científicos y matemáticos de la época. Aunque existen numerosas referencias de Thales que permiten reconstruir un gran número de detalles, las fuentes deben ser tratadas con cuidado ya que era costumbre de la época que los hombres de prestigio y fama, fueran colmados de descubrimientos que no hicieron.

40. **Anaximandro de Mileto.** Nació aproximadamente en el 610 a. C. y murió en el 545 a. C. Teofrasto describe a Anaximandro como discípulo y compañero de Tales, siendo unos catorce años más joven que él. Se ocupó, al igual que Tales, de cuestiones prácticas relacionadas con la ciencia y se le atribuye la elaboración de un mapa del mar Negro, probablemente para uso de los navegantes milesios que viajaban por él.
41. **Proclo de Bizancio.** Nació en Bizancio, en el 410. Luego de estudiar en Alejandría con el filósofo griego Olimpiodoro, se estableció en Atenas. Allí fue discípulo de Plutarco y Siriano, miembros de la Academia, escuela de la que él mismo sería luego director y que por entonces estaba muy influenciada por el paganismo y la magia. Murió en Atenas en el 485.

Ciertamente, Thales fue una figura de enorme prestigio, siendo el único filósofo antes de Sócrates. Fue uno de los Siete Sabios de Plutarco, quien al escribir sobre estos Siete Sabios dice: "Tales fue al parecer el único de estos cuya sabiduría, en especulación, va más allá de los límites de utilidad práctica, el resto adquirió la reputación de sabiduría en la política".

Este comentario de Plutarco no debe ser visto como diciendo que Thales no funcionó como un político. Él persuadió a los estados separados de Jonia a formar una federación con la capital en Teos. Disuadió a sus compatriotas de la aceptación de una alianza con Creso y, como resultado, salvó a la ciudad.

Hay varios relatos de cómo Thales midió la altura de las pirámides. Diógenes Laercio[42], escribiendo en el siglo II d. C., cita a Jerónimo, un alumno de Aristóteles: "Jerónimo dice que Tales hasta tuvo éxito en medir las pirámides mediante la observación de la longitud de su sombra en el momento en que nuestra sombra es igual a nuestra propia altura".

Esto no parece contener algún conocimiento geométrico útil, es simplemente una observación empírica de que en el instante en que la longitud de la sombra de un objeto coincide con su altura, lo mismo será verdad para todos los demás objetos. Una declaración similar la hace Plinio: "Tales descubrió cómo obtener la altura de las pirámides y otros objetos similares, es decir, midiendo la sombra del objeto en el momento en que un cuerpo y su sombra son iguales en longitud".

Sin embargo Plutarco cuenta la historia de una forma que, si se precisa, significativamente que Tales se estaba acercando a la idea de los triángulos semejantes: "sin problemas o la ayuda de cualquier instrumento él se limita a ubicar un palo en el extremo de la sombra proyectada por la pirámide y de hacer dos triángulos cuyos lados son la sombra y la altura del objeto, mostró que la sombra que tiene la pirámide y el palo están en la misma proporción, en consecuencia la altura de la pirámide y del palo, tendrán también las mismas proporciones".

Por supuesto, Thales pudo haber utilizado estos métodos geométricos para resolver problemas prácticos, simplemente observando las propiedades. Esto está en consonancia con la opinión de Russell, quien escribe sobre las contribuciones de Thales a las matemáticas: "se dice que Tales viajó por Egipto, y quien de allí trajo a los griegos la ciencia de la geometría. Lo que los egipcios sabían de la geometría era principalmente reglas de oro, y no hay razón para creer que Tales llegó con pruebas deductivas, los que se encargaron de demostrar las conjeturas geométricas fueron los griegos".

En la actualidad, en el estudio de la matemática se reconoce la utilización de un famoso teorema que hace referencia a Thales, por lo que ha sido llamado **teorema de Thales**, este teorema establece la proporción de segmentos trazados mediante la intersección de rectas paralelas en dos rectas transversales. El teorema de Thales es utilizado para deducir longitudes de lados proporcionales mediante el uso de razones entre segmentos.

A continuación, se detallan los dominios conceptuales necesarios para aplicar tan importante herramienta en la resolución de problemas y en la determinación de triángulos semejantes.

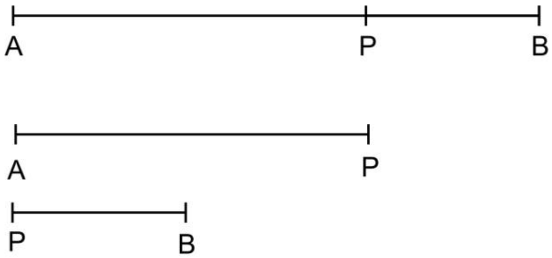
---

42. **Diógenes Laercio.** Fue un importante historiador griego de filosofía clásica que, se cree, nació en el siglo III d. C., durante el reinado de Alejandro Severo.

RAZÓN Y PROPORCIONALIDAD DE TRAZOS

Se llama razón al cociente entre dos cantidades homogéneas. La razón entre dos trazos es el cociente de los números que expresan las longitudes de dichos trazos, cuando se han medido con la misma unidad de medida.

Un punto P que pertenece al segmento dirigido de A hacia B ($P \in \overline{AB}$) lo divide en la razón $m\!:\!n$, si $\overline{AP}\!:\!\overline{PB} = m\!:\!n$



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$$

Figura 2. Proporción de segmentos.

Ejemplo: Los trazos $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ están en la razón $3\!:4$ porque la unidad de longitud δ cabe tres veces en $\overline{AB}$ y 4 veces en $\overline{CD}$.

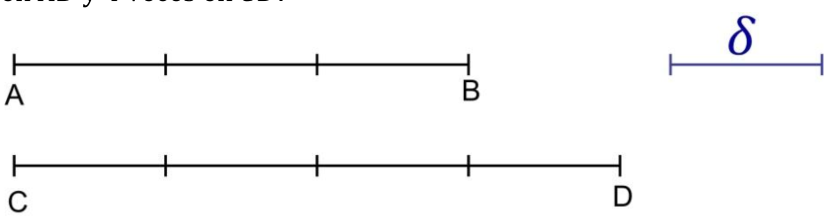
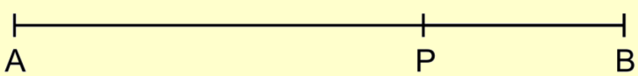


Figura 3. Proporción de segmentos.

Razón áurea. Si al dividir el trazo se cumple que la razón entre el trazo entero y el segmento mayor es igual a la razón entre el segmento mayor y el menor, entonces diremos que se encuentra en razón **aurea** o **divina.**



$$\overline{AP} > \overline{PB}$$
$$\overline{AB} > \overline{AP} > \overline{PB}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Figura 4. Proporción áurea.

El valor numérico de la razón áurea es el número irracional conocido como número áureo o número de oro. Su valor corresponde a.

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618034 \ldots$$

Dos segmentos rectilíneos o dos trazos son proporcionales a otros dos, cuando la razón que existe entre los dos primeros, es igual a la razón entre los dos últimos.
La igualdad de estas dos razones, forma una proporción entre trazos.

43. La expresión “razón entre dos trazos” es empleada para abreviar el lenguaje, debe entenderse que se trata de la razón entre los números que expresan las longitudes de dichos trazos medidos con la misma unidad de medida.

Ejemplo: Se dan los cuatro trazos siguientes:

$a = 4\ cm; b = 2\ cm; c = 6\ cm; d = 3\ cm$

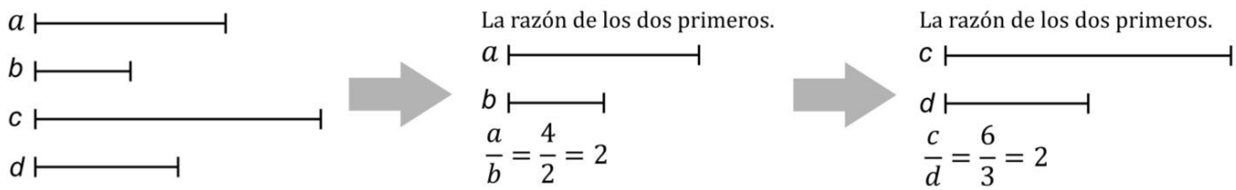


Figura 5. Proporción de segmentos.

Puesto que, $\frac{a}{b} = 2$ y $\frac{c}{d} = 2$, resulta entonces que, la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Los trazos a y b son proporcionales con c y d.

En general los segmentos a, b, c, d, e … etc., son proporcionales a los segmentos a', b', c', d', e' … si se tiene: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} \ldots$

Del mismo modo se dice que los segmentos a, b, c, son proporcionales a los números 3, 4, 5., si resulta:

$\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$

A partir de la proporción anterior, puedes proponer tres números tales que al ser sustituidos en a, b y c, comprueben que la proporción es verdadera. Supongamos que la razón es 2, en este caso los números 6, 8 y 10 cumplen con la condición de que al ser sustituidos en a, b y c respectivamente, garantizan la certeza de la expresión.

En toda proposición el segundo y tercer término, se llaman medios; el primero y el cuarto, se llaman extremos. En la Figura 6, $b\ y\ c$ son los términos medios, $a\ y\ d$ son los términos extremos.

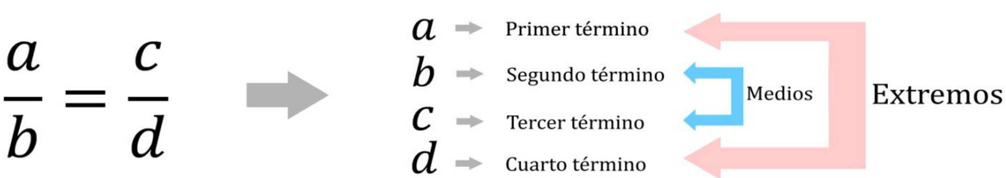


Figura 6. Medios y extremos de una proporción.

En la proporción de la Figura 6, los cuatro términos $a, b, c\ y\ d$ son las longitudes de distintos trazos proporcionales, cada uno de los términos de la proporción, es una cuarta proporcional geométrica[44].

Dadas las longitudes de tres trazos:

$a = 4\ cm; b = 2\ cm; d = 1$ cm, se puede formar la proporción:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a partir de la información anterior se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{4}{2} = 2$, por lo que, la razón $\frac{c}{d}$ tendrá que ser 2, si $d = 1$, resulta sencillo deducir que el valor numérico de c es 2, puesto que $\frac{2}{1} = 2$.

44. En una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cada uno de ellos se denomina cuarta proporcional geométrica con respecto a los otros tres.

Otra proporción útil para definir la situación es:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ (Cada una de las razones vale 2)

En esta última proporción el trazo b figura como consecuente de la primera razón y se repite en el antecedente de la segunda razón (términos medios iguales). Esto se puede expresar diciendo que el trazo b es una media proporcional geométrica entre los dos trazos a y e. Cada uno de estos dos últimos trazos recibe el nombre de tercera proporcional geométrica.

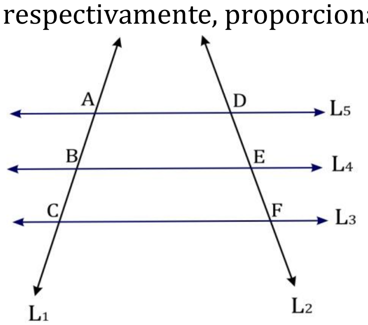
Algunas propiedades de las proporciones

1. En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.
   En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; resulta: $bc = ad$.
   Recíprocamente la igualdad de dos productos se puede transformar en proporción, de este modo $pq = mn$, se expresa como proporción de la forma siguiente.
   $\frac{m}{p} = \frac{q}{n}$ los factores de uno de los productos son términos medios y los del segundo producto, términos extremos.
2. En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se puede:
   a) Alternar los medios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
   b) Alternar los extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
   c) Invertir las razones: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
   d) Permutar las razones: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$
3. En toda proporción la suma o diferencia de los términos de la primera razón es a su consecuente o antecedente, como la suma o diferencia de los términos de la segunda razón es a su consecuente o antecedente[45].
   En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, resulta:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

TEOREMA DE THALES

Si dos rectas se cortan por tres o más paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son, respectivamente, proporcionales a los segmentos determinados en la otra.



$L_3 \parallel L_4 \parallel L_5$
$L_1 \nparallel L_2$
$L_1 \nparallel L_3$
$L_3 \parallel L_4 \parallel L_5$

$AD \parallel BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Figura 7. Teorema de Tales.

45. El consecuente y antecedente hacen referencia al numerador y denominador (respectivamente) de una fracción. Para $\frac{a}{b}$; a es consecuente y b es antecedente.

La igualdad también se puede escribir como $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. Si en la igualdad anterior se suma 1 a cada lado, se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} + 1$$

Esto equivale a sumar en el primer miembro $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}$ y en el segundo miembro $\frac{\overline{EF}}{\overline{EF}}$, esto se hace con la certeza que $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EF}} = 1$, como resultado se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{EF}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE} + \overline{EF}}{\overline{EF}}$$

Pero, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ y $\overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DF}$, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$$

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Triángulos semejantes, son los que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos, proporcionales.

Dos triángulos semejantes tienen la misma forma, sin ser necesario que tengan igual área. El signo de semejanza es ∼. Se debe leer semejante a.

Se denominan vértices homólogos a aquellos vértices de los ángulos respectivamente iguales entre dos triángulos. El vértice B es homólogo con el vértice E. (Figura 8).

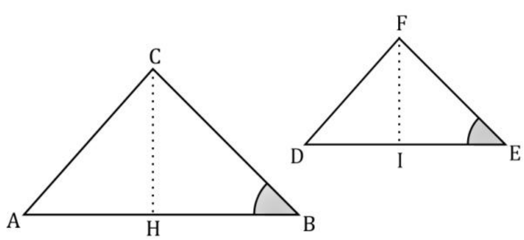


Figura 8. Semejanza de triángulos.

Dos triángulos ΔABC y ΔDEF se llaman semejantes si: $\measuredangle A = \measuredangle D$; $\measuredangle B = \measuredangle E$; $\measuredangle C = \measuredangle F$, y sus lados homólogos son proporcionales.

Lados homólogos, son los lados que unen dos vértices homólogos, o bien, son los lados que se oponen a ángulos iguales.

De este modo, si $\measuredangle A = \measuredangle D$, entonces el segmento $\overline{CB}$ que es el lado opuesto a $\measuredangle A$, corresponde al segmento $\overline{FE}$ que es opuesto a $\measuredangle D$. De forma análoga con los demás ángulos, en consecuencia se tiene la proporción.

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Por lo anterior, se deduce que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. La semejanza de los triángulos se indica mediante la notación:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Existen representaciones geométricas que facilitan la determinación de la semejanza entre dos o más triángulos, tal es el caso del ejemplo que se muestra a continuación.

Los triángulos ΔABC y ΔADE comparten el ángulo ∡A, además están ubicados de tal forma que los lados adyacentes a ∡A del triángulo ΔADE, coinciden con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC. Los lados opuestos al ángulo ∡A son paralelos. En este caso, se dice que los dos triángulos están en *posición de Thales*. (Figura 9)

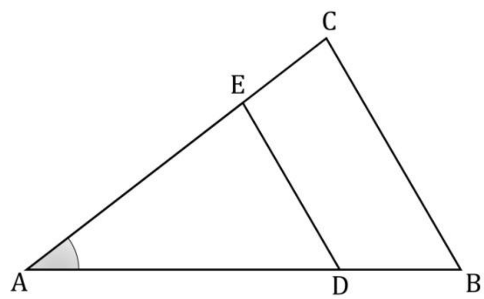


Figura 9. Triángulos en posición de Thales.

Cuando dos triángulos se pueden colocar en posición de Thales, sus lados son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{ED}}$$

Observar que la razón entre los lados se define del triángulo mayor hacia el triángulo menor. De forma análoga puede realizarse esta correspondencia en sentido contrario (del triángulo menor al triángulo mayor).

Algunas aplicaciones

Los triángulos en posición de Thales hacen referencia a la figura que se utilizó para ilustrar el teorema de Thales (figura 7), la diferencia reside en que las rectas se han interceptado, y estas rectas son cortadas por rectas paralelas formando triángulos.

El teorema de Thales permite dividir un segmento en partes iguales. En la Figura 10 se ha dividido un segmento AB en 5 partes iguales. ¿Cómo?

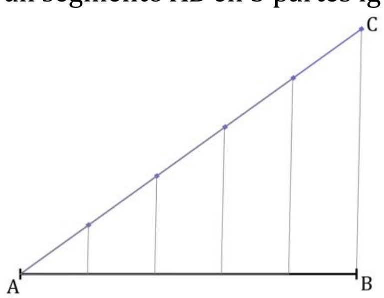


Figura 10. División segmentos en partes iguales.

Trazar el segmento AB, con longitud arbitraria, luego trazar una semirrecta a partir de A. Sobre ella, marcar con ayuda de regla o compás cinco segmentos iguales. Unir la última marca con B y trazar paralelas, una por cada marca de la semirrecta.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Un criterio de semejanza es un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, podemos asegurar que dos o más triángulos son semejantes.

A continuación se analizan algunos teoremas fundamentales de semejanza de triángulos, a partir de estos se deducen los criterios de semejanza.

Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes si y solo si tienen sus ángulos correspondientes iguales.

Demostración

En la figura 10, se muestran los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' en posición de Thales, por lo que, los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son paralelos.

Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes, entonces la definición de semejanza indica que $\alpha = \alpha$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$.

Además, sabiendo que los ángulos son iguales, debemos notar que los lados son proporcionales. Siguiendo la figura de la derecha, el triángulo $\Delta A'B'C'$ tiene sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ los segmentos $\overline{AB'}$ y $\overline{AC'}$ respectivamente, de modo que el vértice A es homólogo y congruente en ambos triángulos; entonces, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{B'C'}$ y el teorema de Thales nos dice que:

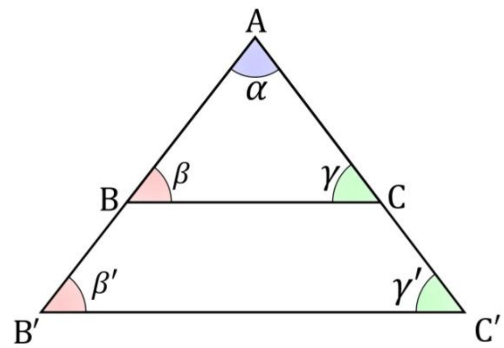


Figura 11. Criterios de semejanza de triángulos.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

En consecuencia, se enuncia a continuación el corolario de los criterios de semejanza de triángulos.

1. Dos triángulos son semejantes si y solo si tienen dos lados proporcionales. Si los triángulos tienen dos pares de ángulos iguales, también son semejantes, pero a este caso especial de semejanza se le denomina **congruencia**. (LLL)
2. Dos triángulos son semejantes si y solo si tienen un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales. (ALA)
3. dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. (AA)

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

La congruencia de triángulos es un caso especial de semejanza, donde la medida de los lados de un triángulo ΔABC coinciden con la medida de los lados de otro triángulo ΔA'B'C', si los lados son iguales, entonces sus ángulos también lo serán. Para determinar la congruencia entre dos triángulos no es necesario determinar la medida de todos los lados y todos los ángulos, es suficiente con identificar ciertas características que se agrupan en criterios de congruencia que se enuncian a continuación:

Postulados de congruencia de triángulos

- Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado. (ALA)
- Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales. (LAL)
- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales. (LLL)

- Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente iguales.

Recordar que dos triángulos congruentes son semejantes, pero dos triángulos semejantes solo serán congruentes si los lados son iguales. El criterio AAA (ángulo-ángulo-ángulo) no se aplica en la congruencia de triángulos, debido a que si dos triángulos tienen sus lados iguales, sus ángulos serán proporcionales, pero no precisamente iguales.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Las siguientes actividades pretenden motivar al estudiantado a aplicar el teorema de Thales y proporciones entre segmentos, para indicar el valor numérico de una cuarta proporción; además, se busca que cada estudiante utilice todos estos conocimientos en la resolución de problemas relacionados con ecología, astronomía, arqueología y el descubrimiento de fractales. Se le recomienda trabajar con sus estudiantes las proporciones y el teorema de Thales, antes de realizar las actividades que se describen a continuación.

Actividad 1. Teorema de Thales.

Objetivo
Proponer situaciones de aprendizaje donde el estudiante aplique los procesos relacionados con el teorema de Thales.

Materiales
Hoja de ejercicios.
Regletas de papel.
Regla graduada.
Lápiz o marcador.

Indicaciones
Brindar al estudiantado una hoja de ejercicios que contenga las situaciones que se plantean en esta actividad. Invitar a que propongan estrategias y algoritmos para abordar los ejercicios, y que utilicen los conocimientos previos relacionados con el teorema de Thales. Luego, resolver los ejercicios con ayuda de sus estudiantes y compartir la información que se obtiene.

1. Usa el teorema de Thales para calcular el valor de x.

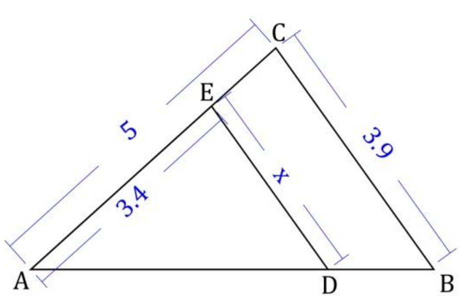


Figura 12. Ejercicio (semejanza de triángulos)

Realizar las siguientes preguntas para orientar el proceso: identifica los triángulos que se muestran en la figura 12. Los triángulos están definidos por los vértices ABC y ADE. ¿Son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza cumplen para ser llamados semejantes?

Observar que ambos triángulos comparten el ángulo ∢A, además $\overline{CB}$ es paralela a $\overline{ED}$ en consecuencia los ángulos ∢B y ∢D son iguales, también ∢C y ∢E son iguales. Según lo dicho anteriormente, los triángulos tienen sus tres ángulos iguales por lo que sus lados son proporcionales, entonces son semejantes.

