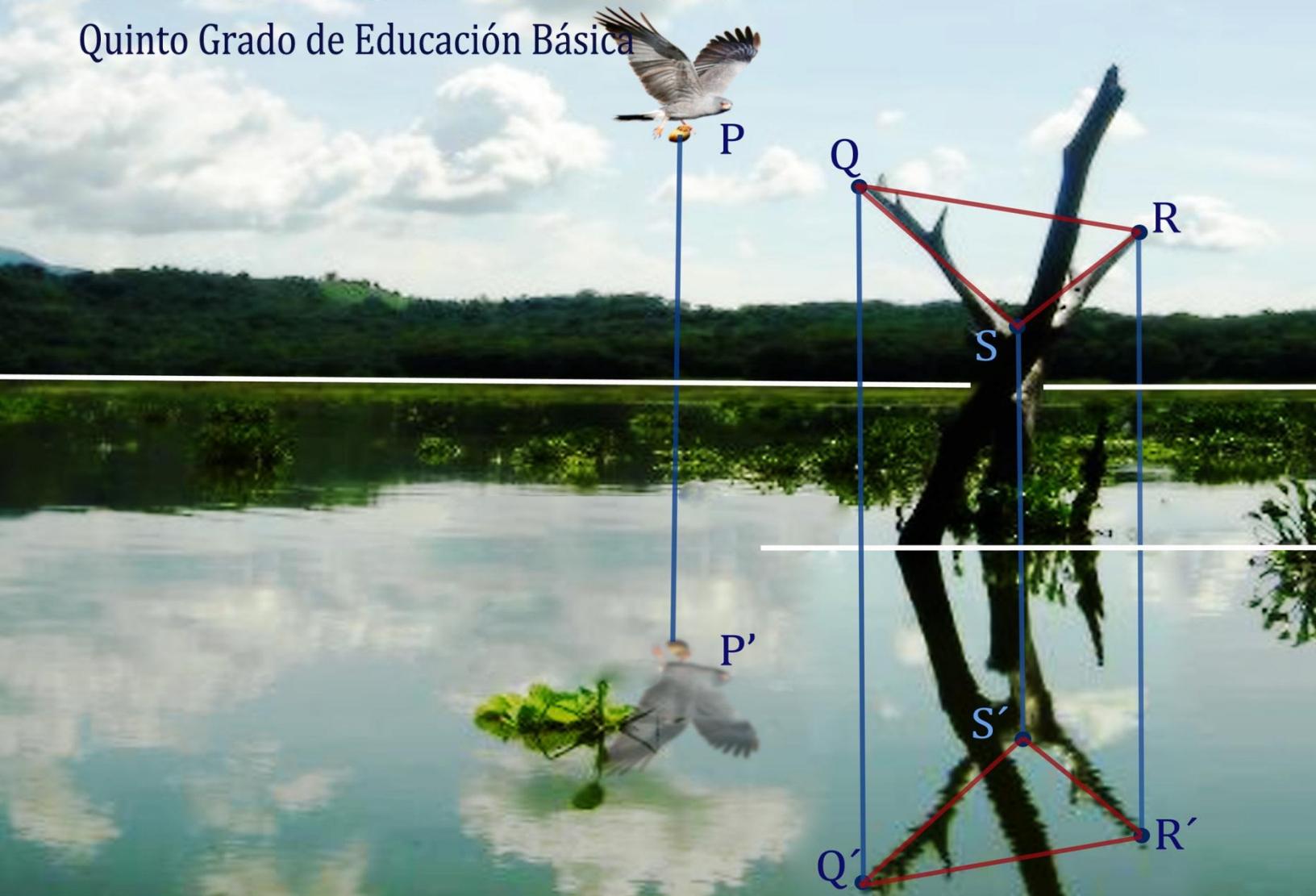


Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

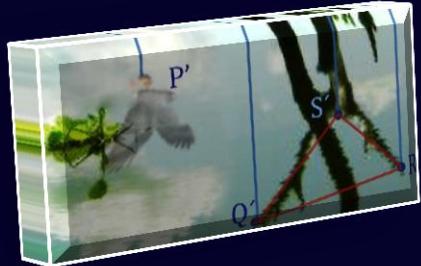
Quinto Grado de Educación Básica



Versión preliminar para plan piloto



Viceministerio de Ciencia y Tecnología



Lago Suchitlán, también llamado Cerrón Grande, es compartido por cuatro departamentos del centro y norte de El Salvador. Imagen tomada de <http://laaventuratours.blogspot.com/>, modificado por Daniel Acevedo.

La simetría en la naturaleza, que cumple las propiedades definidas por la simetría axial.

Ministerio de Educación
Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento
Subprograma Hacia la CYMA

**Material de Autoformación e Innovación Docente
Para Matemática 5° Grado**

Versión Preliminar para Plan Piloto



Ministerio de Educación

Mauricio Funes Cartagena
Presidente de la República

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Mejía
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Reina Maritza Pleitez Vásquez
Daniel Ulises Acevedo Arias
Autores

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Derechos reservados. Ministerio de Educación. Prohibida su venta y su reproducción parcial o total.
Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador,
América Central. Teléfonos: + (503) 2537-4217, + (503) 2537-4218, + (503) 2537-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo “Vamos a la Escuela” 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para los Niveles de Parvularia, Educación Básica y Educación Media. El propósito de estos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o “pivotes” que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

I Parte

Presentación.....	7
La resolución de problemas.....	9
Uso de los cuadernillos en el aula.....	11
Matriz de ubicación de lecciones.....	12

II Parte

Multipliquemos y dividamos números naturales.....	16
Sumemos y restemos fracciones.....	27
Hagamos arreglos y trabajemos con sucesos.....	37
Conozcamos la probabilidad.....	53
Sumemos ángulos internos.....	63
Ángulos entre dos líneas.....	74
Encontremos figuras simétricas.....	83
Razonamiento lógico.....	94
Manipulación de variables.....	104
Volúmenes de sólidos geométricos.....	114

Primera parte

¿Por qué material de autoformación e innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y su programa “Hacia la CYMA” que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular y de autoformación para docentes.

Este material de enriquecimiento curricular para docentes tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática de Quinto Grado de Educación Básica, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica. Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes¹ considerados necesarios para la educación de calidad de la niñez salvadoreña, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, creación de conocimiento y de utilización de ese conocimiento para la innovación.

Se busca que mediante la formación científica se mejoren las condiciones sociales y económicas para alcanzar una vida digna de nuestros futuros ciudadanos. Cada tema de este cuadernillo mantiene una relación con otros materiales curriculares como los programas de estudio, y la colección Cipotas y Cipotes (Guía para Docentes y Libros de texto).

El enriquecimiento que se ha hecho partiendo de temas pivotes, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento, bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener una persona para alcanzar sus propósitos de incorporarse de manera propositiva y útil a la sociedad, y sus propósitos formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos, para mejorar su calidad de vida y la de sus comunidad.

1. Un tema pivote es un contenido curricular clave, se considera que si los docentes manejan adecuadamente dichos temas, podrá desarrollar otros contenidos con facilidad y aplicar de forma más pertinente el conocimiento a la realidad en que se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje; por otra parte podrá seleccionar qué contenidos del programa desarrollar y en qué orden, de acuerdo a las necesidades e intereses del grupo de alumnos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico², el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática³.

² José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.

³ Miguel de Guzmán Ozamiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya⁴ en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación⁵.

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de la estructura de los cuadernillos

El cuadernillo de Matemática de Quinto Grado de Educación Básica es un material de apoyo para el docente, considerado Material de Autoformación e Innovación Docente que permite reorientar lecciones contenidas en el libro de texto de la Colección “Cipotas y Cipotes” a un entorno participativo y de investigación fundamentado en la resolución de problemas, donde el estudio de la Física, Química y Biología en conjunto con la Matemática fortalecen competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de la niñez salvadoreña. El cuadernillo de Matemática de Quinto Grado se elaboró a partir del estudio de tres bloques: Aritmética, Geometría, Medida, añadiendo a estos aspectos algebraicos y lógica matemática. Se proponen diez temas que llamamos contenidos pivotes, que por su importancia en la formación de competencias matemáticas, forman parte del enriquecimiento del libro de texto de la colección “Cipotas y Cipotes”, profundizando tanto en la explicación de los contenidos, como haciendo propuestas de abordaje metodológico fundamentalmente en la resolución de problemas, con el propósito de que se puedan emular en el aula, para que docentes

⁴ George Pólya (1887-1985), matemático Húngaro, How to solve it, Princeton University Press.

⁵ Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

y estudiantes desarrollen habilidades intelectuales propias del pensamiento y del que hacer científico.

Las lecciones se estructuran normalmente en catorce partes, las cuales se detallan a continuación:

- a. **Título.** Condensa la idea central de la lección. Se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
- b. **Descripción.** Presenta todos aquellos puntos relevantes que se tratarán en la lección, haciendo énfasis en las características (generalidades, importancia, usos, etc.) que se desarrollan.
- c. **Objetivos específicos.** Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.
- d. **Habilidades y destrezas científicas.** Son las habilidades y destrezas que el estudiante puede adquirir al finalizar la lección.
- e. **Tiempo.** Es la duración aproximada para el desarrollo de la lección. El tiempo puede variar según la planificación didáctica de la clase.
- f. **Ilustración.** Imagen que busca representar de forma visual el contexto de la lección.
- g. **Vocabulario clave.** En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos del contenido de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda en el momento de leer el marco teórico de la lección.
- h. **Marco teórico.** Esta sección aborda los conceptos, proposiciones y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar. La información se respalda en principios, leyes, clasificaciones, características, propiedades, etc. Se acompaña de ilustraciones, esquemas, modelos y otros con la intención de que el contenido quede lo más claro posible.
- i. **Actividades de Aplicación.** Las actividades de aplicación serán para contribuir al fortalecimiento del marco teórico, asimilando los conceptos de una manera práctica. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental; éstas se refieren a la ejecución de prácticas significativas de aprendizaje que van desde lo simple a lo complejo, desarrollándose con distintas alternativas de abordaje plasmando al menos tres alternativas de solución comentadas por el docente. Estas contienen estrategias de solución encaminadas a fortalecer la capacidad de razonamiento lógico.
- j. **Notas históricas de la Matemática.** Es la sección que se encuentra a la par de cada actividad. Aquí se presentan comentarios, posibles respuestas a las preguntas planteadas en la actividad, ilustraciones, etc. En este espacio se abordan temas de historia de la Matemática y la Tecnología, así como aspectos destacados de la matemática (CTSA) y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales.
- k. **Actividad integradora.** Las ciencias (Matemática y Ciencias Naturales) no deben estudiarse como un conjunto de saberes aislados y sin conexión. Los fenómenos de la realidad circundante no pueden ser interpretados bajo una sola visión científica, sino que su

comprensión demanda la integración de saberes de todas las áreas de las ciencias para una interpretación eficaz de tales fenómenos.

Matriz de justificación de lecciones propuestas y su ubicación en el programa de estudio de Segundo Ciclo de Educación Básica, Quinto Grado, Matemática.

LECCIÓN 1

Multipliquemos y dividamos números naturales.

Unidad 1: Encontremos múltiplos y divisores comunes.

Lección 1: Apliquemos reglas de divisibilidad. Pág. 2-5.

Lección 2: Encontremos múltiplos y divisores. Pág. 6-8.

Justificación:

El abordaje de esta temática es fundamental para la resolución de problemas en la vida cotidiana. Aplicación del MCD y MCM en la interpretación de situaciones cotidianas.

LECCIÓN 2

Sumemos y restemos fracciones.

Unidad 5: Utilicemos las fracciones.

Lección 3: Sumemos fracciones. Pág. 72 – 75.

Lección 4: Restemos fracciones. Pág. 76-79.

Lección 5: Apliquemos propiedades de la adición. Pág. - - -

Justificación:

Se estudian las fracciones propias e impropias con operaciones de sumas y restas. Las actividades se enfocan en que el niño y la niña logre interpretar las operaciones y utilizarlas en la resolución de problemas.

LECCIÓN 3

Trabajemos con sucesos.

Unidad 8: Interpretemos datos.

Lección 4: Hagamos arreglos. Pág. 116-118.

Justificación:

Fortalece el aprendizaje de sucesos y eventos y la utilización de técnicas de conteo y su aplicación en actividades de la vida cotidiana.

LECCIÓN 4

Unidad 8: Interpretemos datos.

Lección 4: Hagamos arreglos.
Pág. 116-118.

Lección 5: Clasifiquemos sucesos.
Pág. 119

Conozcamos la probabilidad.

Justificación:

Esta temática se propone como material complementario. No se encuentra en el programa de estudio, pero su abordaje enriquece las lecciones 4 y 5 de la unidad 8. Se sugiere desarrollar la lección en secuencia, después de la lección enriquecida “trabajemos con sucesos”

LECCIÓN 5

Unidad 2: Relacionemos ángulos.

Lección 1: Sumemos ángulos internos.
Pág. 16-17.

Sumemos ángulos internos.

Justificación:

En esta lección, se busca que el niño y la niña sea capaz de determinar la medida de ángulos utilizando teoremas de triángulos y cuadriláteros, además, que comprendan la simbología utilizada en geometría para designar los elementos de un triángulo o cuadrilátero.

LECCIÓN 6

Unidad 2: Relacionemos ángulos.

Lección 3: Encontremos ángulos entre dos líneas.
Pág. 20 – 21.

Ángulos entre dos líneas.

Justificación:

Utilización de ángulos complementarios y suplementarios en la resolución de problemas que impliquen manipulación de variables.

LECCIÓN 7

Unidad 7: Tracemos figuras.

Lección 2: Figuras simétricas.
Pág. 92-93

Encontremos figuras simétricas.

Justificación:

Con esta lección, se busca obtener conocimientos significativos relacionados a la simetría e identificar diversas representaciones y utilidades de esta.

LECCIÓN 8

Unidad 8: Interpretemos datos.

(Se sugiere abordar la lección después de la lección enriquecida “conozcamos la probabilidad”)

Lógica matemática.

Justificación:

Esta lección permite al estudiante comprender aspectos básicos de lógica matemática que ayuda a interpretar enunciados y a comprender proposiciones que se utilizarán en la interpretación de datos y la resolución de problemas.

LECCIÓN 9

Unidad 1: Encontremos múltiplos y divisores comunes.

Lección 2: Encontremos múltiplos y divisores. Pág. 6-8.

Unidad 2: Relacionemos ángulos.

Lección 2: Tracemos ángulos complementarios y supplementarios. Pág. 18-29.

Unidad 6: Encontremos el área de cuadriláteros.

Lección 1: Calculemos el área de cuadriláteros.

Manipulación de variables.

Justificación:

Esta lección, acerca al estudiante al uso de variables en el análisis de problemas matemáticos.

Con esta lección se pueden complementar las temáticas:

- Múltiplos y divisores.
- Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.
- Estudio de ángulos complementarios.
- Área de figuras planas (triángulos y cuadriláteros).

LECCIÓN 10

Unidad 9: Encontremos volúmenes.

Lección 1: Construyamos patrones de prisma. Pág. 120-126.

Lección 3: Calculemos el volumen

Volumen de sólidos geométricos.

Justificación:

Esta lección enriquece la teoría básica necesaria para la comprensión de la unidad y presenta ilustraciones que facilitan la interpretación de enunciados y teoremas relacionados a la matemática.

Segunda parte

Lecciones

Contenidos trabajados con enfoque CTI.

Multipliquemos y dividamos números naturales



Introducción del tema

En esta época de constante avance tecnológico, la matemática es más importante que nunca.

En su formación el estudiantado está cada vez más involucrado con la necesidad de la herramienta matemática, ya sea en su trabajo o en otras actividades de la vida diaria, para operar equipos de computación, planificar horarios y programas, leer e interpretar datos, comparar precios, administrar las finanzas personales y ejecutar otras tareas para resolver problemas.

Todo lo que aprendan en matemática y la manera en que adquieran ese conocimiento les proporcionará una preparación eficiente para un futuro exigente y en constante cambio.

El tema de máximo común divisor y mínimo común múltiplo es de vital importancia en las áreas de economía, astronomía, o para conocer resultados que son necesarios en nuestra vida.

Es por esto que se deben comprender los conceptos básicos para analizar temas como números pares, impares, primos, compuestos, así como la factorización de estos cuando son divisibles o múltiplos de otros.

Figura 1. Los números naturales son infinitos. El conjunto de todos ellos se designa por \mathbb{N}

Competencias por fortalecer

- Analiza y comprende cada una de las propiedades del MCD y el MCM tales como los números primos, los números pares e impares para resolver problemas de la vida cotidiana.

Objetivos

- Reconocer los múltiplos y divisores de los números naturales.
- Aplicar los criterios de divisibilidad en las operaciones matemáticas.
- Capacitar a los estudiantes para expresar matemáticamente un problema, resolver e interpretar los resultados.

Presaber

- Operaciones básicas con números naturales.

Vocabulario Clave

Números pares: Cualquier entero que se pueda dividir exactamente entre 2. La última cifra será 0, 2, 4, 6 u 8.

Ejemplo: -24, 0, 6 y 38 son todos pares.

Números impares: Si un número no es par, se llama **número impar**. La última cifra será 1, 3, 5, 7 o 9

Ejemplo: -3, 1, 7 y 35 son todos impares.

Múltiplos: Decimos que un número es **múltiplo** de otro si lo contiene un número entero de veces.

Números primos: Los números **primos** son los que tienen dos divisores, que son el 1 y el mismo número primo.

Números compuestos: Los números compuestos son los que tienen más de dos divisores, son los más frecuentes.

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Los múltiplos de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales.

La división exacta de números naturales

Al dividir dos números naturales puede suceder que su resto sea 0, eso es porque el dividendo es múltiplo del divisor, decimos que es una división exacta.

Si el resto es otro número mayor que 0 la división no es exacta. El dividendo no es múltiplo del divisor. División exacta es la que tiene de resto 0.

Los divisores de un número

Los divisores de un número natural son los números naturales que le pueden dividir, resultando de cociente otro número natural y de resto 0.

Ser divisor es lo recíproco a ser múltiplo. Si 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9.

Un número a es divisor de un número b si la división de b entre a, es exacta.

Cada número tiene una cantidad concreta de divisores. A la derecha puedes ver algunos ejemplos.

Solamente el 0 tiene infinito número de divisores, ya que todos los números son divisores de 0. El número 1 tiene solamente un divisor. El 0 y el 1 son números especiales.

Criterios de divisibilidad

Podemos saber fácilmente si un número es divisible por otro sin necesidad de hacer la división, observando estas características:

- Los múltiplos de 2 terminan en 0, 2, 4, 6, 8.
- En los múltiplos de 3 si sumamos el valor individual de sus cifras resulta también un múltiplo de 3.
- Los múltiplos de 5 terminan en 0 o 5.
- En los múltiplos de 9 si sumamos el valor individual de sus cifras resulta también un múltiplo de 9.

- Los múltiplos de 10 terminan en 0.
- En los múltiplos de 11 si sumamos los valores individuales de las cifras que están en posiciones par, aparte sumamos los valores individuales de las cifras que están en posiciones impar, restamos esas cantidades nos da un múltiplo de 11, el 0 también lo es.

Números primos y números compuestos

Al comprobar cuántos divisores tienen los números observamos que:

- El 1 es el único número que solamente tiene un divisor, por eso es un número especial.
- El 0 tiene infinito número de divisores, ya que todos los números son divisores de 0, también es un número especial.
- Los demás números pueden ocurrir dos casos que tengan solo 2 divisores, el 1 y el mismo número, o que tengan más.
- Los números primos son los que tienen dos divisores, que son el 1 y el mismo número primo.
- Los números compuestos son los que tienen más de dos divisores, son los más frecuentes.

Descomposición factorial de un número

Descomponer un número en factores es ponerlo como producto de factores primos. Se procede de la manera siguiente:

- a) Dividimos el número por el primer número primo que podamos.
- b) El cociente que haya resultado lo colocamos bajo el número.
- c) Si podemos seguimos dividiendo sucesivamente ese cociente por el mismo número primo.
- d) Cuando no podemos hacer la división por ese número primo lo hacemos por el siguiente primo que se pueda.
- e) Así sucesivamente hasta que el cociente final sea 1.
- f) Finalmente ponemos ese número como un producto de potencias de factores primos.

Ejemplo

Descomponer el número 220

$$\begin{array}{r}
 220 \quad | \quad 2 \qquad \text{así: } 220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\
 220 \div 2 \rightarrow 110 \quad | \quad 2 \\
 110 \div 2 \rightarrow 55 \quad | \quad 5 \\
 55 \div 5 \rightarrow 11 \quad | \quad 11 \\
 11 \div 11 \rightarrow 1 \quad | \quad 1
 \end{array}$$

Máximo común divisor

Dos o más números pueden tener el mismo factor, llamado factor común. El mayor de los factores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** (MCD) de los números. Hay dos métodos que puedes usar para calcular el MCD de dos o más números.

Método 1:

- ✓ Enumera todos los factores de cada número
- ✓ Identifica los factores comunes.
- ✓ El mayor de los factores comunes es el MCD.

Método 2:

- ✓ Escribe la factorización prima de cada número.
- ✓ Identifica todos los factores primos comunes.
- ✓ El producto de los factores primos comunes es el MCD.

Ejemplo.

Método 1

Calcula el MCD de 15 y 18.

Haz una lista de los factores de cada número. Escribe la factorización prima de cada número.

Factores de 15: 1, 3, 5, 15

Factores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Los factores comunes son 1 y 3.

El MCD de 15 y 18 es 3.

Ejemplo

Método 2

Calcula el MCD de 20 y 28.

28	2	20	2
14	2	10	2
7	7	5	5
1		1	

Los factores primos comunes son 2 y 2, es decir, el producto de ellos es 4.

Mínimo común múltiplo

Un múltiplo de un número es el producto de ese número y cualquier número entero. Dos números diferentes pueden compartir algunos de los mismos múltiplos, los cuales se llaman múltiplos comunes. El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, excluyendo el cero, se llama **mínimo común múltiplo** (MCM). Usa los siguientes métodos para calcular el MCM.

Método 1:

- ✓ Enumera los múltiplos, no nulos, de cada número
- ✓ Identifica el MCM de los múltiplos comunes.

Método 2:

- ✓ Escribe la factorización prima de cada número.
- ✓ Identifica todos los factores primos comunes.
- ✓ Luego, calcula el producto de primos los factores primos comunes usando cada factor común solamente una vez y multiplica por cualquier factor primo que quede. Este producto es el MCM.

Ejemplo

Método 1

Halla el MCM de 4 y 6 mediante una lista.

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30

El MCM de 4 y 6 es 12

Método 2

Calcula el MCM de 10 y 12.

Usa la factorización prima.

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{El MCM es } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Conocimientos previos

Actividad 1: Juguemos a encontrar números pares e impares.

Objetivo

Identificar números pares e impares mediante el juego de palabras

Materiales

Hojas de papel bond.

Plumones.

Pizarra.

Tijeras.

Tirro.

Instrucciones:

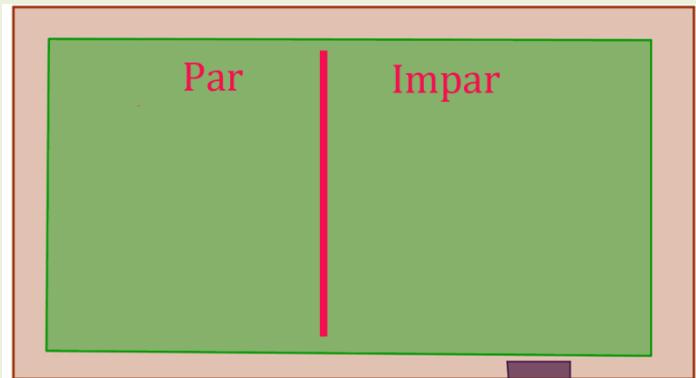


Figura 2. Pizarra colocando los nombres Par o Impar

Pedir a las niñas y niños que escriban en un pedazo de papel bond el nombre con el que más les gusta que los llamen. Por ejemplo Margarita. Y luego pedirles que cuenten el número de letras que tiene su nombre.

En el ejemplo anterior el nombre de Margarita, tiene nueve letras. Así cada niño o niña dependiendo su nombre, encontrará el número de letras. Luego explique que le llamamos números par, que son los números que se pueden dividir entre dos, y el resultado es exacto.

En el caso de que el resultado no sea exacto al dividir el número entre dos; entonces el número es impar. Un caso especial es el cero, pues el cero está clasificado por número par por definición.

Ahora que ha explicado a qué se les llama números impares y pares, dígales que cada quien divida el número de letras que tiene su nombre y, si el resultado es exacto, entonces el número de letras de su nombre es par. De lo contrario, es impar.

Deje un tiempo adecuado para realizar la operación y luego que coloquen tirro detrás del pedazo de papel.

Como docente deberá escribir en una columna de la pizarra la palabra par en el lado izquierdo y la impar en el lado derecho, así cada niño o niña en forma ordenada irá a colocar su nombre en la columna correspondiente.

Luego puede preguntar: En qué columna hay más nombres, ¿en los pares o en los impares?

Esta respuesta dependerá de los nombres que coloquen los niños y niñas.

Luego que escriban en su cuaderno de trabajo el orden de los números pares, por ejemplo, los encontrados en los nombres.

Después elabore un listado con los números encontrados, separándolos en orden. Si el número se repite solo se coloca una vez. Así por ejemplo: 2, 4, 6, 8... y los impares 1, 3, 5, 7...

¿Qué es un múltiplo?

Un número es múltiplo de otro cuando se puede obtener multiplicando a ese número por cualquier número natural. Por ejemplo:

6 es múltiplo de 3, porque se puede multiplicar $3 \cdot 2 = 6$.

Solución

Para encontrar los divisores de 10, 18, 25, primero deben conocer los criterios de divisibilidad o simplemente utilizar que son todos aquellos números que al dividirlos nos den como resultado exacto es decir el residuo es cero.

Es importante discutirlo en plenaria para ver qué soluciones han tomado algunos de los estudiantes y si es correcta así la solución es:

Para los divisores de 10 son: 2, 5 y 10.

Para los divisores 18 son: 2, 3, 6 y 18.

Y los divisores de 25 son: 5 y 25.

Nota: Ser divisor es lo recíproco a ser múltiplo. Si 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9.

Así:

Los múltiplos 5 son: 5, 10, 15, 20... etc.

Los múltiplos de 10 son: 10, 20, 30, 40...

Actividad 2. Conozcamos los múltiplos y divisores de 2, 3, 5,10

Objetivo

Identificar los múltiplos de 2, 3, 5, y 10.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Pizarra.

Indicaciones

Jugaremos a encontrar un número ¿qué número es?

Pista

Es un número que está comprendido entre 31 y 60.
Es divisible por 6 y 7.

Para resolver este problema es importante que el estudiantado tenga la idea de divisibilidad, y esto no es más que un número se pueda dividir entre otro y el resultado sea un exacto y sin residuo.

Por ejemplo, 48 es divisible por 6 puesto que su resultado es 8 y su residuo es cero, es decir, es exacto; entonces 48 es divisible entre 6.

En el problema que se les proporciona a los niños y niñas para que adivinen, el número debe cumplir que sea divisible por 6 y por 7; además, estar en el rango de 31 a 60.

La respuesta de este ejercicio es 42, ya que cumple con los requisitos proporcionados

Ahora reúna al grado en equipos de cinco integrantes y que encuentren los divisores de 10, 18, 25.

Luego explíquenles que los múltiplos de un número son los que se pueden obtener multiplicando a ese número por cualquier número natural. Por ejemplo, los múltiplos de 2 son 0, 2, 4, 6, 8... y todos los números que terminan en estos números.

Los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12... Si observa el numero 2 y el número 3 se han multiplicado por cada uno de los números naturales, con excepción del número cero, que se considera número par, por tanto múltiplo de 2 y de todo número.

Ahora pida que encuentren los múltiplos de 5 y 10 utilizando los números naturales.

Así se tiene que:

Estos números son los números primos, y según han elaborado han encontrado, los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, estos son los números primos encontrados en la cuadrícula de 50 números; además, como los números naturales son infinitos, también el conjunto de los números primos son infinitos.

Tabla 2. Cuadrícula con la muestra de algunos números primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Los números primos son un subconjunto de los números impares.

A excepción del número 2, que es par, todos los números naturales primos son impares e infinitos.

Sabías que...

El yin y el yang, las filosofías chinas están denominadas por estos dos términos, que significan opuesto, como masculino y femenino, salud y enfermedad, etc., los números no escapan de este esquema y precisamente, son ying los pares y yang los impares.



Figura 3. Símbolo para representar el yin (negro) y el yang (blanco)

ACTIVIDAD 3. Encontremos números primos

Objetivo

Identificar números primos mediante el uso de la cuadrícula.

Materiales

Cuaderno de trabajo cuadriculado.
Pizarra.

Instrucciones

Es sencillo de encontrar cada uno de los números primos de los primeros 50 números naturales, para esto cada miembro del grupo estudiantil elaborará un cuadro; el cual servirá para encontrar los números primos.

Pedir al grupo que elabore una cuadrícula de 10×5 , y coloque los números del 1 al 10 en la primera fila, y así sucesivamente en las siguientes filas hasta llegar al 50.

Tabla 1. Cuadrícula de 10×5 los primeros 50 números

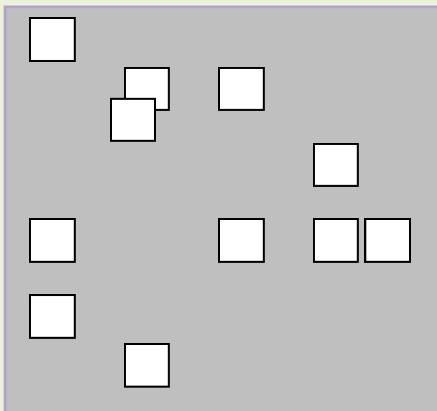
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Luego de que elaboren la cuadrícula y coloquen los números, que sigan los siguientes.

Pasos:

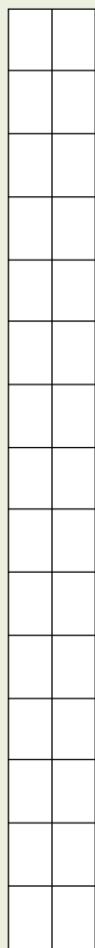
1. Tache el número 1 con un cheque.
2. Encierre en un círculo el número 2.
3. Tache con un cheque los múltiplos de 2.
4. También encierre en un círculo los números 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
5. Taché los múltiplos de cada uno de los números mencionados.
6. Escriba la lista de los números que no están tachados.

Imágenes del problema planteado



Solución son ocho maneras en que se pueden colocar los cuadrados.

Representación de las cajitas colocadas de la forma de 2×15



Actividad 4. Problemas de mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Objetivo

Resolver problemas donde encontremos el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Pizarra.

Indicaciones

Resolver los siguientes planteamientos, pueden trabajar en parejas para buscar la solución.

1. Tengo una colección de minerales, guardados cada uno en una cajita cuadrada, todas iguales.

Se desea poner esas cajitas en exposición de manera que formen un rectángulo completo.

a) ¿De cuántas maneras lo puedo hacer?

b) ¿Cuál es la disposición que más se parece a un cuadrado?

Solución

Encontramos los divisores de 30 que son:

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.

Luego se pueden colocar las cajitas en rectángulos de las siguientes maneras:

$$1 \times 30 \text{ o } 30 \times 1$$

$$2 \times 15 \text{ o } 15 \times 2$$

$$3 \times 10 \text{ o } 10 \times 3$$

$$5 \times 6 \text{ o } 6 \times 5$$

Cualquiera de las dos disposiciones es la más "cuadrada".

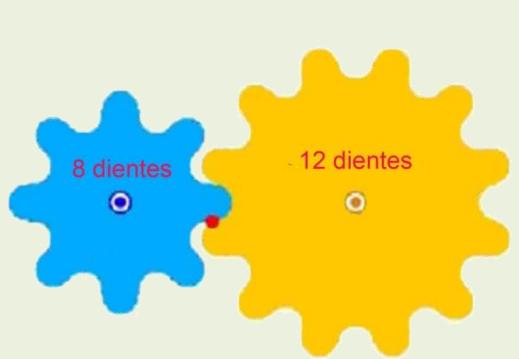


Figura 4. Ruedas dentadas de un engranaje.

La Actividad 4 nos permite trabajar los conceptos aprendidos de divisores, así como también trabajar los conceptos de MCD y MCM.

En el primer planteamiento se busca que cada estudiante recuerde los divisores de un número para poder colocar las cajitas en el orden especificado.

En el planteamiento dos se busca utilizar el término MCM y que cada estudiante advierta la utilización de estos términos en la vida cotidiana.

Así como en el tercer planteamiento, con los tres tipos de cuentas proporcionados, se busca encontrar el MCD para la elaboración de los collares.



Figura 5. Cuentas de colores azul, rojo y café.

2. En la Figura 4 se muestra unas ruedas dentadas que forman un engranaje.

- ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir los puntos señalados en color rojo?
- ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una de las ruedas?

Solución.

- ✓ La rueda azul tiene 8 dientes, la amarilla 12.
- ✓ El número de dientes que deben pasar para que vuelvan a coincidir es un múltiplo de 8 y de 12, además el menor de los múltiplos comunes.

$$8 = 2^3 \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \text{ entonces el MCM } (8,12) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Los puntos rojos volverán a coincidir cuando hayan pasado 24 dientes.

La rueda azul habrá girado $24 \div 8 = 3$ vueltas.

La rueda amarilla habrá girado $24 \div 12 = 2$ vueltas.

3. Tengo cuentas de colores para formar collares, hay 120 azules, 160 rojas y 200 cafés. Quiero montar collares lo más grandes que sea posible, cada collar con el mismo número de cuentas sin que sobren y sin mezclar colores.

- ¿Cuántas cuentas debo emplear en cada collar?
- ¿Cuántos collares puedo hacer de cada color?