Puesto que ΔABC y ΔADE son semejantes, se definen para ambos triángulos las siguientes proposiciones (partiendo de ΔABC a ΔADE).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Puesto que $\overline{AC} = 5$; $\overline{AE} = 3.4$; $\overline{BC} = 3.9$ y $\overline{DE} = x$, se tiene que determinar el valor para la cuarta proporcional $\overline{DE}$, para $\overline{DE} = x$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$

Sustituyendo los segmentos con la longitud que estos tienen, se obtiene:

$$\frac{5}{3.4} = \frac{3.9}{x}$$

Puesto que 3.4 y 3.9 son medios, además 5 y x son extremos, se efectúa la multiplicación de medios con medios y extremos con extremos.

$$5x = (3.9)(3.4)$$
$$5x = 13.26$$

Puesto que $13.26 = 5(2.625)$, al sustituir este resultado en la expresión anterior se tiene:

$$5x = 5(2.625)$$

En consecuencia el valor de la variable x es 2.625.

De forma análoga, resolver el siguiente ejercicio:

Los dos triángulos de la figura 12, están en posición de tales. Calcula el valor de x.

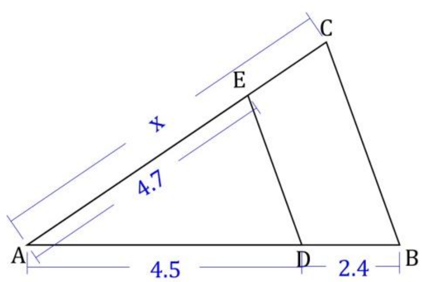


Figura 13. Ejercicio 2 (semejanza de triángulos).

Actividad 2. Pirámide truncada (la semejanza de triángulos y la arqueología).

Objetivo

Mostrar la relevancia de conocer los criterios de semejanza y el teorema de Thales para solucionar problemas relacionados con la arqueología.

Indicaciones

Comentar en la clase que Thales, en su viaje a Egipto, dedujo la altura de las pirámides a partir de la longitud de la sombra que estas proyectaban en una hora específica y la sombra de un palo. Invitar al grupo a elaborar una ilustración en la que se represente una situación similar a la que propone Thales.

Tales definió la altura de las pirámides y utilizó proporciones para estimar la longitud de estas, puedes proponer situaciones en las que puedes aplicar las proporciones. Sírvase de ejemplo la siguiente situación.

Ejemplo: ¿Cuál es la altura de una torre cuya sombra mide 50 metros si en el mismo instante un árbol de dos metros de altura proyecta una sombra de 2.5 metros?

Elaborar un bosquejo o ilustración que represente la información contenida en el ejemplo.

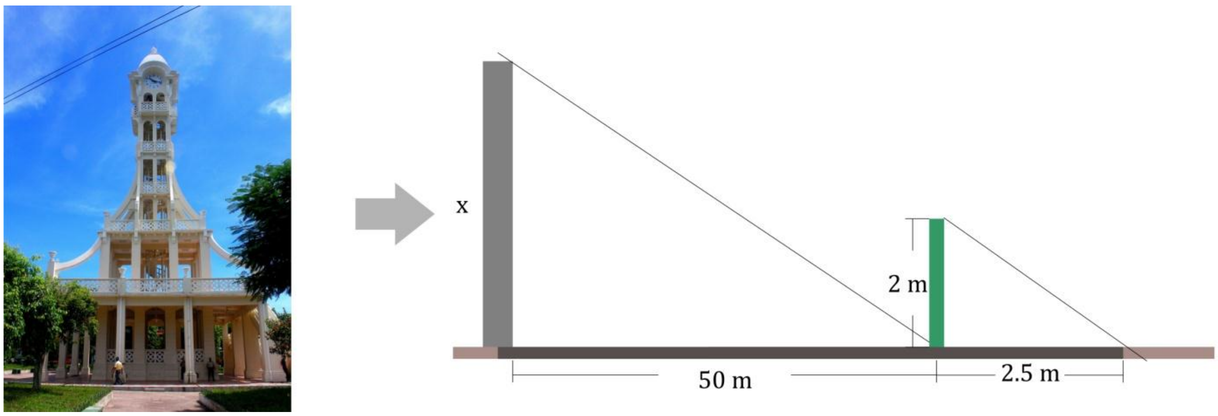


Figura 14. Medición de la altura de la torre de San Vicente, foto tomada por Gustavo Steinau.

Analizar la ilustración de la Figura 14, observar los triángulos y comprobar que estos son semejantes.

Lo primero que se identifica es que los triángulos no están en posición de Thales, por lo que es necesario identificar características en ambos triángulos, de tal modo que se aplique un criterio de semejanza.

1. La altura de la torre y el árbol, están definidas por segmentos perpendiculares a la base. Puesto que ambos forman el mismo ángulo (90º) con respecto a la base, se tiene en consecuencia que ambos segmentos son paralelos.
2. Si se traza una recta imaginaria desde el extremo superior de la torre hasta el extremo de la sombra, y de la misma forma, se traza otra recta imaginaria desde el extremo superior del árbol y el extremo de la sombra de este, se tiene que ambas rectas forman con respecto a la base el mismo ángulo. ¿Cómo comprobar esto?
   En una hora definida, el ángulo en que los rayos del sol hacen contacto con los objetos es igual para todos estos.

Según (1) y (2), los dos triángulos tienen la medida de un ángulo en común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos. Esto implica que los lados paralelos son proporcionales, y eso ocurre si y solo si dos triángulos están en posición de Thales; en consecuencia, los dos triángulos son semejantes y sus lados son proporcionales.

A partir de esta primicia es posible relacionar la longitud de los lados mediante la proporción siguiente.

$$\frac{50}{2.5} = \frac{x}{2}$$

Multiplicando medios y extremos, se tiene:

$$50(2) = 2.5x$$

Por lo que:

$$100 = 2.5x$$

El número 80, puede reescribirse como: $100 = 2.5(32)$. Sustituyendo este resultado en la expresión anterior, se tiene:

$$2.5(40) = 2.5x$$

En consecuencia $x = 40$, interpretando este resultado para resolver el problema, se puede decir que: la altura de la torre es de 40 metros.

Es impresionante reconocer que Thales aplicó un método similar para estimar la altura de las pirámides de Egipto. Existen relatos históricos que mencionan que Thales se ubicó a cierta distancia de la pirámide y esperó a que la sombra que proyectaba una de la pirámides cubriese por completo la sombra que él proyectaba.

Conociendo la longitud de su sombra y su propia altura, además, midiendo la longitud de la sombra que proyecta la pirámide, fue capaz de encontrar un valor numérico a partir de las proporciones.

Otros relatos mencionan que Thales esperó a que la longitud de la sombra que él proyectaba fuese igual a su altura, a partir de esto dedujo que lo mismo sucedía con cualquier objeto. Por lo que no fue necesario medir la altura de la pirámide, sino que únicamente midió la longitud de la sombra que la pirámide proyectaba.

Las pirámides de Egipto constituyen un patrimonio mundial, lleno de mucha cultura y de amplios conocimientos matemáticos que encierran en su construcción. En América Latina también existen antiguas edificaciones en forma de pirámide, a partir de las cuales es posible formular situaciones de aprendizaje. Tal es el caso de la pirámide truncada de Ihuatzio, lugar de los coyotes, zona arqueológica de Michoacán, México.

Pirámide truncada

Una pirámide ha perdido la parte superior, como se muestra en la Figura 15. Por lo tanto, sólo se han hecho las mediciones que aparecen. Calcula cuál era la altura de la pirámide antes de perder la parte superior.

Figura 15. Pirámide truncada.

Para conocer la altura de la pirámide, primero se debe determinar la longitud de la altura de una de sus caras laterales. Según la ilustración, se identifica que la altura total de la cara lateral está dada por la expresión $63 + x$; para determinar el valor de x se utiliza la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

Para $\overline{AB} = 62.5$; $\overline{DE} = 12.5$; $\overline{AC} = 63 + x$; $\overline{DC} = x$, la expresión anterior se reescribe de la forma siguiente:

$$\frac{62.5}{12.5} = \frac{63 + x}{x}$$

Efectuando la multiplicación de medios y extremos, se tiene:

$$62.5x = (63 + x)(12.5)$$
$$62.5x = 787.5 + 12.5x$$

Necesitamos que la variable x se encuentre en el lado izquierdo de la igualdad, para ello se resta $12.5x$ a ambos extremos, garantizando que $12.5x - 125x = 0$.

$$62.5x - 12.5x = 787.5 + 12.5x - 12.5x$$
$$50x = 787.5$$

La cantidad 787.5 puede reescribirse como: 787.5 = 50(15.75), sustituyendo esta cantidad en la expresión anterior, se tiene:

$$50x = 50(15.75)$$

El valor numérico que le corresponde a x es: 15.75, por lo tanto, la altura del triángulo de la cara lateral de la pirámide está dada por la operación $63 + 15.75$, que corresponde a 78.75 metros.

Con esta información se pretende deducir la altura de la pirámide, para ello es necesario determinar la longitud del segmento **"y"** de la figura 14. En el triángulo rectángulo que se ilustra, se observa que la base mide 62.5 metros y la hipotenusa es de 78.75 metros. Con esta información se puede definir la longitud del segmento **"y"** con ayuda del teorema de Pitágoras.

Para la expresión: $c^2 = a^2 + b^2$, con c (hipotenusa) y a, b (catetos del triángulo) se efectúa la siguiente asignación: $c = 78.75\ m$; $a = 62.5\ m$; $b = y$.

Al sustituir estos valores en la fórmula del teorema de Pitágoras, resulta la expresión siguiente:

$$78.75^2 = 62.5^2 + y^2$$

Restar 62.5^2 a ambos extremos de la igualdad:

$$78.75^2 - 62.5^2 = 62.5^2 - 62.5^2 + y^2$$
$$6201.5625 - 3906.25 = y^2$$
$$2295.312 = y^2$$

Para toda cantidad $a = y^2$, existe h tal que $h = \sqrt{a}$, y se demuestra que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = h \Longrightarrow a = y$.

$$\sqrt{2295.312} = y$$

$$47.9094 = h \ \Rightarrow h = 47.91.$$

La altura de la pirámide completa es de 47.91 metros.

Actividad 3. Semejanza y congruencia de triángulos en fractales.

Objetivo

Identificar triángulos congruentes y semejantes en la representación de un fractal.

Materiales

Páginas de papel.

Tijeras.

Marcador.

Indicaciones

Iniciar la actividad definiendo los fractales y mostrando algunos ejemplos.

La geometría fractal fue descubierta alrededor de 1970, por el matemático polaco Benoit Mandelbrot. Él estaba fascinado con los complejos patrones que veía en la naturaleza, pero no los podía describir por medio de la geometría euclídea: las nubes no eran esféricas, las montañas no eran conos, las líneas costeras no eran círculos, la "bark" de los árboles no era lisa, y tampoco viajaban los rayos en líneas rectas. Entonces desarrolló el concepto y lo denominó "fractal", a partir del significado en latín de esta palabra, que encontró en un libro de texto de su hijo. Fractal significa "fracturado, fragmentado o quebrado".

Figura 16. Brócoli, fractal natural.

Los patrones fractales tienen dos características básicas:

- Autosimilitud (que significa que un mismo patrón se encuentra una y otra vez); y
- Dimensiones fractales.

Esta dimensión fractal describe la relación entre los segmentos y la totalidad. Entre más cercana esté la forma de un fractal a una línea, a un plano o a un objeto tridimensional, más cercana estará la dimensión fractal al número entero que describe su forma.

Hay dos clases de fractales: matemáticos y naturales. Los fractales encontrados en la naturaleza tienen una característica adicional: son formados por procesos aleatorios. Como ejemplo se pueden nombrar: los rayos, los deltas de los ríos, los sistemas de raíces y las líneas costeras.

Para el estudio de figuras semejantes y congruentes, se utilizará un fractal de figuras geométricas llamado **el triángulo de Sierpinski**. Este triángulo se puede construir a partir de cualquier triángulo, fue introducido en 1919 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski.

Existen diversos procesos para crear el triángulo de Sierpinski. Uno de ellos consiste en dibujar y colorear y la otra forma consiste en hacer dobleces en páginas de papel.

Práctica 1. El triángulo de Sierpinski (trazos y colores).

Para dibujar el triángulo de Sierpinski mediante trazos y colores, se efectúan los pasos que se muestran en la figura 16. Dibuje un triángulo equilátero cuyo lado mida 8 centímetros (Figura 17 A), marcar en cada uno de los lados los puntos medios y unir cada uno de estos entre sí, la línea interna medirá 4 centímetros, coloree todos los triángulos que tengan vértices que apunten hacia abajo para diferenciar su orientación (figura 16 B y C).

Los triángulos que aún no se han coloreado tendrán que ser divididos tal como se indica la Figura 17 A a la Figura 17 C, las nuevas líneas internas miden un centímetro. Coloree los triángulos que tienen el vértice hacia abajo (Figura 17 D). Repita el proceso nuevamente y deduzca la media del lado de uno de los triángulos formados (Figura 17 E).

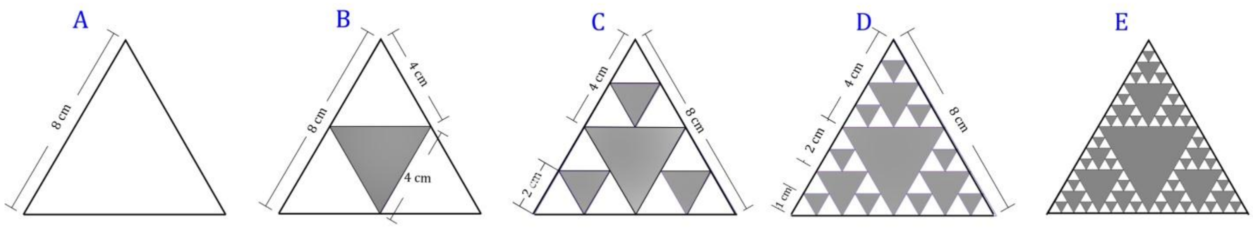


Figura 17. Construcción del triángulo de Sierpinski.

Práctica 2. El triángulo de Sierpinski (recortes y dobleces).

Siguiendo los pasos que se describen a continuación se construirá el triángulo de Sierpinski hasta la cuarta iteración. Se inicia con una hoja de papel, doblar la hoja en dos partes iguales (Figura 18 A). Marcar el punto medio del rectángulo y hacer un corte de longitud equivalente a la mitad del ancho del rectángulo (Figura 18 B). Doblar una de las mitades para marcar el doblez, luego plegar hacia adentro (Figura 18 C) la figura resultante es similar a una especie de escalones. En cada uno de los escalones, repetir la operación que se describe desde la Figura 18 A hasta la Figura 18 C, ver Figura 18 D, E, F, G.

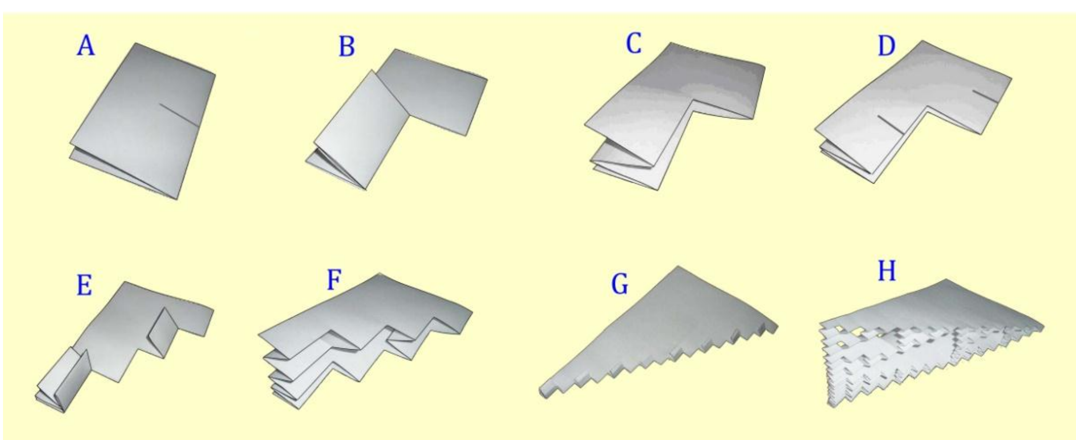


Figura 18. Construcción del triángulo de Sierpinski.

Discusión grupal

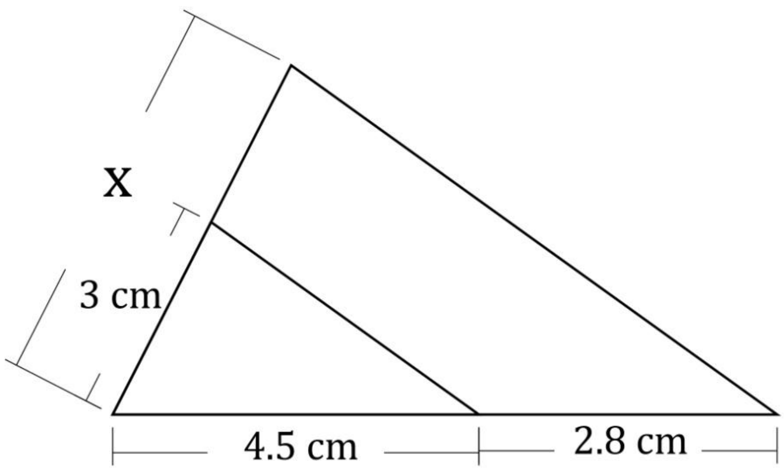
A partir de las dos figuras resultantes de la práctica 1 y la práctica 2, se formulan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué figuras se obtienen?
2. ¿Qué diferencia encuentras entre las figuras de tu construcción?
3. Si repetimos el procedimiento ¿cuántos triángulos más obtendremos?

GUÍA DE EJERCICIOS Y APLICACIONES

Ejercicio 1. Cuarta proporcional.

Calcula el valor de x para la siguiente figura.



Ejercicio 2. Razón de semejanza.

a) Los lados de un rectángulo miden 4 cm y 6 cm, ¿cuánto medirán los lados de un rectángulo semejante al anterior si la razón de semejanza, del segundo al primero, es $r = 1.3$?
b) Los lados de un triángulo miden 3 cm, 7 cm y 8 cm. ¿Cuánto medirán los lados de un triángulo semejante al anterior si la razón, del primero al segundo, es $r = 2$.

Problema 1. Medición de alturas.

a) Un muro proyecta una sombra de 32 metros al mismo tiempo que un bastón de 1.2 metros proyecta una sombra de 97 cm. Calcula la altura del muro.
b) Un observador, cuya altura hasta los ojos es de 1.67 metros, observa, erguido, en un espejo la parte más alta de un objeto vertical. Calcula la altura de este, sabiendo que el espejo se encuentra situado a 10 m de la base del edificio y a 3 m del observador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cano O. (2004) Geometría Segunda Parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
2. Cano O. (2004)Geometría Primera parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
3. Gasket, D'Elia L. (2001) *Sierpinski Triangle*. Cuttin Holes in a Triangle, Application. Descargar en: http://www.efg2.com/Lab/FractalsAndChaos/SierpinskiTriangle.htm, Accesado el 21/10/2011.
4. J. J. O'Connor y E. F. Robertson (1996) *Tales de Mileto, Biografía*. Facultad de Matemática y Estadistica, Universidad de St. Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thales.html. Accesado el 19/10/2011.
5. Lambertson L. (2001), *Fractales en el aula.* Exploratorium Teacher Institute, San Francisco, EUA. Fundación CIENTEC 2001. Tomado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/fractales.html. Accesado el 20/10/2011.
6. Lambertson L. (2001), *Patrones fractales geométricos*. Exploratorium Teacher Institute, San Francisco, EE. UU. Fundación CIENTEC 2001. Tomado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/actividad2.html. Accesado el 20/10/2011.
7. Mandelbrot B. (1983) *Sierpinski Pyramid*, páginas 142 y 143, Sierpinski Carpet, Menger Sponge páginas 144 y 145. W. H. Freeman and Company.
8. Pietgen, H., Jurgens H. y Saupe D. (1991), *Fractals for the classroom: Strategic activities*. volumen one. New York: Springer-Verlag.
9. Pogorélov A.V. (1974). *Geometría elemental,* Editorial Mir, Moscú, traducido del ruso por Carlos Vea, Catedrático de Matemáticas superiores.
10. Stanley H.E., Taylor E.F., y Trunfio P.A. (1994). *Fractal in science: an introductory course*. Pilot edition. New York: Springer-Verlag.
11. Universidad Católica de Chile (2009) Geometría Nº 7, Centro de alumnos de Ingeniería, Preuniversitario de Ingeniería.

Lección 8 | **8° grado** | **Unidad 3** **Tiempo:** 10 horas clase

Teorema de Pitágoras

Historia y demostración del teorema

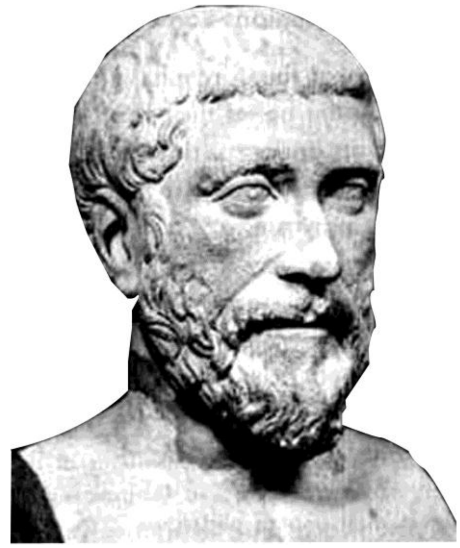


Figura 1. **Pitágoras de Samos**. Nació alrededor del año 569 a. C., en Samos, Ionia, murió alrededor del año 475 a. C. Fundador de la Escuela pitagórica, actualmente es reconocido por el teorema que demuestra que la superficie del cuadrado dibujado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de los cuadrados dibujados en sus catetos. Este teorema es conocido actualmente como **teorema de Pitágoras.**

Introducción del tema

El teorema de Pitágoras es considerado uno de los más utilizados en la resolución de problemas geométricos y algebraicos debido a la relevancia y simplicidad en su aplicación.