Solución:

Si no pueden sobrar cuentas de ninguno de los tres colores, el número de cuentas que se debe emplear es un divisor de 120, 160 y 200. Como además se requiere hacerlos lo más grandes que se pueda será el MCD

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 160 = 2^5 \cdot 5; \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2$$

$$\text{MCD} (120, 160, 200) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Así el resultado es que 40 cuentas emplearé en cada collar.

Por tanto puede hacer:

$$120 \div 40 = 3 \text{ collares azules,}$$

$$160 \div 40 = 4 \text{ collares rojos,}$$

$$200 \div 40 = 5 \text{ collares café.}$$

GUIA DE TRABAJO

Hoja de ejercicios

1. ¿Es 176 múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 41?

Aplica los criterios de divisibilidad o realiza la división para ver si el resto es 0.

- ✓ Divisibilidad por 2 o por 5 que la última cifra lo sea.
- ✓ Divisibilidad por 3 o por 9 que la suma de las cifras lo sea.

2. La descomposición en factores primos de 15,000 es $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$. ¿Cuántos divisores tiene? Menciona algunos.

Sugerencia: Para ello hacemos la descomposición en factores primos, y aumentamos en uno a cada uno de los exponentes. El producto de esos exponentes aumentados es el número de divisores.

3. Ana viene a la biblioteca del instituto, abierta todos los días, incluso festivos, cada 4 días; y Juan, viene cada 6 días. Si han coincidido hoy, ¿dentro de cuántos días volverán a coincidir?
4. ¿Cómo podremos disponer 9 bolas en 4 cajas, de forma que cada una tenga un número impar de bolas y distinto al de cada una de las otras tres?



5. La alarma de un reloj suena cada 9 minutos, otro cada 21 minutos. Si acaban de coincidir los tres dando la señal, ¿cuánto tiempo pasará para que los tres vuelvan a coincidir?
6. ¿Es posible mediante cinco cifras impares sumar 20?
7. Encontrar un número primo de dos dígitos que mirado patas arriba también es primo. Hay tres soluciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Rodríguez R. (1986) *Cuentos y cuantas de los matemáticos*, Editorial Reverté, S.A., España.
2. Cidec@d. (s. f.). Multiplos y divisores. Recuperado diciembre 19, 2009, a partir de
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena2/1quincena2.pdf>

Sumemos y restemos fracciones



Figura 1. Las fracciones se utilizan para repartir alimentos, estas son de uso cotidiano. Fotografía sacada de

Introducción del tema

En el lenguaje cotidiano, utilizamos expresiones como estas:

“Me queda la mitad”.

“Falta un cuarto de hora”.

“Tengo un décimo de lotería”.

“Cabén tres cuartos de litro”.

“Está al ochenta y cinco por ciento de su capacidad”.

En estas expresiones se está utilizando fracciones.

Por tanto, el empleo de fracciones es tan antiguo como nuestro lenguaje.

Una fracción se utiliza para expresar cantidades en cosas partidas en partes iguales. Además, nos sirve para expresar el valor numérico y el resultado de una división. O para expresar la razón que guardan dos magnitudes proporcionales.

Pero muchas veces se necesita también interpretarlas como la suma o diferencia de ciertas cantidades, que son de uso en nuestro lenguaje y en nuestro uso diario, es por eso que el enfoque de este tema se da en cómo resolver estas operaciones de manera que se conozca la interpretación de ellos.

Competencias por fortalecer

- Comprende y analiza los procesos de solución para la suma y resta de fracciones heterogéneas.

Objetivos

- Analizar los procesos del cambio de fracciones heterogéneas a homogéneas.
- Resolver problemas y ejercicios de sumas y restas de fracciones heterogéneas.

Presaber

- Operaciones básicas con números naturales.
- Polígonos.
- Mínimo común múltiplo.

Vocabulario Clave

Las fracciones propias: Son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador. Su valor está comprendido entre cero y uno

Las fracciones impropias: Son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Su valor es mayor que 1.

La fracción mixta: Es la que está compuesta de una parte entera y la otra fraccionaria propia.

Fracciones homogéneas: Dos fracciones son homogéneas si tienen igual denominador.

Fracciones Heterogéneas: Dos fracciones son heterogéneas si tienen diferente denominador.

Fracciones Equivalentes: Son aquellas fracciones que son iguales, representan la misma cantidad, salvo un número múltiplo de dicha fracción.

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Diremos que dos fracciones son heterogéneas cuando estas poseen distinto denominador, por lo cual se diferencian de las fracciones homogéneas, que tienen el mismo denominador.

Las fracciones con denominadores diferentes, se comparan convirtiéndolas en fracciones equivalentes con denominadores iguales.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{10}$$

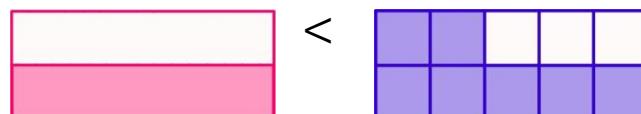


Figura 2. Comparación de fracciones de distinto denominador.

Observe y compare que si tomamos un número que nos haga el mismo denominador en ambas fracciones, nos resultará sencillo verificar si el planteamiento es correcto.

Por tanto, elegimos un número adecuado, el cual nos servirá para convertir los denominadores en valores homogéneos; así multiplicamos y dividimos por un número adecuado la fracción de $\frac{1}{2}$ de manera que se obtenga un equivalente a la fracción $\frac{7}{10}$; así se tiene: $\frac{5 \times 1}{5 \times 2} = \frac{5}{10}$ y así tenemos la relación de

$$\frac{5}{10} < \frac{7}{10}$$

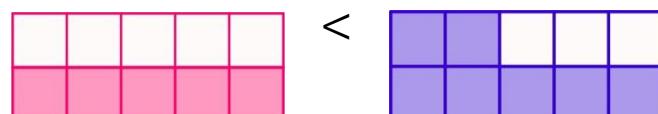


Figura 3. Comparación de fracciones homogéneas.

De esta manera podemos realizar la comparación entre ambas fracciones y decir si el planteamiento es correcto. O si deseamos conocer qué fracción es mayor o menor que otra.

Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Si los quebrados que queremos sumar o restar tienen distinto denominador, entonces tenemos distintas particiones de la unidad y para hacer las operaciones necesitamos una partición en común.

Por ejemplo, si queremos sumar un medio y un tercio tenemos la unidad partida en mitades y en tercios. Para tener medios, necesitamos que la unidad esté partida en 2 o en un múltiplo de 2. Para tener tercios necesitamos que la unidad esté partida en 3 o en un múltiplo de 3. Para tener una partición común tomamos un múltiplo común de 2 y 3, por ejemplo 6 que es el más chico: $6 = \text{MCM} (2, 3)$. Luego encontramos fracciones equivalentes a un medio y a un tercio con denominador 6; decimos que 6 es el **denominador común** o el **común denominador**. Y después sumamos.

Es decir:

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{3}{6} \quad y \quad \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$$

Entonces la suma queda:

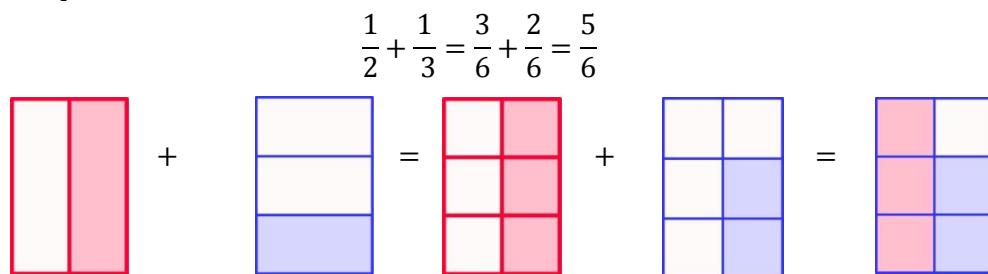


Figura 4. Representación de suma de fracciones heterogéneas de distinto denominador convertidas a fracciones homogéneas para obtener el resultado.

Es el mismo caso para la resta de fracciones solamente cambiando el signo positivo por el signo negativo. El proceso es el mismo.

Suma y resta de fracciones mixtas

Si sumamos fracciones mixtas podemos sumar primero los enteros y luego las fracciones o convertir los enteros en fracciones, sumar y simplificar el resultado.

Por ejemplo, si queremos sumar tres enteros un medio y cinco enteros un tercio, se puede hacer de las dos maneras siguientes:

- a) Sumamos primero los enteros:

$$3 \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 8 + \frac{5}{6} = 8 \frac{5}{6}$$

- b) O bien, primero convertimos los enteros a fracciones impropias:

$$3 \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad y \quad 5 \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

Luego sumamos

$$3 \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{3} = \frac{7}{2} + \frac{16}{3} = \frac{21}{6} + \frac{32}{6} = \frac{53}{6} = 8 \frac{5}{6}$$

Si restamos fracciones mixtas hay que ver si se pueden restar por separado los enteros y las fracciones. Si la fracción del sustraendo es menor que la del minuendo, restamos enteros de enteros y fracciones de fracciones.

Actividad 1: Conocimientos previos

Objetivo

Identificar las clases de fracciones, de manera ilustrativa.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Indicaciones

Pedir al estudiantado que identifique de la siguiente lámina, cuáles son fracciones propias e impropias, y si son impropias conviértalas a mixtas.

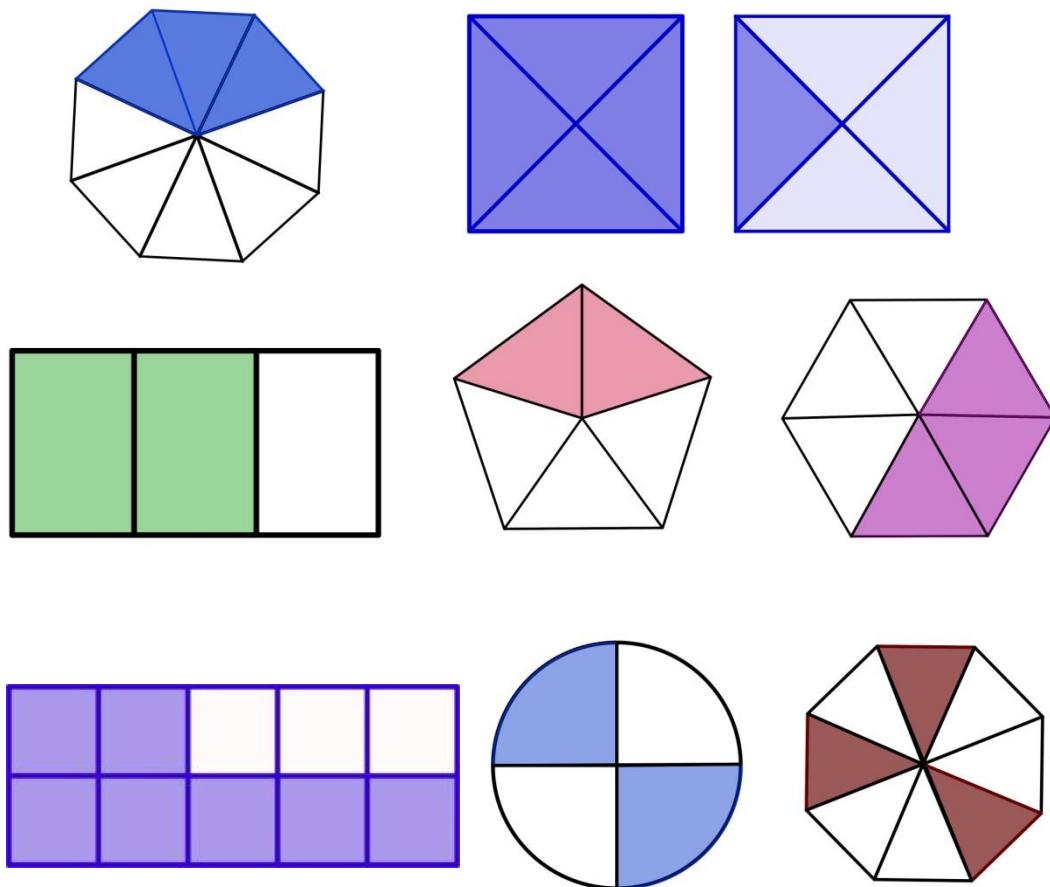


Figura 5. Figuras geométricas representando fracciones.

Con esta actividad se pretende que el estudiantado identifique las clases de fracciones, para trabajar con los conceptos de propias, impropias y mixtas a la hora de sumar y restar fracciones. Se pueden discutir en plenaria los resultados obtenidos. Además, se pueden trabajar los conceptos de homogéneas y heterogéneas, hacer comparaciones.

Solución de ejercicio 2.

$$\frac{9}{3} = \frac{21}{7}, \quad \frac{7}{49} = \frac{8}{56}, \quad \frac{6}{4} = \frac{9}{6},$$

$$\frac{8}{8} = \frac{3}{3}, \quad \frac{10}{6} = \frac{40}{24}, \quad \frac{9}{1} = \frac{45}{5}$$

En ambos ejercicios se pretende que el estudiantado recuerde los conceptos de equivalentes y trabaje de las fracciones heterogéneas a las homogéneas.

El trabajar con el MCM ayuda para reconocer cuándo una fracción es menor o mayor o igual que otra, reduciendo las fracciones heterogéneas mediante las comparaciones de las fracciones equivalentes.

Es importante que sus estudiantes manejen estas transformaciones para realizar las operaciones de sumas y restas de fracciones.

Identificar la equivalencia de fracciones es encontrar la simplificación adecuada para que las fracciones sean la misma cantidad.

Actividad 2: Conozcamos fracciones heterogéneas.

Objetivo

Resolver ejercicios mediante la conversión de fracciones heterogéneas a homogéneas.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Indicaciones

Pedir a los estudiantes que resuelvan los siguientes ejercicios.

1. Ordena de mayor a menor estas fracciones:

$$\frac{3}{7}, \frac{9}{4}, \frac{8}{8}, \frac{2}{5}$$

Solución

Para resolver este ejercicio es necesario que lo pasemos a fracciones equivalentes por tanto sacamos el MCM de todas las fracciones en este caso es 140.

Ahora transformamos las fracciones y se tiene que

$$\frac{3 \times 40}{7 \times 40} = \frac{120}{280}; \frac{9 \times 70}{4 \times 70} = \frac{630}{280}; \frac{8 \times 35}{8 \times 35} = \frac{280}{280}; \frac{2 \times 56}{5 \times 56} = \frac{112}{280}$$

Luego, como todas las fracciones ya son homogéneas, es decir, que tienen igual denominador, procedemos a realizar las comparaciones de los numeradores,

$$112 < 120 < 280 < 630$$

Por tanto, el orden de las fracciones es:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{8}{8} < \frac{8}{5}$$

2. Cada fracción de abajo es equivalente a otra de arriba, identifícalas y coloca las parejas que son equivalentes a la par.

$$\frac{9}{3}, \frac{7}{49}, \frac{6}{4}, \frac{9}{1}, \frac{8}{8}, \frac{10}{6}$$

$$\frac{3}{5}, \frac{45}{25}, \frac{21}{7}, \frac{40}{20}, \frac{8}{8}, \frac{9}{6}$$

Las distancias que se te piden son las siguientes:

- La distancia de la casa de Sofía a la casa de Diego, pasando por la biblioteca.
- La distancia de la biblioteca al parque, pasando por la casa de Sofía.
- La distancia del parque a la casa de Diego, pasando por la frutería.
- La distancia de la casa de Diego a la casa de Sofía, pasando por la frutería y el parque.

Para resolver y encontrar dichas distancias se utilizará el proceso anterior de encontrar el MCM y convertir las fracciones heterogéneas a fracciones homogéneas, utilizando además las fracciones equivalentes.

De esta manera practicarán la adición de fracciones equivalentes.

Actividad 3: Suma y resta de fracciones

Objetivo

Resolver planteamiento de problemas mediante las operaciones de sumas y restas de fracciones heterogéneas.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Pizarra.

Indicaciones

Resolver el siguiente problema:

Sofía recorre $\frac{7}{10}$ de kilómetro para ir de su casa al parque y luego camina $\frac{2}{7}$ de kilómetro del parque a la frutería. ¿Cuál es la distancia total que debe recorrer Sofía para ir de su casa a la frutería, pasando por el parque?

Solución

Para responder esta pregunta, debemos efectuar una adición de fracciones.

Para esto convertimos las fracciones a fracciones homogéneas.

Así encontramos el MCM de 10 y 7 así el MCM es 70

Ahora convertimos las fracciones a fracciones equivalentes

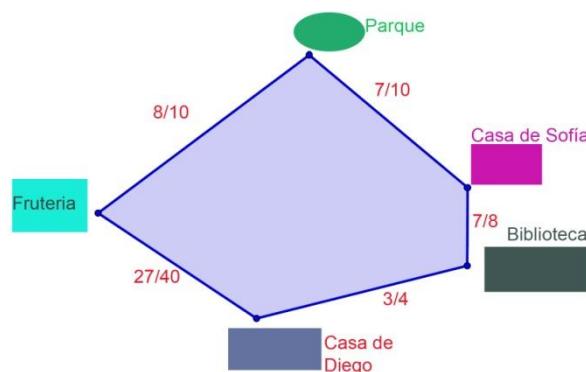
$$\frac{7 \times 7}{10 \times 7} = \frac{49}{70}, \quad \frac{2 \times 10}{7 \times 10} = \frac{20}{70}$$

Así se tiene $\frac{49}{70} + \frac{20}{70} = \frac{69}{70}$

Entonces recorre $\frac{49}{70}$ kilómetros desde su casa a la frutería pasando por el parque.

Ahora resuelve la siguiente:

Utiliza la figura del diagrama para determinar las distancias requeridas.



Actividad 4: Realicemos operaciones de adición y sustracción de fracciones mixtas.

Objetivo

Resolver fracciones mixtas aplicando los métodos de solución.

Materiales:

Papel.

Lápices de colores.

Indicaciones

Mostrar al grado el diagrama siguiente de la figura 5, es el recorrido de un campamento. Realicen las operaciones siguientes:

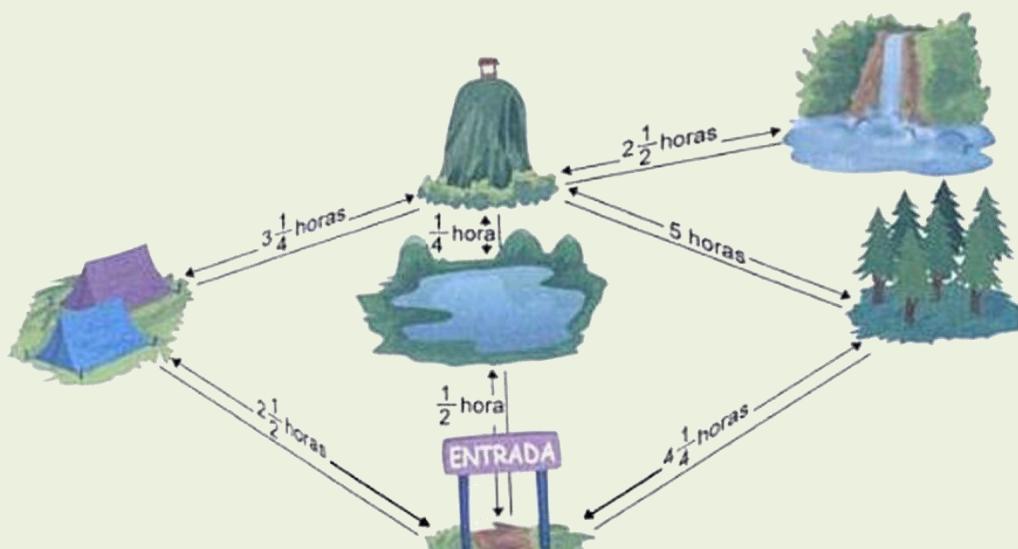


Figura 7. Campamento con el tiempo de cada uno de los recorridos.

Calcule cuánto dura cada uno de los siguientes recorridos:

- Entrada-lago-mirador-carpas
- Entrada-carpas-mirador-cascada
- Entrada-bosque-mirador-carpas-entrada.

Debe realizar la suma de los recorridos que se especifican en los literales a), b) y c); para trabajar se deben resolver los planteamientos utilizando la conversión de fracciones homogéneas.

Recuerde que puede pasar las fracciones mixtas a fracciones impropias y luego convertirlas a fracciones homogéneas, o bien sumar primero la parte entera y luego la parte fraccionaria.

Quinto Grado

Lección 2: Sumemos y restemos fracciones

Unidad 5: Utilicemos las fracciones.

Hoja de ejercicios

1. Completa la Tabla siguiente

Fracciones dadas	MCM	Fracciones equivalentes	Adición
$\frac{3}{7} + \frac{9}{14}$	MCM (7,14)= 14	$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ y $\frac{9}{14} = \frac{9}{14}$	$\frac{6}{14} + \frac{9}{14} = \frac{15}{14}$
$\frac{12}{5} + \frac{4}{15}$			
$\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$			
$\frac{5}{8} + \frac{7}{5}$			
$\frac{5}{9} + \frac{13}{6}$			

2. Completa el siguiente cuadro según corresponda

$\frac{3}{5}$	+		=	$\frac{7}{5}$
+		+		+
$\frac{1}{5}$	+	$3\frac{1}{5}$	=	
=		=		=
	+	4	=	

3. Un árabe dejó al morir a sus tres hijos una herencia de 17 hermosos camellos, especificando que habían de repartirla de la siguiente manera: al mayor la mitad de los camellos, al mediano la tercera parte, y al menor la novena parte. Los jóvenes herederos estaban desesperados, ya que evidentemente no podían repartir los 17 camellos de esta manera sin la colaboración del carnicero.

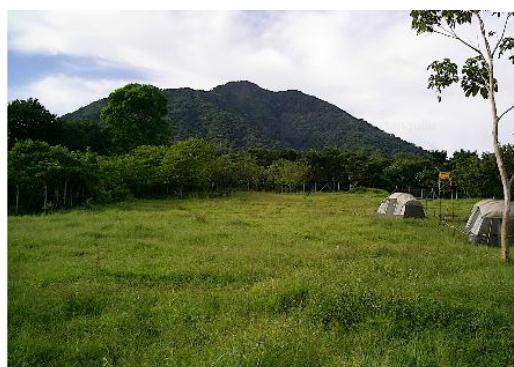
Buscaron finalmente los consejos de un anciano y sabio amigo que prometió su ayuda. Al siguiente día se presentó en la cuadra llevando un camello de su propiedad. Lo juntó a los 17 y dijo a los hermanos que ya podían proceder al reparto. El mayor se llevó la mitad de los 18, o sea 9, el mediano un tercio de los 18, es decir 6; y el pequeño un noveno de los 18, o sea 2. Cuando ya se hubieron llevado los 17 primeros camellos, el anciano cogió el suyo y se marchó. ¿Cuál es el truco?



4. Luisa compró $\frac{1}{5}$ Kg de chocolate amargo y $\frac{7}{15}$ Kg de chocolate dulce ¿cuánto compró en total?



5. ¿Cuánto tiempo gastó José en subir y bajar el cerro del Tigre de Ahuachapán, El Salvador, en La Palma, si tardó $\frac{3}{4}$ de hora en subirlo y $\frac{1}{2}$ hora en bajarlo?



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Conexiones matemáticas 4, recuperado el 20 de diciembre de 2011, a partir de <http://books.google.com.sv>. Búsqueda: Conexiones matemáticas.
2. E. Barbero. (s. f.). Fracciones. Recuperado diciembre 20, 2011, a partir de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena5/index1_5.htm

Referencias de imágenes

1. Figura 2: Fuente
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena5/imagenes5/fracciones.jpg>

Hagamos arreglos y trabajemos con sucesos

Introducción del tema

La combinatoria es una rama de la matemática que pertenece al área de matemática discreta, la combinatoria enumerativa estudia los métodos para contar o numerar las distintas configuraciones de los elementos de un conjunto, cumpliendo ciertos criterios especificados.

El campo de aplicación de la combinatoria tiene un amplio dominio en las actividades cotidianas del ser humano, el niño desde su infancia realiza actividades donde escoge algunos objetos de un total, teniendo la posibilidad de cambiar el orden de elección de estos o variar el número de objetos que toma cada vez.

A medida que el niño crece y desarrolla nuevas y complejas habilidades para crear colecciones, utiliza los métodos de conteo para tomar decisiones, tal es el caso del niño que desea decidir qué alimentos ingerirá durante el almuerzo a partir de un menú variado de alimentos nutritivos.

Es necesario hacer notar al estudiantado que la combinatoria también tiene aplicabilidad en actividades laborales, tal es el caso del proceso que sigue el director del centro educativo para distribuir las materias en un horario de clases.

También en tecnología, la combinatoria ha sido utilizada. Sirva de ejemplo la forma en que son mostrados los enlaces o videos de la página web YouTube. Este portal muestra un conjunto de videos que hacen referencia a un criterio de búsqueda especificada, pero en vista de que existe una enorme cantidad de videos, este muestra únicamente una parte de estos, seleccionando aleatoriamente pequeños subconjuntos. Al terminar la reproducción de un video, se muestra nuevamente un listado de videos, pero existe la posibilidad de que algunos aparezcan varias veces en diversos subconjuntos. A partir de esto, se formula la cuestión: ¿youtube trabaja con combinación o



Figura 1. Pierre de Fermat.

Se estima que la combinatoria surgió **en Occidente** en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal » y de Pierre **Fermat** sobre **la teoría de juegos de azar**.

Competencias por fortalecer

- Utilización de técnicas de conteo para representaciones cotidianas.
- Establecer diferencias entre permutación y complicación.

Objetivo

- Aplicar técnicas de conteo en la resolución de problemas.

Presaber

- Interpretación de resultados estadísticos.
- Dominio con operaciones de números naturales.

TECNICAS DE CONTEO

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Arreglo

Secuencia en que aparecen elementos u objetos por escoger. Para extraer de una bolsa tres bolitas de distintos colores (rojo, verde y azul) se obtienen diferentes arreglos en cada extracción.

En una primera extracción, se puede generar el arreglo.

Si las bolitas se introducen de nuevo en la bolsa, y al repetir la extracción, esta puede ser:

Ambos arreglos tienen los mismos elementos, pero la diferencia fundamental radica en el orden en que estos aparecen, y la posición que poseen en relación a los otros objetos.

Técnicas de conteo

Se les denomina técnicas de conteo a las combinaciones, permutaciones y diagrama de árbol.

Diagrama de árbol

Es una representación gráfica que muestra los resultados posibles de una serie de experimentos y sus respectivas probabilidades.

¿Qué es contar?

¿Cuántos? Es común efectuar esta pregunta cuando se desea averiguar la cantidad de elementos de una colección. Esto se efectúa asignando a cada objeto un número nominal, (correspondencia biunívoca) el último número que se menciona representa la cantidad de objetos de la colección.

El proceso que se explica en el párrafo anterior, no consiste en contar, más bien, se le llama numerar.

Numerar consiste en marcar con números una serie ordenada, enumerar se refiere a enunciar el número con que se ha marcado cada elemento de la serie, esta acción que comúnmente se efectúa para determinar el número de objetos que conforman una colección. Se comienza señalando al primer elemento y se enuncia "uno", este elemento que se ha enumerado, no se enunciará de nuevo, por lo que se señala otro elemento y se enuncia "dos", y así sucesivamente hasta enumerar todos los elementos.

Cuando se desea determinar el número de estudiantes de una sección, el número de aves en un parque o el número de canicas de un estudiante, todas estas acciones consisten en enumerar.

En cambio, cuando se hace la pregunta: ¿de cuántas formas?, ya no se pregunta únicamente el número de objetos de una colección, mas bien, se busca determinar el número de arreglos que se pueden formar con un conjunto de elementos siguiendo una condición definida. Esto nos lleva a reflexionar acerca de la profundidad y relevancia de la acción de contar. Para seguir introduciendo la idea de ¿qué es contar? Y remarcar la diferencia entre contar-numerar-enumerar, se narran en los siguientes párrafos algunas situaciones cotidianas.

En la biblioteca escolar se encuentra gran variedad de libros, si se desea saber la cantidad de libros de un estante, normalmente se procede contando de uno en uno, hasta obtener la cantidad total de elementos. En cambio, si la petición fuese conocer ¿de cuántas formas se pueden formar grupos de libros para ordenarlos en el estante?, es necesario recurrir a procesos que se explican a continuación.

Observar y analizar la situación con la siguiente aplicación:

En un estante hay tres libros, de las materias de física, química y matemática. Estos libros se ordenarán en un estante con tres espacios disponibles ¿de cuántas formas diferentes pueden ubicarse en el estante los tres libros?

Permutación

Es todo arreglo en donde interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

De este modo, si se desea ordenar las letras a, e, se obtienen los resultados.

ae y **ea**

Figura 2. Número de arreglos con dos elementos.

El orden en que aparecen las letras, determina la diferencia entre estas, así, los arreglos "ae" y "ea" son dos formas de ordenar las letras, por ello se dice que existen dos formas de ordenar las letras "a" y "e".

Si en lugar de dos elementos, se trabajase con tres, por ejemplo: para ordenar los números **1, 2 y 3** se obtienen los resultados:

1 2 3	1 3 2
2 3 1	2 1 3
3 2 1	3 1 2

Figura 3. Número de arreglos con tres elementos.

Cada uno de los arreglos, posee los elementos en diferente orden y posición. Existen seis formas distintas de ordenar los números 1, 2 y 3.

Al analizar el problema, se identifican tres elementos que se ubicarán en tres espacios, cada elemento tiene un distintivo, que corresponde a la asignatura de cada uno de los libros. La petición de la situación sugiere determinar de cuántas formas pueden ser ordenados en el estante, se sugiere ilustrar la situación mediante dibujos u objetos concretos.



Figura 4 Ilustración de libros que se mencionan en el problema.

Los libros pueden ubicarse de diversas formas, una de ellas se ilustra en la Figura 4, la complejidad de la aplicación reside en determinar el número de formas diferentes en que se pueden ordenar los libros, considerando que el orden en que estos aparecen indica un arreglo diferente.

En la Figura 5 se muestran todos los posibles arreglos que se pueden hacer con 3 libros.



Figura 5. Arreglos que se pueden hacer con tres libros.

De este modo, se identifica que con tres libros se pueden formar seis arreglos distintos, donde el orden en que aparecen los elementos en cada arreglo, sí interesa.

La situación anterior, acerca al lector al concepto de permutación.

Permutación

Es una técnica de conteo que permite conocer la cantidad de formas o arreglos que resultan al escoger un grupo de objetos de un total definido. De este modo, si de entre los colores, azul, rojo y amarillo; se escogen solamente dos de ellos, se presentan los siguientes resultados.

Combinación

Es todo arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Para los números “1”, “2”, se consideran los arreglos.

12 y **21**

A pesar de haber formado dos arreglos distintos, se ha estructurado una combinación.

Es decir, el arreglo 12 y el arreglo 21, es una sola combinación, donde el orden en que aparecen los elementos no interesa, lo que determina la combinación es la aparición de los elementos de un arreglo.

Ejemplo: cuantas combinaciones pueden estructurarse con las letras a, e, i, o, u. Tomando todas a la vez.

R/ Una sola combinación, pues, si se toman todas a la vez, los elementos que componen el arreglo serán los mismos sin importar el orden en que estos aparezcan.

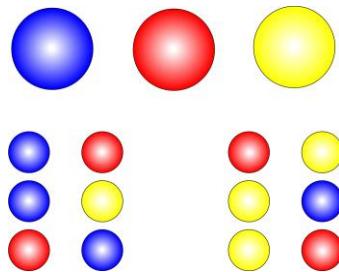


Figura 6. Número de arreglos que se pueden hacer con tres objetos tomando dos de ellos.

Observar que en el primer arreglo se observa el orden (azul, rojo), para obtener un arreglo distinto basta con cambiar el orden en que aparecen los objetos, es así como surge el arreglo (rojo, azul). Ambos arreglos son diferentes en términos de permutación puesto que el orden en que aparecen los elementos es diferente.



El número total de arreglos diferentes (en relación al orden de aparición) que se pueden formar con los colores rojo, azul y amarillo, tomando dos de ellos, son seis. Entonces la permutación de dos elementos tomados de tres es seis.

Para expresar una permutación, generalmente se hace uso de símbolos que facilitan la interpretación y representación de procesos. De este modo, para indicar la expresión “número de arreglos que se hacen con tres elementos tomando dos a dos, donde el orden en que estos aparezcan es importante” se utiliza la letra “P” para indicar la permutación, a la izquierda de esta se ubica el total de elementos y a la derecha se indica el número de elementos que se tomarán a la vez.

$${}_3P_2$$

Según el ejercicio con los círculos de color, el resultado de permutar tres colores distintos tomando dos de ellos a la vez, resulta seis, para indicar este resultado se utiliza la notación:

$${}_3P_2 = 6$$

Ahora bien, existen situaciones en las que se define con anticipación la condición de que al tomar un número definido de elementos de un conjunto de elementos, el orden de aparición de los elementos escogidos no tiene importancia, lo que interesa es que los elementos aparezcan.

La idea anterior se indica mediante la siguiente aplicación: Debido a cambios climáticos inesperados, este día amaneció con una fuerte lluvia, por lo que se presentaron al aula cinco niños. En la clase de matemática, se desea escoger cuatro integrantes para participar en una dinámica, ¿de cuantas formas diferentes se pueden escoger?

Después de leer el problema e identificar los valores conocidos y desconocidos del enunciado, se formula un plan. Para llevar a cabo el plan es necesario asignar un nombre distintivo a cada estudiante, por lo que se utilizan las primeras cuatro letras del alfabeto.

De este modo, se identifica con facilidad al niño A, B, C, D y E.

De entre estos cinco niños, se eligen cuatro y se expresa el primer arreglo:

ABCD.

Si se efectúa el segundo arreglo:

ACBD

Se observa que en ambos arreglos se utilizan los mismos elementos, en otras palabras, ambos arreglos están integrados por los mismos estudiantes, pero además de esto se identifica que el orden en que estos aparecen es diferente. Recordar que cuando se desean formar grupos de trabajo o grupos de elementos, el orden en que aparecen los elementos no es determinante para indicar si los grupos son iguales o diferentes. Si ambos grupos formados poseen los mismos elementos, entonces los grupos serán iguales, en cambio, si dos grupos difieren al menos en uno de sus elementos, entonces son considerados diferentes.