Antecedentes históricos narran que el conocimiento que comúnmente conocemos como teorema de Pitágoras, fue utilizado de forma empírica mucho antes de que los griegos se encargaran de demostrar tal conjetura, pero la aplicación de estos conocimientos no se originó en Egipto. Existen relatos históricos que sostienen que la relación entre la hipotenusa de triángulos rectángulos y sus catetos datan de 5,000 años a. C. y se estima que fue utilizado por primera vez por los babilonios.

Posteriormente, se reconoce mediante relatos históricos, que en el antiguo Egipto el teorema de Pitágoras fue utilizado para medir ángulos rectos, siendo esto de gran utilidad para los trazos de segmentos perpendiculares, comúnmente utilizados en las distribuciones de las tierras destinadas para la siembra.

Para tal cometido se utilizó un triángulo con longitudes 3, 4 y 5, conociendo de antemano que el triángulo construido con estas características es un triángulo rectángulo, para verificar este resultado se recomienda sustituir el valor de los lados en la ecuación del teorema de Pitágoras.

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Dado que la expresión resultante es verdadera, se concluye que los lados 3, 4 y 5, pertenecen a un triángulo rectángulo y, en consecuencia, posee un ángulo recto.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Análisis de relatos históricos que comentan el recorrido de Pitágoras en el aprendizaje y enseñanza de la matemática y de la demostración del teorema de Pitágoras.
– Mostrar diversas formas de demostrar el teorema de Pitágoras y despertar el interés del estudiantado, durante el desarrollo de la demostración.

Presaberes

– Semejanza y congruencia de triángulos.
– Comprensión de conceptos geométricos (punto, recta, plano, ángulo, segmento).
– Lenguaje algebraico.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Axioma

Un axioma es una premisa que se considera “evidente” y es aceptada sin requerir una demostración previa.

Postulado

Un postulado es una proposición que no es evidente por sí misma ni está demostrada, pero que se acepta ya que no existe otro principio al que pueda ser referida.

Teorema

Un teorema es una afirmación que puede ser demostrada dentro de un sistema formal.

Un teorema generalmente posee un número de premisas que deben ser enumeradas o aclaradas de antemano. Luego existe una conclusión, una afirmación matemática, la cual es verdadera bajo las condiciones dadas. El contenido informativo del teorema es la relación que existe entre la hipótesis y la tesis o conclusión.

RESEÑA HISTÓRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras de Samos. Nació alrededor del año 569 a. C. en Samos, Ionia, murió alrededor del año 475 a. C. Es una figura extremadamente importante en el desarrollo de las matemáticas; sin embargo, sabemos relativamente poco sobre sus logros matemáticos. A diferencia de muchos matemáticos griegos posteriores, de quienes, por lo menos, tenemos algunos de los libros que escribieron, no tenemos nada de los escritos de Pitágoras.

El padre de Pitágoras fue Mnesarchus, mientras que su madre era Pythais, nativa de Samos. Mnesarchus era un comerciante procedente de Tiro, y existe una historia que relata que introdujo el maíz a Samos en una época de hambre y se le concedió la ciudadanía de Samos como señal de gratitud.

Cuando era niño, Pitágoras pasó sus primeros años en Samos, pero viajó mucho con su padre. Hay relatos que señalan el regreso de Mnesarchus a Tiro con Pitágoras, y que fue instruido allí por los caldeos y los hombres sabios de Siria. Parece que también visitó Italia con su padre.

Ciertamente tuvo una distintiva educación, aprendiendo a tocar la lira, el aprendizaje de la poesía y a recitar a Homero. Había, entre sus maestros, tres filósofos que influyeron en Pitágoras. Uno de los más importantes fue Ferécides[46] que muchos describen como el profesor de Pitágoras.

Los otros dos filósofos que influyeron en Pitágoras, y le presentaron nuevas ideas matemáticas, fueron Thales y su pupilo Anaximandro, quienes vivieron en Mileto. Se dice que Pitágoras visitó a Thales de Mileto cuando tenía entre 18 y 20 años de edad. En ese momento Thales era un hombre viejo y, aunque creó una fuerte impresión en Pitágoras, probablemente no le enseñó mucho.

Sin embargo, él ha contribuido al interés de Pitágoras en las matemáticas y la astronomía, y le aconsejó viajar a Egipto para aprender más de estos temas. El alumno de Thales, Anaximandro, enseñaba en Mileto y Pitágoras asistió a estas conferencias. Anaximandro ciertamente estaba interesado en la Geometría y la Cosmología y muchas de sus ideas influirían en los puntos de vista de Pitágoras.

46. **Ferécides de Syros.** Fue un pensador griego de la isla de Syros, del siglo VI a. C. Ferécides autor del *Pentemychos* o *Heptamychos,* una de las primeras obras en prosa, atestiguado en la literatura griega, que se formó un puente importante entre mítico y pre-socrático pensamiento.

Alrededor del año 535 a. C. Pitágoras fue a Egipto. Esto sucedió unos años después de que el tirano Polícrates tomó el control de la ciudad de Samos. Existe cierta evidencia que sugiere que Pitágoras y Polícrates fueron amigables en un primer momento y se dice que Pitágoras fue a Egipto con una carta de presentación escrita por Polícrates. De hecho Polícrates tenía una alianza con Egipto y por lo tanto, había fuertes lazos entre Samos y Egipto en este momento.

Los relatos de la estancia de Pitágoras en Egipto sugieren que visitó muchos de los templos y tomó parte en muchos debates con los sacerdotes. Según Porfirio, a Pitágoras no se le permitió el ingreso a todos los templos, excepto al de Diospolis donde fue aceptado en el sacerdocio tras completar los ritos necesarios para su admisión.

Pitágoras impuso en su estilo de vida muchas de las costumbres que encontró en Egipto. Por ejemplo, el secreto de los sacerdotes egipcios, su negativa a comer alubias, su negación a vestir incluso ropas hechas de pieles de animales, y su lucha por la pureza. Porfirio establece que la geometría de Pitágoras proviene de los egipcios, pero es probable que él ya conociera la geometría, ciertamente tras las enseñanzas de Thales y Anaximandro.

En el 525 a. C. Cambises II, rey de Persia, invadió Egipto. Polícrates abandonó su alianza con Egipto y envió 40 barcos para unirse a la flota persa contra los egipcios. Después de que Cambises había ganado la batalla de Pelusio en el Delta del Nilo y capturado a Heliópolis y Menfis, la resistencia egipcia se desplomó.

Pitágoras fue hecho prisionero y llevado a Babilonia. Jámblico[47] escribe que Pitágoras: "... fue transportado por los seguidores de Cambises II como prisionero de guerra. Mientras estaba allí con mucho gusto asociado con la Magoi…y fue instruido en sus ritos sagrados y aprendió sobre un místico culto muy de los dioses. También llegó a la cima de la perfección en aritmética y música y las ciencias matemáticas enseñadas por otros de los babilonios…"

Alrededor de 520 a. C. Pitágoras dejó Babilonia y regresó a Samos. Polícrates había sido asesinado alrededor de 522 a. C. y Cambises murió en el verano de 522 a. C., ya sea por suicidio o como consecuencia de un accidente. Las muertes de estos gobernantes pueden haber sido un factor en el regreso de Pitágoras a Samos, pero en ninguna parte se explica cómo Pitágoras obtuvo su libertad.

Darío de Persia había tomado el control de Samos tras la muerte de Polícrates y gobernó la isla antes del regreso de Pitágoras. Esto entra en conflicto con los relatos de Porfirio y de Diógenes Laercio que afirman que Polícrates todavía estaba en el control de Samos cuando Pitágoras regresó allí.

Pitágoras hizo un viaje a Creta poco después de su regreso a Samos para estudiar el sistema de leyes de allí. De regreso a Samos fundó la Escuela pitagórica que fue llamada "el semicírculo". Jámblico escribe de la Escuela pitagórica en el siglo III d. C.: "... formó una escuela en la ciudad de Samos, el 'semicírculo' de Pitágoras, cuyo nombre es aun reconocido, en la escuela pitagórica los samios celebraban reuniones políticas.

47. **Jámblico de Calcis** se estima que nació en la segunda mitad del siglo III (243, 245 o 250) y falleció el año 325. Fue un filósofo griego neoplatónico, también considerado neopitagórico, de cuya vida poco se conoce, salvo que nació en Calcis, en Celesiria, y fue discípulo de Porfirio.

Lo hacen porque creen que hay que discutir cuestiones acerca de la bondad, la justicia y la conveniencia en este lugar que fue fundado por el hombre que hizo de todos estos temas su negocio. Fuera de la ciudad hizo una cueva que era el lugar privado de su enseñanza filosófica propia, pasando la mayor parte de la noche y el día allí haciendo la investigación sobre los usos de la matemática...”

Pitágoras fundó una escuela filosófica y religiosa en Crotón (ahora Crotona) que tuvo muchos seguidores. Pitágoras fue la cabeza de la sociedad con un círculo interno de seguidores conocidos como mathematikoi. Los Mathematikoi vivían permanentemente con la sociedad, no tenían posesiones personales y eran vegetarianos. Ellos fueron instruidos por el mismo Pitágoras y eran obedientes ante estrictas reglas.

Tanto a hombres como a mujeres se les permitió ser miembros de la sociedad, de hecho varias mujeres pitagóricas[48] se convirtieron más tarde en filósofas famosas. El círculo exterior de la sociedad era conocido como el akousmatics y vivían en sus propias casas, y solo iban a la sociedad durante el día. Se les permitió tener sus propias posesiones y no era requisito ser vegetariano.

Es difícil distinguir entre el trabajo de Pitágoras y el de sus seguidores. Ciertamente su escuela hizo destacadas contribuciones matemáticas, y es posible estar bastante seguros de algunas contribuciones matemáticas hechas por Pitágoras.

El interés de Pitágoras estaba orientado en los principios de las matemáticas, el concepto de número, el concepto de un triángulo u otra figura matemática y la idea abstracta de una prueba. En relación a esto, Brumbaugh escribe: “Es difícil para nosotros hoy día, familiarizados con la abstracción matemática pura y con el acto mental de la generalización, apreciar la originalidad de esta contribución pitagórica”.

De hecho hoy hemos llegado a ser tan matemáticamente sofisticados que incluso reconocemos a 2 como una cantidad abstracta. Hay un notable paso de 2 barcos $+$ 2 barcos $=$ 4 barcos, al resultado abstracto $2 + 2 = 4$, que no sólo se aplica a los buques, sino a los corrales, la gente, casas, etc., hay un paso más para ver que la noción abstracta de 2 es en sí misma una cosa, en algún sentido tan real como un barco o una casa.

Pitágoras creía que todas las relaciones podían ser reducidas a relaciones numéricas, tal como escribe Aristóteles: “Los pitagóricos... habiendo sido educados en el estudio de las matemáticas, tenían el pensamiento de que las cosas son números... y que todo el cosmos es una escala y un número”.

Esta generalización se deriva de las observaciones de Pitágoras en la música, las matemáticas y la astronomía. Pitágoras advirtió que las cuerdas vibrantes producen tonos armoniosos, cuando las razones de las longitudes de las cuerdas son números enteros, y que estas relaciones se podrían extender a otros instrumentos. De hecho, Pitágoras hizo notables contribuciones a la teoría matemática de la música. Él era un buen músico, tocando la lira, y usó la música como un medio para ayudar a los enfermos.

48. Ver información complementaria en: http://www.uv.mx/cienciahombre/revistae/vol23num2/articulos/teano/

Pitágoras estudió propiedades de los números, que serían familiares a los matemáticos de hoy, como los números pares e impares, números triangulares, números perfectos, etc.

En la actualidad, recordamos particularmente a Pitágoras debido a su famoso teorema geométrico, ahora conocido como el teorema de Pitágoras, que fue utilizado por los babilonios mil años antes de que fuera demostrado por los griegos.

Además del teorema de Pitágoras, existen otros teoremas que son atribuidos a Pitágoras o más generalmente a los pitagóricos.

1. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
2. El teorema de Pitágoras "para un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados".
3. Construir figuras de un área dada y el álgebra geométrica. Por ejemplo resolviendo ecuaciones como $a(a-x)=x^2$ por medios geométricos.
4. El descubrimiento de los números irracionales. este es un resultado obtenido por el pitagórico Hipasus, por lo que parece improbable que haya sido debido a Pitágoras, puesto que tal irracionalidad iba en contra de la filosofía de Pitágoras, quien defendía que todo puede expresarse como números, y por número quería decir el cociente de dos números enteros.
5. Los cinco sólidos regulares. Se cree que el mismo Pitágoras sabía construir los primeros tres; pero es poco probable que él hubiera sabido construir los otros dos.
6. En astronomía, Pitágoras enseñó que la Tierra era una esfera en el centro del Universo. También reconoció que la órbita de la Luna estaba inclinada hacia el ecuador de la Tierra.

TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras se aplica únicamente a triángulos rectángulos. Los triángulos rectángulos son aquellos que tienen un ángulo cuya medida es 90º, a este ángulo también se le denomina ángulo recto. Todo triángulo rectángulo tiene dos ángulos agudos que sumados resultan 90º, esto verifica el teorema de ángulos internos de triángulos: "la suma de los ángulos internos de todo triángulo resulta dos ángulos rectos (180º)". Además, el triángulo rectángulo posee tres lados, el lado de mayor longitud se le llama hipotenusa y los lados restantes se denominan catetos.

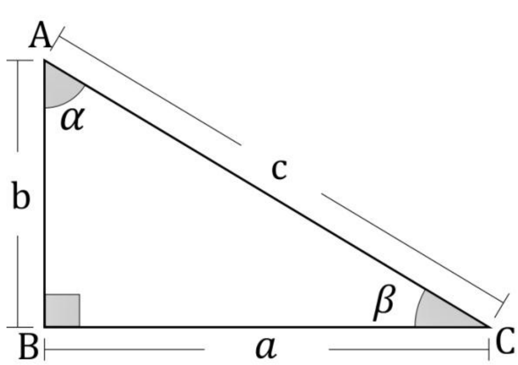


Figura 2. Elementos de un triángulo rectángulo.

El triángulo ΔABC está conformado por tres vértices (A, B y C), tres lados (a, b y c) y tres ángulos $(\alpha, \beta\ y\ \gamma)$, puesto que $\gamma = 90º$, el triángulo ΔABCes llamado **rectángulo.** Los ángulos α y β son agudos (menores que 90º) y la suma de ambos es 90º $(\alpha + \beta = 90º)$.

Con respecto a los lados a, b y c, se tiene que c es de mayor longitud, y se cumplen las siguientes relaciones:

$$c > a\ \wedge c > b$$

Por lo que c es mayor que cualquiera de sus otros dos lados.

En el triángulo de la Figura 1, los lados a y b son menores que c, además para a y b se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a > b; a < b; a = b$$

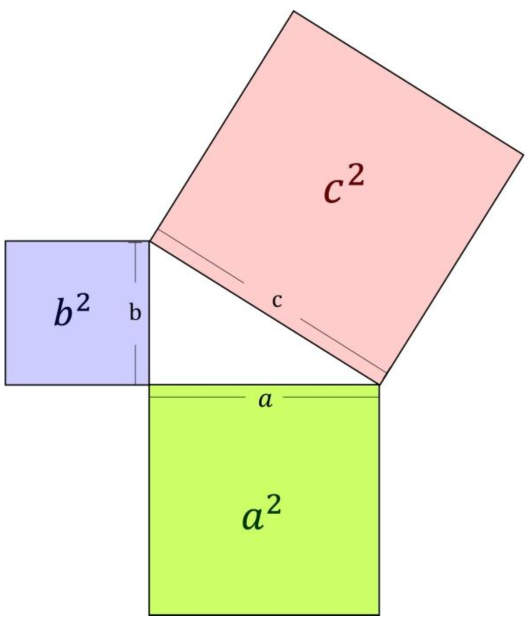
Para $a > b \ \wedge a < b$; se deduce que el triángulo que se estudia es escaleno, porque sus tres lados son distintos. En caso contrario, si $a = b$, se tienen dos lados iguales y uno desigual, por lo que el triángulo es isósceles.

Para el triángulo rectángulo de la figura 1 se tiene la identidad:

$c^2 = a^2 + b^2$

Esta identidad es conocida con el nombre de *teorema de Pitágoras*. Este teorema establece una clara relación entre la longitud de la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo cualquiera. El teorema se enuncia de la forma siguiente:

"El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, corresponde a la suma de los cuadrados de los catetos"



$$c^2 = a^2 + b^2$$

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, corresponde a la suma de los cuadrados de los catetos.

El enunciado que dieron los antiguos griegos al teorema de Pitágoras es el siguiente: el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (figura 3).

Figura 3. Teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras posee muchas demostraciones que se desarrollan mediante material lúdico de dobleces y recortes, expresiones algebraicas o mediante figuras geométricas. En las actividades de esta lección se muestran diversas demostraciones del teorema de Pitágoras, una de ellas consiste en utilizar el teorema de Euclides, y demostrar a partir de este la relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo. También se realizan actividades donde el estudiantado demuestra el teorema con ayuda de papiroflexia.

La importancia de este teorema se basa en su relevante utilidad en diversos ámbitos, ya sea en la astronomía, construcción, arquitectura y en diversas ciencias. Una de las aplicaciones más comunes se efectúa en combinación con el teorema de Thales para determinar longitudes (alturas o distancias) en situaciones cotidianas que se resuelven con ayuda de triángulos.

Otra cualidad de los triángulos rectángulos se encuentra en sus ángulos, uno de ellos recto, pero los dos restantes son agudos; los lados opuestos a estos ángulos agudos a y b, son llamados catetos. A partir de esta primicia, si se toma como punto de referencia uno de los ángulos, el lado que es opuesto se llama cateto opuesto, pero, si el cateto está en el lado inicial o final del ángulo, entonces es llamado cateto adyacente.

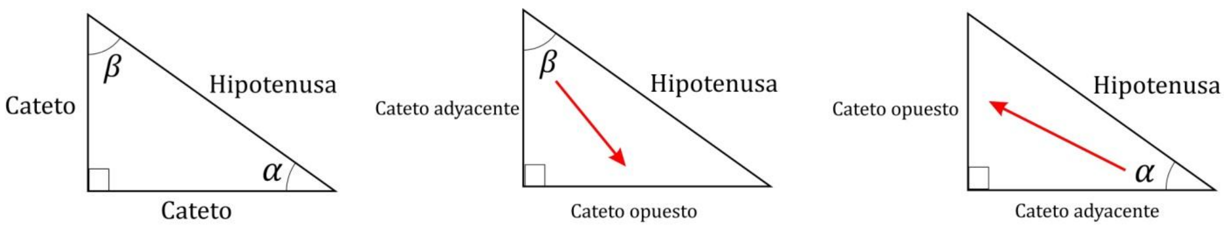
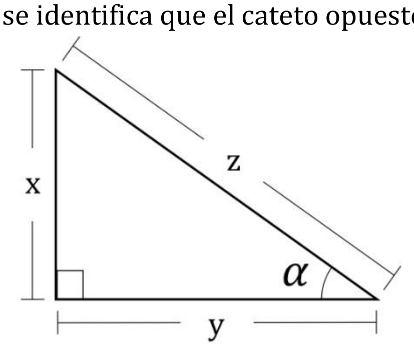


Figura 4. Catetos opuestos y adyacentes de un triángulo rectángulo en relación a sus ángulos agudos.

En la Figura 4, se muestra la asignación de los catetos en un triángulo rectángulo en relación al ángulo agudo interno.

En todo triángulo rectángulo existen seis razones que se generan a partir del cociente de dos de sus lados, a estas razones se les conoce con el nombre de **razones trigonométricas,** y cada una de estas recibe un nombre característico dependiendo los pares de lados que se utilizan. Si se efectúa el cociente entre el cateto opuesto a uno de los ángulos agudos del triángulo y la hipotenusa, la razón resultante se llama **seno**. Para la Figura 5, si se desea conocer la razón seno en relación al ángulo α, se identifica que el cateto opuesto a α es x, y que la hipotenusa es z. En consecuencia:



$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{x}{z}$$

Figura 5. Razón trigonométrica seno de alfa.

De forma análoga se enuncian las siguientes razones:

Coseno de α: $cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{y}{z}$

Tangente de α: $\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{x}{y}$

Las tres razones trigonométricas restantes se definen a partir del recíproco de las tres razones trigonométricas iniciales. De este modo, para $sen\ \alpha$, la razón es $\frac{x}{z}$, pero, el recíproco de esta razón está dado por $\frac{z}{x}$, puesto que $\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)=\frac{xz}{zx}=1$. A la razón $\frac{z}{x}$ en relación al ángulo α se le llama **cosecante.**

$$cosecante\ de\ \alpha\colon \csc\alpha=\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}=\frac{z}{x}$$

De forma análoga, los recíprocos de coseno y tangente serán:

Secante de α: $\sec\alpha=\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}=\frac{z}{y}$

Cotangente de α: $\cot\alpha=\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}=\frac{y}{x}$

Las razones trigonométricas son aplicables para cualquier triángulo rectángulo, la medida del ángulo agudo no determina la razón. Considerando que el valor de α se encuentra en el intervalo $]0,90[$[49], para cualquier valor de α, la razón seno de α, seguirá siendo el cociente del cateto opuesto sobre la hipotenusa. Esto se cumple para las cinco razones trigonométricas restantes.

El conocimiento de razones trigonométricas en consonancia con la comprensión del teorema de Pitágoras, Thales y Euclides, constituye una herramienta importante en el proceso de resolución de triángulos rectángulos. La resolución de triángulos rectángulos consiste en determinar la medida de los ángulos internos de un triángulo y la longitud de los tres lados a partir de algunos valores conocidos.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Las siguientes actividades buscan que el estudiantado comprenda el teorema de Pitágoras a partir de demostraciones geométricas, luego se realizan otras demostraciones a partir del teorema de Euclides; y después, se comentan algunas conclusiones que surgen a raíz de la aplicación del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Actividad 1. Demostración por papiroflexia.

Objetivo

Proponer situaciones de aprendizaje donde el estudiante demuestre el teorema de Pitágoras a partir de prácticas con papiroflexia.

Materiales

Páginas de papel.
Tijeras.
Lápiz o marcador.
Regla graduada.
Pegamento.

49. El intervalo $]0,90[$ indica que para cualquiera de los dos ángulos internos no rectos de un triángulo ABC, la medida de estos estará definida entre 0 y 90 sin incluir los extremos.

Indicaciones

Organizar al grupo de estudiantes en equipos de trabajo. Brindar a cada equipo un triángulo rectángulo, hojas de papel y tijeras. Invitar a los grupos a que peguen el triángulo en una hoja de papel; además, tienen que medir la longitud de los lados y dibujar en cada lado del triángulo un cuadrado.

Con las páginas de papel bond, desarrollar el proceso que se describe a continuación:

Medir la longitud del cateto mayor (cateto a) y elaborar cuatro cuadrados con la medida del cateto a en cada uno de sus lados. (Figura 6 A). Tomar uno de los cuadrados (ABCD) y marcar en el lado AB el punto medio M, a partir del punto medio M se mide hacia la derecha e izquierda de este una longitud equivalente a la mitad de la medida del cateto menor del triángulo rectángulo, marcar en ambos extremos los puntos N_1 y N_2 (figura 6 B).

Con ayuda de la regla y un lápiz, a partir de N_1 y N_2 trazar dos segmentos paralelos a CB que corten a AB en dos puntos que se llamarán N_1' y N_2' (Figura 6 C). Doblar el cuadrado haciendo un trazo entre los extremos $N_1 y\, N_2'$ de la figura, formando el segmento $\overline{N_1N_2'}$ (Figura 6 D y E). Doblar el segmento $\overline{N_1N_2'}$ haciendo coincidir los puntos $N_1\ y\ N_2'$ (Figura 6 F). Doblar el papel de tal forma que quede la figura 6 G.

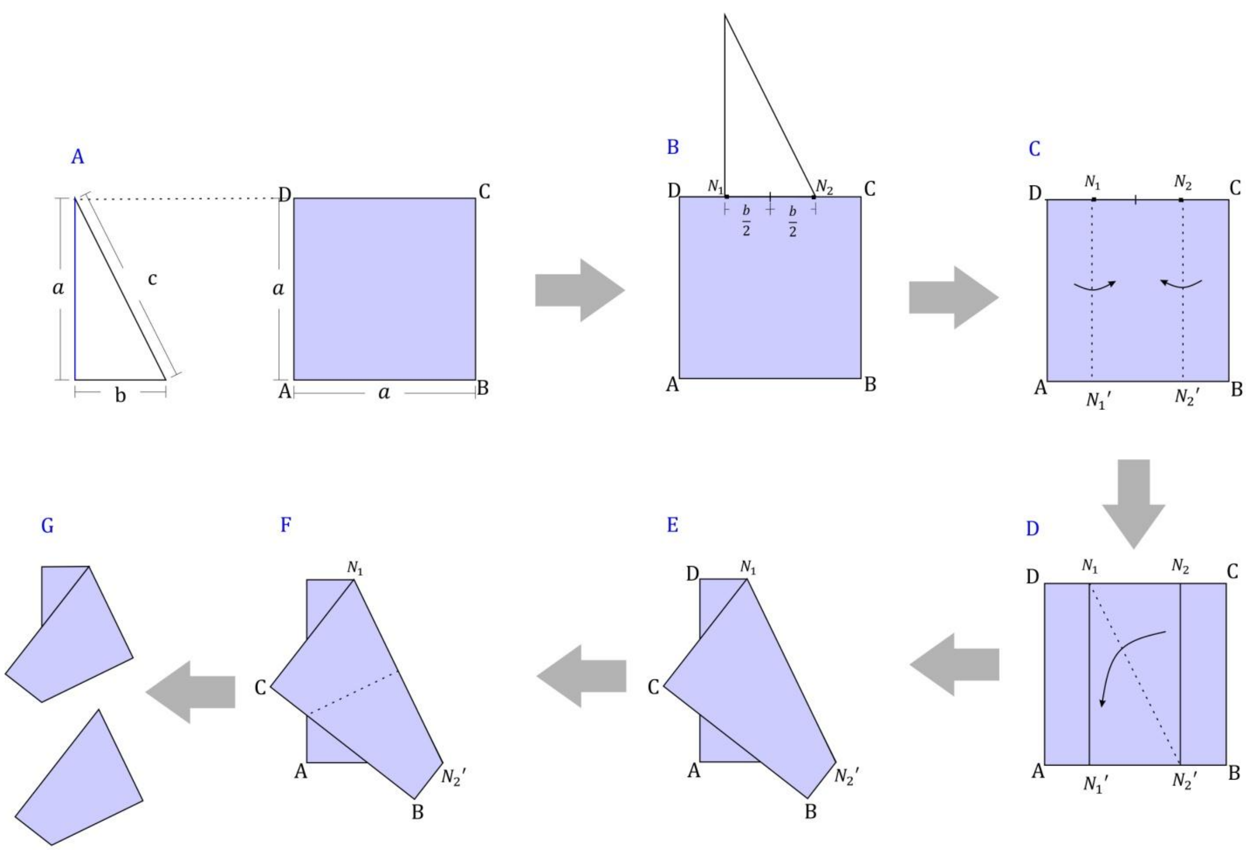


Figura 6. Proceso de demostración del teorema de Pitágoras mediante papiroflexia.

Realizar el proceso anterior con los tres cuadrados restantes. Invitar al estudiantado a que rellene con estas cuatro figuras el cuadrado que se forma en el cateto a del rectángulo. Después, recortar un cuadrado de longitud b. Mencionar que, según el teorema de Pitágoras, la suma de las superficies de los cuadrados formados en el cateto a y cateto b, debe ser igual a la superficie del cuadrado formado en el cateto c.

Para demostrar la conjetura anterior, se pide al estudiantado que con ayuda de las piezas, que juntas conforman el cuadrado de lado a en conjunto con el cuadrado del cateto b, forme un cuadrado cuyo lado coincida con el valor de c.

Permitir al estudiantado que forme el cuadrado con las figuras y utilice todo su ingenio y creatividad en el proceso. Se recomienda brindar orientaciones y repetir el teorema de Pitágoras si es necesario, con el propósito de recordar a los estudiantes que con las piezas del cuadrado de lado *a* y el cuadrado de lado *b*, se formará el cuadrado de lado c.

Después de cumplir con las condiciones, la figura resultante demuestra que, en efecto, la adición de la superficie de los cuadrados de los catetos corresponde a la superficie del cuadrado formado por la hipotenusa. Ver figura 7.

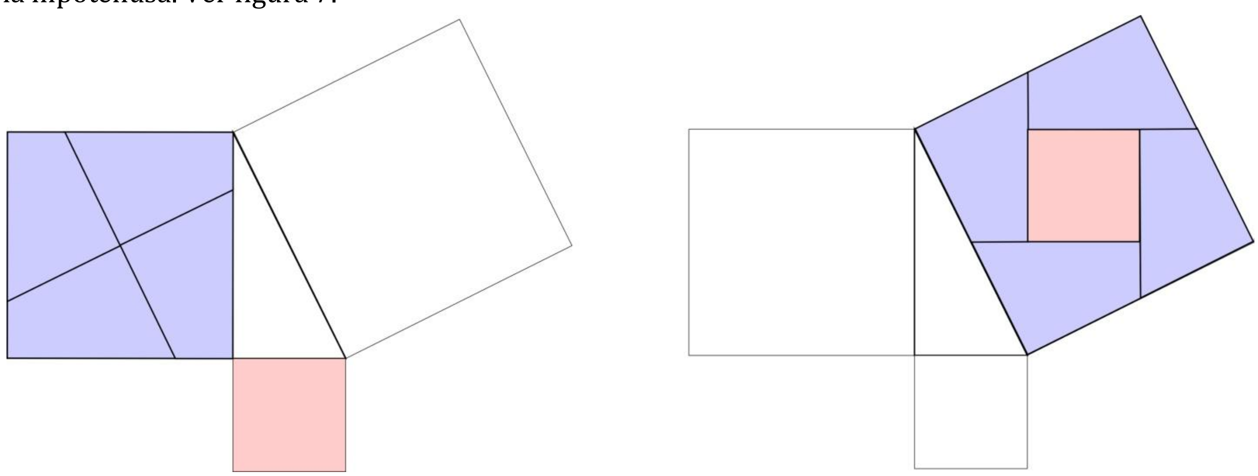


Figura 7. Demostración del teorema de Pitágoras.

En las siguientes líneas se discute una demostración del teorema de Pitágoras más sofisticada en la que se necesita realizar un trabajo preliminar con el teorema de Euclides, por lo que se sugiere analizar detenidamente el teorema de Euclides para que posteriormente se aplique en la demostración del teorema de Pitágoras.

Actividad 2. Teorema de Euclides.

Objetivo

Analizar el teorema de Euclides con respecto al cateto de un triángulo rectángulo.

Materiales

Cuaderno de trabajo.
Hojas de papel.
Marcador, lápiz o lapicero.

Indicaciones

Explicar la demostración de este teorema de forma sistemática, respetando la nomenclatura geométrica y explicando al estudiantado, de forma clara y sencilla, lo que se hace en cada paso de la demostración.

Teorema de Euclides: En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo formado por la hipotenusa entera y la proyección del mismo cateto sobre ella.

Para efectuar la demostración, se recomienda elaborar un dibujo o bosquejo de la información recibida.

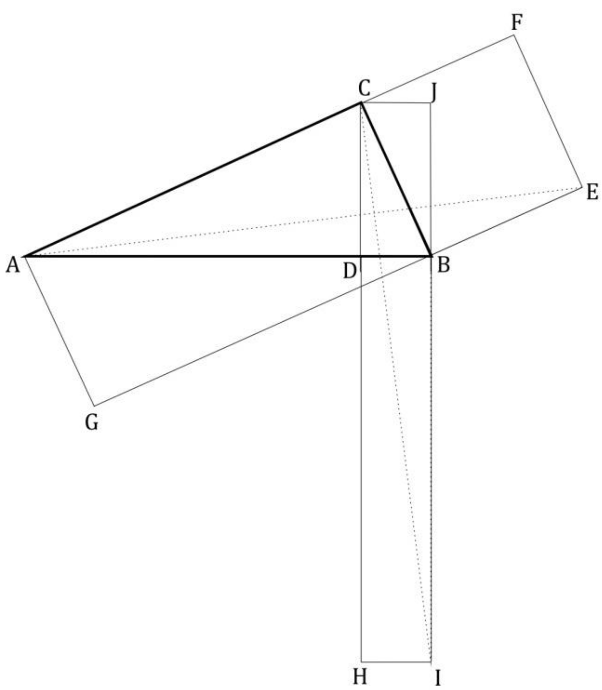


Figura 8. Demostración del teorema de Euclides.

En la Figura 8 se ilustra el teorema que se va a demostrar. El segmento $\overline{DB}$ es la proyección de $\overline{CB}$ sobre $\overline{AB}$, el segmento $\overline{DC}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, por lo que es la altura del triángulo ΔABC.

En el vértice B, se traza un segmento paralelo a la altura $\overline{DC}$ con extremo en I, la medida de este segmento corresponde a la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$.

De forma análoga, el segmento $\overline{CD}$ que es altura, se prolonga a partir de D en un segmento perpendicular a $\overline{AB}$ de longitud correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$, el extremo superior de este segmento es H.

Unir los extremos I y H para formar el rectángulo DHIB.

El teorema de Euclides busca demostrar que la superficie del rectángulo DHIB y el cuadrado CBEF son iguales. A continuación se formulan la hipótesis y la tesis de la demostración:

Hipótesis: El triángulo ΔABC es rectángulo, el segmento $\overline{AB}$ es la hipotenusa por ser el lado de mayor longitud, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son catetos. Además $\overline{AB}$ está formado por $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$, por lo que $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$.

Tesis. La superficie del cuadrado CBEF es igual a la superficie del rectángulo DHIB.

A partir de la información que se explica en la hipótesis, se busca idear un proceso lógico que permita llegar a la tesis utilizando las premisas ya descritas.

Demostración

Trazar los segmentos auxiliares $\overline{AE}$ y $\overline{CI}$, observar que se forman los triángulos ΔABE y ΔCBI, de los que es posible deducir que: el segmento $\overline{BE}$ es igual a $\overline{BC}$, además $\overline{BA}$ es igual a $\overline{BI}$ por construcción. Además, el ángulo $\sphericalangle ABE$ está conformado por la suma de los ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle CBE$, del mismo modo, el ángulo $\sphericalangle IBC$ está conformado por $\sphericalangle IBA$ y $\sphericalangle ABC$. Puesto que $\sphericalangle ABC$ es común en ambos, y los ángulos $\sphericalangle IBA$ y $\sphericalangle CBE$ son rectos, se deduce que $\sphericalangle ABE \ = \ \sphericalangle IBC$.

En notación geométrica, se tienen los siguientes resultados:

Para ΔABE y ΔBCI se tiene:

1. $\overline{BE} = \overline{BC}$
2. $\overline{BA} = \overline{BI}$
3. $\sphericalangle ABE = \sphericalangle IBC$

Según las proposiciones (1), (2) y (3) que se identifican en los triángulos, se describe que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también es igual. Según criterio LAL de congruencia de triángulos, se concluye que:

$$\Delta ABE \cong \Delta BCI$$

En relación al triángulo $\sphericalangle ABE$, la base es $\overline{BE}$ y la altura está dada por $\overline{AG}$, puesto que $\overline{AG} = \overline{CB}$, se deduce la siguiente situación:

La superficie de CBEF está dada por el producto de dos de sus lados, pero la superficie de ΔABE se obtiene multiplicando la base del triángulo ($\overline{BE}$) por la altura de este ($\overline{AG}$) y el producto se divide en dos.

$$A_{ABE} = \frac{(\overline{BE})(\overline{AG})}{2}$$

Si $\overline{AG}$ corresponde a $\overline{CB}$, se tiene:

$$A_{ABE} = \frac{(\overline{BE})(\overline{BC})}{2}$$

Puesto que, $(\overline{BE})(\overline{BC})$ es la superficie del cuadrado CBEF, se concluye que:

$$A_{ABE} = \frac{1}{2} A_{CBEF}$$

La superficie del triángulo ΔABE es la mitad de la superficie del cuadrado CBEF.

Para el rectángulo HIBD, la superficie está definida por el producto de $\overline{BI}$ y $\overline{BD}$ ($A_{HIBD} = (\overline{BI})(\overline{BD})$). Además, el triángulo ΔBCI, tiene su base en $\overline{BI}$ y altura en $\overline{CJ}$, el área del triángulo ΔBCI está dada por:

$$A_{BCI} = \frac{(\overline{BI})(\overline{CJ})}{2}$$

Pero, $\overline{CJ} = \overline{DB}$, al sustituir este valor, se tiene:

$$A_{BCI} = \frac{(\overline{BI})(\overline{BD})}{2}$$

Puesto que, (BI)(BD) es la superficie de HIDB, se concluye que:

$$A_{BCI} = \frac{1}{2}HIBD$$

Si ΔABE y ΔBCI son congruentes, entonces las superficies serán iguales, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}A_{CBEF} = \frac{1}{2}A_{BIHD}$$

En consecuencia el área de CBEF es igual al área de BIHD. Puesto que $\overline{CB} = a, \overline{DB} = p$ y $\overline{AB} = q$, se deduce la expresión: $a^2 = cp$

Lqqd. (Lo que quería demostrar)

Actividad 3. Demostración del teorema de Pitágoras.

Objetivo

Mostrar los procesos de la demostración del teorema de Pitágoras con ayuda del teorema de Euclides.

Materiales

Cuaderno de trabajo.
Hojas de papel.
Marcador, lápiz o lapicero.

Indicaciones

Explicar detalladamente la demostración del teorema de Euclides, puesto que este será utilizado para demostrar el teorema de Pitágoras. Orientar al estudiantado en relación a la notación algebraica y geométrica que se utiliza en la demostración, además, se recomienda utilizar ilustraciones y papel de color para elaborar las figuras que se describen en esta actividad.

Teorema de Pitágoras: En un triángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Para facilitar la demostración del teorema, elaborar la figura que se muestra a continuación:

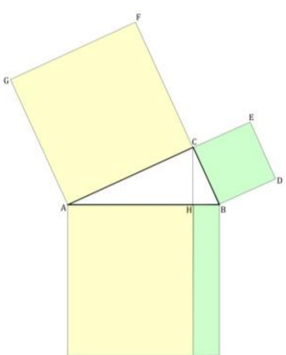


Figura 9. Demostración del teorema de Pitágoras.

En la Figura 9, se muestra un triángulo rectángulo (ABC), cuya posición muestra a la hipotenusa como la base.

Los segmentos BC y AC son catetos, los cuadrados CBDE y ACJG están formados sobre los catetos; además, el cuadrado ABKJ está formado sobre la hipotenusa. Lo que se busca es demostrar que la suma de las superficies de los cuadrados formados en los catetos, coincide con la superficie del cuadrado formado en la hipotenusa. Para demostrarlo, es necesario enunciar la hipótesis y la tesis.

Hipótesis: El triángulo ΔABC es rectángulo con hipotenusa en $\overline{AB}$ y los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: la superficie del cuadrado formado en el segmento $\overline{AB}$, coincide con la suma de los cuadrados formados en $\overline{AC}$ y en CB: $(\overline{AB})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{AC})^2$.

Demostración

Se traza el segmento $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{AB}$. A partir de este trazo se tienen las siguientes deducciones:

1. El segmento $\overline{HB}$ es la proyección de $\overline{CB}$ en $\overline{AB}$, además el segmento $\overline{BE}$ es igual a $\overline{AB}$, según el teorema de Euclides la superficie de HIJB es igual a la superficie de CBDE. En notación geométrica se tiene lo siguiente:
   $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, se prolonga el segmento $\overline{CH}$ hasta F, además se traza $\overline{BJ} \parallel \overline{HI}$
   $$\overline{BJ} = \overline{AB} = \overline{HI}$$
   Por el teorema de Euclides se tiene que: $A_{HIJB} = A_{CBDE}$
2. De forma análoga a la información detallada en (1), el segmento $\overline{AH}$ es la proyección de $\overline{AC}$ en $\overline{AB}$, además $\overline{AK} = \overline{AB} = \overline{HI}$, según el teorema de Euclides la superficie de AKIH y ACFG es la misma.
   $$A_{AKIH} = A_{ACFG}$$

La superficie de AKJB está integrada por las superficies de AKIH y HIJB. De este modo, se tiene que:

$$A_{AKJB} = A_{HIJB} + A_{AKIH}$$

Utilizando los resultados de (1) y (2) se tiene: $A_{HIJB} = A_{CBDE}$; $A_{AKIH} = A_{ACFG}$; Sustituyendo ambos resultados en la expresión anterior, obtenemos:

$$A_{AKJB} = A_{CBDE} + A_{ACFG}$$

En consecuencia, se tiene la siguiente expresión:

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{AC})^2$$

Lqqd. (Lo que quería demostrar)

La demostración del teorema de Pitágoras tiene muchas consecuencias que se enuncian mediante el teorema recíproco del teorema de Pitágoras y corolarios. El teorema recíproco, establece que si en un triángulo cualquiera, se verifica que la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo, en caso contrario, el triángulo será oblicuángulo.

El corolario 1 del teorema de Pitágoras, establece que la superficie del cuadrado formado en el cateto a, corresponde a la diferencia entre la superficie del cuadrado formado sobre la hipotenusa y el cuadrado de lado b.

$$a^2 = c^2 - b^2$$

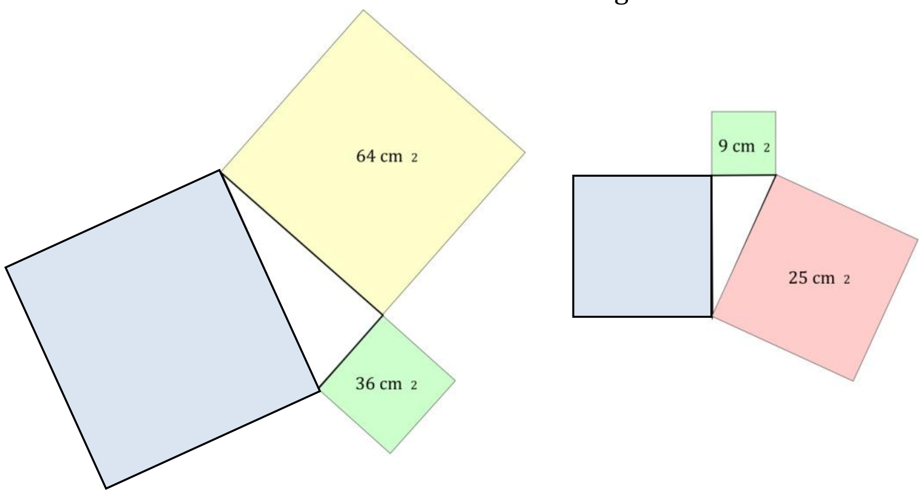
El corolario 2, del mismo modo, establece que la superficie del cuadrado formado en el cateto b, corresponde a la diferencia entre la superficie del cuadrado formado sobre la hipotenusa y el cuadrado de lado a.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

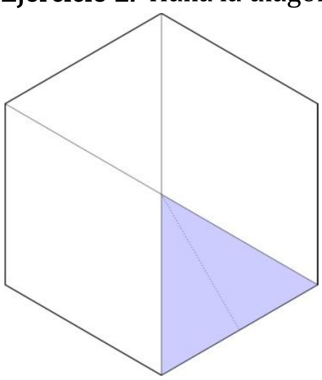
GUÍA DE EJERCICIOS Y APLICACIONES

Ejercicio 1. Teorema de Pitágoras.