Por ello, al elegir a los estudiantes A, B, C, D y posteriormente elegir a A, C, B, D; se identifica que ambos grupos poseen los mismos elementos, y que a pesar de que el orden de los elementos difiere, los grupos siguen siendo iguales. Por ello, las combinaciones ABCD y ACBD son iguales.

ABCD es igual a **ACBD**.

Ahora bien, si en lugar de tomar a ACBD, se tomara en su lugar a ABCE.

ABCE

A pesar que los primeros tres elementos son idénticos, existe un cuarto elemento que permite establecer la diferencia entre los arreglos, en este caso se puede decir que son arreglos diferentes, ya que los elementos que los conforman son diferentes.

Las diversas formas de combinar los elementos son:

ABCD ABDE

Si al formar arreglos de elementos no interesa el lugar o

ABCE ACDE

posición que ocupan (orden de aparición), sino, nos

BCDE

interesa formar grupos y su contenido, se está en presencia

de la técnica de conteo llamada **COMBINACIÓN**.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

OBJETIVO

Estimular el pensamiento lógico del estudiantado en el análisis de situaciones cotidianas.

MATERIALES

Fichas con ilustraciones de un león, un venado, una planta, un barco y una persona.

INDICACIONES

Presentar al estudiantado el problema titulado “El león, el venado y la hierba”, que se deriva del clásico “El lobo, la oveja y la lechuga”.

Después de leer el problema, invitar a alguien a expresar lo que ha comprendido del problema. Si es necesario, leer el problema otra vez.

El grupo debe participar activamente en la resolución del problema. Se recomienda no brindar la respuesta de inmediato, y permitir que propongan estrategias de resolución.

Solucionar el problema utilizando ilustraciones que representen los personajes que se describen en el problema.

ANTES DE INICIAR

Identificar los conocimientos previos del estudiante, esto permitirá orientar el proceso educativo a la mejora de capacidades fundamentales y adecuación de las actividades.

Despertar en el estudiante la capacidad de pensamiento lógico.

Actividad 1: El león, el venado y la hierba.

Imagina que te encuentras en la selva, has atrapado un león, un venado y también has recolectado hierba medicinal. En tu camino te encuentras con un río, necesitas cruzarlo para continuar tu camino, construyes una barca con árboles caídos, pero ahora tienes un problema.

La barca solamente soporta tu peso y el de uno de los animales o la hierba que llevas, así que tendrás que cruzar el río llevando uno a la vez. Cómo podrías hacerlo, considerando que no puedes dejar el venado con la hierba, porque este se la come; pero tampoco puedes dejar el león con el venado porque el león se lo come. Cómo cruzarías el río sin que ocurran estos dos sucesos.



Figura 7. León, venado y planta medicinal.

Invitar al estudiantado, a proponer la solución del problema, que piense en alternativas o brinde ideas para abordar el problema. Leer el problema varias veces si es necesario.

SOLUCIÓN:

1. Subes a la barca, cruzas por primera vez llevando el venado, dejando en la orilla el león y la hierba sin preocuparte de lo que pueda suceder a ese lado, pues, los leones no comen hierba. (Figuras 8 y 9)



Figura 8.

RESEÑA HISTÓRICA

Se puede considerar que en Occidente la combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal y de Pierre Fermat sobre la teoría de juegos de azar.

Estos trabajos, que formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, contenían asimismo los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y así se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad.

JUEGOS DE AZAR



Figura 13. Juegos de azar.



Figura 9.

2. Dejas el venado en la orilla opuesta y vuelves solo en la barca. (figura 10)



Figura 10.

3. Subes al león en la barca y dejas la hierba, cruzas el río y en la otra orilla tienes ahora el león y el venado. (Figura 11)



Figura 11.

4. No puedes dejarlos solos porque se cumple el suceso “el león se come al venado” y no quieres que esto ocurra. Así que subes al venado a la barca, dejando solo al león, vuelves a la otra orilla, y dejas al venado ahí. (Figura 12)

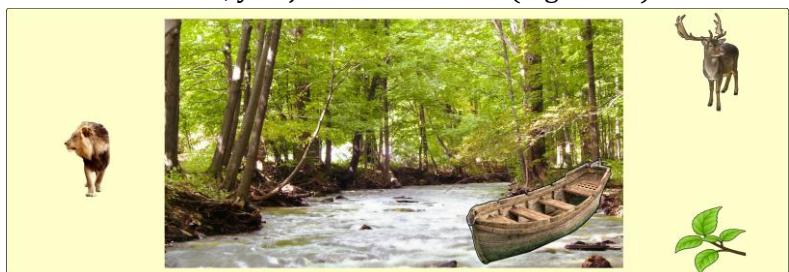


Figura 12.

5. Ahora tienes al venado con la hierba juntos, no los puedes dejar así, pues en ese caso se cumple otro suceso “el venado se come a la hierba”. Tampoco quieres que esto ocurra. Así que, subes la hierba a la barca y cruzas el río nuevamente.



Figura 14.

6. Tienes el león y la hierba juntos. Solo tienes que volver por el venado y has terminado tu travesía. (Figura 15)



Figura 15.

ACTIVIDAD DE DESARROLLO

OBJETIVO

Analizar problemas de aplicación matemática a partir de la aplicación del concepto de suceso y evento.

MATERIALES

Fichas con ilustración de lugares turísticos, culturales y balnearios.

INDICACIONES

Explicar al estudiantado lo que se entiende por suceso o evento, luego introducir el concepto de manera intuitiva mediante el análisis de problemas de aplicación.

Explicar que el suceso que implica visitar una Casa de la Cultura, el Museo Nacional o Joya de Cerén, será llamado “visitar lugar cultural”. Este suceso ocurre siempre que se opte por visitar uno de los tres lugares definidos.

Recordar que el cumplimiento de este suceso o evento se puede hacer de tres formas diferentes, y que el segundo suceso o evento solamente se desarrolla de dos formas. Esta información facilitará el análisis en futuras aplicaciones.

Invitar al estudiantado a formular problemas y definir los sucesos que ocurren en él.

Un suceso o evento se define como la ocurrencia de un acontecimiento relevante, ya sea este programado, provocado por la especie humana, o un acontecimiento natural (lluvia, terremoto, erupción volcánica).

La influencia de sucesos en la vida del hombre es indispensable, todos esperan que en algún momento ocurra un suceso o evento, por ejemplo: el estudiante espera el toque de campana para salir al recreo o dirigirse a su hogar. Al salir de la escuela, el mismo estudiante, esperará el suceso: ir a casa. En matemática, un suceso es determinado por la ocurrencia o no de una predicción previa o el cumplimiento de una condición en un problema.

Actividad 1. Aplicación de sucesos.

Un grupo de estudiantes está planeando salir de paseo a una excursión, para ello tienen tres lugares distintos: **una Casa de la Cultura, el Museo Nacional y Joya de Cerén**. Después de visitar cualquiera de los centros culturales desean divertirse en un lago, y para ello disponen del **lago de Coatepeque** y la **laguna de Olomega**. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacer el paseo?

En el problema, se identifican dos sucesos diferentes, uno de ellos es “**visitar lugar cultural**”, este suceso puede ocurrir de tres formas diferentes, pero es importante aclarar que solamente uno de ellos ocurrirá.

Sin importar qué lugar se visite, sea este la Casa de la Cultura, el Museo Nacional o Joya de Cerén, sus estudiantes estarán en presencia de un segundo suceso que se define como “**visitar lago-laguna**”, suceso puede ocurrir de dos formas diferentes, pero solo una de ellas ocurrirá.

SUCESO 1: Visitar lugar cultural.



Figura 16. Casa de la cultura, Joya de Cerén y Museo Nacional.

SUCESO 2: Visitar lago.



Figura 17. Lago de Coatepeque, Laguna de Olomega.

OBJETIVO

Determinar el número de formas en que ocurre un suceso o evento.

MATERIALES

Fichas con ilustraciones que muestren los lugares descritos en la actividad de desarrollo.

Zoológico, Museo Nacional, Joya de Cerén.

Lago de Coatepeque, Laguna de Olomega.

INDICACIONES:

Mostrar al estudiantado el esquema que se observa en la Lámina 1.

Explicar que en la primera columna (izquierda), se representan las diversas opciones que brinda el suceso “visitar lugar cultural”. Y a la derecha, las opciones del suceso “visitar balneario”.

El diagrama muestra todas las posibles opciones que pudieron ser consideradas, así, si la persona elige ir al zoológico para el cumplimiento del suceso 1, para el suceso 2 podrá elegir entre ir al Lago de Coatepeque o Laguna de Olomega.

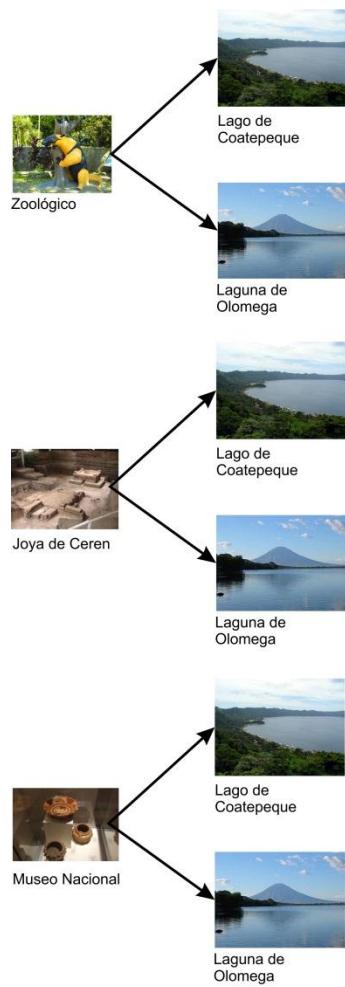
En consecuencia, el total de opciones que tienen para realizar la excursión son seis.

Actividad 2 ¿De cuántas formas?

Con la información de la actividad anterior, se obtienen diversos resultados que describen la cantidad de formas en que se puede realizar el viaje.

Para ello, visualizar e interpretar el siguiente esquema.

LÁMINA 1



Invitar a sus estudiantes a proponer problemas similares, para observar la aplicación del diagrama para la obtención de todos los posibles resultados.

Ejemplo: Para almorzar, puedo elegir entre tres platos diferentes, entre ellos: ensalada, pollo o carne de res. Pero también tengo sed, y para ello, puedo elegir entre soda, agua o jugo enlatado. ¿De cuántas formas diferentes puedo almorzar?

OBJETIVO

Adquirir la idea de permutación analizando actividades cotidianas.

MATERIALES

Fichas con ilustraciones de sillas y niños.

INDICACIONES

Leer la aplicación antes de llevarla a la práctica, es necesario comprender los pasos que se realizan y utilizar la base teórica que se muestra en la lección.

Recordar que con tres objetos se pueden hacer seis diferentes arreglos.

Ubicar las sillas al frente, de tal forma que se facilite la visibilidad para todo el estudiantado, que participará activamente en el análisis de la problemática.

Invitar a alguien para que se siente en una de las sillas, y seguir las instrucciones del paso 2.

Pegar sobre la pizarra las diferentes opciones en que se pudo sentar esa persona (ilustraciones, paso 2).

Invitar a una segunda persona a sentarse en otra de las sillas (paso 3).

Analizar cada una de las opciones, suponiendo que se va a sentar una tercera persona.

Actividad. La permutación.

Orientar al estudiantado durante el proceso de aprendizaje, dándole instrucciones claras sobre lo que este debe hacer.

Relatar el siguiente proceso y simularlo con actividades experimentales y de descubrimiento.

PROCESO:

1. Ubica al frente, tres sillas.



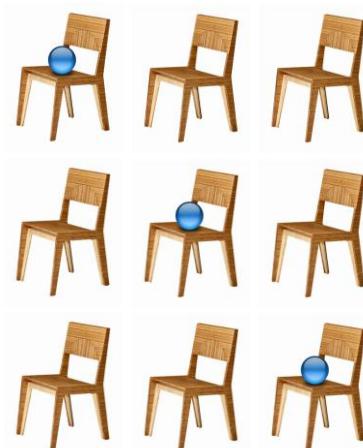
2. Pedir a alguien que se siente en cualquiera de las tres sillas.

Preguntar.

¿Cuántas opciones tienes para poder sentarte?

R/ Tres.

La niña o el niño puede sentarse en cualquiera de las tres sillas, por lo tanto, se puede sentar de tres formas diferentes teniendo tres sillas frente a él.



3. Invitar a otra niña o niño, a sentarse en las sillas restantes.

¿Cuántas opciones tienes para poder sentarte?

R/ Dos.

Es evidente que al existir dos asientos vacíos, se tengan solo dos opciones por decidir. Esta respuesta que aparece ser verdadera, es falsa.

Observar atentamente el primer caso.



Simular cada uno de los casos.

Pedir a la primera persona participante que se siente en la primera silla de la izquierda, preguntar a la segunda, de cuántas formas se podría sentar. Ilustrar este proceso pegando en la pizarra las ilustraciones que representen las dos formas de hacer la acción.

Preguntar al resto de estudiantes: ¿es la única forma de hacerlo?

Pedir ahora que la primera persona se siente en la silla de la parte media. Preguntar a la segunda, cuántas opciones tiene ahora para poder sentarse. Dirá evidentemente "dos".

Preguntar al resto de estudiantes: ¿serán dos formas diferentes de sentarse o son iguales a las anteriores? Analizarán la situación y brindarán la respuesta. Es importante que escuche las inquietudes, si es necesario explique nuevamente la problemática.

Pegar en la pizarra las ilustraciones de este segundo movimiento.

Para finalizar, presentar la última opción, que consiste en que la primera persona se siente en la silla de la derecha, y la segunda elija entre las dos sillas de la izquierda. Observar las opciones y pegar las

En esta ilustración el primer niño eligió el primer asiento, teniendo disponibles los dos asientos de la derecha, se puede tomar cualquiera de ellos.

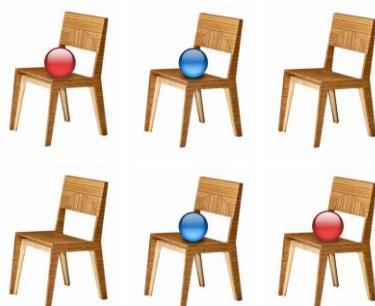


La operación se efectúa de dos formas diferentes.

Si la primera persona hubiese optado por sentarse en la posición.



De igual forma, posee dos opciones para sentarse en las sillas vacías, pero estas dos posiciones serán completamente diferentes a las utilizadas anteriormente, pues, el orden en que aparecerán los elementos serán distintos.



La operación se desarrolla de dos formas diferentes.

Si tomamos las dos formas anteriores con estas formas actuales, se tienen 4 formas en este momento.

Pero, falta analizar una última posición.



La primera niña o niño se ubica en el último asiento de la derecha, dejando disponibles dos asientos que pueden ser llenados de dos formas diferentes.

OBJETIVO

Aplicar la permutación mediante el uso de estrategias que facilitan su estudio.

MATERIALES

Fichas que contengan dibujos de casilleros.

Ilustración de las sillas y las personas que se van a sentar en ellas (dibujos).

SOLUCIÓN DE ACTIVIDAD 4

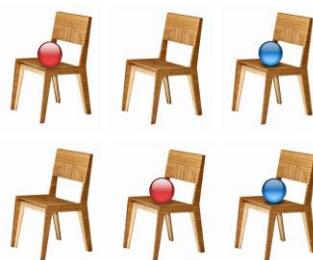
En cada uno de los asientos, se ubica una persona.

Si la primera persona llega, observa los cinco asientos y desea sentarse en uno de ellos ¿de cuántas formas diferentes puede hacer esta primera acción?

R/ Cinco.

La segunda persona se acerca y observa que uno de los asientos está ocupado, ¿cuántas opciones tiene para sentarse?

R/ Cuatro.



De esta forma, se determina el total de formas en que se pueden sentar dos niñas o niños en tres sillas, en total resultan seis. Si una tercera persona decidiera sentarse en la última silla disponible, lo que tendría que hacer es sentarse en el único espacio en las seis diferentes opciones, el resultado se mantiene. Para que tres niñas o niños se sienten en tres sillas, existen seis formas diferentes de hacerlo.

SISTEMA DE CASILLEROS

En las actividades expuestas anteriormente, se tratan problemas en los que se busca ubicar elementos u objetos en posiciones. El problema radica en saber de cuántas formas diferentes pueden ser distribuidos u ordenados, considerando que el orden en que estos aparecen importa.

Si consideramos la Actividad 2, y se usa el sistema de casilleros, la resolución se expresa de la forma:

3	2	1
Primer estudiante	Segundo estudiante	Tercer estudiante

El primer estudiante se acerca a las sillas y observa que puede elegir cualquiera de las tres para sentarse, entonces, tiene 3 formas diferentes de hacerlo, por lo que se posiciona el número "3" en la primera casilla. La segunda persona se acerca a las sillas, pero observa que uno de los asientos ha sido ocupado, tiene dos opciones diferentes para sentarse tomando en consideración la ubicación del primer estudiante, por lo que se posiciona el número "2" en la segunda casilla.

Si una tercera persona decidiese sentarse, esta observa que tiene una sola forma de hacerlo, y es llenando el espacio que queda disponible. Se escribe "1" en esa casilla. La respuesta se obtiene multiplicando los resultados de cada una de las casillas: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Actividad 4: Análisis mediante sistema de casilleros.

En la unidad de salud hay una sala de espera, donde las personas esperan a ser atendidas; en la sala se encuentran cinco asientos vacíos. En una hora determinada llegan a la unidad de salud cinco personas y deciden sentarse. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacer la distribución?

La tercera persona, observa que dos de los cinco asientos están ocupados. ¿Cuántas opciones tiene?

R/ Tres.

La cuarta persona, se acerca ¿cuántos asientos quedan vacíos?

R/ Dos.

¿De cuantas formas puede sentarse la última persona en llegar?

R/ Una.

OBJETIVO

Analizar la diferencia entre formar arreglos considerando el orden o según los elementos que lo conforman.

MATERIALES

Pintura de diversos colores.

Rojo, azul y amarillo.

Páginas de papel bond.

INDICACIONES

Formar equipos de trabajo de tres o cuatro integrantes.

Distribuir en cada equipo, pintura de tres colores primarios (rojo, azul y amarillo).

Proponer la problemática que consiste en encontrar los colores que se pueden formar combinando dos de los colores presentados.

Para la resolución de problemas, considerar que los asientos vacíos, son en realidad espacios vacíos que se pueden llenar según las indicaciones. Representar los asientos mediante casilleros.

5	4	3	2	1
Primera persona	Segunda persona	Tercera persona	Cuarta persona	Quinta persona

El número de arreglos que se pueden realizar está definido por la multiplicación de cada uno de los sucesos descritos por la elección de asientos de cada persona:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Actividad 5: Combinando colores.

Descripción: Brindar a sus estudiantes pintura de colores (rojo, azul y amarillo) y una página de papel. Plantear el siguiente problema.

Cuántos colores diferentes puedes formar utilizando los colores rojo, azul y amarillo, si combinas dos a la vez.



Resultados:



Figura 18. Combinaciones de colores.

Observar que si se combinan los colores rojo y azul, se obtiene el color morado o violeta. El mismo resultado se observa al mezclar los mismos colores en diferente orden, es decir azul con rojo.

Se interpreta que el orden en que aparecen estos colores no interesa, lo importante es el resultado que brindan y su existencia en la combinación.

Efectos similares se identifican con las combinaciones de rojo con amarillo, cuya resultante es el color naranja; y la combinación de azul con amarillo, obteniendo el color verde.

No presentar el concepto de combinación, solo mencionar la palabra y observar la interpretación o idea que poseen los estudiantes.

Permitir a sus estudiantes experimentar con las diversas formas de combinar los colores, y que analicen a partir de los colores resultantes, el número de arreglos que se pueden formar en vista de la condición de la actividad.

En conclusión, una combinación se define como la acción de formar arreglos de elementos donde no interesa el lugar o posición que ocupan (orden de aparición), sino formar grupos y el contenido de los mismos.

GUÍA DE TRABAJO

Resolver las aplicaciones. Utilizar diagrama de árbol para ejemplificar los procesos y comprobar mediante el principio de la multiplicación.

1. José está planeando unas vacaciones. El puede ir al mar, o a un río. Para llegar a estos lugares, lo puede hacer abordando un bus o un tren. Además, al llegar a cualquiera de los lugares, puede hospedarse en un hotel, casa de huéspedes o un motel. Teniendo en cuenta estas opciones, ¿de cuántas formas diferentes puede hacer el viaje José?
2. Esteban compra una nueva patineta. Para ello, puede elegir las siguientes opciones: El tablero puede ser de color marrón o rojo, las ruedas pueden ser de color amarillo o naranja. La calcomanía sobre la tabla puede ser un oso, una estrella o un león. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir las características de la patineta?
3. Carlos está esperando la hora del almuerzo, pero está pensando en lo que desea comer. Él puede decidir entre sándwich o ensalada de huevo. Además, puede tomar un jugo de naranja, jugo de manzana, gaseosa o agua. ¿Cuántos arreglos diferentes puede hacer Carlos para hacer su almuerzo?

Referencias bibliográficas

1. Brousseau, G. (1986) *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7, N° 2, págs. 33-115. Traducción al español por Centeno, J.; Melendo, B.; Murillo, R.
2. Instituto Tecnológico de Chihuahua. (2010). Probabilidad y Estadística. Recuperado septiembre 14, 2012, a partir de <http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/amarillo.htm>
3. Estadística para todos. (2008). Recuperado septiembre 10, 2011, a partir de http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_combi.html

Conozcamos la Probabilidad

Introducción del tema

El estudio de la probabilidad es un tema que ha sido discutido durante mucho tiempo por matemáticos destacados. En vista de que la probabilidad está ligada a un sinfín de situaciones naturales y producto de la actividad humana, se ha considerado la probabilidad como una rama de la matemática a la que le compete el estudio de ocurrencia o no ocurrencia de experimentos aleatorios y deterministas.

Los experimentos aleatorios son muy difíciles de predecir, pero con ayuda de algoritmos y técnicas es posible analizar situaciones y estimar opciones viables y beneficiosas ante la toma de decisiones.

Es necesario considerar que la probabilidad no busca asegurar la ocurrencia o no ocurrencia de eventos, más bien, está interesada en brindar datos numéricos que orienten a la estimación de resultados. Mediante la probabilidad es posible pronosticar o deducir el éxito de un experimento.

En la presente lección se brinda un acercamiento inicial al estudio de la probabilidad tomando en consideración actividades donde se motive al estudiante a utilizar conceptos matemáticos para explicar situaciones cotidianas y de fácil experimentación como el lanzamiento de un dado o de una moneda y la extracción de bolitas de entre un conjunto de diversos colores.

Se busca que cada estudiante analice diversas situaciones y que comprenda la aplicabilidad de la probabilidad, así también que sepa diferenciar entre experimentos deterministas y aleatorios, y sobre todo, que comprenda los diversos conceptos que se utilizan, que sea capaz de responder a las interrogantes: ¿Qué es un experimento aleatorio? ¿Qué es un espacio muestral? ¿Cómo definir eventos o sucesos? ¿Cómo calcular la probabilidad?



Figura 1. Retrato de Pierre Simon Laplace, nació el 23 de marzo de 1749 en París y murió el 5 de marzo de 1827, fue astrónomo, físico y matemático. Es reconocido en matemática por sus importantes aportaciones en el estudio de la probabilidad.

Competencias por fortalecer

- Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones.
- Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.

Objetivo específico

- Utilizar la probabilidad para estimar la confiabilidad o no confiabilidad de sucesos.

Presaber

- Conceptualización y dominio de Técnicas de conteo.
- Elaboración y análisis de gráficos estadísticos.

PROBABILIDAD

VOCABULARIO CLAVE

Experimento aleatorio

Se refiere a toda acción cuyo resultado no puede predecirse con certeza.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios se identifican en los juegos de azar, entre estos cabe mencionar: lanzamiento de dados, lanzamiento de una moneda, extracción de una bolita blanca de entre un conjunto de bolitas rojas, amarillas, verdes y blancas.

Espacio muestral

Son los diferentes resultados que pueden darse en un experimento aleatorio.

Cuando se lanza un dado, el resultado de este experimento depende de la cara que se visualice cuando este caiga, para ello se tienen seis diferentes opciones representadas por las caras numeradas del 1 al 6.

De este modo, el espacio muestral de lanzar un dado es:



$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suceso o evento

Un suceso o evento es una ocurrencia que se deriva de un

Las actividades que desarrolla el ser humano en su continua interactividad con su entorno, muestra situaciones naturales y artificiales donde es difícil estimar la posibilidad de ocurrencia de eventos. En Matemática, al estudio de eventos o sucesos y el grado de ocurrencia de unos sobre otros, se denomina probabilidad. Decimos que algo es probable cuando sin efectuar el experimento se estima el resultado que se podría obtener.

Utilizamos la palabra probabilidad cuando no hay certeza de que un suceso o evento ocurra; por ejemplo, cuando observamos al cielo y hay indicios de lluvia, decimos: "Es probable que llueva". Para el "lloverá hoy" solo existen dos posibles resultados, uno de ellos es "sí lloverá" y el otro "no lloverá". La probabilidad de ocurrencia de ambos eventos depende de factores climatológicos. Se elige uno de los sucesos según indicios que orienten a la ocurrencia o no ocurrencia de los eventos. De este modo, es erróneo asegurar que sucederá uno de los dos eventos, la veracidad de alguna de las dos proposiciones (lloverá o no lloverá) se ve demostrada hasta que uno de los dos eventos ocurre.

La probabilidad se encarga de asignar un valor numérico a la incertidumbre de ocurrencia o no ocurrencia, ayudando a emitir un juicio o tomar decisiones, pero es indispensable mencionar que un evento, aunque fuese poco probable que ocurra, siempre existe la posibilidad de que este suceda.

¿Qué es un experimento?

Se denomina experimento a los métodos usados por la ciencia, para comprobar empíricamente una hipótesis propuesta previamente. Un experimento debe desarrollarse teniendo en cuenta que los resultados obtenidos aceptarán o rechazarán la hipótesis inicial.

Cuando se lleva a cabo un experimento y se repite varias veces para observar los cambios en los resultados, se debe asegurar que todas las repeticiones se hagan en las mismas condiciones, evitando de forma significativa cualquier intervención artificial que pueda alterar los resultados.

Clasificación de los experimentos

Atendiendo a los resultados que se obtienen a raíz de un experimento y las condiciones en que este se desarrolla, se identifican dos clases. Aquellos experimentos en que sin importar la cantidad de veces que se repitan, ocurren siempre de igual forma, brindando en consecuencia, el mismo resultado, estos experimentos se denominan **deterministas**. En caso contrario, si al repetir un experimento, el resultado no está definido, y cada vez que se realiza está propenso a cambiar, estos se denominan **experimentos aleatorios**.

También es conocido como subconjunto de un espacio muestral. Un espacio muestral puede subdividirse en diversos subconjuntos que posean algún elemento común (solapados) o no posean elemento alguno en común (excluyentes).

Cuando el espacio muestral está compuesto por dos subconjuntos definidos por eventos excluyentes, al unir ambos subconjuntos se obtiene el espacio muestral y los subconjuntos son complementarios.

Para el experimento “lanzar una moneda al aire”, este es un experimento aleatorio, porque no se sabe exactamente de qué manera ocurrirá.

El espacio muestral de este experimento es.

$$S = \{\text{cara, número}\}$$

Para este experimento, se consideran los siguientes sucesos.

La moneda cae al suelo. Este suceso describe una acción que ocurrirá siempre, por lo tanto se denomina **suceso seguro**.

La moneda cae cara, al lanzar la moneda, al caer mostrará una de sus caras. El éxito de este evento radica en la ocurrencia del mismo, y se le denomina **evento condicional**.

La moneda cae cara y número, una moneda cae de dos formas diferentes, cara o número, el suceso “cara y número” no ocurre nunca, por lo tanto, se llama **suceso imposible**.

Experimento determinista

Estos experimentos tienen presencia en aplicaciones de Física, como arrojar un objeto y medir su aceleración, o dejar caer un objeto desde la misma altura y medir el tiempo que tarda en llegar al suelo.



Figura 2. Ejemplos de experimentos deterministas, caída libre y aceleración de un proyectil.

Experimento aleatorio.

Son los experimentos en los que no se sabe con exactitud el resultado que se obtendrá al final del proceso, no importa el número de veces que se realice el experimento, el grado de incertidumbre de los diversos resultados que se pueden obtener, será el mismo. Algunos ejemplos se relacionan con los juegos de azar, entre estos: lanzamiento de dados, lotería, juego de cartas.



Figura 3. Ejemplos de experimentos aleatorios (juegos de azar).

La definición de experimento aleatorio que comúnmente utiliza toda persona, literalmente dice: “Experimento aleatorio, es todo aquello que no se sabe exactamente de qué manera ocurrirá”, el concepto es muy evidente, pero es necesario analizar el impacto que este tiene en la persona.

En el entorno del ser humano ocurren diversas situaciones, sucesos o eventos, que no se puede predecir con exactitud qué resultará, puesto que, a pesar de que se repiten constantemente, los resultados que arrojan no obedecen un patrón definido, mas bien, están gobernados por el azar.

Cuando se lanza una moneda al aire, se extrae una ficha numerada de entre un total de 9 numeradas del 1 al 9, inclusive cuando se desea estimar el éxito en una prueba objetiva, se está en presencia de experimentos aleatorios, donde se conocen los posibles resultados, pero se desconoce lo que se obtendrá al efectuar el experimento.

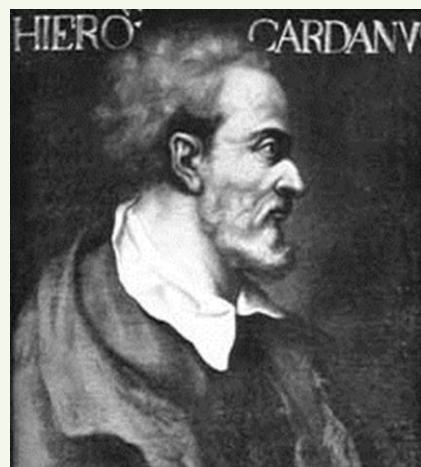
DESARROLLO DE LA LECCIÓN

RESEÑA HISTÓRICA

Los primeros pasos en la teoría de las probabilidades fueron dados por el matemático y médico italiano Jerónimo Cardano (1501-1576). Se dice que Cardano era un jugador y que inclusive algunas veces estuvo en la cárcel a causa de sus trampas y pillerías.

Él decidió que si iba a usar su tiempo en juegos de azar, aprovecharía para aplicar la matemática y así sacaría provecho de su pasatiempo.

Procedió a estudiar las probabilidades de ganar en varios juegos de azar y publicó sus reflexiones de la materia en su libro *"Liber De Ludo Aleae"* (El libro de los juegos de azar). "Este libro es un manual del jugador, en el cual se enseña a hacer trampas lo mismo que a descubrirlas".



ANTES DE INICIAR

Objetivo

Identificar conocimientos previos en el estudiante, esto permitirá orientar el proceso educativo a la mejora de capacidades fundamentales y adecuación de las actividades.

Materiales

Bolitas negras, blancas y azules (cinco de cada color)

Un cubo.

Dados.

Monedas.

Actividad 1. Analiza los siguientes enunciados y clasifícalos en los criterios: **Imposible, cierto, posible, probable, poco probable.**

1. Sacar una bolita negra de una caja con tres bolitas blancas y dos azules.
2. Si te acercas al fuego, te quemas.
3. Un cubo tiene seis caras.
4. Ir al planeta Júpiter con mi familia y nadar en sus lagos.
5. Aprobar la materia de matemática.

Actividad 2. Espacio muestral.

Analizar sucesos y plantear posibles resultados, simbolizar estos con la letra S (Espacio muestral).

Suceso 1. Lanzar un dado.

Desarrollar el experimento "lanzamiento de un dado". Después de realizar cuatro o cinco lanzamientos, preguntar al estudiantado los resultados que se obtienen. Invitar a que identifiquen los posibles resultados y a escribirlos utilizando la notación de espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Explicar que el espacio muestral representa todos los posibles resultados de un experimento.

Suceso 2. Lanzamiento de una moneda.

¿Qué resultados se obtienen al lanzar una moneda? Llamar a uno de los lados "cara" y al otro "número"; o "águila" y "cara".

$$S = \{\text{cara; número}\}$$

Suceso 3. Extracción de bolitas.

Introducir en una bolsa bolitas de color (negro, blanco y azul), determinar el espacio muestral si se extrae una bolita a la vez. Y si se extraen dos. Repetir el proceso para la extracción de tres bolitas.

ACTIVIDAD DE DESARROLLO

Objetivo

Promover situaciones donde el estudiantado esté en presencia de experimentos aleatorios controlados, y formalice una concepción de probabilidad mediante el uso de un juego recreativo.

Materiales

Lámina 1: Búsqueda del tesoro.

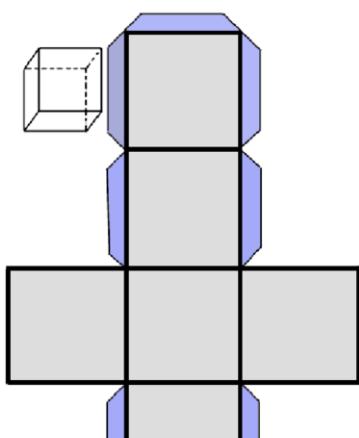
Dados.

Fichas de colores (verde, azul, amarillo y rojo).