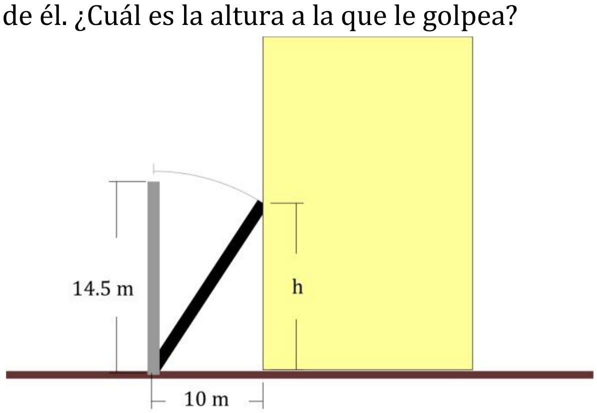
Calcula el área del cuadrado azul en cada uno de los siguientes casos:



Ejercicio 2. Halla la diagonal de un hexágono regular cuyo lado mide 2.8.



Problema 1. Se cae un poste de 14.5 metros de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 metros de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

12. Cano O. Geometría Segunda Parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
13. Cano O. Geometría Primera parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
14. De la Peña Hernández, J. (2000) *Matemáticas y Papiroflexia*. Asociación Española de Papiroflexia. Madrid.
15. Garrido, B (2002), *Papiro-demostración del teorema de Pitágoras*, artículo matemático.
16. Hall, J. (1995) Teaching Origami to develop visual spatial perception en Second International Conference on Origami Education and Therapy. Origami EE.UU., New York.
17. J. J. O'Connor y E. F. Robertson (1996) *Pitágoras de Samos, Biografía.* Facultad de Matemática y Estadística, Universidad de St. Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html. Accesado el 19/10/2011.
18. Kirk, G. Raven, J. y Schofield M. (2003). *Los filósofos presocráticos*. Cambridge University Press. http://books.google.com/books?id=kFpd86J8PLsC&pg . p. 51.
19. O'Connor, J. J. y Robertson E. F. (1999), *Pitágoras de Samos, Biografía*, Facultad de Matemáticas y Estadistica, Universidad de St Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html.
20. Pogorélov A.V. (1974) *Geometría elemental*. Editorial Mir, Moscú, traducido del ruso por Carlos Vea, Catedrático de Matemáticas superiores.
21. Schibli, S., Hermann, Pherekydes de Syros, p. 104, Oxford University. Prensa 2001.
22. Schibli, S., Hermann, Pherekydes de Syros, p. 108, Oxford University. Prensa 2001.
23. Universidad Católica de Chile (2009) Geometría Nº 7, Centro de alumnos de Ingeniería, Preuniversitario de Ingeniería.

Lección 9 | 8° grado | Unidad 5 | Tiempo: 15 horas clase

Área de regiones planas

La Matemática en la fundación de Cartago

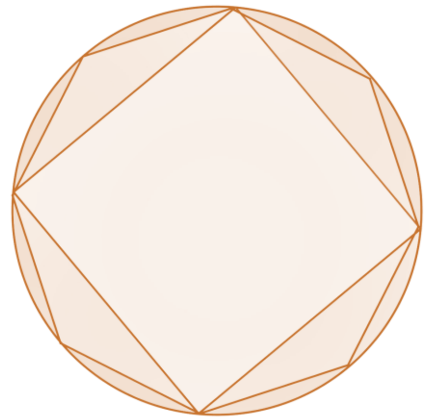


Figura 1. **Antifón del sofista.** Nació y murió en Atenas, Grecia, 480-411 a. C. No se conoce retrato alguno, pero en el estudio de la matemática es conocido debido a su aporte en el cálculo de áreas de polígonos regulares. Propuso el método de agotamiento y dedujo que la circunferencia era un polígono de muchos lados, años después, este conocimiento fue retomado por Arquímedes para deducir la superficie y, perímetro del círculo y en consecuencia, propuso una aproximación del irracional π.

Introducción del tema

Existen diversos e interesantes relatos históricos que narran la aplicación de figuras planas y el cálculo de áreas y perímetros en ámbitos culturales, arquitectónicos, astronómicos y científicos. Un ejemplo claro de la aplicación matemática en la historia está inspirado en la obra del escritor romano Publio Virgilio Marón, creador de la obra literaria "La Eneida". De esta obra se destaca el relato de Dido, mejor conocida como Elisa de Tiro. Se comenta que Elisa de Tiro al ser desterrada de su reino por su propio hermano, decidió enfrentarse al mundo en una búsqueda incansable de nuevas tierras, todo esto en compañía de sus fieles servidores.

Cuando encontraron el lugar idóneo donde erigirían su propia nación se enfrentaron al tirano que gobernaba las tierras que tenían bajo sus pies, quien no accedió a vender ni la más minina porción de tierra, sin importar el precio que se ofreciere, pero, sí trató de burlar a Elisa proponiéndole un problema en el que fue de vital importancia el uso de la matemática para determinar área de superficies planas a partir de perímetros.

En esta lección se relata la historia de Elisa de Tiro, así también se enuncia el problema al que tuvo que enfrentarse para fundar la ciudad que históricamente fue conocida como Cartago. En el transcurso de la lección se proponen actividades que buscan orientar en la resolución brindando insumos para comprender y orientar esfuerzos a la obtención de un resultado coherente e interesante.

Además, se muestra la aplicación directa de herramientas y teoremas que han sido tratados en lecciones anteriores, esto con el propósito de fundamentar conocimientos previos y abrir nuevos senderos hacia el nuevo conocimiento. Al final de la lección se analizan los resultados y se emiten conclusiones.

En la guía de ejercicios y problemas, se muestran actividades que invitan tanto al docente como al estudiante, a seguir investigando acerca de la temática y encontrar otras aplicaciones, donde se evidencie el uso de superficies y perímetros de figuras planas en la naturaleza y en aspectos científicos y tecnológicos.

Competencias por fortalecer

– Saber argumentar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Análisis de relatos históricos que muestren indicios del estudio de la Geometría y de superficies de figuras planas.
– Resolver problemas a partir de relatos histórico-líricos que tienen una amplia aplicación matemática.

Presaberes

– Semejanza y congruencia de triángulos.
– Lenguaje algebraico.
– Fórmulas de áreas de figuras planas.
– Teorema de Pitágoras.
– Teorema de Euclides.

SUPERFICIE DE FIGURAS PLANAS (MÉTODO POR AGOTAMIENTO)

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Polígono

Un polígono es una figura geométrica cerrada, formada por segmentos rectos consecutivos y no alineados, llamados lados. Los polígonos más simples conocidos son el triángulo y el cuadrado.

Superficie

La superficie de una figura plana es la porción del plano encerrada por su perímetro, sin realizar medición alguna.

Área

Área es el número que expresa la relación de la superficie de una figura con la unidad de superficie.

Unidad de superficie

Las unidades de superficie son patrones establecidos mediante acuerdos para facilitar el intercambio de datos en las mediciones cotidianas o científicas y simplificar radicalmente las transacciones comerciales.

Antifón el sofista nació y murió en Atenas, Grecia, 480-411 a. C. Era un orador y estadista que ocupó la retórica como una profesión. Él era un sofista y un contemporáneo de Sócrates.

Estas afirmaciones son definitivas, sin embargo, discutidas por algunos historiadores. El problema parece girar en torno a que si hubo un filósofo sofista llamado Antifón que vivió alrededor de este tiempo o si hay dos, o como afirman algunos expertos, tres Antifón distintos.

Se han conservado una serie de discursos que fueron escritos por Antifón, tres de estos discursos fueron hechos siendo fiscal en los juicios por asesinato.

Doce de los discursos hechos por Antifón son ejemplares empleados en la enseñanza de los estudiantes para fortalecer las habilidades de procesamiento y la defensa de clientes en casos judiciales. Los discursos se presentan en tres colecciones de cuatro, dos discursos de enjuiciamiento y dos discursos de defensa de cada uno de los tres casos diferentes.

Antifón publicó una serie de obras sobre la filosofía, que se han perdido, a excepción de un pequeño número de fragmentos que se han descubierto, junto con algunas citas en los trabajos escritos de otros autores.

Entre estas obras se mencionan: *La Verdad*, *El Concord*, *El estadista*, y en *la interpretación de los sueños*. El trabajo de *La verdad* está escrito para apoyar la opinión de Parménides que sostenía que había una única realidad y que el mundo aparente de muchas cosas, era irreal.

Antifón hizo una primera contribución importante a la matemática cuando se hicieron los primeros intentos por determinar la cuadratura de un círculo[50]. Al hacerlo, se convirtió en el primero en proponer un método de agotamiento, aunque no está del todo claro qué tan bien entiende su propia propuesta.

Propuso duplicar sucesivamente el número de lados de un polígono regular, inscrito en un círculo, para que la diferencia en las áreas se agotara a medida se aumentaba el número de lados del polígono y se acercaba este a la superficie del círculo.

50. Se denomina **cuadratura del círculo** al problema matemático, irresoluble de geometría, consistente en hallar —con sólo regla y compás— un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado.

Sabemos de su trabajo a través de Aristóteles y sus comentaristas. Aristóteles afirma que un geómetra sólo tiene que demostrar que los falsos argumentos son falsos si se basan en la geometría, de lo contrario se puede ignorar. Aristóteles escribe en su *Física*: "(…) por lo que es el negocio del geómetra refutar la cuadratura a través de los segmentos, pero no es su negocio para refutar el de Antifón."

La frase que menciona Aristóteles en relación a la cuadratura a través de segmentos, es casi seguro que se refiere al método de las Lúnulas de Hipócrates[51].

Sin embargo, Aristóteles menciona no entender bien lo que Antifón hacía. Pensó que Antifón pretendía convertir en cuadrado un círculo: "Antifón pensaba que de esta manera el área del círculo se agota, y a medida se aumente el número de lados del polígono inscrito en el círculo se determinará un perímetro que debido a la pequeñez de los lados coincide con la circunferencia del círculo. Y como podemos hacer un cuadrado igual a cualquier polígono... estaremos en condiciones de hacer un cuadrado igual a un círculo."

Sin embargo, esto no fue lo que Antifón afirmó. Según L. Thomas Heath: "Antifón por lo tanto, merece un lugar honorable en la historia de la geometría, debido a que dio origen a la idea del agotamiento de un área por medio de polígonos regulares inscritos con un número cada vez mayor de partes, (...)"

Kerferd sugiere que Antifón podría haber considerado un círculo como un polígono con un gran número de lados: "En los tiempos modernos a menudo se ha supuesto que Antífona simplemente estaba haciendo un grave error en la geometría, suponiendo que toda aproximación nunca podría llegar a una coincidencia entre un polígono con lados y sin embargo muchos una circunferencia continua curva de un círculo de curvas. Antifón parece haber creído que la coincidencia completa se puede lograr por su método... Esto puede significar que Antifón ha considerado el círculo como un polígono con un número muy grande (o posiblemente infinita) de los lados."

Los métodos propuestos por Antifón motivaron a Aristóteles a medir la longitud de la circunferencia de un círculo de radio r y, en consecuencia, a determinar la superficie del círculo. El método de Aristóteles consiste en inscribir y circunscribir polígonos en un círculo, duplicando progresivamente el número de lados, hasta identificar un intervalo, lo suficientemente pequeño como para deducir la longitud de una circunferencia, con el menor grado de error. De este modo, se tuvo la primera aproximación decimal de π, aceptando que este valor pertenecía al conjunto de los números irracionales, el método de Aristóteles se explica de forma detallada en la lección 2 de números irracionales relevantes.

Antes de continuar con la explicación conceptual de esta lección, se considera necesario definir adecuadamente los términos superficie y área. Comúnmente consideramos que ambos términos poseen un significado común, pero en realidad poseen diferente significado.

La superficie de una figura plana es la porción del plano encerrada por el perímetro de la misma, sin realizar medición alguna. En cambio, el área es el número que expresa la relación de la superficie de una figura con la unidad de superficie. De este modo, se deduce que, si dos figuras que se

51. Una **lúnula** es la superficie que queda al quitar de un segmento de círculo otro con la misma base, es decir la superficie entre dos arcos de circunferencia cuando éstos están situados formando una figura no convexa. Llamamos arco al de mayor longitud.

sobreponen coinciden en toda su superficie, se dice que son congruentes y el área o valor numérico de la superficie es igual.

A partir del párrafo anterior surgen muchas interrogantes, algunas son: ¿todas las figuras que tienen igual área tienen superficies congruentes?, ¿el perímetro de las figuras determina su superficie? ¿Figuras de igual superficie poseen superficies congruentes o áreas iguales?

Para solventar estas y otras preguntas que pudieren surgir en el tratamiento de la temática, se recomienda utilizar relatos históricos que motiven al estudiantado a indagar aún más con respecto a la temática. Se busca que el aprendizaje de los métodos para determinar superficies, se convierta en una necesidad para solucionar problemas interesantes, donde la solución que se obtenga sea determinante y significativa para la comprensión de futuros problemas. Tal es el caso que se relata en la historia de la fundación de Cartago y de los relatos históricos y líricos de la princesa Elisa de Tiro.

Sin más preámbulo, se muestra a continuación el desarrollo de la lección para la cual, se necesita que se aborde el conjunto de actividades que se proponen, y envolver el aprendizaje de la temática a una finalidad que consiste en solucionar el problema que se propone en las siguientes líneas.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Las siguientes actividades buscan que el estudiantado comprenda y aplique conocimientos geométricos relacionados con las superficies de figuras planas en la resolución de problemas; además, se proponen estrategias y teoremas, que fundamentan los procesos que hoy en día aplicamos para determinar superficies de figuras planas.

Actividad 1 Relato histórico (fundación de Cartago).

Objetivo

Motivar al grupo de estudiantes y docentes para que apliquen conocimientos geométricos, en la resolución de problemas que se extrae a partir de la lectura de un relato histórico.

Materiales

Páginas de papel.
Historia de Elisa de Tiro y la fundación de Cartago.

Indicaciones

Brindar al estudiantado la historia de la fundación de Cartago, para que el grupo lea y se introduzca en la historia. Posteriormente realizar preguntas en relación a la historia y que propongan métodos de solución para resolver el problema que se plantea al final de la historia.

¿Quién fue Elisa de Tiro, conocida como Dido?

En fuentes griegas y romanas, Dido o Elisa de Tiro, aparece como la fundadora y primera reina de Cartago, en el actual Túnez. Es conocida principalmente por el relato incluido en la Eneida, del poeta romano Virgilio.

Figura 2. Monumento a Virgilio, Mantova (1927).

El texto más coherente sobre la fundación de Cartago, es el redactado por Justino (XVIII, 4 y 5), que en conjunto con la Eneida, permite a historiadores considerar el siguiente relato.

Elisa era hija del rey de Tiro, Belo, también conocido como Muto.

Dido tenía dos hermanos: Pigmalión, que heredó el trono de Tiro, y la pequeña Ana.

Siqueo o Sicarbas, sacerdote del templo de Melkart en Tiro (divinidad relacionada con Hércules), tenía muchos tesoros escondidos. Pigmalión los codiciaba y para saber su paradero obligó a su hermana Elisa a casarse con Siqueo. Pero Pigmalión no contó a Elisa el interés que él tenía en ese matrimonio.

Elisa no amaba a Siqueo, pero este a ella sí. Un tiempo después, Pigmalión le comentó a su hermana la conveniencia de saber dónde se escondían los tesoros de Siqueo. Viéndose utilizada, Elisa averiguó dónde estaban escondidos, pero no le dijo la verdad a su hermano.

Los tesoros se habían enterrado en el jardín del templo y Elisa le dijo a Pigmalión que se hallaban ocultos debajo del altar. Esa misma noche, Pigmalión mandó unos sicarios a matar a Siqueo. Tras eso, los esbirros hicieron una fosa bajo el altar buscando inútilmente el tesoro. Elisa vio a su marido asesinado y corrió a desenterrar el tesoro del jardín.

Con él en su poder, huyó de Tiro llevándose a su hermana Ana y un séquito de doncellas, ayudada por amigos de Siqueo.

La huida de Elisa de Tiro hacia nuevas tierras, en compañía de su grupo de seguidores, permite identificar que la fundación de Cartago no es más que una consecuencia de las luchas internas de la aristocracia tiria; es significativo que Justino mencione en su relato a un grupo de senadores que se encontraban preparados a embarcar con Elisa la noche de la huida.

En su viaje, Elisa tuvo que huir a Chipre y luego a la costa de África (ver figura 3), fue ahí donde intentó comprar una porción de tierra para poder asentarse con su grupo de sirvientes. Para tal cometido, tuvo que dirigirse al rey que dominaba la región. El rey Jarbas de Númida, dueño de las tierras de la región, se puso evasivo con la idea de vender parte de sus tierras a un extranjero.

Por ese motivo, estableció la condición de que entregaría a los recién llegados aquel trozo de tierra que pudieran rodear utilizando la piel de un buey, esto con la intención de entregar la mínima porción de tierra a los visitantes.

Figura 3. Ubicación geográfica de Cartago.

El error que cometió Jarbas, fue no considerar la inteligencia y astucia de Elisa, quien con ayuda de una sirviente ordenó a su gente que cortaran la piel de buey en tiras muy finas y que las unieran, para formar con ellas la cuerda más larga posible. A continuación, se situaron en la playa; tomaron la línea costera como límite y con la cuerda rodearon la porción de tierra más grande posible. La superficie que se rodeó fue suficiente para fundar la ciudad que fue conocida como Cartago.

Este relato encierra en su esencia un problema matemático de gran relevancia, el cual consiste en determinar la figura geométrica de mayor superficie con la condición de que su perímetro sea constante. ¿Qué figura geométrica formaron para cubrir la mayor superficie que se pudo?

A partir de esta información se enuncia con formalidad el siguiente problema.

Si la longitud de la tira de carne se simboliza mediante la letra L, proponer las posibles figuras geométricas que pudo formar Elisa con la intención de cubrir la mayor superficie posible. Determinar mediante expresiones algebraicas el área de cada una de las figuras y utilizar el software educativo GeoGebra para identificar la figura que encierra mayor superficie.

Discutir con el estudiantado la resolución del problema y proponer conceptos y procesos necesarios para resolver el problema. Luego, proponer el estudio de las siguientes temáticas para reforzar conocimientos y resolver el problema.

1. Lenguaje natural y lenguaje algebraico.
2. Área de cuadrados y rectángulos.
3. Área de triángulos.
4. Área de trapecios isósceles
5. Área del círculo.

Proponer una tarea de investigación donde el estudiantado, con ayuda de bibliografía o sitios web conocerá aspectos relevantes y necesarios para comprender las temáticas.

Actividad 2. Área de cuadrados y rectángulos.

Objetivo

Calcular el área de cuadrados y rectángulos para utilizar estos conocimientos en la resolución del problema que se propone en la actividad 1.

Indicaciones

Invitar al estudiantado a que dibujen en sus respectivos cuadernos un cuadrado y un rectángulo. A partir de estas figuras deducir cualidades, y posteriormente, generalizar y definir una fórmula que permita obtener el área de las figuras, utilizar estos conocimientos para proponer dos expresiones algebraicas que den solución al problema que se indica en la actividad 1.

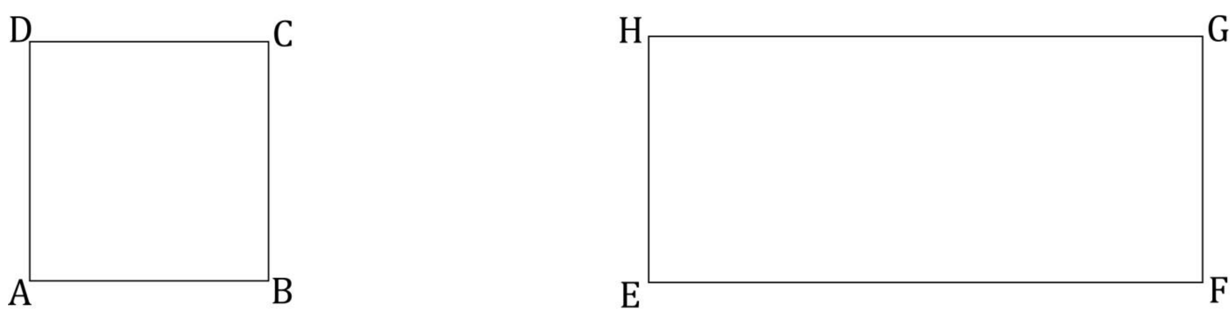


Figura 4. Cuadrado y cuadrilátero.

En la Figura 4, se observan dos cuadriláteros, ABCD y EFGH. Invitar al estudiantado a definir las características de las figuras en relación con sus lados y ángulos. Para el cuadrilátero ABCD, los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son iguales, por lo que la expresión $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ es verdadera, además, los ángulos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ y $\sphericalangle DAB$ son iguales y miden 90º, puesto que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares a $\overline{BC}$, estos son paralelos, del mismo modo $\overline{DA}\ y\ \overline{BC}$ son paralelos. Para el cuadrilátero EFGH se prosigue de forma análoga. Definiendo inicialmente las características de los lados y los ángulos, pero reflexionando en los siguientes puntos.

a) Los ángulos internos de EFGH son congruentes con los ángulos internos de ABCD, es decir, ambas figuras tiene sus cuatro ángulos internos de 90º, a pesar de esta similitud, las figuras no coinciden en sus lados, puesto que en un rectángulo los lados opuestos son iguales y los lados adyacentes entre sí son diferentes.

b) La superficie del cuadrado y del rectángulo serán equivalentes si y solo si el rectángulo EFGH cumple con las características que define el teorema de Euclides (ver lección 8).

Para el cuadrado ABCD, la superficie de esta figura se deduce multiplicando la longitud de dos de sus lados; puesto que sus cuatro lados son iguales, esta operación se simplifica, de modo que, el área del cuadrado corresponde a la longitud de uno de sus lados al cuadrado.

$$A = (\overline{AB})(\overline{BC})$$
$$A = (\overline{AB})(\overline{AB})$$
$$A = (\overline{AB})^2$$

Si en lugar de $\overline{AB}$, se utiliza la longitud de este segmento el cual se simboliza con la letra a donde a puede tomar cualquier valor entre los números reales positivos, se tiene:

$$A = a^2 \qquad \textit{\textbf{Fórmula 1}}$$

De este modo, tenemos la fórmula 1 que será de gran utilidad en la resolución del problema. Pero antes de utilizar este conocimiento, se recomienda deducir la fórmula para determinar el área del rectángulo.

En el caso del rectángulo, los lados adyacentes son distintos y los lados opuestos son iguales, de forma similar al cuadrado, el área de este se encuentra multiplicando la longitud del segmento de la base por la altura. Para la base $\overline{EF}$ y altura $\overline{GH}$, se tiene:

$$A = (\overline{EF})(\overline{GH})$$

Si sustituimos a $\overline{EF}$ por b y a $\overline{GH}$ por h, se tiene:

$$A = bh \qquad \textit{\textbf{Fórmula 2}}$$

Las fórmulas 1 y 2 que se tienen hasta este momento, serán de vital importancia en la resolución del problema, ahora bien. Recordando las condiciones del problema, se identifica en este la existencia de un segmento de longitud L, con este segmento se forma un cuadrado y un rectángulo. Iniciaremos con el análisis del cuadrado (ver figura 5).

El cuadrado de la figura está formado por los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, pero según el problema, el segmento $\overline{AB}$ pertenece a la zona costera, y la cuerda se ubica desde el punto A hasta el punto B pasando por D y C, en consecuencia, la adición de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$ resulta L ¿cuánto mide cada lado?

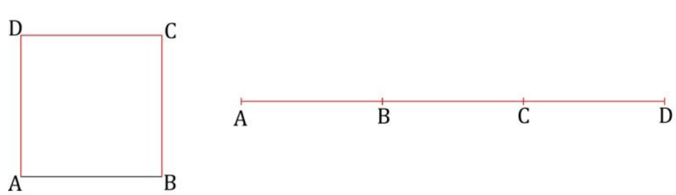


Figura 5. Superficie del cuadrado.

Según la Figura 5, $\overline{AB} = L$, dado que $\overline{AD}$ está integrado por los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CB}$ se tiene que:

$$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

Si los lados de un cuadrado son todos iguales, entonces la suma de tres de sus lados, resulta:

$$3\overline{AD} = \overline{AB}$$

De la expresión anterior se deduce que, si $\overline{AB}$ es L, entonces, al dividir este segmento en tres partes iguales se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{L}{3}$$

Por lo que:

$$\overline{AD} = \frac{L}{3}$$

Ahora que se conoce la longitud de uno de sus lados, la superficie del cuadrado ABCD se encuentra sustituyendo el valor de $\overline{AD}$ en la fórmula 1.

$$A_{ABCD} = \left(\frac{L}{3}\right)^2$$

Aplicando propiedades de los exponentes, se obtiene:

$$A_{ABCD} = \frac{L^2}{9} \qquad \textbf{\textit{Solución 1}}$$

A continuación se realiza un proceso similar para deducir la superficie del rectángulo EFGH: puesto que, con el segmento de longitud L, pueden formarse infinitos rectángulos con longitudes b y h, con b y h variables, es necesario deducir las proporciones del rectángulo que contenga mayor área. Para ello, se recomienda utilizar valores numéricos que ejemplifiquen la situación y posteriormente generalizar estos conceptos para la resolución del problema.

Elaborar una ilustración semejante a la que se muestra en la Figura 6, donde se ejemplifique un rectángulo en el que los segmentos $\overline{EH}, \overline{HG}\ y\ \overline{GF}$ estén contenidos en un segmento de longitud L.

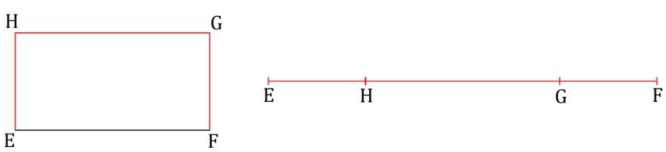


Figura 6. Superficie de rectángulo.

En el rectángulo EFGH, los lados $\overline{EH}$ y $\overline{GF}$ son iguales, además EF=L, en consecuencia:

$$\overline{EH} + \overline{HG} + \overline{GF} = \overline{EF}$$
$$2\overline{EH} + \overline{HG} = \overline{EF}$$

Además, la superficie de EFGH, se define multiplicando la base $\overline{EF}$ por la altura $\overline{FG}$.

Para deducir las dimensiones el rectángulo de mayor superficie, supondremos que el segmento $\overline{EF}$ mide 20 unidades. A partir de esto, se trabaja con las variables b y h que corresponden a los segmentos EF y GF respectivamente. Se inicia con $h = 1$. A partir de este primer resultado, se deduce la longitud de b y posteriormente de calcula el área del rectángulo formado. Proseguir para $h = 2$ y así sucesivamente hasta $h = 19$. Observar los resultados y seleccionar aquel que indique la mayor superficie.

Tabla 1. Dimensiones del rectángulo

Altura	Base	Área	Perímetro
1	20-2=18	(1)(18)=18	2(1)+2(18)=38
2	20-4=16	(2)(16)=32	2(2)+2(16)=36
3	20-6=14	(3)(14)=42	2(3)+2(14)=34
4	20-8=12	(4)(12)=48	2(4)+2(12)=32
5	20-10=10	(5)(10)=50	2(5)+2(10)=30
6	20-12=8	(6)(8)=48	2(6)+2(8)=28
7	20-14=6	(7)(6)=42	2(7)+2(6)=26
8	20-16=4	(8)(4)=32	2(8)+2(4)=24
9	20-18=2	(9)(2)=18	2(9)+2(2)=22
10	20-20=0	(10)(0)=0	2(10)+2(0)=20

En la Tabla 1, se muestran los diversos rectángulos que se pueden dibujar con altura definida en el conjunto de los números enteros. Según la tabla, las dimensiones del rectángulo de mayor área tienen altura 5 y base 10. Además, se verifica que la suma de dos veces la altura y la base, sigue siendo 20 (5+5+10)=20.

También se deduce que la base es el doble de la altura.

10=2(5)

A partir de esta información, se deduce que las dimensiones del rectángulo están en proporción 1:2, es decir, el segmento $\overline{HG}$ es dos veces el segmento $\overline{EH}$, esto garantiza que el rectángulo con estas proporciones posee mayor superficie que cualquier otro rectángulo formado con la misma longitud L.

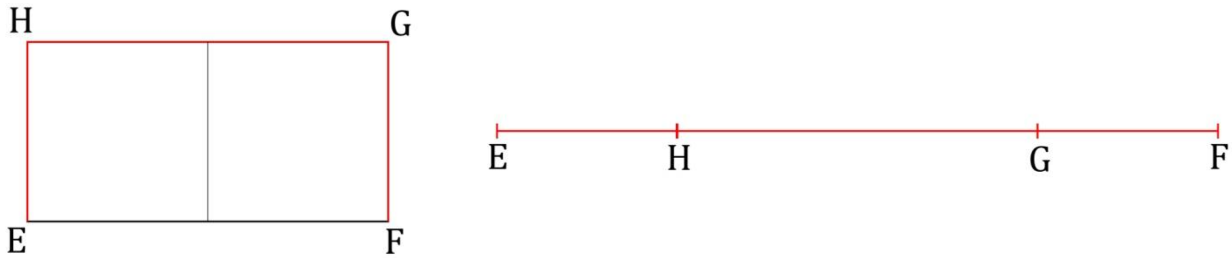


Figura 7. Superficie de rectángulo.

En la figura 6, se presenta un rectángulo donde la longitud de $\overline{HG} = 2\overline{EH}$, puesto que $\overline{EF} = L$, y $\overline{EH} + \overline{HG} + \overline{GF} = \overline{EF} = L$. Además, $\overline{EH}$=$\overline{GF}$, por lo que:

$$2(\overline{EH}) + \overline{HG} = \overline{EF}$$

Ahora bien, si dividimos el segmento $\overline{HG}$ en dos partes iguales, se tiene que $\overline{HG} = 2\overline{EH}$, entonces se deduce que:

$$2\overline{EH} + 2\overline{EH} = \overline{EF}$$
$$4\overline{EH} = \overline{EF}$$

Si $\overline{EF} = 4\left(\frac{\overline{EF}}{4}\right)$, se tiene:

$$4\overline{EH} = 4\left(\frac{\overline{EF}}{4}\right)$$

En consecuencia $\overline{EH} = \frac{\overline{EF}}{4}$, recordemos que $\overline{EF} = L$, por lo que $\overline{EH} = \frac{L}{4}$.

A partir de este resultado se deduce que $\overline{HG}$ es dos veces $\overline{EH}$, por lo que $\overline{HG} = L/2$.

Con estos resultados, se define el área de la figura sustituyendo los valores de la base y la altura en la fórmula 2.

$$A_{EFGH} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)$$
$$A_{EFGH} = \frac{L^2}{8} \qquad \textit{Solución 2}$$

Actividad 3. Área de triángulos.

Objetivo

Calcular el área de triángulos para utilizar estos conocimientos en la resolución del problema que se propone en la actividad 1.

Indicaciones

Utilizar los conocimientos previos de los estudiantes y a partir de ello, mostrar teoremas y conceptos que orientan acerca de la superficie y área de triángulos, estudiando de forma detallada superficies equivalentes.

En la Figura 8, se muestran tres triángulos que a pesar que tienen diferentes formas, la base y altura de estos es equivalente.

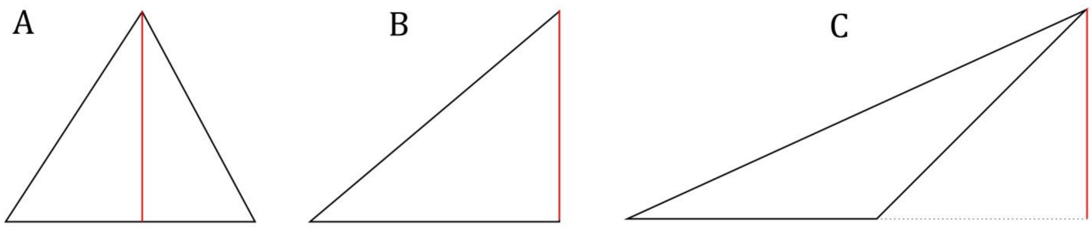


Figura 8. Triángulos con superficie equivalente.

Existe un teorema que habla al respecto, y detalla que dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.

Teorema: Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.

Para efectuar la demostración del teorema se necesita ilustrar mediante la Figura 9, la relación entre los triángulos y los paralelogramos.

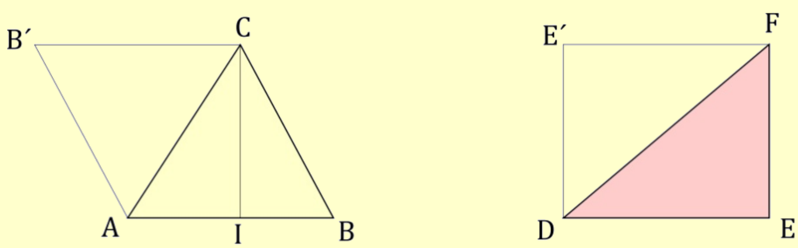


Figura 9. Demostración del teorema.

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son bases de los triángulos ΔABC y ΔDEF respectivamente. Por construcción $\overline{AB} = \overline{DE}$ de forma análoga $\overline{IC} = \overline{EF}$.

Tesis: $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Demostración

Para los triángulos ΔABC y ΔDEF se completan los paralelogramos ΔABCB' y ΔDEFE', por construcción se sabe que $\overline{B'C}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y que $\overline{AC}$ es diagonal de ABCB'; en consecuencia, la superficie de ΔABC es la mitad de ABCB', del mismo modo, para DEFE', $\overline{E'F}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ es diagonal de DEFE'; en consecuencia, la superficie de ΔDEF es la mitad de DEFE'.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} A_{ABCB'}$$

$$A_{DEF} = \frac{1}{2} A_{DEFE'}$$

El paralelogramo ABCB' tiene superficie equivalente al paralelogramo DEFE', en consecuencia se tiene que:

$$A_{ABC} = A_{DEF}$$

Con el resultado del teorema anterior, se deduce que, los elementos que definen la superficie de un triángulo son la base y la altura, y puesto que, al ser definidos a partir de la diagonal de un paralelogramo, es necesario dividir entre dos el producto de la base y la altura. Por lo que:

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \textit{Fórmula 3}$$

Ahora bien, para resolver el problema se necesita de un triángulo que cumpla con la condición de tener la mayor superficie, para ello se complementará la siguiente tabla en términos de base y altura. Para facilitar el proceso se utilizarán triángulos isósceles en los que la suma de sus tres lados resulte una longitud P, con P=15.

La base del triángulo será variable, iniciando para b = 1, y aumentando progresivamente. La altura del triángulo se define mediante el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincide con la longitud de uno de los lados iguales del triángulo isósceles y la base del triángulo rectángulo será la mitad de la base del triángulo isósceles. (Ver figura 10).

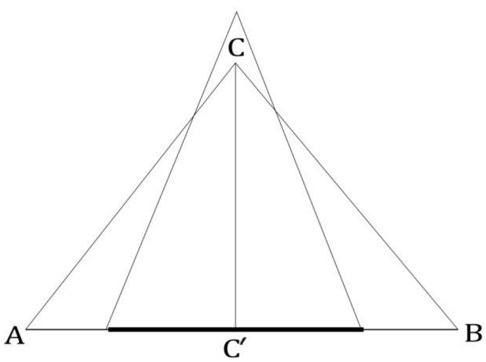


Figura 10. Variación de altura en función de la base.

En el triángulo ΔABC de la figura 10, la suma de las longitudes de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ resulta una longitud constante L. a partir del triángulo ABC se deduce el triángulo rectángulo ΔC'BC con el segmento $\overline{C'C} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$.

Según el teorema de Pitágoras, la longitud de la altura CC' se define por:

$$(\overline{CC'})^2 = (\overline{CB})^2 - (\overline{C'B})^2$$

$$\overline{CC'} = \sqrt{(\overline{CB})^2 - (\overline{C'B})^2}$$

Completar la siguiente tabla:

Tabla 2. Superficie de un triángulo en relación con su base y altura

Base de ABC	Longitud de BC (hipotenusa)	Longitud de C'B (cateto)	Longitud de CC' (altura)	Área
1	$\frac{15-1}{2} = 7$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$h = \sqrt{7^2 - 0.5^2}$ $h = 6.9821$	$A = \frac{(1)(6.9821)}{2}$ $A = 3.491$
2	$\frac{15-2}{2} = 6.5$	$\frac{2}{2} = 1$	$h = \sqrt{6.5^2 - 1^2}$ $h = 6.4226$	$A = \frac{(2)(6.4226)}{2}$ $A = 6.4226$
3	$\frac{(15-3)}{2} = 6$	$\frac{3}{2} = 1.5$	$h = \sqrt{6^2 - 1.5^2}$ $h = 5.8095$	$A = \frac{(3)(5.8095)}{2}$ $A = 8.7142$
4	$\frac{15-4}{2} = 5.5$	$\frac{4}{2} = 2$	$h = \sqrt{5.5^2 - 2^2}$ $h = 5.1235$	$A = \frac{(4)(5.1235)}{2}$ $A = 10.247$
5	$\frac{15-5}{2} = 5$	$\frac{5}{2} = 2.5$	$h = \sqrt{5^2 - 2.5^2}$ $h = 4.330$	$A = \frac{(5)(4.330)}{2}$ $A = 10.825$
6	$\frac{15-6}{2} = 4.5$	$\frac{6}{2} = 3$	$h = \sqrt{4.5^2 - 3^2}$ $h = 3.3541$	$A = \frac{(6)(3.541)}{2}$ $A = 10.0623$

En la Tabla 2, se identifica que el triángulo de mayor superficie se encuentra cuando la base y uno de los lados es cinco, puesto que el perímetro de la figura es 5, se concluye que el lado restante es 5, se observa que el triángulo tiene sus tres lados iguales, esta característica corresponde al triángulo equilátero.

Triángulo equilátero: es el que posee sus tres lados iguales y cada uno de sus ángulos internos es de 60º. La altura de un triángulo rectángulo se expresa en función de sus lados mediante la expresión $\frac{n\sqrt{3}}{2}$ para n=longitud del lado.

A partir de que el triángulo que contiene mayor superficie es equilátero y que la altura está definida por $\frac{n\sqrt{3}}{2}$, se analiza la problemática inicial.

El triángulo ΔIJK es equilátero, los lados $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ y $\overline{KJ}$ son iguales, la suma de los segmentos $\overline{IK}$ y $\overline{KJ}$ corresponde a la longitud L, de la que se habla en el problema. Puesto que $\overline{IK}$ y $\overline{KJ}$ son iguales, se tiene que:

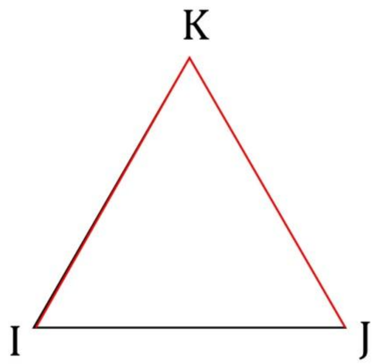


Figura 11. Triángulo equilátero.

$$\overline{IK} + \overline{KJ} = L$$
$$\overline{IK} + \overline{IK} = L$$
$$2\overline{IK} = L$$

Si $L = 2\left(\frac{L}{2}\right)$, entonces:

$$2\overline{IK} = 2\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$(\overline{CC'})^2 = (\overline{CB})^2 - (\overline{C'B})^2$$
$$\overline{CC'} = \sqrt{(\overline{CB})^2 - (\overline{C'B})^2}$$

Por lo tanto $\overline{IK} = \frac{L}{2}$.

La longitud de cada uno de los lados del triángulo IJK es $\frac{L}{2}$, la longitud de la altura se determina mediante $\frac{n\sqrt{3}}{2}$ con n longitud del lado.

$$\frac{\left(\frac{L}{2}\right)\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{4}$$

Ahora bien, la base y la altura del triángulo IJK están dadas por $\frac{L}{2}$ y $\frac{L\sqrt{3}}{4}$ respectivamente. Aplicando la fórmula 3 se tiene:

$$A_{IJK} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L\sqrt{3}}{4}\right)}{2}$$
$$A_{IJK} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{8}}{2}$$
$$A_{IJK} = \frac{L^2\sqrt{3}}{16} \qquad Solución\ 3$$

Actividad 4. Área del círculo y semicírculo.

Objetivo

Calcular el área del círculo y semicírculo para utilizar estos conocimientos en la resolución del problema que se propone en la actividad 1.

Indicaciones

Invitar al estudiantado a dibujar en sus cuadernos un círculo y un semicírculo, a continuación, que mencionen las características de ambas figuras y determinen una fórmula para definir el área de estas.

El O, limita su superficie mediante la circunferencia con centro en O y radio R, la longitud o perímetro de la circunferencia se determina mediante la fórmula $P = 2\pi r$, donde π es una constante irracional y el valor aproximado de esta constante hasta la novena cifra decimal, es 3.1415926554. En la lección 2 de este cuadernillo se trabaja los números irracionales relevantes.

La superficie que está limitada por una circunferencia se le denomina círculo, el área del círculo se define mediante la fórmula:

$$A = \pi r^2 \qquad \textbf{\textit{Fórmula 4}}$$

Según el problema que se explica en la actividad 1 y cuya solución se definirá pronto, se hace uso de una semicircunferencia cuyo perímetro o longitud corresponde a L, además, el área de la circunferencia se define en función a la longitud de su radio, por ello, en este momento se propone un proceso que brinde un valor r en términos de L a partir de la longitud de la semicircunferencia (Ver Figura 11).

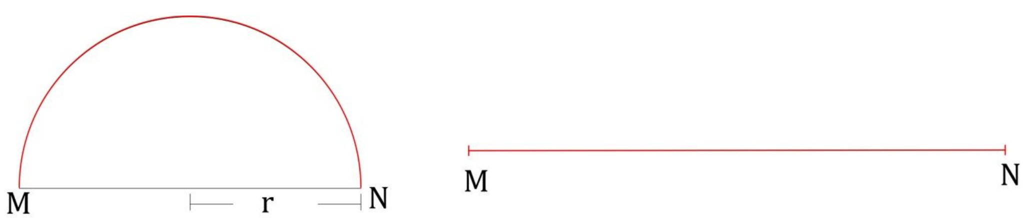


Figura 12. Área de semicírculo.

La longitud de la circunferencia se determina con la fórmula $P = 2\pi r$, en consecuencia, la longitud de la semicircunferencia está dada por:

$$\frac{P}{2} = \frac{2\pi r}{2}$$
$$\frac{P}{2} = \pi r$$

El semiperímetro de la figura 11 corresponde a la longitud L del problema, sustituyendo esta expresión, se tiene:

$$L = \pi r$$

Si $L = \pi\left(\frac{L}{\pi}\right)$, y sustituyendo este resultado en la expresión anterior, se observa que: $\pi\left(\frac{L}{\pi}\right) = \pi r$, en consecuencia se tiene que la longitud de r es el cociente de la longitud L sobre π $(r = \frac{L}{\pi})$

Ahora que se conoce la longitud de r en términos de r, se determina el área del semicírculo mediante la fórmula 3. Pero recordar que esta fórmula indica el área de todo el círculo, por lo que es necesario dividir esta entre dos para indicar el área de un semicírculo:

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$$

Sustituyendo en r, se tiene:

$$A_{semicírculo} = \frac{\pi\left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{2}$$

$$A_{semicírculo} = \frac{\frac{\pi L^2}{\pi^2}}{2}$$

$$A_{semicírculo} = \frac{\pi L^2}{2\pi^2}$$

$$A_{semicírculo} = \frac{L^2}{2\pi} \qquad Solución\ 4$$

Ahora que se tienen los cuatro resultados correspondientes a las cuatro figuras planas consideradas para la solución del problema, es necesario identificar cuál de estas expresiones brinda la mayor superficie para un valor L constante en cada una de ellas.