Indicaciones

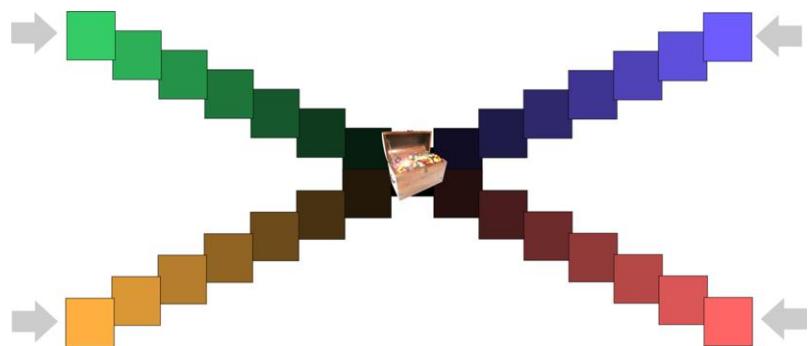
Elaborar un tablero que contenga la ilustración de la lámina 1 sobre una página de papel o cartón, brindar el material para que los estudiantes recorten o dibujen la ilustración.

Para esta actividad se necesitan dados con tamaño considerable, que facilite la visibilidad de todos los estudiantes, para elaborar dados utilizar el esquema que se muestra en la figura 5.



Actividad 3: Juego recreativo.

Lámina 1. Búsqueda del tesoro



Proceso.

1. Invitar a sus estudiantes a formar equipos de dos, tres o cuatro integrantes.
2. Facilitar a cada equipo un dado, y un tablero que contenga la ilustración que se muestra en la Lámina 1. Brindar a cada estudiante una ficha de color, el color de la ficha corresponde al camino que tomará en el tablero.

Reglas del juego

1. Cada jugador o jugadora tendrá que ubicar su ficha sobre la flecha que ese encuentra en cada uno de los cuatro extremos del tablero, este será el punto de partida.
2. Para elegir a la persona que inicia la partida, cada quien lanzará el dado una vez y quien obtenga el mayor puntaje inicia. Seguirá la persona que logre el segundo mejor puntaje, de tal forma que la persona que obtuvo el menor puntaje será la última en cada turno.
3. Cada persona tiene derecho a un lanzamiento por turno, y antes de lanzar el dado tendrá que predecir el resultado. Si acierta, repite el proceso en un segundo lanzamiento, y así sucesivamente hasta que falle en su predicción. Se sumarán todos los resultados y moverá la ficha según indique la cantidad. Si la suma de los resultados resulta ser mayor que 8, entonces moverá la ficha ocho unidades llegando al cofre del tesoro, y los movimientos restantes los realizará en dirección contraria.

Objetivo

Comprender la probabilidad mediante la aplicación de técnicas empíricas.

Materiales

Bolsa de papel o caja.

Canicas o tarjetas de diversos colores tres rojas, tres azules y tres amarillas.

Ficha de recolección de información.

Amarillo		
Rojo		
Azul		

Indicaciones

En la segunda parte de la actividad, al introducir una bolita más al experimento, siendo esta de color amarillo, condiciona un aumento de confiabilidad hacia ese color, es decir, cada estudiante interpretará que entre más elementos tenga de un color, entonces es más probable sacar ese color en la extracción.

En el paso 5, la respuesta de sus estudiantes estará orientada en el color amarillo.

En el paso 8, considerar que, a pesar que el color amarillo tenga mayor cantidad de elementos, esto no asegura que la bolita extraída será de ese color ¿por qué?

Actividad 4. Análisis empírico de probabilidad.



Figura 6. Experimento aleatorio.

Proceso

1. Introducir en una bolsa, tres bolitas, de diferentes colores: azul, rojo y amarillo.
2. Indicar a sus estudiantes que a continuación se extraerá una bolita al azar. Preguntar el color de la bolita que creen que saldrá. Tratarán de adivinar.
3. Extraer la bolita y anotar el resultado en la ficha de recolección de información, mediante una marca.
4. Introducir la bolita en la bolsa y repetir el proceso. (repetir 15 veces)
5. Efectuar un conteo de las marcas de la tabla y en la tercera columna indicar el número de veces que se extrajo cada una de las bolitas en el experimento aleatorio.
6. Observar los resultados de la ficha. Representar estos utilizando gráficos de barras o pictogramas. Analizar los resultados y brindar conclusiones.

Cambiar las condiciones del experimento, introduciendo en la bolsa dos bolitas amarillas, una roja y una azul.



Figura 7. Experimento aleatorio, dos bolitas amarillas.

7. Preguntar a sus estudiantes qué bolita creen que saldrá cuando se realice el experimento (escuchar los argumentos que proponen).
8. Extraer una bolita y observar el resultado.
9. Anotar los resultados en la ficha de recolección de información. Introducir la bolita a la bolsa y repetir el proceso de extracción.

Indicaciones

En el paso 9 se observará que el estudiantado, en su mayoría, ha elegido el color amarillo, pocos de ellos escogerán rojo o azul.

Paso 11: el gráfico de barras o pictograma, permite presentar la información de forma creativa y comprensible.

Paso 12: dado que el experimento que se está realizando es aleatorio, recordar que no se sabe exactamente la bolita que saldrá al extraer una de ellas.

Con estas preguntas, se pretende que cada estudiante analice las consecuencias de la probabilidad.

Permitir la expresión oral y argumentación al responder las preguntas.

En los casos anteriores, aunque se tuviese una cantidad mayor de bolitas amarillas que bolitas azules o rojas, estas aparecían, por lo que aseguraba que podrían ser extraídas.

10. Observar la ficha, y graficar los resultados mediante gráficos de barras o pictogramas. Analizar los resultados y brindar conclusiones.

Agregar una bolita amarilla al experimento.

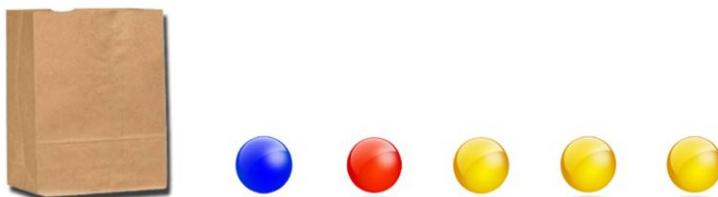


Figura 8. Experimento aleatorio, tres bolitas amarillas.

11. Preguntar nuevamente a sus estudiantes el color de la bolita que consideran saldrá, al sacar una bolita al azar.
12. Preguntar: ¿por qué creen que el color amarillo será seleccionado en la extracción?
13. Extraer la bolita y anotar los resultados en la ficha de recolección de información. Repetir este proceso y anotar cada resultado en la ficha. Elaborar un gráfico de barras con la información, analizarlo y brindar conclusiones.
14. Explicar que a pesar que el color amarillo posee más elementos, esto no garantiza que saldrá el color amarillo exclusivamente. Mientras existan las bolitas roja o azul, sin importar que existan únicamente una de ellas, estas bolitas podrían ser extraídas.

Proponer las siguientes interrogantes.

¿Qué sucedería si se agregasen 40 bolitas amarillas en la bolsa?

R/ Sería más confiable elegir en la predicción que se extraerá bolita amarilla.

¿Crees que es posible que se extraigan las bolitas azul o roja?

R/ Sí.

¿Qué sucedería si en lugar de agregar 40 bolitas amarillas, se agregasen 100 de ellas?

R/ La confianza aumentaría.

¿Es posible extraer bolita azul o roja?

R/ Sí, mientras las bolitas sigan ahí, pueden ser extraídas.

Analizar la siguiente situación.

Si en una bolsa se introducen tres bolitas amarillas, ¿es posible extraer bolita roja?

Objetivo

Cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un suceso o evento.

Materiales

Monedas.

Ficha de recolección de resultados.

Indicaciones

Orientar al estudiantado en relación con la actividad.

Repetir el experimento diez veces y al final cuantificar los resultados obtenidos por cada opción “cara o número”.

A partir de los resultados estimar la probabilidad de ocurrencia de los eventos.

A. Caiga cara.

B. Caiga número.

Analizar la ocurrencia de los eventos si en lugar de repetir el experimento 10 veces, este se repitiese 100 veces.

A partir de los procesos y resultados, deducir que el concepto clásico de probabilidad se define como el cociente de los casos favorables y los casos posibles...

Actividad 5. El juego de la moneda.**Descripción**

Cuantificar la probabilidad mediante la aplicación del juego de la moneda.

El juego de la moneda consiste en lanzar una moneda un número definido de veces, a continuación observar, cuántas veces resultó “cara” y cuántas veces resultó “número”.



número o águila

Figura 9. Posibles resultados de lanzar una moneda.

Según los resultados obtenidos por cada lanzamiento, se llenará la siguiente tabla, con una marca o puntito en el lugar correspondiente.

Así, si en el primer lanzamiento resulta “cara”, se marca la casilla “cara”. Si en el segundo lanzamiento resulta número o águila, entonces se marca la casilla correspondiente.

Tabla 1. Registro de resultados que se obtienen a partir del lanzamiento de una moneda.

No. de lanzamiento			No. de lanzamiento		
Lanzamiento 1			Lanzamiento 1	x	
Lanzamiento 2			Lanzamiento 2		x
Lanzamiento 3			Lanzamiento 3		
Lanzamiento 4			Lanzamiento 4		
Lanzamiento 5			Lanzamiento 5		
Lanzamiento 6			Lanzamiento 6		
Lanzamiento 7			Lanzamiento 7		
Lanzamiento 8			Lanzamiento 8		
Lanzamiento 9			Lanzamiento 9		
Lanzamiento 10			Lanzamiento 10		

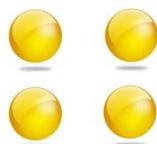
Proceso

1. Invitar a una persona del grupo a lanzar la moneda. Según el resultado obtenido, llenar la ficha.
2. Realizar los diez lanzamientos, y para cada respuesta asignar una marca a la ficha. Al finalizar la actividad, cuantificar y brindar resultados.
3. En los resultados se identifica aquel que se repitió más veces. Para conocer la probabilidad, basta con dividir el número de veces que se repitió un resultado y dividir esto entre el número de veces que se efectuó el experimento.

$$\text{Ej: } 5/10 = 0.5$$

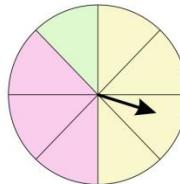
1. Clasifica los siguientes elementos como: Ciento, probable, poco probable, imposible.

Si introduces en una bolsa las bolitas que se muestran en la ilustración ¿es posible extraer una bolita amarilla?



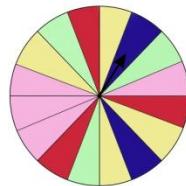
Cierto.
Probable.
Poco probable.
Imposible.

Es probable que la ruleta caiga en el sector azul.



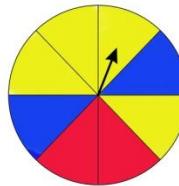
Cierto.
Probable.
Poco probable.
Imposible.

Es probable que la ruleta caiga en un sector de color azul.



Cierto.
Probable.
Poco probable.
Imposible.

Es probable que la ruleta caiga en un sector de color amarillo.



Cierto.
Probable.
Poco probable.
Imposible.

2. Analiza las siguientes afirmaciones.

Si seleccionas una canica al azar, ¿Qué color tiene menor probabilidad de ser elegido?



Verde.
Azul.
Son igualmente probables.

Si seleccionas una canica al azar, ¿Qué color tiene mayor probabilidad de ser elegido?



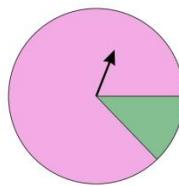
Verde.
Rojo.
Son igualmente probables.

Si seleccionas una canica al azar, ¿Qué color tiene menor probabilidad de ser elegido?



Purpura.
Naranja.
Son igualmente probables.

¿Qué color es más probable de ser seleccionado al girar la ruleta?



Rosado.
Verde.
Son igualmente probables

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Peyton, Z & Pebbles, Jr. (1987), *Probability, Random Variables, and Random signal principles*, second edition, Universidad de Florida.
2. Vélez, I. (2002) *Apuntes de Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración*, Facultad de Ingeniería Industrial, Politécnico Grancolobiano.
3. Stock.xchng (2001-2009) Imágenes e ilustraciones tomadas de: <http://www.sxc.hu/photo>
4. Ximenez C. Probabilidad y definiciones, artículo matemático.
5. Zylberberg, D. (2004), *Probabilidad y estadística*, artículo matemático.

Sumemos ángulos internos

Descripción de la lección

La Geometría es la herramienta matemática que modela el espacio que percibimos, entre estos las rectas paralelas y perpendiculares, círculos, cuadrados, rectángulos que son modelos teóricos de objetos.

Encontramos en nuestro entorno, el desarrollo de la geometría a partir de que entes tan elementales como el punto y la recta, que son por hoy uno de los más grandes logros del razonamiento humano.

La geometría nos permite entrar en formas de pensamiento avanzado, ya que trabaja con objetos, permitiendo desarrollar nuestro intelecto.

En esta lección trabajaremos con uno de los componentes más importantes de la geometría como son los ángulos interiores de una figura geométrica, que fortalecerá en cada estudiante el razonamiento deductivo, y nos permitirá clasificarlos y manipularlos.



Figura 1. Centro Escolar Planes de La Laguna en el municipio de Santa Ana, departamento de Santa Ana. En cada ventana y cada puerta, se encuentran figuras geométricas con sus respectivos ángulos.

Competencias por fortalecer

- Analiza y reflexiona los ángulos interiores en un triángulo y cuadrilátero, así como también demuestra las propiedades de ello.

Objetivos

- Demostrar y analizar los casos de la suma de los ángulos interiores en triángulo y en un cuadrilátero.
- Encontrar el ángulo desconocido conociendo dos o tres de ellos.

Presaber

- Segmentos.
- Triángulos.
- Cuadriláteros.

Vocabulario Clave

Ángulo interno: Es un ángulo formado por dos lados de un polígono que comparten un extremo común y que está contenido dentro del polígono.

Polígono convexo: Un polígono es convexo si todos sus ángulos interiores son menores de 180° .

Polígono cóncavo: Un polígono es convexo si todos sus ángulos interiores son menores de 180° .

Alfabeto Griego: El alfabeto griego es un alfabeto utilizado para escribir sólo la lengua griega. En Latinoamérica se utiliza para designar los ángulos de los polígonos.

Tabla 1. Alfabeto griego

Mayúscula	Minúscula	Nombre
A	α	Alfa
B	β	Beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	ny
Ξ	ξ	xi
O	\omicron	omicron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ipsilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Conocimiento que tú como docente debes saber

En geometría, un ángulo interior o ángulo interno es un ángulo formado por dos lados de un polígono que comparten un extremo común y que está contenido dentro del polígono. Un polígono simple tiene exactamente un ángulo interno por cada vértice.

Si todos los ángulos interiores de un polígono miden no más de 180 grados, el polígono se clasifica como polígono convexo. Si todos los ángulos interiores de un polígono convexo son iguales, el polígono es un polígono regular. En caso contrario el polígono es un polígono irregular.

Es importante decir que los ángulos interiores están relacionados con los polígonos, y que podemos encontrar uno de los ángulos internos de un polígono, conociendo los demás ángulos de dicho polígono.

Por ejemplo si el polígono es un triángulo, y conocemos dos de sus ángulos podemos encontrar el tercer lado conociendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , en un cuadrilátero que es una figura de cuatro lados en la que la suma de sus ángulos interiores suman 360° , conociendo tres se puede encontrar el cuarto ángulo, en esta lección solamente trabajaremos con los ángulos interiores de los triángulos y los cuadriláteros.

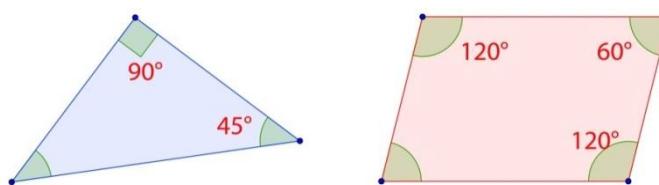


Figura 2. Polígonos de tres y cuatro lados

Estas son dos de las figuras tratar, con los ángulos interiores, sin embargo, sabemos que hay clasificaciones de triángulos y cuadriláteros, los cuales siguen cumpliendo que su suma de ángulos interiores es 180° y 360° respectivamente.

En cuarto grado mostramos mediante recortes la propiedad “La suma de ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° ”, de la misma manera podemos demostrarlo para un cuadrilátero.

De esta manera con una suma de algunos ángulos interiores, y con un valor desconocido se podrá conocer un tercer o cuarto ángulo.

Los niños y niñas en esta etapa ya son capaces de analizar y comprender diferentes conceptos, además de aprender sobre los ángulos internos, se utilizará las letras griegas para designar ángulos. Se presentarán las letras básicas como lo son α , β , γ , θ (alfa, beta, gamma y teta) que son las más utilizadas, aunque se les debe mencionar que las letras griegas utilizadas, no son las únicas ya que así como el castellano, tiene 27 letras del alfabeto, lo mismo sucede con el alfabeto griego.

Explicación de la actividad

El docente explorará conocimientos previos entre sus estudiantes, e introducirá la terminología y el uso de las letras griegas mediante la aplicación del juego de formar parejas.

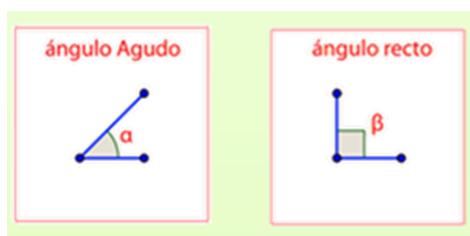


Figura 3. Fichas que elaborarán los estudiantes para representar los ángulos agudos y rectos.

Se pretende, además, recordar el uso y manejo del instrumento de medición llamado transportador y la clasificación de los ángulos.

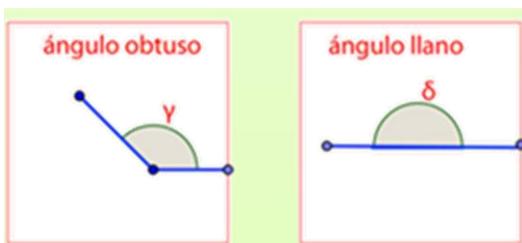


Figura 4. Fichas que elaborarán los estudiantes para representar los ángulos obtusos y llanos

Actividad 1. Conocimientos previos.

Objetivo

Realizar un diagnóstico de conocimientos sobre ángulos, tanto en medición como clasificación; utilizando los símbolos griegos.

Materiales

Cuatro tarjetas de ficheros rotuladas al inicio de la ficha, por cada estudiante.

Transportador.

Lápiz o bolígrafos.

Indicaciones

Las tarjetas deben ir rotuladas para el total de estudiantes: "ángulos obtusos", "ángulos agudos", "ángulo recto", "ángulo llano"; luego repartir cuatro tarjetas por cada estudiante.

Formar equipos de tres integrantes y pedirle a cada estudiante que utilice el lápiz y el transportador, para hacer los cuatro ángulos en las fichas proporcionadas con sus respectivos nombres, es decir, en la ficha que diga agudo, deben dibujar el ángulo que fuese agudo, obtuso, recto y llano.

Cada docente debe explicar la escritura de las letras griegas, y dar la indicación que usarán las más conocidas que son α , β , γ , δ . Dos integrantes del equipo escribirán las letras descritas anteriormente y una persona del equipo las designará con las letras ε , θ , μ , ρ para luego realizar el siguiente juego.

Luego que cada estudiante haya realizado individualmente las cuatro figuras, se pasará a realizar el juego de formar parejas.

Se colocará las tarjetas boca abajo de cada dibujo y tratarán de identificar los que contengan el mismo ángulo.

Sugerencia metodológica

Con esta actividad se pretende que cada estudiante utilice la definición de ángulos interiores de un triángulo, que recuerde la demostración de la suma de ángulos interiores, finalmente que analice el caso de la suma de los ángulos exteriores con el fin de manejar los conceptos de ángulos y propiedades.

Además, es importante que al realizar conjeturas se haga valoraciones sobre estas, recordando que una conjetura puede ser válida siempre que se demuestre esa veracidad y que para probar que es falsa, basta encontrar un contraejemplo.

Las discusiones de equipo permitirán discutir en plenaria la comparación de resultados entre pares, esta discusión permitirá a los equipos ver cuáles de las conjeturas pueden llegar a convertirse en teoremas y cuáles son descartables.

El personal docente debe estar preparado para encontrar en muchas ocasiones la demostración de los resultados, para el caso que la conjetura sea válida, o mostrar contraejemplos. Cuando se conoce que una conjetura es falsa, es muy importante considerar que en muchas ocasiones se deberá establecer los resultados a través de la experimentación.

Actividad 2. Conozcamos ángulos interiores en un triángulo.

Objetivo

Identificar los ángulos en un triángulo y verificar a qué equivale la suma de sus ángulos interiores.

Materiales

Hojas de papel.

Cuadernos de trabajo.

Indicaciones

a) Dibuja en una hoja de papel grueso un triángulo PRQ cualquiera y recórtalo.

1. Úsalo como molde para dibujar otro triángulo PRQ igual en tu cuaderno.

2. Ponle letras a los vértices del triángulo dibujado y las representaciones simbólicas en letras griegas en los ángulos del triángulo de papel.

Rompe en tres pedazos el triángulo de papel de modo que cada trozo contenga uno de los ángulos y pega los trozos en tu cuaderno, uno a continuación del otro, haciendo coincidir los vértices de los ángulos, como muestra la figura 5.

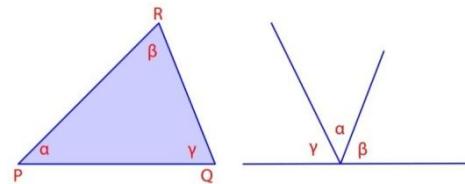


Figura 5. Suma de ángulos interiores de un triángulo.

b) Responde e

+ On tu cuaderno:

1. La suma de los ángulos interiores del triángulo PQR, ¿a cuántos ángulos rectos equivale?

2. Compara tu respuesta con las de otras personas y escribe en tu carpeta una conclusión general.

c) ¿Crees que es verdadero o falso que en cualquier triángulo PRQ el ángulo exterior φ con vértice en Q es igual a la suma de los ángulos interiores α y β ?

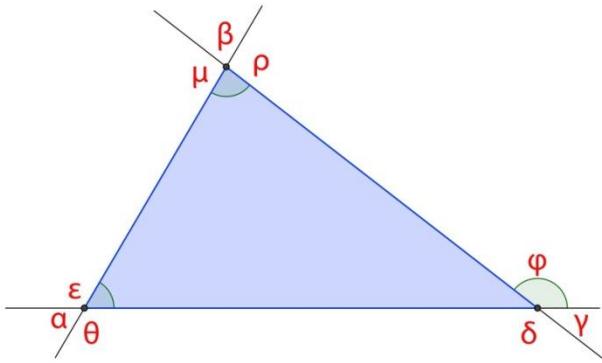


Figura 6. Ángulos externos a un triángulo

1. Para comprobarlo, dibuja el triángulo en una hoja y recórtalo. Usa el recurso de romper en tres trozos el triángulo recortado como hiciste en la parte a) de esta actividad y de esta manera compara la suma de los ángulos interiores α y β con el ángulo exterior en φ .

2. Haz lo mismo con los otros ángulos exteriores y repite la exploración con dos o más triángulos diferentes.

Luego se comparará el trabajo realizado con las otras personas del grupo.

3. Pega en tu cuaderno las figuras con las que trabajaste en esta actividad, en el orden que quieras; luego copia y completa el texto siguiente:

En cualquier triángulo, uno de sus ángulos exteriores es equivalente a la suma de _____

Actividad 3. Encontremos ángulos internos de un triángulo a partir de la medida de los otros dos.

Objetivo

Encontrar un ángulo interno de un triángulo, conociendo dos de ellos, utilizando los símbolos griegos.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Pizarra.

Regla.

Transportador.

Indicaciones

Reunir al grupo de estudiantes en equipos de tres integrantes y proporcionar los siguientes triángulos o dibujarlos en la pizarra para continuar con el estudio de los ángulos interiores.

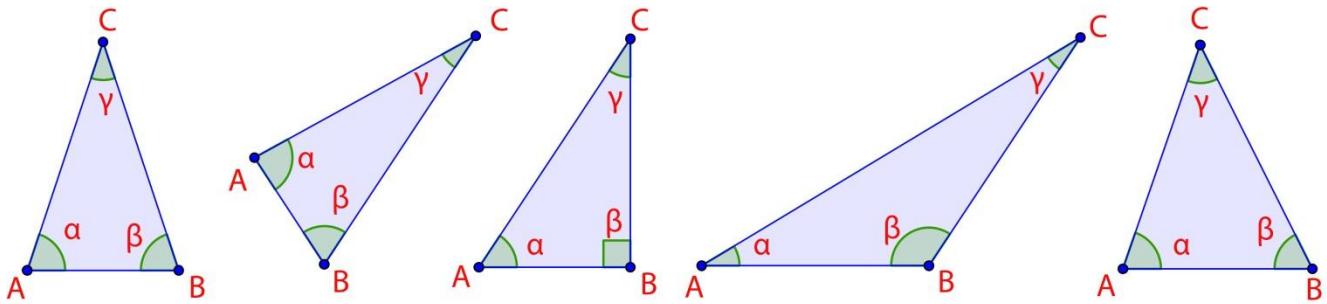


Figura 7. Triángulos con sus respectivos ángulos.

Como siguiente indicación se les dirá en el primer triángulo se tendrá que $\alpha = \beta = 75^\circ$ ¿cuál es el valor de γ ? La solución resulta ser entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ así $\gamma = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Caso similar los otros cuatro casos.

En el segundo triángulo se tiene que Sí $\beta = 75^\circ$, $\alpha = 80^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo γ ?

En el tercero de $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 30^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo α ?

En el cuarto sí $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo α ?

En el quinto sí $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo β ?

Así las soluciones deberán ser las siguientes

$30^\circ; 25^\circ; 60^\circ; 50^\circ; 80^\circ$.

Sugerencia metodológica

De ser necesario, puedes proporcionar más ejemplos para que se trabajen con el grupo de estudiantes, e incluso llegar a una discusión en plenaria, para que cada estudiante pueda analizar los resultados y verificar que, no importando la posición de los triángulos, la clasificación de estos por sus lados, si son isósceles, rectángulos o equiláteros, el resultado de la suma de los ángulos interiores siempre es 180° . La utilización de las letras griegas también las puedes cambiar de manera que se apliquen las más comunes y las no muy comunes para ampliar el conocimiento del lenguaje matemático.

Sabías que...

Gauss utilizó un equipo de topografía, para medir exactamente, el triángulo que forman en Alemania los montes Brocken, Hohehagen e Inselberg (1821-1823).



Figura 10. Representación de medición en topografía.

Gauss midió los ángulos de un triángulo con vértices en las cimas de tres montañas y encontró que la suma no difería de 180° dentro de la exactitud de sus medidas.

Sugerencia metodológica

Se recomienda que no se le explique al estudiantado cuáles son los cortes o los trazos que deben realizar, de esta manera podrán descubrir y argumentar, cuales son los cortes necesarios para la realización de la comprobación de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° .

Pueden pasar al frente a dos estudiantes para ver cómo lo han hecho y si ha surgido una nueva forma interesante de comprobarlo.

Actividad 4: Conozcamos la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero.

Objetivo

Analizar que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° .

Materiales

Páginas de colores.

Regla.

Lápiz.

Tijeras.

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que elabore en la página de color la figura de un cuadrilátero y que pinte con colores diferentes los cuatro ángulos del cuadrilátero, luego que los recorten como se muestra en la Figura 8 o en la Figura 9, y con esos recortes digan si pueden demostrar que la suma de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero mide 360° .

Hay dos formas de verificarlo:

La primera es que realicen el corte en cuatro partes y luego comprobar que forman el valor de 360° es decir lo que mide una vuelta entera de la circunferencia.

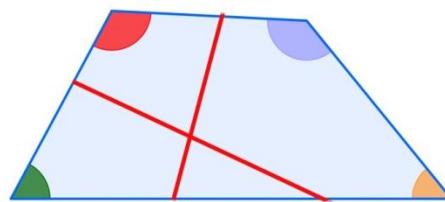


Figura 8. Cortes para verificar que el cuadrilátero sus ángulos interiores son 360° .

Y la segunda, simplemente trazar una línea para formar dos triángulos y como sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y se formaron 2 triángulos entonces la suma de los dos es

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

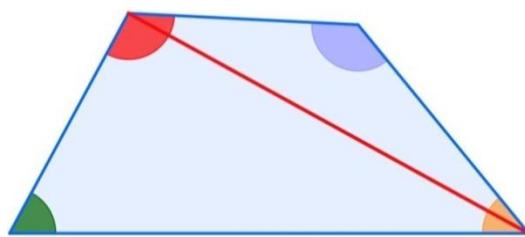


Figura 9. Trazo de una línea diagonal para formar dos triángulos y verificar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

Sabías que...

Un polígono es convexo si es un polígono en el que todos los ángulos interiores miden menos de 180 grados y todas sus diagonales son interiores.

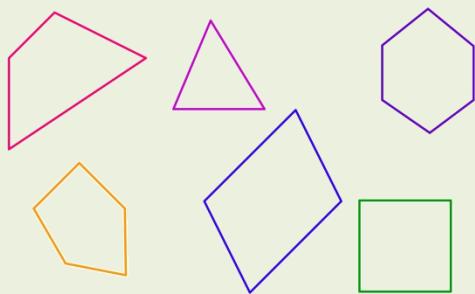


Figura 11. Polígonos convexos.

Y se llaman cóncavos si algunos de sus ángulos interiores miden más de 180° .

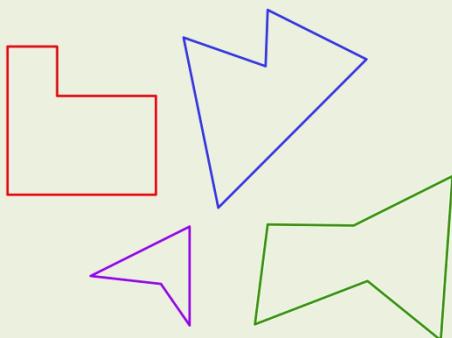


Figura 12. Polígonos cóncavos.

Como los triángulos y los cuadriláteros son polígonos de tres y cuatro lados respectivamente, en los triángulos son convexos siempre, pero en los cuadriláteros puede variar, es decir, pueden ser cóncavos o convexos.

Actividad 4. Encontremos el cuarto ángulo de un cuadrilátero si ya se conocen tres.

Objetivo

Identificar un cuarto ángulo de un cuadrilátero cuando ya se conocen tres de ellos.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Regla.

Pizarra.

Transportador.

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que se reúna en equipos de tres integrantes.

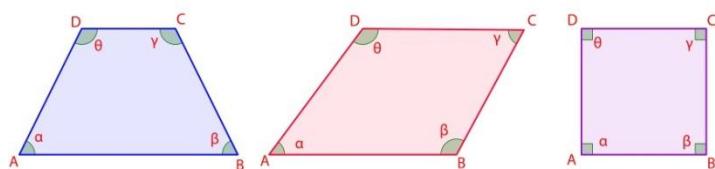


Figura 13. Cuadriláteros.

Luego pedirles que dibujen en su cuaderno los cuadriláteros con los siguientes valores para realizar ejercicios, de manera que practiquen encontrar uno de los cuatro ángulos desconocidos.

Sí $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo θ ?

Pueden utilizar las reglas y el transportador para comprobar tus resultados.

En las otras dos figuras de cuadriláteros, se proponen los siguientes tres valores para encontrar el cuarto.

1) $\gamma = 50^\circ$ $\alpha = 70^\circ$, $\theta = 120^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo β ?

2) $\beta = 90^\circ$ $\gamma = 90^\circ$, $\theta = 90^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo α ?

En equipo deben discutir las soluciones y la construcción de cada uno de los cuadriláteros utilizando los instrumentos de medición.

De ser necesario puedes colocar más ejercicios de este tipo y trabajar con ellos en plenaria. También el uso de las letras griegas es importante.

Actividad 6. Diferentes figuras convexas y cóncavas en el entorno.

Objetivo

Identificar polígonos convexos y cóncavos en el entorno.

Materiales

Papel.

Lápices de colores.

Indicaciones

Pedir al grupo que se reúna en equipos de cinco integrantes, y luego que cada equipo salga fuera del salón de clases y visualice alrededor del salón, cuadriláteros que se vean convexos o cóncavos, según las figuras que proporcionaste para diferenciar las figuras convexas de las cóncavas.

Por ejemplos los portones de la escuela,
la forma de las lámparas, las paredes del salón, etc.

Luego regresará al salón y con el equipo
dibujarán los objetos encontrados y los clasificarán
como convексos o cóncavos.



Figura 14. Entorno de una escuela.

Observación:

En esta actividad se pretende que además que cada estudiante forme el lenguaje de convexo y cóncavo, utilice los ángulos interiores en estos para su clasificación. El dibujar les dará una idea de la utilización de las figuras en el entorno.

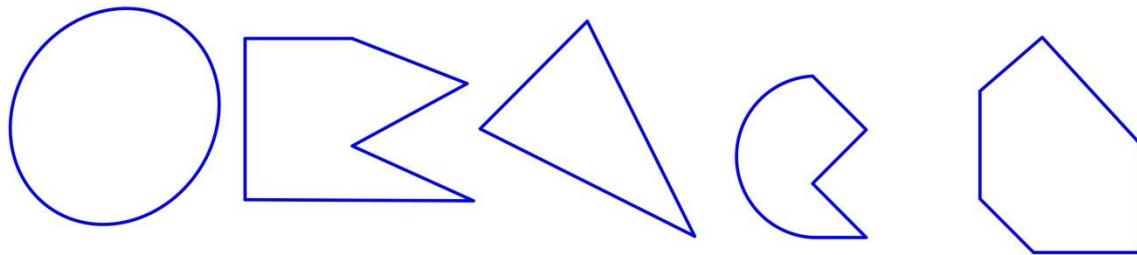
Actividad de Evaluación

Objetivo: Retroalimentar los conocimientos adquiridos sobre ángulos.

1. Construye un cuadrilátero con las medidas de $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; ¿cuánto mide el ángulo θ ?
2. Clasifica los siguientes objetos en cuadriláteros convexos y cóncavos:
 - Pizarra.
 - Computadora, mesa del escritorio.
 - El portón de la escuela.

HOJA DE EJERCICIOS

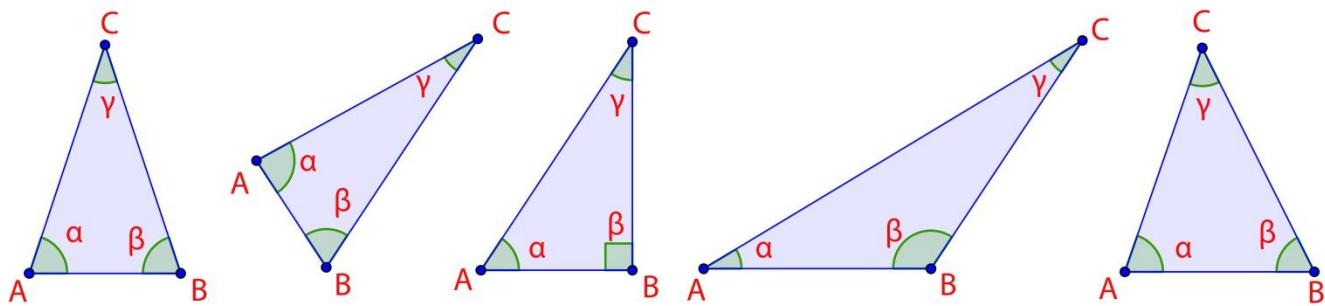
1. Menciona de qué otra forma puedes decir si una figura es convexa o cóncava, averígualo y con la respuesta que encuentres identifica en las siguientes figuras si son convexas o cóncavas. Clasifícalas.



2. Si el ángulo $\alpha = 25^\circ$ y el ángulo $\beta = 120^\circ$ ¿cuánto mide el ángulo γ ? Dibuja el triángulo utilizando el transportador para comprobar que tu respuesta sea la correcta.

3. De los siguientes triángulos encuentra cuánto es el valor del ángulo exterior a α sabiendo que

- $\beta = 80^\circ$ y $\gamma = 20^\circ$
- $\beta = 60^\circ$ y $\gamma = 10^\circ$
- $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 30^\circ$
- $\beta = 110^\circ$ y $\gamma = 35^\circ$
- $\beta = 70^\circ$ y $\gamma = 50^\circ$



Referencias bibliográficas

1. Aguilar, P. (2005), *Mecánica*, Volumen 1, segunda Edición, Editorial Reverte, S.A., España, Universidad de Valencia. Pág. XXI.
2. Cuadriláteros, Ceibal (2009) recuperado 2 de diciembre de 2011, a partir de http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/cuadrilateros/qu_son_los_cuadrilateros.html

Ángulos entre dos líneas

Introducción del tema:

Los grandes filósofos tenían la cosmovisión del universo y mediante este discernían para sus discursos, se pensaba que la tierra era plana y la matemática se construyó con base en esta idea. Fue Euclides quien nos da la idea de dos planos "x" y "y".

Este concepto cambió a la geometría esférica, es decir, vivimos en un espacio de cuatro dimensiones y no solo es el plano sino el espacio y el tiempo. De ahí que hay que estar conscientes de el mundo no es un cuadro hecho solo con paralelogramos, pues existen ángulos diferentes a los de 90 grados, mayores o menores, que tienen también una importancia sustantiva.

Desde colocar una escalera en una inclinación para que la persona que sube no se caiga, así como en la construcción de edificios, existen características de ángulos entre líneas, ya sean adyacentes, complementarios, suplementarios, etc.

Es por ello que los ángulos se involucran en cada una de nuestras vidas, incluso para construcción de los planos que nos orientan para llegar a un determinado lugar.



Figura 1. Calles de Armenia, Sonsonate, El Salvador. Fotografía capturada de Google

Competencias por fortalecer

- Comprende e interpreta las clases de ángulos formados entre líneas.

Objetivos

- Comprender las clases de ángulos y las parejas de ángulos que se forman entre líneas.
- Utilizar las herramientas necesarias para la medición de ángulos, interpretando el porqué son complementarios o suplementarios.

Presaberes

- Operaciones básicas con números naturales.
- Ángulos, alfabeto griego.

Observación

En caso de que tengamos más de un ángulo con el mismo vértice, utilizamos letras minúsculas o números para que quede claro a qué ángulo nos referimos.

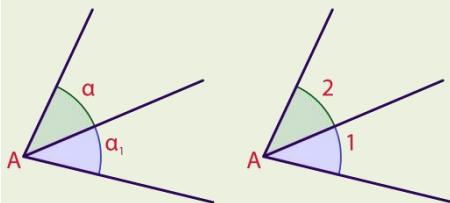


Figura 4. Maneras de representar ángulos entre un vértice.

Si dos rectas secantes forman cuatro ángulos iguales, las rectas se denominan perpendiculares, y cada uno de los ángulos es un ángulo recto.

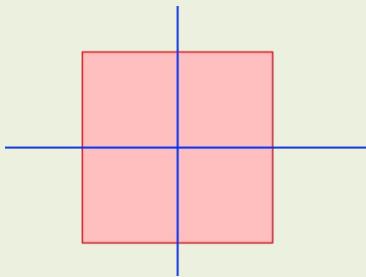


Figura 5. Rectas secantes formando ángulos rectos.

La unidad de medida de ángulos más habitual es la que denominamos grado. Su símbolo es “°”.

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Un ángulo es la región del plano determinada por dos semirrectas con el mismo origen. Este origen común, el punto A, es el vértice del ángulo. Las dos semirrectas son los lados del ángulo.

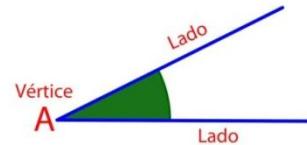


Figura 2. Representación de un ángulo.

Habitualmente un ángulo se designa con la letra de su vértice. Sin embargo, también podemos utilizar las letras del alfabeto griego.

Pero si cruzamos rectas a las cuales llamaremos rectas secantes se forman ángulos entre esas líneas.

Las rectas r y s de la figura son rectas secantes, y dividen el plano en cuatro regiones. Cada una de estas cuatro regiones es un ángulo.

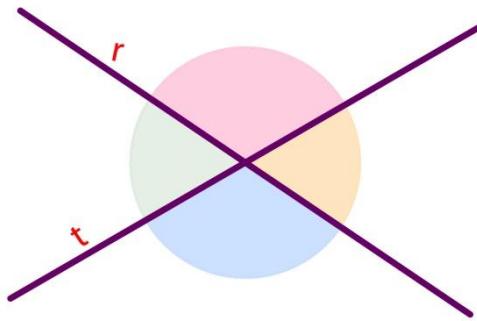


Figura 3. Rectas secantes, las cuales forman cuatro ángulos.

La medida de un ángulo se denomina amplitud.

Para medir un ángulo hay que compararlo con otro que se toma como unidad.

Por ejemplo, una unidad de medida de los ángulos puede ser el ángulo recto.

El ángulo como giro

Imagina una semirrecta con origen en el punto P. Si la hacemos girar manteniendo fijo este punto, la semirrecta recorre una zona del plano durante su movimiento.

Si en un determinado momento paramos el movimiento de giro de la semirrecta, la zona del plano recorrida está limitada por las posiciones inicial y final de la semirrecta.

Figura 6. Giros de la semirrecta desde el lado inicial al lado final en sentido contrario a las agujas del reloj.

Un ángulo es la región del plano que barre una semirrecta al girar alrededor de su origen, el punto P. El ángulo está determinado por la posición inicial y final de la semirrecta.

El giro se puede realizar en dos sentidos y cada sentido nos define un ángulo. Indicando el sentido del giro mediante un arco de circunferencia orientado, ya tendremos claro a qué ángulo nos referimos.

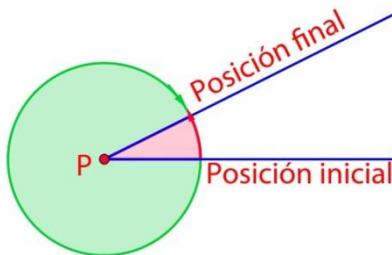


Figura 7. Giros desde la posición inicial en sentido contrario a las agujas del reloj o en sentido a las agujas del reloj.

De los dos ángulos posibles, el menor se denomina convexo pues es un ángulo menor a 180° y el mayor se denomina cóncavo por ser un ángulo mayor de 180° .

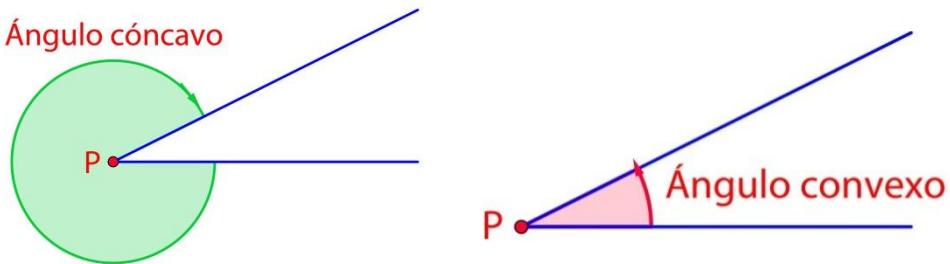
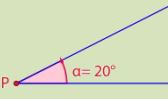
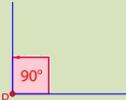
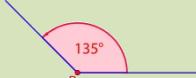
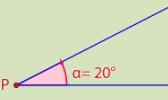
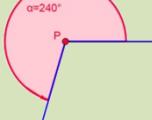
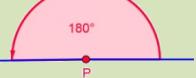
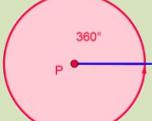


Figura 8. Ángulo cóncavo y ángulo convexo.

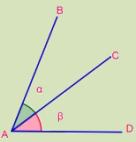
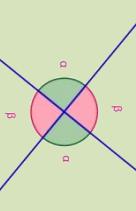
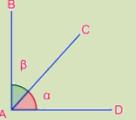
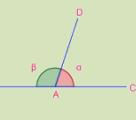
Los tipos de ángulos se clasifican en la Tabla 1 según la amplitud de cada uno de ellos.

Tabla 1. Tipos de ángulos según la abertura de cada uno de ellos.

TIPOS DE ÁNGULOS		
Tipos	Aberturas de los ángulos	figuras
Agudo	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Recto	$A = 90^\circ$	
Obtuso	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
Convexo	$0^\circ < \alpha < 180^\circ$	
Cóncavo	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Llano	$\alpha = 180^\circ$	
Completo	$\alpha = 360^\circ$	

Los ángulos tambien se pueden clasificar en pares, así como se muestra en la tabla 2 que se te presenta a continuación.

Tabla 2. Parejas de ángulos formados por líneas.

PAREJAS DE ÁNGULOS		
Ángulos adyacentes	Son ángulos que tienen un lado en común y el mismo vértice.	
Ángulos opuestos por el vértice	Dos líneas secantes que se cortan, generan ángulos opuestos por el vértice. Bien son adyacentes o congruentes.	
Ángulos complementarios	Es un tipo especial de ángulo adyacente cuya particularidad es que suman 90°.	
Ángulos suplementarios	Es un tipo especial de ángulo adyacente cuya particularidad es que suman 180°.	

Dos ángulos de lados paralelos o compartidos son iguales si los dos son agudos o los dos son obtusos. Si uno es agudo y el otro es obtuso, son suplementarios.

Actividad 1: Conocimientos previos.

Objetivo

Encontrar ángulos como región en el plano.

Materiales

Mapa de ubicación.

Pizarra.

Cuaderno de trabajo.

Indicaciones

Presentar un mapa de ubicación de un lugar. Este mapa corresponde a una zona del centro de San Salvador.



Figura 9. Mapa del centro de San Salvador.

- a) Cada estudiante debe buscar en el plano que aparece en la figura, dos calles o avenidas paralelas y dos calles o avenidas que se corten. Dibujará en su cuaderno de trabajo y especificará lo siguiente:

 - ✓ Nombra con a y b las rectas paralelas, con c y d las que se cortan y que desde ahora llamarás rectas secantes.
 - ✓ Expresa simbólicamente $a \parallel b$ (a es paralela a b), $c \perp d$ (c es secante con d). Las rectas secantes se cortan en un punto; nombra el punto con una letra mayúscula.

b) Busca en el plano dos avenidas que sean secantes y dibuja en tu cuaderno de trabajo las rectas que las representan.

 - ✓ Como todas las rectas que has dibujado están en el mismo plano, se las llama **coplanares**.
 - ✓ Dibuja, ahora, varias rectas coplanares, y muéstrasela a otra persona del grupo y que indique pares de rectas paralelas y pares de rectas secantes.
 - ✓ Nómbralas con letras y escribe las relaciones utilizando símbolos.

Sabías que...

Los camaleones pueden mover los ojos independientemente, lo cual les brinda una visión de casi 360º con un pequeño punto ciego tras la cabeza.



Figura 11. Foto de un camaleón.

La visión humana en el plano horizontal abarca algo más de 180º, y en el plano vertical unos 130º.



Figura 12. Ojo humano.

Actividad 2: Ángulos entre rectas secantes.

Objetivo

Determinar ángulos entre rectas secantes.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Hoja de papel.

Indicaciones

Cada estudiante tomará una hoja de papel, la doblará en dos partes. Luego la volverá a doblar de modo que coincidan los bordes del primer doblez.

Luego abrirá la hoja y observará las líneas que han quedado marcadas. Para verlas mejor, se deberá pasar un lápiz sobre ellas.

Luego analiza lo siguiente:

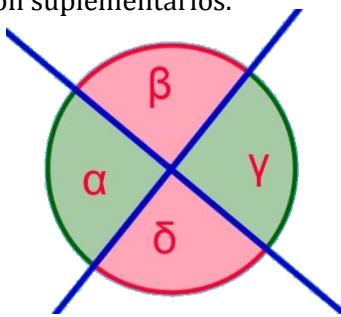
- ✓ Observa los ángulos que determinaron esas dos rectas al cortarse y compáralos. ¿Qué observas?
R/ Seguramente verás que son congruentes.
- ✓ Nombrar a cada ángulo con letras griegas: α (alfa), β (beta), γ (gamma) y δ (delta) e indicá en símbolos esa congruencia.

R/ Esta solución dependerá de la ubicación que se le dé a cada uno de los cuatro ángulos formados por las líneas.
Así, una de las soluciones puede ser:

$$\alpha = \gamma \quad \beta = \delta$$

- ✓ Indica, de acuerdo con su amplitud, qué tipo de ángulos son los que se han formado.

R/ Son ángulos adyacentes, opuestos por el vértice y también son suplementarios.



Sugerencia metodológica

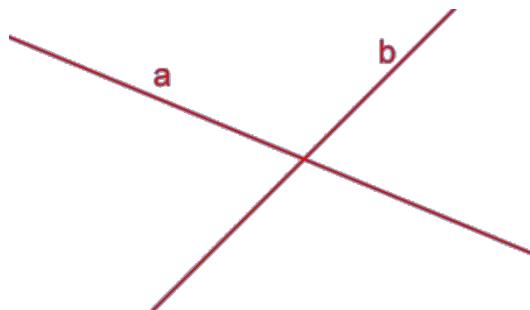


Figura 13. Rectas secantes.

En esta actividad continuarán estudiando las rectas. Ya se vio que dos rectas del plano pueden ser paralelas o secantes y que las rectas perpendiculares son un caso particular de las rectas secantes.

Ahora se desea que conozcan los conceptos de adyacentes, complementarios y suplementarios.

De ser necesario, puede realizar la actividad en pareja, para fomentar el diálogo y la cooperación en el aula.

Se pueden proporcionar otros ejemplos, además del uso del transportador para comprobar que los ángulos son complementarios, suplementarios o adyacentes.

Actividad 3: Ángulos entre rectas secantes.

Objetivo

Analizar los casos de manipulación de variables en el área de geometría.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Pizarra.

Lápices de colores.

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que dibuje dos rectas secantes no perpendiculares. Nombrarlas con letras minúsculas, y con una letra mayúscula, el punto en que ellas se cortan.

- ✓ Estas rectas determinan varios ángulos. ¿Cuántos son? Para ayudarte usa lápices de colores.
- ✓ Entre ellos habrás encontrado pares de ángulos que tienen un lado común y en los que los otros dos son semirrectas opuestas. A estos ángulos se les llama **adyacentes**.
- ✓ Copia en tu cuaderno de trabajo la Figura 13. Obsérvala y señala un par de ángulos adyacentes.
- ✓ Que se nombren con letras griegas y se sumen gráficamente. ¿Qué tipo de ángulo has obtenido como suma? Expresa en símbolos la suma que realizaste.
- ✓ Realizar lo mismo con otro par de ángulos adyacentes y escribir en tu cuaderno de trabajo la conclusión a la que llegaron y comentar en plenaria con los compañeros y el docente.

Lee esta información y luego responde las consignas en tu cuaderno de trabajo.

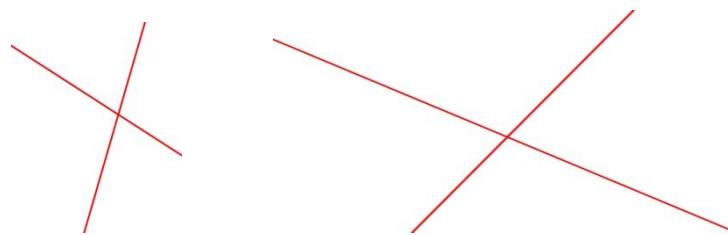
- ✓ Dos ángulos son suplementarios cuando su suma es un ángulo llano.
 - ✓ Dos ángulos son complementarios cuando su suma es un ángulo recto.
- a) De acuerdo con las afirmaciones anteriores, ¿qué propiedad tienen los ángulos adyacentes?
 - b) Como la amplitud de un ángulo llano es de 180° , si la suma de las amplitudes de dos ángulos es 180° , uno de ellos es el **suplemento** del otro. Elige un ángulo de la figura 12 e indica cuál es su suplemento.
 - c) Piensa y escribe en tu cuaderno de trabajo: ¿cuándo un ángulo es el **complemento** de otro? Compara tu respuesta con las de tus compañeros.

HOJA DE EJERCICIOS

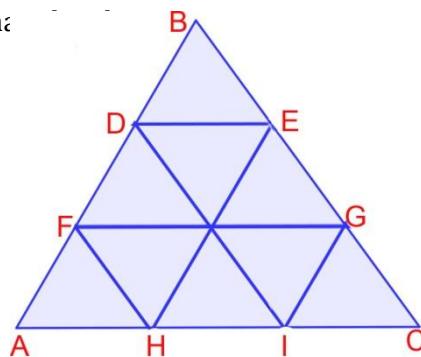
1. Responde las siguientes preguntas y justifica tus respuestas.

- ✓ Si la amplitud es de 45° , ¿cuál es la de su suplemento?, ¿y la de su complemento?
- ✓ Si la amplitud es de 120° , ¿cuál es la de su suplemento?
- ✓ Si el ángulo es nulo, ¿cuál es su suplemento? ¿Y su complemento?
- ✓ ¿Cuándo dos ángulos suplementarios son congruentes?

2. Dibuja pares de rectas como las siguientes.



- ✓ Compara los ángulos que se han formado en cada figura y marca con un color los ángulos congruentes.
 - ✓ Elige pares de ángulos que están en un mismo semiplano respecto de cada recta. ¿Cuánto suman esos pares de ángulos?
 - ✓ Si se movieran las rectas, ¿qué pasaría con los ángulos que antes eran congruentes? ¿Y con los ángulos que antes sumaban 180° ? Compruébalo dibujando otras rectas.
 - ✓ Explica por qué la relación entre los ángulos se mantiene, aunque las rectas se muevan y por consiguiente cambien las amplitudes de los ángulos.
3. Construye ángulos complementarios, suplementarios, adyacentes y opuestos por el vértice con la característica de que $\alpha = 20^\circ + \beta$ es decir que el ángulo de alfa tenga que ser 20° mayor que beta.
4. En este triángulo ABC hay más triángulos y también cuadriláteros. Escribe el nombre correspondiente a cada uno sabiendo que $AC // FG // DE$; $AB // EH // IG$; $BC // DI // FH$. Marca con un color todos los ángulos correspondientes con el ángulo A y señala las paralelas y la secante que h:



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ángulos y medidas sexagesimales, (s.f.)recuperado 14 de diciembre de 2011, a partir de <http://www.mcgraw-hill.es/bcv/guide/capitulo/8448177169.pdf>
2. Godino, J. (2003). *Matemática y su didáctica para maestros*, Proyecto Edumat-Maestros
3. Angulos y posiciones relativas, (s.f.), recuperado 14 de diciembre de 2011, a partir de <http://www.encuentro.gov.ar/Gallery/3783.pdf>

Referencias de imágenes

1. Figura 11: Tomado de morguefile <http://www.morguefile.com/archive/display/121130>

Encontremos figuras simétricas

Introducción del tema:

La simetría es una de las características más observables en la naturaleza, desde las hojas de los árboles, pasando por utensilios creados por el ser humano, hasta las formas microscópicas muestran esta cualidad.

La simetría ha motivado por mucho tiempo al estudio de propiedades que permitan fundamentar en matemática la existencia de las figuras y formas simétricas, convirtiéndose en un conocimiento primordial para formular los criterios de semejanza y congruencia entre figuras geométricas.

Para comprender qué es simetría, basta con observar nuestro rostro en un espejo o visualizar el reflejo de árboles y volcanes en lagos. La simetría está presente inclusive en la forma de los planetas y las órbitas que estos describen en relación a estrellas. La Tierra, la Luna y los demás planetas del sistema solar, describen una órbita elíptica alrededor del sol, esta órbita posee dos ejes de simetría: horizontal y vertical.

Con la aplicación de esta lección en la formación docente y en el salón de clases, se busca que tanto el personal docente como el estudiantado identifiquen la simetría en diversas circunstancias, así también, que sean capaces de identificar los diversos tipos de simetría y establecer claras diferencias entre estos.

Además, se estudia en qué consiste la reflexión de la luz, relacionando de este modo la temática con el estudio de



Figura 1. Cristal de hielo. Los cristales de hielo presentan un tipo de simetría llamado simetría radial, los cristales de hielo siempre se forman mostrando figuras hexagonales. Las formas que pueden adoptar son infinitas, pero todas estas formas tienen una característica en común, la simetría.

Competencias por fortalecer

- Predecir y describir los resultados de reflejar y trasladar figuras de dos dimensiones.
- Identificar y describir la simetría axial y simetría radial en figuras del entorno.

Objetivo específico

- Identificar la simetría en una figura o entre dos figuras a partir del eje de simetría interno o externo, utilizando este conocimiento en el trazo de figuras que se encuentren en objetos del entorno.

Presaber

- Triángulos, cuadriláteros y circunferencias.
- Líneas paralelas y

SIMETRÍA

VOCABULARIO CLAVE

Simetría axial

La simetría axial se da cuando dos puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría.

Además, las distancias existentes entre los puntos de la figura original son iguales que las distancias entre los puntos de la figura simétrica.

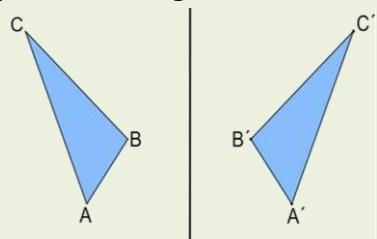


Figura 2. Simetría axial.

Simetría bilateral

Es una de las representaciones más reconocidas en la naturaleza, se encuentra en animales y plantas, también es conocida como simetría de reflexión.



Figura 3. Simetría bilateral en insectos.

La simetría es una idea fundamental de la naturaleza, el arte y la ciencia. Es un concepto asociado con la belleza y la perfección. La más evidente de las simetrías está relacionada con simetrías geométricas de figuras y cuerpos, de hecho, una de las representaciones más reconocidas y observadas, es la simetría que es producto del reflejo.



Figura 4. Simetría en la naturaleza, laguna de Olomega.

Es común observar sobre el agua, un leve reflejo de objetos y construcciones que se encuentran en la superficie, es una de las más brillantes representaciones de la naturaleza.

Este efecto es explicado, utilizando espejos y distancias de la forma siguiente: Si se toma, por ejemplo, un rectángulo y se traza una línea recta como la que se muestra en la figura 5, se observa que a ambos lados de la línea, y a la misma distancia de ella, se encuentran partes correspondientes del rectángulo.

Esta línea se dice que es un **eje de simetría** del rectángulo. Pensando en esta línea como el borde de un espejo plano que se coloca perpendicularmente al plano de la figura, observar que la imagen reflejada en el espejo completará la figura original. De aquí viene el nombre de **simetría especular**.

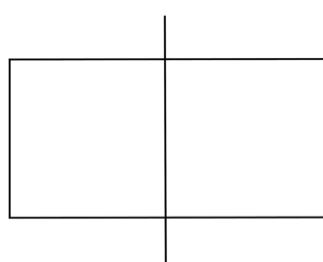


Figura 5. Simetría especular.

La persona relaciona comúnmente la simetría con la belleza. La

Eje de simetría

Un eje de simetría es una línea imaginaria que al dividir una forma cualquiera, lo hace en dos partes cuyos puntos opuestos son equidistantes entre sí, es decir, quedan simétricos.



Figura 6. La simetría en nuestro entorno.

Simetría radial

Permite que objetos giren en relación al centro, haciendo que estos siempre se vean igual.



Figura 7. Algunos ejemplos de simetría radial.



Figura 8. Simetría en arquitectura.

Prácticamente todos los objetos de uso común como platos, vasos, aparatos electrodomésticos, etc., poseen simetría bilateral, no tan solo por razones prácticas, sino también estéticas.

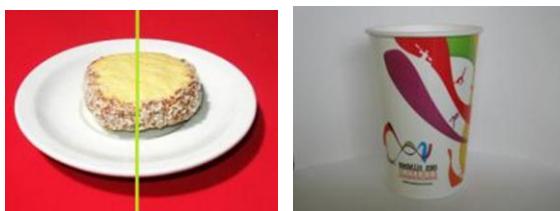


Figura 9. Simetría en objetos de uso cotidiano.

En culturas antiguas y de diversas regiones, la influencia de la simetría en utensilios tradicionales, es mostrada mediante las diversas interpretaciones y construcciones artesanales de la época.



Figura 10. Simetría en hallazgos arqueológicos.

Los antiguos griegos consideraron al círculo y a la esfera como los objetos más perfectos en dos y tres dimensiones, respectivamente. Esto se debe a que el círculo es simétrico respecto a cualquier línea recta que pase por su centro. La concepción divina del universo hizo suponer que los cuerpos celestes eran perfectos, teniendo forma esférica y girando en órbitas en forma de circunferencia.

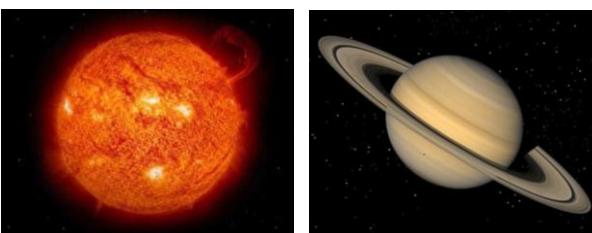


Figura 11. Simetría en la astronomía.

RESEÑA HISTÓRICA

Los antiguos griegos pensaban que las órbitas de los planetas alrededor del sol eran simétricas respecto a las rotaciones: es decir, circulares (la órbita se representa con la circunferencia del círculo).

En realidad, esa no es la forma de las órbitas; sin embargo la ley de la gravedad de Newton sí es simétrica respecto a las rotaciones. Eso significa que las órbitas son elípticas, aunque sí pueden tener cualquier orientación en el espacio.

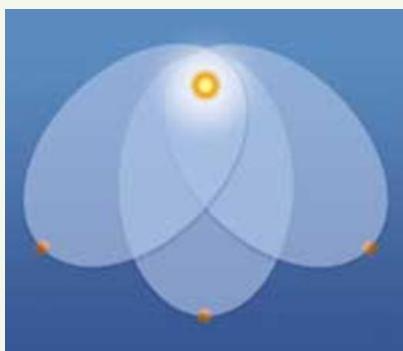
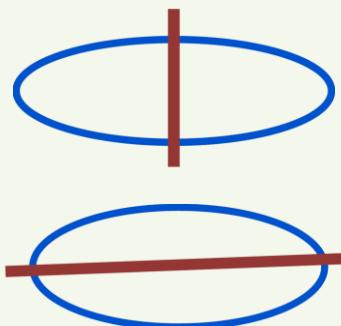


Figura 12. La órbita de la Tierra y otros planetas alrededor del Sol es elíptica, ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada órbita?

Simetría de la elipse.



ANTES DE INICIAR

Identificar los conocimientos previos que poseen sus estudiantes mediante la aplicación de las siguientes interrogantes.

1. Observar la figura e identifica en ella figuras geométricas, delinea con color verde un triángulo y con color rojo un trapecio.

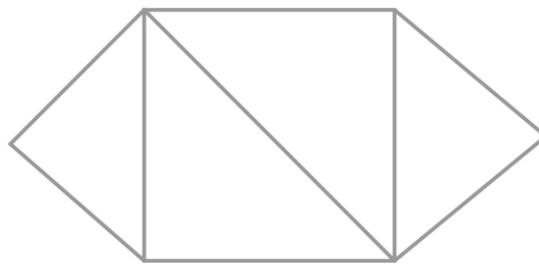


Figura 14. Diagnóstico 1.

¿Cuántos triángulos se observan en la figura?

¿Cuántos cuadriláteros se pueden identificar en ella?

2. Observar las líneas trazadas, dibujar una línea paralela a una de ellas, y una línea perpendicular a la otra.

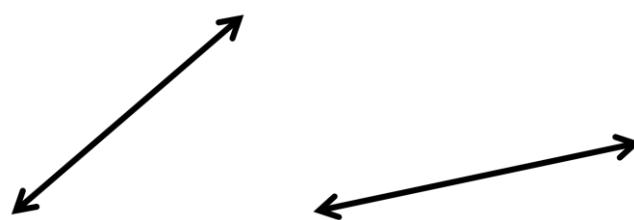
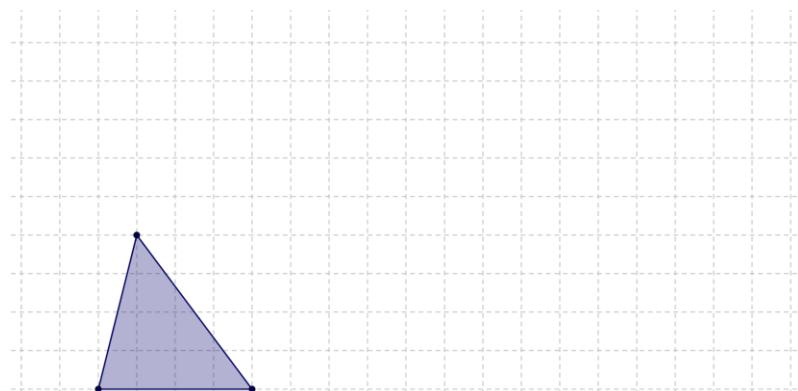


Figura 15. Diagnóstico 2.

3. Trasladar la figura (triángulo), 8 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.



ACTIVIDAD DE DESARROLLO

OBJETIVO

Formar un concepto intuitivo de la simetría.

Utilizar actividades experimentales para motivar la interpretación y análisis de situaciones por los estudiantes.

MATERIALES

Páginas de papel (una para cada estudiante).
Tinta, o pintura de dedo de cualquier color.

INDICACIONES

Brinde a sus estudiantes los materiales y explique los pasos por seguir para desarrollar la actividad.

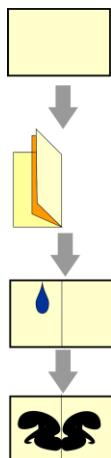
Al finalizar la actividad, permita que cada estudiante formule sus propias conclusiones. No mencionar definiciones por adelantado.

Explicar que lo que se observa en la mancha de tinta o pintura es una representación de la simetría, donde se identifica un eje (doblez de la página) y a ambos lados de este se encuentra una imagen similar.

Actividad 1. Construyamos con simetría.

Descripción

Esta actividad permite a cada estudiante acercarse a la definición intuitiva de simetría, que es creada a partir de experiencias. La actividad debe desarrollarse promoviendo el trabajo en equipo, la libre expresión e interpretación de los procesos observados.



Proceso

1. Toma una página de papel y dóblala por mitad.
2. Desdobra y observa que en el doblez aparece una línea recta que divide la página en dos.
3. En una de las partes divididas, vierte gotas de tinta.
4. Ahora dobla y presiona la superficie de la página. Luego desdóblala nuevamente.

Figura 17. Simetría con tinta.

¿Qué observas?

Al desdoblar observarás que se han formado dos figuras, una a cada lado del doblez, estas figuras se llaman **simétricas**, y a la línea formada con el doblez se le llama **eje de simetría**.

Experimenta y forma tus propias representaciones simétricas.

¿Qué figuras podrías formar?

Este tipo de simetría, recibe el nombre de simetría bilateral, esta se encuentra principalmente en animales.

Analiza las siguientes figuras y traza el eje de simetría que las forma.



Figura 18. Eje de simetría.

OBJETIVO

Comprender el concepto de eje de simetría e identificarlo en figuras e ilustraciones.

MATERIALES

Láminas con ilustraciones que orienten a la ubicación de ejes de simetría en figuras.

Láminas con problemas propuestos para los estudiantes, estas serán distribuidas para el desarrollo de las actividades.

INDICACIONES

Mostrar la Lámina 1, donde se orienta acerca de la ubicación de los ejes de simetría en figuras, cumpliendo con las condiciones e indicaciones del concepto.

En la Lámina 2, se pide a cada estudiante, que trace en las figuras e ilustraciones el eje de simetría, de tal forma que el concepto de este quede inmerso en la aplicación (eje de simetría es una línea imaginaria que separa el espacio en dos partes iguales y congruentes).

En la Lámina 3, se introduce la simetría en las letras mayúsculas.

Se le pide al estudiantado trazar un eje de simetría, dos o más ejes según la letra.

Actividad 2. Identifiquemos la simetría.

Ejes de simetría

Eje de simetría, es una línea imaginaria que al dividir una figura cualquiera, lo hace en dos partes, cuyos puntos opuestos son equidistantes entre sí, es decir, quedan simétricos.

Lámina 1. Eje de simetría.

Tres de las siguientes figuras tienen eje de simetría (línea discontinua), una no es una figura simétrica.

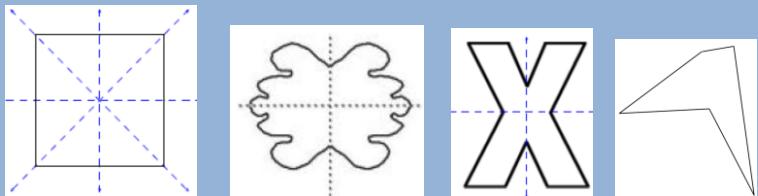


Figura 19. Identificación del eje de simetría.

Lámina 2.

Con ayuda de una regla, dibujar el o los ejes de simetría, a cada una de las siguientes figuras.

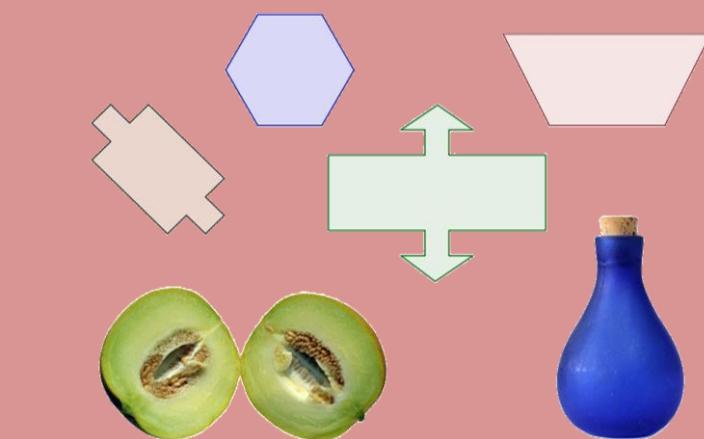


Figura 20. Dibujar eje de simetría.

Lámina 3.

Clasifique las letras mayúsculas del abecedario en las que no son simétricas, las que tienen solo un eje de simetría, o más de un eje de simetría.

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

Figura 21. Simetría en letras.

OBJETIVO

Utilizar la noción de simetría para explicar fenómenos experimentales de la reflexión de la luz.

MATERIALES

1 hoja blanca.
1 transportador.
1 lápiz.
1 linterna.
Pegamento.
1 madera de $20\text{cm} \times 20\text{cm} \times 1\text{cm}$.
1 espejo plano.
2 clavos finos.
1 trozo de cartulina.
1 regla.

INDICACIONES

Explicar y orientar al estudiantado en relación con la temática de imagen y pre imagen, permitiendo que formule sus propias conclusiones en torno a la temática.

Construir el instrumento previamente, siguiendo los pasos que se detallan y mostrar el producto elaborado en la clase.

Otra opción consiste en formar grupos de trabajo y construir el instrumento como tarea exaula, para presentarlo al salón de clases y experimentar con él.

Actividad 3: Experimentando con la simetría.

Imagen y preimagen de una figura.

La palabra transformación implica que un objeto cambia de alguna manera, en una transformación geométrica, hay que tener en cuenta tres puntos.

1. La figura original.
2. Una operación que describe el cambio.
3. La figura que se obtiene del cambio.

El objeto antes del cambio se llama preimagen, y después del cambio de imagen.

En el caso de la simetría reflexiva, el punto dos está dado por el eje de simetría y el cambio, del punto tres, se da en la reflexión del punto sobre el eje de simetría.

Experimento 1. Reflexión de la luz

¡Recuerdas haber jugado alguna vez con un espejo, reflejando la luz del sol! Cuando la onda de luz interacciona con el límite de dos medios (aire-espejo, aire-agua) una parte de la onda o toda la onda rebota, permaneciendo en el primer medio.

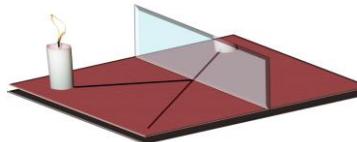
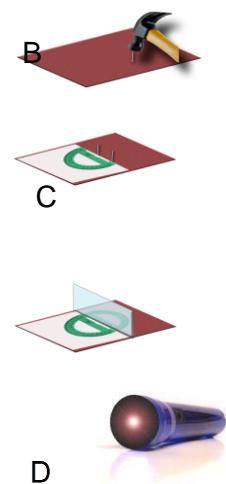


Figura 22. Reflexión de la luz.

Construcción.



1. Toma la tabla de madera y clava sobre uno de los laterales dos clavos en una misma línea, separados por unos 5 cm.
2. Pega la hoja de papel sobre la tabla, y dibuja una semicircunferencia sobre el papel, marcando los grados con ayuda de un transportador.
3. Apoyado en los clavos, coloca el espejo en forma vertical.
4. Perfora el centro del trozo de cartulina negra y con ella tapa el vidrio de la linterna

Figuras 23A, 23B, 23C y 23D. Proceso de construcción, experimento de reflexión de la luz.

Utilizar el reflejo del espejo, para solucionar problemas que implique completar imágenes, o descubrir el animal u objeto que se forma con el reflejo.



Figura 24. Simetría en animales.

¿Por qué las ambulancias tienen esta inscripción en la parte delantera?



Figura 25. Aplicación de la simetría.

Reconociendo el mensaje.

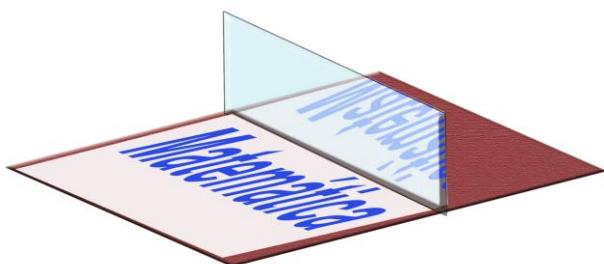


Figura 27. Consecuencias de la reflexión.

Actividad de finalización

Utilización de software para la enseñanza de la simetría

Pasos:

Se recomienda utilizar imágenes preseleccionadas para la aplicación de software.

1. Importar imagen a experimentar.

a. Clic en botón , seleccionar la opción Inserta Imagen y hacer clic sobre el lugar donde deseas insertar la imagen.

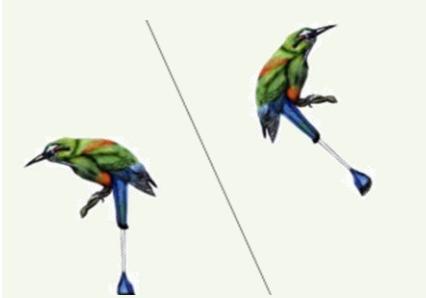
b. Busca la imagen en el directorio y haz clic en aceptar.

c. Al insertar la imagen debes dirigirte al botón y dar clic en él. Ahora puedes seleccionar la imagen ya insertada y moverla a la posición que deseas.

2. Aplicar simetría.

a. Ahora debes ir al botón , haz clic en él y selecciona la opción Refleja Objeto en Recta .

b. Selecciona con un clic primero en la imagen y luego en la recta.



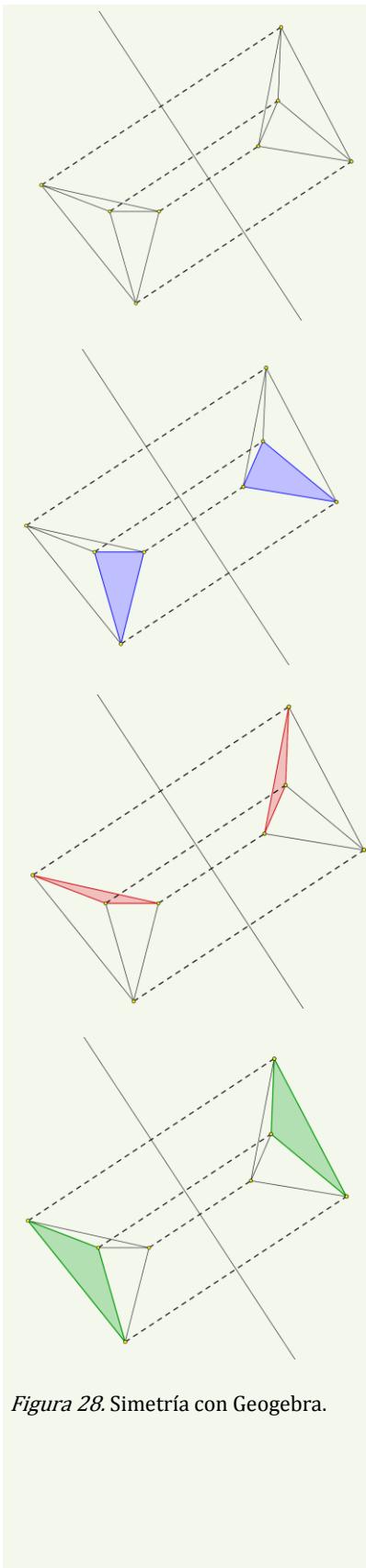


Figura 28. Simetría con Geogebra.

1. Experimenta.

- Aumenta y disminuye el giro y el alejamiento de la recta respecto a la figura.
- Observa, discute y concluye sobre lo observado.

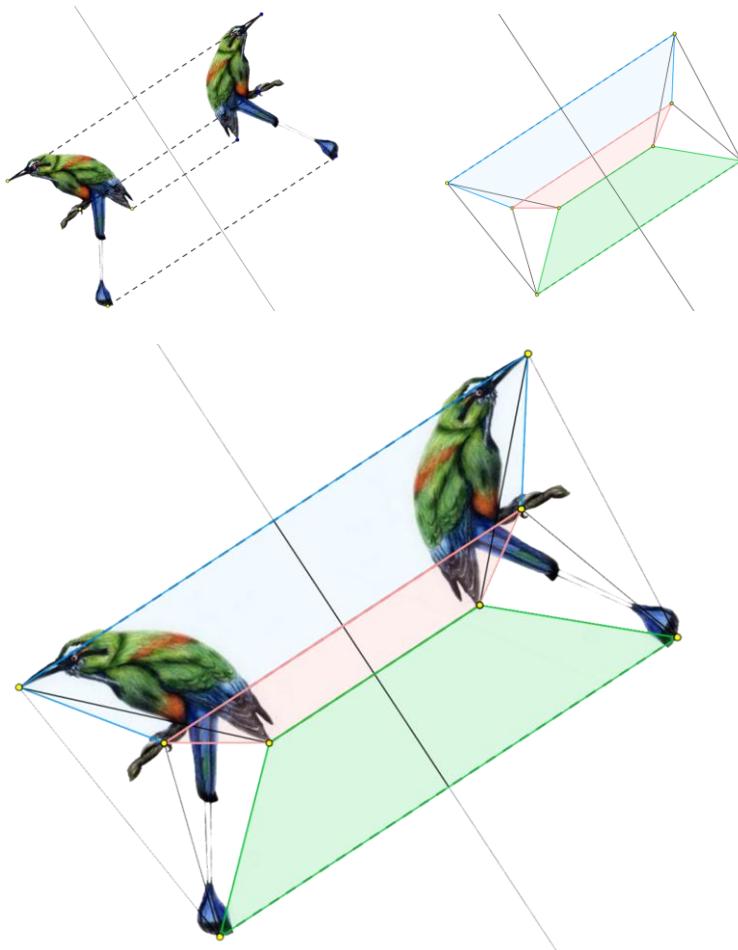


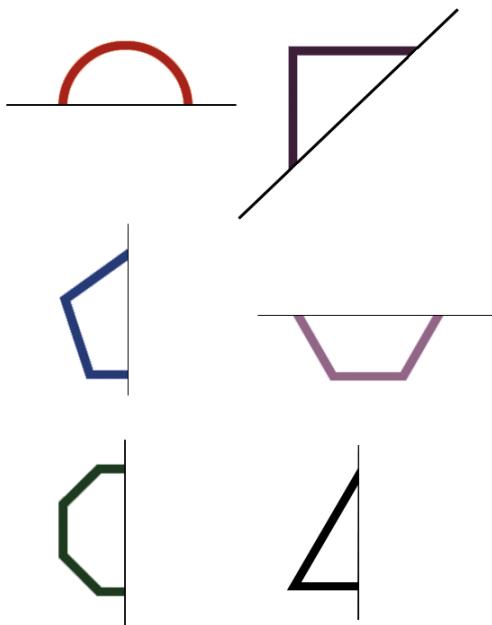
Figura 29. Visualización de las propiedades de la simetría.

Dos figuras son simétricas, si al identificar el eje de simetría y medir la longitud de segmentos perpendiculares de la imagen y preimagen hacia el eje de simetría, estas longitudes son congruentes.

En la figura 29 se muestra la simetría de un torogoz con respecto de un eje de simetría externo a la imagen. Como resultado se obtienen imagen y preimágenes congruentes. Remarcando algunos puntos en la figura del torogoz y determinando la imagen de estos en relación al eje de simetría, se tienen los triángulos de la figura 28 que cumplen con la misma propiedad, es decir, son congruentes.

GUÍA DE TRABAJO

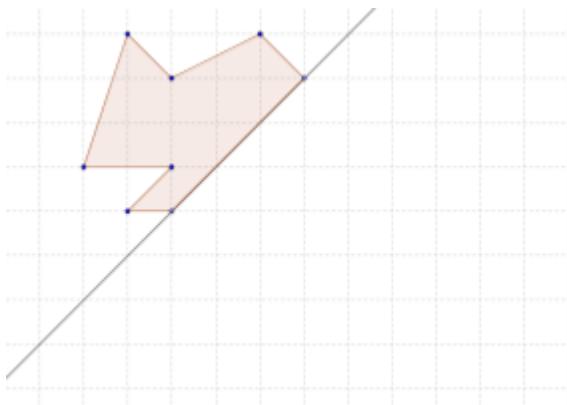
2. Simetría en figuras geométricas. Completa cada figura en relación al eje de simetría.



1. Observa las siguientes ilustraciones y traza el eje de simetría.



3. Completa el dibujo de la cuadrícula en relación al eje de simetría



- Observa los puntos simétricos que dibujan para completar la figura. Mide la distancia de estos al eje de simetría.
- Une dos puntos simétricos en relación al eje de simetría. Mide el ángulo formado por el eje de simetría y el segmento que une dos puntos simétricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Alonso, F. y otros (1987). *Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90* (Ed. Mestral: Valencia).
2. Bolt, B. (1992). *Matemáquinas. Las matemáticas que hay en la tecnología* (Ed Labor: Barcelona).
3. Bouleau, Charles (1996). *Tramas. La geometría secreta de los pintores.* (Ed. Akal. Madrid).
4. Capdevila Ed. (1992). *Las claves de la pintura.* (Ed. Planeta. Barcelona).
5. Fielker, D. (1987) *Rompiendo las cadenas de Euclides* (MEC: Madrid).
6. Fuentes, A., (2006) *Jugando se aprende ciencias* (1ra edición, Buenos Aires; Cultura Librera Americana).
7. Mora, J.A. (1991). *La mitad de un cuadrado.* Revista SUMA núm. 8 pp. 11-29 (FESPM: Granada).
8. Mora, J.A. y Rodrigo, J. (1993). *Mosaicos* (2 vol.) (Ed. Proyecto Sur. Granada).
9. Mora, J.A. (1997). *Geometría de los mecanismos con Cabri Géomètre II.* (Ed. Texas Instruments. Madrid).
10. Mora, J.A. (1999). *Matemáticas con Cabri II.* (Ed. Proyecto Sur. Granada).
11. Mora, J.A. (2001). *Un omnipoliedro para el monte Tossal de Alicante.* (Concejalía de Educación del Ayuntamiento de Alicante).
12. Science in school (2011), “Reglas de simetría” tomado de:
<http://www.scienceinschool.org/2006/issue2/symmetry/spanish>
13. Stock.xchng (2001-2009) Imágenes e ilustraciones tomadas de: <http://www.sxc.hu/photo>

Razonamiento lógico

Introducción del tema

Las actividades que las personas efectúan necesitan del razonamiento, actividades sencillas como cepillarse los dientes, darse una ducha, comer, e incluso esquivar obstáculos, requieren de procesos sincronizados donde el pensamiento toma un papel muy importante. Ahora bien, el razonamiento lógico es una habilidad intrínseca en todo ser humano, todos tenemos la capacidad de pensar, razonar y reflexionar.

El razonamiento lógico matemático estudia la capacidad para utilizar diversas reglas y técnicas para un fin, en matemática se utilizan algoritmos, teoremas y enunciados. Estos elementos, pueden brindar poca o nula ayuda al momento de resolver un problema si no son utilizados con un previo análisis y razonamiento del problema, para utilizar eficazmente estos conocimientos y habilidades, es necesario razonar.

En la presente lección se estudian las proposiciones y el valor de verdad de estas, además se proponen actividades donde el estudiantado utiliza los conectivos \wedge y \vee , inclusive se estudian las negaciones. Conocer la implicación de estos conectivos en el valor de verdad de una frase, brinda insumos hacia la comprensión lectora y la resolución de problemas, puesto que no es lo mismo decir, "iré a comer y a caminar" que decir "iré a comer o a caminar".

Además, se proponen problemas, donde tendrá que formular una estrategia para poder solucionarlo haciendo uso de su capacidad mental para ordenar y proponer la secuencia de pasos adecuada.

Al final de esta lección se proponen actividades que motivan el pensamiento lateral, motivando la imaginación y mostrando que la imaginación y creatividad son dos elementos indispensables en la resolución de problemas.

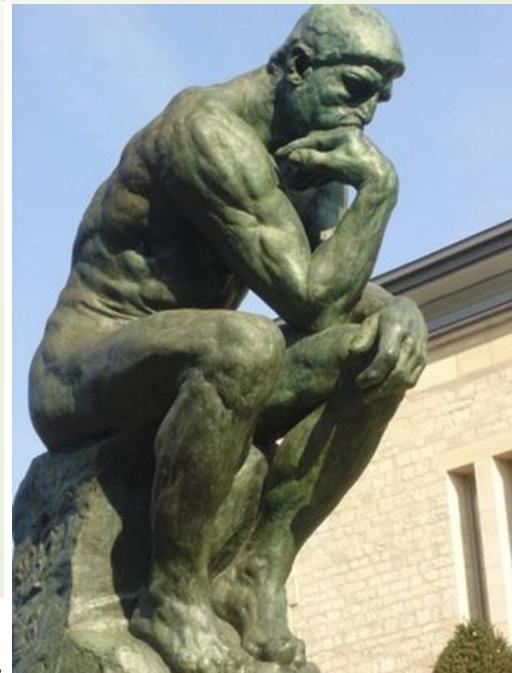


Figura 1. El pensador (escultura), es una de las más famosas esculturas en bronce de Auguste Rodin. Imagen tomada de Wikipedia GNU.

Competencias por fortalecer

- Cada estudiante argumenta y comunica el proceso de solución de aplicaciones utilizando la lógica matemática.

Objetivo específico

- Fomentar el razonamiento lógico en la resolución de problemas, mediante la aplicación de conectivos "y" y "o" que se representan mediante los símbolos " \wedge " y " \vee " respectivamente.

Presaber

- Análisis de lenguaje matemático y comprensión lectora de problemas matemáticos.
- Aplicación del proceso de resolución de problemas, descrito por Polya.

LÓGICA MATEMÁTICA

VOCABULARIO CLAVE

Lógica

Se deriva del latín *lógica*, que a su vez proviene del término griego *logikós* (de *logos*, "razón" o "estudio").

Conjunción

Es el operador " \wedge " se lee "y". Expresa que dos eventos son ciertos simultáneamente. Es decir, si P y Q son dos proposiciones. Será verdadera en el caso que ambas proposiciones sean verdaderas.

P : 4 es múltiplo de 2.

Q : 4 es par.

$P \wedge Q$: 4 es múltiplo de 2 y es par.

Disyunción

Es el conectivo " \vee " que se lee "o". A diferencia de " \wedge ", si introduce ambigüedad en el lenguaje común, se utiliza "o" cuando se desea expresar que el evento P es cierto o el evento Q es cierto, es decir, dadas dos proposiciones P , Q , la proposición compuesta $P \vee Q$, es verdadera cuando al menos una de las proposiciones componentes lo es.

P : 3 es un número par.

Q : 7 es primo.

$P \vee Q$: 3 es un número par o 7

¿Qué es lógica matemática?

La lógica matemática es la disciplina que estudia las formas de razonamiento, es una capacidad que permite a la persona utilizar diversas reglas y técnicas de razonamiento para determinar si un argumento es o no válido, además permite emitir un juicio o establecer conclusiones partiendo de un enunciado general, cuya interpretación puede diferir de una persona a otra, pero la respuesta o conclusión es la misma.

La lógica matemática está presente en diversas actividades cotidianas, el ser humano es por naturaleza un ser pensante, que utiliza en todo momento procesos lógicos que buscan resolver variadas situaciones, es necesario recalcar que una persona es capaz de enfrentarse a resolver problemas que jamás ha visto, utilizando para ello únicamente su capacidad de pensamiento y reflexión, formulando ideas brillantes e innovadoras que buscan solventar una situación inicial.

Toda actividad personal o laboral, desde la más sencilla hasta la más compleja, necesita de la aplicación de técnicas y métodos, necesitan de la lógica matemática.

Proposición

Se entiende como proposición cualquier sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, este criterio se otorga después de realizar un análisis de la proposición.

Considere las proposiciones matemáticas:

" $3 + 4 = 7$ " y " $8 < 4$ ", de aritmética básica. El algoritmo de la suma permite comprobar que la primera expresión es verdadera, en cambio, el ordenamiento de los números naturales en la recta numérica brinda los insumos para asegurar la falsedad de la segunda expresión.

Otros ejemplos:

La gripe se adquiere por el frío.

La gripe se adquiere por un virus.

El calentamiento global afecta las condiciones climáticas.

La Luna está hecha de queso.

El Sol es una estrella.

Conejeras lógicas \wedge , \vee .

Para las proposiciones, P y Q, donde:

P: Laika fue el primer ser vivo en viajar al espacio.

Q: Laika era una perra.

Utilizando la conectiva " \wedge ", se tiene la proposición.

Laika fue el primer canino en viajar al espacio



Sputnik 2.

Laika.

Figura 2. Sputnik 2 y Laika, la conquista del espacio.

$P \wedge Q$

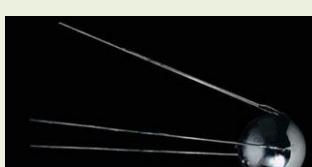
Para las proposiciones:

S: El primer satélite artificial de la tierra fue el Sputnik 1

T: El primer satélite artificial de la tierra fue el explorer 1

Utilizando la conectiva " \vee ".

El primer satélite artificial de la tierra fue: el Sputnik 1 o el explorer



No es proposición

Si en una frase, no se puede verificar si es verdadera o falsa la situación que se indica, entonces no es proposición:

Ejemplo: las expresiones con signos de exclamación no son proposición.

¡Qué frío!

¡Eureka!

¡Felicidades!

Simbolización

Toda proposición, puede expresarse con las letras P, Q, R, S, T, U ..., por ejemplo:

P: El perro es grande

Q: El perro es enojado

El perro grande está enojado (P y Q)

Conejividad

Las palabras que se utilizan para unir dos proposiciones, se llaman conectivas lógicas, entre ellas se mencionan: " \wedge ", " \vee ", y se leen "y", "o", respectivamente.

La unión de dos proposiciones mediante conectivas, recibe el nombre de proposiciones compuestas, ejemplo:

P: Pedro tala el bosque.

Q: Juan contamina el agua.

Utilizar las proposiciones P, Q y las conectivas " \wedge ", " \vee ". Pronunciar la proposición compuesta resultante.

Analizar las consecuencias que trae utilizar la conectiva " \wedge ".

Pedro tala el bosque " \wedge " Juan contamina el agua

El conector " \wedge " indica que ambas proposiciones se efectúan simultáneamente.

En cambio, para el conector " \vee " se formula la siguiente proposición compuesta:

Pedro tala el bosque " \vee " Juan contamina el agua

El conector " \vee " indica que las proposiciones no pueden suceder simultáneamente, es decir, la sentencia es verdadera si ocurre P o ocurre Q, si ambas proposiciones son verdaderas, entonces la proposición compuesta P \vee Q también será verdadera.

Negación

Para una proposición P, "la tierra es redonda", existe una expresión contraria a P, "la tierra no es redonda" y se simboliza $\sim P$. se lee "no P".

RESEÑA HISTÓRICA

Aristóteles

Los tratados de lógica de Aristóteles, 384 a.C.-332 a.C. conocidos como *Organon*, contienen el primer tratado sistemático de las leyes de pensamiento para la adquisición de conocimiento.

Aristóteles no hace de la lógica una disciplina metafísica sino que establece correspondencias recíprocas entre pensamiento lógico y estructura ontológica. El *silogismo* fue adoptado por los escolásticos que representan el sistema teológico-filosófico, característico de la Edad media.

El *silogismo* se incluye en la lógica de predicados de primer orden y en la lógica de clases, y ocupa en la ciencia lógica un papel mucho menor que en otros tiempos.

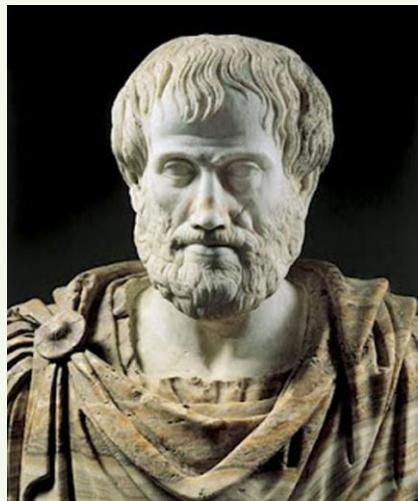


Figura 4. Aristóteles.

Tomado del blogspot:

<http://humanismoyvalores.blogspot.co>

Ejemplos:

Q: La materia está compuesta por átomos.

~Q: La materia no está compuesta por átomos.

La doble negación

La observación de la expresión $\sim(\sim P)$ es equivalente a P .

Ejemplo:

P: Dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo.

$\sim P$: Dos cuerpos de distinta masa no caen al mismo tiempo.

Al negar que dos pesos de distinta masa no caen al mismo tiempo, se está asegurando que sí caen al mismo tiempo.

$\sim(\sim P)$: Dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo.

La doble negación de P , es P .

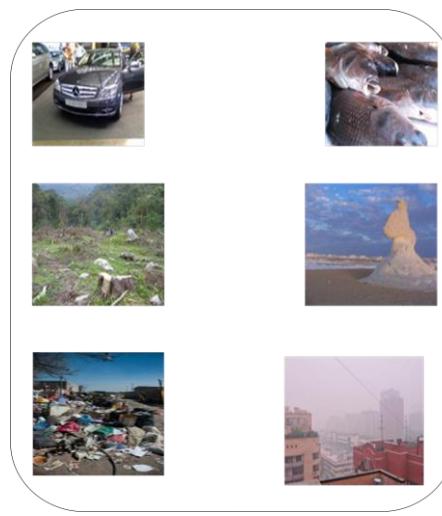
$\sim(\sim P) = P$

ANTES DE INICIAR

Objetivo. Verificar las capacidades previas de los niños y niñas para identificar patrones y relacionar adecuadamente antecedentes y consecuentes.

Actividad 1. Causas y consecuencias.

Unir la figura de la izquierda (causas) con la figura de la derecha (consecuencia). Argumentar la respuesta.



ACTIVIDAD DE DESARROLLO

<p>OBJETIVO</p> <p>Evaluar la veracidad de proposiciones.</p> <p>INDICACIONES</p> <p>Explicar previamente: Se le llama proposición a una expresión declarativa o enunciado que puede ser verdadero o falso.</p>	<p>Actividad 2. Identificar proposiciones</p> <p>Observar los siguientes enunciados y subrayar aquellos que son proposiciones.</p>																
<p>En la Actividad 1, presentar enunciados donde cada estudiante indicará veracidad o falsedad. Motivar a la investigación científica, comprobando la veracidad o falsedad de las proposiciones.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. La bomba atómica es un arma de destrucción. 2. Los eclipses de luna son peligrosos. 3. La radiación solar es dañina para la piel. 4. La delincuencia se produce por la desintegración familiar. 5. ¡El agua está fría! 6. El Apolo 11, fue la primera nave tripulada en viajar a la Luna. 7. ¿Cómo se llama el primer ser vivo en conquistar el espacio? 																
<p>Utilizar recursos web durante la investigación.</p> <p>En la Actividad 2, se pretende identificar proposiciones, evaluando y determinando si puede ser juzgada la veracidad o falsedad de esas proposiciones. Considerar que las exclamaciones no son proposiciones.</p>	<p>Actividad 3. Identificación de proposiciones.</p> <p>Escribir verdadero o falso en cada uno de los enunciados:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La gripe se adquiere por un virus. 2. El cambio climático es una amenaza para la vida. 3. Hoy lloverá. 4. Te llamas José. 5. El primer ser viviente en explorar el espacio, fue un perro. 6. El primer hombre en explorar el espacio fue Yuri Gagarin, de nacionalidad rusa. 																
<p>En la Actividad 3, brindar previa explicación acerca de los conectivos lógicos y el uso de los conectivos “\wedge” y “\vee”.</p> <p>Nombrar proposiciones e identificarlas mediante las letras P, Q, R, S.</p> <p>Proponer el uso de conectivos mediante la simbología.</p>	<p>Actividad 4. Conectivos lógicos “\wedge” y “\vee”.</p> <p>Utilizar los conectores “\wedge”, “\vee” en las siguientes proposiciones y expresa la proposición compuesta resultante.</p> <table> <tbody> <tr> <td>P: Está lloviendo.</td> <td>$P \wedge Q$</td> </tr> <tr> <td>Q: Traje paraguas.</td> <td>$P \wedge R$</td> </tr> <tr> <td>R: La calle esta resbalosa.</td> <td>$R \wedge S$</td> </tr> <tr> <td>S: El auto va a alta velocidad.</td> <td>$P \wedge R$</td> </tr> <tr> <td>T: Voy al parque.</td> <td>$U \vee V$</td> </tr> <tr> <td>U: Iré en carro.</td> <td>$U \vee W$</td> </tr> <tr> <td>V: Iré en avión.</td> <td>$R \vee W$</td> </tr> <tr> <td>W: Iré corriendo</td> <td>$T \vee U$</td> </tr> </tbody> </table>	P: Está lloviendo.	$P \wedge Q$	Q: Traje paraguas.	$P \wedge R$	R: La calle esta resbalosa.	$R \wedge S$	S: El auto va a alta velocidad.	$P \wedge R$	T: Voy al parque.	$U \vee V$	U: Iré en carro.	$U \vee W$	V: Iré en avión.	$R \vee W$	W: Iré corriendo	$T \vee U$
P: Está lloviendo.	$P \wedge Q$																
Q: Traje paraguas.	$P \wedge R$																
R: La calle esta resbalosa.	$R \wedge S$																
S: El auto va a alta velocidad.	$P \wedge R$																
T: Voy al parque.	$U \vee V$																
U: Iré en carro.	$U \vee W$																
V: Iré en avión.	$R \vee W$																
W: Iré corriendo	$T \vee U$																

OBJETIVOS

Aplicar procesos de pensamiento matemático en la resolución de problemas lógicos.

MATERIALES

Balanza de fabricación sencilla. Objetos para pesar, tales como: chocolates, bolitas, dulces, etc. (11 de ellos de peso idéntico y uno que pese más).

INDICACIONES

Previo a la actividad, formar con el estudiantado grupos de trabajo e invitarlos a elaborar una balanza con la ayuda de sus padres (tarea exaula).

Proponer al grupo de estudiantes el problema de las monedas, utilizará la balanza, según se especifica (puede hacer solo tres pesadas para identificar la moneda más pesada).

Brindar a los equipos de trabajo, 12 objetos (dulces, chocolates), donde uno de ellos debe pesar más.

Para lograr que uno de los objetos pese más, sin cambiar la forma de este, introducir en este otro objeto o agregar un objeto más.

Actividad 5. Problemas de lógica matemática

Resolución de problemas lógicos.

La moneda más pesada de toda la docena:

El amigo Jacinto tiene doce monedas, pero sabe que una de ellas es falsa, esto es, que tiene un peso mayor que el peso de cada una de las restantes. Le dicen que use una balanza y que con solo tres pesadas averigüe cuál es la moneda de peso diferente.

De qué forma puede hacer las pesadas, sin exceder de tres intentos.



Figura 6. Ilustración de la situación problemática.

Se tienen 12 objetos que se pesarán para identificar cuál posee mayor peso, de tal forma que la balanza sea utilizada únicamente tres veces.

Después de observar los procedimientos de sus estudiantes y escuchar sus argumentos, proponer el siguiente proceso:

1. Separar los objetos en dos grupos, seis y seis. Posicionar cada grupo en cada lado de la balanza. Si los objetos tuviesen pesos iguales, la balanza se mantendría equilibrada. Pero, dado que existe un objeto que pesa más que los demás, esta se inclinará hacia el grupo donde se encuentra el objeto más pesado.

2. Tomar los seis objetos, que parecen más pesados. Y separarlos en dos grupos, de tres y tres. Posicionar los grupos en cada lado de la balanza. Observar lo que sucede y argumentar.

En el grupo de objetos que parecen más pesados, se encuentra el objeto buscado.

3. Ahora solo se tienen tres objetos. Uno de ellos es el objeto de mayor peso, para encontrarlo, se deben elegir dos de los objetos y valorar las siguientes situaciones:

Si los objetos pesan igual, entonces el que no se eligió es el objeto pesado.

Si la balanza se inclina, entonces el objeto buscado se encuentra identificado por la inclinación de esta.

OBJETIVO

Interpretar problemáticas que implican el análisis de procesos y la evaluación de opciones.

MATERIALES

Ficha con los nombres de las diversas familias.

INDICACIONES

Formar equipos de cuatro o cinco integrantes. Proponer el problema de las familias.

Brindar a cada grupo, fichas con los nombres de las familias y un cuadro, para posicionar el orden en que se encuentran las familias en el edificio.

Es importante leer el problema varias veces, para entender, y luego leerlo de párrafo en párrafo, para identificar el orden correcto en que deben posicionarse las fichas y resolver el problema.

Permitir que el grupo de estudiantes experimente y escriba el orden que considera, responde la pregunta del problema.

Si alguno de los equipos obtiene la respuesta, considerarla y evaluarla. Si esta es errónea, motivarlos a seguir experimentando.

Actividad 6. Ordenar procesos.

La familia Sánchez vive un piso más arriba que la familia González. La familia Sosa, más arriba que la familia Toloza, y la familia Sánchez más abajo que la familia Toloza. ¿Qué departamento ocupa cada familia?

4
3
2
1

Sánchez González Sosa Toloza

Solución

1. Despues de leer detenidamente el problema, identificar palabras clave que ayudarán en la resolución del problema.

Por ejemplo, la frase que literalmente dice: **la familia Sánchez vive un piso más arriba que la familia González**. Esto orienta a posicionar las fichas **SÁNCHEZ** y **GONZÁLEZ**, en la posición que describe la frase.

Sánchez González

2. Luego dice: **la familia Sosa, más arriba que la familia Toloza**, se tienen dos fichas posicionadas, de modo que, arriba de la familia Toloza, puede ubicarse la familia Sosa, pero en relación a las familias Sánchez y González, estas pueden estar ubicadas de las siguientes maneras.

Sánchez	Sosa	Sosa
González	Sánchez	Toloza
Sosa	González	Sánchez
Toloza	Toloza	González

3. En este momento se tienen tres opciones por elegir, esto se aclara con la frase: **y la familia Sánchez más abajo que la familia Toloza**. El problema se resuelve al seleccionar la opción, donde se cumple la condición de la frase.

Sosa
Toloza
Sánchez
González

OBJETIVO

Estimular el pensamiento lateral en la resolución de problemas.

MATERIALES

Enunciados y problemas.

INDICACIONES

El pensamiento lateral permite observar problemas desde puntos de vista diferentes. Algunos problemas de aplicación se resuelven a partir de ideas e interpretaciones no numéricas.

La creatividad e imaginación de cada estudiante, le permite observar detalles e interpretarlos de forma única.

Por ejemplo: Un perro está atado por el cuello a una cuerda de dos metros de longitud. ¿Cómo podrá alcanzar un sabroso hueso situado a 4 metros de él?

Un análisis inicial del problema, lleva a interpretar, que el problema no tiene solución, pues la distancia a la que se encuentra el hueso es mayor a la longitud de la cuerda.

El pensamiento lateral, permite utilizar la imaginación y decir: **para alcanzar el hueso, el perro necesita únicamente correr hacia él, pues, la cuerda está amarrada únicamente al cuello del animal, el otro extremo está suelto.**

Actividad 7. Pensamiento lateral.

El pensamiento lateral consiste en explorar alternativas inusuales o incluso, en apariencia absurdas para abordar un problema y determinar su solución. En otras palabras, consiste en evitar caminos fijos predispuestos, busca que la persona que resuelve intente algo que nadie ha intentado, que estudie puntos de vista diversos utilizando su creatividad e ingenio para formular nuevas y variadas situaciones.

El niño y la niña, utilizan en su entorno dos tipos de pensamientos, pensamiento divergente y pensamiento convergente, el primero, es el que menos se beneficia en el salón de clases, por lo que, se busca con las siguientes situaciones problemáticas abonar en el desarrollo del pensamiento divergente y en la necesidad de utilizar la creatividad como elemento intrínseco en la resolución de problemas. se recomienda analizar y buscar solución a los problemas sin ver la solución de estos.

Problema 1.

Hay tres interruptores afuera de un cuarto que está cerrado con llave. Adentro del cuarto hay tres lámparas. Usted puede encender y apagar los interruptores cuantas veces quiera, siempre y cuando la puerta del cuarto permanezca cerrada. Entonces, usted debe entrar una sola vez al cuarto y determinar cuál interruptor le corresponde a cada lámpara.

Problema 2.

Un joven por salir de prisa a encontrarse con sus amigos dejó olvidada la licencia de conducir. Una vez en la calle no se detuvo en la luz roja y siguió por una vía de sentido contrario. Todo esto fue observado por un policía de tránsito quien no hizo el menor intento para impedírselo o para citarlo. ¿Por qué?

Soluciones

P1. Puesto que únicamente puede abrir la puerta una sola vez, lo que tendrá que hacer es, encender el primer interruptor, esperar un minuto y luego apagarlo, después encender el segundo interruptor, y ahora, abrir la puerta.

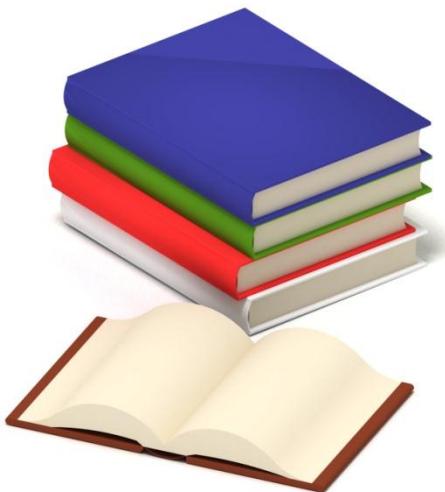
Observa las tres lámparas, y la lámpara que esté encendida le corresponde al interruptor que está encendido en ese momento, la lámpara que tenga mayor temperatura, corresponderá al interruptor que se encendió hace un minuto, y la lámpara que está completamente fría, pertenece al interruptor que no se ha encendido aun.

GUÍA DE TRABAJO

1. **Proposiciones.** Analiza las siguientes narraciones y clasificalas en proposiciones o no proposiciones.

Se define una proposición como un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez. Las proposiciones se representan mediante variables proposicionales simbolizadas mediante letras.

- f) La sal es un compuesto químico.
 - g) $10 < 14$.
 - h) El sol sale de noche.
 - i) Hola.
 - j) 13 es un número impar.
 - k) $34,564 + 34,323 = 68,887$.
 - l) ¡Qué calor!
 - a) El triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama escaleno.
 - b) ¿De qué color es el agua?
 - c) El triángulo es un polígono de tres lados.
 - d) Todas las naranjas son amarillas.
 - e) Algunas manzanas son rojas.
2. El gusano de los libros. Hay insectos que roen los libros hoja por hoja y de este modo se abren paso a través de los tomos. Uno de estos “gusanillo de los libros”, royendo, se abrió camino desde la primera página del primer tomo hasta la última del segundo tomo, que estaba al lado del primero.



Referencias bibliográficas

1. De León, A. De León, Lineth. *¿Cómo enseñar problemas de demostración en educación?*, Instituto Tecnológico de Cd. Madero. División de Estudios de Postgrado de Investigación.
2. Solow, D., 1993 *¿Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas?*, Primera edición 1967, tercera edición
3. Nieto, J. ,2004, *Resolución de problemas matemático*, Taller de formación matemática, Maracaibo, 26 al 31 de julio de
4. Stock.xchng (2001-2009) Imágenes e ilustraciones tomadas de: <http://www.sxc.hu/photo>

Manipulación de variables

Introducción del tema

En la educación primaria los alumnos manipulan expresiones con letras, operaciones y números. Por ejemplo, para buscar el perímetro de un rectángulo, el área de un triángulo, la longitud de una circunferencia, etc.

En secundaria los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación que representan.

La manipulación de variables es necesario introducirla en esta etapa mediante un razonamiento lógico y el cálculo numérico, de este modo se fomenta en la niñez una idea sobre los problemas por enfrentar en el lenguaje algebraico.

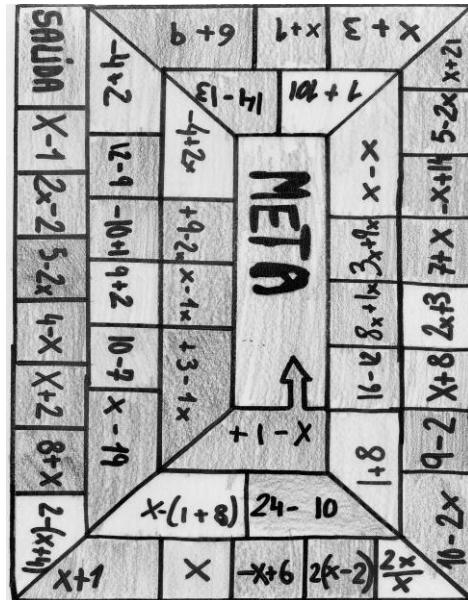


Figura 1. Los símbolos son uno de los componentes más importantes de la matemática porque representan muchas situaciones de la naturaleza, que es al final, la intención del álgebra.

Competencias por fortalecer

- Comprende y analiza el uso y la manipulación de variables, sin utilizar el lenguaje algebraico, para fortalecer el razonamiento lógico.

Objetivos

- Resolver problemas mediante razonamiento lógico en manipulando variables, sin utilizar el lenguaje algebraico.
- Desarrollar un pensamiento lógico matemático; así como el cálculo numérico mediante un pensamiento crítico y reflexivo.

Presaberes

- Operaciones básicas con números naturales.

Vocabulario Clave

Variable: Una variable es aquello que varía o puede variar. Del latín Variabilis.

Se trata de algo inestable, inconstante y mudable. En otras palabras, una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado.

Este conjunto es denominado conjunto universal de la variable o universo de la variable, y cada elemento del conjunto es un valor de la variable.

Por ejemplo: x es una variable del universo $\{2, 4, 6, 8\}$. Por lo tanto, x puede tener cualquiera de dichos valores, es decir que puede ser reemplazada por cualquier número par menor a 9.

Las variables se utilizan en cada una de las ramas de las matemática y lo asombroso es que muchas veces, ni nos damos cuenta de que las estamos utilizando, ya que no es necesario escribirlas, pues simplemente se están utilizando de manera intuitiva.

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

El uso de variables se da desde el momento en que el niño y la niña comienzan a ver la escritura de los números, es decir desde el momento en que en vez de hacer dibujos los representan, es un proceso de cambio de imágenes y luego se continua con los símbolos de aritmética, así como también las fórmulas que se expresan en geometría, estadística, para llegar al álgebra.

En los primeros años de estudio, no es muy evidente su uso; ya que se trabaja con materiales concretos y casi no se menciona variables, para encontrar números, sin embargo, las variables se muestran, por ejemplo, cuando se dice al estudiantado: Mi tía Johanna me regaló tres manzanas. ¿Cuántas manzanas me regaló mi tía Cindy?, si tengo 10 manzanas en total.

En este ejemplo hay una incógnita, la cual tiene un valor definido; es decir, es una variable exacta; sin embargo, las niñas y niños lo toman como un simple valor que no conocen. Las variables se clasifican en exactas, continuas, variables infinitas o determinísticas.

Estas variables se utilizarán en estudios posteriores; en esta oportunidad solamente comentaremos las variables exactas.

Variables exactas son: si cada uno de sus valores posibles se pueden conseguir mediante un procedimiento o algoritmo que conste de un número finito de pasos y el valor obtenido coincida con el valor teórico o ideal, dicho de otra forma, satisface adecuadamente nuestras expectativas o necesidades prácticas respectivas.

Las variables, además, son utilizadas en el campo de la estadística para la investigación.

De esta manera se clasifican en cualitativas y cuantitativas.

Para la estadística se aplican estos dos tipos de variables.

En esta lección se tendrá como prioridad, encontrar la manera más eficiente de introducir las variables, para que el estudiantado logre manipular variables de una forma introductoria y facilitar estudios posteriores al álgebra.

Una variable es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos.

Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.

Ejemplo

Analicemos las frases:

- a) Para cualquier par de números naturales a y b , siempre se verifica que, $a + b = b + a$.
- b) $2 + 3 = 3 + 2$.

La segunda es diferente de la primera, ya que la segunda sólo sirve para estos dos números, mientras que la primera sirve para cualquier par de números. De la segunda igualdad se puede llegar a pensar que es propia solo de los números 2 y 3. Incluso aunque se afirmara que esa segunda igualdad es cierta para muchos ejemplos de pares de números, tampoco se estaría haciendo la misma afirmación que en la primera igualdad.

Una manera alternativa de enunciar esa propiedad de los números es mediante una frase del tipo, "La suma de dos números naturales es independiente del orden de los términos de esta suma". Esta segunda alternativa presenta ventajas e inconvenientes con respecto a la primera. Uno de los inconvenientes es que resulta más larga que la primera.

Encontramos cuatro usos principales de las variables en matemáticas:

- Las variables como incógnitas: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.

Ejemplos

Cuando en los primeros cursos se escribe, por ejemplo, $9 + \underline{\quad} = 15$.

Cuando en cursos más avanzados se proponen ejercicios del tipo: ¿cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $4x + 2 = 3x + 5$?

Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números (o elementos del conjunto que se trate).

Ejemplos

Para todos los números reales se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$

El área del cualquier rectángulo es $A = b \cdot a$ ($a = \text{base}$ y $b = \text{altura}$).

Actividad 1: Conocimientos previos

Objetivo

Resolver situaciones numéricas de manera intuitiva, introducción el cálculo mental y el uso de las variables numéricas.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Indicaciones

Se les proporcionan cuatro juegos, para que formen equipos de tres integrantes, los cuales deberán resolverse

Juego 1:

Acomoda estos números en cuatro grupos de dos números, cada uno, de manera que la suma de los dos números de cada grupo sea igual para los cuatro grupos.

19; 21; 35; 42; 58; 65; 79;

Juego 2:

Forma con estos números tres grupos de dos números cada uno de manera que si multiplicas los dos números de cada grupo, el resultado sea igual para todos los grupos.

6: 10: 14: 15: 21: 35.

Juego 3:

Forma con estos números tres grupos de tres números cada uno, de manera que si multiplicas los tres números de cada grupo el resultado sea el mismo para los tres grupos.

3; 4; 5; 6; 7; 8; 28; 30; 35

Juego 4:

Acomoda estos números en tres grupos de tres números cada uno de manera que la suma de los tres números de cada grupo, sea igual para los tres grupos.

11: 73: 91: 35: 43: 85: 63: 25: 51

Se puede observar que la manipulación de variables no visualiza desde el primer momento, sin embargo esta se da de forma intuitiva; así el estudiantado resolverá cada uno de los ejercicios mediante un procedimiento o algoritmo que consista de un número finito de pasos y el valor obtenido coincida con el valor teórico o ideal. Es decir que resuelva lo que se le está pidiendo; en este caso la variable es el valor que no se conoce y que se busca con las operaciones de sumar o multiplicar en cada uno de los agrupamientos que realicen.

Las soluciones son:

Juego 1: 42 y 58, 19 y 81, 79 y 21, 35 y 65.

Juego 2: 60 y 65, 10 y 21, 14 y 15.

Juego 3: 3, 8 y 35, 4, 7, y 30, 5, 6 y 28.

Juego 4: 11, 83 y 65, 25, 43 y 91, 35, 51, 73.

Soluciones

$$\square = 7$$

$$\circ = 3$$

Ya que se tiene: $(73 + 1) \div 2 = 37$

En el problema 2. En el que cada punta de la estrella tiene un número, uno de ellos no tiene que ir ahí. Donde el número del centro es una pista para encontrar el número incorrecto.

Así las soluciones son:

En la estrella del 8 todos son múltiplos de 8 excepto el 226.

En la estrella del 9 ninguno es múltiplo de 9 excepto el 279.

En la estrella del 11 todos son múltiplos de 11 excepto el 257.

En la estrella del 7 ninguno es múltiplo de 7 excepto el 245.

Actividad 2: Manipulando variables de manera intuitiva.

Objetivo

Realizar operaciones aritméticas usando variables de manera intuitiva.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Indicaciones

Resuelve en parejas los siguientes problemas:

1. Encuentra un número de dos dígitos \square y \circ que cumpla:

Es decir, tienes que encontrar un número de dos dígitos que al sumarle 1 y dividir el resultado entre 2 te quede el mismo número pero invertido.

2. Cada punta de la estrella tiene un número, uno de ellos no tiene que ir ahí. El número del centro te ayudará a encontrarlo según característica de dicho número.

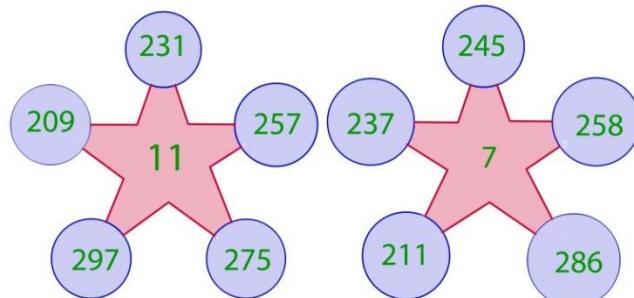
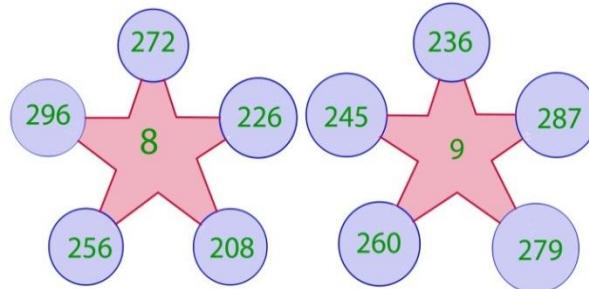


Figura 2. Encontrando características en común en las estrellas.

También se puede utilizar las variables si deseamos conocer el área de un triángulo, pero no conocemos los valores de sus lados, entonces nombramos con letras cada uno de sus lados.

Para lograr obtener la fórmula deseada, en donde se manipulan variables a , b y h dependiendo la longitud que se le dé a cada uno. Como se muestra en la siguiente figura.

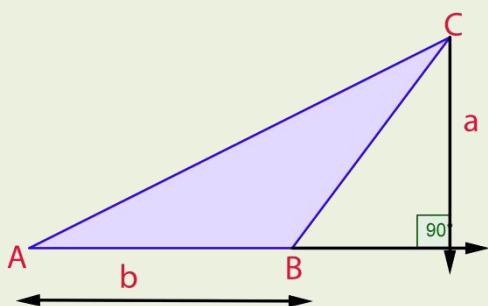


Figura 5 representación de un triángulo de base b y de altura a .

El área de un triángulo se representa

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

Donde a y b representa el valor que tenga la altura y la base de cualquier triángulo.

Así también se trabajan con variables, para representar en forma general las bases y las alturas de cualquier figura geométrica y conocer sus áreas y perímetros.

Actividad 3: Manipulación de variables en geometría.

Objetivo

Analizar los casos de manipulación de variables en el área de geometría.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Pizarra.

Indicaciones

Elaborar en la pizarra la siguiente recta numérica; y selecciona a algunos de tus estudiantes para que identifiquen qué valores se deben escribir en los cuadritos elaborados.



Figura 3. Recta numérica representada en cuartos.

¿Qué sucedería si hacemos más grande la recta numérica y movemos los cuadritos a lo largo de ella? ¿Se puede identificar los valores?

Con esta actividad se requiere que el estudiante visualice que los cuadritos son variables y pueden representar cualquier valor en la recta numérica, siguiendo el patrón de cuartos.

Puedes sugerir otro patrón en tercios, octavos, etc. A manera de ilustración.

Continuando con la manipulación de variables, es importante que lo veamos en el área de geometría. Por ejemplo cuando trabajamos ángulos. Que por ser ángulos suplementarios podemos conocer el ángulo externo al triángulo.

También estamos manipulando variables en donde el ángulo externo es la incógnita y dependerá de ángulo adyacente o interiores al triángulo para conocer el valor de α .

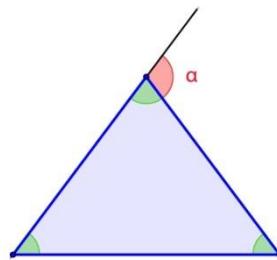


Figura 4. Triángulo con sus ángulos internos y un ángulo exterior.

Actividad 4: Utilicemos el razonamiento lógico**Objetivo:**

Identificar el ordenamiento de los números según características indicadas.

Materiales

Papel.

Lápices de colores.

Indicaciones

Pedir al grupo estudiantil que construya el siguiente cuadro y luego tomen en consideración lo siguiente.

1. Colocar un número en cada cuadro, teniendo en cuenta que:

- a) 3, 5, 9, están en la horizontal superior.
- b) 2, 6, 7, están en la horizontal inferior.
- c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, no están en la vertical izquierda.
- d) 1, 2, 5, 7, 8, 9, no están en la vertical derecha.

¿Crees que cambiando las indicaciones de los números podemos encontrar otra solución?

8	3	6
4	1	2
5	9	7

2. Ahora si tenemos los siguientes números en la tabla ¿cuáles serían las indicaciones para obtenerla?

Solución del 1.

9	5	3
8	1	4
7	2	6

Possible solución del 2

- a) 3, 6, 8, están en la horizontal superior.
- b) 5, 7, 9, están en la horizontal inferior.
- c) 1, 2, 3, 6, 7, 9, no están en la vertical izquierda.
- d) 1, 3, 4, 5, 8, 9, no están en la vertical derecha.

Observaciones:

Aunque parezca mentira, lo que acabamos de escribir, sí es una demostración, pues no importa que número sea el cuadrito, el resultado siempre es 3.

Sabías que...

Sin embargo, los cuadritos y los circulitos no son lo más cómodo para escribir matemáticas, es mucho más útil usar el lenguaje matemático, en este caso el lenguaje algebraico.

La misma prueba usando este lenguaje quedaría:

1) Piensa un número x

2) Súmale $x + 5$

3) Multiplica el resultado por 2

$$2(x + 5) = 2x + 10$$

4) A lo que quedó réstale 4

$$2x + 6$$

5) el resultado divídelo entre 2

$$(2x + 6) / 2 = x + 3$$

6) A lo que quedó réstale el número que pensaste $x + 3 - x = 3$

El resultado siempre es 3.

Actividad 5: Adivinemos números.

Objetivo:

Utilizar el pensamiento lógico y utilizar variables para encontrar un número.

Materiales

Cuaderno de trabajo.

Lápiz.

Pizarra.

Indicaciones

Sigue las siguientes indicaciones:

- 1) Piensa un número.
- 2) Súmale 5.
- 3) Multiplica el resultado por 2.
- 4) A lo que quedó réstale 4
- 5) El resultado divídelo entre 2.
- 6) A lo que quedó réstale el número que pensaste.

El resultado es 3.

Tenemos que imaginar una forma para lograr demostrar que no importa con qué número empecemos, el resultado siempre será 3, y para eso tenemos que pensar en una forma de realmente empezar con cualquier número.

Proponemos que en lugar de empezar con un número concreto, usemos un cuadrito para representar eso que llamamos "cualquier número", es decir para representar a todos los números. Para representar los números que sí conocemos usaremos circulitos.

1) Piensa un número.



2) Súmale 5.



3) Multiplica el resultado por 2.



4) A lo que quedó réstale 4.



5) El resultado divídelo entre 2.



6) A lo que quedó réstale el número que pensaste.

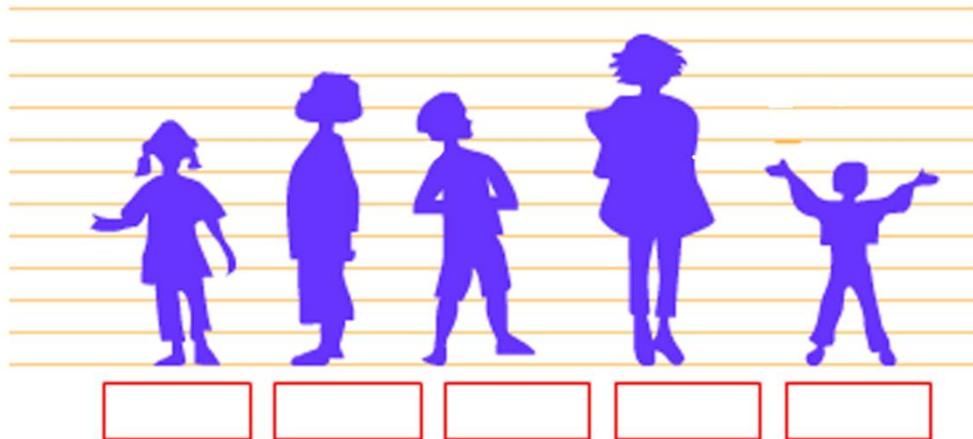


El resultado es siempre 3.

HOJA DE EJERCICIOS

1. A la señora Rosa se le cayó al suelo la cesta de los huevos, y alguien quería saber cuántos huevos había en la cesta. - ¿Cuántos huevos llevaba? - le preguntaron. - No lo sé, recuerdo que al contarlos en grupos de 2, 3, 4 y 5, sobraban 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Puedes decir ¿cuántos huevos había en la cesta?

2. ¿Quién es quién?
Luis es más alto que Sonia, pero más bajo que Juan; Elena es más alta que Juan; Daniel es hermano de Elena.



3. Encuentra un número de cuatro dígitos que cumpla las siguientes cuatro cosas:
 - a) El segundo dígito es dos veces el primer dígito.
 - b) El cuarto dígito es tres veces el tercer dígito.
 - c) Todos los dígitos son diferentes.
 - d) Ninguno de los dígitos son consecutivos.

4. En los siguientes ejercicios escribe en los cuadritos vacíos las operaciones que necesites para lograr el resultado y además usa, en cada uno de ellos, los paréntesis para indicar qué operación debe hacerse primero.

Además, para hacer un poco más divertido este juego, te pedimos que en cada uno de los ejercicios:

No repitas las operaciones. Esto quiere decir que si en un cuadrito pones, por ejemplo, la suma, en el siguiente sólo podrás usar la resta o la multiplicación.

a) 8 7 3

Y el resultado debe ser el número 3.

b) 4 2 1

Y el resultado debe ser un número impar.

c) 4 3 2

Y el resultado debe ser un número mayor que 8 y menor que 11.

d) 9 7 4

Y el resultado debe ser un múltiplo de 4.

5. Resuelve el siguiente truco luego sigue las indicaciones siguientes.

- ✓ Realiza primero para algunos números.
- ✓ Escribe una demostración de las indicaciones utilizando cuadritos y circulitos

1) Piensa un número.

2) Súmale 3.

3) Multiplica por 2 el resultado.

4) A lo que quedó súmala 4.

5) El resultado divídela entre 2.

6) A lo que quedó réstale el número que pensaste.

El resultado siempre es 5.

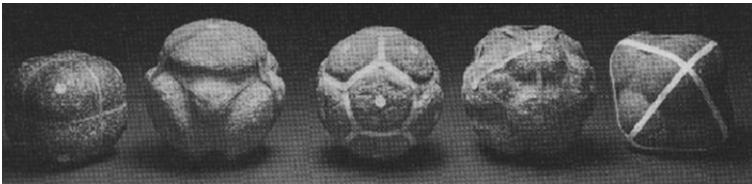
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

4. Adivina números, recuperado 7 de diciembre de 2011, a partir de <http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/mate.htm>.
5. Godino, J. (2003). *Matemática y su didáctica para maestros*, Proyecto Edumat-Maestros.
6. Red Escolar. (2010). Juegos numéricos - enseñanza de las matemáticas. Recuperado diciembre 7, 2011, a partir de http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/lugares/mate2ks.htm
7. Problemas de razonamiento lógico, recuperado 7 de diciembre de 2011, a partir de <http://platea.pntic.mec.es/jescuder/logica.htm>.

Volúmenes de sólidos Geométricos

Introducción del tema

Los pitagóricos consideraban muy importante la observación de que había sólo cinco poliedros regulares posibles. Muchos creen que fueron ellos quienes la hicieron por primera vez y por eso llaman "sólidos pitagóricos" a los poliedros regulares. (Lo más probable es que *la demostración* de esta afirmación se deba a los miembros de esa escuela.) Sin embargo, los arqueólogos han hallado imágenes en piedra de los poliedros regulares, considerablemente más antiguas.



Tierra, fuego, universo, agua y aire.

Imágenes recogidas en un yacimiento neolítico de Escocia.

Por otra parte, en excavaciones realizadas cerca de Pádova (Italia), se halló un dodecaedro etrusco que probablemente era usado como juguete.

Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro "elementos" de los griegos antiguos.

Luego Platón asoció el dodecaedro con el Universo pensando que, dado que era tan distinto de los restantes (¿por sus caras pentagonales?) debía tener relación con la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas. (Por entonces se creía que los cuerpos celestes debían estar hechos de un elemento distinto del que estaban hechas las cosas que rodean al hombre en la Tierra.) De aquí que a los poliedros regulares se los conozca también como *sólidos platónicos*. Artículo tomado de: <http://www.luventicus.org/articulos/03Tr001/index.html>

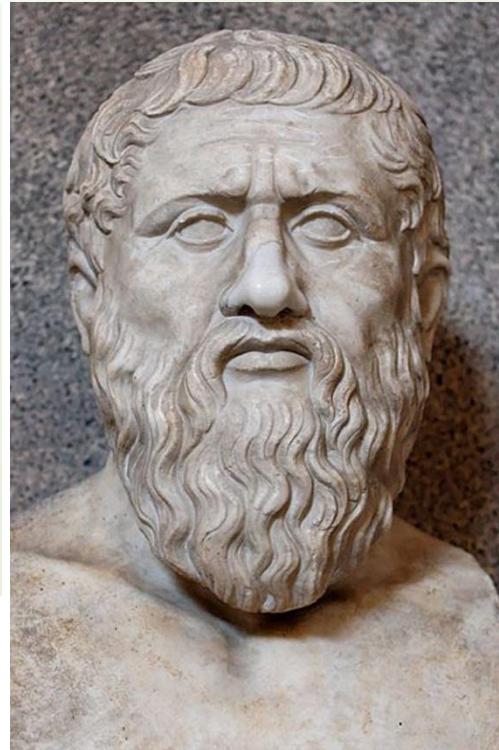


Figura 1. Platón. Fue un filósofo griego, alumno de Sócrates y maestro de Aristóteles, de familia noble y aristocrática.

Competencias por fortalecer

- Resolución de problemas e interpretación de resultados.

Objetivo específico

- Adquirir conocimientos relacionados con la identificación de características de poliedros regulares y volumen de cuerpos geométricos.

Presaber

- Conocimiento de cuerpos geométricos.
- Concepto de Volumen de cuerpos geométricos.
- Operación de Multiplicación.

POLIEDROS

VOCABULARIO CLAVE

Polígonos

Los polígonos son figuras cerradas, formadas por varios segmentos de líneas, a las que llamamos lados.

Triángulo

Polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos (que no se encuentran alineados). Los puntos de intersección de las rectas son los vértices y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo.

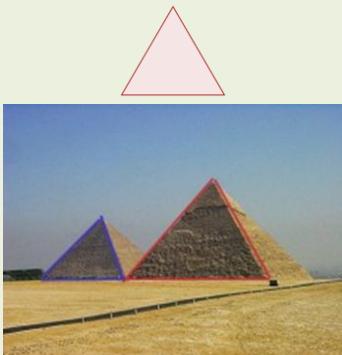


Figura 2. Identificación de figuras planas en cuerpos geométricos.

Cuadrilátero

Polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros pueden tener distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. Otros nombres usados para referirse a este polígono son **tetrágono** y **cuadrángulo**.

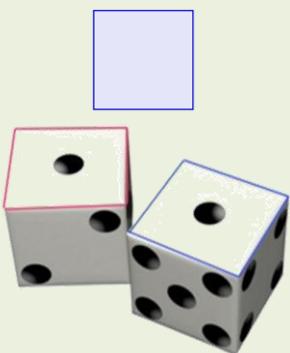


Figura 3. Identificando el cuadrado en un cubo.

Los poliedros son cuerpos geométricos formados por polígonos, es decir sus caras son planas.

Las partes del poliedro son: caras, aristas y vértices.

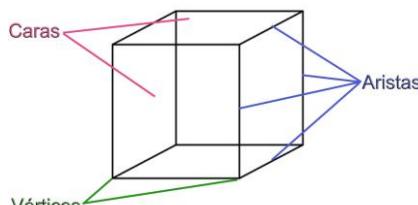


Figura 4. Elementos del cubo.

Caras: polígonos que limitan al poliedro.

Aristas: lados de las caras del poliedro.

Vértices: puntos donde concurren varias aristas.

Interpretación geométrica

Dos planos que se unen en el espacio, forman cuatro regiones, a cada una de estas regiones, se les denomina ángulos diedros.

Si se tienen tres que se cortan mediante rectas que coinciden en un mismo punto, a esto se le llama **triedro**. Si fuesen cuatro planos cortados mediante tres rectas con un punto en común, se le llama **tetraedro**.

Poliedros regulares

Un poliedro es regular si todas sus caras son regulares e iguales y todos sus vértices son del mismo orden.

Se les conoce con el nombre de sólidos platónicos en honor a **Platón** Siglo IV antes de Cristo. Existen solamente cinco poliedros regulares. Entre ellos se identifican: **tetraedro**, **cubo**, **octaedro**, **dodecaedro**, **icosaedro**, y cada uno se relacionaba con los elementos **fuego**, **tierra**, **aire**, **agua** y **el universo**, respectivamente

Tetraedro regular

1. Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros congruentes.
2. En cada vértice concurren tres caras.
3. Tiene seis aristas y cuatro vértices.

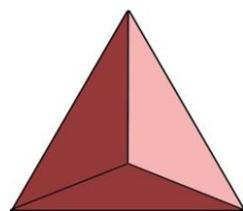
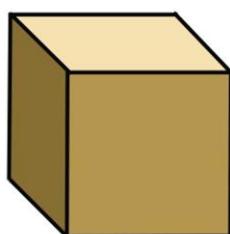


Figura 5. Tetraedro regular.



Hexaedro regular o cubo

1. Tiene seis caras que son cuadrados congruentes.
2. En cada vértice concurren tres caras.
3. Tiene doce aristas y ocho vértices.

Pentágono

Se denomina pentágono a un polígono de cinco lados y cinco vértices.

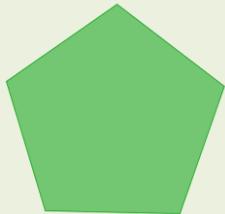


Figura 7. Pentágono.

Representación del pentágono en la naturaleza.



Figura 8. Estrella de mar.

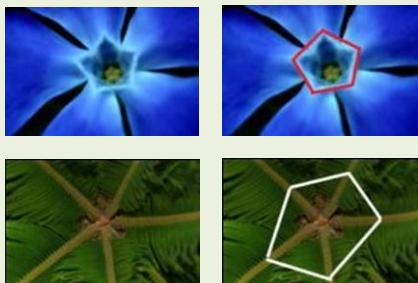


Figura 9. Vegetación.



Figura 10. Construcción.

Octaedro regular

1. Tiene ocho caras que son cuadrados congruentes.
2. En cada vértice concurren cuatro caras.
3. Tiene doce aristas y ocho vértices.

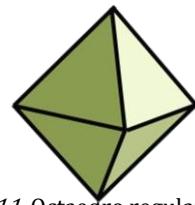


Figura 11. Octaedro regular

Dodecaedro regular



1. Tiene doce caras que son pentágonos regulares congruentes.
2. En cada vértice concurren tres caras.
3. Tiene treinta aristas y veinte vértices.

Figura 12. Dodecaedro regular.

Icosaedro regular

1. Tiene veinte caras que son triángulos equiláteros congruentes.
2. En cada vértice concurren cinco caras.
3. Tiene treinta aristas y doce vértices.



Figura 13. Icosaedro regular.

Teorema de Euler

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler consiguió definir una fórmula que sirve para relacionar el numero de caras, vértices y aristas, aplicables a cualquier poliedro regular.

Euler, establece que la sumatoria del número de caras y el número de vértices de un polígono regular, es igual al número de aristas aumentado en dos.

$$N^{\circ} \text{ de caras} + N^{\circ} \text{ de vértices} = N^{\circ} \text{ de aristas} + 2$$

Para el poliedro regular: tetraedro.



Nº de caras: 4; Nº de vértices: 4; Nº de aristas: 6

Según la fórmula de Euler, al sumar caras y vértices, resulta 8, esto se relaciona con el número de aristas aumentado en dos, en efecto, la solución es $6 + 2 = 8$

$$4 + 4 = 6 + 2$$

Para el poliedro regular: icosaedro.



Nº de caras: 20; Nº de vértices: 12; Nº de aristas: 30.

Si se aplica la fórmula, se tiene:

$$20 + 12 = 30 + 2$$

El número de caras adicionado con el número de vértices, se tiene como resultado 32, equivalente al número de aristas (30) aumentado en 2: $30 + 2 = 32$.

Prisma recto

Prisma recto es el que tiene las aristas laterales perpendiculares a las bases.

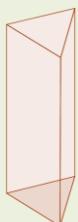
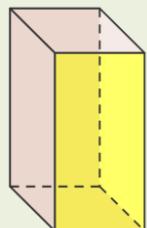


Figura 14. Prisma recto cuadrangular y triangular.

Prisma oblicuo.

En el **prisma oblicuo** las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

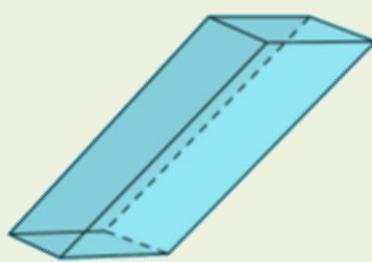
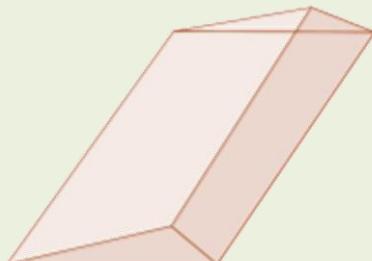


Figura 15. Prisma oblicuo.

Poliedros irregulares

Los poliedros irregulares, poseen en sus caras, polígonos que no son todos iguales. Estos poliedros se clasifican en:

Tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro, octaedro, pirámide, prisma.

Prisma

Poliedro definido por dos polígonos iguales y paralelos, llamados bases, y cuyas caras laterales, son paralelogramos. La recta que une los centros geométricos de las bases se denomina eje del prisma. Los prismas se clasifican en:

1. **Prisma recto:** el eje es perpendicular a las poligonales bases.
2. **Prisma oblicuo:** el eje no es perpendicular a las poligonales bases.

Volumen en cuerpos poliédricos regulares

El volumen de un cuerpo regular se obtiene comparando el volumen del cuerpo con la unidad. Considerar la unidad como un cubo de arista uno, por definición su volumen es 1. Entonces, la medida del volumen de un cuerpo es igual al número de cubos unitarios que contenga.

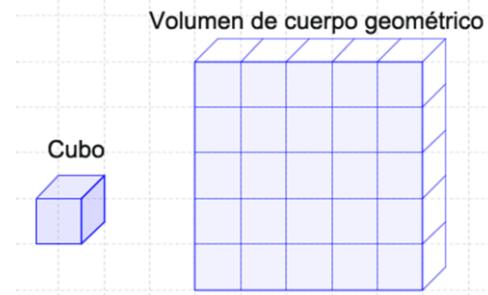


Figura 16. Volumen de cuerpos geométricos.

Unidades de medida de volumen

Considerar un cubo cuya arista mide un centímetro o un metro, un kilómetro, por definición, su volumen tendrá el valor 1, acompañado de la unidad de medida en que se expresa una de sus aristas, elevada a exponente 3.

Volumen del cubo = 1 cm^3 .

Unidades de medida de volumen más utilizadas

Tabla 1. Unidades de medida.

Medida de la arista	Unidad de volumen	Abreviatura
1 milímetro	milímetro cúbico	mm^3
1 centímetro	centímetro cúbico	cm^3
1 decímetro	decímetro cúbico	dm^3
1 metro	metro cúbico	m^3
1 Decámetro	Decámetro cúbico	Dm^3
1 Hectómetro	Hectómetro cúbico	Hm^3
1 Kilómetro	Kilómetro cúbico	Km^3

RESEÑA HISTÓRICA

Algunos investigadores asignan el cubo, tetraedro y dodecaedro a **Pitágoras** y el octaedro e icosaedro a **Teeteto** (415-369 a. C.). Para Platón los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares, asignando el **fuego al tetraedro** (el fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo), la **tierra al cubo** (el poliedro más sólido de los cinco), el **aire al octaedro** (y el **agua al icosaedro** (el agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia o “semilla”), mientras que el **dodecaedro** (el universo).

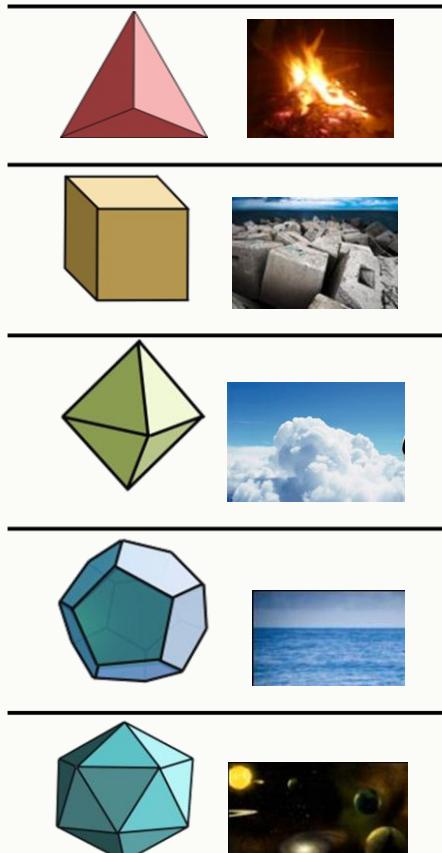


Figura 17. Relación de los poliedros y los

ANTES DE INICIAR

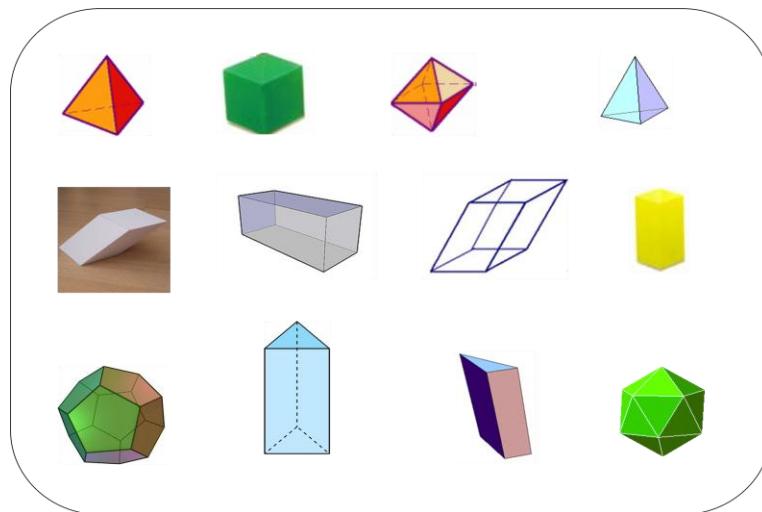
Identificar los conocimientos previos del estudiante, esto permitirá orientar el proceso educativo a la mejora de capacidades fundamentales y adecuación de las actividades.

Despertar en el estudiante la capacidad de pensamiento lógico.

Actividad 1. Clasificación de poliedros.

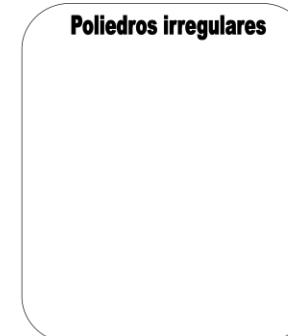
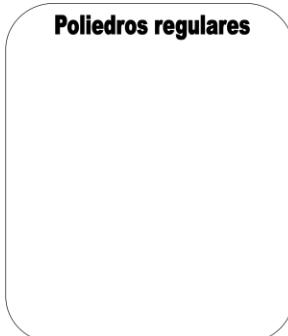
Clasificar los poliedros según sus características en regulares e irregulares.

Lámina 1.



Proceso

1. Brindar a estudiantes fichas con figuras de poliedros de diversas formas y características, tal como se muestran en la lámina 1.
2. Clasificar los poliedros atendiendo las condiciones:
Poliedros regulares.
Poliedros irregulares.
3. Considerar que los poliedros regulares son aquellos que tienen en todas sus caras poligonales iguales.



AVANCE CIENTÍFICO

El microscopio

Instrumento para observar células y otros objetos pequeños que no se pueden ver a simple vista.



Figura 18. Microscopio electrónico.

Gracias al microscopio electrónico ha sido posible visualizar la estructura de los virus.

Imagen de un **adenovirus**, toma la forma de un icosaedro, uno de los cinco cuerpos platónicos.

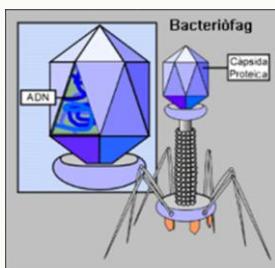
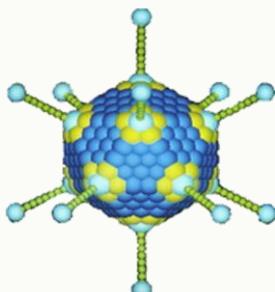


Figura 19. Poliedros regulares en el virus de la gripe.

Actividad 2. Características de poliedros regulares.

Descripción. Identificar en los diversos poliedros regulares, los elementos que lo conforman, determinando el numero de caras, vértices y aristas. Con esta actividad se pretende demostrar la veracidad del teorema de Euler.



Figura 20. Poliedros regulares.

Construir las figuras correspondientes a los poliedros regulares.

Proceso

1. Formar equipos de trabajo de cuatro o cinco integrantes. Proporcionar a cada grupo un conjunto de figuras tridimensionales de los poliedros regulares.
2. En cada uno de ellos, identificar características y nombrar los elementos que los conforman. Caras, vértices, aristas.
3. Tomar el tetraedro, e invitar a los estudiantes a contar el número de caras que lo conforman, a continuación, proceder a contar el número de vértices y el número de aristas. La información obtenida, se escribe en la tabla siguiente:

No de caras	No de vértices	No de aristas

Figura 21. Elementos de los poliedros regulares.

4. Analizar la relación entre el número de caras, vértices y aristas. Proponer la fórmula.

$$N^{\circ} \text{ de caras} + N^{\circ} \text{ de vértices} = N^{\circ} \text{ de aristas} + 2$$

5. Comprobar la fórmula con los resultados de los poliedros regulares.

OBJETIVO

Identificar los elementos que conforman un prisma triangular y comprender el patrón de construcción.

MATERIALES

Prisma triangular.
Cartel con cuadrícula.
Tijeras.

INDICACIONES

Elaborar un prisma triangular previo al desarrollo de la actividad.

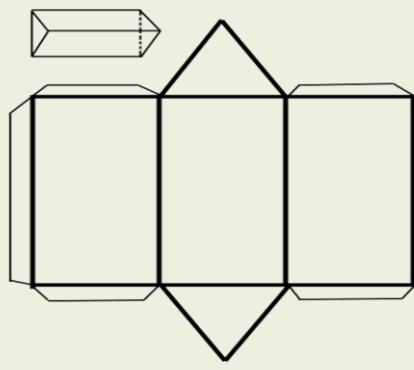


Figura 22. Construcción del prisma triangular.

Recortarlo e invitar al grupo de clase a observar cada una de las partes formadas.

Posicionar el poliedro recortado sobre una cuadrícula, y pedir a los estudiantes dibujar la ilustración sobre una página cuadriculada. Posteriormente desarrollar las preguntas que se establecen en el paso 2.

Proponer el proceso de construcción de prisma cuadrangular de forma similar a la explicación del prisma triangular.

Actividad 3. Construcción de un prisma triangular.

Construir un prisma triangular como el de la ilustración. Para lograrlo, observar y realizar las actividades siguientes.

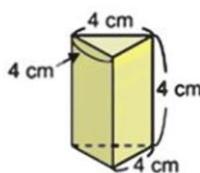


Figura 23. Prisma triangular.

1. Recortar el prisma anterior. Pegarlo sobre una cuadricula. Invitar a los estudiantes a dibujar las figuras que se observan sobre una página cuadriculada.

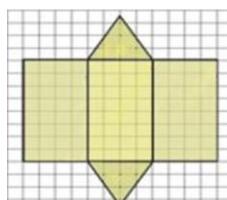


Figura 24. Lados del prisma triangular, superficie lateral.

2. Desarrollar las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué figuras geométricas forman las bases?
 - b) ¿Qué figuras geométricas forman cada cara lateral
 - c) ¿Qué relación hay entre las caras laterales y las bases?
 - d) ¿Cuántas caras laterales hay?
 - e) ¿Dónde está la altura?

Actividad 4. Construcción del prisma cuadrangular.

Mostrar a los estudiantes el prisma cuadrangular previamente elaborado.

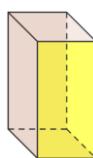
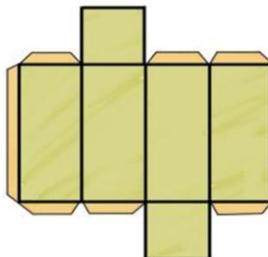


Figura 25. Prisma cuadrangular.

1. Recortar el prisma anterior en torno a las aristas, para obtener la figura siguiente:



¿Qué figuras geométricas forman las bases?
¿Cuántas caras laterales hay?
¿Qué figuras geométricas forman cada cara lateral?

Figura 26. Lados del prisma cuadrangular, superficie lateral.

OBJETIVO

Identificar el volumen de un prisma mediante la utilización de recursos didácticos.

MATERIALES

Juego de lego, y piezas.

Cubos de madera o construidos de papel.

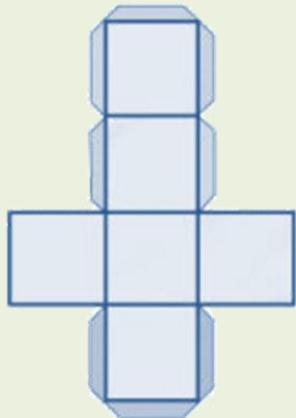


Figura 27. Construcción de un cubo.

INDICACIONES

Utilizar piezas de lego, para introducir en el estudiantado el proceso para obtener el volumen de un prisma.

Las piezas de lego pueden ser sustituidas por cubos de madera, o cubos elaborados de cartón o papel resistente. Se recomienda utilizar cubos pequeños (4 cm de arista).

Elaborar los cubos de cartón o papel resistente con anticipación, y la cantidad suficiente para ser utilizados por los estudiantes.

También, se puede proponer a la clase elaborar al menos dos cubos de longitud específica.

Actividad 5. Medición del volumen de prismas cuadrangulares.

Considerar la siguiente estructura



La figura corresponde a un prisma rectangular, para conocer el volumen de este prisma, es necesario identificar la cantidad de cubos equivalentes a una unidad cúbica, que contiene esta figura.



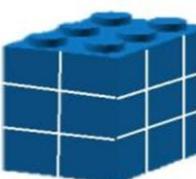
Si se considera una pieza cúbica como unidad de medida. El volumen de la figura se describe como la expresión numérica de todas las piezas que posee la figura.



Para dicho propósito, tomar uno de los niveles de la figura, el cual se llamará base. En esta figura, se encuentran seis cubos. El prisma se encuentra formado por cinco niveles similares a esta, puestas una sobre otra.



Si se toman dos de los niveles de la figura, se tienen en total 12 cubos, que resulta de multiplicar los 6 cubos del primer nivel o base por el número de niveles superpuestos, en este caso 2: entonces $6 \times 2 = 12$.



Con tres niveles, se tiene un total de 18 unidades, que resulta de multiplicar el total de cubos que tiene la base (6) por el número de niveles posicionados (3): $6 \times 3 = 18$.

El volumen del prisma, o el número de unidades cúbicas que contiene un prisma, está definido por el número de unidades de la base por el total de niveles de la figura: **el volumen de un cubo se define como el producto del área de la base y la altura.**

$$V = \underline{6} \times \underline{5}$$

Volumen = Área de la base **X** altura

OBJETIVO

Determinar el volumen de cuerpos geométricos utilizando fórmulas matemáticas.

MATERIALES

Prismas cuadrangulares y rectangulares de previa fabricación.

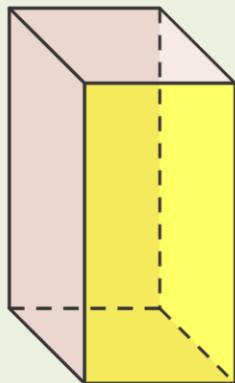


Figura 28. Prisma cuadrangular.

Regla graduada, lápiz, lapicero.

INDICACIONES

Orientar al grupo de estudiantes, en relación a las partes del prisma.

Hacer referencia a la actividad 4, donde se reconoce que el volumen de un prisma se relaciona con la cantidad de cubos unitarios que contiene, y la fórmula resultante, expresa que el volumen se define como el producto del área de la base y la altura.

Después de la actividad, brindar al grupo, prismas de diversas longitudes, para que estos, con ayuda de la regla graduada, midan la longitud de cada uno de los lados y encuentren el volumen de las figuras.

Actividad 6. Utilización de fórmulas para determinar el volumen de un prisma rectangular y cuadrangular.



Figura 29. Longitudes de un prisma cuadrangular.

En la ilustración se representan los elementos del prisma que se utilizan para determinar el volumen de este: largo, ancho y altura.

El volumen de un prisma, se define como el producto entre el área de la base y la altura. La base del prisma ilustrado, posee longitudes **3 cm y 5 cm**.



Figura 30. Superficie de la base.

El área de la base, se describe como el producto de las longitudes de dos de sus lados adyacentes, **largo y ancho**.

$$\text{Área de la base: } A_b = 3 \times 5$$

$$A_b = 15 \text{ cm}^2$$

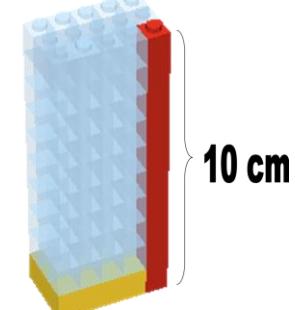


Figura 31. Volumen de un prisma cuadrangular.

El volumen se expresa en centímetros cúbicos (cm^3) que indica que el prisma se encuentra formado por 150 unidades cúbicas, de arista: 1 cm.

REFUERZO: Presentar a los estudiantes prismas de diferentes longitudes. Los estudiantes identificarán las medidas de las longitudes utilizando regla graduada. Luego encontrarán el volumen.

OBJETIVO

Determinar el volumen de cuerpos geométricos utilizando fórmulas matemáticas.

MATERIALES

Prismas triangulares que tengan un triángulo rectángulo de base.

INDICACIONES:

Construir un prisma con base triangular, cuya base es un triángulo rectángulo.

Utilizar el ejemplo de construcción que se muestra en la actividad. Las longitudes de los lados del polígono base, son 3 cm, 4 cm y 5 cm. Para construir prismas de mayor tamaño, utilizar los múltiplos de estas magnitudes.

Ej: 6 cm, 8 cm, 10 cm.

HISTORIA

El triángulo cuyos lados miden (3 cm, 4 cm y 5 cm) fue utilizado por egipcios para representar la perpendicularidad. Es decir, el triángulo que posee estas medidas, es un triángulo rectángulo.

Actividad 7. Aplicación de fórmula para obtener el volumen de prismas triangulares.

Se estudiarán prismas triangulares, cuyas bases se determinan por triángulos rectángulos.

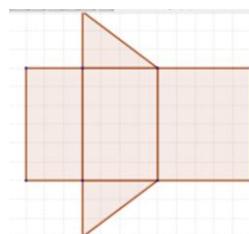
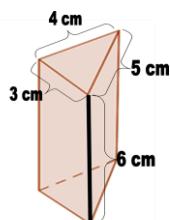


Figura 32. Prisma triangular.

Descripción

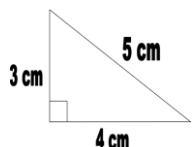
Recordar que el volumen de un prisma se define como el producto del área de la base por la altura.

La base, en un prisma triangular es, en efecto, un triángulo. Recordar que el área de un triángulo se define como el producto de base por altura dividido entre 2.

NOTA: Es necesario aclarar en el proceso, la diferencia entre la altura del triángulo y la altura del prisma, debido a que, en el prisma se le llama altura al segmento perpendicular que une ambas bases.

Proceso

- Definir el área de la base.



Para conocer el área del triángulo se necesitan dos elementos: la base del triángulo cuya magnitud es 4 cm y la altura de este, que por ser rectángulo, corresponde a 3 cm.

Figura 33. Área del triángulo.

El área del triángulo, se obtiene mediante la operación:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{(\text{medida de la base} \times \text{medida de la altura})}{2}$$

$A_b = \frac{4 \times 3}{2}$; Entonces, el área de la base del prisma es:

$$A = 6 \text{ cm}^2$$

- Para conocer el volumen, se multiplica el área de la base (6 cm^2) y la altura (6 cm)

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura del prisma}$$

$V = 6 \times 6$; Entonces el volumen del prisma corresponde a:

$$V = 36 \text{ cm}^3$$

OBJETIVO

Determinar el volumen de prismas oblicuos.

MATERIALES

10 libros que tengan cualidades físicas congruentes.

INDICACIONES

Reunir diez libros de medidas similares, y formar con ellos un prisma oblicuo, como el que se presenta en las figuras.

Preguntar a los estudiantes, si es posible conocer el volumen de esta figura.

Al enderezar los libros, se forma un prisma rectangular, semejante a los que se han trabajado previamente.

Después de escuchar la interpretación de los estudiantes, en relación con la actividad, invitarlos a encontrar el volumen del prisma formado con los libros, utilizando regla graduada.

Realizar las mediciones y aplicar procedimiento.

Actividad 8. Volumen de prisma oblicuo.

Proceso

Modelar un prisma rectangular oblicuo con un conjunto de papeles o libros que posean características físicas iguales y las mismas longitudes.

Después, enderezar los libros para formar un prisma rectangular recto con el mismo volumen.

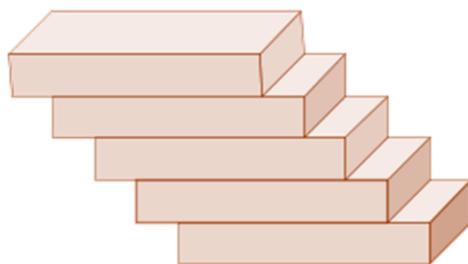


Figura 34. Simulación de prisma oblicuo y la relación del volumen con el prisma recto.

Invitar a los estudiantes a analizar la situación y brindar conclusiones y comentarios en relación al proceso.

CONCLUSIONES: El volumen del prisma oblicuo se describe de forma similar al volumen de un prisma recto.

Dicho de otra manera, la correspondencia entre el área de la base y la altura, prevalece.

En un prisma oblicuo, la altura no es la longitud de una de sus aristas, sino la longitud de un segmento perpendicular que une la prolongación de la base inferior con la base superior.

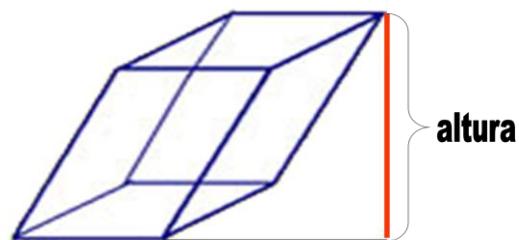


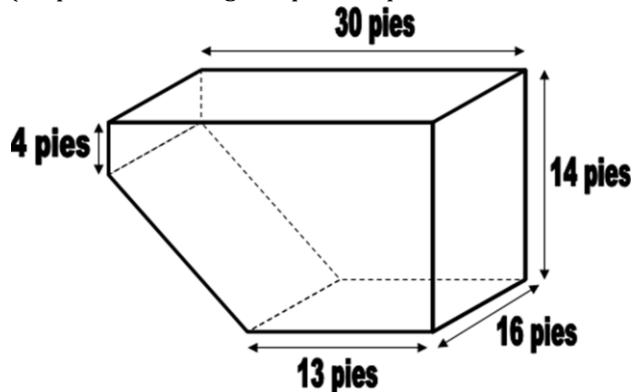
Figura 35. Volumen del prisma oblicuo.

El volumen de un prisma oblicuo es el mismo que el volumen de un prisma recto que tiene la misma base y la misma altura.

GUÍA DE EJERCICIOS

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una piscina tiene la forma del prisma que se muestra. ¿Cuántos galones de agua puede contener la piscina? (Un pie cúbico de agua equivale aproximadamente a 7.5 galones).



Identifica los cuerpos geométricos que unidos, forman la estructura de la piscina.

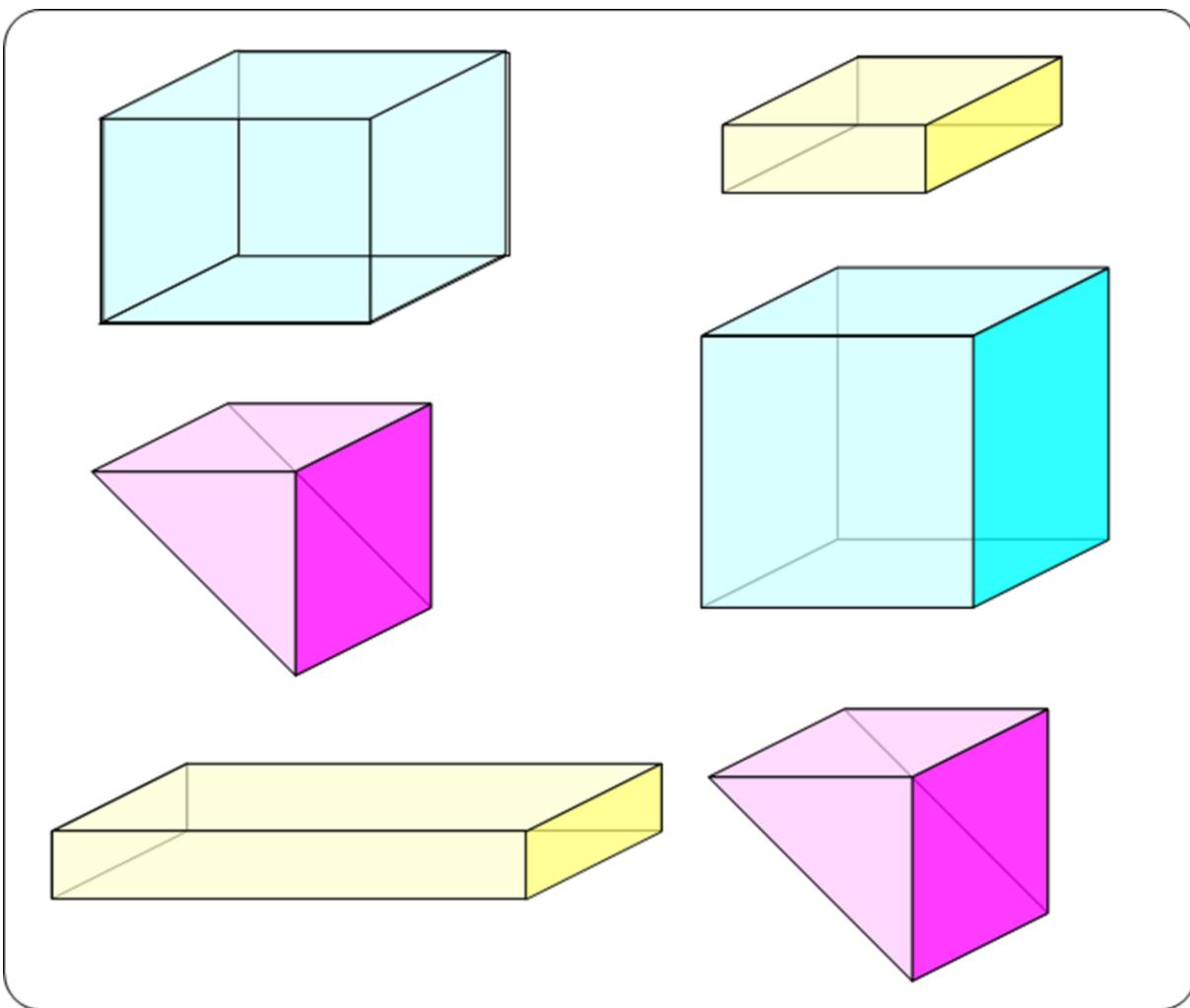
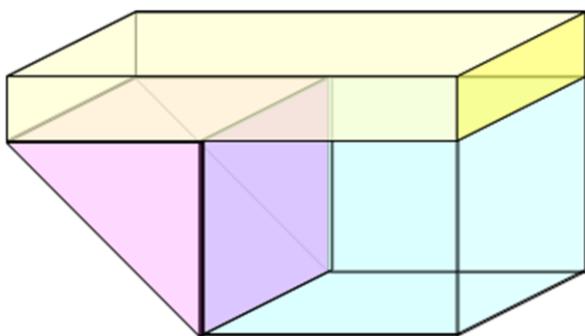
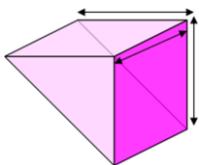
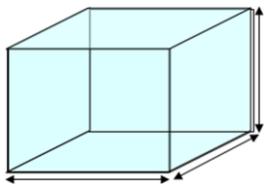


Figura 1. Volumen de la piscina

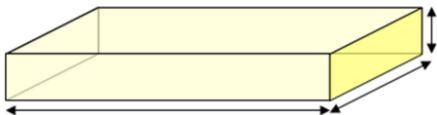


La Figura 1, muestra las figuras que forman la estructura de la piscina.

Determinar las dimensiones de las figuras y encontrar el volumen de estas.



Las dimensiones del largo, ancho y altura, se determinan relacionando la figura seccionada con la figura inicial que muestra las dimensiones de la piscina en pies.



Sumar los volúmenes de las figuras.

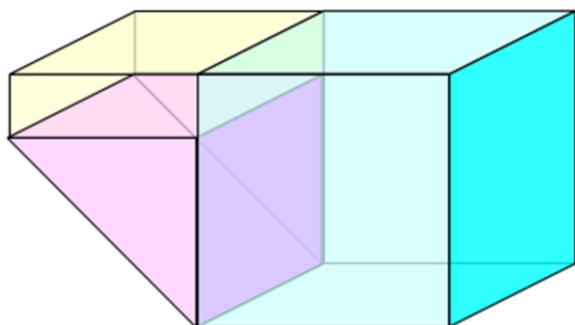
Volumen de la piscina: _____

Por cada pie cúbico, se necesitan 7.5 galones.

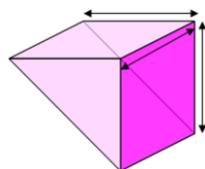
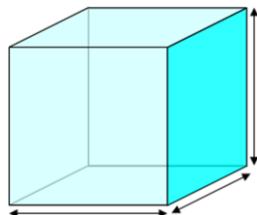
¿Cuántos galones necesitas para llenar la piscina?

_____.

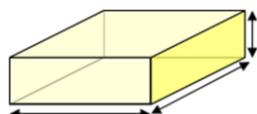
Figura 2. Volumen de la piscina



Seguir procesos similares a los utilizados en la Figura 1 para determinar el volumen de la piscina y en consecuencia, la capacidad en galones de esta.



Observar que la piscina se ha seccionado diferente a la Figura 1. Verificar que el volumen de la piscina permanece constante.



Sumar los volúmenes de las figuras.

Volumen de la piscina: _____

¿Cuántos galones se necesitan para llenar la piscina? _____.

Referencias bibliográficas

1. Arranz, J. 2006, *Geometría activa*, tomado de: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/index.htm>
2. Cano O. (2006) *Geometría* Primera parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
3. Cano O. (2009) *Geometría* Segunda Parte. Correspondiente al Quinto año de humanidades.
4. Pogorélov A.V., (1974), *Geometría elemental*, Editorial Mir, Moscú, traducido del ruso por Carlos Vea, Catedrático de Matemáticas superiores.
5. Stock.xchng (2001-2009) Imágenes e ilustraciones tomadas de: <http://www.sxc.hu/photo>

**Viceministerio de Ciencia y Tecnología
Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación**

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera “viva” en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación).