Actividad 5. Solución del problema.

Objetivo

Utilizar las expresiones resultantes para determinar cuál de ellas indica mayor área y, en consecuencia, identificar la figura geométrica que cubre mayor superficie.

Indicaciones

Con ayuda de una tabla, ubicar en la primera columna los valores que toma la variable L y en las columnas consecuentes, se posicionará cada una de las expresiones que se han deducido en el transcurso de la lección, con ayuda de esta tabla, identificar la figura geométrica que cubre mayor superficie para una longitud L constante.

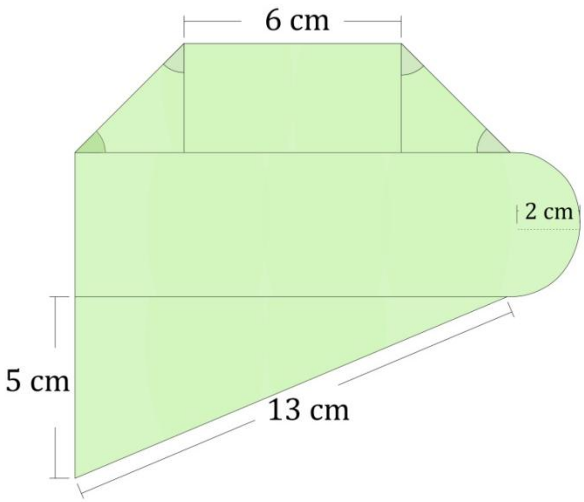
Tabla 3. Comparación de la superficie que cubre cada una de las figuras planas

Longitud L	Cuadrado $A = \frac{L^2}{9}$	Rectángulo $A = \frac{L^2}{8}$	Triángulo $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{16}$	Semicírculo $\frac{L^2}{2\pi}$
1	$A = \frac{1^2}{9} = 0.\bar{1}$	$A = \frac{1^2}{8} = 0.125$	$A = \frac{1^2\sqrt{3}}{16} = 0.1082$	$A = \frac{1^2}{2\pi} = 0.159154$
10	$A = \frac{10^2}{9} = 11.\bar{1}$	$A = \frac{10^2}{8} = 12.5$	$A = \frac{10^2\sqrt{3}}{16} = 10.8253$	$A = \frac{10^2}{2\pi} = 15.915494$
100	$A = \frac{100^2}{9} = 1{,}111.\bar{1}$	$A = \frac{100^2}{8} = 1{,}250$	$A = \frac{100^2\sqrt{3}}{16} = 1{,}082.53$	$A = \frac{100^2}{2\pi} = 1{,}591.549431$
1000	$A = \frac{1000^2}{9} = 111{,}111.\bar{1}$	$A = \frac{1000^2}{8} = 125{,}000$	$A = \frac{1000^2\sqrt{3}}{16} = 108{,}253.17$	$A = \frac{1000^2}{2\pi} = 159{,}154.9431$

Solución: La princesa Elisa de Tiro, tuvo que utilizar un semicírculo para cubrir la mayor porción de tierra posible.

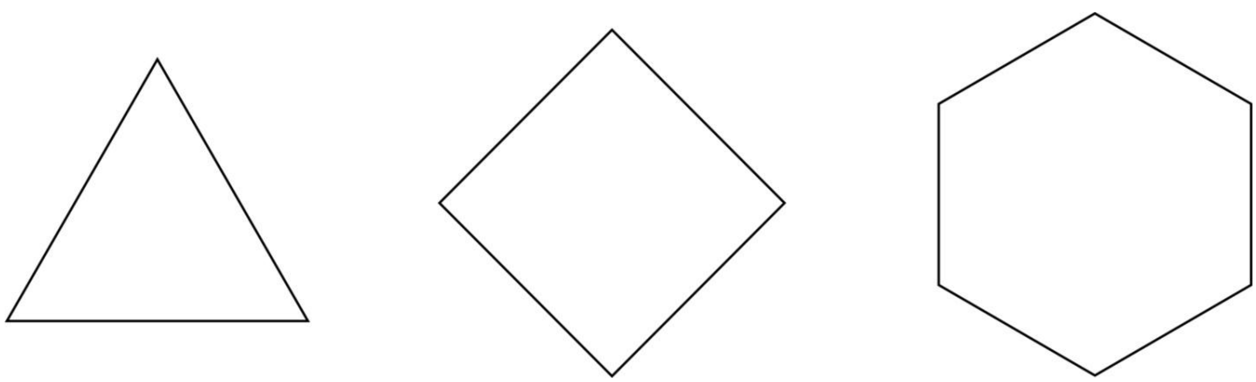
Ejercicio 1. Área de figuras planas.

Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura teniendo en cuenta que los cuatro ángulos señalados miden 45º.



Resuelve e investiga

Con una cuerda de 40 cm, formar los polígonos que se muestran en la figura, determine la superficie de cada uno de estos en términos de una longitud L, deducir una fórmula que entregue como resultado el área del hexágono a partir de los triángulos que la integran.



Deducir: ¿cuál figura contiene mayor superficie?
Ordenar de menor a mayor la superficie de las figuras.
Investiga: ¿dónde identifico el hexágono en la naturaleza?
¿Por qué el hexágono es la figura geométrica con mayor aplicación en la naturaleza?
¿Por qué las abejas optaron por hacer sus colmenas a base de hexágonos?
Investiga algunas aplicaciones del hexágono en la ciencia y en la tecnología.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Acevedo, D. (2010), *La matemática en la Historia,* Blog Educativo, Conoce Matemática, tomado de: http://conocematematica.blogspot.com/p/la-matematica-en-la-historia.html, Accesado el 19/10/2011.
2. Alvar, J. y Wagner, Carlos (-) *Consideraciones históricas sobre la fundación de Cartago*, Artículo.
3. Cano O. Geometría Segunda Parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
4. Cano O. Geometría Primera parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
5. González, R. (1988), *Dido y Eneas en la poesía española del siglo de oro*, Universidad de Castilla-La Mancha.
6. J. J. O'Connor y E. F. Robertson (1996) *Antifón del Sofista, Biografía*. Facultad de Matemática y Estadística, Universidad de St. Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Antiphon.html. Accesado el 22/10/2011.
7. Kirk, G. Raven, J. y Schofield M. (2003). *Los filósofos presocráticos.* Cambridge University Press. http://books.google.com/books?id=kFpd86J8PLsC&pg . p. 51,
8. Pogorélov A.V. (1974) *Geometría elemental.* Editorial Mir, Moscú, traducido del ruso por Carlos Vea, Catedrático de Matemáticas superiores.
9. Schibli, S., Hermann, Pherekydes de Syros, p. 104, Oxford University. Prensa 2001.
10. Schibli, S., Hermann, Pherekydes de Syros, p. 108, Oxford University. Prensa 2001.
11. Universidad Católica de Chile (2009) Geometría Nº 7, Centro de alumnos de Ingeniería, Preuniversitario de Ingeniería.

Lección 10 **8° grado** **Unidad 9** **Tiempo:** 15 horas clase

Ecuaciones lineales

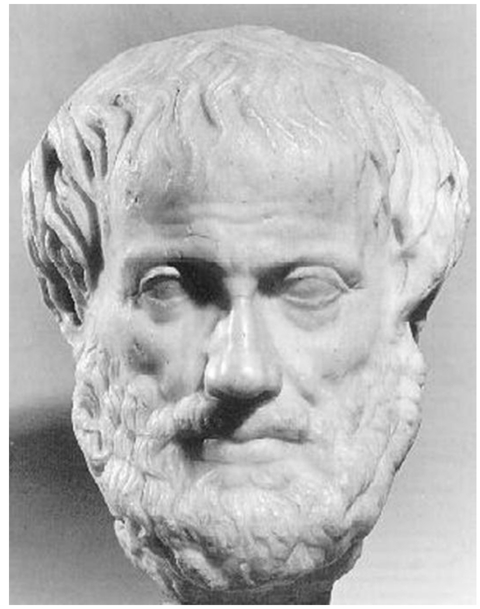


Figura 1. **Diofanto de Alejandría**. Nació alrededor del año 200 d. C. y murió alrededor del año 284 d. C., a menudo se le otorga el título de "Padre del Álgebra", pero es mejor conocido por sus grandes aportes a la Aritmética, su trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y la teoría de números.

Introducción del tema

Relatos históricos comentan que el estudio de las ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas, se remontan a estudios realizados hace 5 mil años por los babilonios, todos estos conocimientos han sido retomados y estudiados en posteriores generaciones, pero la necesidad de crear notaciones que faciliten la interpretación del álgebra, llevaron a que matemáticos como Diofanto dedicaran gran parte de su vida al estudio del álgebra.

Diversas situaciones de la vida cotidiana pueden describirse mediante ecuaciones. Las ecuaciones son igualdades matemáticas entre dos números, elementos o expresiones algebraicas. Los avances científicos y tecnológicos, así también estudios en física, química y biología precisan de ciertos dominios conceptuales y procedimentales con ecuaciones y despeje de variables.

Para estudiar con ecuaciones, se necesita comprender el lenguaje algebraico, así también, tener claridad al traducir frases del lenguaje común al lenguaje algebraico. Este primer paso ayuda en gran medida a comprender y analizar problemas cuya resolución surge después de traducir el lenguaje natural en una expresión algebraica o grupo de expresiones.

Las ecuaciones pueden ser de diversos tipos, diferenciándose una de otra por el grado de la variable; si el grado de la ecuación es 1, estamos en presencia de una ecuación lineal. El nombre se debe a la forma gráfica de la misma, pues, una ecuación lineal describe una línea recta en el plano.

Competencias por fortalecer.

– Saber argumentar, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, técnicas e instrumentos matemáticos, modelizar, integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

– Análisis de relatos históricos que muestran los primeros pasos en la resolución de ecuaciones lineales.
– Resolver problemas de aplicación y elaborar gráficos de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Presaberes

– Lenguaje Algebraico.
– Operaciones básicas con polinomios.
– Proceso de resolución de problemas.

Diofanto de Alejandría. Nació alrededor del año 200 d. C. y murió alrededor del año 284 d. C. a menudo se le otorga el título de "Padre del Álgebra", pero es mejor conocido por sus grandes aportes a la Aritmética, su trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y la teoría de números. Sin embargo, se sabe poco de su vida y existen muchos debates acerca de la fecha en que vivió.

Existen acontecimientos que enmarcan el recorrido de Diofanto, y los limitan estos en lapsos de tiempo que facilitan la comprensión de la vida y obra de tan ilustre matemático. Diofanto cita la definición de un número poligonal[52] de la obra de Hipsicles así que él debió escribir esto después de 150 d. C. Por otra parte Teón de Alejandría, el padre de Hipatia, cita una de las definiciones de Diofanto, lo cual significa que Diofanto escribió mucho antes del año 350 d. C.

Hay otra pieza de información que fue aceptada por muchos años como indicación de las fechas bastante exacta. Heath cita de una carta de Michael Psellus quien vivió en la segunda mitad del siglo Psellus escribió:

> "Diofanto trata la matemática egipcia con más precisión, pero el ilustre Anatolio[53] recoge las partes más esenciales de la doctrina de Diofanto y la declara de una manera diferente y en una forma más sucinta, dedicando su trabajo a Diofanto."

En la carta de Psellus también se describe el hecho que Diofanto dio diferentes nombres a potencias. Esta carta publicada por primera vez por Paul Tannery, comenta que él cree que Psellus está citando un comentario sobre Diofanto que se ha perdido y probablemente fue escrito por Hipatia.

Sin embargo, la cita que se menciona anteriormente se ha utilizado para fechar a Diofanto, con el argumento de que el Anatolio al que se hace referencia aquí, es el obispo de La odisea que fue escritor y profesor de matemática que vivió en el siglo III. A raíz de esto se dedujo que Diofanto escribió alrededor del 250 d. C. y las fechas que se han dado se basan en este argumento.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Ecuación

Es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Coordenadas de un punto

Un punto del plano está definido por un par ordenado de números. La primera coordenada es la abscisa (x) y la segunda coordenada es la ordenada del punto (y).

Intersección

Punto en el cual una línea o una curva cruza un eje dado. También se refiere al segmento interceptado: parte de un segmento de línea obtenido de una transversal cortada por un par de líneas.

52. En matemáticas, un número poligonal es un número que puede recomponerse en un polígono regular.
53. **Anatolio** es el nombre que se les da a los que son propios de Anatolia, una península que actualmente es ocupada por la parte asiática de Turquía.

Knorr critica esta interpretación, sin embargo relata que: “(…) Pero uno sospecha inmediatamente que algo está mal: parece extraño que alguien compile un compendio del trabajo de otro hombre y luego dedicarse a él, mientras que la calificación "de una manera diferente", en sí mismo, vacío de contenido, debe ser redundante, en vista de los términos "más esencial" y "más breve”(...)”

Knorr ofrece una traducción diferente del mismo pasaje (que muestra la dificultad del estudio de las matemáticas griegas para cualquier persona que no es un experto en griego clásico) que tiene un significado muy diferente: “Diofanto trata la aritmética de Egipto con mayor precisión, pero el muy erudito Anatolio, habiendo recogido las partes más esenciales de la doctrina del hombre, la dirigió de forma sucinta a un Diofanto diferente.”

La conclusión de Knorr en cuanto a las fechas de Diofanto es: “(...) debemos contemplar la posibilidad que Diofanto vivió antes del siglo III, posiblemente incluso antes de que Herón lo hiciera.”

La mayoría de los detalles que tenemos de la vida de Diofanto (y estos pueden ser totalmente ficticios) provienen de la Antología Griega, recopilada por Metrodoro alrededor del año 500 d. C. Esta colección de acertijos contiene uno acerca de Diofanto que dice: “(...) su infancia duró $\frac{1}{6}$ de su vida, se casó después de otro $\frac{1}{7}$ mas; su barba creció después de $\frac{1}{12}$, y su hijo nació 5 años después, el hijo vivió la mitad de la edad de su padre, y el padre murió 4 años después del hijo.”

Así pues, se casó a la edad de 26 años y tuvo un hijo que murió a la edad de 42 años, cuatro años antes de que Diofanto muriese la edad de 84 años.

La *Aritmética* es una obra que consta de una colección de 130 problemas donde se da solución a ecuaciones determinadas (poseen única solución), y ecuaciones indeterminadas. El método para resolver ecuaciones indeterminadas es llamado análisis diofántico[54]. Sólo seis de los 13 libros se cree que han sobrevivido y se sospecha también que los otros deben haberse perdido muy pronto después de que fueron escritos. Hay muchas traducciones al árabe, por ejemplo, Abu'l-Wafa, pero fue el único material que apareció de estos seis libros.

Heath escribe en 1920: “Los libros faltantes evidentemente se perdieron en una fecha muy temprana. Paul Tannery sugiere que los comentarios de Hipatia hacen referencia a los primeros seis libros, y que no tuvo contacto con los otros siete, que como consecuencia de esto, fueron olvidados y después se perdieron.”

Sin embargo, un manuscrito árabe en la biblioteca Astan-i Quds (La biblioteca Santuario) en Meshed, Irán tiene un título diciendo que es una traducción de Qusta ibn Luqa, quien murió en 912, del Libro IV a VII de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría. F Sezgin hizo este notable descubrimiento en 1968. Rashed compara los cuatro libros de la traducción al árabe con los seis libros griegos y afirma que este texto es una traducción de los libros perdidos de Diofanto.

Rozenfeld, en la revisión de estos dos artículos no queda completamente convencido: “*El revisor, familiarizado con el texto árabe de este manuscrito, no duda de que este manuscrito sea la*

54. Una ecuación diofántica es aquella que tiene solamente coeficientes enteros y cuyas soluciones son también números enteros.

traducción del texto griego escrito en Alejandría pero poseen grandes diferencias en relación a los libros griegos de la Aritmética de Diofanto, la diferencia reside en la combinación de preguntas de álgebra con preguntas de la teoría de la números y otros libros que sólo contienen material algebraico hacen que sea muy probable que este texto no fue escrito por Diofanto, sino por alguno de sus comentaristas (tal vez de Hipatia?)."

Es hora de echar un vistazo a esta obra destacada en el álgebra en las matemáticas griegas. El trabajo considera soluciones de muchos problemas con ecuaciones de primer grado y ecuaciones de segundo grado (lineales y cuadráticas respectivamente), pero sólo considera soluciones racionales positivas. Las ecuaciones que conducen a soluciones que son negativas o raíces cuadradas irracionales, Diofanto las considera inútiles.

Para dar un ejemplo concreto, él llama a la ecuación $4 = 4x + 20$ "absurda" porque conduce a una respuesta negativa sin sentido. En otras palabras, ¿cómo podría un problema llevarnos a la solución de -4 libros? No hay evidencia que sugiera que Diofanto comprendió que las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones. Sin embargo, el hecho de que siempre estaba satisfecho con una solución racional y no requería un número entero, es más sofisticado de lo que se podría descubrir en la actualidad.

Diofanto consideró tres tipos de ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ y $ax^2 + c = bx$. La razón por la cual Diofanto comprendía tres casos, mientras que hoy en día tenemos un solo caso, es que él no tenía ninguna noción del cero y evitaba los coeficientes negativos considerando los números dados a, b, c, indicando que todo es positivo en los tres casos anteriores.

Hay, sin embargo, muchos otros tipos de problemas considerados por Diofanto. Resolvió problemas como pares de ecuaciones cuadráticas simultáneas.

Conociendo que $y + z = 10 \quad \wedge \quad yz = 9$. Diofanto resolvería esto creando una sola ecuación cuadrática en x. Pongamos $2x = y - z$ por lo tanto, agregando $y + z = 10$ y $y - z = 2x$, tenemos $y = 5 + x$, luego restando les da $z = 5 - x$. Ahora bien:

$9 = yz = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$, por lo que $x^2 = 16$, $x = 4$

Que lleva a $y = 9$, $z = 1$.

En el Libro III, Diofanto resuelve problemas de encontrar valores que conformen dos expresiones lineales simultáneamente en cuadrados. Por ejemplo él enseña cómo encontrar x para resolver $10x + 9$ y $5x + 4$. Otros problemas buscan valores de x tales que las clases particulares de polinomios en x hasta el grado 6 sean cuadrados. Por ejemplo él resuelve en el libro VI el problema de encontrar el valor de x tal que $x^3 + 3x^2 + 3z + 1$ sea un cuadrado.

Heath se fija en los resultados de la teoría de números de la cual Diofanto estaba claramente consciente, aun así no está claro si tenía una prueba de ello. Por supuesto que estos resultados pueden haber sido demostrados en otros libros escritos por Diofanto o puede haber sentido que eran "obviamente" verdaderos gracias a su evidencia experimental. Entre semejantes resultados tenemos [4]:

... ningún número de forma 4n + 3 o 4n - 1 puede ser la suma de dos cuadrados;
... un número de la forma 24n + 7 no puede ser la suma de 3 cuadrados.

También parece que Diofanto da la impresión de conocer que cada número puede ser escrito como la suma de cuatro cuadrados. Si realmente conocía este resultado sería verdaderamente impresionante aún para el propio Fermat, quien especificó el resultado, falló el proporcionar pruebas de ello y no se estableció hasta que Lagrange lo demostró usando resultados de Euler.

Aunque Diofanto no usó anotaciones algebraicas sofisticadas, sí introdujo un simbolismo algebraico que utilizaba una abreviatura para lo desconocido y para las potencias de lo desconocido. Como escribe Vogel: "El simbolismo que introdujo Diofanto por primera vez y que sin duda lo obtuvo por sí mismo, suministraba una manera corta y fácilmente comprensible de expresar una ecuación... Como también se utiliza una abreviatura para la palabra "igual a", Diofanto dio un paso fundamental del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica."

Una cosa quedará clara por los ejemplos que hemos citado y es que Diofanto estaba preocupado con los problemas particulares más a menudo que con los métodos generales. La razón de esto es que a pesar de que hizo importantes avances en el simbolismo, aún le faltaba la notación necesaria para expresar métodos más generales.

Por ejemplo, él únicamente tenía notación para una incógnita y cuando los problemas involucraban más de una simple incógnita, Diofanto se veía limitado a expresar "primera incógnita", "segunda incógnita", etc., en palabras. Tampoco tenía un símbolo para un número general n. En donde nosotros escribiríamos $\frac{12+6n}{n^2-3}$, Diofanto tenía que escribirlo con palabras: "(...) un número por un factor de seis aumentado más doce, el cual se divide por la diferencia entre el cuadrado del número menos tres."

A pesar de la anotación mejorada que introdujo Diofanto, el álgebra aún tenía un largo camino por delante antes de que los problemas verdaderamente de tipo general pudieran ser escritos y resueltos sucintamente.

Igualdades, identidades y ecuaciones

Una igualdad se indica mediante el símbolo (=), es una relación de equivalencia entre dos expresiones algebraicas, numéricas o literales, que se cumple para alguno o todos los valores. Cada una de las expresiones que se encuentran en ambos extremos de la igualdad se les llama **miembros**. Una igualdad está formada por el miembro derecho y miembro izquierdo en relación a la igualdad que se encuentra en el centro.

Las ecuaciones también pueden definirse a partir del estudio de polinomios y expresiones algebraicas. El estudio de las ecuaciones algebraicas surge a partir del análisis de polinomios de la forma P(x), que igualando a cero, se tiene la ecuación:

$$P(x) = 0$$

En esta ecuación la x representa un número desconocido que la satisface, es decir, que sustituyendo en P(x) el resultado es cero. Cualquier número que satisface la ecuación se llama raíz; las raíces de una ecuación P(x)=0 a menudo se denominan raíces del polinomio p(x). El problema de resolver una ecuación reside en encontrar la raíz o raíces. El número de raíces de un polinomio está determinado por el grado del polinomio, si el grado del polinomio es n se dice que la ecuación correspondiente es de grado n. según el valor de n (grado del polinomio o grado de la ecuación) para n = 1, 2, 3, 4, …, tenemos las ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_0x + a_1 &= 0 \\ a_0x^2 + a_1x + a_2 &= 0 \\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 &= 0 \\ a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

En esta lección se estudiará únicamente las ecuaciones de grado 1, también conocidas con el nombre de ecuaciones lineales, estas ecuaciones tienen una sola raíz. Para resolver una ecuación lineal de primer grado, se utiliza el proceso de transposición de términos que se comprende con facilidad si relacionamos la ecuación con una balanza, donde el propósito primordial será mover términos de un miembro a otro, manteniendo la igualdad.

Para comprender este proceso, observar el siguiente proceso.

Se desea conocer el valor de x para la ecuación $7x + 3 = 4x + 8$

En este caso el grado de dificultad del proceso es mínimo, puesto que son únicamente sumas y restas. Para despejar la variable x y encontrar el valor que le corresponde, es necesario agrupar todos los términos que tienen la variable x en el miembro izquierdo de la ecuación, y todos aquellos términos independientes se ubicarán en el miembro derecho.

Para ello debemos imaginar que la ecuación es en realidad una balanza muy bien equilibrada, también debemos suponer que si se quita algo de uno de los miembros, por mínimo que esto sea, la balanza se desequilibrará, para evitar esto, debemos quitar partes iguales a ambos miembros de la igualdad, garantizando el equilibrio de esta. Del mismo modo se prosigue para aumentar, duplicar y fraccionar.

Para transponer 4x, se debe restar 4x en ambos miembros, de este modo, 4x-4x=0

$$7x + 3 - 4x = 4x + 8 - 4x$$

$$7x + 3 - 4x = 8$$

Del mismo modo, para transponer 3 del miembro izquierdo al miembro derecho, se resta 3 en ambos extremos de la igualdad.

$$7x + 3 - 4x - 3 = 8 - 3$$
$$7x - 4x = 8 - 3$$

Reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$3x = 5$$

Ahora bien, se observa que la variable x está siendo multiplicada por 3, para despejar x se tiene que dividir esta en tres partes iguales, cada parte corresponde a x. Del mismo modo, 5 deberá dividirse en tres partes iguales y cada una de estas partes se hará corresponder a x.

$$3x = 3\left(\frac{5}{3}\right)$$

Otra forma de comprender este paso, consiste en dividir ambos miembros de la igualdad por el coeficiente que tiene la variable x.

$$\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto x es $\frac{5}{3}$.

Las ecuaciones pueden utilizarse en diversos ámbitos, sean estos, científicos, tecnológicos, ecología, biología, genética, química, inclusive en la naturaleza, la amplia aplicación de las ecuaciones lineales guía a utilizarlas en conjunto con los métodos y estrategias de despeje de variables para resolver problemas cuyos enunciados pueden convertirse a expresiones algebraicas pasando de lenguaje común a lenguaje algebraico.

En el desarrollo de las actividades de esta lección se trabaja con procesos que buscan determinar la raíz o solución de ecuaciones lineales como resultado de la resolución de problemas.

En matemática, la resolución de problemas es una de las actitudes que se desea inculcar en las nuevas generaciones. Hacer de un problema un tema de aprendizaje de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, no es tarea fácil. En esta lección se hace referencia al libro *Cómo plantear y resolver problemas* de George Polya.

Solucionar un problema es un proceso que enriquece en gran medida las capacidades intelectuales del estudiantado. Proponer un problema es brindar la oportunidad de utilizar los conocimientos y habilidades de forma integral para alcanzar un fin.

Existen estrategias que facilitan el análisis de los problemas, George Polya propone una serie de pasos que orientan el análisis y comprensión de situaciones, permitiendo, además, formular estrategias para encontrar soluciones coherentes.

El proceso de G. Polya para resolver problemas se describe en cinco pasos.

1. **Familiarizarse con el problema.** ¿Por dónde debo empezar? ¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. ¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con él grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararlas para recoger los puntos importantes.
2. **Trabajar para una mejor comprensión.** Luego de familiarizarse con el problema, verifique que comprende el problema y que es capaz de parafrasearlo, sin perder los elementos esenciales de ese problema, en este proceso se busca aislar las principales partes del problema. La hipótesis y conclusión son las principales partes de un problema por demostrar; la incógnita, los datos y las condiciones son las principales partes de un problema por resolver. Ocúpese de las partes principales del problema, considérelas una por una, luego observe la interrelación de cada una de las partes entre sí, estableciendo las relaciones que puedan existir entre cada detalle y los otros, y entre cada detalle y el conjunto del problema.
3. **Búsqueda de una idea útil.** Considere el problema desde varios puntos de vista y busque puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos. Subraye las diferentes partes, examine los diferentes detalles, examine los mismos detalles repetidamente, pero de modo diferente. Haciendo esto puede encontrar una idea que sea útil, quizá una idea decisiva que le muestre de golpe como llegar a la solución misma del problema.
4. **Ejecución del plan.** Asegúrese de que tiene la plena comprensión del problema, efectúe en detalle todas las operaciones algebraicas o geométricas que previamente ha reconocido como factibles. Adquiera la convicción de la exactitud de cada paso, mediante un razonamiento formal o por discernimiento intuitivo o por ambos medios, si es posible.
5. **Visión retrospectiva.** Después de obtener una solución a raíz del plan que se ejecutó, este resultado debe verificarse. Se busca, considerar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos.

La función lineal

La función lineal también conocida con el nombre de función de proporcionalidad directa, relaciona dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, tales que su cociente es constante. El cociente recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

De la definición anterior se deduce la ecuación de la forma:

$$y = mx + b$$

Donde m es la constante de proporcionalidad.

Cuando en una ecuación lineal se tienen dos variables, una de ellas será llamada *dependiente* y la otra *independiente*. Es posible expresar la variable dependiente en términos de la variable independiente. Por lo general se utiliza la letra x, para variables independientes, donde x puede tomar cualquier valor definido en el conjunto de números reales, y la variable dependiente comúnmente expresada con la letra y, adquiere valores a raíz de la asignación de x.

Cuando en una ecuación de la forma y=mx, se asignan diversos valores para la variable x, en consecuencia se obtendrán diversos valores para la variable y en correspondencia biunívoca entre elementos x y y. Cada par de valores se denomina par ordenado, cada uno de los pares ordenados representa un punto sobre el plano cartesiano, de este modo, para toda ecuación de la forma y=mx+b se pueden deducir infinitos puntos y al ubicar todos estos puntos sobre el plano cartesiano se obtiene la gráfica de la ecuación lineal.

Verifica la forma de la gráfica de la ecuación $y = 3x + 2$.

La variable x puede tomar infinitos valores, para facilitar el proceso se propone utilizar la siguiente tabla.

Tabla 1. Pares ordenados de la ecuación $y = 3x + 2$

Variable independiente x	Sustitución en y=3x+2	Par ordenado (x,y)
-3	$y = 3(-3) + 2 = -7$	(-3,-7)
-2	$y = 3(-2) + 2 = -4$	(-2, -4)
-1	$y = 3(-1) + 2 = -1$	(-1, -1)
0	$y = 3(0) + 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = 3(1) + 2 = 5$	(1, 5)
2	$y = 3(2) + 2 = 8$	(2, 8)
3	$y = 3(3) + 2 = 11$	(3,11)

Los puntos coordenados de la ecuación $y = 3x + 2$, muestran algunos puntos aislados de la ecuación para x perteneciente al conjunto de números enteros, esto se expresa en la figura 2.

Si los valores de x se definen para el conjunto de números reales entonces se deduce a cada punto del eje x le corresponde un punto del eje y, por ello la gráfica de $y = 3x + 2$ se indica mediante una línea continua.

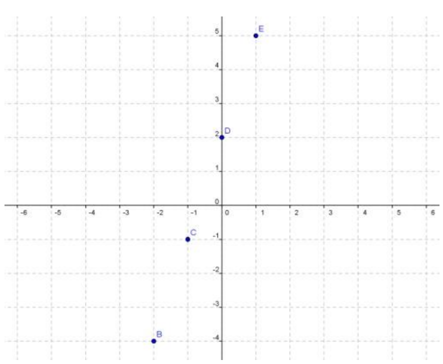


Figura 2. Gráfico de $y = 3x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$.

Para graficar una función lineal se necesita únicamente de dos puntos, para el análisis de la gráfica son necesarios dos puntos relevantes, uno de ellos es el punto en que la gráfica de la ecuación intersecta el eje x, y el otro es el punto en que intersecta el eje y. observar la Figura 3.

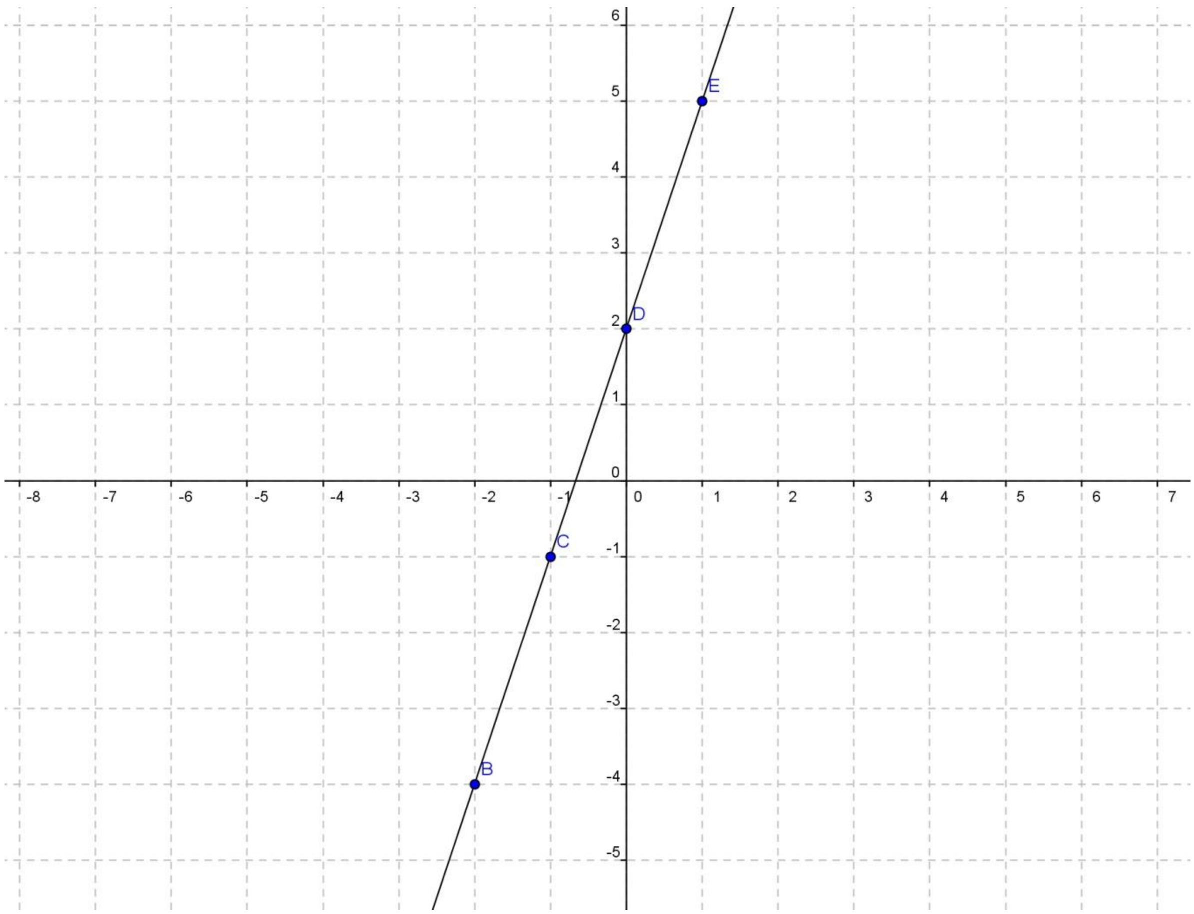


Figura 3. Gráfico de la ecuación lineal para x perteneciente al conjunto de números reales.

En la Figura 3, el punto de intersección está en la coordenada (0,2), observando la estructura de la ecuación y los puntos de intersección de la recta se concluye que:

En toda ecuación de la forma $y = mx + b$, el valor de b corresponde al punto de corte de la gráfica de la ecuación y el eje de la ordenada. Además, para $\mathrm{y} = 0$, el valor de x coincide con el punto de corte con el eje x en la coordenada $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

De este modo, para la ecuación $y = 3x + 2$, el punto de intercepto con el eje y está dado por el número 2 (0,2).

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

Actividad 1. Ecuaciones lineales y la resolución de problemas.

Objetivo

Utilizar conocimientos previos en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.

Indicaciones

Invitar a los estudiantes a traducir enunciados de lenguaje común a lenguaje algebraico, además, procurar que estos resuelvan los problemas que se proponen.

El idioma del álgebra es la ecuación, Newton escribe en su manual de álgebra titulado Aritmética universal: "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico".

El problema que se plantea a continuación sirve para ejemplificar el cambio de lenguaje natural o común a lenguaje algebraico.

Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año se gastó 100 libras, aumentó el resto con un tercio de este. Al año siguiente volvió a gastar 100 libras y aumentó la suma restante en un tercio de ella. El tercer año gastó de nuevo 100 libras. Después de que hubo agregado su tercera parte el capital llegó al doble del capital inicial.

El paso del lenguaje común al lenguaje algebraico, a pesar de no ser sencillo, posee muchas virtudes, puesto que simplifica la información contenida en un párrafo expresándolo mediante números y letras en lenguaje algebraico.

De este modo, para referirse a datos que se desconocen, por ejemplo la frase *Un comerciante tenía determinada suma de dinero*, la frase se expresa en lenguaje algebraico asignando una letra, si definimos la letra x, como una determinada suma de dinero, y agregamos la frase *el primer año gastó un tercio de este*, el lector comprende de inmediato que se está hablando de la suma de dinero x. La acción de gastar, implica una reducción por lo que, a partir de x, se reduce o resta este en 100 unidades. Se tiene la expresión $x - 100$.

Si ahora se agrega la frase *aumentó el resto con un tercio de este.* Recuérdese que el resto fue de x − 100, y que la tercera parte de esto se indica mediante la expresión $\frac{x-100}{3}$. De este modo, si se aumenta a x – 100 la tercera parte de este, se tiene la expresión:

$$(x-100)+\frac{x-100}{3}$$

Resolviendo, aplicando el algoritmo de suma de fracciones con distinto denominador, se tiene:

$$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{3(x-100)+(x-100)}{3}$$
$$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{3x-300+x-100}{3}$$
$$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$$

Al año siguiente volvió a gastar 100 libras. Se utiliza la expresión anterior y a esta se le restan 100 unidades.

$$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-400-300}{3}$$
$$\frac{4x-400}{3}=\frac{4x-700}{3}$$

Y aumentó a la cantidad restante en un tercio de ella.

La suma restante fue de $\frac{4x-700}{3}$; la tercera parte de esta expresión se indica mediante:

$$\frac{\frac{4x-700}{3}}{3}=\frac{4x-700}{9}$$

Si a $\frac{4x-700}{3}$ se le agrega su tercera parte $\frac{4x-700}{9}$; se tiene:

$$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{3(4x-700)+(4x-700)}{9}$$
$$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{12x-2100+4x-700}{9}$$
$$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$$

Este proceso se repite en el tercer año*. En el tercer año se gastó de nuevo 100 libras.*

$$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-2800-900}{9}$$
$$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$$

Después de que hubo agregado su tercera parte. El capital llegó al doble del inicial.

La tercera parte de $\frac{16x-3700}{9}$ se indica con la expresión $\frac{\frac{16x-3700}{9}}{3}$, simplificando se tiene:

$$\frac{\frac{16x-3700}{9}}{3}=\frac{16x-3700}{27}$$

Efectuando la suma de $\frac{16x-3700}{9}$ con $\frac{16x-3700}{27}$ y posteriormente simplificando términos semejantes e igualando el resultado al doble del capital inicial, se tiene:

$$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{3(16x-3700)+16x-3700}{27}$$
$$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{48x-11100+16x-3700}{27}$$
$$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$$

El resultado anterior corresponde al doble del capital inicial, por lo que: $\frac{64x-14800}{27}=2x$

¿Qué cantidad de dinero se tenía cuando se inició el problema?

El capital inicial está representado mediante la letra x. Para determinar el valor de x, es necesario despejar la variable, por lo que es necesario transponer términos de un miembro a otro de la ecuación manteniendo la igualdad.

En el miembro izquierdo de la ecuación, se tiene la expresión $\frac{64x-14800}{27}$. Para despejar la variable x es necesario quitar el número 27 del denominador. Para ello, se multiplica todo el miembro izquierdo por 27 garantizando que $\frac{27}{27}=1$. Para mantener la igualdad en la ecuación, se multiplica también por 27 el segundo miembro o miembro derecho de la igualdad.

Luego, se agrupan todos los términos que poseen variable x en el miembro izquierdo y todo término independiente se agrupa en el miembro derecho.

Para transponer 54x, del miembro derecho al miembro izquierdo, se resta 54x en ambos lados de la igualdad. Del mismo modo se prosigue con -14800, pero en este caso se suma 14800 en ambos miembros. Después, se reducen términos semejantes mediante sumas y restas y se conoce el valor de la variable x dividiendo ambos miembros entre 10. El algoritmo se muestra a continuación:

$$27\left(\frac{64x-14800}{27}\right)=27(2x)$$
$$64x-14800=54x$$
$$64x-14800-54x=54x-54x$$
$$10x-14800=0$$
$$10x-14800+14800=14800$$
$$10x=14800$$
$$\frac{10x}{10}=\frac{14800}{10}$$
$$x=1480$$

La solución del problema es 1480. Este resultado tiene que verificarse, por lo que se efectúan los pasos descritos en el problema. Si el valor 1480 es verdadero, al final de todo el proceso se deberá tener el doble, que es 2960. Para ello hacer uso de la siguiente tabla.

Problema en lenguaje común	**Comprobación**
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero.	1480
El primer año se gastó 100 libras.	1480-100=1380
Aumentó el resto con un tercio de este.	$1380+\frac{1380}{3}=1380+460=1840$
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras.	1840-100=1740
Y aumentó la suma restante en un tercio de ella.	$1740+\frac{1740}{3}=1740+580=2320$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras.	2320-100=2220

Después de que hubo agregado su tercera parte	$2220 + \frac{2220}{3} = 2220 + 740 = 2960$
El capital llegó al doble del inicial	2(1480)=2960

Ahora que se ha comprobado la veracidad del resultado, se puede asegurar que la solución al problema se relata de la forma siguiente: la cantidad de dinero inicial que tenía el comerciante es de 1480.

GUÍA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problema 1. La vida de Diofanto.

La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático. Reproducimos esta inscripción:

¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.

Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.

Problema 2. Función lineal.

La bicicleta de Elena avanza 100 centímetros por cada vuelta de las ruedas. Si se quiere conocer la distancia que recorre en función del número de vueltas de las ruedas, se elabora la tabla de valores correspondiente.

Número de vueltas	1	2	2.5	3	4	4.5	5	6	6.5
Distancia recorrida (cm)	100								

Defina la variable dependiente e independiente.
Elabore una gráfica a partir de la información contenida en la tabla.
Deduzca una expresión algebraica que muestre un valor para un número x de vueltas.
Cuantos centímetros recorre en 100 vueltas.
Si ha recorrido 3 kilómetros, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda?

Problema 3. Para estimar la presión atmosférica en cierto lugar próximo al nivel del mar, puede aplicarse la siguiente fórmula: $P(h) = -\frac{1}{10500}h + 760$, donde P representa el valor de la presión en milímetros de mercurio (mm Hg) y h la altura sobre el nivel del mar expresada en mm.

1. ¿Cuál es la presión atmosférica aproximada que soporta una avioneta que vuela a 3,500 metros de altura?
2. ¿Entre qué valores de altura sería razonable utilizar esta fórmula?

Problema 4. Un automóvil se dirige por un camino recto a 90 km/h desde la ciudad A hasta la ciudad B, distantes entre sí 120 km.

a. Defina la variable dependiente e independiente.
b. Encuentra una expresión que represente la situación.
c. Elabore una gráfica a partir de la información b.
d. ¿A cuántos km de B se encontrará luego de transcurridos 45 minutos de viaje?
e. ¿En qué momento se encontrará a 15 km de B?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

24. Allard, A. (1985) *Le manuscrit des'Arithmétiques' de Diophante d'Alexandrie et les lettres d'André Dudith dans le Monacensis lat.* 10370, Mathemata, Boethius: Texte Abh.
25. Bashmakova, I. (1988) *Diophantus of Alexandria.* 2nd-3rd centuries A.D., Russian, Mat. V Shkole.
26. J. J. O'Connor y E. F. Robertson (1996) *Diofanto de Alejandría*. Facultad de Matemática y Estadística, Universidad de St. Andrews, Escocia. Tomado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus.html. Accesado el 22/10/2011
27. Heath, T L (1964) *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra* New York.
28. Kirk, G. Raven, J. y Schofield M. (2003). *Los filósofos presocráticos*. Cambridge University Press. http://books.google.com/books?id=kFpd86J8PLsC&pg . p. 51.
29. Meserve, B. (1965) *Conceptos fundamentales de álgebra*. Ediciones de la Universidad de Chile y Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
30. Perelman, Y. (1978) *Álgebra Recreativa*. Ciencia popular, Editorial Mir, Moscú.

Viceministerio de Ciencia y Tecnología
Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera "viva" en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación).

Ministerio de Educación

Gobierno de El Salvador — Unir, crecer, incluir

Viceministerio Ciencia y Tecnología — Ministerio de Educación

GECTI — Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación