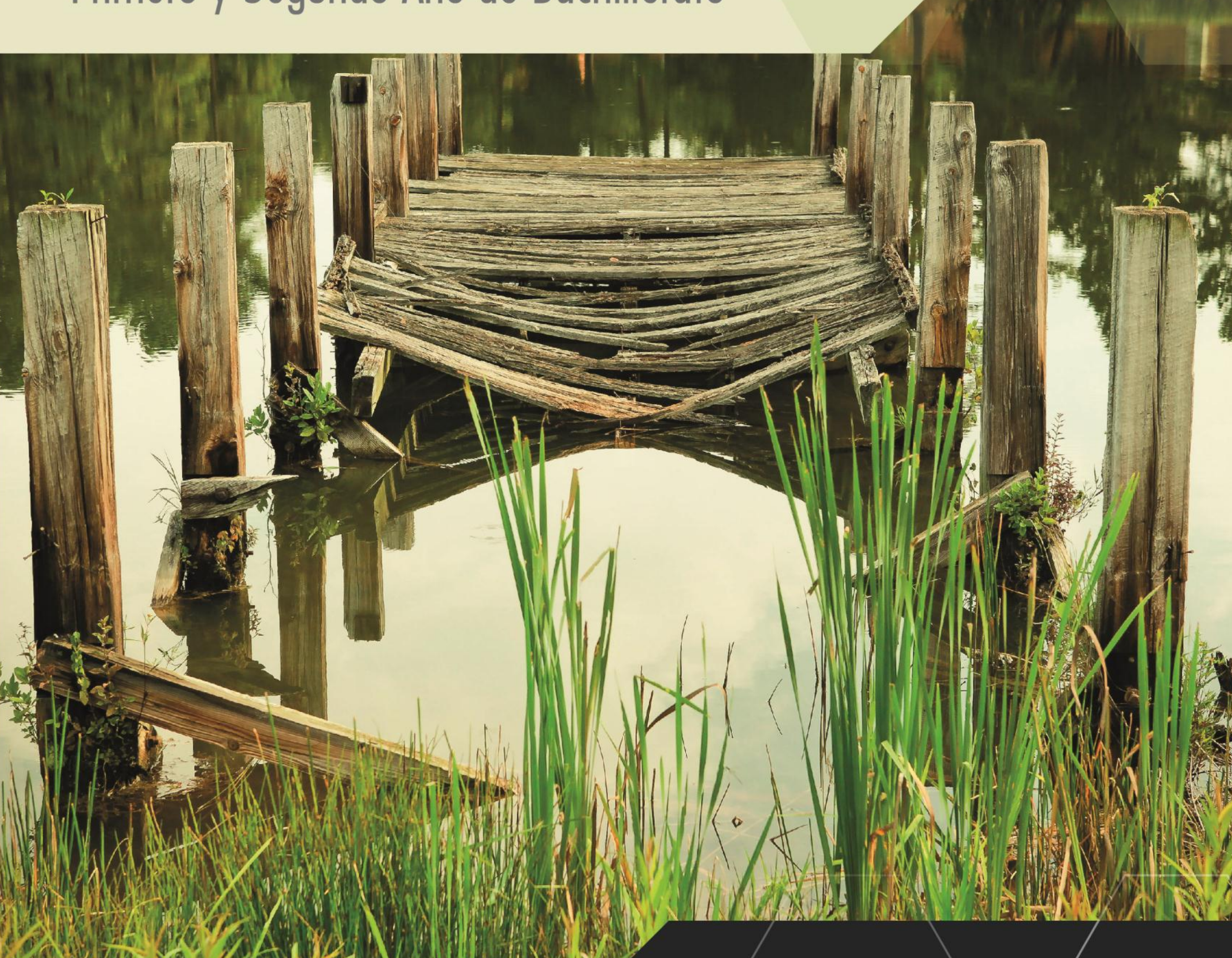
Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

Primero y Segundo Año de Bachillerato



10

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Ministerio de Educación

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Material de Autoformación e Innovación Docente

Para 1° y 2° año de Bachillerato

Versión Preliminar para Plan Piloto

Plan Social Educativo

Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Figueroa
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Simon Alfredo Peña Aguilar
Autor

Félix Abraham Guevara Menjívar
Oscar de Jesús Aguila Chávez
Revisión técnica y diagramación

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Sergio Armando Márquez
Diseño de Portada

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2510-4217, + (503) 2510-4218, + (503) 2510-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo "Vamos a la Escuela" 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para bachillerato. El propósito de éstos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o "pivotes" que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

¿Por qué material de autoformación e innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y el sub programa "Hacia la CYMA" que se desarrolla durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular, en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de materiales de autoformación e innovación docente para docentes.

Este material de autoformación e innovación para docentes, tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática y Ciencias desde parvularia hasta educación media, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica.

Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes considerados fundamentales para el conocimiento de los docentes, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, innovación docente, y de esta manera mejorar la calidad de la educación. Se busca que mediante la formación científica se logren cambios en las condiciones sociales y económicas que permitan a la población salvadoreña alcanzar una vida digna.

El enriquecimiento y profundización de los temas propuestos, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener cada estudiante para alcanzar sus propósitos de formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[1], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática[2].

---

[1] José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.
[2] Miguel de Guzmán Ozámiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya[3] en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[4].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de la estructura de los cuadernillos

El cuadernillo de Matemática de bachillerato es un material de apoyo para el docente, considerado Material de Autoformación e Innovación Docente que permite reorientar lecciones que se desarrollan desde distintos materiales a un entorno participativo y de investigación fundamentado en la resolución de problemas, donde el estudio de la Física, Química y Biología en conjunto con la Matemática fortalecen competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de la juventud salvadoreña. Se proponen diez temas que llamamos contenidos pivotes, que por su importancia en la formación de competencias matemáticas, forman parte del enriquecimiento curricular, profundizando tanto en la explicación de los contenidos, como haciendo propuestas de abordaje metodológico fundamentalmente en la resolución de problemas, con el propósito de que se puedan emular en el aula tanto maestros como alumnos puedan desarrollar habilidades intelectuales propias del pensamiento y del quehacer científico.

---

[3] George Pólya (1887-1985), matemático Húngaro, How to solve it, Pricenton University Press.
[4] Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

Las lecciones se estructuran normalmente en once partes, las cuales se detallan a continuación:

a. **Título.** Condensa la idea central de la lección. Se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
b. **Competencia matemática.** Son las habilidades y destrezas que el estudiante puede adquirir al finalizar la lección.
c. **Objetivos de la lección.** Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.
d. **Descripción.** Presenta todos aquellos puntos relevantes que se tratarán en la lección, haciendo énfasis en las características (generalidades, importancia, usos, etc.) que se desarrollan.
e. **Tiempo.** Es la duración aproximada para el desarrollo de la lección. El tiempo puede variar según la planificación didáctica de la clase.
f. **Contenido de la lección.** En esta parte se puede ver los elementos de contenido que componente la lección.
g. **Vocabulario.** En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos del contenido de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda en el momento de leer el marco teórico de la lección.
h. **Marco teórico.** Esta sección aborda los conceptos, proposiciones y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar. La información se respalda en principios, leyes, clasificaciones, características, propiedades, etc. Se acompaña de ilustraciones, esquemas, modelos y otros con la intención de que el contenido quede lo más claro posible.
i. **Ejercicios.** Las actividades de aplicación serán para contribuir al fortalecimiento del marco teórico, asimilando los conceptos de una manera práctica. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental; éstas se refieren a la ejecución de prácticas significativas de aprendizaje que van desde lo simple a lo complejo, desarrollándose con distintas alternativas de abordaje plasmando al menos tres alternativas de solución comentadas por el docente. Estas contienen estrategias de solución encaminadas a fortalecer la capacidad de razonamiento lógico.
j. **Examen de conocimientos.** En este espacio se abordan una evaluación de conocimientos que permite verificar el grado de internalización de la lección, con el propósito de ir mejorando en el proceso de asimilación de los conceptos y de su aplicación en la vida cotidiana
k. **Bibliografía**. Acá podemos encontrar los títulos de la literatura utilizada para enriquecer la lección.

LECCIÓN 1 1° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 8 HORAS CLASE

LA LÍNEA RECTA

Figura 1.1

René Descartes (1596-1650) Filósofo y matemático francés. Fue quien inventó el plano cartesiano. Fuente: www-history.mcs.st-andrew.ac.uk/PictDisplay/Descartes.html.

Competencias a formar:

1. Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.).
2. Seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible.
3. Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información o a la solución de los problemas

Objetivos de la lección

1. Determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares.
2. Identificar las aplicaciones de la línea recta en la vida diaria.

Pre-saberes

1. El plano Cartesiano.
2. Resolución de ecuaciones de Primer grado.
3. Áreas de Triángulos.
4. Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

Descripción

Se estudia cómo graficar rectas en el plano cartesiano y cómo determinar su pendiente; además se deducen las ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada que pasan por un punto específico. Se muestran aplicaciones a problemas relacionados con la física, actividades para que realicen en el aula, ejercicios resueltos y una prueba objetiva.

Contenido

1.1 Ubicación de puntos en el plano cartesiano

Ubicar puntos en un plano es importante para localizar personas u objetos en un mapa, también lo utilizan los médicos pediatras para llevar el control de la relación peso-talla, edad-talla, edad-peso de sus pacientes; los economistas, para analizar relaciones costos-ingresos; los físicos e ingenieros para relacionar magnitudes físicas, en general es muy útil para estudiar cómo se relacionan dos variables, una independiente, que se coloca en el eje de las "x" y la dependiente, que se coloca en el eje de las "y".

Ejemplo 1

Para ubicar el punto (1, 2) en el plano, en el eje x se ubica al 1, en el eje y se ubica al 2, luego se traza a partir de 1 una recta vertical y a partir de 2 una recta horizontal, donde se interceptan estas rectas, es la ubicación del punto (1, 2).

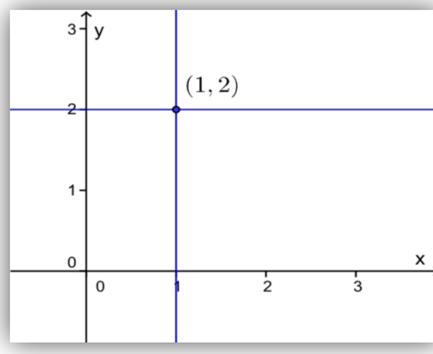


Figura 1.2

Ejemplo 2

Ubicar los puntos (-1, 4), (3, -2) y (-2, -1); en el mismo plano cartesiano.

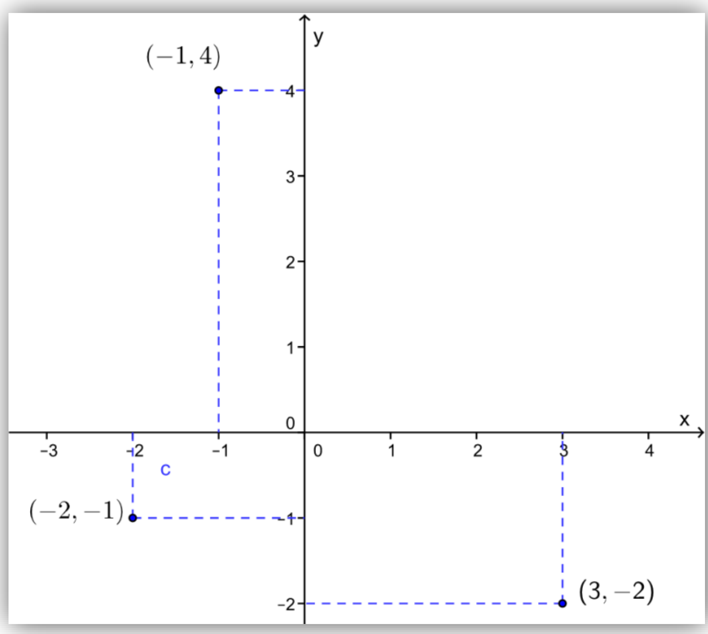


Figura 1.3

Actividades para realizar en el aula

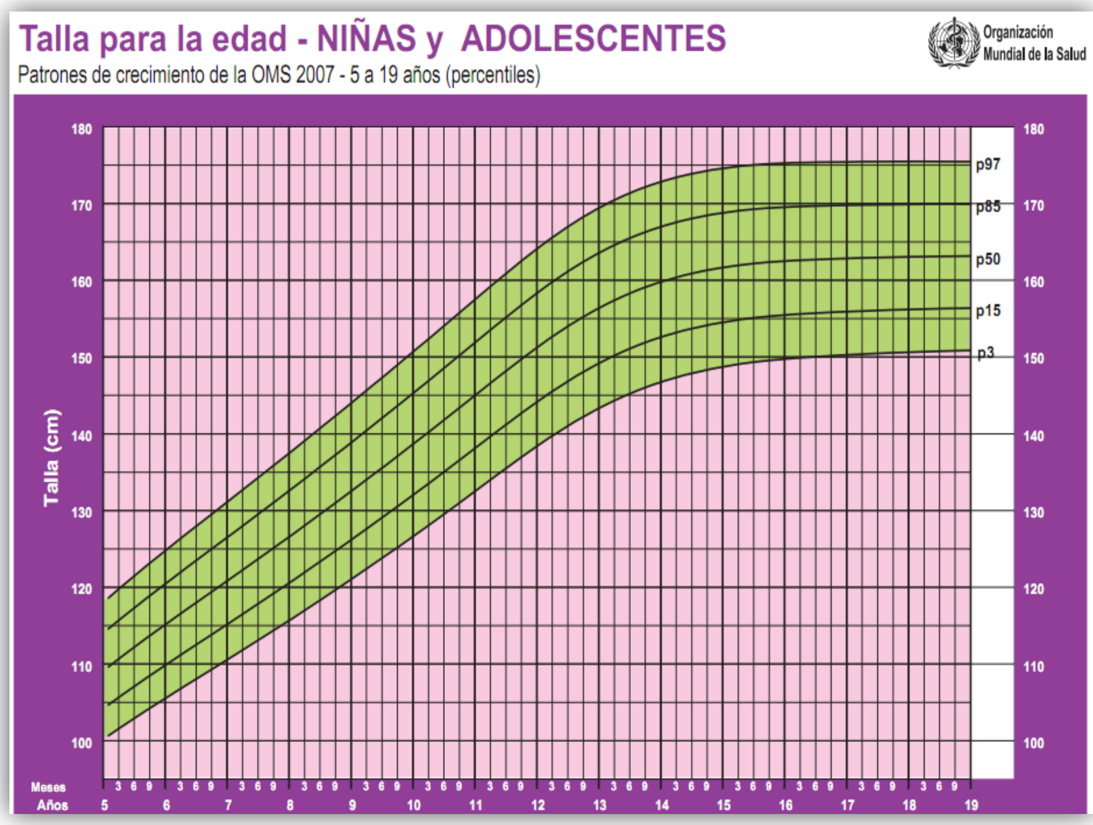
1. Construya con los ladrillos del piso del aula un plano cartesiano y solicite a sus alumnos que ubiquen diferentes puntos.

2. Utilizar un tablero de damas como plano cartesiano para ubicar diferentes puntos.

3. Solicite a cada alumno/a le proporcione los datos de su talla y edad. Proyecte en la pizarra los gráficos de la Organización Mundial de la Salud OMS que se presenta a continuación, y luego que cada alumno/a ubique sus datos en dicho gráfico.

   Comenten los resultados y destaque la importancia de una alimentación saludable. Si su institución no cuenta con cañón electrónico, otra alternativa es que cada alumno tenga una fotocopia de dicho gráfico.

   En éste caso, elabore una tabla en la pizarra, organizando los datos de todo el alumnado. Todos los alumnos graficarán en su fotocopia los datos de todo el salón. Observe que al pie del gráfico se encuentra la dirección electrónica donde lo puede encontrar.



Fuente:http://www.saluddealtura.com/fileadmin/PDF/CURVASOMS/Talla_Ninos_5_a_19_anos.pdf

Figura 1.4

¿Sabes cómo hacen los albañiles para construir las paredes verticales y los pisos horizontales?

Figura 1.5 Albañil sosteniendo una plomada

Figura 1.6 Acercamiento de la burbuja de aire del nivel

Figura 1.7 Nivel

Respuesta: Para construir paredes verticales se utiliza un instrumento llamado plomada (Fig. 1.5), éste ayuda a dar la verticalidad a la pared. Para dar la dirección horizontal a los pisos de las casas se utiliza una regleta llamada Nivel, este es un aparato que sirve para verificar si el piso está horizontal (Fig. 1.7). Cuando la regleta está totalmente horizontal, la burbujita (Fig. 1.6) queda en el centro; si la burbuja se va a un lado indica que el terreno donde se ha colocado la regleta no está horizontal.

1.2 Gráfica de ecuaciones lineales en el plano cartesiano

Para graficar una ecuación de la forma $y = ax + b$, obtenemos dos puntos que la satisfagan y luego trazamos una recta entre ellos.

Ejemplo 3

Graficar la recta $y = 2x$, en este caso $a = 2$ y $b = 0$

Tomamos valores cualesquiera para x (llamada variable independiente o de las abscisas), y encontramos los valores respectivos de la variable y (llamada variable dependiente o de las ordenadas) evaluando en la ecuación de la recta. Ubicamos estos puntos en el plano cartesiano, obteniendo así:

x	$y=2x$	$(x,\ y)$
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)

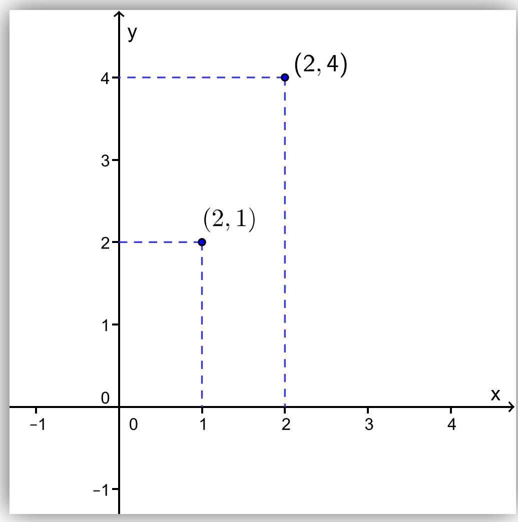


Figura 1.8

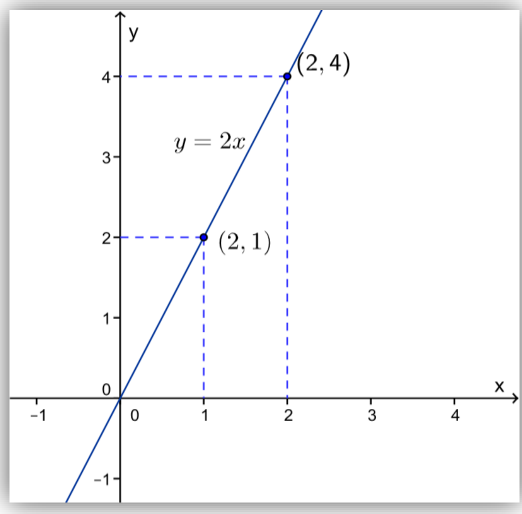


Figura 1.9

Luego trazamos la recta por los dos puntos y de esta manera tenemos la gráfica buscada.

Aquí tenemos el gráfico de la recta $y=2x$, nótese además que ésta pasa por el origen y de hecho lo hacen todas las rectas de la forma $y=ax$; también pudo haberse tomado el punto (0, 0) en la tabla inicial, y de esta manera unir el punto (0, 0) con (2, 4) ó con (1, 2); en todo caso solamente necesitaremos ubicar dos puntos y así construir el gráfico de la recta en estudio.

1.2.1 Desplazamiento vertical de una recta

La gráfica $y=ax+b$ es un desplazamiento vertical de la gráfica $y=ax$. Será un desplazamiento hacia arriba si $b>0$, y el desplazamiento será hacia abajo en el caso contrario.

Ejemplo 4

Graficar $y_1=2x+1$. En la Figura 1.9 tenemos el gráfico de la recta $y=2x$, ahora para graficar $y_1=2x+1$, nótese que solo estamos sumando una unidad a todas las imágenes de la recta $y=2x$, y por lo tanto el resultado de la gráfica de la nueva recta será una unidad hacia arriba de la anterior.

x	$y_1 = 2x+1$	$(x,\ y_1)$
0	1	$(0, 1)$
$-\frac{1}{2}$	0	$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

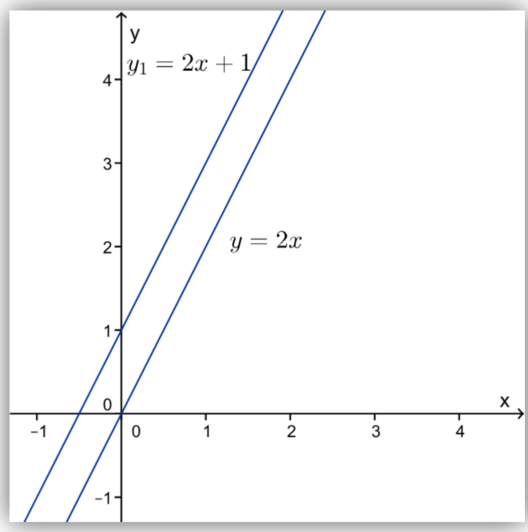


Figura 1.10

Este también es un ejemplo de rectas paralelas, esto es, que nunca se cortan. En general $y = ax + b$ es un desplazamiento vertical de $"b"$ unidades hacia arriba si $b > 0$ (hacia abajo en caso contrario) de la gráfica de $y = ax$.

E j e r c i c i o s p a r a r e a l i z a r e n e l a u l

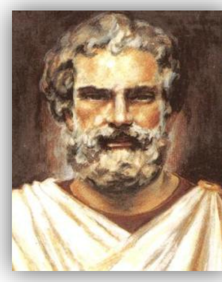
1. *Gráfico de costos.*
   Suponiendo que la libra de frijoles cuesta $1.00, graficar en el plano el costo de 0 libras, 1 libra, 2 libras y unir los puntos por un segmento rectilíneo. Por medio de la gráfica lineal estimar el costo de 5 libras.

2. *Velocidad constante.*
   Si un vehículo se desplaza con una velocidad constante de 60 km/h, graficar en un plano, espacio contra tiempo, los puntos después de 1 hora, 2 horas y 3 horas. En el eje x colocarás el tiempo t y en el eje de las y el espacio recorrido e.

3. *Densidad del agua.*
   Al medir tres volúmenes de agua en centímetros cúbicos (cm^3) y su masa correspondiente en gramos (g) se obtuvieron datos experimentales que se presentan a continuación. Grafícalos y traza una recta que pase lo más cerca posible de todos los puntos. Determina la pendiente de dicha recta. Sabiendo que la densidad de una sustancia es la masa entre el volumen, ¿Cuál será la densidad del agua? ¿En cuál eje colocarás la masa y en cuál el volumen?

Volumen (cm^3)	1	4	6	10
Masa (g)	1	4.2	5.4	10

1.3 Teorema de Thales en un triángulo



Tales de Mileto
Figura 1.11

Thales de Mileto nació durante la década 620 a. de C., es el más antiguo de los Siete Sabios de Grecia y aunque se sabe muy poco de su vida, no hay duda en considerarle como el padre de la Geometría.

A continuación se presenta un caso particular del teorema de Thales, El teorema se enuncia así:

''En dos triángulos semejantes sus lados homólogos son proporcionales''

Demostración. Sean ΔABC y ΔADE, dos triángulos semejantes. Entonces se probará que tienen lados homólogos proporcionales.

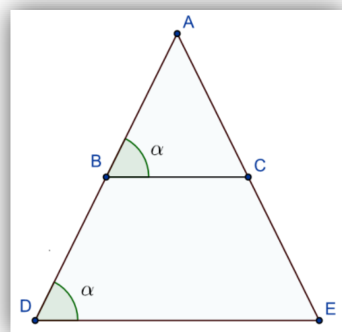


Figura 1.12

Esto es: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

Los triángulos ΔABC y ΔADE, tienen los mismos ángulos ya que son semejantes.

Trazamos la altura del ΔABC, que pasa por C y la llamaremos I; luego el área del ΔABC, denotada por (ΔABC) es:

$$(\Delta ABC) = \frac{1}{2} I\,\overline{AB};\ \text{y el área del } \Delta ACD, \text{ es } (\Delta ACD) = \frac{1}{2} I\,\overline{AD}$$

Tal como se muestra en la Figura 1.13. Luego tracemos la altura del ΔABC que pasa por B y la llamaremos H y tenemos lo siguiente, según Figura 1.14

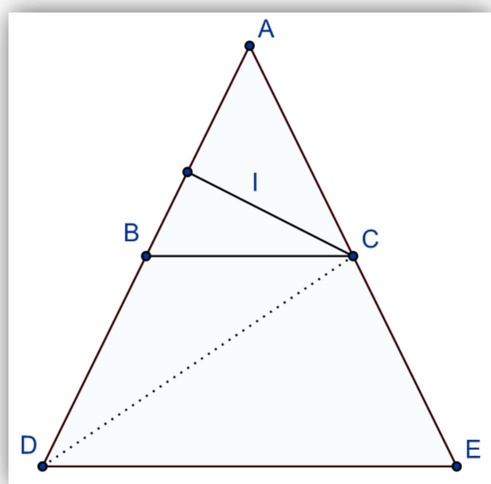


Figura 1.13

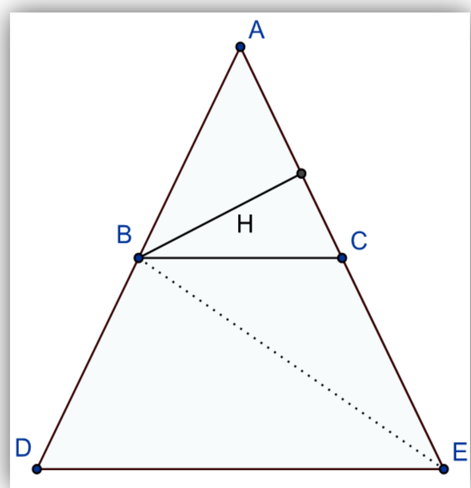


Figura 1.14

$$(\Delta ABC) = \frac{1}{2} H \overline{AC}; \quad (\Delta ABE) = \frac{1}{2} H \overline{AE}$$

Luego comparamos las áreas de los triángulos ΔBED y ΔDCE y obtenemos:

$$(\Delta BED) = \frac{1}{2} \overline{DE} L \quad \text{y} \quad (\Delta DCE) = \frac{1}{2} \overline{DE} L$$

Donde L es la altura del trapecio. Entonces los dos triángulos tienen la misma área.

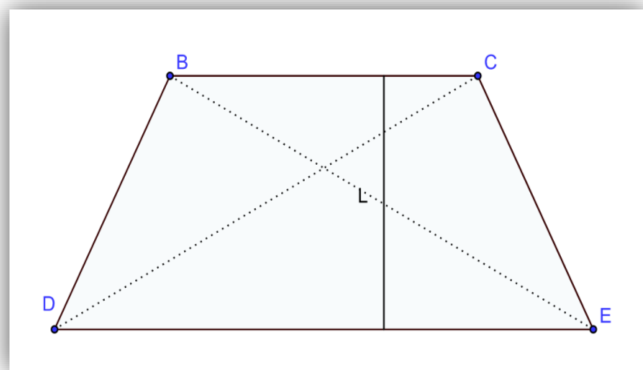


Figura 1.15

De la Figura 1.15 podemos deducir:

$(\Delta BED) + (\Delta BEC) =$ Área del trapecio $= (\Delta DCE) + (\Delta DCB)$, y como se tiene que

$$(\Delta BED) = (\Delta DCE)$$

Luego también las áreas (ΔBEC) y (ΔDCB) son iguales y por lo tanto $(\Delta ABE) = (\Delta ACD)$.

Haciendo un repaso de la lista de igualdades obtenidas, tenemos:

$$\frac{1}{2} I \overline{AB} = (\Delta ABC) = \frac{1}{2} H \overline{AC}; \quad \frac{1}{2} H \overline{AE} = (\Delta ABE) = (\Delta ACD) = \frac{1}{2} I \ \overline{AD}$$

Dividiendo obtenemos que: $\dfrac{\frac{1}{2} I \overline{AB}}{\frac{1}{2} I \overline{AD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cancel{H} \overline{AC}}{\frac{1}{2} \cancel{H} \overline{AE}} \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$.

Lo que completa la demostración.

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición de la pendiente de una recta.

En la Figura 1.16 supongamos que los puntos A, B y C están sobre una línea recta y tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) respectivamente, donde los triángulos ΔAEC y ΔBDC son semejantes, luego podemos aplicar el teorema de Thales en los dos triángulos, obteniendo:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}. \text{ Esto es: } \quad \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = m.$$

Llamamos a m pendiente de la recta, y es obtenida al dividir la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las respectivas abscisas de dos puntos cualesquiera de la recta; observemos que coincide con la tangente del ángulo que determina la recta con el eje x.

Este resultado nos permite reafirmar que todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $\frac{y}{x} = m =$ constante, satisfacen la proporcionalidad resultante del teorema de Thales, esto es, todos los puntos $(0,0)$ y (x, mx) están en una línea recta, porque solamente de esta manera se forman triángulos semejantes.

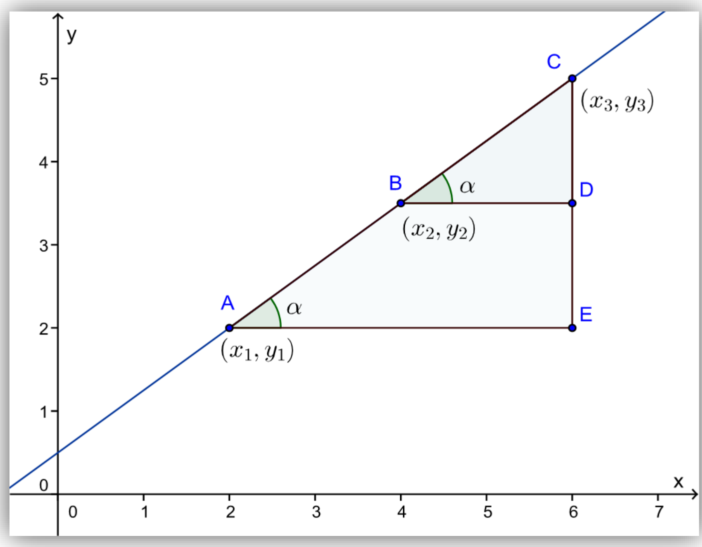


Figura 1.16

Ejemplo 5

Encontrar la pendiente de la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Primero encontremos dos puntos que satisfagan la ecuación, es decir; dos puntos que estén contenidos en la recta dada. Sean $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. De aquí que $y_1 = -2$ y $y_2 = -\frac{3}{2}$, es decir:

x	$y=\frac{1}{2}x-2$	$(x,\ y)$
0	-2	(0, -2)
1	$-\frac{3}{2}$	$\left(1,-\frac{3}{2}\right)$

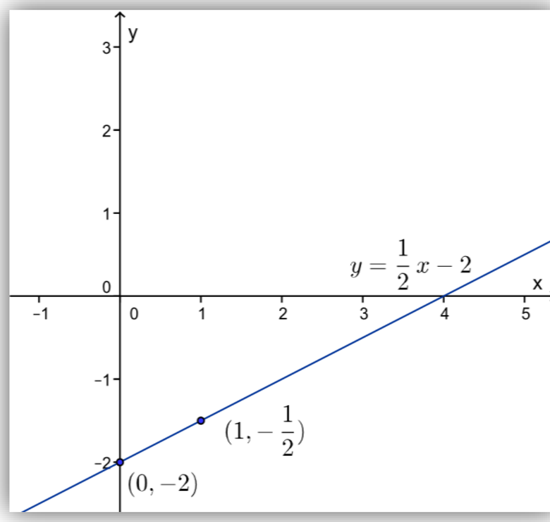


Figura 1.17

Luego la pendiente de la recta será $m=\dfrac{-\frac{3}{2}-(-2)}{1-0}=\dfrac{1}{2}$.

La pendiente de la recta $y=ax+b$ es a, ya que si dos pares ordenados (x_1,y_1), (x_2,y_2) están en la recta, se tiene:

Para $x_1,\ y_1=ax_1+b$ y para $x_2,\ y_2=ax_2+b$

Al dividir resulta que:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=a\frac{(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$$

Observa que:

Si se tiene una ecuación de la forma: $y=ax+b$, "a" representa la pendiente y "b" el intercepto, por esa razón suele llamarse **ecuación pendiente-intercepto.**

1.4 Rectas Paralelas

Definimos como **rectas paralelas** a aquellas rectas que no se interceptan, es decir, nunca se cortan. En la gráfica podemos ver que el ángulo que forman las rectas paralelas con el eje x es el mismo, esto es la tangente del ángulo en ambas rectas es la misma, y por lo tanto ambas rectas tienen la misma pendiente.

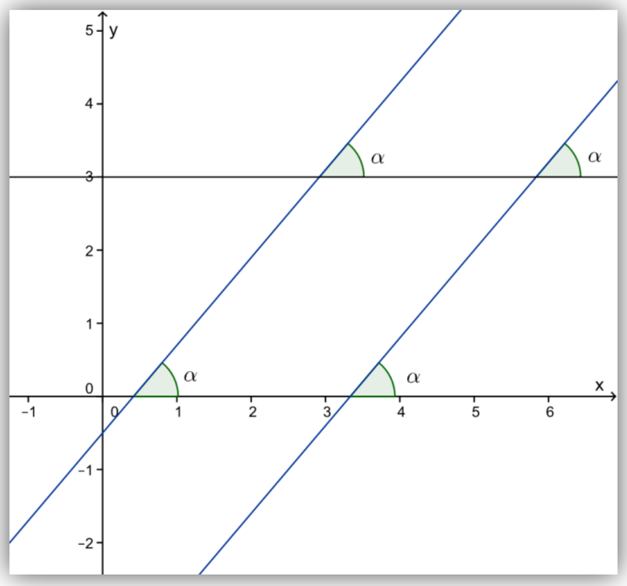


Figura 1.18

Ejemplo 6

Para que dos rectas se intercepten deben coincidir en un punto común (x_1, y_1) en ambas ecuaciones. En las ecuaciones de las dos rectas que se presentan en la Figura 1.19, al sustituir x_1 los valores de y difieren en 2 unidades y por lo tanto este punto de intercepción no puede existir.

Observa que:

Las rectas paralelas, tienen la misma pendiente y diferente intercepto.

Para este caso, las rectas tienen la misma pendiente que es 3.

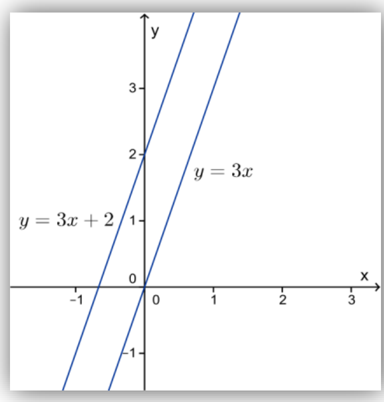


Figura 1.19

Ahora consideremos dos rectas paralelas cualesquiera, como las que se muestran en la Figura 1.20. Supongamos que las coordenadas de los puntos A, B, C y D son, respectivamente: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4). Se observa que los triángulos rectángulos ΔABE y ΔCDF son

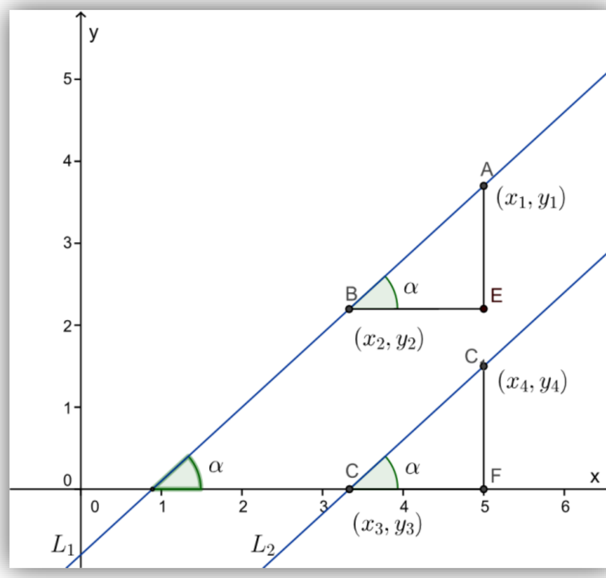


Figura 1.20

semejantes, ya que los $\angle ABE$ y $\angle DCF$ son iguales y los dos triángulos tienen un ángulo recto. Así aplicando el teorema de Thales podemos decir que las rectas L_1 y L_2 tienen la misma pendiente *m*.

La **pendiente** de una recta m se define como la tangente del ángulo de inclinación de la recta.

Luego sus ecuaciones solamente difieren por una constante, esto es:

$$y_1 = mx + b; \quad y_2 = mx + c; \text{ son las ecuaciones de las rectas } L_1 \text{ y } L_2$$

Donde *m* es la tangente del ángulo que forman las rectas con el eje horizontal.

Sabías que:

Los techos deben tener pendientes entre 0.35 y 0.70, es decir, el ángulo de inclinación debe estar entre 20° y 35°, para que el agua lluvia pueda arrastrar los depósitos de suciedad efectivamente. El agua y la suciedad estancadas se convierten en carga adicional que podrían provocar que el techo colapse, por lo que el valor de la pendiente tiene mucha importancia. En los países donde nieva, los techos suelen tener mayor inclinación para facilitar que la nieve deslice y no se acumule en el techo.


Figura 1.21

1.5 Rectas Perpendiculares

Consideremos una recta que pase por el origen y por el punto $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ con pendiente $\frac{1}{2}$.

Se observa que al hacer un giro de 90°, (en sentido contrario al de las agujas del reloj) del triángulo que tiene como vértices: (0,0), (3,0), (3,1.5)

Obtenemos el triángulo cuyos vértices son: (0,0), (0,3), (-1.5, 3)

Luego, la recta perpendicular a la original tiene pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{-(1.5)-0} = -2$$

Entonces deducimos que el producto de sus pendientes es -1, esto es:

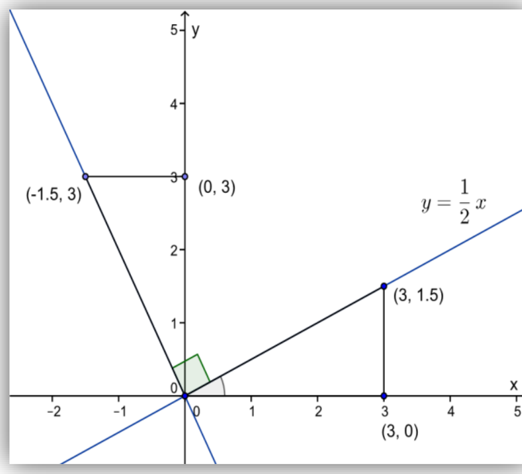


Figura 1.22

$$\left(\frac{3}{1.5}\right)\left(-\frac{1.5}{3}\right) = -1$$

En general, se tendrá que dos rectas son **perpendiculares** cuando el producto de sus pendientes es -1, esto es, si la pendiente de una recta es *m,* la pendiente de su perpendicular será $-\frac{1}{m}$.

Los siguientes ejemplos muestran como encontrar rectas paralelas y perpendiculares dadas ciertas condiciones.

Ejemplo 7

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ y es paralela a la recta $-10x + 2y - 6 = 0$.

Recordemos que el hecho de que dos rectas sean paralelas significa que tienen la misma pendiente y en este caso nos dan la recta $-10x + 2y - 6 = 0$. Despejaremos y, luego llevaremos a la forma $y = ax + b$.

$$-10x + 2y - 6 = 0.$$

$$y = \frac{1}{2}(6 + 10x) = 3 + 5x$$

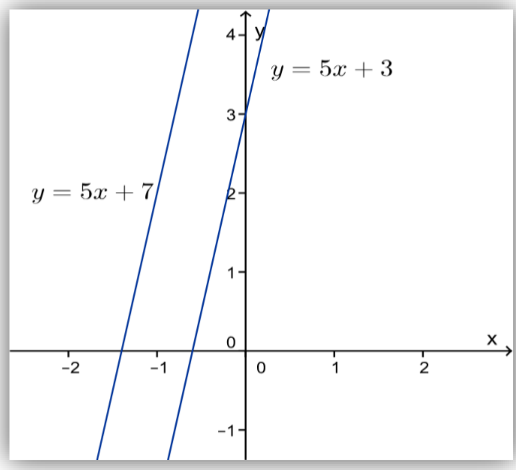


Figura 1.23

Luego, tenemos ya la pendiente de la recta buscada, que es $m=5$.

Para llevar nuestra ecuación buscada a la forma $y = mx + b$ necesitamos conocer el valor de b, y para esto, utilizamos el punto $(-1, 2)$. Sustituyendo el punto $(-1, 2)$ en $y = mx + b$ obtenemos:

$$5(-1) + b = 2; \qquad b = 2 + 5 = 7$$

Así la recta buscada es $y = 5x + 7$.

Ejemplo 8

Si las dos ecuaciones: $f(x) = (7 - 2k)x + kx + 5$; $g(x) = 3 - (4k - 1)x$, representan rectas paralelas, hallar el valor de k.

Como las rectas son paralelas, tienen la misma pendiente, así:

Para $f(x) = (7 - 2k)x + kx + 5$, su pendiente es $(7 - 2k + k)$ y, para $g(x) = 3 - (4k - 1)x$, su pendiente es $-(4k - 1)$, por tanto para hallar el valor de k basta resolver la ecuación:

$$7 - 2k + k = -4k + 1; \qquad k = -2$$

Por tanto, para que las rectas sean paralelas k debe tomar el valor de -2 y las dos rectas son $f(x) = 9x + 5$; $g(x) = 9x + 3$.

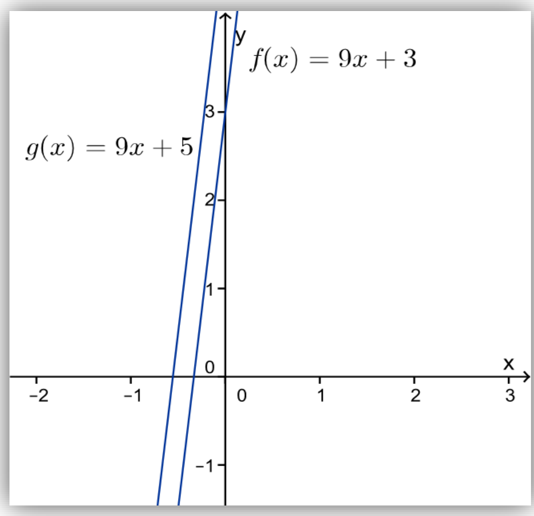


Figura 1.24

Ejemplo 9

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2)$ y es perpendicular a la recta $x + 3y - 6 = 0$.

Se encontrarán las pendientes de las dos rectas considerando que para que dos rectas sean perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser -1.

Para la recta $x + 3y - 6 = 0$, despejamos y en función de x:

$$3y = 6 - x; \qquad y = \frac{1}{3}(6 - x) = 2 - \frac{1}{3}x$$

Luego la pendiente de la recta es $-\dfrac{1}{3}$.

Supongamos, además que la pendiente de la otra recta es m, de donde tendremos $m\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1 \Rightarrow m=3$

Luego la recta buscada tiene la forma $y=3x+b$, y debe pasar por el punto $(1,-2)$, así:

$$3(1)+b=-2; \quad b=-2-3=-5$$

Entonces la ecuación de la recta buscada es $y=3x-5$.

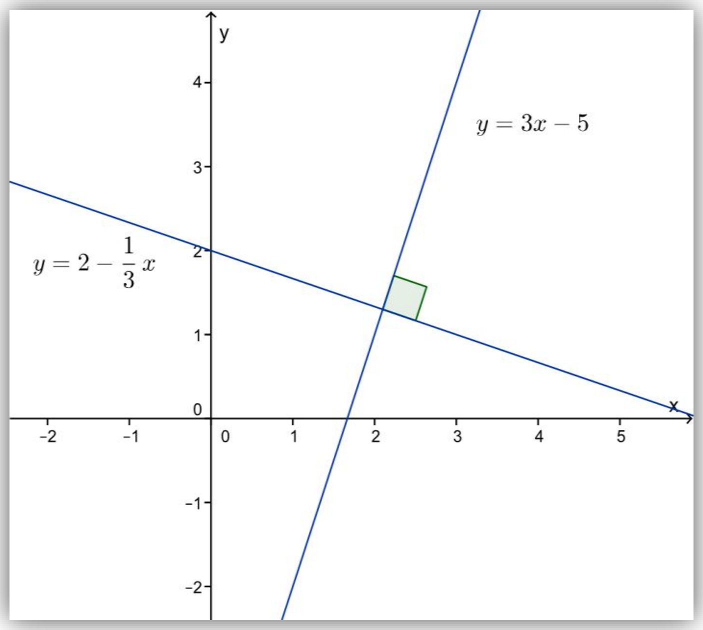


Figura 1.25

Sabías que:

En El Salvador se ejecuta el programa Centros de Cómputo Rural, un programa de la Unión Europea y del Ministerio de Educación, el cual consiste en instalar con energía solar, 48 centros de cómputo en igual cantidad de escuelas rurales.

Se han colocado paneles solares sobre el techo del Centro Escolar "Potrero Grande", en el departamento de Santa Ana. Dichos paneles tienen la misma pendiente, es decir son paralelos entre sí. Para que capten la mayor cantidad de energía solar, deben estar inclinados a 15^0 y estar orientados hacia el sur.

Figura 1.26

Ejercicios

1. Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo; escribe la ecuación que describa el radio con relación al tiempo y luego grafíquela.

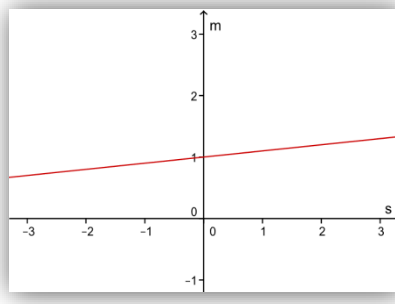


Figura 1.27

2. Graficar en un mismo sistema de coordenadas cartesianas: $f(x)=\begin{cases} x\ ; & x\geq 0 \\ -x\ ; & x<0 \end{cases}$. Luego encontrar el área bajo la gráfica anterior para $x\in$ [-5, 4].

3. Comprueba que $2x+3y-5=3$ es la ecuación de una recta. Para ello, despeje la variable y, y escribe la ecuación en la forma $y=ax+b$. Graficarla.

4. Grafica las rectas siguientes:

   $a)\ y=2;\qquad b)\ y=-5;\qquad c)\ x=4;\qquad d)\ x=0;\qquad e)\ x=-3$

5. Se tiene hielo triturado a -25° C dentro de una cazuela. Lo introducimos en una olla de agua hirviendo y así vamos observando su temperatura, dada la siguiente gráfica encuentre la temperatura en el tiempo *t= 8, 4, 14* minutos.

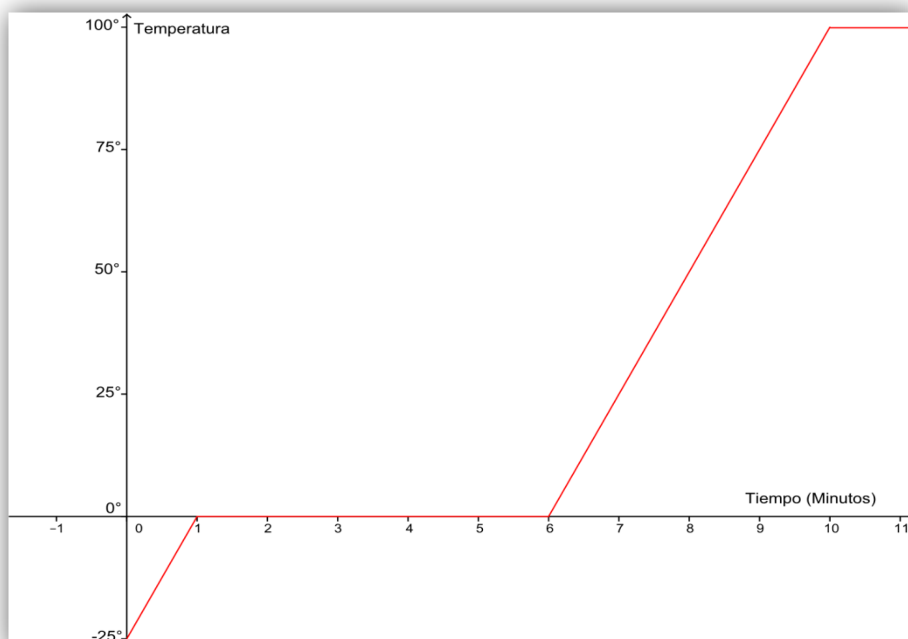


Figura 1.28

6. Grafica las rectas:

$$a)\ y=-x-3; \qquad b)\ y=2x+4; \qquad c)\ y=\frac{1}{2}x-1$$

7. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,0)$ y con pendiente $\frac{3}{4}$.

8. Según la ecuación $y=\frac{1}{2}x-1$, completa la tabla y grafica los puntos (x_i, y_i).

x_i	y_i	(x_i, y_i)
0		(0,)
0.5		(0.5,)
1		(1,)
1.5		(1.5,)
2		(2,)

9. Además encuentra:

$$a)\Delta y_1 = y_1 - y_0, \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0 \quad b)\Delta y_2 = y_2 - y_1, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1$$

$$c)\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \quad \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}; \quad \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$$

10. Determina si los siguientes puntos pertenecen a la misma recta (1, 3), (3, 5) y (4, 6).

Examen de Conocimientos

1. Graficar $y=5x-2$, y encontrar su intercepto con el eje de las ordenadas. Determina la recta perpendicular a ella que pase cualquier punto (1, 1).
2. Suponiendo que el costo de cada periódico es de $0.50, elaborar una gráfica en el plano cartesiano que represente el costo entre 0 y 5 periódicos.
3. Comprueba que $x-3y+6=0$ es la ecuación de una recta. Graficarla.
4. Encuentra el conjunto solución que resuelve la desigualdad $y<4x+2$.
5. Determina cuales de las siguientes rectas son perpendiculares entre sí:

$$a)\ y=-x-3; \qquad b)\ y=-2x+4; \qquad c)\ y=\frac{1}{2}x-1$$

6. El siguiente gráfico representa el cambio de posición que tiene un automóvil.

¿Cuánto tarda dicho automóvil en llegar a su posición inicial?

¿Cuál era su posición a los 3 segundos?

¿Cuál es la distancia total recorrida por el automóvil?

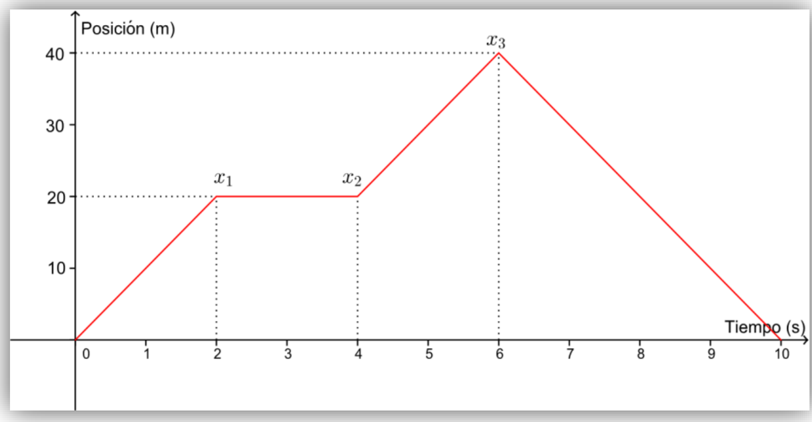


Figura 1.29

Vocabulario

Intercepto: Se representa por *"b"*, es el punto de la recta que pasa por el eje *y*, es el valor de *y* cuando *x* toma el valor de cero (*0, b*).

Pendiente: Es la tangente del ángulo de inclinación que una recta forma con el eje *x.*

Proporcionalidad: Es la relación entre las magnitudes medibles.

Triángulos semejantes: Dos triángulos son semejantes cuando las medidas de sus ángulos se corresponden, esto es, las medidas de los tres ángulos de uno de ellos son iguales a las medidas de los ángulos del otro.

Bibliografía

1. Canjura, C. (2010). *Manual Número 3 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El salvador.
2. Canjura, C. (2011). *Manual Número 5 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador.
3. Coxeter, M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. Toronto, Canadá: Editorial Limusa.
4. Swokowsky, E. W. (2006*). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Editorial Thomson.

LECCIÓN 2 1° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 7 HORAS CLASE

ECUACIONES DE LA LÍNEA RECTA

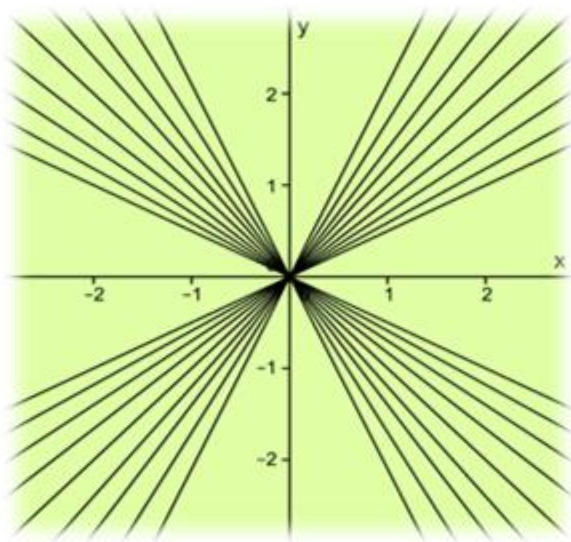


Figura 2.1: As de rectas en el plano cartesiano

Competencias a formar

1. Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.
2. Estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.
3. Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento.
4. Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información.
5. Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

Objetivos de la Lección

1. Reconocer las distintas formas de las ecuaciones de la recta.
2. Medir áreas bajo segmentos rectilíneos en el plano cartesiano.
3. Analizar modelos matemáticos lineales que utilicen sistemas de dos variables.

Pre-saberes

1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables.
2. Área de triángulos.
3. Área de un paralelogramo.

Descripción

Se desarrollan y analizan las diferentes ecuaciones de la línea recta, así como aplicaciones de ésta misma a problemas de optimización de distancias.

Contenido

2.1 Ecuación Punto-Pendiente y Pendiente-Intercepto.

2.2 Ecuación dos Puntos de la Recta.

2.3 Ejemplos de Aplicación.

2.4 Problemas de optimización. Ejercicios, examen de conocimientos, vocabulario y bibliografía.

2.1 Ecuación Punto-Pendiente y Pendiente-Intercepto de la Recta

La ecuación general de la recta viene dada de la forma siguiente: $ax+by+c=0$, donde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Supongamos que queremos encontrar una ecuación de una línea recta que pase por un punto dado (x_0, y_0) y tenga una pendiente dada m_0, gráficamente tenemos:

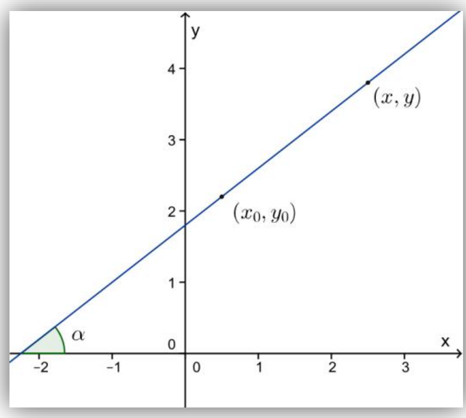


Figura 2.2

Donde $\tan(\theta)=m_0$. Para encontrar la ecuación tomamos otro punto (x, y) sobre la recta dada, este punto debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\tan(\theta)=m_0$$

Y ésta es la pendiente de la recta buscada. Lo anterior lo podemos interpretar gráficamente:

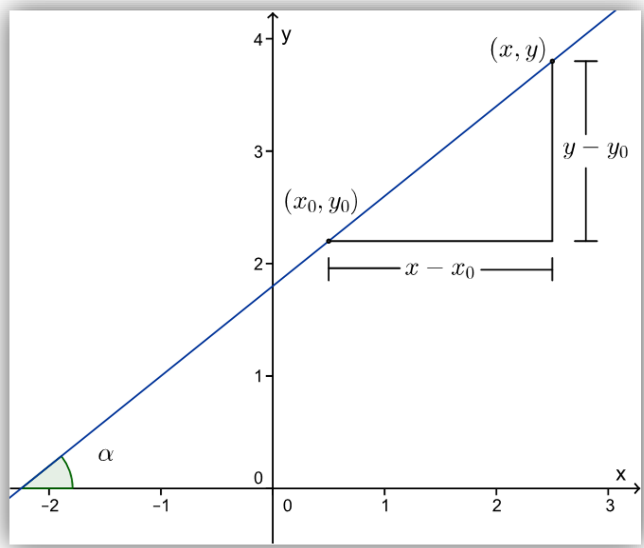


Figura 2.3

Luego, la ecuación buscada la podemos dejar de la siguiente forma:

$$y-y_0=m_0\left(x-x_0\right)$$

Esta ecuación es conocida como: "***Ecuación Punto-Pendiente***", en el caso particular que el punto conocido $\left(x_0, y_0\right)$ sea $\left(0, y_0\right)$; esto es el intercepto de la recta con el eje y, la ecuación anterior toma la forma:

$$y-y_0=m_0\left(x-0\right)$$
$$y=m_0x+y_0$$

Y esta última ecuación es conocida como: "***Ecuación Pendiente-Intercepto***".

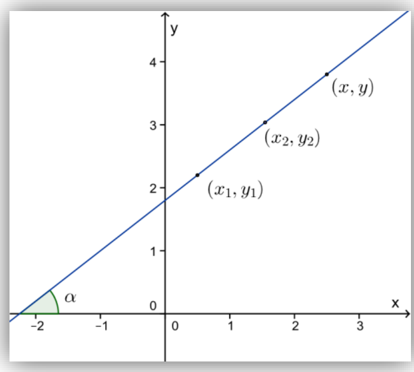


Figura 2.4

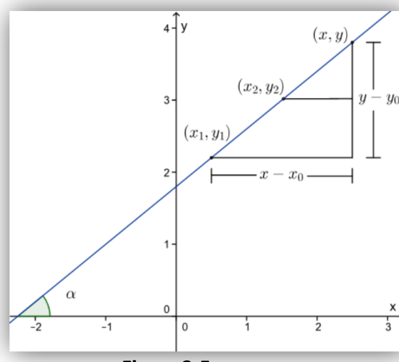


Figura 2.5

2.2 Ecuación dos Puntos de la Recta

En este caso, la ecuación de la recta buscada debe pasar por dos puntos conocidos de antemano. Supongamos que la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Para obtener la ecuación de la recta que pase por los dos puntos conocidos, ubicamos un punto cualquiera (x, y) que esté en la recta, su pendiente será

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\theta)$. Obtenemos que el punto (x, y) debe satisfacer:

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m = \tan(\theta)$. Por tanto $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\Rightarrow y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Y esta última ecuación es conocida como: "***Ecuación dos puntos de la recta".***

Sabías que

Un resorte puede deformarse ya sea comprimiéndose o estirándose; si al cesar la fuerza que lo deforma, el resorte vuelve a su forma original, se dice que el resorte cumple la **Ley de Hooke**. Observe que a medida aumenta el peso en el extremo del resorte, aumenta la deformación del mismo (Figura 2.6). Al graficar la deformación en el eje x, y la fuerza deformante F en el eje y, resulta una línea recta $F = kx$, (done k es la constante de elasticidad) Se observa que a mayor fuerza, mayor deformación. Esto se conoce como **ley de Hooke.**

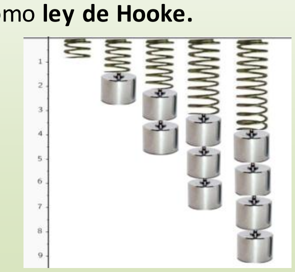


Figura 2.6

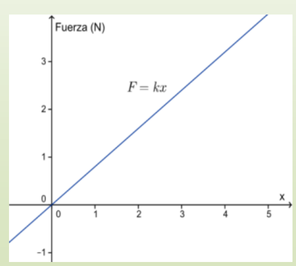


Figura 2.7

2.3 Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1

Describir en un plano cartesiano, partiendo del origen los siguientes desplazamientos; uno a continuación del otro: moverse 10 km al norte, a continuación desplazarse 5 km al este y finalmente moverse 10 km al sur-oeste.

Solución.

Comience posicionándose en el origen y con ayuda del transportador elabore los trazos, eligiendo por supuesto una escala adecuada.

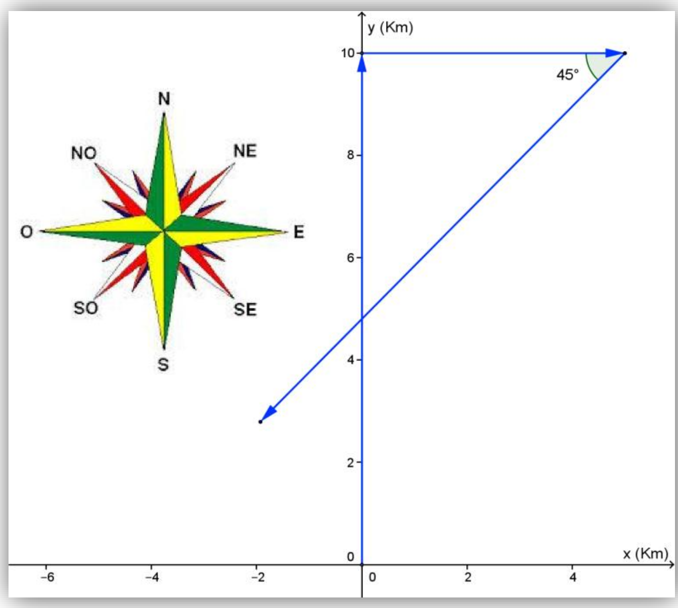


Figura 2.8

Ejemplo 2

Encontrar el conjunto de puntos en el plano cartesiano que equidistan de los dos puntos: (1, 1) y (3, 3).

Solución.

Para esto basta ubicar el punto medio de los 2 puntos dados, que en este caso es (2,2); este punto pertenece al conjunto solución. Luego la recta que pasa por (2,2) con pendiente -1 satisface las condiciones solicitadas. Observarás que cualquier punto de esta recta con los puntos (1,1) y (3,3) forma triángulos rectángulos iguales. De donde, las hipotenusas de esos triángulos rectángulos son iguales, y entonces cada punto de la recta satisface las condiciones pedidas.

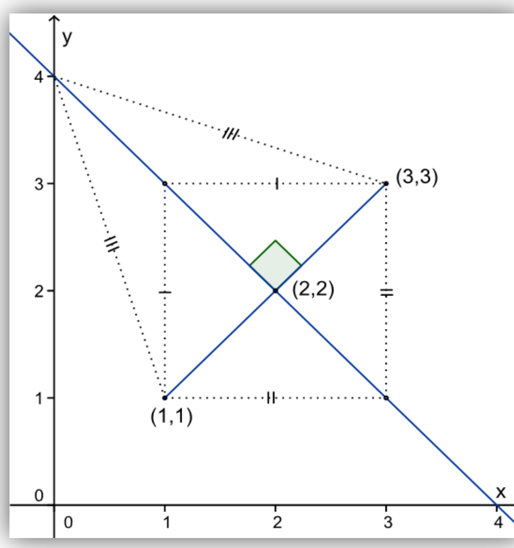


Figura 2.9

Ejemplo 3

Encontrar el área bajo los segmentos de recta indicados.

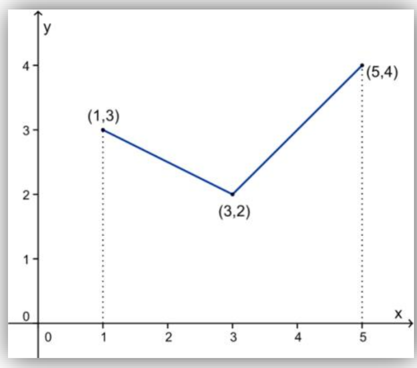


Figura 2.10

Solución 1 Dividimos la región según la Figura 2.11. Luego el área total será la suma de las áreas pequeñas:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = (5-1)2 + \frac{1}{2}(3-1)1 + \frac{1}{2}(5-3)2 = 8 + 1 + 2 = 11,\ 11u^2.$$

El área se expresa en unidades de longitud al cuadrado. Así por ejemplo, si las variables representadas en el plano fuesen metros, el resultado sería 11 metros cuadrados.

Solución 2 Encontramos los puntos medios de los segmentos; según la Figura 2.12 Ocupando la fórmula del área del trapecio se tiene que:

$$A = A_1 + A_2 = 2(2.5) + 2(3) = 11, \quad 11u^2.$$

El último método es conocido como trapezoidal. Este consiste en evaluar la recta dada en su punto medio y ltiplicarlo por la base.

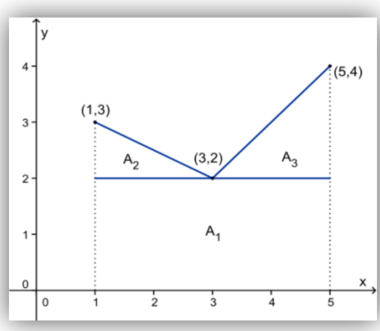


Figura 2.11

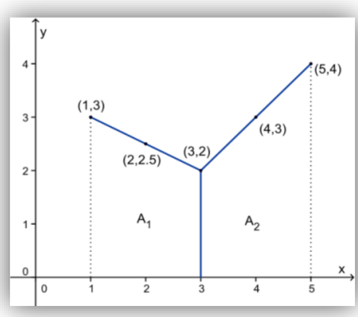


Figura 2.12

Ejemplo 4

La Carrera de las banderas. En el terreno rectangular ABCD con dimensiones AB=90m y BC=45m, sea I el punto medio del lado AB, cada concursante participa individualmente, iniciando su recorrido en el punto I, debe colocar la primera bandera en la línea AD, después una segunda en la línea DC, una tercera en la línea CB y la última bandera en la esquina A.

¿Dónde deben los concursantes colocar sus banderas para que el trayecto recorrido sea mínimo?

¿Cuál es la longitud de ese trayecto?

Solución.

El primer paso es construir una figura que ilustre el problema a resolver, tal como se muestra a continuación:

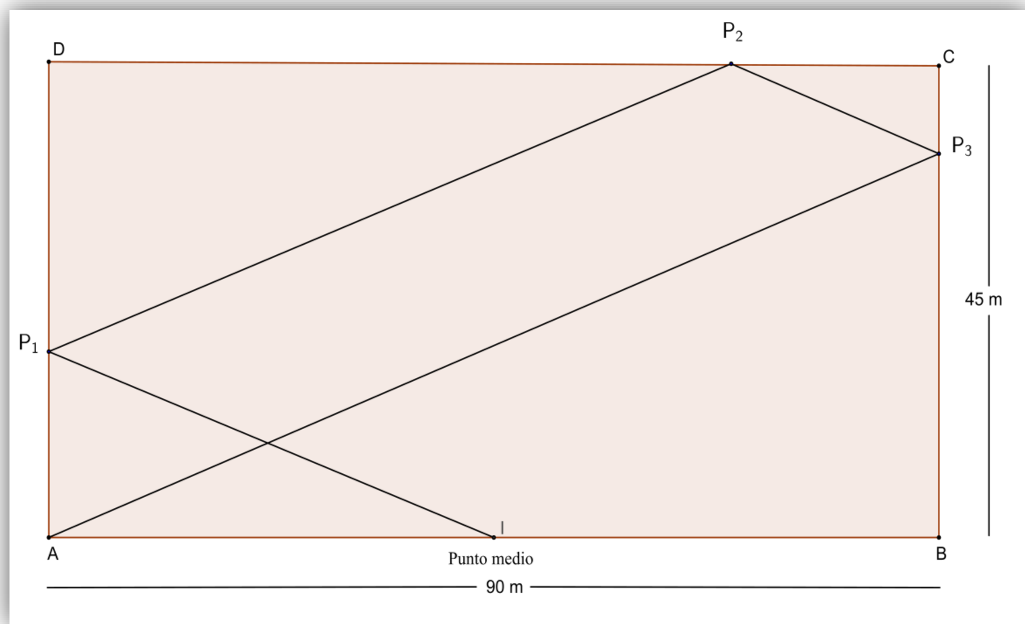


Figura 2.13

Por simetría la distancia de A hasta P_3 es la misma que la distancia desde P_3 a E (ver Figura 2.13), de forma similar HP_1= FG, P_1P_2=P_2F, y entonces el problema se convierte en encontrar el valor mínimo de la suma de los segmentos $EP_3+P_3P_2+P_2F+FG$.

Este valor mínimo es el segmento rectilíneo EG, el cual es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyo cateto vertical vale 90 metros, el cateto horizontal vale 225 metros.

Luego la distancia EG debe satisfacer: $(EG)^2 = 225^2 + 90^2$. De aquí que EG = 242.33.

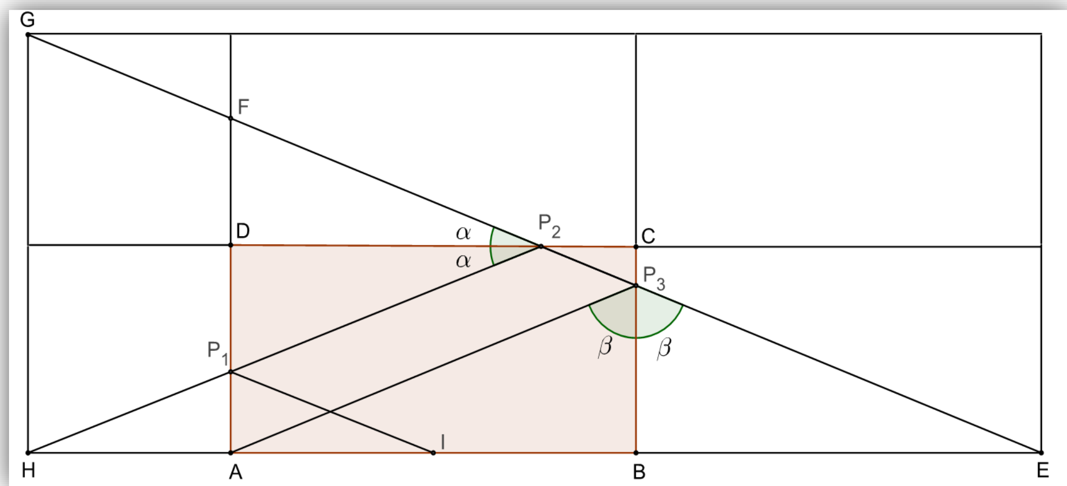


Figura 2.14

2.4 Problemas de optimización

Principio de Herón

"Entre dos puntos A y B; el recorrido más corto entre ellos es un segmento rectilíneo"

En cada uno de los siguientes problemas, use el principio de Herón para resolverlos.

Problema 1

Dada una recta L y dos puntos A y B; que no pertenezcan a esta, ¿Qué punto M en L minimiza la suma de los segmentos $AM + MB$?

Caso 1. Supongamos que los dos puntos A y B están en diferentes lados de la recta L.

Solución. Supongamos que la recta L es el eje x, en el cual tenemos un origen en el sistema de coordenadas cartesianas. Además los puntos A y B tienen respectivamente las coordenadas (a_1, a_2), (b_1, b_2); luego la recta que los une tiene por ecuación $y = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + b_1$.

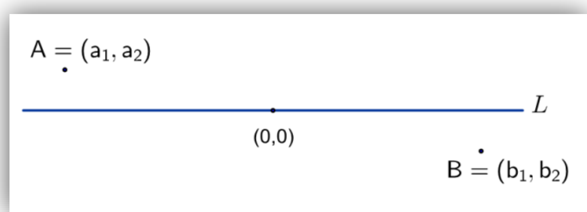


Figura 2.15

Y el punto buscado es la intersección de esta recta con el eje x, esto es:

$$0 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + b_1 \Rightarrow a_1 - b_1\left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\right) = x$$

Caso 2. Los dos puntos están a un mismo lado de la recta L (Figura 2.16).

Solución. Igual que en el caso anterior, supondremos que la recta L es el eje x, las coordenadas de A son (a_1, a_2), y las de B son (b_1, b_2), ubicamos el punto simétrico de A con respecto a la recta L, al que llamaremos A' y este tendrá coordenadas $(a_1, -a_2)$; ver Figura 2.17.

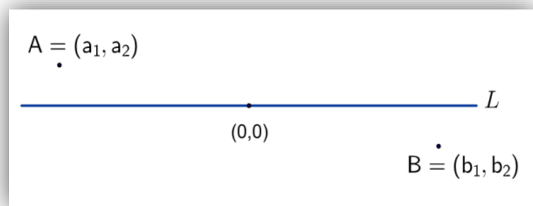


Figura 2.16

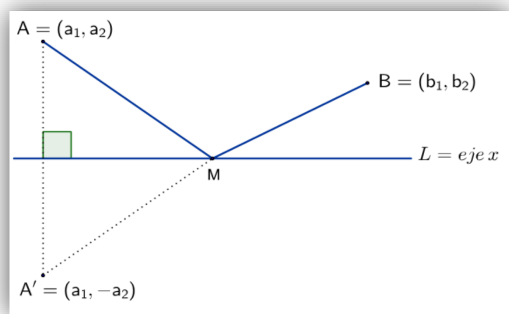


Figura 2.17

Observamos que $AM = A'M$, luego el punto M buscado, según el problema anterior es:

$$M = \left(a_1 + a_2 \left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 + a_2} \right),\ 0 \right)$$

Problema 2

Dadas dos rectas L y L', sea M un punto variable sobre L y sea M' un punto variable sobre L', fijado un punto A, ¿Qué posiciones deben tomar M y M' para que la suma de los segmentos $AM + AM'$ sea mínima?

Solución. Tomamos a M y M', como las proyecciones perpendiculares de A sobre las rectas L y L' respectivamente. Gráficamente tenemos:

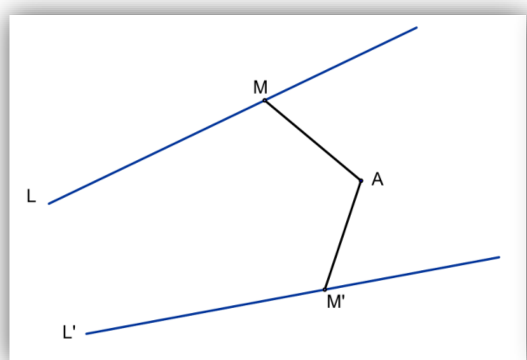


Figura 2.18

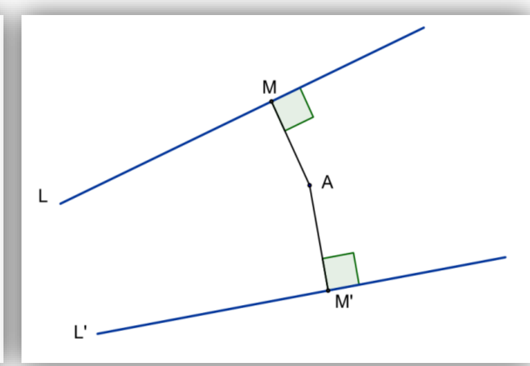


Figura 2.19

Problema 3

Dadas dos rectas L y L', el punto M varía sobre L mientras que M' sobre L'. Dados dos puntos A y B en el plano cartesiano. ¿Qué posiciones deben tomar M y M', para que la poligonal $AMM'B$ tenga longitud mínima? Esto es, para que la suma $AM + MM' + M'B$ sea mínima.

Caso 1. A y B están en los semiplanos exteriores (Figura 2.20).

Solución. Encontramos la recta que pasa por los puntos A y B y la llamamos L''. Observemos que M es la intersección de las rectas L'' y L, y M' es la intersección de las rectas L'' y L'.

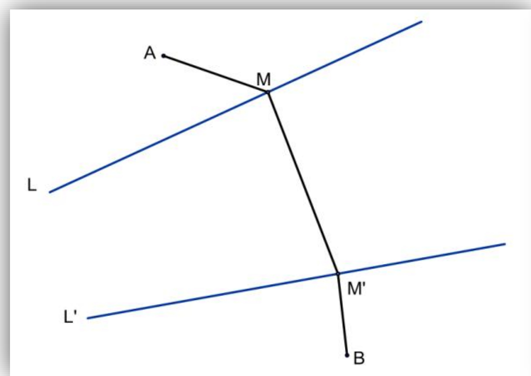


Figura 2.20

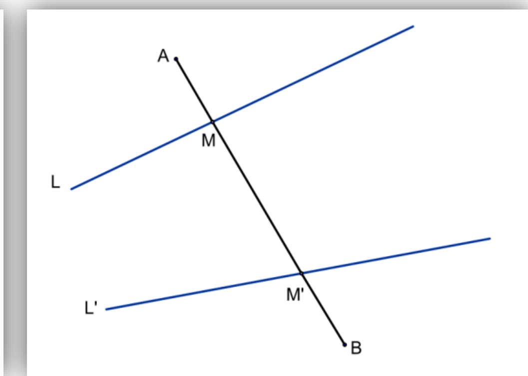


Figura 2.21

Caso 2. El punto B está ubicado en un semiplano, y el punto A está ubicado entre las rectas L y L', (Figura 2.21).

Solución. Encontramos el punto simétrico de A con respecto a L y lo llamamos A'. Luego $AM = A'M$, y procedemos como el caso anterior, encontrando la ecuación de la recta que pasa por A' y B, después M y M' son las intersecciones de ésta con las rectas L y L' respectivamente.

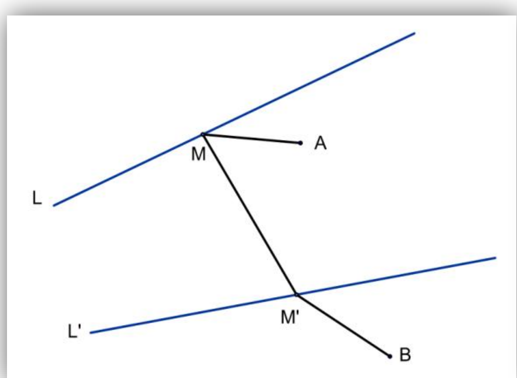


Figura 2.22

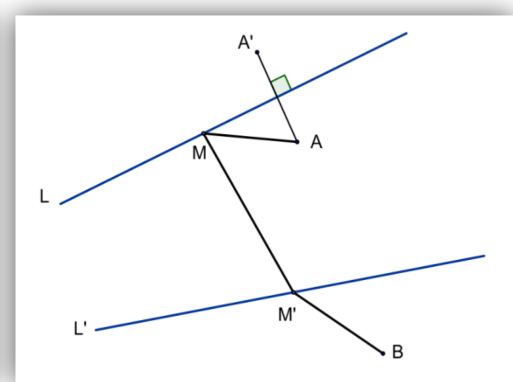


Figura 2.23

Ejemplo 5

Consideremos un caso particular del caso 2 del problema 3. Las rectas a considerar son: $L: y = x+1$ y $L': y = \frac{1}{2}x - 1$; y los puntos a tomar en cuenta son $A = (0,0)$ y $B = (3,-3)$.

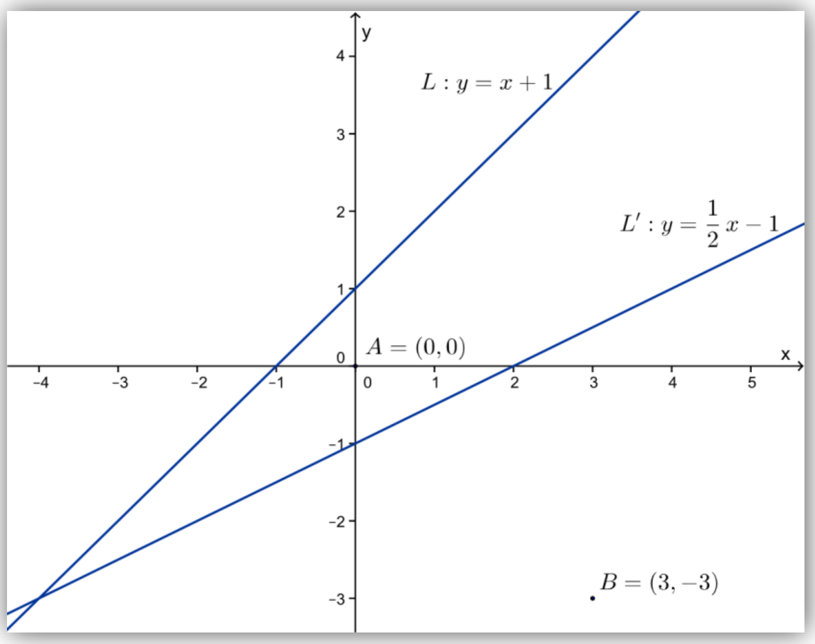


Figura 2.24

Solución. Encontramos el punto $A' = (a'_1, b'_1)$, simétrico del punto $A = (0,\ 0)$ con respecto a la recta L.

La recta L'' que pasa por A y es perpendicular a L es $y = -x$, luego la intersección de L y L'' es la solución del sistema de ecuaciones lineales $y = x+1,\ y = -x$. El punto de intersección es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este es el punto medio entre A' y A.

Esto es $-\frac{1}{2} = \frac{a'_1 + 0}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{a'_2 + 0}{2}$; Así $A' = (-1,1)$

La recta que une los puntos $A' = (-1,1)$ y $B = (3,-3)$; es $y = -x$.

El punto $M = (m_1,\ m_2)$, es la intersección de $y = x$ y $y = x+1$, esto es $M = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalmente M' es la intersección de $y = -x$ con $y = \frac{1}{2}x - 1$, luego $M' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Ejercicios

1. Compruebe que en general $px + qy + r = 0$ es una recta de pendiente $-\frac{p}{q}$, y ordenada en el origen $-\frac{r}{q}$ con $q \neq 0$.

En general, una expresión de primer grado en x e y, se representa mediante una recta, y si el coeficiente de y es distinto de cero, es decir, si tiene término en y se trata de la ecuación de una función.

2. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m, en los siguientes casos:

   $a.\ P = (-4, 7)$ y $m = -\frac{1}{2}$ $\quad b.\ P = (0, 4)$ y $m = -5$ $\quad c.\ P = \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$ y $m = \frac{1}{4}$

3. Representa la función $y = -3x$. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

4. La velocidad de un móvil es constante, de forma que cada segundo recorre 4 metros. Escribe la función tiempo-espacio y represéntala gráficamente. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

5. Dados $A = (4, 9)$, $B = (-1, -3)$, $L = 2x$, encontrar el punto M en la recta L tal que $AM + MB$ sea mínimo.

6. Sean las rectas $L: y = -3x + 1$, $L': y = -3x - 1$, y los puntos $A = (-1, 5)$, $B = (3, -11)$. Encontrar los puntos M y M' sobre L y L' de tal manera que la poligonal $AMM'B$ sea mínima, esto es, para que $AM + MM' + M'B$ sea mínima.

7. Resuelva el problema de las banderas si las dimensiones de los lados del rectángulo original se reducen a la mitad.

8. Escribe en cada caso, las diferentes ecuaciones de la recta que pasa por los puntos dados:

   $a.$ (1, 3) y (-2, 5) $\quad b.$ (-1, 0) y (-2, 4)

9. Dadas las siguientes ecuaciones de líneas rectas, encuentra dos puntos que pertenezcan a cada una de ellas, y luego haz un gráfico.

   $a.\ 3x - y + 1 = 0$ $\quad b.\ 2x + y - 2 = 0$

Prueba Objetiva

1. Encontrar el área encerrada entre las dos rectas:

   $L: \; y = 3x + 1, \quad L': \; y = -2x + 6$ y el eje de las x.

2. La siguiente gráfica muestra la deuda de una persona en un banco en dólares, si la tasa de interés es simple, indica el préstamo inicial y la tasa de interés.

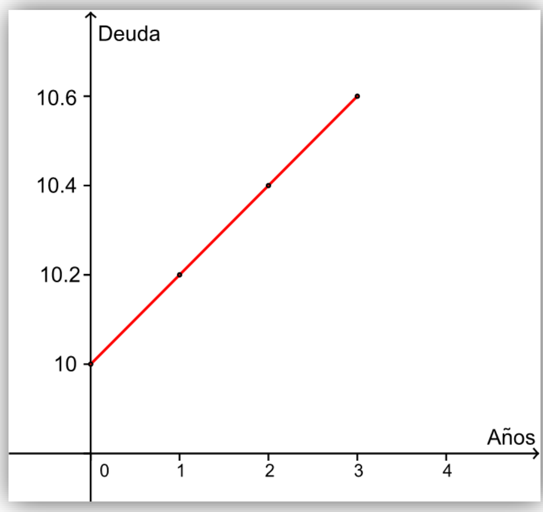


Figura 2.25

3. Unos obreros gastan en construir un aula de clases \$500 en materiales y \$1000 en mano de obra. ¿Cuánto gastarán en la construcción de 6 aulas adicionales?

4. Encontrar la distancia mínima de un punto cualquiera del plano cartesiano a los ejes cartesianos.

5. Un joven se sumerge en una piscina, a medida aumenta la profundidad, la presión también aumenta, obteniéndose los valores mostrados en la tabla. Grafica los datos en el plano cartesiano, tomando H (profundidad) como variable independiente y P (presión) como variable dependiente. Determina la ecuación que relaciona la presión con la profundidad.

H (m)	P (N/m^2)
1	0.98×10^4
2	1.96×10^4
3	2.94×10^4
4	3.92×10^4
5	4.90×10^4

Vocabulario

Proyección perpendicular:
La proyección de un punto perpendicular sobre una recta es el punto que resulta de interceptar la recta perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto dado.

Simetría de dos puntos respecto a una recta:
Si al unir dos puntos mediante un segmento rectilíneo, este es perpendicular a la recta dada, y además las distancias de los puntos a las rectas son iguales; diremos que los dos puntos son simétricos con respecto a la línea recta.

Razón de proporcionalidad
En la ecuación de una recta de la forma, $y = kx$, a k se le suele llamar razón de proporcionalidad (además de pendiente).

Bibliografía

1. Canjura, C. (2010). *Manual Número 3 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador.
2. Canjura, C. (2011). *Manual Número 5 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador.
3. Coxeter, M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. Toronto, Canadá: Editorial Limusa.
4. Swokowsky, E. W. (2006). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Editorial Thomson.

LECCIÓN 3 1° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 8 HORAS CLASE

POLINOMIOS

Figura 3.1

Girolamo Cardano (1501-1576). Fuente: http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/PictDisplay/Cardan.html

En 1545 Cardano publica su obra más importante, Ars Magna. En esta obra da los métodos de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Hoy día sabemos que los resultados publicados y muchas de las ideas contenidos no eran suyos

Competencias a formar

1. Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.
2. Estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.
3. Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento.
4. Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información.
5. Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

Objetivos de la lección

1. Dibujar en el plano cartesiano la función cuadrática y cúbica.
2. Analizar los conceptos de desplazamiento horizontal y vertical en los gráficos de las parábolas.

Pre-saberes

1. Despejo en ecuaciones.
2. Gráficas en el plano cartesiano.
3. Tipos de Movimiento: Rectilíneo, Circular y parabólico.

Descripción

La presente lección muestra cómo graficar polinomios de segundo y tercer grado, la deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se presentan algunos ejemplos de aplicación en el área de la física. También se deduce la fórmula general para resolver ecuaciones cúbicas. Al final se presenta una serie de ejercicios y un examen de conocimientos.

Contenido

3.1 Polinomios

Un polinomio de grado n es una expresión de la forma: $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x^1 + a_0$ donde $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ son constantes reales con $a_n \neq 0$ y x es una variable en los números reales. El grado de un polinomio es el mayor exponente que aparece en el polinomio.

Ejemplos de polinomios:

a. $p(x)=5x^2+3x+2$ (grado 2)

b. $p(x)=x^3+3x^2+4x+6$ (grado 3)

c. $p(x)=6x^5+\frac{5}{9}x^4+27x^3+\frac{2}{3}x^2+5x+1$ (grado 5)

Los polinomios son utilizados en diversos problemas de física, en situaciones tales como las siguientes:

a. En caída libre $y=\frac{1}{2}gt^2$

Donde:

- g es la constante de gravedad.
- y es la altura desde donde se deja caer el objeto
- t es la variable de tiempo.

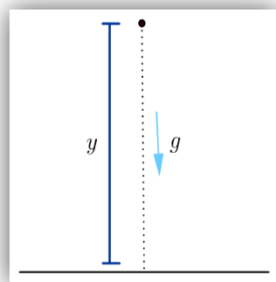


Figura 3.2

b. En el movimiento circular $a_n = Rw^2$

Donde:

- a_n es aceleración normal.
- R es el radio de la circunferencia
- w es la velocidad angular.

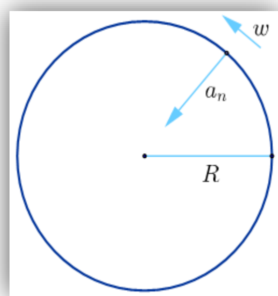


Figura 3.3

c. Lanzamiento de proyectiles.

Donde:

- $x=V\cos(\alpha)t,\quad y=V sen(\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$
- $V_x = V\cos(\alpha),\quad V_y = V sen(\alpha)-gt$

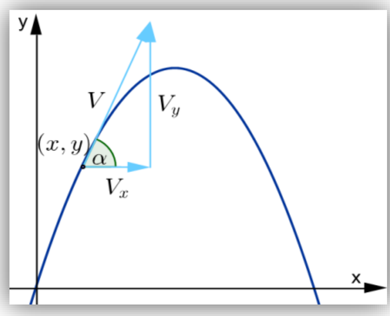


Figura 3.4

3.2 Gráfica de Polinomios Cuadráticos

Un polinomio cuadrático es aquel que puede escribirse como una ecuación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son constantes reales y a es distinto de cero (puede ser mayor o menor que cero, pero no igual que cero). Los valores de b y de c sí pueden ser cero.

En la ecuación cuadrática cada uno de sus términos tiene un nombre:

ax^2 **es el término cuadrático,** bx **es el término lineal,** c **es el término independiente**

Gráficamente las ecuaciones cuadráticas representan un lugar geométrico que recibe el nombre de **parábola**.

3.2.1 Parábola con vértice en el origen

Cuando $b = 0$ y $c = 0$, las parábolas toman la forma $y = ax^2$. Para graficar $y = x^2$, (con $a = 1$) le damos valores arbitrarios a x, luego de obtener los correspondientes valores de y, los representamos en una tabla y en el plano cartesiano.

x	$y = x^2$	(x, y)
-3	9	(-3, 9)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)

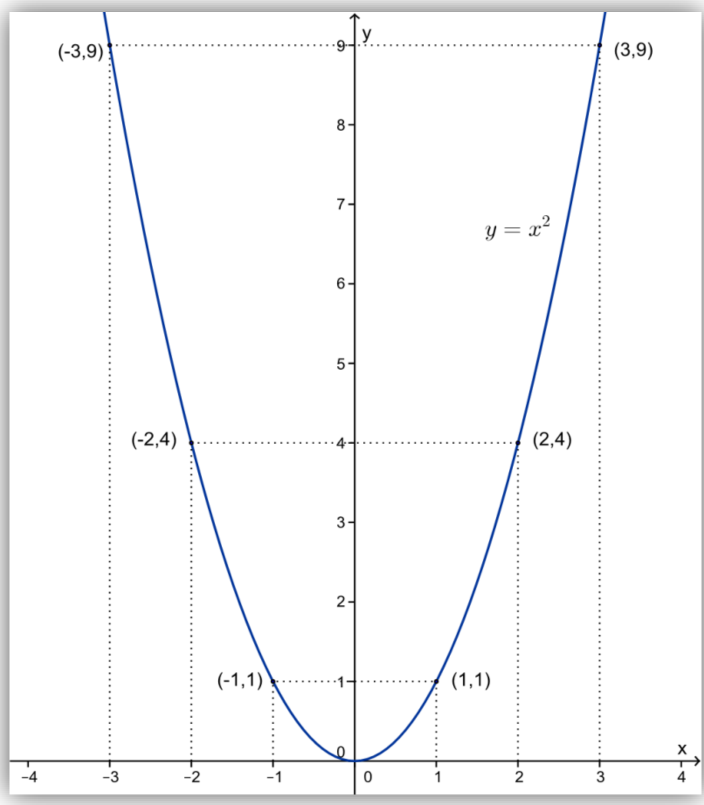


Figura 3.5

Observaciones:

1. El valor mínimo de la variable y se da para $x=0$. Este punto se llama vértice V=(0,0)

2. Se tiene simetría con respecto al eje y, debido a que $(-x)^2=x^2$, entonces si el punto (2,4) pertenece a la gráfica de $y=x^2$ (siendo $4=2^2$), también lo haría el punto $(-x,y)$ es decir (-2,4) ya que $y=x^2=(-x)^2$ entonces $4=2^2=(-2)^2$.

De manera similar se grafican $y_1=2x^2$ y $y_2=\frac{1}{3}x^2$, como se muestran a continuación:

x	$y_1=2x^2$	(x,y_1)
-2	8	(-2, 8)
-1	2	(-1, 2)
0	0	(0, 0)
1	2	(1, 2)
2	8	(2, 8)

x	$y_2=\frac{1}{3}x^2$	(x,y_2)
-2	4/3	(-2, 4/3)
-1	1/3	(-1, 1/3)
0	0	(0, 0)
1	1/3	(1, 1/3)
2	4/3	(2, 4/3)

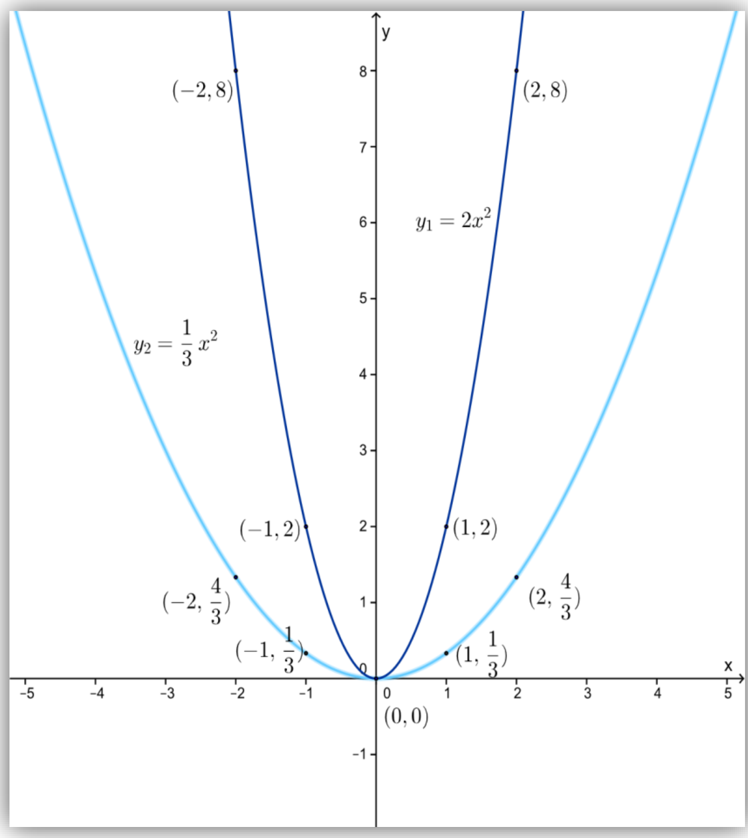


Figura 3.6

Observaciones:

1. Tenemos simetría con respecto al eje y ya que $y_1=2x^2=2(-x)^2$ de tal manera que si el punto (x_0,y_0) está en la gráfica, esto es $y_0=2x_0{}^2$, también tendremos $y_0=2(-x_0)^2$, por lo tanto $(-x_0,y_0)$ pertenece a la gráfica.
2. A medida que el coeficiente a en $y=ax^2$ se acerca a cero, la parábola se abre más.

3.2.2 Desplazamientos de la Parábola

Ya se estudió cómo graficar la parábola con vértice en el origen, ahora analizaremos los distintos tipos de desplazamientos que sufren las parábolas.

a. Desplazamiento horizontal.

Cuando la parábola es de la forma $y=(x+h)^2$ sucede lo siguiente:

-Si $h>0$, la gráfica de $y=(x+h)^2$ se ve desplazada h unidades hacia la izquierda con respecto a la gráfica de $y=x^2$.

-Si $h<0$, la gráfica de $y=(x+h)^2$ se ve desplazada $|h|$ unidades hacia la derecha con respecto a la gráfica de $y=x^2$.

Ejemplo 1

Graficar $y=x^2$ y $y_1=(x-2)^2$

x	$y=x^2$	(x,y)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)

x	$y_1=(x-2)^2$	(x,y_1)
0	4	(0, 4)
1	1	(1, 1)
2	0	(2, 0)
3	1	(3, 1)
4	4	(4, 4)

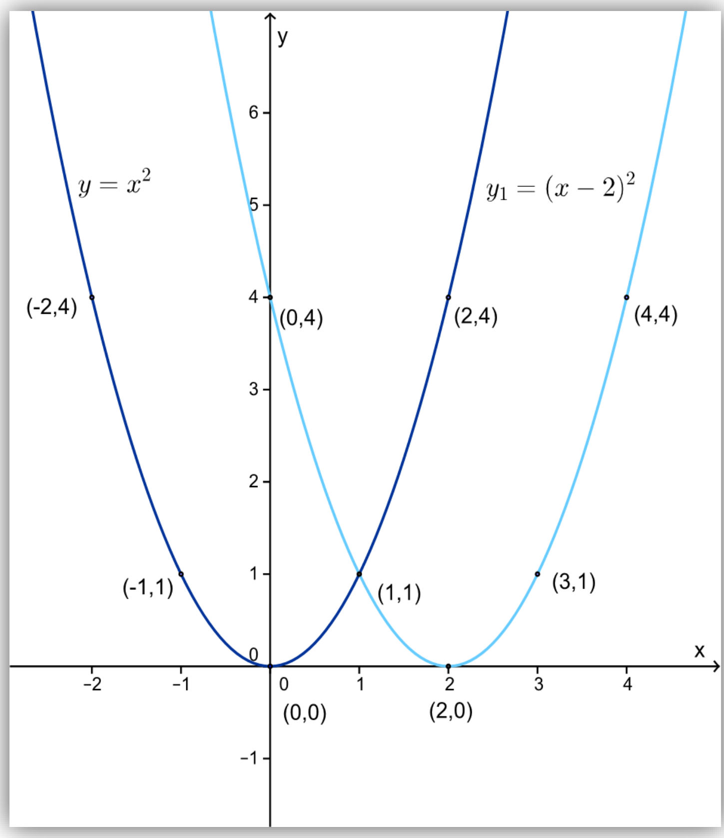


Figura 3.7

Nótese en la Figura 3.7 que la parábola $y=(x-2)^2$ tiene un desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha de la parábola $y=x^2$.

b. Desplazamiento vertical.

Cuando la parábola toma la forma $y=x^2+k$, sucede lo siguiente:

-Si $k>0$, la gráfica de $y=x^2+k$ se desplazará hacia arriba k unidades, con respecto a la gráfica de $y=x^2$.

-Si $k<0$, la gráfica de $y=x^2+k$ se desplazará hacia abajo $|k|$ unidades, con respecto a la gráfica $y=x^2$.

Ejemplo 2

Graficar $y=x^2$ y $y_1=x^2-2$

x	$y=x^2$	(x,y)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)

x	$y_1=x^2$-2	(x,y_1)
-2	2	(-2, 2)
-1	-1	(-1, 1)
0	-2	(0, -2)
1	-1	(1, -1)
2	2	(2, 2)

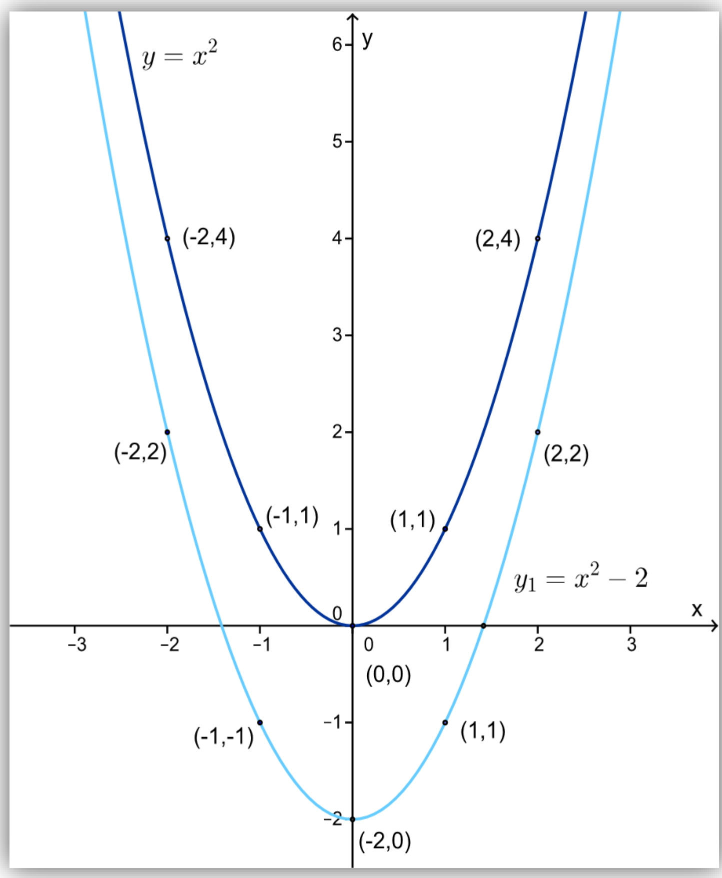


Figura 3.8

c. Desplazamiento Oblicuo.

Se da cuando la parábola tiene la forma $y=(x+h)^2+k$, es decir cuando se da un desplazamiento horizontal y un desplazamiento vertical al mismo tiempo.

Ejemplo 3

Graficar $y=x^2$ y $y_1=(x+2)^2-2$

x	$y=x^2$	(x,y)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)

x	$y_1=(x+2)^2$-2	(x,y_1)
-4	2	(-4, 2)
-3	-1	(-3, -1)
-2	-2	(-2, -2)
-1	-1	(-1, -1)
0	2	(0, 2)

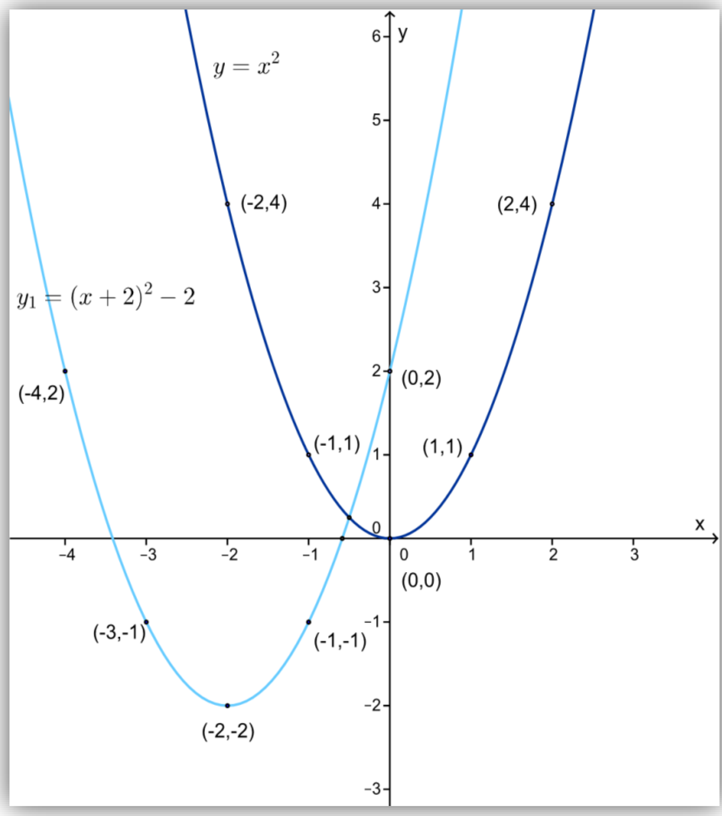


Figura 3.9

En general, la ecuación $y=ax^2+bx+c$ se puede transformar de la siguiente manera:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\text{.................................}(\alpha)$$

Esta última ecuación sabemos que representa un desplazamiento horizontal de $-\frac{b^2}{2a}$ unidades del origen, y un desplazamiento vertical de $c-\frac{b^2}{4a}$ unidades.

3.2.3 Orientación de la Parábola

Una característica muy importante es la **orientación** o **concavidad** de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Diremos que una parábola es **convexa** si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y diremos que una parábola es **cóncava** si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

Esta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático.

-Si a > 0 (positivo) la parábola es convexa o con puntas hacia arriba.

-Si a < 0 (negativo) la parábola es cóncava o con puntas hacia abajo.

Ejemplo 4

Graficar $y_1 = x^2 - 4x + 3$ (parábola convexa) y $y_2 = -x^2 - 4x + 3$ (parábola cóncava)

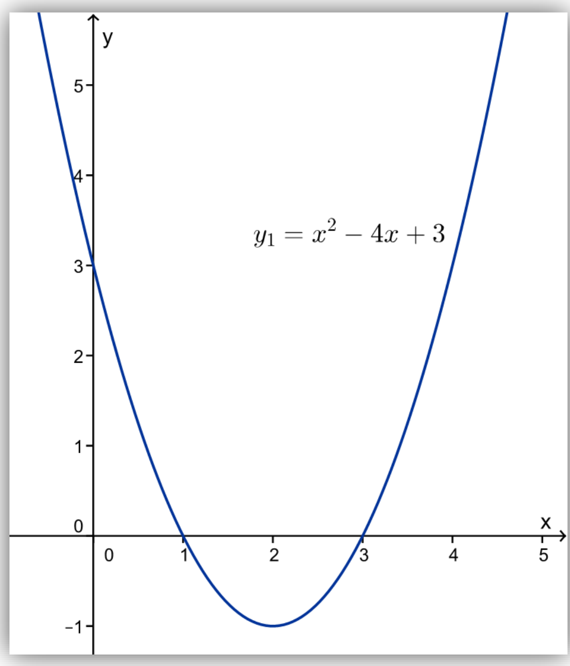


Figura 3.10

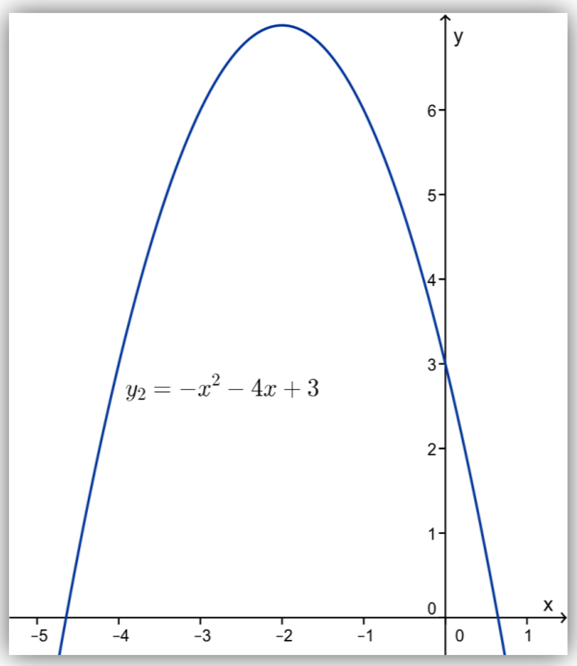


Figura 3.11

3.2.4 Elementos de la Parábola

Cuando se grafican las parábolas, podemos identificar los elementos característicos de dichas parábolas, los cuales son: **intercepciones** con el eje x, **eje de simetría** y **vértice**.

A partir de la ecuación de una parábola se pueden encontrar sus intercepciones con el eje x, dichas intercepciones se encuentran calculando las raíces (soluciones) del polinomio cuadrático. Para calcular las raíces de cualquier polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$, se debe determinar los valores de x para los cuales la expresión vale 0, es decir; los valores de x tales que $y = 0$.

Entonces hacemos $ax^2 + bx + c = 0$. Como $a \neq 0$, podemos dividir cada término por a

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación para no alterarla:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo y hacemos la operación indicada del derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Hacemos la operación con fracciones en el miembro derecho y luego extraemos raíz cuadrada en ambos miembros para obtener:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Simplificamos el radical:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despejamos la incógnita que buscamos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Simplificando obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta última ecuación es conocida como la **fórmula cuadrática** para encontrar los ceros (raíces) de un polinomio de grado 2, se puede observar que nos proporciona dos valores para la variable x.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Entonces, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática nos indican los puntos de intercepción de la parábola con el eje de las x.

Respecto a esta intercepción, se pueden dar tres casos:

a) Que la gráfica de la parábola corte al eje x en dos puntos distintos (dos raíces).

b) Que la gráfica de la parábola corte al eje x en un solo punto (sólo una raíz).

c) Que la gráfica de la parábola no corte al eje x (no hay raíces).

Además cabe mencionar que en la fórmula cuadrática a la parte b^2-4ac que está dentro del signo radical se le conoce con el nombre de **discriminante** y se suele representar por la letra griega Δ, es decir; $\Delta = b^2-4ac$.

El eje de simetría es una recta vertical que divide simétricamente a la curva; es decir, intuitivamente la separa en dos partes semejantes. Se puede imaginar como un espejo que refleja la mitad de la parábola.

Su ecuación está dada por: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado en x, asociada a la parábola.

De aquí podemos establecer que la ecuación del eje de simetría de la parábola (en términos de sus coeficientes) está dada por:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}{2}=\frac{-\frac{b}{2a}+\cancel{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}-\frac{b}{2a}-\cancel{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}{2}$$

$\Rightarrow x=\frac{-\frac{2b}{2a}}{2}=-\frac{b}{2a}$. De aquí que la ecuación del eje de simetría es $x=-\frac{b}{2a}$

El vértice de la parábola es el punto de corte (o punto de intersección) del eje de simetría con la parábola y tiene como coordenadas: $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. La abscisa de este punto corresponde al valor del eje de simetría $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ y la ordenada corresponde al valor máximo o mínimo $\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ de la parábola, según sea la orientación de la parábola, es decir;

Si en (α) sustituimos $x=-\frac{b}{2a}$, se tendrá que $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación que define el eje de simetría de la parábola $y=x^2-4x+3$, y su vértice.

Dada la ecuación $y=x^2-4x+3$ se tiene que $a=1$, $b=-4$ y $c=3$, para determinar el eje de simetría de la parábola se utiliza la fórmula $x=-\frac{b}{2a}$

de aquí que $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-4)}{2(1)}=\frac{4}{2}=2$

por lo tanto el eje de simetría está dado por la recta $x=2$. Para encontrar el vértice solo resta encontrar la ordenada del mismo, para esto sustituimos los valores en

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(3)-(-4)^2}{4(1)}=-1$$

De aquí que el vértice es $(2,-1)$.

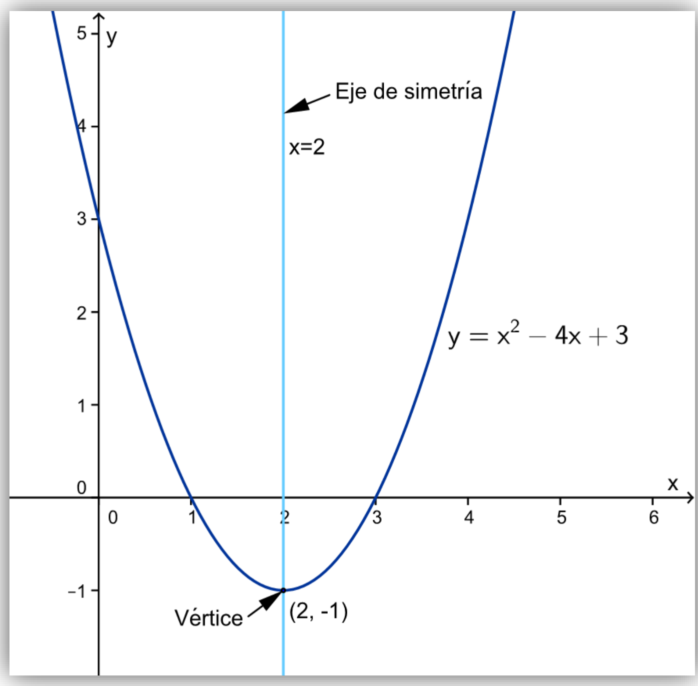


Figura 3.12

3.3 Gráfica de Polinomios Cúbicos

Un polinomio cúbico es aquel que puede escribirse como una ecuación de la forma:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

Donde a, b, c y d son constantes reales y a es distinto de cero. Para graficar polinomios cúbicos podemos trabajar como en el caso de los polinomios cuadráticos, es decir, le damos valores arbitrarios a x, luego después de obtener los correspondiente valores de y, los representamos en una tabla para posteriormente mostrarlos en el plano cartesiano.

Ejemplo 6

Graficar $y = x^3$

x	$y = x^3$	(x, y)
-2	-8	(-2, -8)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	8	(2, 8)

Observa que:

A diferencia de la parábola, la variable y no alcanza nunca un valor mínimo ni máximo.

Además no se tiene simetría con respecto al eje y ni al eje x.

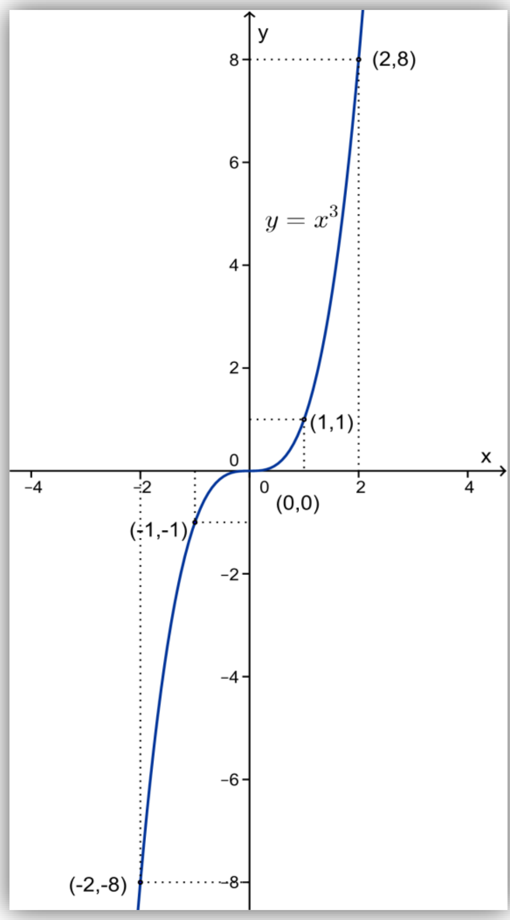


Figura 3.13

Ahora pasemos a resolver la ecuación de tercer grado

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{con } A \neq 0$$

Si sustituimos $x = z + a$ obtenemos

$$A(z+a)^3 + B(z+a)^2 + C(z+a) + D = 0$$
$$A\left(z^3 + 3z^2a + 3za^2 + a^3\right) + B\left(z^2 + 2za + a^2\right) + Cz + Ca + D = 0$$
$$Az^3 + (3Aa + B)z^2 + \left(3Aa^2 + 2Ba + C\right)z + \left(Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right) = 0$$

Siempre podemos conseguir que $3aA + B = 0$ haciendo que $a = \dfrac{-B}{3A}$ y si llamamos $P = 3Aa^2 + 2Ba + C$ y $Q = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$, la ecuación original toma la forma

$$Az^3 + Pz + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Luego dividimos la ecuación (α) entre A y si hacemos $p=\dfrac{P}{A},\ q=\dfrac{Q}{A}$, entonces la ecuación (α) se convierte en

$$z^3+pz+q=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Escribamos $z=u+v$, entonces tenemos

$$z^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3uvz$$

Luego la ecuación (β) toma la forma

$$u^3+v^3+3uvz+pz+q=0$$
$$u^3+v^3+(3uv+p)z+q=0$$

El problema ahora es resolver el sistema:

$$3uv+p=0 \qquad \Rightarrow\ uv=\frac{-p}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda)$$
$$u^3+v^3+q=0 \quad \Rightarrow\ u^3+v^3=-q$$

Y si elevamos al cubo la ecuación (α) tendremos el sistema

$$u^3v^3=\frac{-p^3}{27}$$
$$u^3+v^3=-q$$

Estos dos números u^3 y v^3 se encuentran al resolver la ecuación cuadrática

$$W^2+qW-\frac{p^3}{27}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\sigma)$$

con discriminante $\Delta=q^2+4\dfrac{p^3}{27}$, ya que al obtener las raíces r_1 y r_2 de la ecuación (σ) se tiene:

$$(W-r_1)(W-r_2)=0$$
$$W^2-(r_1+r_2)W+r_1r_2=0$$

y cumplen que

$$r_1r_2=-\frac{p^3}{27}$$
$$r_1+r_2=-q$$

y así $r_1=u^3$ y $r_2=v^3$ son las variables buscadas.

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $x^3+3x+4=0$

En este caso tenemos que $A=1,\ B=0,\ C=3$ y $D=4$, de donde obtenemos que

$$p=\frac{P}{A}=\frac{3Aa^2+2Ba+C}{A}=\frac{3A\left(\frac{-B}{3A}\right)^2+2B\left(\frac{-B}{3A}\right)+C}{A}=\frac{0+0+3}{1}=3$$

$$q=\frac{Q}{A}=\frac{Aa^3+Ba^2+Ca+D}{A}=\frac{A\left(\frac{-B}{3A}\right)^3+B\left(\frac{-B}{3A}\right)^2+C\left(\frac{-B}{3A}\right)+D}{A}=\frac{0+0+0+4}{1}=4$$

Entonces, la ecuación cuadrática auxiliar es

$$W^2+4W-\frac{3^3}{27}=0$$
$$W^2+4W-1=0$$

Aplicando la fórmula cuadrática se obtiene:

$$W=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=-2\pm\sqrt{5}$$ donde se tiene que

$$u^3=-2+\sqrt{5}$$
$$v^3=-2-\sqrt{5}$$

Y la solución es $\quad x=u+v=\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{5}}$

Ejercicios

1. Al aumentar el lado de un cuadrado en $5\ m$, el área del nuevo cuadrado es cinco veces más grande. ¿Cuál era el lado del cuadrado inicial?

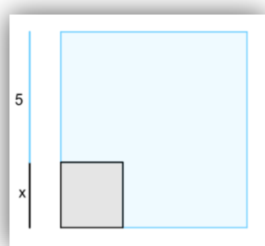


Figura 3.14

2. Al disminuir en $6\ m$, el área de un cuadrado, el área del rectángulo obtenido es de $91\ m^2$. ¿Cuál era el lado del cuadrado inicial?

3. Construya una función cuadrática que tenga por raíces:

$a.$ 0 y 1 $\qquad$ $b.$ 3 y 2 $\qquad$ $c.$ -1 y -2

4. Factorizar los siguientes polinomios de grado menor o igual a 3.

$$a.\ x^2-6x+5 \qquad b.\ 2x^2-x-1 \qquad c.\ x^2-9 \qquad d.\ x^3-7x^2-x+5$$

5. La diagonal de un rectángulo mide $20\ cm$ y su superficies es de $192\ cm^2$. ¿Cuánto miden sus lados x e y?

6. Calcular el valor de b para que la ecuación $x^2+bx+4=0$ tenga una raíz doble.

7. Calcular el valor de c para que la ecuación $x^2-24x+c=0$ tenga una raíz doble.

8. Graficar en el plano cartesiano:

$$a.\ y=2x^2+4x+1 \qquad b.\ y=-20x^2+3 \qquad d.\ y=\begin{cases} x^2-2x+3; & x<0 \\ 3x^2+9; & x>0 \end{cases}$$

10. Método geométrico de Al-Khwarizmi (año 630 aproximadamente) para resolver la ecuación $x^2+10x=39.$

Este método sirve para resolver ecuaciones cuadráticas siempre y cuando estas se puedan escribir en la forma $x^2+bx=c$, es decir que todos sus términos queden positivos, ya que los coeficientes representan longitudes o áreas de figuras.

El problema de resolver la ecuación equivale a encontrar el lado del cuadrado amarillo de la Figura 3.15. Para eso nótese que el primer término de la ecuación es x^2, es decir; el área del cuadrado.

Luego le agregaremos a este cuadrado cuatro rectángulos de área $\left(\frac{10}{4}\right)x=2.5x$; (como en la Figura 3.16) es decir los rectángulos formados por los lados: x y $\frac{10}{4}$, (este último se encuentra dividiendo el coeficiente del término lineal por 4). Por último, agregamos cuatro rectángulos de área $(2.5)(2.5)=6.25$ para así formar el cuadrado de lado $x+5$, (como en la Figura 3.17) cuya área será $(x+5)^2$, esta a su vez debe ser igual a la suma de los nueve cuadrados, es decir:

$$(x+5)^2=x^2+4(2.5x)+4(6.25)=x^2+10x+25, \text{pero } x^2+10x=39$$

$$\Rightarrow x^2+10x+25=39+25=64 \quad \Rightarrow (x+5)^2=64 \quad \Rightarrow x=3$$

Nótese que este método solo considera la solución positiva porque lo que busca es una longitud, pero si tomamos ± 8 para la raíz de 64 se obtienen las dos soluciones reales.

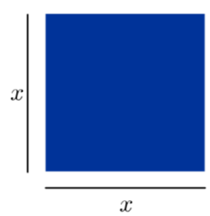


Figura 3.15

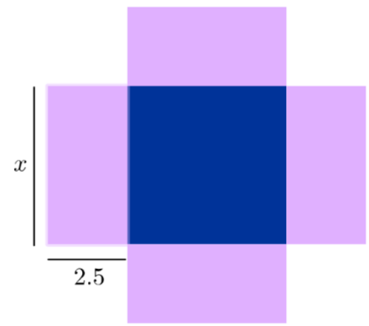


Figura 3.16

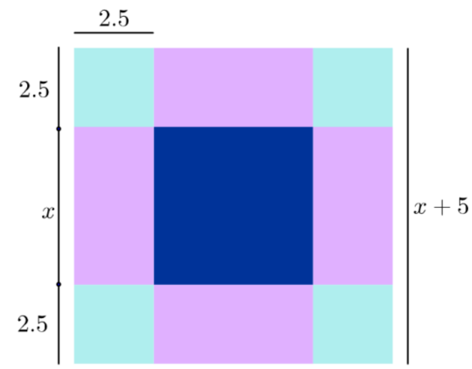


Figura 3.17

Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando el método de Al-Khwarizmi.

$$a.\ x^2 + 20x = 21 \qquad b.\ x^2 + 14x = 15 \qquad c.\ x^2 + 4x = 5$$

Examen de Conocimientos

1. Graficar $y = 3x^2 + 6x - 1$, encuentre su eje de simetría y su vértice.
2. Los lados de un terreno cuadrado de longitud x se extienden para formar un terreno rectangular donde se quiere construir una cancha de futbol. Un lado se extiende 2 m, y el otro 5 m. Si el área del rectángulo resultante es igual a 150 m^2. ¿Cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?
3. Resolver la ecuación $x^3 + 3x + 4 = 0$

Bibliografía

1. Fernández Fernández, Santiago (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *SUMA*, (24), 77.
2. Martin, J. (1967). *Cours de mathématiques*. Francia: Editorial Dunod.
3. Posamentier, Alfred S. (2006). Trisecting the circle. *National Council of teachers of mathematics*, *99* (6), 414.
4. Stekette, Scott. (2006). Geometry of square roots. *National Council of teachers of mathematics, 100* (2), 87.

LECCIÓN 4 1° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 12 HORAS CLASE

USO DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

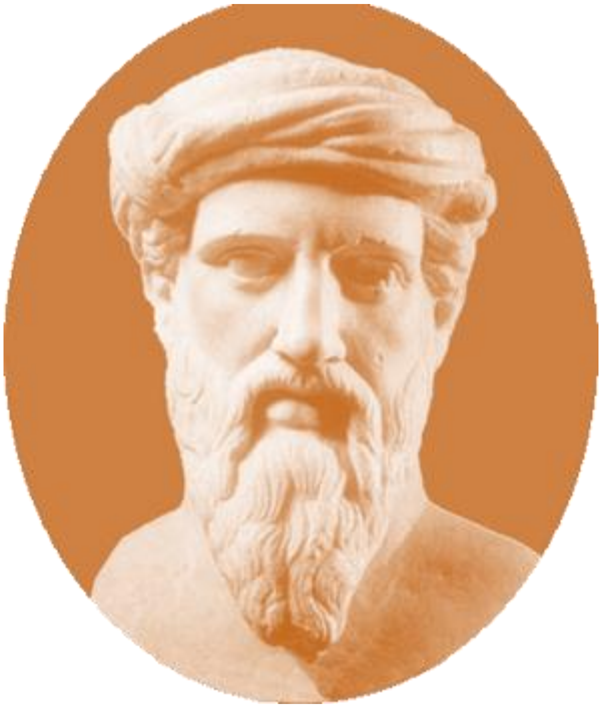


Figura 4.1

Pitágoras de Samos (580-4951 a. C.). Fuente: https://www.google.com.sv/search?q=imagenes+de+Pitagoras+de+Samos

Competencias a formar

1. Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.
2. Estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.
3. Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento.
4. Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información.
5. Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

Objetivos de la lección

1. Aplicar algoritmos para obtener la raíz cuadrada.
2. Conocer algunas aplicaciones de los polinomios cuadráticos.

Pre-saberes

1. Manejo de fracciones y decimales.
2. Desigualdades.
3. Factorización.
4. Manipulación algebraica.

Descripción

En la presente lección se estudian algunas aplicaciones de los polinomios cuadráticos en diferentes áreas de la matemática y la física.

Contenido

4.1 Aplicaciones de los Polinomios
4.1.1 Algoritmo de la raíz cuadrada.
4.1.2 Algoritmo babilónico para encontrar la raíz cuadrada.
4.1.3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
4.1.4 Lanzamiento de Proyectiles.
4.2 Aplicaciones técnicas de los polinomios cuadráticos.
Problemas Resueltos, Ejercicios, Examen de Conocimientos, Vocabulario y Bibliografía.

4.1 Aplicaciones de los polinomios

Los polinomios cuadráticos son utilizados en muchas ocasiones para determinar las raíces cuadradas de algunos números naturales, en esta parte estudiaremos algunos métodos que se pueden utilizar para calcular aproximaciones de las raíces cuadradas de dichos números.

4.1.1 Algoritmo de la raíz cuadrada

1. Escribe el número del que deseas calcular la raíz cuadrada, separando los dígitos por pares, a partir del punto decimal; por ejemplo el número 79,520,789,182.47897 se convierte en 7 95 20 78 91 82. 47 89 70. Si el número de cifras a la izquierda de la coma es impar, el último grupo de la izquierda tendrá una sola cifra, en vez de dos. Como ejemplo, vamos a calcular la raíz cuadrada de 780. Dibuja las líneas como se muestra en la Figura 4.2 y escribe "7 80" a la izquierda. En la parte superior derecha, se calculará la raíz cuadrada de 780.

2. Observa en el extremo izquierdo y encuentra el mayor entero "n", cuyo cuadrado sea inferior o igual a aquel par o cifra única. Coloca "n" en el cuadrante superior derecho, calcula el cuadrado de "n" escríbelo debajo del número original. Luego efectúa la diferencia. En nuestro ejemplo, que el 'par' es 7, y como 2x2<7<3x3, entonces el "n" a utilizar será igual a 2. Escribe un 2 en el cuadrante superior derecho. Éste será el primer dígito de la raíz cuadrada. Escribe a continuación $2^2 = 4$ en el cuadrante inferior izquierdo, y luego hacemos la diferencia 7-4=3 (Fig. 4.3).

3. "Baja" el siguiente par, y lo colocas a la derecha del resultado de la sustracción que acabas de hacer. En nuestro caso se baja el '80', y se coloca al lado del 3. Multiplica por 2 el número que en ese momento tenemos en la parte superior derecha (en este caso el número que tenemos es 2, entonces sería 2x2=4) y lo escribes en el cuadrante inferior derecho, añadiendo "_x_=" (Fig. 4.4).

4. Encuentra la mayor cifra que pueda colocarse en los subrayados indicados, de modo que el resultado de la multiplicación sea inferior o igual, al número que en estos momentos está en la parte inferior izquierda (en este caso 380). En nuestro ejemplo, si queremos sustituir el subrayado por 8, nos dará 48 veces 8 es 384, que es superior a 380. Por lo tanto 8 es demasiado grande. Sin embargo eso no ocurre con el 7. Escribimos 7 en cada uno de los dos subrayados, esto nos dará 47 por 7 igual a 329, que es menor que 380. Luego escribimos esté número (7) en la parte superior derecha. Este será el segundo dígito de la raíz cuadrada de 780 (Fig. 4.5).

5. Por último se hace la diferencia 380-329=51 (Fig. 4.6) Por lo tanto, la raíz cuadrada de 780 es 27.

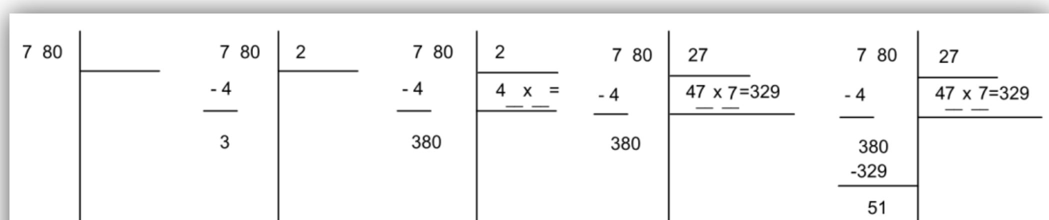


Figura 4.2 Figura 4.3 Figura 4.4 Figura 4.5 Figura 4.6

4.1.2 Algoritmo babilónico para encontrar la raíz cuadrada

Sea $b>1$ el número al cual queremos encontrar su raíz cuadrada y sea $x_1>0$ con $x_1^2>b$ y $|x_1-\sqrt{b}|<1$.

Hagamos $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)$. Utilizando la identidad $\left(t+\frac{b}{t}\right)^2=\left(t-\frac{b}{t}\right)^2+4b$ podemos deducir que

$$x_2^2=\frac{1}{4}\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\left(x_1-\frac{b}{x_1}\right)^2+4b\right]=\frac{1}{4}\left(x_1-\frac{b}{x_1}\right)^2+b$$

esto es $x_2^2>b$ ya que $\frac{1}{4}\left(x_1-\frac{b}{x_1}\right)^2\geq 0$

además como $x_1^2>b,\ x_1>\frac{b}{x_1},\ 2x_1>x_1+\frac{b}{x_1}$

de ahí se tiene que $x_1>\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)=x_2$

y obtenemos $\sqrt{b}<x_2<x_1$, además

$$x_2-\sqrt{b}=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)-\sqrt{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{x_1}-\frac{2\sqrt{b}x_1}{x_1}+\frac{b}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(x_1-\sqrt{b}\right)^2}{x_1}\leq\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{b}\right)^2$$, ya que $x_1>1$

Si hacemos la sucesión $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{b}{x_n}\right)$ y por lo anterior obtenemos $\sqrt{b}<\ldots<x_3<x_2<x_1$ y también $x_{n+1}-\sqrt{b}\leq\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right)\left(x_{n-1}-\sqrt{b}\right)^4$ siempre que $x_1-\sqrt{b}\leq 1$; observemos que x_{n+1} está muy cerca de $\sqrt{b}$, por lo tanto x_{n+1} sería una muy buena aproximación para el valor exacto de $\sqrt{b}$.

Ejemplo 1

Aproximar el valor de $\sqrt{5}$

Tomemos $x_1=3$; ya que cumple que: $3^2=9>5$. Ahora aplicamos las iteraciones del algoritmo:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{5}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{5}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{7/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{21} + \frac{45}{21}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{94}{21}\right) = \frac{47}{21} \approx 2.24$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{5}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{47}{21} + \frac{5}{47/21}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(47)(47)}{(21)(47)} + \frac{(105)(21)}{(47)(21)}\right)$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{2,209}{987} + \frac{2,205}{987}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4,414}{987}\right) = \frac{2,207}{987} \approx 2.23$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{5}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2,207}{985} + \frac{5}{2,207/985}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2,207}{985} + \frac{4,925}{2,207}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(2,207)^2 + (4,925)(985)}{(985)(2,207)}\right)$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{4_1870,849 + 4_1851,125}{2_1173,895}\right) = \frac{9_1721,974}{4_1347,790} \approx 2.23 \;\Rightarrow\; \sqrt{5} \approx 2.23$$

4.1.3 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una desigualdad muy útil encontrada en diferentes áreas de la matemática, tales como el álgebra lineal aplicada a vectores, en análisis matemático aplicada a series infinitas e integración de productos de funciones, y en teoría de probabilidades, aplicada a varianzas y covarianzas.

Antes de presentar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, veamos un resultado previo:

Lema: Cualesquiera que sean los números $a, b > 0$ se cumple que $2ab \leq t^2a^2 + t^{-2}b^2$ para cualquier $t > 0$. Esto se deduce de la desigualdad:

$$0 \leq \left(ta - \frac{1}{t}b\right)^2 \;\Rightarrow\; 0 \leq t^2a^2 - 2ab + t^{-2}b^2 \;\Rightarrow\; 2ab \leq t^2a^2 + t^{-2}b^2$$

Si sustituimos en la última desigualdad $t^2 = \frac{b}{a}$ se tiene:

$$2ab \leq \frac{b}{a}a^2 + \frac{a}{b}b^2 \Rightarrow 2ab = 2ab$$

y se cumple la igualdad.

Utilizando el lema anterior dos veces tenemos para $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ se tiene:

$$2a_1b_1 \leq t^2a_1^2 + t^{-2}b_1^2 \text{ y } 2a_2b_2 \leq t^2a_2^2 + t^{-2}b_2^2$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$2\left(a_1b_1 + a_2b_2\right) \leq t^2\left(a_1^2 + a_2^2\right) + t^{-2}\left(b_1^2 + b_2^2\right) \text{..........(1)}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} &= \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} + \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \\ &= \frac{(a_1^2+a_2^2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\sqrt{b_1^2+b_2^2} + \sqrt{a_1^2+a_2^2}\frac{(b_1^2+b_2^2)}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \\ &= \frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}(a_1^2+a_2^2) + \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}(b_1^2+b_2^2); \quad \text{sea } t^2 = \frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \\ &= t^2\left(a_1^2+a_2^2\right) + t^{-2}\left(b_1^2+b_2^2\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} = t^2\left(a_1^2+a_2^2\right) + t^{-2}\left(b_1^2+b_2^2\right) \text{..........(2)}$$

de donde comparando (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} 2\left(a_1b_1 + a_2b_2\right) &\leq 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \\ a_1b_1 + a_2b_2 &\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \end{aligned}$$

A esta última desigualdad se le conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

4.1.4 Lanzamiento de Proyectiles

Figura 4.7

Selección salvadoreña de fútbol playa entrenando. Nótese que el balón describe una trayectoria parabólica

En el fútbol, el beisbol y en general cuando se lanza un objeto, la fuerza gravitatoria lo obliga a seguir una trayectoria parabólica. Como se introdujo en el capítulo 3, las componentes (x, y) de la posición de un objeto en el lanzamiento de proyectiles son:

$$(x, y) = \left(v_0\cos(\theta)t,\ v_0 sen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo inicial, g es la gravedad; v_0, θ y g son constantes. Despejando t en la primera componente se tiene que $t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\theta)}$, entonces la componente en y de la posición de un objeto queda de la siguiente manera:

$$y = v_0 sen(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 sen(\theta)\left[\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right] - \frac{1}{2} g \left[\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right]^2 = y = x \tan(\theta) - \frac{\frac{1}{2} g x^2}{v_0^{\ 2} \cos^2(\theta)}$$

Y si hacemos $A = \tan(\theta)$ y $B = -\dfrac{\frac{1}{2} g}{v_0^{\ 2} \cos^2(\theta)}$, entonces obtenemos una ecuación de la forma:

$$y = Ax + Bx^2$$

Esta última expresión representa una parábola en x.

Además, podemos obtener las componentes $(V_x,\ V_y)$ de la velocidad:

$$V_x = v_0 \cos(\theta),$$

$$V_y = v_0 sen(\theta) - gt, \quad \text{pero } t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

$$V_y = v_0 sen(\theta) - g\left[\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right] \Rightarrow V_y = v_0 sen(\theta) - \frac{gx}{v_0 \cos(\theta)}$$

4.2 Aplicaciones Técnicas de los Polinomios Cuadráticos

En el mundo en que vivimos estamos acostumbrados a ver desde hace algún tiempo multitud de antenas parabólicas. Pero, también hemos oído hablar muchas veces, incluso los habremos visto, de hornos parabólicos. La pregunta es ¿cómo funcionan y por qué tienen precisamente esa forma? Vamos a intentar explicarlo.

Las ondas como la luz, el sonido, ondas de radio, etc., cuando chocan contra un obstáculo experimentan un cambio de dirección o de sentido, volviendo al mismo medio del que proceden. A esta propiedad se le llama **reflexión.**

La dirección de propagación de una onda se representa mediante líneas que se denominan rayos y según la forma de la superficie en la que inciden así será la dirección de los rayos reflejados. Cuando la forma de dicha superficie es parabólica todos los rayos que llegan paralelos al eje de la parábola se reflejan pasando por un mismo punto que se denomina "**foco**". Esta es la propiedad fundamental en que se basan todos los ingenios parabólicos.

Figura 4.8

Esta propiedad de reflexión en la parábola se utiliza en la construcción de **antenas parabólicas** para recepción de señales de TV, radares, radiotelescopios, etc. Estos dispositivos constan de un "plato" parabólico que recoge las ondas y estas se reflejan hacia una antena colocada en el foco. Tienen diferentes tamaños, según su utilidad, desde los 60 cm de una antena de televisión para recibir la señal por satélite hasta los 305 m de diámetro que tiene el plato del radiotelescopio más grande del mundo que se encuentra en Puerto Rico (Arecibo).

Figura 4.9

Otra aplicación se encuentra en la fabricación de **hornos solares**. Se construye una "cocina" parabólica que concentra la radiación solar y la convierte en calor gracias a un reflector de láminas de aluminio sobre el que se pone la sartén, la paellera o cualquier otro recipiente utilizado para cocinar. En un día soleado se puede conseguir que un litro de agua hierva unos 18 minutos y que el aceite alcance una temperatura máxima de 200° C. Al cocinar es necesario tomar ciertas precauciones, como evitar el deslumbramiento, usar cacerolas de color negro y utilizar manoplas para evitar quemaduras.

Al igual que los rayos paralelos al eje de la parábola se reflejan siempre pasando por el foco, la propiedad análoga nos dice que un rayo que incida pasando por el foco se reflejará paralelo al eje de la parábola. Este es el fundamento de muchos tipos de reflectores. Por ejemplo, en los **faros de los automóviles** la lámpara situada en el foco hace que el haz de luz se concentre en la carretera.

Figura 4.10

Problemas Resueltos

Problema 1

Demostrar el teorema de Pitágoras; es decir, demostrar que en un triángulo rectángulo de catetos a, b y con hipotenusa c se cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$ (Figura 4.11).

Solución.

Consideremos la Figura 4.12. Ahora calculemos el área del cuadrado grande de dos maneras diferentes.

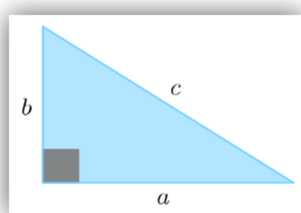


Figura 4.11

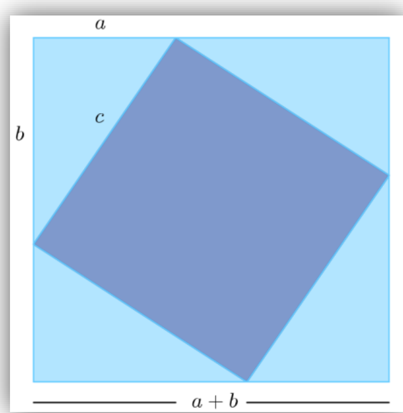


Figura 4.12

-Nótese que el cuadrado grande tiene como lado $a+b$, por lo cual su área es:

$$A_1 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

-Por otro lado, nótese que este mismo cuadrado está formado por un cuadrado de lado c y cuatro triángulos rectángulos de área $\frac{ab}{2}$; por lo cual el área también se puede calcular sumando las áreas de los cuatro triángulos con el área del cuadrado pequeño, tal como se muestra a continuación:

$$A_2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

Luego como $A_1 = A_2$ se tendrá que: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Problema 2

¿Cuál es la longitud de los lados de un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado de lado 2 como se muestra en la figura?

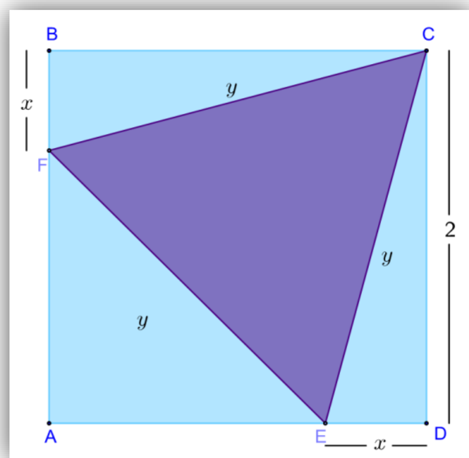


Figura 4.12

Solución

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ΔECD obtenemos que

$$x^2 + 2^2 = y^2 \ldots\ldots(1)$$

Además aplicándolo al triángulo ΔAFE se tiene

$$(2-x)^2 + (2-x)^2 = y^2 \ldots\ldots(2)$$

Se igualan ambas ecuaciones obtenidas en (1) y (2) tenemos

$$x^2 + 2^2 = 2(2-x)^2 \quad \Rightarrow x^2 + 4 = 2(4 - 4x + x^2) \quad \Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64-16}}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$

Dado que $x = \frac{8+\sqrt{48}}{2} \approx 7.46 > 2$ esta solución se descarta mientras que $x = \frac{8-\sqrt{48}}{2} \approx 0.54 < 2$

ahora sustituimos éste valor de x en la ecuación $x^2 + 2^2 = y^2$ para obtener $\left(\frac{8-\sqrt{48}}{2}\right)^2 + 2^2 = y^2$

Así deducimos que $y = \sqrt{\left(\frac{8-\sqrt{48}}{2}\right)^2 + 2^2}$

Problema 3. Trisectando el círculo de radio 1

Encontrar el valor de los radios r_1 y r_2 para que las tres áreas mostradas en la Figura 4.13 sean iguales.

Solución

Como el circulo tiene radio 1, entonces se cumple que $A_1 + A_2 + A_3 = \pi(1)^2 = \pi$

Además vemos que $A_2 = 2\left(\frac{\pi}{2}r_2^{\ 2} - \frac{\pi}{2}r_1^{\ 2}\right)$; y como estamos trisecando el círculo debe cumplirse que

$$A_2 = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{\pi}{2}r_2^{\ 2} - \frac{\pi}{2}r_1^{\ 2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Simplificando obtenemos que $r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2} = \frac{1}{3}$, de donde $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = \frac{1}{3}$ y como además se cumple que $2r_2 + 2r_1 = 2(1)$ que es el diámetro, luego se cumple que $r_2 + r_1 = 1$; entonces de ahí se deduce que $r_2 - r_1 = \frac{1}{3}$. Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$r_2 + r_1 = 1$$
$$r_2 - r_1 = \frac{1}{3}$$

Al resolver dicho sistema se obtiene que $2r_2 = \frac{4}{3}$, obteniendo así que $r_2 = \frac{2}{3}$ y que $r_1 = \frac{1}{3}$

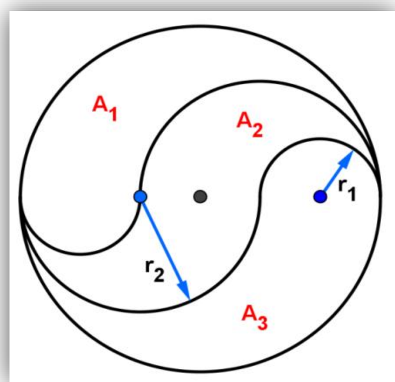


Figura 4.14

Problema 4

Considere la ecuación cuadrática $3x^2 + 2x + 2 = kx + k$. Determine los valores que puede tomar la constante k, para que la ecuación tenga una única solución real.

Solución

Primero reescribimos la ecuación cuadrática colocando todos los términos a un solo lado de la ecuación y luego agrupando términos semejantes de la siguiente manera:

$$3x^2 + x + 2 - kx - k = 0$$
$$3x^2 + (1-k)x + 2 - k = 0$$

Ahora podemos aplicar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación, donde podemos identificar que $a = 3,\ b = 1-k$ y $c = 2-k$, luego

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(1-k)\pm\sqrt{(1-k)^2-4(3)(2-k)}}{2(3)}$$

Como lo que se quiere es que sólo exista una solución real, entonces, la parte que queda dentro del radical debe ser cero. Entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}&(1-k)^2-4(3)(2-k)=0\\&1-2k+k^2-24+12k=0\\&k^2+10k-23=0\end{aligned}$$

Entonces nos queda $k^2+10k-23=0$, podemos ver que tenemos otra ecuación cuadrática con variable k y las soluciones de esta ecuación obtenidas por medio de la fórmula cuadrática serían:

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(10)\pm\sqrt{(10)^2-4(1)(-23)}}{2(1)}=\frac{-10\pm\sqrt{100+92}}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{192}}{2}$$

Por lo tanto los valores de k para los cuales la ecuación $3x^2+2x+2=kx+k$ sólo tiene una solución son:

$$k=\frac{-10+\sqrt{192}}{2}\quad \text{y} \quad k=\frac{-10-\sqrt{192}}{2}$$

Ejercicios

1. Calcular mediante el algoritmo babilónico, la raíz cuadrada de los siguientes números:

   $a.\ 210 \qquad b.\ 1730 \qquad c.\ 23619 \qquad d.\ 459682$

2. Un objeto con masa m es lanzado desde el suelo, con un ángulo de elevación θ y una velocidad inicial v_0. Después de encontrar su ecuación de movimiento, determinar el alcance en cada caso:

   $a.\ \theta=30°,\ v_0=200\ km/h \qquad b.\ \theta=45°,\ v_0=200\ km/h \qquad c.\ \theta=60°,\ v_0=200\ km/h$

3. Los polinomios $P_n(x)$ son definidos como:

$$P_1(x)=x+1 \ \text{ y } \ P_{n+1}(x)=P_n(x)(x+n)$$

Calcular las raíces de $P_4(x)$.

4. Compruebe que la suma de los n números naturales es un polinomio cuadrático en n; esto es:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

5. Compruebe que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es un polinomio cúbico en la variable n; esto es:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

6. Compruebe que la ecuación $p^2=2$, no puede ser satisfecha por un número p racional.

Sugerencia: suponga que p es racional, es decir que $p=\frac{m}{n}$ con $m,\ n\in \mathrm{N}$; ambos sin divisores comunes.

7. Compruebe la igualdad:

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots+ar^n=a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

8. Tome $x_1=1$, luego definimos por recurrencia $x_{n+1}=x_n^2$. Observe la tendencia de los valores de x_k. ¿Qué pasará si $0<x_1<1$ o $1<x_1$?

Sugerencia: grafique la parábola $y=x^2$, y en ella los valores de los x_k.

Examen de Conocimientos

1. Calcular la raíz cuadrada de 2, mediante el algoritmo babilónico y el algoritmo de la raíz cuadrada.

2. Sean los polinomios definidos por: $P_1(x)=x+2$; $P_n(x)=(P_{n-1}(x)+n)x$

Encuentre: $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$.

3. Encontrar la suma:

$$S=200+201+202+203+\ldots+300$$

4 . Calcular la suma:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{1024}$$

Vocabulario

Algoritmo: conjunto ordenado y finito de operaciones que permiten hallar la solución de un problema.

Proceso iterativo: conjunto ordenado de operaciones necesarias para producir un resultado, mediante la repetición o iteración de una o varias fases de dicho proceso.

Tiro parabólico: se llama tiro parabólico al lanzamiento de proyectiles, debido a que la forma que describe la trayectoria del movimiento de un proyectil al ser lanzado, es precisamente la de una parábola.

Bibliografía

1. Fernández Fernández, Santiago (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *SUMA* , (24), 77.
2. Martin, J. (1967). *Cours de mathématiques*. Francia: Editorial Dunod.
3. Stekette, Scott. (2006). Geometry of square roots. *National Council of teachers of mathematics, 100* (2), 87.

LECCIÓN 5 1° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 8 HORAS CLASE

TRIGONOMETRÍA

figura 5.1: Ruinas del Tazumal

El término ***Trigonometría*** proviene de las palabras griegas: Trigono y Metron, que quieren decir: Triángulo y Medida

Competencias a desarrollar

1. Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.).
2. Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento.
3. Interpretar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.
4. Seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible
5. Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

Objetivos de la lección

Deducir los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos peculiares y cuadrantales.

Conocer las relaciones entre el seno y el coseno.

Identificar el seno y el coseno con el círculo unitario.

Pre-saberes

La circunferencia.

Rectas notables de un triángulo: Altura, Bisectriz Mediana y Mediatriz.

Áreas de Triángulos.

Teorema de Pitágoras.

Descripción

En la presente lección se estudian las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, la relación entre el seno y el coseno, las funciones trigonométricas de ángulos peculiares y cuadrantales, se plantean ejemplos de aplicación y se incluyen demostraciones de identidades pitagóricas.

Contenido

5.1 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
5.2 Relación entre el seno y el coseno.
5.3 Funciones trigonométricas de ángulos peculiares.
5.4 Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales.
5.5 Identidades trigonométricas.
 5.5.1 Identidades fundamentales.
 5.5.2 Identidades Pitagóricas.
Ejercicios, Prueba de Conocimientos y Bibliografía.

5.1 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Deriva de los términos griegos (τριγωνο) "trigono" que significa triángulo y (μετρον) que significa "medición".

La trigonometría es una de las ramas más antigua de la matemática; estudia las relaciones entre los ángulos y lados de los triángulos y para ello utiliza las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante).

Aunque los antiguos griegos, como Hiparco y Ptolomeo, usaban trigonometría en su estudio de astronomía entre el 150 A.C. y el 200 D.C., su historia es mucho más antigua. Por ejemplo el escriba egipcio Ahmes registró algunos cálculos trigonométricos rudimentarios (acerca de las proporciones de los lados de las pirámides) en el famoso Papiro de Rhind cerca del 1650 A.C. Incluso Ahmes dijo haber copiado el papiro de un trabajo aún más antiguo que posiblemente data del 3000 A.C.

Sabías que

Diversos edificios, esculturas y obras arquitectónicas emblemáticas en todo el mundo, están basados en la geometría y la trigonometría.

Figura 5.2 Museo de louvre, Francia

Figura 5.3 Torre de Eifel, Francia

Figura 5.4 Tikal, Guatemala

Figura 5.5 Holtel Luxor, Estados Unidos

Definiciones

Para cualquier ángulo agudo θ y un triángulo rectángulo cualquiera ΔABC, el seno de θ, abreviado $sen\theta$, es la razón de la longitud del lado opuesto del ángulo y la longitud de la hipotenusa del triángulo, ver figura 5.6. Sea:

a: longitud del lado adyacente; b: longitud del lado opuesto; c: longitud de la hipotenusa

Luego: $sen\theta = \dfrac{b}{c}$

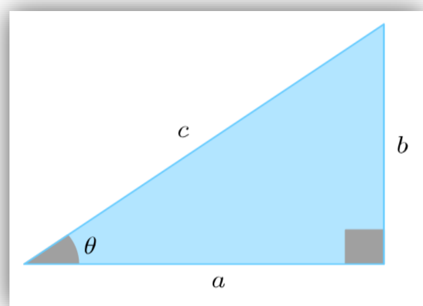


Figura 5.6

De manera similar tenemos el coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante del ángulo θ, que se abrevian y definen de la siguiente manera:

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \csc\theta = \frac{c}{b}$$

O b s e r v a q u e

De acuerdo con la definición $sen\theta = \dfrac{b}{c}$ y $\csc\theta = \dfrac{c}{b}$; note que $sen\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$; además note que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ *y* $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$, por esta razón las funciones cotangente, secante y cosecante reciben el nombre de **recíprocas** y así conociendo el valor del seno y coseno, podemos conocer el resto ya que también $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$.

Ejemplo 1

Dada la siguiente figura; encuentre los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos α, β .

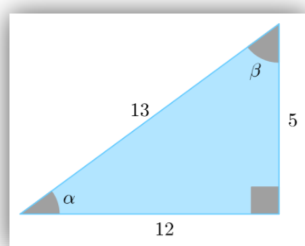


Figura 5.7

Utilizando la definición tendremos que:

$$sen\alpha = \frac{5}{13},\ sen\beta = \frac{12}{13};\quad \cos\alpha = \frac{12}{13},\ \cos\beta = \frac{5}{13};\quad \tan\alpha = \frac{5}{12},\ \tan\beta = \frac{12}{5};$$

$$\csc\alpha = \frac{13}{5},\ \csc\beta = \frac{13}{12};\quad \sec\alpha = \frac{13}{12},\ \sec\beta = \frac{13}{5};\quad \cot\alpha = \frac{12}{5},\ \cot\beta = \frac{5}{12}.$$

Ejemplo 2

Encuentre la longitud de la sombra que un árbol proyecta, si se sabe que su altura es de 20 metros y su parte más alta con el suelo forman un ángulo de 40°.

Primeramente construimos un dibujo que se adecúe a las condiciones del problema, como lo muestra la Figura 5.8 y llamemos x a la longitud de la sombra y consideremos ahora el triángulo rectángulo ΔABC que se muestra en Figura 5.9.

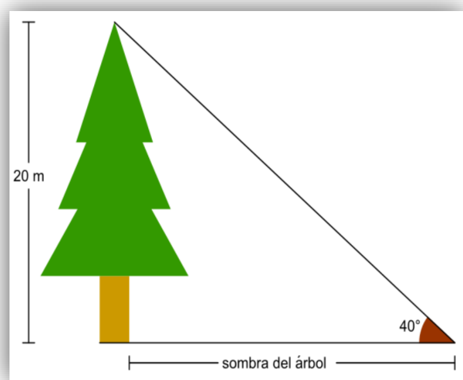


Figura 5.8

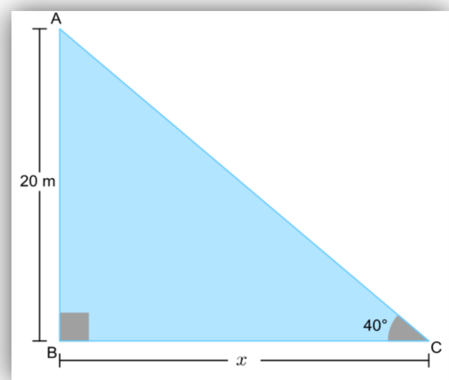


Figura 5.9

Nótese que de nuestra nueva figura, necesitamos relacionar en el triángulo rectángulo ΔABC, el lado adyacente y opuesto al ángulo; y la razón que nos funciona es la tangente de dicho ángulo, así:

$$\tan 40° = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{x}, \text{ de donde } x = \frac{20}{\tan 40°}$$

Utilizando la calculadora, $\tan 40° \approx 0.8391$ entonces $x \approx \dfrac{20}{0.8391} \approx 23.83.$

Tarea. Con este método calcula la altura de una persona y la de un edificio. Dibuja un esquema.

5.2 Relación entre el seno y el coseno

Ejemplo 3

En la siguiente figura $\cos\alpha = \frac{5}{7}$, ¿cuál es el valor del $sen\beta$?

Por definición $sen\beta = \dfrac{AC}{AB}$. El valor de esta razón es $\frac{5}{7}$, el mismo que $\cos\alpha$. ¿Es esto una coincidencia?, el siguiente teorema nos da la respuesta.

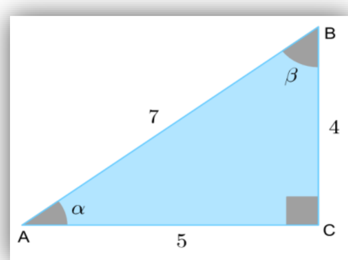


Figura 5.10

Teorema 5.1 Si $\alpha + \beta = 90^\circ$ entonces $sen\alpha = \cos\beta$ y $sen\beta = \cos\alpha$.

Demostración

La condición $\alpha + \beta = 90^\circ$ garantiza que se trata de un triángulo rectángulo; luego consideremos la siguiente figura:

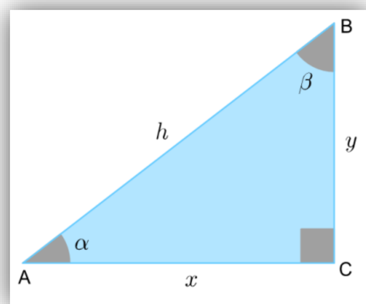


Figura 5.11

Nótese que $\cos\alpha = \frac{x}{h} = sen\beta$ y $sen\alpha = \frac{y}{h} = \cos\beta$, lo que completa la prueba.

Para evitar ambigüedades, representaremos

$(sen\alpha).(sen\alpha) = (sen\,\alpha)^2 = sen^2\alpha \neq sen(\alpha^2)$

Teorema 5.2 Para cualquier ángulo α se cumple la identidad $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Demostración

Consideremos un triángulo rectángulo ΔABC, que incluye el ángulo α:

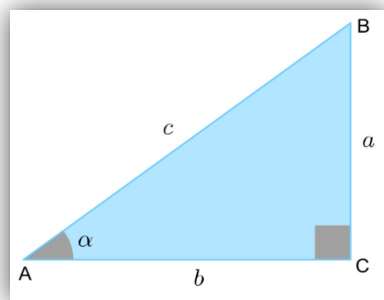


Figura 5.12

Supongamos que los lados tienen longitudes a y b, y la hipotenusa tiene longitud c.

Entonces $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)}{c^2}$; pero por el teorema de Pitágoras sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$, así la suma de las fracciones es igual a 1; esto es $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

5.3 Funciones trigonométricas de ángulos peculiares

Usualmente no es fácil encontrar el valor de las funciones trigonométricas, dadas las medidas del ángulo, pero existen algunos ángulos especiales en los que no es difícil encontrarlas:

Ejemplo 4

Encontrar $\cos 30^\circ$

Al usar nuestra definición del coseno de un ángulo, podemos considerar un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos de 30°; partiendo un triángulo equilátero de lado dos unidades en dos triángulos iguales. Tal como se ilustra en la figura 5.13.

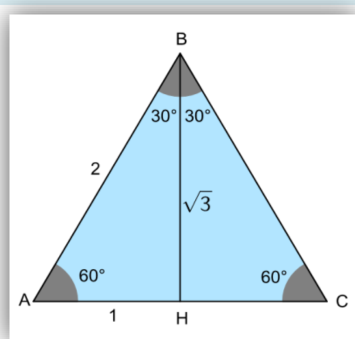


Figura 5.13

En el triángulo equilátero hemos trazado la altura BH y por tanto $AH=1$, ya que la altura es mediana de su base y además es bisectriz de su ángulo. Utilizando el Teorema de Pitágoras encontramos la longitud de la altura que es $\sqrt{3}$, por tanto utilizando la definición:

$$\cos 30^{\circ}=\frac{BH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nótese además que de esta construcción hemos encontrado mucho más, podemos conocer los valores para el seno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 30°, y también conocer los valores para $60°$, lo cual se resumirá en una tabla más adelante.

Otro ángulo del que podemos encontrar el valor de las seis funciones trigonométricas es 45°, para lo que consideraremos un cuadrado de lado 1:

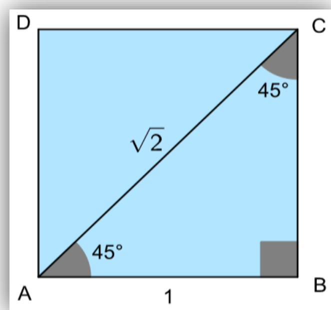


Figura 5.14

En el cuadrado anterior hemos trazado la diagonal AC, en la cual utilizamos el Teorema de Pitágoras para calcular su longitud $AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ y utilizando el ΔABC podemos encontrar los valores de las funciones trigonométricas.

$$sen 45^{\circ}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \cos 45^{\circ}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \tan 45^{\circ}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{1}=1$$

$$\cot 45^{\circ}=\frac{AB}{BC}=1;\quad \sec 45^{\circ}=\frac{AC}{AB}=\sqrt{2};\quad \csc 45^{\circ}=\frac{AC}{BC}=\sqrt{\ }$$

Así hemos obtenido los valores de las funciones trigonométricas para tres ángulos especiales 30°, 45° y 60°; lo cual se resume en la siguiente tabla:

θ	$sen\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Observe en la tabla anterior que $\cos 30°=sen 60°$ y $\cos 60°=sen 30°$; correspondiéndose con el

Teorema 5.1

5.4 Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

En esta parte encontraremos los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos $0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°,$ los cuales reciben el nombre de ángulos cuadrantales por coincidir con los ejes coordenados en el plano cartesiano.

¿Cuál será el valor de $sen\ 90°$?

Para responder a esta pregunta, haremos un análisis de la siguiente figura:

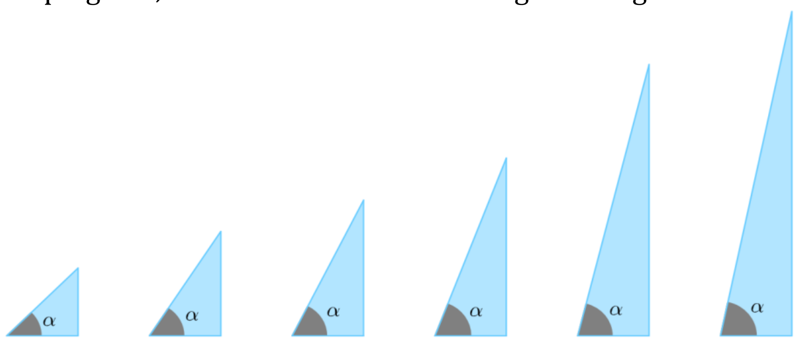


Figura 5.15

En los triángulos anteriores podemos observar que a medida que el ángulo α se va acercando a $90°$, el cociente del lado opuesto y la hipotenusa se va acercando a uno ya que las longitudes de las mismas tienden a ser iguales. Para el coseno vemos que el cociente del lado adyacente y la hipotenusa se irá acercando a 0.

Mientras que por otro lado la $\tan 90°$, no existe ya que el cociente tiene la forma

$\tan 90° = \dfrac{\text{lado puesto}}{\text{lado adyacente}}$, luego si $\text{lado adyacente} \to 0$ se tendrá que $\tan 90° = \dfrac{\text{lado puesto}}{0}$

puesto que la división por cero no está definida decimos que la tangente de $90°$ no existe. En resumen:

$sen 90° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \tan 90°$ no está definida, $\cot 90° = 0,\ \sec 90°$ no está definida y $\csc 90° = 1.$

Veamos ahora un análisis más formal, utilizando el concepto de circunferencia. Tracemos una semicircunferencia de radio igual a la unidad, como se muestra a continuación:

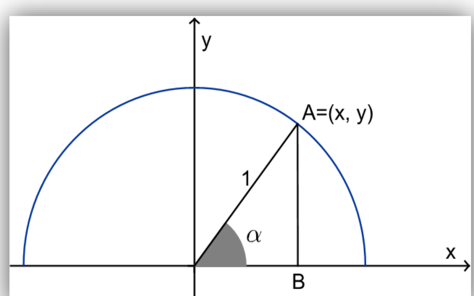


Figura 5.16

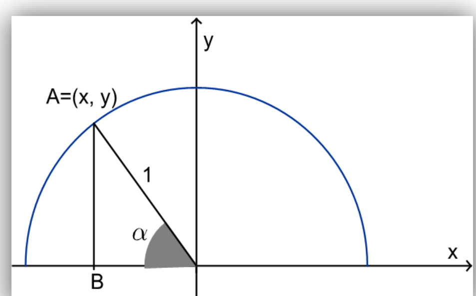


Figura 5.17

En las figuras anteriores hemos tomado un punto cualquiera A de la semicircunferencia e indiquemos por α el ángulo, tracemos desde el punto A la perpendicular AB, utilizando las respectivas definiciones de las funciones trigonométricas y considerando que el valor de la hipotenusa es 1, tenemos para cualquier punto sobre la semicircunferencia el triángulo determinado por los respectivos lados adyacentes y opuestos son x y y respectivamente.

Luego podemos definir $sen\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$, $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{x}{y}$

$\sec\alpha = \frac{1}{x}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{y}$.

Así tendríamos el valor de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.

En particular podemos tomar los ángulos de 0°, 90°, 180° y 270° los cuales se pueden representar por los puntos (1,0), (0,1), (-1,0) y (0,-1) respectivamente. En resumen se tiene:

Función	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	No existe	0	No existe
cot	No existe	0	No existe	0
sec	1	No existe	-1	No existe
csc	No existe	1	No existe	-1

5.5 Identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad que se cumple para cualquiera que sea el valor que toma la variable, siempre que los miembros de la igualdad estén bien definidos.

Para nuestro caso especial, estaremos trabajando con expresiones que contienen funciones trigonométricas; de ahí el nombre de identidades trigonométricas; ya conocimos algunas, por ejemplo: las relaciones entre el seno y el coseno, y la reciprocidad entre el seno, coseno, tangente con la cosecante, secante y cotangente respectivamente, ahora estudiaremos más a fondo las relaciones entre las distintas funciones trigonométricas.

5.5.1 Identidades fundamentales

Aquí tenemos expresiones que ya hemos mencionado anteriormente, entre ellas las recíprocas:

$$sen\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Por otro lado también tenemos las identidades cociente:

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{y} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

de las que ya hemos hablado al principio, y se debe de estar consciente de todas las combinaciones posibles que se pueden hacer con los despejes para no tener problemas a la hora de aplicarlos en los ejercicios.

Ejemplo 5

Si $\tan\alpha = \frac{2}{5}$, encuentre el valor numérico de $\dfrac{sen\alpha - 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3sen\alpha}$

Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo bien definido; luego dividimos la expresión entre $\cos\alpha$

$$\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} - 2\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - 3\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\tan\alpha - 2}{1 - 3\tan\alpha} = \frac{\dfrac{2}{5} - 2}{1 - \dfrac{6}{5}} = \frac{-\dfrac{8}{5}}{-\dfrac{1}{5}} = 8$$

En este ejemplo tenemos una aplicación directa de la identidad cociente; como vemos muy útil para simplificar expresiones más complicadas.

5.5.2 Identidades pitagóricas

De éstas conocimos ya una identidad, y es la que se dedujo en el Teorema 5.1, que establece que para cualquier ángulo agudo α, $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

De la última ecuación También podemos obtener:

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Para su deducción partimos de la relación $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, para obtener la primera relación dividimos toda esta expresión por $\cos^2\alpha$ obteniendo:

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2;$$

$$(\tan\alpha)^2 + 1 = (\sec\alpha)^2; \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha.$$

Para obtener la segunda relación dividimos por $sen^2\alpha$:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha};$$

$$\left(\frac{sen\alpha}{sen\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{sen\alpha}\right)^2;$$

$$1+(\cot\alpha)^2=(\csc\alpha)^2;\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

Ejemplo 6

Demuestre la siguiente identidad $\tan^2\alpha=(\sec\alpha+1)(\sec\alpha-1)$

Como $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \;\Rightarrow\; \tan^2\alpha=\sec^2\alpha-1=(\sec\alpha+1)(\sec\alpha-1)$

Finalmente se tiene la identidad.

Ejemplo 7

Demuestre la identidad $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\left(\dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^2$

Es de resaltar que en este tipo de ejercicios, puede trabajarse cualquiera de los dos términos o ambos simultáneamente, pero eso dependerá de la naturaleza del ejercicio, para nuestro caso trabajaremos el lado derecho:

$$\left(\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^2=\frac{sen^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

En el ejemplo anterior hemos usado la identidad pitagórica del seno y el coseno.

Ejemplo 8

Demostrar la siguiente identidad $\dfrac{(sen^2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cot^2\alpha}=sen^2\alpha$

En estos problemas se aconseja trabajar el lado más complicado de la ecuación, así como también pasar a senos y cosenos el resto de funciones.

Simplificando el lado izquierdo de esta expresión tenemos:

$$\frac{\left(sen^2\alpha+2\cos^2\alpha-1\right)}{\cot^2\alpha}=\frac{\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-1\right)}{\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}}=\frac{\left(1+\cos^2\alpha-1\right)}{\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}}$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}sen^2\alpha=sen^2\alpha,\ \text{así se tiene la identidad.}$$

Ejemplo 9

Sea x un número real tal que $\sec x-\tan x=2$, evaluar $\sec x+\tan x$.

Sabemos que x un número real tal que $1+\tan^2 x=\sec^2 x;\quad 1=\sec^2 x-\tan^2 x$

Así $1=\left(\sec x-\tan x\right)\left(\sec x+\tan x\right);\quad \sec x+\tan x=\dfrac{1}{\sec x-\tan x}=\dfrac{1}{2}.$

Sabías que:

La trigonometría se utiliza para calcular con muchísima precisión el lanzamiento de un misil.

Se usa en la Topografía, para conocer distancias, coordenadas y medidas angulares. Gracias a ello actualmente, la posición sobre la tierra de un objeto, animal o persona se puede determinar usando el sistema de posicionamiento global (GPS de EUA) y el de Rusia denominado GLONASS (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema)

Lanzamiento de Misil Ruso Topol M
http://warcyb.org.ru/_nw/2/95908617.jpg
Figura 5.18

Lanzamiento Soyuz-2-1B (GLONASS-M/Kosmos-2478)
http://4.bp.blogspot.com/-7ISphhw0RsU/TtU4fbKUtPI/AAAAAAAAj9w/60zTBJ2

Ejercicios

1. Dada la siguiente figura:

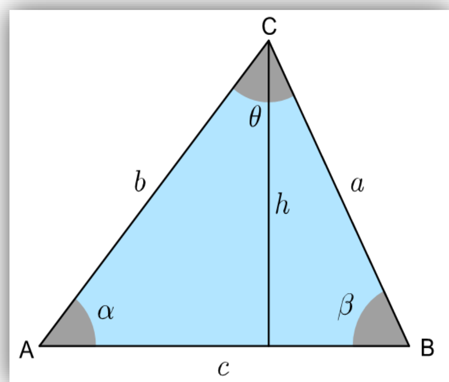


Figura 5.19

a. Encuentre una razón para el $sen\alpha$

b. Exprese h en términos de $sen\alpha$ y b

c. Exprese el área del ΔACB en términos de b, c y $sen\alpha$.

d. Exprese el área del ΔACB en términos de a, c y $sen\beta$.

e. Demuestre que: $\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b}$

f. Exprese la longitud de la altura de A a BC en términos de c y $sen\beta$.

g. Exprese la longitud de la altura de C a AB de dos formas distintas.

h. Concluya que:

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\theta}{c}$$

Esta relación es llamada la **ley del seno**.

2. Encuentre el valor de $\cos\alpha$, si α es agudo y $sen\alpha = \frac{5}{7}$
3. Pruebe que $sen\alpha + \cos\alpha \le 2$
4. Muestre que $sen\alpha + \cos\alpha \ge 1$ para cualquier ángulo agudo α.
5. Para qué valores de α, $sen\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$.

Examen de Conocimientos

1. Encuentre la altura de un árbol si su sombra proyectada mide 10 metros y el ángulo formado por la parte más alta del árbol con el suelo es de $45°$.

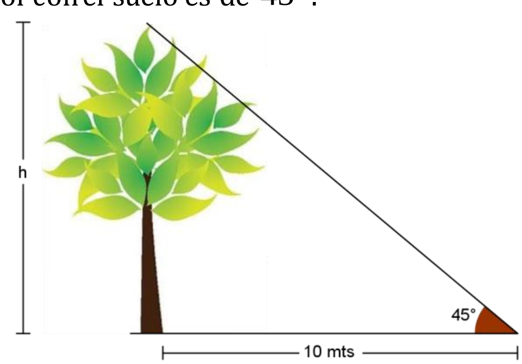


Figura 5.20

2. La siguiente figura $ACDE$ es un cuadrado de lado 1 y el ΔABC es equilátero:

a. Muestre que $\angle BED = \dfrac{\pi}{12}$.

b. Calcule BH y deduzca que: $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$

c. Utilice identidades trigonométricas para calcular el área del ΔABC.

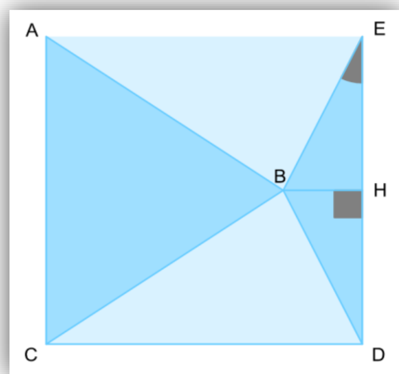


Figura 5.21

3. Demuestre las siguientes identidades:

$$a.\ \frac{sen^3\alpha-\cos^3\alpha}{sen\alpha-\cos\alpha}=1+sen\alpha\cos\alpha \qquad b.\ \frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{\sec^2 x+2\tan x}{2-\sec^2 x}$$

4. Explique brevemente, ¿por qué es importante el estudio de la trigonometría?

Bibliografía

1. Canjura, C. (2011). *Manual Número 5 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador.
2. De Guzmán, M. (1990). *Matemáticas de 2º de Bachillerato.* Barcelona, España: Editorial Araya.
3. Gelfand I.M. y M. Saul. (2001). *Trigonometry.* USA: Birkhäuser.
4. Titu, A. y Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems.* USA: Birkhäuser.

LECCIÓN 6 **2° AÑO DE BACHILLERATO** **TIEMPO: 8 HORAS CLASE**

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

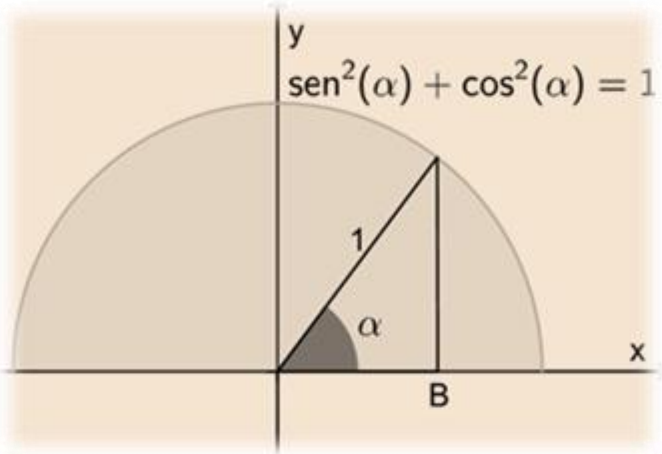


Figura 6.1

En las ecuaciones trigonométricas intervienen funciones trigonométricas, que son periódicas esto genera espacios de solución en muchos casos hasta complejos. Para resolver una ecuación trigonométrica se harán transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, para se utilizarán identidades trigonométricas fundamentales.

Competencias a desarrollar

Saber argumentar, cuantificar y analizar críticamente la información.

Representar y comunicar información.

Resolver y enfrentarse a problemas.

Usar técnicas e instrumentos matemáticos.

Modelar e Integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

Deducir las fórmulas del seno, coseno y tangente de la suma de dos ángulos.

Resolver ecuaciones trigonométricas aplicando identidades.

Resolver problemas relacionados con triángulos oblicuángulos.

Pre-saberes

Casos de factoreo.
Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
Áreas de triángulos.
Teorema de Pitágoras.

Descripción

Se definen los triángulos oblicuángulos y se resuelven aplicando las leyes del seno y del coseno; se analizan las identidades trigonométricas de ángulos negativos, se demuestran las fórmulas de adición y las identidades para ángulos dobles y triples, se resuelven ecuaciones trigonométricas y se presentan algunas aplicaciones y ejercicios.

Contenido

6.1 Triángulo oblicuángulo

En un triángulo **oblicuángulo** ninguno de sus ángulos es recto, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras; para resolverlos se utilizan la ley del seno y la ley del coseno, así como también el hecho que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados.

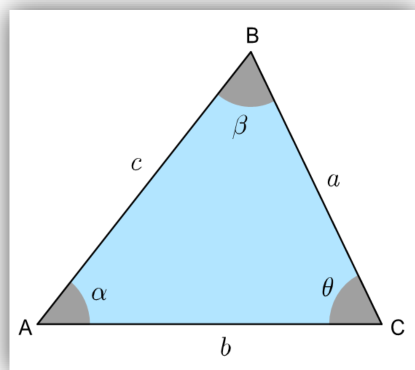


Figura 6.2

Ley del Seno

En todo triángulo oblicuángulo ΔABC, designado de la manera usual, se cumple que:

$$\frac{sen\alpha}{a}=\frac{sen\beta}{b}=\frac{sen\theta}{c}$$

Su demostración se propuso en los ejercicios del capítulo 5. Dicha ley se puede utilizar para resolver los casos siguientes:

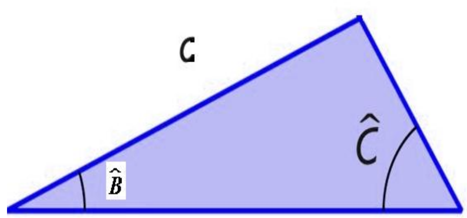


Figura 6.3

Caso I: se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

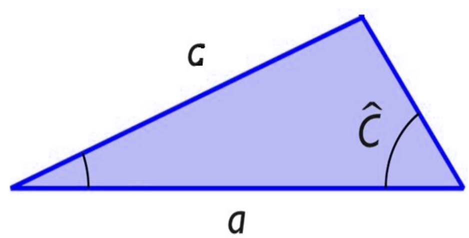


Figura 6.4

Caso II: se conocen un ángulo y sus lados opuesto y adyacente.

Ley del coseno:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

Observa que si uno de los ángulos fuese 90°, el tercer término de la ecuación se eliminaría y se obtiene el Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Con esta ley se pueden resolver los casos siguientes:

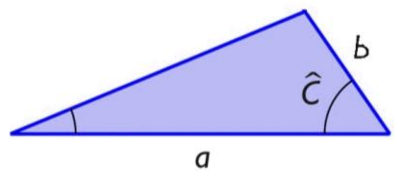


Figura 6.5

Caso III: se conoce un ángulo y sus lados adyacentes.

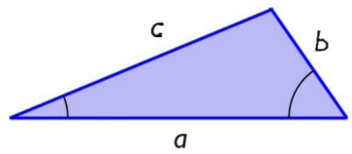


Figura 6.6

Caso IV: se conocen los tres lados del triángulo.

Ejemplo

En la siguiente fotografía se observan los avances en las obras de mitigación en la carretera Panorámica Santa Cruz Analquito, en el departamento de Cuscatlán. Se midieron los ángulos de ambas laderas respecto a la línea horizontal, obteniéndose 63° para la izquierda y 45° para la derecha. También se determinó que la longitud de la declinación izquierda es de 20 metros. Calcular la longitud de la declinación derecha.

***Figura* 6.7**

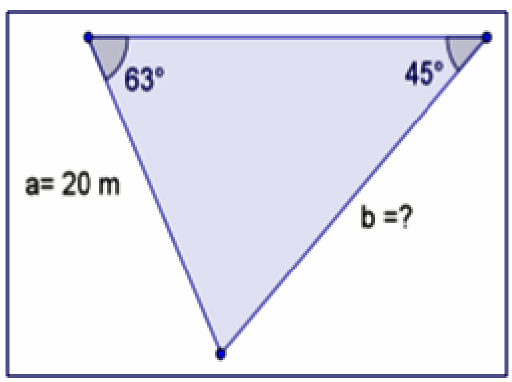


***Figura* 6.8**

Fuente: La Prensa Gráfica Multimedia, 2012.

Solución

Esta situación corresponde al caso I, donde se conocen dos ángulos y un lado del triángulo oblicuángulo, por lo que se utilizará la ley del Seno para resolver el problema.

$$\frac{sen45^\circ}{20} = \frac{sen63^\circ}{b}; \quad b = 20m\left(\frac{sen63^\circ}{sen45^\circ}\right) = 25m$$

6.2 Identidades Trigonométricas de ángulos negativos

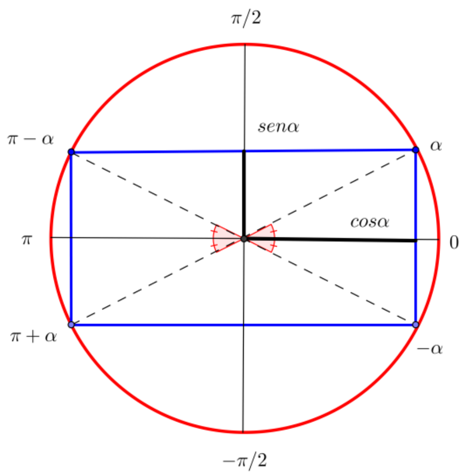


Figura **6.9**

Para obtener identidades trigonométricas a partir de nuestra definición de seno y coseno de un ángulo dentro del círculo unitario, primero observamos que los puntos de dicho círculo asociados a α, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$ y $-\alpha$ son los vértices de un rectángulo, suponiendo que los ejes de coordenadas son los ejes de simetría, como muestra la ***Figura 6.9***

De esta observación podemos hacer una lectura directa, para obtener las siguientes identidades:

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ y $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ y para el seno

$sen(-\alpha)=-sen\alpha,\ \mathrm{sen}(\pi-\alpha)=sen\alpha$ y $sen(\pi+\alpha)=-sen\alpha.$

6.3 Comprobación de las Fórmulas de Adición

En esta parte veremos que $sen(\alpha+\beta)\neq \mathrm{sen}\alpha+sen\beta$ y $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$, es decir, que estas igualdades, en general no son ciertas; por ejemplo:

Para $\alpha=\beta=90°;\ sen(\alpha+\beta)=sen(90°+90°)=sen(180°)=0.$

Por otra parte $\mathrm{sen}\alpha+sen\alpha=sen90°+sen90°=1+1=2.$

Y así tenemos que el seno de una suma de ángulos, en general no es igual a la suma de senos. Ahora veamos el siguiente teorema que nos dice la respuesta.

Teorema 6.1

Sean $\alpha,\ \beta$ ángulos cualesquiera, entonces se cumple:

$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$ y $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$

Demostración

Primero demostraremos la fórmula de adición para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ donde α, β son ángulos agudos y también lo es $\alpha+\beta$, necesitaremos dos triángulos rectángulos; uno conteniendo un ángulo agudo α y el otro conteniendo a β:

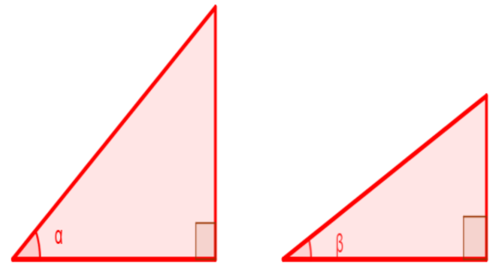


***Figura* 6.10**

Ahora superponemos los triángulos de la siguiente manera para representar la suma de los ángulos:

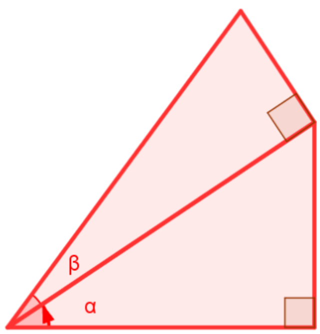


***Figura* 6.11**

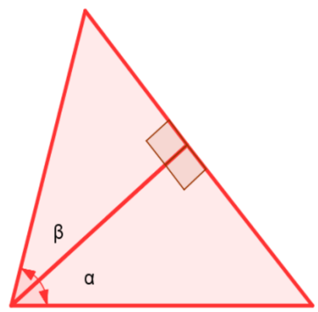


***Figura* 6.12**

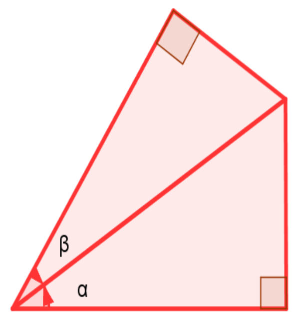


***Figura* 6.13**

Cada una de las figuras anteriores da una prueba diferente de la fórmula, pero sólo abordaremos las pruebas para las ***figuras 6.11 y 6.12;*** la prueba para la ***figura 6.13*** quedará como ejercicio para el lector.

Demostración

Comenzaremos con la ***figura* 6.11**, vamos a calcular el seno de la suma de los ángulos α y β.

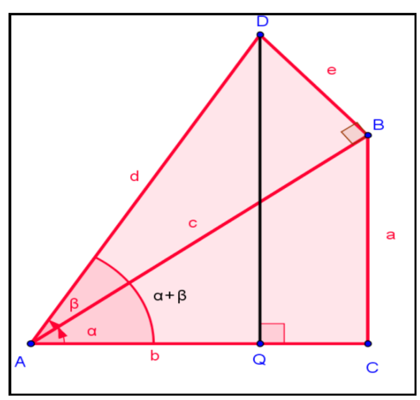


***Figura* 6.14**

De la figura obtenemos $sen\alpha=\dfrac{a}{c}$, $\quad sen\beta=\dfrac{e}{d}$.

Ahora trazamos la recta DQ perpendicular a AC.

Ahora podemos escribir:

$sen(\alpha+\beta)=\dfrac{DQ}{q}$, pero DQ, que está relacionado con $sen(\alpha+\beta)$, no está relacionado con las razones representativas para $sen\alpha$ y $sen\beta$, luego para establecer una relación dividimos DQ en dos partes, trazando una perpendicular desde B, como muestra la ***figura 6.15***

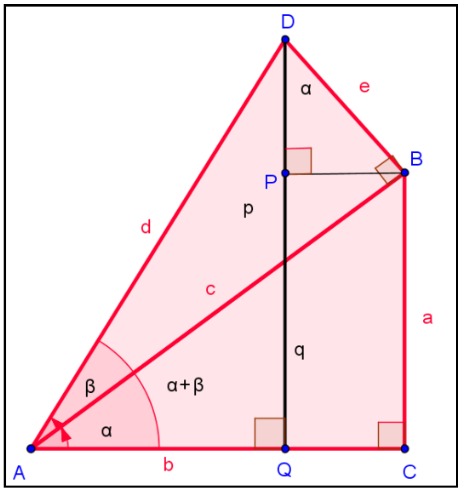


Figura **6.15**

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{p+q}{d}=\frac{p}{d}+\frac{q}{d}=\frac{p}{d}+\frac{a}{d}$$

Vamos a relacionar $\dfrac{p}{d}$ y $\dfrac{a}{d}$, con $sen\alpha$ y $sen\beta$.

$$\frac{a}{d}=\frac{a}{c}.\frac{c}{d}=sen\alpha\cos\beta$$

$$\frac{p}{d}=\frac{p}{e}.\frac{e}{d}=\cos\alpha sen\beta$$

Uniendo todos los resultados tenemos:

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{a}{c}.\frac{c}{d}+\frac{p}{e}.\frac{e}{d}=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

lo que completa la primera parte.

Veamos ahora el coseno de la suma:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AQ}{AD}=\frac{AC-QC}{AD}=\frac{AC}{AD}-\frac{QC}{AD}=\frac{AC}{AD}-\frac{BP}{AD}$$

$$=\frac{AC}{AB}.\frac{AB}{AD}-\frac{BP}{BD}.\frac{BD}{AD}=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta\,.$$

Segunda demostración

Para nuestra segunda demostración, usaremos un resultado adicional referente al área de un triángulo:

El área de un triángulo es iguala al producto de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo entre ellos.

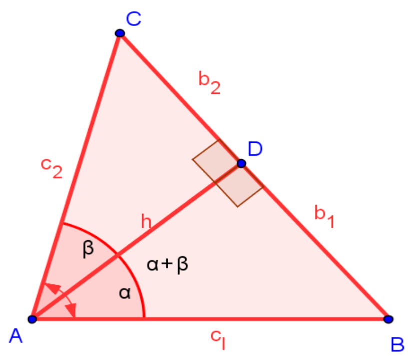


***Figura* 6.16**

En la ***figura 6.16*** tenemos dos triángulos rectángulos, uno que contiene un ángulo agudo α y el otro que contiene el ángulo β ; ahora si nosotros tenemos un lado común, obtenemos un nuevo triángulo, con un ángulo igual a $\alpha + \beta$:

Según la figura cada hipotenusa de los triángulos rectángulos es un lado de nuestro nuevo triángulo, en el cual hemos construido una altura, que es un lado común de nuestros triángulos rectángulos; por tanto haciendo uso de la figura y de la propiedad de área de un triángulo tenemos:

El área del triángulo ABC es $c_1 c_2 sen(\alpha + \beta)$

Ahora calcularemos el área de este triángulo usando métodos de geometría elemental; la comparación de esos dos resultados nos dará nuestra fórmula.

Sean $BD = b_1$ y $DC = b_2$. Y del triángulo rectángulo ABD obtenemos:

$$sen\alpha = \frac{b_1}{c_1}$$

Así $b_1 = c_1 sen\alpha$. Similarmente en el triángulo ACD, sea $b_2 = c_2 sen\beta$. Del triángulo rectángulo ABD obtenemos $h = c_1 \cos\alpha$ y del triángulo rectángulo ADC; $h = c_2 \cos\beta$.

Usando estas relaciones, podemos expresar el área del triángulo ABC como sigue:

$$\frac{1}{2}AD.BC=\frac{1}{2}h\left(b_1+b_2\right)=\frac{1}{2}hb_1+\frac{1}{2}hb_2$$

$$=\frac{1}{2}c_2\cos\beta\ c_1 sen\alpha+\frac{1}{2}c_2\cos\alpha\ c_1 sen\beta$$

Igualando nuestras dos expresiones para el área del triángulo ABC tenemos:

$$\frac{1}{2}c_1c_2 sen\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1}{2}c_2c_1\cos\beta sen\alpha+\frac{1}{2}c_1c_2\cos\alpha sen\beta$$

Dividiendo ahora esta expresión por el factor $\frac{1}{2}c_1c_2$ obtenemos el resultado deseado.

La demostración para coseno de la suma queda para el lector.

Corolario 1

Sean $\alpha,\ \beta$ ángulos cualesquiera entonces se cumple:
$sen\left(\alpha-\beta\right)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$ y $\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$

Demostración

Puesto que $sen\left(\alpha-\beta\right)=sen\left(\alpha+\left(-\beta\right)\right)=sen\alpha\cos(-\beta)+sen(-\beta)\cos\alpha$

$$=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta,$$

lo que demuestra la primera parte.

Para la segunda parte nótese que:

$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\left(\alpha+(-\beta)\right)=\cos\alpha\cos(-\beta)-sen\alpha sen(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta,$ lo que completa la demostración.

Ejemplo 1

Encontrar el valor de $sen 75°\ y\ \ \cos 75°$.

Solución

Puesto que $45°+30°=75°$, podemos hacer uso de las fórmulas de adición para el seno y el coseno, donde ya sabemos el valor de las seis funciones trigonométricas para estos ángulos.

$$sen75° = sen\left(45° + 30°\right) = sen45°\cos 30° + \cos 45° sen30° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ahora, de manera similar para el coseno:

$$\cos 75° = \cos\left(45° + 30°\right) = \cos 45°\cos 30° - sen45° sen30° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}.-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Nótese la importancia de estas nuevas fórmulas, ya que permiten conocer el valor de las funciones trigonométricas de nuevos ángulos.

Ejemplo 2

Demostrar que $1-\cot 23° = \dfrac{2}{1-\cot 22°}$

Solución

Es equivalente a demostrar $\left(1-\cot 23°\right)\left(1-\cot 22°\right) = 2$

Luego pasamos todo a términos de seno y coseno:

$$\left(1-\frac{\cos 23°}{sen23°}\right)\left(1-\frac{\cos 22°}{sen22°}\right) = \frac{sen23° - \cos 23°}{sen23°}.\frac{sen22° - \cos 22°}{sen22°}$$

Luego, utilizamos el hecho que:

$$\sqrt{2}sen\left(23° - 45°\right) = \sqrt{2}\left(sen23°\cos 45° - \cos 23° sen45°\right) = sen23° - \cos 23°$$

$$\sqrt{2}sen\left(22° - 45°\right) = \sqrt{2}\left(sen22°\cos 45° - \cos 22° sen45°\right) = sen22° - \cos 22°$$

Sustituyendo tenemos que la expresión se reduce a: $2\dfrac{sen\left(-22°\right)}{sen23°}.\dfrac{sen\left(-23°\right)}{sen22°} = 2.$

6.4 Fórmula para la Tangente de una Suma

Ahora vamos a demostrar que $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Utilizando la identidad cociente de la tangente y las fórmulas de adición del seno y el coseno tenemos:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta}$$

Ahora dividimos el numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$

Así se tiene que $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Por otro, lado también hemos encontrado un fórmula para la cotangente de una suma de ángulos ; ya que :

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{1-\dfrac{1}{\cot\alpha}\dfrac{1}{\cot\beta}}{\dfrac{1}{\cot\alpha}+\dfrac{1}{\cot\beta}}$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{\cot\alpha}\dfrac{1}{\cot\beta}}{\dfrac{1}{\cot\alpha}+\dfrac{1}{\cot\beta}}=\frac{\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha\cot\beta}}{\dfrac{\cot\beta+\cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}.$$

Note toda la información que hemos obtenido gracias a las fórmulas de adición del seno y el coseno, el resto de propiedades son mucho más sencillas de obtener.

6.5 Fórmulas para el ángulo doble

Si nosotros conocemos $sen\alpha$ y $\cos\alpha$ podemos encontrar los valores de $sen2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

Sabemos que:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta \quad y \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

haciendo $\alpha = \beta$ tenemos:

$$sen(2\alpha) = sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha\cos\alpha + \cos\alpha sen\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

Observe que la fórmula para $\cos(2\alpha)$ es muy interesante, como $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ podemos escribir $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$.

Similarmente, como $sen^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ podemos escribir $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Ejemplo

Simplificar $\sqrt{sen^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^2 x + 4sen^2 x}$

Solución

Utilizando la identidad pitagórica del seno y el coseno la expresión anterior se transforma en:

$$\sqrt{sen^4 x + 4\left(1 - sen^2 x\right)} - \sqrt{\cos^2 x + 4\left(1-\cos^2 x\right)} = \sqrt{\left(2 - sen^2 x\right)^2} - \sqrt{\left(2-\cos^2 x\right)^2}$$

$$= \left(2 - sen^2 x\right) - \left(2 - \cos^2 x\right) = \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$$

6.6 Fórmulas para el ángulo triple

Ahora encontraremos las fórmulas para $sen3\alpha$ y $cos3\alpha$.

Para $sen3\alpha$:

$$sen3\alpha = sen(2\alpha+\alpha) = sen2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha sen\alpha$$

$$= 2sen\alpha\cos 2\alpha + \left(2\cos^2\alpha - 1\right)sen\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$$

Para $\cos 3\alpha$:

$$\cos 3\alpha = \cos\left(2\alpha + \alpha\right) = \cos 2\alpha\cos\alpha - sen2\alpha sen\alpha$$

$$= \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - 2sen^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Finalmente para la tangente tenemos:

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha\tan\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}.$$

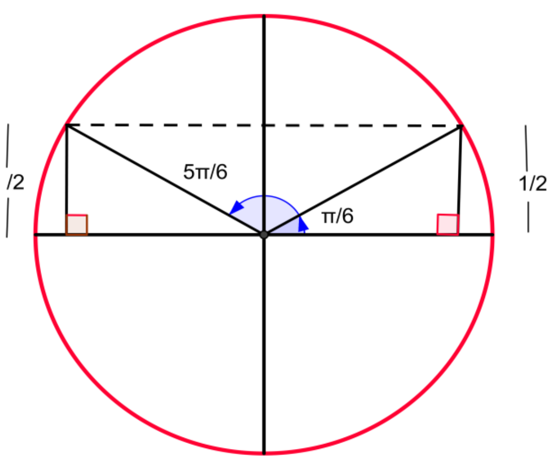
6.7 Ecuaciones Trigonométricas.

En esta parte, utilizaremos las identidades anteriores para simplificar lo más posible las ecuaciones; que en este caso involucran expresiones trigonométricas:

6.7.1 Ecuaciones de la forma $senx = \frac{1}{2}$

Ejemplo

Encuentre todos los valores de x para los cuales se cumple $senx = \frac{1}{2}$.



Solución

Sabemos que $x = \frac{\pi}{6}$ cumple la ecuación anterior, además según la figura también $x = \frac{5\pi}{6}$, pero si desde cualquier punto del círculo trigonométrico se realiza una rotación completa, se regresa al mismo punto de partida, por lo que el seno del ángulo descrito originalmente y el ángulo que se forma luego de la rotación son exactamente los mismos. Así para la primera de nuestras soluciones

***Figura* 6.14**

$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$, de donde $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ es otra solución a nuestra ecuación. Ya que podemos repetir este mismo proceso de manera indefinida (Es decir; podemos dar tantas rotaciones completas como nos plazca y siempre llegaremos al mismo punto de partida), podemos decir que a partir de la solución $x = \frac{\pi}{6}$ se pueden obtener infinitas soluciones de la forma $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; donde k es un número entero cualquiera. Aplicando esta misma idea a la segunda de las soluciones obtenidas anteriormente, podemos decir ahora que las soluciones de la ecuación son: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ *ó* $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ Donde k es un número entero.

Note que el método utilizado en el ejemplo anterior es similar al que se utilizaría para resolver ecuaciones con coseno o tangente; y pueden ser descrito en los siguientes pasos:

1. Llevar la ecuación a la forma $senx = a$, $\cos x = a,$ $\tan x = a$.
2. Encontrar las soluciones entre 0 y 2π de estas ecuaciones simples. Para esto se puede utilizar :
   $sen(x) = sen(\pi - x);\quad \cos(x) = \cos(-x)$ y $\tan(x) = \tan(\pi + x)$. Utilizar la propiedad periódica de las funciones; para que a partir de una solución específica x_0 se pueda obtener la solución general $x = x_0 + 2\pi k$

6.7.2 Ecuaciones de la Forma $A\cos(x) + B\cos(x) = C$

Ejemplo 1
Resuelva la ecuación $senx = \cos x$

Solución
Si dividimos la ecuación entre $\cos x$

$$\frac{senx}{\cos x} = 1 = \tan x$$

Luego tenemos que una solución particular es $x_0 = \frac{\pi}{4}$; así la solución general es:

$x = x_0 + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi$, para cualquier entero n.

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación $senx = \cos 2x$

1ª Solución

Reescribimos la ecuación anterior de la siguiente forma $senx = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

Donde podemos distinguir dos casos:

Primer caso: si $x = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2\pi n$ de dónde $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$. Con lo que se tiene la primera solución.

Segundo caso: tenemos que $x = \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) + 2\pi n$ de donde $x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n$

2ª Solución

Ya vimos que $\cos 2x = 1 - sen^2 x$, así podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:
$2sen^2 x + senx - 1 = 0$

Es decir una ecuación cuadrática cuyo variable es $senx$, la cual podemos expresar como el producto:

$$(2senx - 1)(senx + 1) = 0$$

Ahora analizamos cada factor por separado:

Para $2senx - 1 = 0; \quad senx = \frac{1}{2}$

Así la solución será $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ *ó* $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ para cualquier entero n.

Para $senx + 1 = 0; \quad senx = -1$

Así la solución será $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ para cualquier entero n.

Note que en estos últimos casos se tenía una solución particular.

Observe que para los ejemplos tratados anteriormente se han resuelto ecuaciones de la forma

$$A\cos x + Bsenx = C$$

A continuación se describe un método general para la solución de dichas ecuaciones. Para esto suponga que un triángulo rectángulo tiene por catetos $A\ y\ B$, los coeficientes de $sen(x)$ y $\cos(x)$ en la ecuación dada; su hipotenusa será entonces $\sqrt{A^2+B^2}$, luego dividimos la ecuación por este valor, resultándonos

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}senx = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Los coeficientes en esta nueva ecuación son coordenadas de un punto en la circunferencia unitaria y por lo tanto se pueden identificar con el seno y el coseno de un ángulo ϕ asociado a dicho punto.

Existen dos posibilidades, de acuerdo a cuál coeficiente será considerado abscisa y cuál de ellos como la ordenada.

Por ejemplo, si hacemos $\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $sen\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

La ecuación puede ser escrita en la forma: $\cos\phi\cos x + sen\phi senx = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

De donde las soluciones de la ecuación original se reducen a las soluciones de la ecuación

$$\cos(\phi - x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Note que esto nos dice que para que la ecuación original tenga solución debe cumplirse

$$-1 \le \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \le 1$$

Observe que la selección de $sen\phi\ y\ \cos\phi$ fue arbitraria. También pudo haberse establecido que $sen\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\cos\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ en cuyo caso la ecuación se transforma

$$sen\phi\cos x + \cos\phi senx = sen(\phi + x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

6.8 Aplicaciones

6.8.1 Cómo Eratóstenes midió el radio de la Tierra

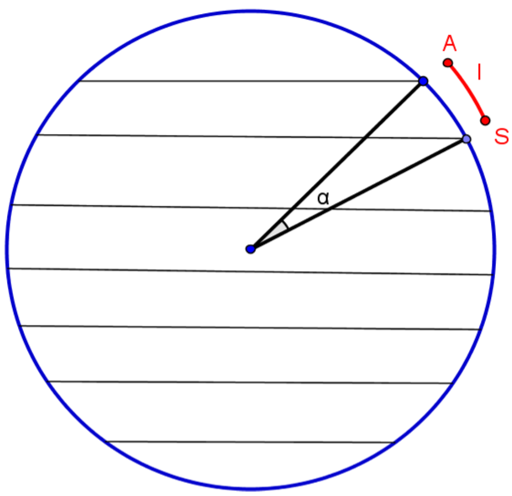


Figura 6.15

Eratóstenes de Cirene, un griego del siglo lll a. de C. calculó por primera vez el radio de la Tierra con una exactitud extraordinaria para los métodos que disponía.
La idea de su cálculo es muy sencilla:
Si se toman dos puntos A y S, sobre un mismo meridiano y se puede medir el ángulo α y la distancia l medida sobre el arco AS del meridiano que pasa por los dos puntos, por una sencilla regla de tres.

$$\frac{l}{\alpha}=\frac{\text{longitud total del meridiano}}{360°}=\frac{2\pi R}{360°}$$

De este modo $R=\dfrac{l}{\alpha}\dfrac{360°}{2\pi}$

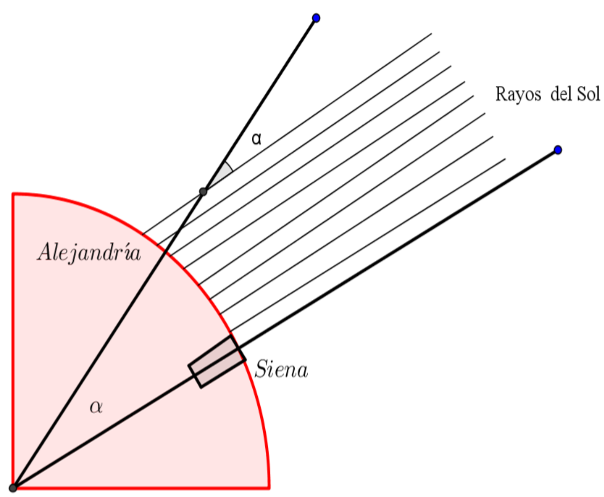


Figura 6.16

Lo difícil, por supuesto, era determinar el ángulo α y la distancia l

Eratóstenes eligió como punto una ciudad del sur de Egipto llamada antiguamente Siena (la moderna Aswan, donde se ha construido, recientemente, un embalse del Nilo). Allí, había un profundo pozo cuyo fondo iluminaba el sol un mediodía de verano. El punto A era

Alejandría, ciudad situada en el mismo meridiano que Siena, el Sol no caía vertical, sino separándose de la plomada un ángulo que valía $\frac{1}{50}$ de la circunferencia.

Utilizando probablemente el tiempo de viaje de una caravana o, tal vez, medidores expresamente contratados para ello, determinó que la distancia entre Alejandría y Siena era de 3,000 estadios, es decir, 926 km. Por tanto el radio de la Tierra debía ser:

$$R = \frac{926}{\frac{360}{50}} \frac{360}{2\pi} = 7,372\ km$$

Bastante aproximada a los 6,378 km que revelan las mediciones más modernas.

6.8.2 Cálculo de límites trigonométricos

Veamos que la división $\frac{sen\theta}{\theta}$ se acerca a 1 cuando θ se acerca a 0. Esto se simboliza como $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta} = 1$.

De la figura se tiene

$$QS = \theta,\quad sen\theta = \overline{PQ},\quad \tan\theta = \overline{RS}$$

Luego, $sen\theta \le \theta \le \tan\theta$ y además

$\frac{sen\theta}{\theta} \le 1$ y $\theta \le \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, de donde

$\frac{sen\theta}{\theta} \le 1$ y $\cos\theta \le \frac{sen\theta}{\theta}$

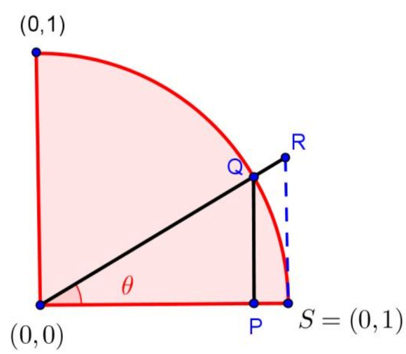


***Figura* 6.17**

Entonces $\cos\theta \le \frac{sen\theta}{\theta} \le 1$, pero cuando θ se aproxima a cero tomando valores positivos, $\cos\theta$ se aproxima a uno, tomando valores menores que él, y así obtenemos que $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta} = 1$.

b) Ahora estudiaremos la razón $\frac{1-\cos\theta}{\theta}$.

Como $\cos\theta = \cos\left(2\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}h\right) - sen^2\left(\frac{1}{2}h\right) = 1 - 2\,sen^2\left(\frac{1}{2}h\right)$

Luego, $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}=\dfrac{1-\left(1-2sen^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)}{\theta}=\dfrac{2sen^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta}=sen\left(\frac{1}{2}\theta\right)\dfrac{sen\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\frac{1}{2}\theta}$

por el literal anterior $\dfrac{sen\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\frac{1}{2}\theta}=1$ cuando θ se acerca a cero.

De esta manera $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}=0$

6.8.3 El péndulo

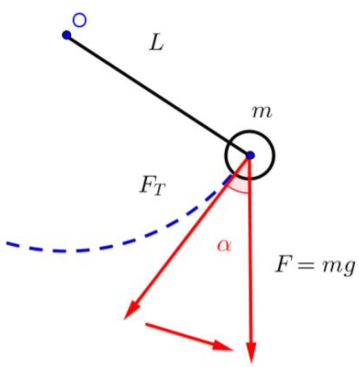


***Figura* 6.18**

Describiremos el movimiento de un objeto de masa m que cuelga de un hilo de longitud L que se amarra de un punto fijo O. El sistema mecánico completo es llamado péndulo. La única fuerza que actúa en la masa es la debida la gravedad, y lo hace en forma vertical hacia abajo.

Podemos descomponer la fuerza de la gravedad en dos, una fuerza tangencial a la circunferencia y otra normal a la circunferencia con dirección hacia el centro de ésta, pero la que interviene en el movimiento es la tangencial, y de la ***figura 6.18.*** Obtenemos:

$\dfrac{F_T}{F}=\cos\alpha,\ F_T=F\cos\alpha$ y $ma_T=ma\cos\alpha,\quad a=-9.8\,m/s^2$

Luego $a_T=-9.8\cos\alpha\ \ m/s^2$ que nos describe la ecuación del movimiento del objeto de masa m.

Examen de Conocimientos

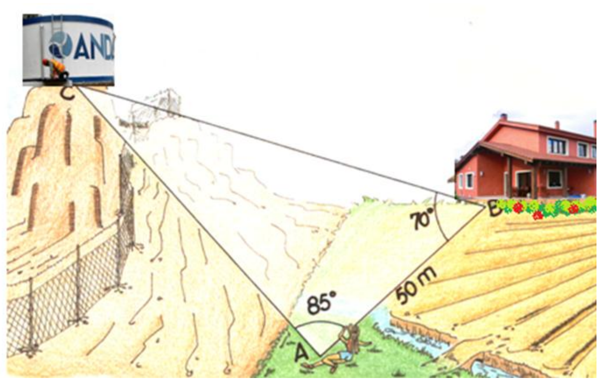
1. Reflexione si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos:
   La ecuación $sen2x = 2senx$ es equivalente a $\cos x = 1$.
   a. La ecuación $\frac{1}{2}\cos 2x = \cos^2 x$ no tiene solución.
   b. En el triángulo ABC, la longitud de la mediana trazada desde A es: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4bc\cos A}$
   c. En el triángulo ABC, si $senA \geq senB \geq senC$ entonces $a \geq b \geq c$

2. Simplifique la expresión $\dfrac{sen(\alpha+\beta) - \cos\alpha sen\beta}{\cos(\alpha+\beta) + sen\alpha sen\beta}$.

3. Demuestre que $sen^2\alpha - sen^2\beta = sen(\alpha+\beta)sen(\alpha-\beta)$

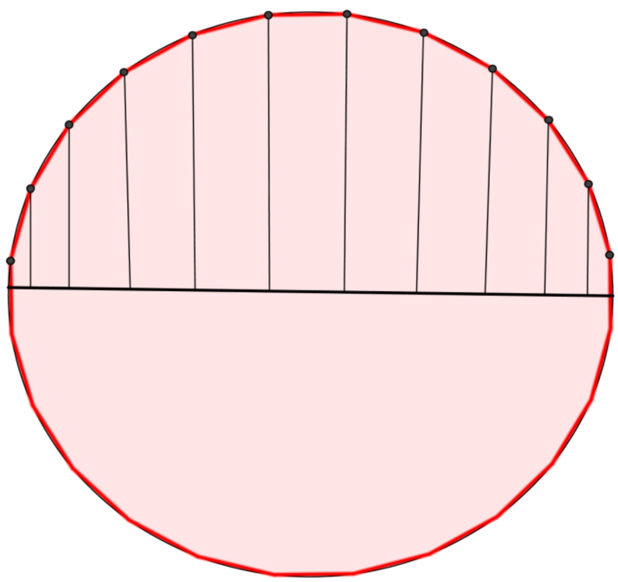
4. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:
   $a)\ 26sen^2 x + \cos^2 x = 10 \quad b)\ 2\cos x + senx = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

5. Determinar la menor distancia entre el tanque de ANDA y la casa.



Ejercicios

1. Muestre que $sen 29° = \cos 61°$.
2. Si $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ y $a,\ b,\ c,\ d$ son racionales arbitrarios, con $5c + 2d \neq 0$ muestre que $\frac{a sen\alpha + b\cos\alpha}{c\cos\alpha + d sen\alpha}$ es un número racional.
3. Encuentre una nueva expresión para $senx + sen(2x) + sen(3x) + \ldots + sen(nx);\ n \in \mathbb{Z}^{+}$
4. En una circunferencia se ha inscrito un polígono regular de 24 lados, de los vértices del polígono se trazan perpendiculares tal como se muestra en la siguiente figura:



Encuentre la sumatoria de las longitudes de dichas perpendiculares.

5. Encuentre valores para:

   a) $sen\frac{\pi}{12},\ \cos\frac{\pi}{12}\ y\ \tan\frac{\pi}{12}$ b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - sen^4\frac{\pi}{24};$

   c) $\cos 36° - \cos 72°$ d) $sen 10° sen 50° sen 70°$

6. Muestre que $$\frac{\cos\frac{\pi}{12} + sen\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} - sen\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

7. Demuestre que: $16sen\frac{\pi}{24}sen\frac{5\pi}{24}sen\frac{7\pi}{24}sen\frac{11\pi}{24}=1$ Sugerencia :

   $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}$ y $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{11}{24}\pi.$

8. Sea x un número real diferente de $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z}.)$ Muestre que $\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{sen8x}{8senx}$

   Luego calcule

   $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}.$

9. Demuestre que $\left(4\cos^2 9°-3\right)\left(4\cos^2 27°-3\right)=\tan 9°.$

10. Dado que $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)....(1+\tan 45°)=2^n$ encuentre n.

11. Simplifique la expresión $\frac{sen(\alpha+\beta)-\cos\alpha sen\beta}{\cos(\alpha+\beta)+sen\alpha sen\beta}$.

12. Para cualquier ángulo $\alpha<\frac{\pi}{4}$ Muestre que:

    $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(sen\alpha+\cos\alpha).$

13. Para cualesquiera ángulos α y β muestre que $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1-\tan\alpha\tan\beta$ siempre que $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$.

14. Resuelva las ecuaciones propuestas y represente las soluciones sobre el circulo trigonométrico.

    $a)sen3x=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad b)2\cos^2 x-\cos x=0$

    $c)2sen^2 x+3senx+1=0$ $\quad d)senx+2\cos x+sen3x=0$

15. Resuelva las ecuaciones trigonométricas siguientes:

    $a)\sqrt{3}\cos x-senx=1$ $\quad b)2\cos x+senx=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad c)\sqrt{3}\cos x+senx=\sqrt{2}$

16. Sea $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios tales que

    $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_{i+1}(x)=2xT_i(x)-T_{i-1}(x)$ para todo entero positivo i. Este polinomio es llamado el enésimo polinomio de Chebyshev.

    a) Pruebe $T_{2n+1}(x)$ y $T_{2n}(x)$ son par e impar respectivamente.

    b) Pruebe que $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ para todo entero positivo.

17. Encuentre $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}$.

Bibliografía

1. Canjura, C. (2011). *Manual Número 5 del proyecto "Actualización y especialización docente".* San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador.
2. De Guzmán, M. (1990). *Matemáticas de 2º de Bachillerato.*
3. Gelfand I.M. y M. Saul. (2001). *Trigonometría.* USA. Birkhäuser.
4. Titu, A. y Feng, Z. (2005). *103 TRIGONOMETRY PROBLEMS.* USA: Birkhäuser.

LECCIÓN 7 2° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 6 HORAS CLASE

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

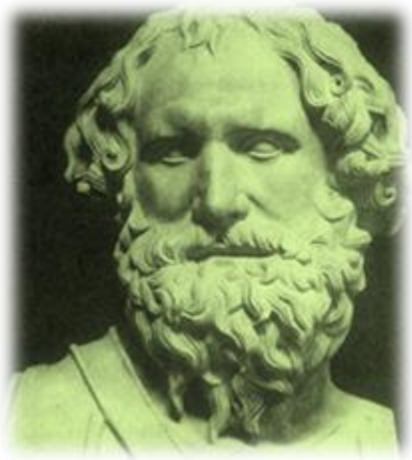


***Figura* 7.1**

"Denme un punto de apoyo y levantaré el mundo."

Arquímedes

En el año 213 a.C. los romanos sitiaban Siracusa, barcos romanos asediaban la ciudad. Una invención de Arquímedes que tuvo mucha utilidad ante los asedios por mar, fue la llamada "La garra de Arquímedes" tipo de grúa equipada con gancho de metal que era capaz de elevar a las naves atacantes parcialmente por encima del agua, para luego dejarlas caer, causando el hundimiento del barco.

Competencias a desarrollar

Saber argumentar, cuantificar y analizar críticamente la información.

Representar y comunicar información.

Resolver y enfrentarse a problemas.

Usar técnicas e instrumentos matemáticos.

Modelar e Integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos

1. Deducir la ecuación vectorial de una recta.
2. Aplicar las propiedades básicas de los vectores.

Pre-saberes

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano.
2. Conceptos físicos de desplazamiento, velocidad y fuerza.

Descripción

Se analizan distintas operaciones con vectores: suma de vectores, su producto escalar y vectorial, también se determina la ecuación vectorial de una recta y además se presentan aplicaciones básicas de los vectores a física elemental.

Contenido

7.1 Vectores en R^2

Un vector en R^2 es una pareja ordenada (a,b) que puede ser representada en el plano cartesiano con una flecha con origen en $(0,0)$ y extremo final en el par (a,b), como se muestra en la siguiente figura

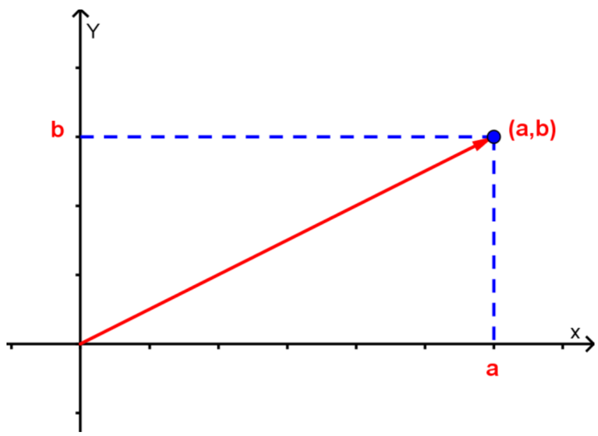


***Figura* 7.2**

Los vectores son usados para representar magnitudes físicas como: desplazamientos, velocidades, fuerza y otros.

Ejemplo 1

Un avión que se desplaza con velocidad de 1000 km/h en dirección noreste puede representarse por el siguiente vector:

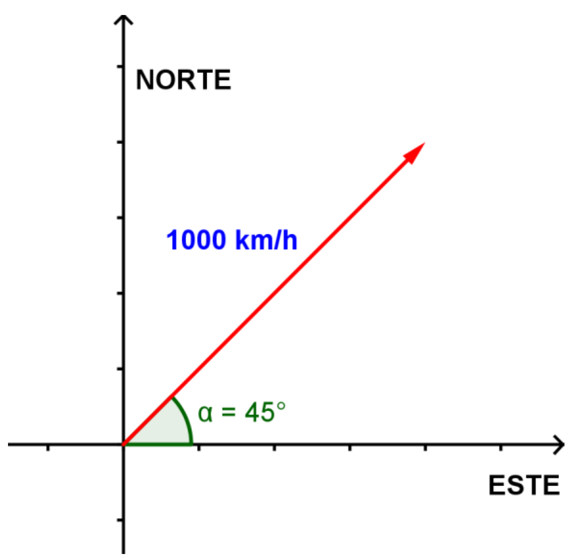


***Figura* 7.3**

Ejemplo 2

Un cuerpo de $10\ \text{kg}$ que se desliza en un plano inclinado, donde la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad se puede representar de la siguiente manera:

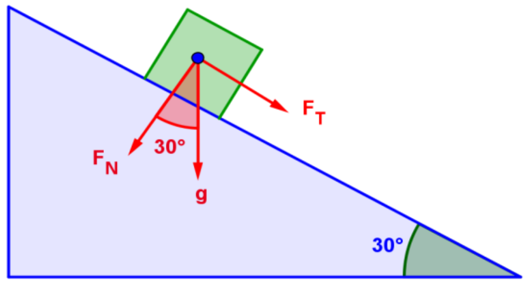


Figura **7.4**

7.2 Suma de vectores y multiplicación por un número real

Para sumar dos vectores, sumamos componente a componente.

Ejemplo 1

Al sumar los vectores $(3,2)$ y $(1,4)$ se obtiene:

$$(3,2)+(1,4)=(2-1,2+4)=(4,6)$$

Geométricamente puede representarse como:

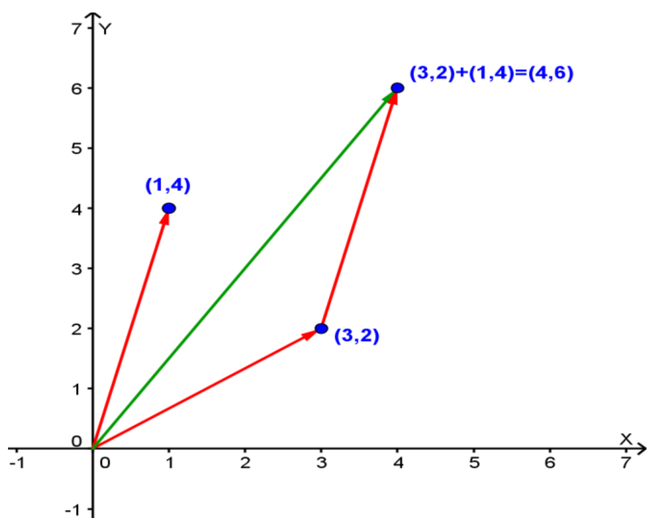


Figura **7.5**

Se coloca un vector después del otro y la suma de ellos es el vector que se forma desde el origen hasta el punto final. A esta regla se le conoce como **"Regla del paralelogramo"**.

Para multiplicar un vector por un número real, se multiplica cada componente del vector por el número dado.

Ejemplo 2

$2(3,-1)=(2(3),2(-1))=(6,-2)$

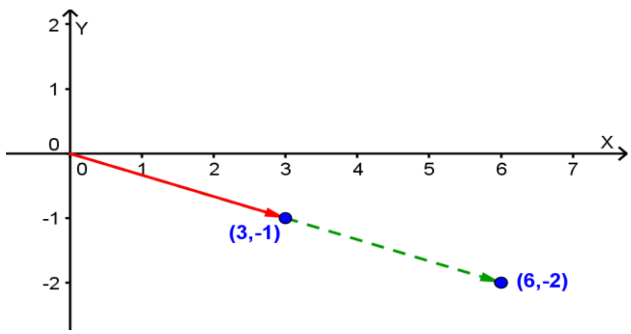


***Figura* 7.6**

7.3 Propiedades de la suma y del producto de vectores

Propiedad 1

Propiedad conmutativa.

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$$

Comprobación:

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$$

7.3.1 Regla del paralelogramo para la suma

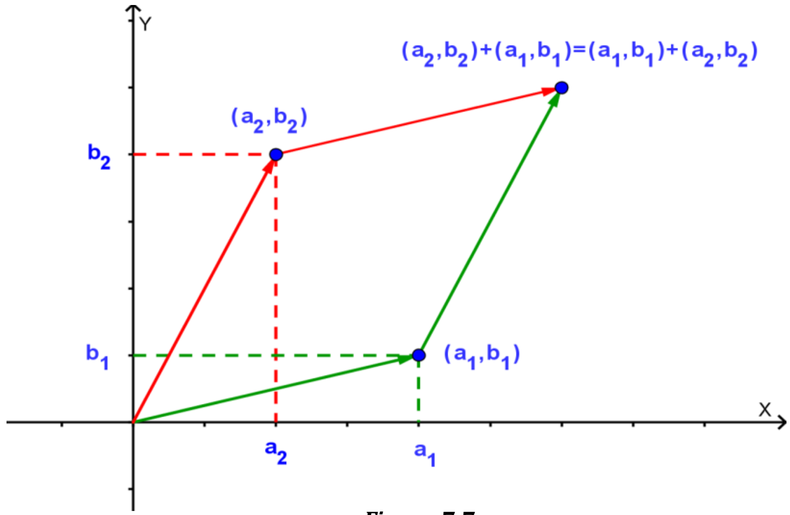


***Figura* 7.7**

Propiedad 2

Propiedad distributiva

$$k\left(\left(a_1,b_1\right)+\left(a_2,b_2\right)\right)=k\left(a_1,b_1\right)+k\left(a_2,b_2\right)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
&k\left(\left(a_1,b_1\right)+\left(a_2,b_2\right)\right)=k\left(a_1+a_2,b_1+b_2\right)\\
&=\left(k\left(a_1+a_2\right),k\left(b_1+b_2\right)\right)\\
&=\left(ka_1+ka_2,kb_1+kb_2\right)\\
&=\left(ka_1,kb_1\right)+\left(ka_2,kb_2\right)\\
&=k\left(a_1,b_1\right)+k\left(a_2,b_2\right)
\end{aligned}$$

Propiedad 3

Propiedad asociativa

$$\left(a_1,b_1\right)+\left(\left(a_2,b_2\right)+\left(a_3,b_3\right)\right)=\left(\left(a_1,b_1\right)+\left(a_2,b_2\right)\right)+\left(a_3,b_3\right)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
&(a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)\\
&=(a_1+(a_2+a_3),b_1+(b_2+b_3))\\
&=((a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+b_3)\\
&=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\
&=((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3)
\end{aligned}$$

Propiedad 4

$$1(a_1,a_2)=(a_1,a_2)$$

Propiedad 5

$$0(a_1,a_2)=(0,0)$$

Propiedad 6

$$(a_1,a_2)+(0,0)=(a_1,a_2)$$

Propiedad 7

$$(a_1,a_2)+(-a_1,-a_2)=(0,0)$$

Ejemplo 1

Una persona nada a 25 m/min y la velocidad del río es de 100 m/min. Encontrar la velocidad resultante cuando la persona nada en forma perpendicular a la orilla del río.

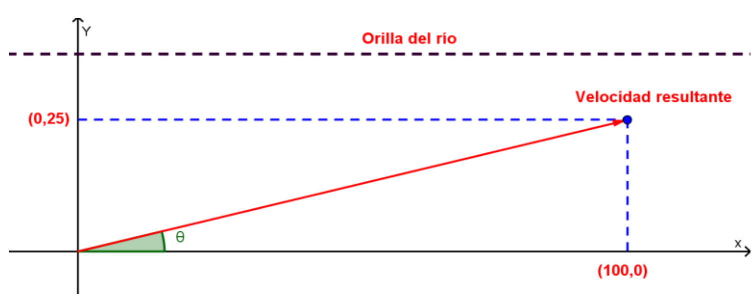


***Figura* 7.8**

$V_R = \text{Velocidad resultante=velocidad del río} + \text{velocidad del nadador=}(100,0)+(0,25)=(100,25)$
En el caso anterior:

$$\text{Rapidez=tamaño de la velocidad}$$
$$=\sqrt{(100)^2+(25)^2}\ \text{ m/ min} = \sqrt{1000+625}\ \text{ m/ min} = \sqrt{1625}\ \text{ m/ min}$$

Ángulo con el eje x

$$\theta = \arctan\left(\frac{25}{100}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = 0.244978\ \text{ rad.}$$

Ejemplo 2

Un avión deja caer una bola de acero a una velocidad horizontal de 500 km/h . Encontrar la velocidad de la bola después de 10 seg.

Solución

En la velocidad vertical supondremos que interviene únicamente la gravedad $g = 9.8$ m/seg.^{2} , después de 10 seg. se obtendrá una velocidad de 980 m/seg., esto es $(0.98)\text{x}(3600)$ km/h $= 3528$ km/h . Como la dirección es hacia abajo, la velocidad se considera negativa.

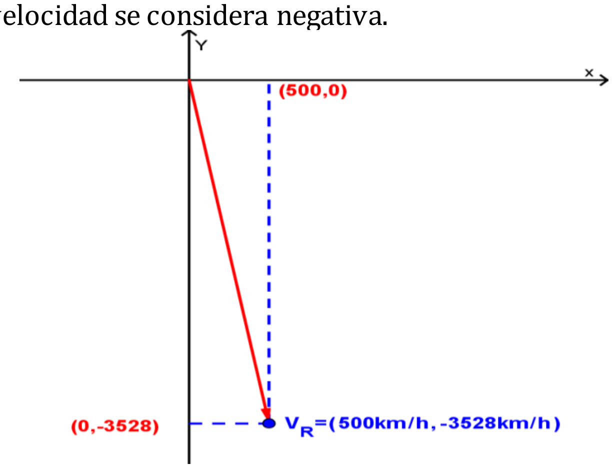


***Figura* 7.9**

7.4 Ecuación vectorial de la recta en R^2

Una recta queda determinada mediante uno de sus puntos P y una dirección dada por un vector director $\vec{V}$.

Ejemplo 1

$(x, y) = (-1,3) + \lambda(1,4)$, donde $\lambda \in R$

(Ecuación 1)

Aquí $P = (-1,3)$ y $\vec{V} = (1,4)$

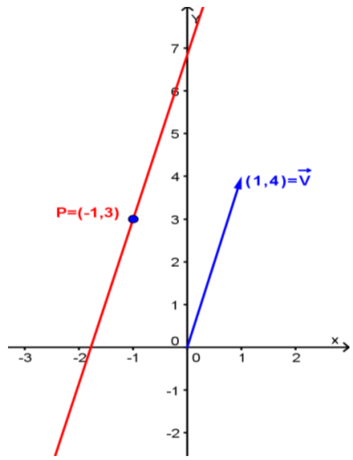


Figura **7.10**

De la ecuación de la recta anterior (1) podemos obtener:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

$$\left. x - 1 = \frac{y-3}{4} \right\} \text{Ecuación continua}$$

Ejemplo 2

Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos

$P_1 = (-2,-1)$ y $P_2 = (3,1)$.

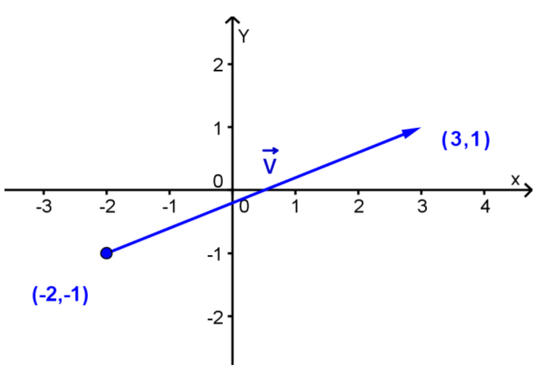


Figura **7.11**

Solución

Podemos tomar como punto fijo a $P_1 = (-2,-1)$ y hacer el vector director como $\vec{V} = (3,1)-(-2,-1) = (5,2)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

La ecuación vectorial nos quedaría: $(x,y) = (-2,-1) + \lambda(5,2)$

Gráficamente obtenemos:

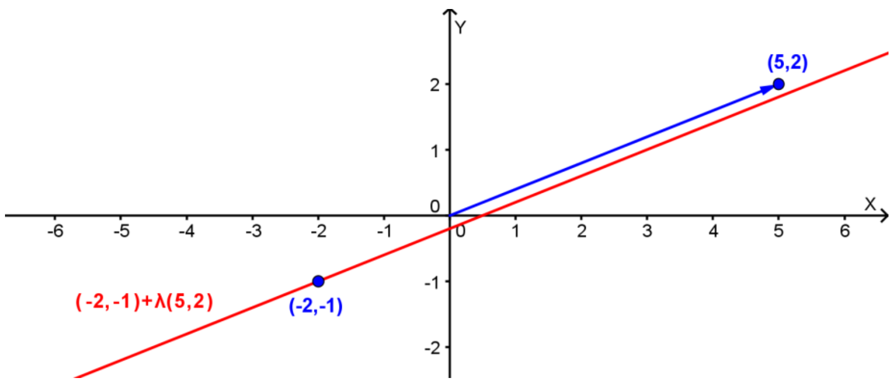


***Figura* 7.12**

Dos rectas con vectores directores no paralelos se interceptarán en un punto perteneciente a ambas rectas.

Ejemplo 3

$$(x,y) = (1,3) + \lambda(2,-2)$$
$$(x,y) = (-1,4) + \beta(-1,2)$$

Igualando los miembros derechos de las ecuaciones nos resulta:

$$(1,3) + \lambda(2,-2) = (-1,4) + \beta(-1,2)$$
$$(1,3) - (-1,4) = -\lambda(2,-2) + \beta(-1,2)$$
$$(2,-1) = \lambda(-2,2) + \beta(-1,2)$$

Así obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{array}{rl} 2 = & -2\lambda - \beta \\ -1 = & 2\lambda + 2\beta \\ \hline 1 = & \qquad \beta \end{array}$$

De donde $2 = -2\lambda - 1$, entonces $3 = -2\lambda$, luego $\lambda = -\dfrac{3}{2}$

Sustituyendo los valores de β y λ obtenemos: $(2,-1) = -\dfrac{3}{2}(-2,2) + 1(-1,2) = (3,-3) + (-1,2)$

Gráficamente queda así:

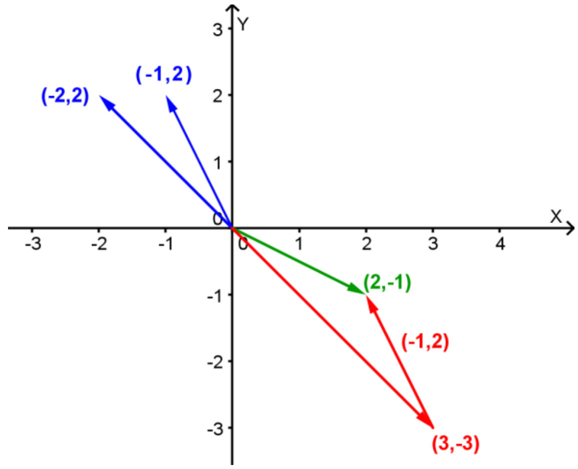


Figura **7.13**

Al retomar las ecuaciones originales

$$(x,y)=(1,3)+\lambda(2,-2)$$
$$(x,y)=(-1,4)+\beta(-1,2)$$

Y sustituir los valores de β y λ obtenemos:

$$(x,y)=(1,3)+\lambda(2,-2)=(1,3)+\left(-\frac{3}{2}\right)(2,-2)=(-2,6)$$
$$(x,y)=(-1,4)+\beta(-1,2)=(-1,4)+(1)(-1,2)=(-2,6)$$

Gráficamente tenemos lo siguiente:

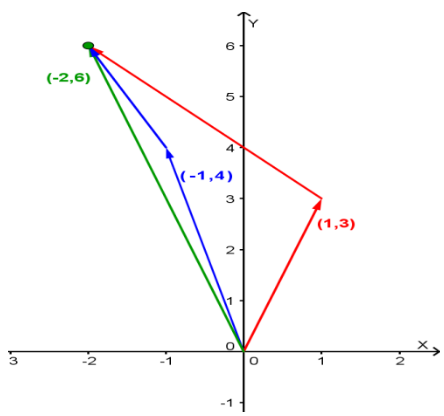


Figura **7.14**

7.5 Sistemas de ecuaciones lineales.

7.5.1 Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es la intersección de las rectas que representan a cada ecuación. Por ejemplo, si queremos resolver el sistema: $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

Que tiene por gráfica:

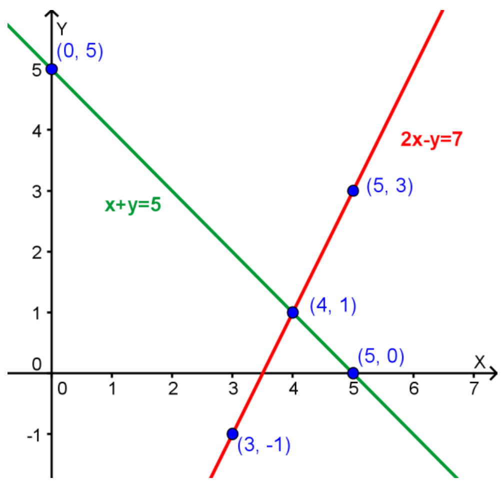


***Figura* 7.15**

De la gráfica podemos observar que la solución es (4,1). Otro resultado que inmediatamente deducimos es que puede no haber soluciones, esto sucede cuando las rectas no se interceptan por ser paralelas. También podemos interpretar las soluciones de un sistema de ecuaciones en forma vectorial, para el ejemplo anterior nos queda:

$$x(1,2)+y(1,-1)=(5,7)$$
$$4(1,2)+1(1,-1)=(5,7)$$

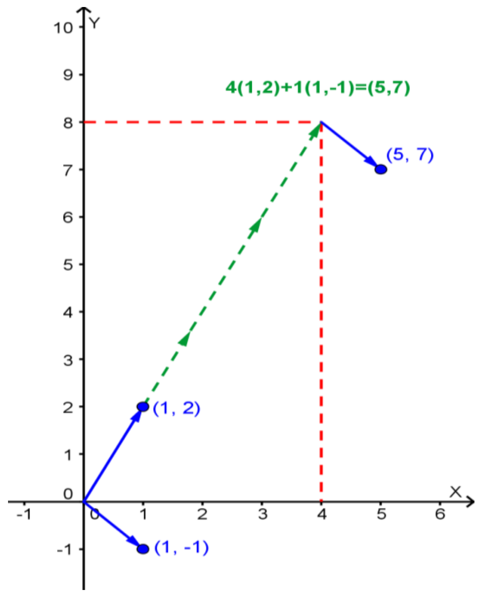


***Figura* 7.16**

En este caso decimos que el vector de la derecha es combinación lineal de los dos vectores de la izquierda. Si los dos vectores de la izquierda están en una misma recta y el vector de la derecha no pertenece a dicha recta, no habrá solución.

7.6 Producto Escalar de Vectores en R^2.

Módulo de un vector: El módulo de un vector $\vec{V} = (v_1, v_2)$ es su longitud, esto es, la distancia del punto $(0,0)$ al punto (v_1, v_2). Se denota por $\|\vec{V}\|$.

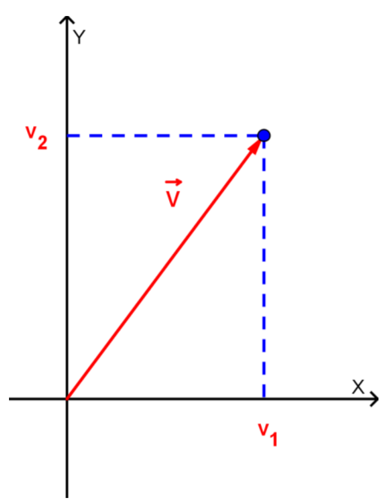


***Figura* 7.17**

Usando el teorema de Pitágoras obtenemos el módulo de $\vec{V}$ de la siguiente forma:

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

7.6.1 Propiedades del módulo de un vector.

Propiedad 1

Sea $k \in R$ y sea $\vec{U} = (u_1, u_2)$ un vector, entonces se cumple que $\left\|k\vec{U}\right\| = |k| \left\|\vec{U}\right\|$

Comprobación:

$$\left\|k\vec{U}\right\| = \left\|k(u_1, u_2)\right\| = \left\|(ku_1, ku_2)\right\| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2} = \sqrt{k^2({u_1}^2 + {u_2}^2)} = \sqrt{k^2}\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = |k| \left\|\vec{U}\right\|$$

Propiedad 2

Sean $\vec{U} = (u_1, u_2)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2)$ dos vectores, entonces se cumple que $\left\|\vec{U} + \vec{V}\right\| \le \left\|\vec{U}\right\| + \left\|\vec{V}\right\|$

Esta desigualdad es conocida como **Desigualdad triangular**

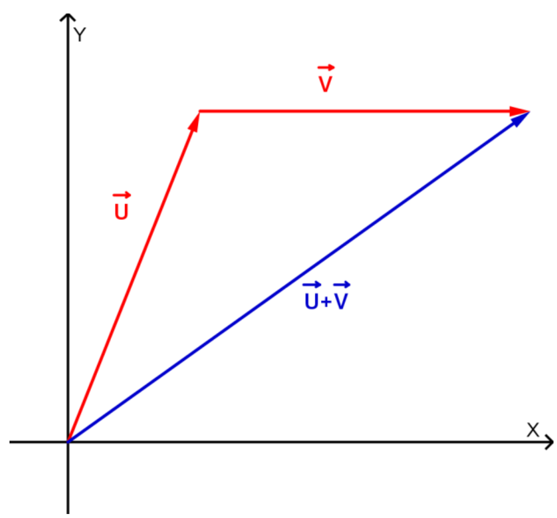


***Figura* 7.18**

Demostración

$$\left\|\vec{U}+\vec{V}\right\|^2=\left\|(u_1,u_2)+(v_1,v_2)\right\|^2=\left\|(u_1+v_1,u_2+v_2)\right\|^2=(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2$$

$$=u_1^2+2u_1v_1+v_1^2+u_2^2+2u_2v_2+v_2^2=u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2+2(u_1v_1+u_2v_2)$$

$$=\left\|\vec{U}\right\|^2+\left\|\vec{V}\right\|^2+2(u_1v_1+u_2v_2)$$

Por otro lado tenemos que

$$\left(\left\|\vec{U}\right\|+\left\|\vec{V}\right\|\right)^2=\left\|\vec{U}\right\|^2+\left\|\vec{V}\right\|^2+2\left\|\vec{U}\right\|\,\left\|\vec{V}\right\|$$

Y sabemos que $u_1v_1+u_2v_2\le\left\|\vec{U}\right\|\,\left\|\vec{V}\right\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. De donde resulta la desigualdad triangular.

7.6.2 Proyección de un vector sobre otro.

La proyección de un vector $\vec{V}=(v_1,v_2)$ sobre el eje x, es el vector $(v_1,0)$, es la misma que la proyección sobre el vector $(1,0)=e_1$

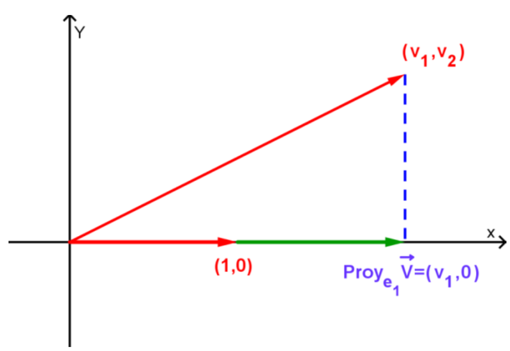


Figura **7.19**

Geométricamente la proyección de $\vec{V}=(v_1,v_2)$ sobre el vector e_1 es la sombra perpendicular sobre la prolongación de éste, y se simboliza por $\mathrm{Proy}_{e_1}\vec{V}$.

Ahora la proyección de un vector $\vec{V_1}$ sobre otro vector $\vec{V_2}$, es la sombra perpendicular que proyecta $\vec{V_1}$ en la dirección del vector $\vec{V_2}$; geométricamente tenemos: }

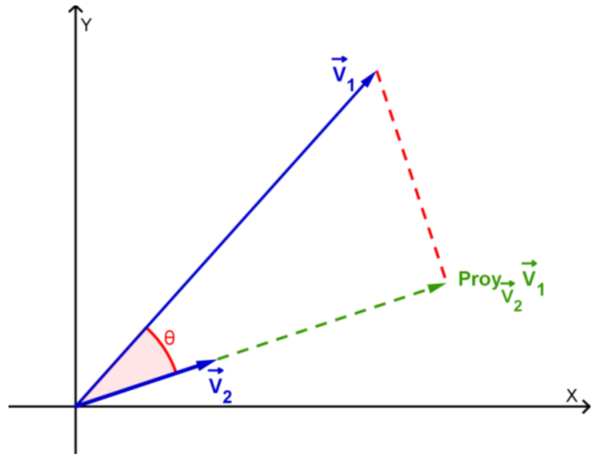


***Figura* 7.20**

Observamos que $\dfrac{\left\|\text{Proy}_{\vec{V}_2}\vec{V}_1\right\|}{\left\|\vec{V}_1\right\|} = \cos(\theta)$, con $0° \leq \theta \leq 90°$

De donde obtenemos que $\text{Proy}_{\vec{V}_2}\vec{V}_1 = \left\|\vec{V}_1\right\|\cos(\theta)\left(\dfrac{\vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_2\right\|}\right)$

Gráficamente podemos deducir que se cumple lo siguiente:

$$\text{Proy}_{\vec{R}}\left(\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}\right) = \text{Proy}_{\vec{R}}\vec{U} + \text{Proy}_{\vec{R}}\vec{V} + \text{Proy}_{\vec{R}}\vec{W}$$

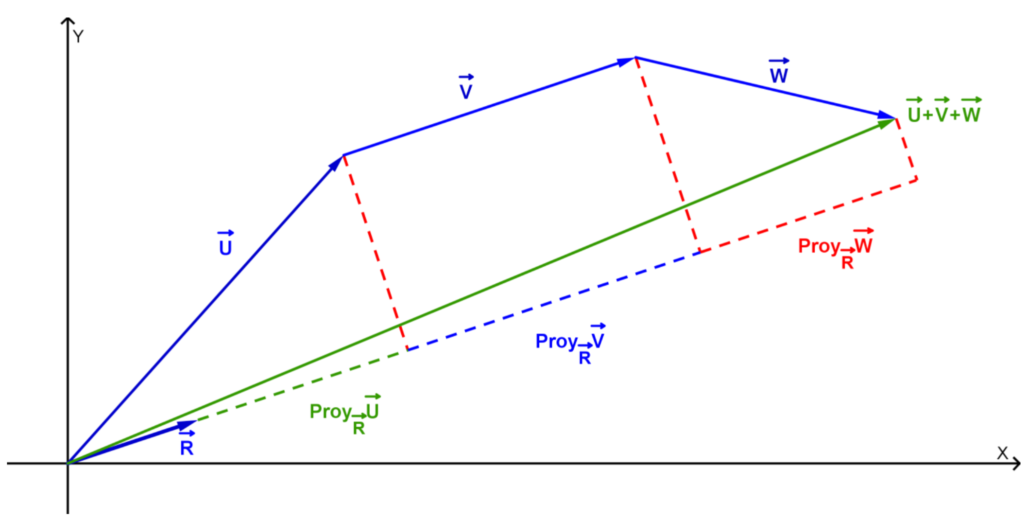


***Figura* 7.21**

Vocabulario

Proyección

La proyección de un vector sobre otro, es la sombra que deja un haz de luz que se deja pasar a través del primer vector en dirección perpendicular al segundo vector.

Guía de ejercicios

1) Graficar simultáneamente en un plano cartesiano cinco puntos, luego en el mismo plano graficar sus proyecciones en ambos ejes.

2) Observar diferentes objetos como: vasos, platos, edificios; y dibujar las partes frontales, laterales, superiores e inferiores en un plano cartesiano.

3) Amarra un objeto con una cuerda y hazlo girar en forma circular, luego con la luz solar o la de un foco puedes observar la sombra que proyecta este movimiento.

4) Encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos:

a) $(1,4)$ y $(-2,1)$

b) $(0,0)$ y $(1,3)$

c) $(-1,1)$ y $(2,-2)$

5) Determine cuáles de las siguientes ecuaciones vectoriales de la recta representan a rectas paralelas:

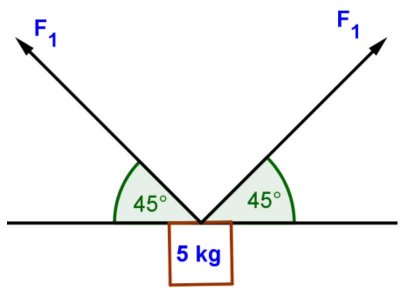
a) $(x,y)=(1,3)+\lambda(3,0)$

b) $(x,y)=(2,6)+\alpha(1,0)$

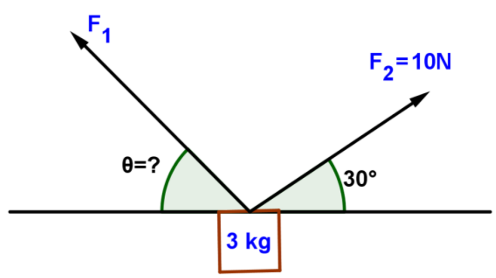
c) $(x,y)=(-2,1)+\beta(9,3)$

6) Encuentre el valor de la fuerza F_1 para equilibrar los siguientes sistemas en las coordenadas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ respectivamente.

a)



b)



7) Una persona se desplaza primero 10 km. al norte, luego 7 km. al este, después 8 km. al noreste. Indique los desplazamientos en un plano cartesiano.

8) Investigue los conceptos de tamaño o norma de un vector, dirección de un vector y sentido de un vector.

9) Encuentre el tamaño (norma) de los siguientes vectores:

a) $(-1,3)$ b) $(2,5)$ c) $(6,-1)$

10) Dados el tamaño de un vector y su ángulo con el eje x positivo, encuentra sus componentes (coordenadas rectangulares).

a) 2, $\theta=60°$

b) 1, $\theta=30°$

c) 5, $\theta=45°$

Examen de Conocimientos

1) Sea la ecuación vectorial de una recta:

$$(x, y) = (1, 0) + \lambda(3, -1)$$

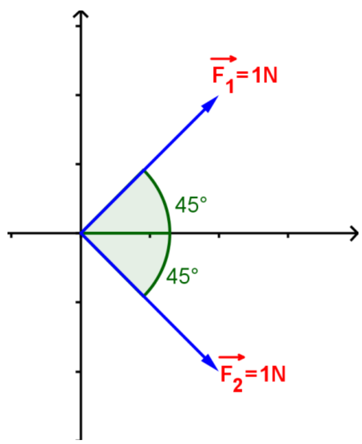
Determine cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta.

a) $(7, -2)$ b) $(8, 9)$ c) $(1, 0)$

2) Si un vector tiene de magnitud 2 unidades y un ángulo de elevación de $30°$ con respecto al eje x positivo, encuentre las coordenadas del vector.

3) Compruebe gráficamente en el plano cartesiano la propiedad conmutativa de la suma. Tome un ejemplo particular.

4) Según el diagrama de fuerzas siguiente:



Encuentre las coordenadas de la fuerza resultante.

5) Haz tres diagramas de El Sol y un punto fijo de la Tierra a diferentes horas del día. Representa los rayos del sol mediante vectores.

Bibliografía

1. De Guzmán, Miguel.(1996). *MATEMATICAS I*. Madrid, España: Editorial ANAYA.
2. Kline, Morris.(1998). *CALCULUS*. New York, Estados Unidos: Editorial Dover.
3. Martin, J. (1991). *Cours de mathématiques*. París, Francia: Editorial DUNOD.

LECCIÓN 8 2° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 8 HORAS CLASE

APLIQUEMOS ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

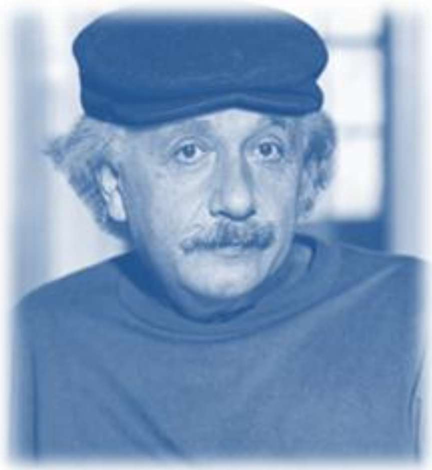


***Figura* 8.1**

"La naturaleza es la realización de las ideas matemáticas más simples que puedan imaginarse".

Albert Einstein

Con el trabajo de Vieta en 1591 sobre la introducción al arte analítico, instaura una nueva tradición matemática, mediante la investigación matemática, con la intención de recuperar el análisis geométrico clásico, destilando un verdadero análisis algebraico Fermat y Descartes desarrollarán a posteridad la línea de desarrollo de geometría analítica

Competencias a desarrollar

Saber argumentar, cuantificar y analizar críticamente la información.
Representar y comunicar información.
Resolver y enfrentarse a problemas.
Usar técnicas e instrumentos matemáticos.
Modelar e Integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos de la lección

1. Deducir la fórmula de la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas.
2. Encontrar el determinante de una matriz de orden tres por el método de Sarrus.

Pre-saberes

1. Funciones trigonométricas del seno y coseno.
2. Despeje de variables en ecuaciones.

Descripción

En esta lección se desarrollarán los conceptos de recta y plano en tres dimensiones, encontrando fórmulas de la distancia entre ellos y finalmente se resolverán sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.

Contenido

8.1 Producto Escalar de dos Vectores.
8.1.1 Aplicaciones del Producto Escalar.
8.2 Producto Vectorial de dos Vectores.
8.2.1 Aplicaciones geométricas del producto vectorial.
8.3 Producto Mixto de Vectores en R3.
8.4 Sistemas de tres Ecuaciones con tres Incógnitas.
Vocabulario, Examen de Conocimientos, Guía de Ejercicios y bibliografía.

8.1 Producto Escalar de dos Vectores

El producto de dos vectores puede ser de dos tipos: Escalar o Vectorial.

El resultado del producto escalar de dos vectores, es un escalar, tal como se verá a continuación.

El producto escalar de dos vectores se define así:

$$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \left\|\vec{V_1}\right\| \left\|\vec{V_2}\right\| \cos(\theta), \text{ con } 0° \le \theta \le 180°$$

Geométricamente podemos representar la definición anterior de la siguiente manera:

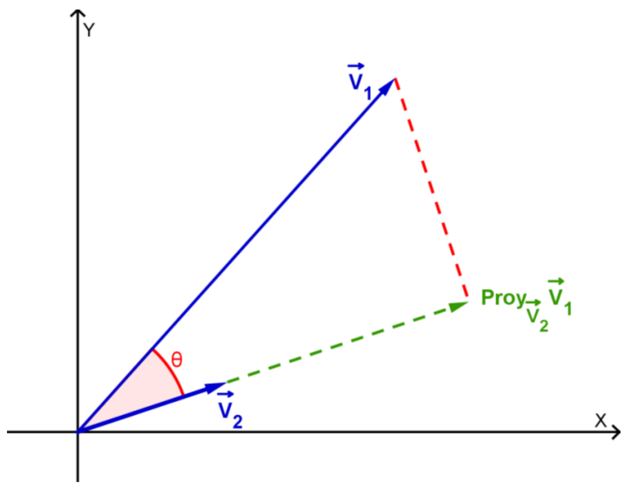


***Figura* 8.2**

$$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \left\|\vec{V_1}\right\| \left\|\vec{V_2}\right\| \left(\frac{\left\|\text{Proy}_{\vec{V_2}} \vec{V_1}\right\|}{\left\|\vec{V_1}\right\|} \right) = \left\|\vec{V_2}\right\| \left\|\text{Proy}_{\vec{V_2}} \vec{V_1}\right\|, \text{ con } 0° \le \theta \le 90°$$

Inmediatamente obtenemos las siguientes propiedades:

Propiedad 1

$$\left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right) \bullet \vec{V_3} = \vec{V_1} \bullet \vec{V_3} + \vec{V_2} \bullet \vec{V_3}$$

Demostración

$$\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)\bullet\vec{V_3}=\left\|\vec{V_3}\right\|\ \left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)\right\|=\left\|\vec{V_3}\right\|\ \left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_1}+\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_2}\right\|=\left\|\vec{V_3}\right\|\left(\left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_1}\right\|+\left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_2}\right\|\right)$$

$$=\left\|\vec{V_3}\right\|\ \left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_1}\right\|+\left\|\vec{V_3}\right\|\ \left\|\text{Proy}_{\vec{V_3}}\vec{V_2}\right\|=\vec{V_1}\bullet\vec{V_3}+\vec{V_2}\bullet\vec{V_3}$$

Propiedad 2

$\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=0$ si y solamente si $\vec{V_1}\perp\vec{V_2}$

Demostración

Como $\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=\left\|\vec{V_1}\right\|\ \left\|\vec{V_2}\right\|\cos(\theta)$. Resulta que $\cos(\theta)=0$, y luego $\theta=90°$. Los vectores entonces son perpendiculares.

Propiedad 3

$\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=\vec{V_2}\bullet\vec{V_1}$

Demostración

$$\begin{aligned}\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}&=\left\|\vec{V_1}\right\|\ \left\|\vec{V_2}\right\|\cos(\theta)\\&=\left\|\vec{V_2}\right\|\ \left\|\vec{V_1}\right\|\cos(\theta)\\&=\vec{V_2}\bullet\vec{V_1}\end{aligned}$$

Propiedad 4

$\left(k\vec{V_1}\right)\bullet\vec{V_2}=k\left(\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}\right)$

Demostración

supondremos $k>0$

$$\begin{aligned}\left(k\overrightarrow{V_1}\right)\bullet\overrightarrow{V_2}&=\left\|k\overrightarrow{V_1}\right\|\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|\cos(\theta)\\&=k\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|\cos(\theta)\\&=k\left(\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}\right)\end{aligned}$$

Propiedad 5

$(v_1,v_2)\bullet(w_1,w_2)=v_1w_1+v_2w_2$

Demostración

$$\begin{aligned}(v_1,v_2)\bullet(w_1,w_2)&=\left((v_1,0)+(0,v_2)\right)\bullet\left((w_1,0)+(0,w_2)\right)\\&=\left(v_1(1,0)+v_2(0,1)\right)\bullet\left(w_1(1,0)+w_2(0,1)\right)\\&=v_1(1,0)\bullet w_1(1,0)+v_1(1,0)\bullet w_2(0,1)+v_2(0,1)\bullet w_1(1,0)+v_2(0,1)\bullet w_2(0,1)\\&=v_1w_1+v_2w_2\end{aligned}$$

8.1.1 Aplicaciones del Producto Escalar

a) La ley del coseno.

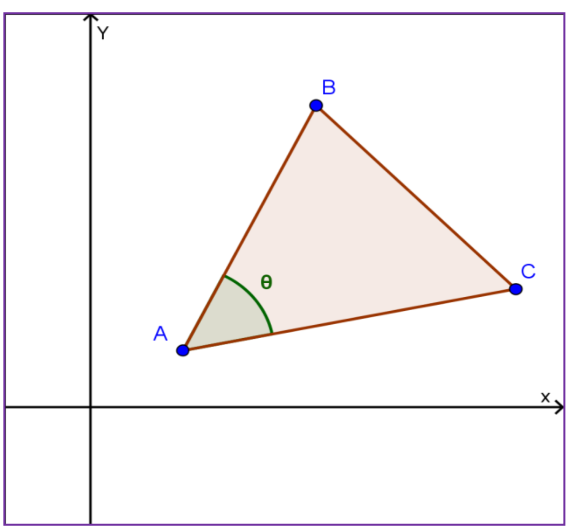


Figura 8.3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2&=\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BC}\\&=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+2\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AC}\\&=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}\\&=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos(\theta)\end{aligned}$$

La ley del coseno se aplica para resolver triángulos oblicuángulos; en el caso de triángulos rectángulos, dicha ley se reduce al Teorema de Pitágoras.

b) La fórmula del coseno de la resta de dos ángulos

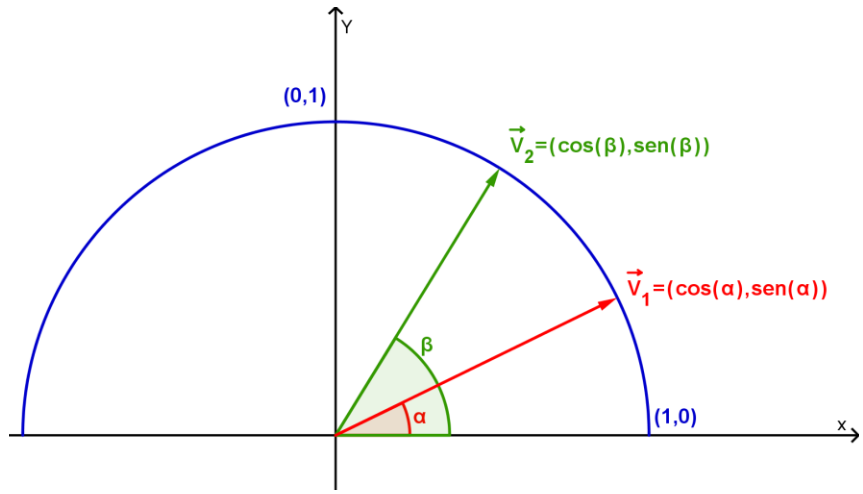


***Figura* 8.4**

De la gráfica podemos deducir: $\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=\left\|\vec{V_1}\right\|\,\left\|\vec{V_2}\right\|\cos(\beta-\alpha)$

$$\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=\left(\cos(\alpha),sen(\alpha)\right)\bullet\left(\cos(\beta),sen(\beta)\right)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

De lo anterior se concluye que:

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

c) La ecuación de un plano

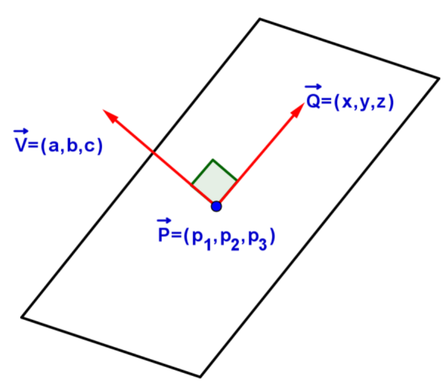


***Figura* 8.5**

Consideremos un plano que pasa por el punto $\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)$ y que es perpendicular al vector $\vec{V} = (a, b, c)$, cualquier otro punto $\vec{Q} = (x, y, z)$ del plano debe satisfacer:

$$(\vec{Q} - \vec{P}) \bullet \vec{V} = 0$$

$$(x - p_1, y - p_2, z - p_3) \bullet (a, b, c) = 0$$

$$(x - p_1) \bullet a + (y - p_2) \bullet b + (z - p_3) \bullet c = 0$$

$$ax + by + cz - (ap_1 + bp_2 + cp_3) = 0$$

Observemos que las coordenadas del vector perpendicular al plano quedan de coeficientes de las tres variables independientes.

d) Vectores en R^3

Grafiquemos en $\mathbb{R}^3$ el punto $(3, 5, 4)$

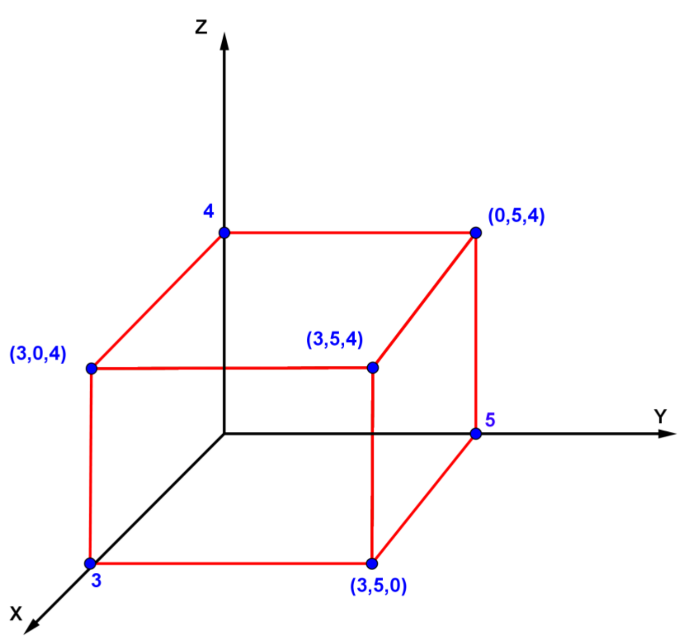


Figura 8.6

d.1) Vector que une dos puntos

Dados los puntos $\vec{P}=(p_1,p_2,p_3)$ y $\vec{Q}=(q_1,q_2,q_3)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ que une los puntos P y Q tiene coordenadas:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(q_1,q_2,q_3)-(p_1,p_2,p_3)=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$$

Gráficamente:

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$$
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

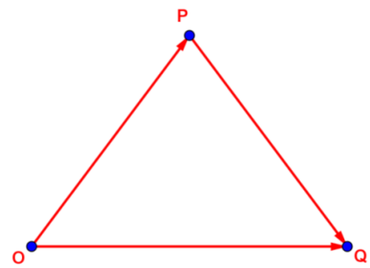


***Figura* 8.7**

d.2) Ecuación vectorial de la recta en R^3

Una recta r queda determinada mediante uno de sus puntos P, y una dirección d. El punto P da lugar a un vector $\overrightarrow{OP}=\vec{P}$, llamado vector posición de la recta.

Gráficamente

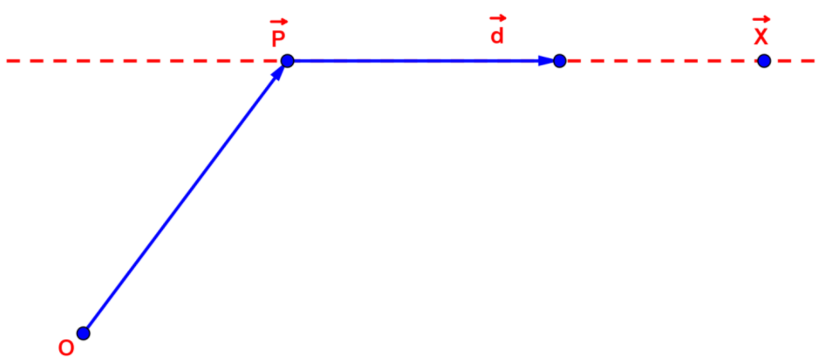


Figura 8.8

Vector posición: Es cualquier vector que nos lleve a la recta. En este caso es $\vec{P}$

Vector dirección: Es cualquier vector paralelo a la recta. En este caso es $\vec{d}$

La ecuación vectorial de la recta queda de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{P} + \lambda\vec{d} \text{ , con } \lambda \in R$$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2.p_2) + \lambda(d_1, d_2, d_3)$$

Si en la ecuación anterior despejamos cada variable por separado, nos queda:

$$x = p_1 + \lambda d_1$$
$$y = p_2 + \lambda d_2$$
$$z = p_3 + \lambda d_3$$

Estas son conocidas como las **ecuaciones paramétricas de la recta**.

Al despejar el parámetro λ nos resulta:

$$\lambda = \frac{x - p_1}{d_1},\ \lambda = \frac{y - p_2}{d_2},\ \lambda = \frac{z - p_3}{d_3}$$

Por lo tanto podemos igualar entre sí los valores del parámetro, obteniendo como resultado:

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}$$

La cual es llamada **ecuación continua de la recta**.

Ejemplos

1°) Distancia de un punto $\vec{P} = (x_0, y_0)$ a una recta r

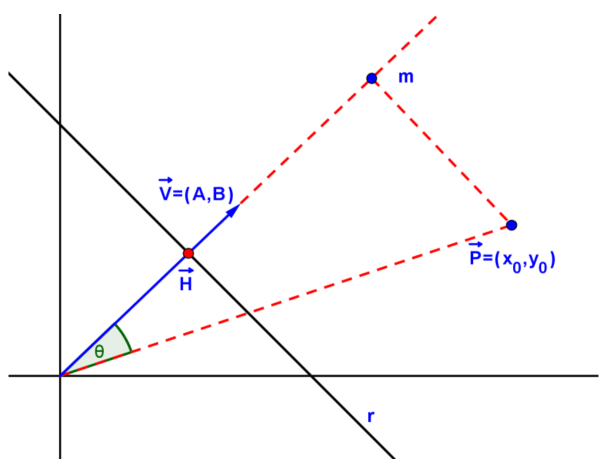


***Figura* 8.9**

Sea $Ax+By+C=0$ la ecuación de la recta r, y $\vec{P}=(x_0,y_0)$ un punto fijo del plano, hagamos $\vec{V}=(A,B)$ un vector perpendicular a la recta r, m la proyección ortogonal de $\vec{P}$ sobre la dirección de $\vec{V}=(A,B)$ y $\vec{H}$ la intersección de la recta con la dirección del vector $\vec{V}$.

$$\vec{V} \bullet \overrightarrow{OP} = Ax_0 + By_0 = \|\vec{V}\| \ \|\overrightarrow{OP}\|\cos(\theta) = \|\vec{V}\| \ \|\overrightarrow{OP}\| \frac{\|\overrightarrow{Om}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|}$$

$$\vec{V} \bullet \overrightarrow{OP} = \|\vec{V}\| \ \|\overrightarrow{Om}\| = \|\vec{V}\| \ \left(\|\overrightarrow{OH}\| + \|\overrightarrow{Hm}\|\right)$$

Como $\vec{H}$ está en la recta $Ax+By+C=0$, resulta $-C=\vec{V} \bullet \overrightarrow{OH} = \|\vec{V}\| \ \|\overrightarrow{OH}\|$, de esto obtenemos:

$$\vec{V} \bullet \overrightarrow{OP} = Ax_0 + By_0 = -C + \|\vec{V}\| \ \|\overrightarrow{Hm}\|$$

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\|\vec{V}\|} = \|\overrightarrow{Hm}\|$$

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \|\overrightarrow{Hm}\|$$

Ejemplo 1

Hallar la distancia del punto $(2,1)$ a la recta $4x-3y+2=0$

Solución

$$\text{distancia}=\frac{4(2)+(-3)(1)+2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{7}{5}$$

Ejemplo 2

Hallar la distancia de $\vec{P}=(5,6,6)$ a la recta $r:(5\lambda, 2-\lambda, \lambda)$

Solución

El plano n que pasa por $\vec{P}$ y es perpendicular a la recta r tiene por ecuación:

$$n:(5,-1,1).(x-5,y-6,z-6)=0$$
$$n:5x-y+z-25+6-6=0$$
$$n:5x-y+z-25=0$$

Encontremos la intersección de la recta r y el plano n

$$5(5\lambda)-(2-\lambda)+\lambda-25=0$$
$$25\lambda-2+2\lambda-25=0, \quad \lambda=1$$

El punto de intercepción es $(5(1),2-1,1)=(5,1,1)$, luego aplicamos la fórmula de la distancia y nos queda: $\sqrt{(5-5)^2+(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$ que es la distancia buscada.

2°) Distancia de un punto $\vec{P}$ a un plano n

Sea $\vec{P}=(x_0,y_0,z_0)$ un punto fijo y sea $Ac+By+Cz+D=0$, la ecuación de un plano n.

Hacemos el producto: $\overrightarrow{OP}\bullet\vec{V}=\left[\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}\right]\bullet\vec{V}=\left(\overrightarrow{OH}\bullet\vec{V}\right)+\left(\overrightarrow{HP}\bullet\vec{V}\right)$

Como: $\overrightarrow{OP}\bullet\vec{V}=Ax_0+By_0+Cz_0$

$\overrightarrow{OH}\bullet\vec{V}=-D$, ya que H está en el plano.

$$\overrightarrow{HP}\bullet\vec{V}=\left\|\overrightarrow{HP}\right\|\,\left\|\vec{V}\right\|$$

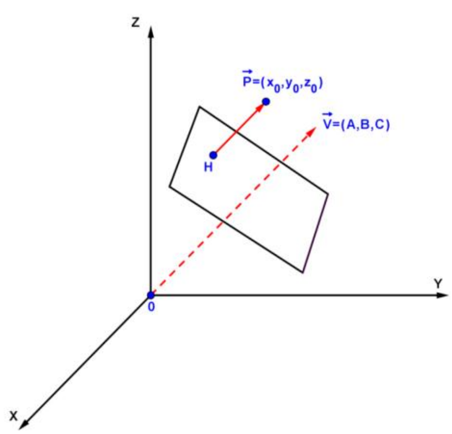


Figura **8.10**

Obtenemos:

$$\left(\overrightarrow{OP}\bullet\vec{V}\right)-\left(\overrightarrow{OH}\bullet\vec{V}\right)=\overrightarrow{HP}\bullet\vec{V}$$
$$\left\|\overrightarrow{HP}\right\|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\left\|\vec{V}\right\|}$$

Que es la distancia del punto $\vec{P}$ al plano n

8.2 Producto Vectorial de dos Vectores.

El resultado del *producto vectorial* de dos vectores es otro vector, tal como se verá a continuación.

Definición: se llama producto vectorial de dos vectores $\vec{U}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{V}=(v_1,v_2,v_3)$, y se designa por $\vec{U} \text{ X } \vec{V}$ al vector: $\vec{U} \text{ X } \vec{V}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$

Propiedades:

Propiedad 1

$\vec{U} \text{ X } \vec{V}$ es perpendicular a $\vec{U}$ y a $\vec{V}$

Demostración

$$\begin{aligned}(\vec{U} \text{ X } \vec{V}) \bullet \vec{U} &= (u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)\bullet(u_1,u_2,u_3)\\ &= u_2v_3u_1-u_3v_2u_1+u_3v_1u_2-u_1v_3u_2+u_1v_2u_3-u_2v_1u_3=0\end{aligned}$$

Propiedad 2

$\vec{U} \text{ X } \vec{V}=-(\vec{V} \text{ X } \vec{U})$

Demostración

$$\begin{aligned}\vec{U} \text{ X } \vec{V} &= (u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)\\ &= -(u_3v_2-u_2v_3,u_1v_3-u_3v_1,u_2v_1-u_1v_2)\\ &= -(v_2u_3-v_3u_2,v_3u_1-v_1u_3,v_1u_2-v_2u_1)=-(\vec{V} \text{ X } \vec{U})\end{aligned}$$

Propiedad 3

$\|\vec{U} \text{ X } \vec{V}\|=\|\vec{U}\|\ \|\vec{V}\|sen(\alpha)$ Aquí α es el ángulo entre el vector $\vec{U}$ y el vector $\vec{V}$, $0° \le \alpha \le 180°$

Demostración

$$\|\vec{U} \text{ X } \vec{V}\|^2=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2$$

$$=u_2^2v_3^2+u_3^2v_2^2-2u_2v_3u_3v_2+u_3^2v_1^2+u_1^2v_3^2-2u_3v_1u_1v_3+u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2-2u_1v_2u_2v_1$$

$$=u_1^2\left(v_2^2+v_3^2\right)+u_2^2\left(v_1^2+v_3^2\right)+u_3^2\left(v_1^2+v_2^2\right)-2\left(u_2v_3u_3v_2+u_3v_1u_1v_3+u_1v_2u_2v_1\right)$$

$$=u_1^2\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+u_2^2\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+u_3^2\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)-2\left(u_2v_3u_3v_2+u_3v_1u_1v_3+u_1v_2u_2v_1\right)$$
$$-u_1^2v_1^2-u_2^2v_2^2-u_3^2v_3^2$$

$$=\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)-\left(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\right)^2$$

$$=\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2-\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)^2$$

$$=\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2-\left(\left\|\vec{U}\right\|\ \left\|\vec{V}\right\|\cos(\alpha)\right)^2$$

$$=\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2-\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2\cos^2(\alpha)$$

$$=\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2\left(1-\cos^2(\alpha)\right)=\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2 sen^2(\alpha)$$

Propiedad 4

$$\vec{U}\ \mathrm{X}\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\ \mathrm{X}\ \vec{V}\right)+\left(\vec{U}\ \mathrm{X}\ \vec{W}\right)$$

8.2.1 Aplicaciones geométricas del producto vectorial.

1. Área del paralelogramo.

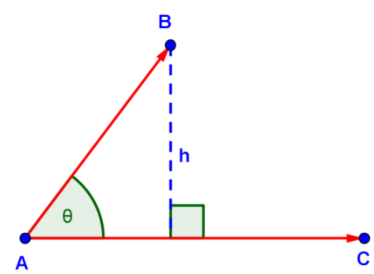


***Figura* 8.11**

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB}\ X\ \overrightarrow{AC}\right\| &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| sen(\theta)\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \frac{h}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\\ &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\| h\\ &= \left(\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\| h\right)(2)\\ &= \left(\text{Área del triángulo } \Delta ABC\right)(2)\end{aligned}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\ X\ \overrightarrow{AC}\right\| = \text{Área del paralelogramo formado por los vectores } \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AC}$$

2. Ecuación de un plano que pasa por tres puntos.

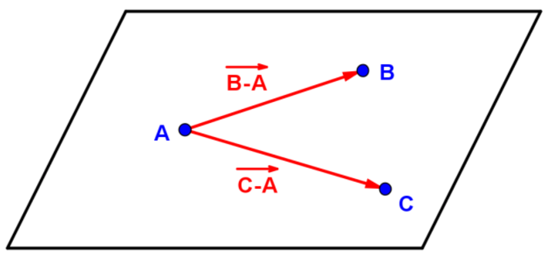


***Figura* 8.12**

El producto vectorial $\overrightarrow{B-A}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{C-A}$ es un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{B-A}$ y $\overrightarrow{C-A}$, de donde se deduce que es perpendicular al plano que los contiene.

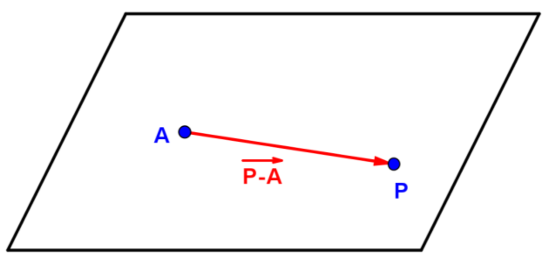


***Figura* 8.13**

De esta manera un punto $P=(x,y,z)$ está en el plano si y sólo si $\overrightarrow{P-A}$ es perpendicular a $\overrightarrow{B-A}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{C-A}$, esto es $\overrightarrow{P-A} \bullet \left(\overrightarrow{B-A}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{C-A}\right)=0$, esta última ecuación nos determina a todos los puntos del plano que contiene a los puntos A, B y C.

3. Distancia de un punto a una recta.

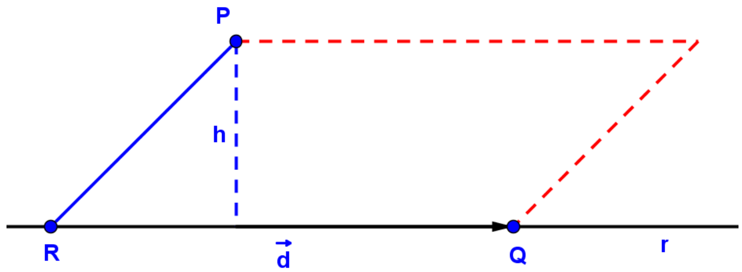


Figura **8.14**

Consideremos la recta r con vector director $\vec{d}$ y que pasa por el punto R. Queremos encontrar la distancia del punto P a la recta r.

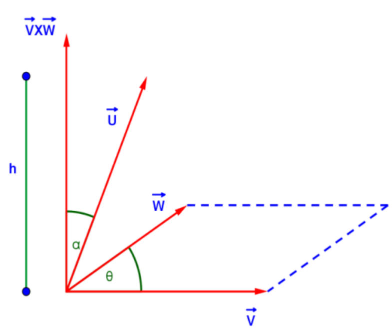
$$\operatorname{dist}(P,r) = h = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{longitud de la base}} = \frac{\left\|\overrightarrow{P-R}\ X\ \vec{d}\right\|}{\left\|\vec{d}\right\|}$$

8.3 Producto Mixto de Vectores en R^3

Definición: se llama producto mixto de los tres vectores $\vec{U}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$; y se designa por $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$ al número que se obtiene de operarlos del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) &= \vec{U}\bullet\left(\vec{V}\ X\ \vec{W}\right)\\ &= (u_1,u_2,u_3)\bullet(v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)\\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\end{aligned}$$

Interpretación geométrica:



Volumen del paralelepípedo formado por $\vec{U}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$

Figura **8.15**

$$\text{Volumen} = (h)\left(\text{Área de la base del paralelogramo formado por } \vec{V} \text{ y } \vec{W}\right)$$
$$= \frac{h}{\|\vec{U}\|}\ \|\vec{U}\|\ \|\vec{V}\ X\ \vec{W}\|$$
$$= \cos(\alpha)\|\vec{U}\|\ \|\vec{V}\ X\ \vec{W}\|$$
$$= \vec{U}\bullet\left(\vec{V}\ X\ \vec{W}\right)$$

8.4 Sistemas de tres Ecuaciones con tres Incógnitas.

Ejemplo 1

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{cases} \quad \text{el cual es equivalente a} \quad x\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

no tiene solución. Esto sucede porque el tercer vector es combinación lineal de los dos anteriores, esto es:

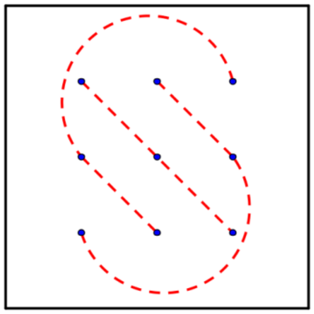
$$\frac{2}{17}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}-\frac{7}{17}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Afortunadamente existe un método que nos ayuda a identificar si un sistema de ecuaciones tiene o no solución; para esto necesitamos calcular el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones.

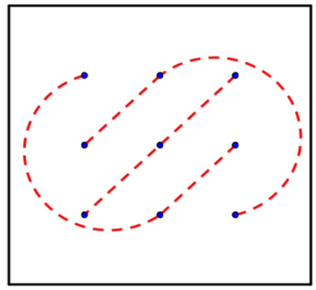
8.4.1 Determinante de una matriz de coeficientes 3x3

$$\text{Det}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

El cual podemos calcular fácilmente usando la **Regla de Sarrus**.



Productos con signo más



Productos con signo menos

8.4.2 Propiedades del determinante

Propiedad 1

El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta.

Comprobación: Al intercambiar las filas por las columnas de una matriz conseguimos su transpuesta; luego del diagrama del método de Sarrus obtenemos la conclusión deseada.

Propiedad 2

Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es cero.

Comprobación: Al observar los valores de Sarrus tenemos que si tomamos los valores de una línea fijada, ellos intervienen como factor en cada término del determinante.

Propiedad 3

Si cambiamos las filas de una matriz, su determinante cambia de signo.

Propiedad 4

Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es cero.

Comprobación: Si nos basamos en la propiedad 3, al intercambiar las dos filas iguales su determinante cambia de signo, luego el determinante de la matriz debe ser cero ya que la matriz no se altera al intercambiar dos de sus filas que son iguales.

Propiedad 5

Si multiplicamos cada elemento de una fila por una constante ***k***, el determinante queda multiplicado por la constante ***k***.

Comprobación: de la fórmula de Sarrus podemos observar que si multiplicamos la última fila por ***k***, cada término del resultado del determinante queda multiplicado por ***k***, De la misma manera resulta si multiplicamos por ***k*** las otras dos filas.

Propiedad 6

Si una matriz tiene dos de sus filas proporcionales, su determinante es cero.

Comprobación: combinando las propiedades 5 y 6.

Propiedad 7

Si una fila de una matriz es suma de las otras dos, su determinante es cero.

Comprobación: separamos la fila que es sumando de las otras dos filas en sus dos sumandos, y al aplicar la fórmula del determinante estos sumandos nuevamente se separan en dos, cada uno de los cuales es cero ya que resulta de un determinante de dos filas iguales.

Propiedad 8

Si una fila de una matriz es combinación lineal de las otras dos, entonces su determinante es cero.

Comprobación: aplicamos las propiedades 5 y 7.

8.4.3 Método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ -2x+3y-z&=4 \\ x-y+2z&=3 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (1)(3)(2)+(-2)(-1)(1)+(1)(-1)(1)-(1)(3)(1)-(-1)(-1)(1)-(1)(-2)(2)$$

$$= 6+2-1-3-1+4 = 7 \neq 0$$

Lo que garantiza según la propiedad 8 de los determinantes que existe solución única.

Ahora resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss, el cual consiste en transformar el sistema original en uno equivalente, donde queden coeficientes uno en la diagonal principal y ceros bajo la diagonal como detallamos a continuación.

Si en el sistema original a la ecuación tres le restamos la ecuación uno, resulta:

$$\begin{aligned} &x+y+z=2 \\ &-2x+3y-z=4 \\ &0-2y+z=1 \end{aligned}$$

Al intercambiar la ecuación tres por la dos obtenemos:

$$\begin{aligned} &x+y+z=2 \\ &0-2y+z=1 \\ &-2x+3y-z=4 \end{aligned}$$

Si multiplicamos la ecuación dos por menos un medio nos da:

$$\begin{aligned} &x+y+z=2 \\ &y-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2} \\ &-2x+3y-z=4 \end{aligned}$$

A la última ecuación le sumamos dos veces la primera y resulta:

$$\begin{aligned} &x+y+z=2 \\ &y-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2} \\ &0+5y+z=8 \end{aligned}$$

A la última ecuación le restamos cinco veces la segunda.

$$x + y + z = 2$$
$$y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}$$
$$0 + \left(1 + \frac{5}{2}\right)z = \left(8 + \frac{5}{2}\right)$$

Del último sistema podemos obtener $z = 3,\ y = 1,\ x = -2$

Vocabulario

Parámetro

Es una variable que puede tomar distintos valores en una ecuación.

Vector

Un vector en el plano cartesiano, es asociado a un punto cualquiera de este. La flecha que inicia en el origen del plano y finaliza en el punto del plano es el vector asociado al punto.

Examen de Conocimientos

1) Calcular el área del triángulo definido por los vectores:

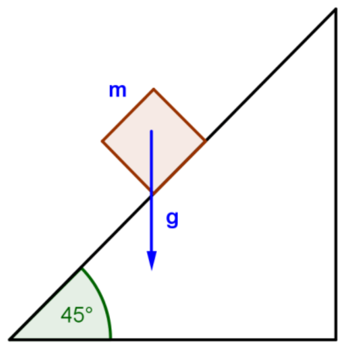
$$\vec{U} = (3,1,2),\ \vec{V} = (4,-1,0) \text{ y } \vec{W} = (0,0,0)$$

2) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - y + 3z = 1$$
$$3x - y + 2z = 3$$
$$-2y + 7z = 10$$

3) Encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(3,-1,4)$ y es paralela al vector cuyas coordenadas son $(-1,5,4)$.

4)



Encuentre la componente de la fuerza normal a la superficie si $m = 2 \ kg$.

5) Encuentre una recta perpendicular al plano: $3x - 2y + 5z = 0$

Guía de Ejercicios

1) Representar gráficamente los puntos:

a) $(3,2,4)$ b) $(-2,-1,3)$ c) $(0,1,0)$

2) Dados los puntos $A = (1,4,2)$; $B = (-1,0,4)$ y $C = (2,-2,-6)$. Hallar las coordenadas de los vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

3) Compruebe si alguno de los siguientes puntos pertenece a la recta r

a) $A = (1,2,0)$ b) $B = (1,2,3)$ c) $C = (3,-1,3)$ d) $D = (1,10,8)$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dibuje la recta r.

4) Encuentre los valores de a y b para que la recta $\frac{x-3}{1}=\frac{y-a}{2}=\frac{z+1}{b}$ pase por el punto $(4,-5,4)$.

5) Compruebe que las siguientes rectas r y s son coincidentes (es decir, que se trata de la misma recta):

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-1-4\lambda \\ y=7+2\lambda \\ z=-2-6\lambda \end{cases}$$

6) Calcule la distancia del punto P al plano n indicado en cada caso:

$a)\ P=(1,2,3); \qquad n: 2x+3y-z=0$

$b)\ P=(1,1,1); \qquad n: x+y+z+2=0$

7) Determine las distancias entre las rectas r y s indicadas en cada caso:

$a)\ r:(13+12\lambda,2,8+5\lambda); \qquad s:(6,6+\mu,-9)$

$b)\ r:(5\lambda,2-\lambda,\lambda); \qquad s:(5+7\mu,1-5\mu,1-5\mu)$

8) Encuentre la distancia entre la recta r y el plano n indicados en cada caso:

$a)\ r:(1-3\lambda,2+\lambda,1-\lambda); \qquad n: x+3y=0$

$b)\ r:\frac{x+5}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}; \qquad s: x-3y+4z-11=0$

9) Determina con el producto mixto si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución, si la tiene encuéntrela.

$$a)\begin{cases} 3x-y+2z=12 \\ -x-y-2z=-4 \\ x+2y=-2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x-y+z=-7 \\ x+4y-z=7 \\ -x+2y+z=5 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 3x+y+z=8 \\ x-y+4z=15 \end{cases}$$

10) Encontrar un vector director de la recta r en cada caso:

$$r:\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-z-11=0 \end{cases} \qquad r:\begin{cases} 3x-y+4z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

11) Calcule los siguientes productos vectoriales:

$a)\ (3,5,-1)\ X\ (7,4,3)$

$b)\ (2,1,-1)\ X\ (-1,-1,0)$

$c)\ (3,6,-15)\ X\ (-1,-2,5)$

12) Verifique que el producto vectorial resultante en cada caso del numeral anterior, es perpendicular a cada uno de los vectores factores. Usar el producto escalar.

13) Hallar el área de cada uno de los triángulos siguientes:

$a)\ A=(2,7,3),\ B=(1,-5,4),\ C=(7,0,11)$

$b)\ A=(3,-7,4),\ B=(-1,2,5),\ C=(-5,11,6)$

Bibliografía

1. De Guzmán, Miguel.(1996). *MATEMATICAS I*. Madrid, España: Editorial ANAYA.
2. Kline, Morris.(1998). *CALCULUS*. New York, Estados Unidos: Editorial Dover.
3. Martin, J. (1991). *Cours de mathématiques*. París, Francia: Editorial DUNOD.

LECCIÓN 9 2° AÑO DE BACHILLERATO TIEMPO: 8 HORAS CLASE

GEOMETRÍA ANALÍTICA: PARÁBOLA Y CIRCUNFERENCIA

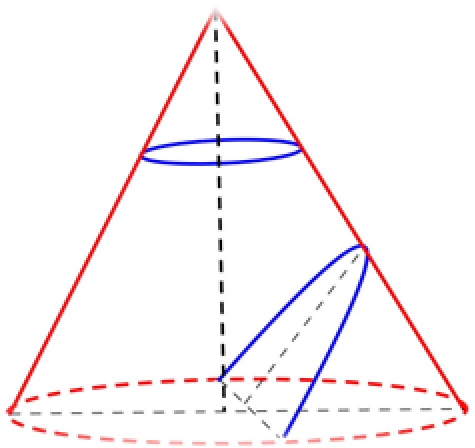


Figura **9.1**

La circunferencia, es la sección cónica que resulta de cortar un cono con un plano paralelo a la base, y la parábola, es la sección cónica que resulta de cortarlo con un plano paralelo a su generatriz.

Competencias a desarrollar

Saber argumentar, cuantificar y analizar críticamente la información.
Representar y comunicar información.
Resolver y enfrentarse a problemas.
Usar técnicas e instrumentos matemáticos.
Modelar e Integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos de la lección

1. Analizar las propiedades geométricas de la parábola.
2. Deducir las ecuaciones de la parábola y la circunferencia.
3. Graficar parábolas y circunferencias.

Pre-saberes

4. Distancia entre dos puntos
5. Pendiente de una recta

Descripción

En esta lección se presentan las definiciones de la parábola y la circunferencia, deduciendo en cada caso, mediante ejemplos, su ecuación. También se analizan algunas propiedades de las mismas.

Contenido

9.1 Geometría Analítica en el Plano.

9.1.1 La Parábola.

9.1.2 La Derivada de la parábola.

9.2 La Circunferencia.

Examen de conocimientos, Ejercicios y Bibliografía.

9.1 Geometría Analítica en el Plano

9.1.1 La Parábola

Definición

La parábola es el lugar geométrico descrito por todos los puntos del plano cartesiano que equidistan de una línea recta y un punto fijo. La línea es llamada directriz y el punto es llamado foco. Por ejemplo si el punto fijo es $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es la recta $y=-\frac{1}{4}$, obtenemos la parábola $y=x^2$.

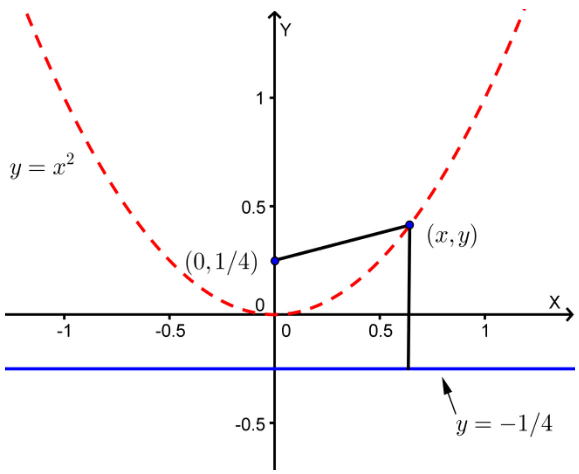


Figura **9.2**

Comprobación

$$\left|y-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y=x^2.$$

En general si el foco es $(0,p)$ y la directriz es $y=-p$, la ecuación de la parábola resulta $y=\frac{1}{4p}x^2$.

Comprobemos la afirmación anterior:

Un punto (x,y) está en la parábola si y solamente si: $|y-(-P)|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$

Entonces $(y+p)^2=x^2+(y-p)^2$, de donde $4py=x^2$, $y=\frac{1}{4p}x^2$.

9.1.2 La Derivada de la parábola

Grafiquemos la parábola $y = x^2$, y luego hagamos pasar una línea recta por los puntos $\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$ y $\left(x_0 + h, \left(x_0 + h\right)^2\right)$ como mostramos en la ***figura 9.3***

La línea recta es llamada una recta secante y la denotaremos r. La pendiente de la recta viene dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(x_0 + h\right)^2 - x_0^{\ 2}}{x_0 + h - x_0} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

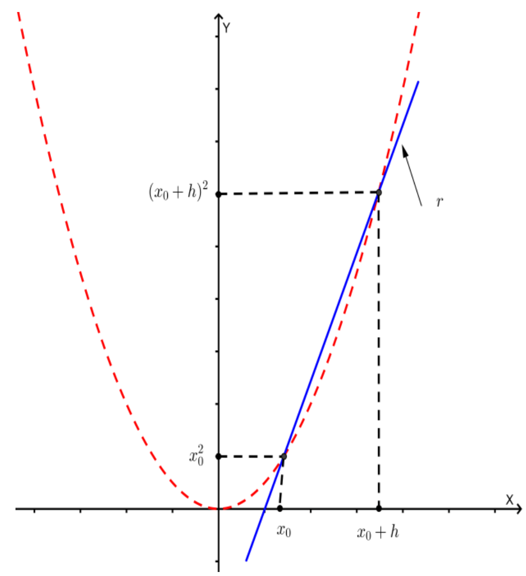


Figura **9.3**

Al tomar valores de h cada vez más pequeños, las líneas se van inclinando, según lo indica la ***figura 9.4***

De lo anterior podemos intuir que cuando h llegue a tomar el valor cero, la línea recta solamente tocará en un punto a la parábola, este punto es $\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$. Esta última línea recta es llamada recta tangente.

En la ecuación de la pendiente de la recta secante obtuvimos, $m = 2x_0 + h$ y si h se acerca a cero, nos queda $m = 2x_0$, que es la pendiente de la recta tangente, también llamada la derivada de la función $y = x^2$ en el punto $x = x_0$

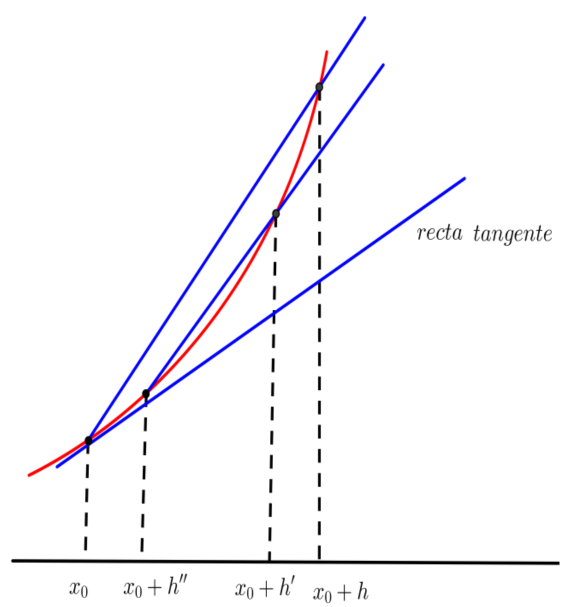


Figura **9.4**

Ejemplo 1

Calculemos la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(3,9)$

Solución

La pendiente de la recta tangente es,
$m = 2x_0 = 2(3) = 6$, ver **figura 9.5**

Ahora derivemos $y = x^2$.

Primero encontremos la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos:

$(x_0, 3y_0)$ y $\left(x_0 + h, 3(x_0 + h)^2\right)$.

Así: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3(x_0+h)^2 - 3{x_0}^2}{x_0 + h - x_0}$

$$= 3\left(\frac{(x_0+h)^2 - {x_0}^2}{h}\right) = 3(2x_0 + h)$$

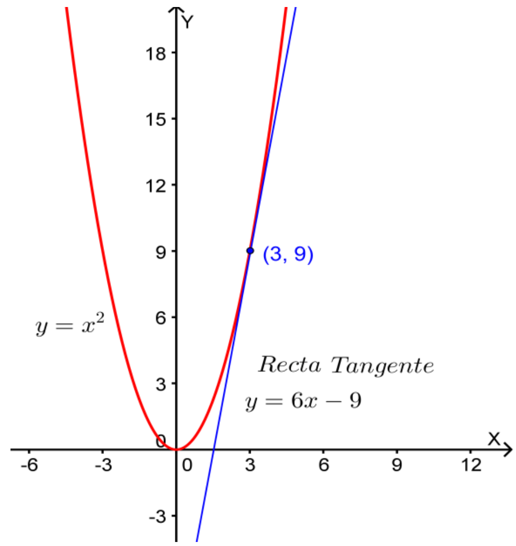


Figura **9.5**

Y cuando h se hace muy pequeño nos queda $m = 6x_0$. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 3x^2$ en el punto $(x_0, 3{x_0}^2)$ nos queda:

$y - 3{x_0}^2 = m(x - x_0)$; $y = m(x - x_0) + 3{x_0}^2 = 6x_0(x - x_0) + 3{x_0}^2$. Su intercepto con el eje y resulta : $y = 6x_0(0 - x_0) + 3{x_0}^2 = -3{x_0}^2$

Al graficar la información anterior obtenemos:

La ecuación de la recta tangente es $y = 12x + 12$; el intercepto con el eje y es $(0, -12)$ y la distancia de este intercepto al foco es la misma que la distancia del punto $(2,12)$ a la directriz.

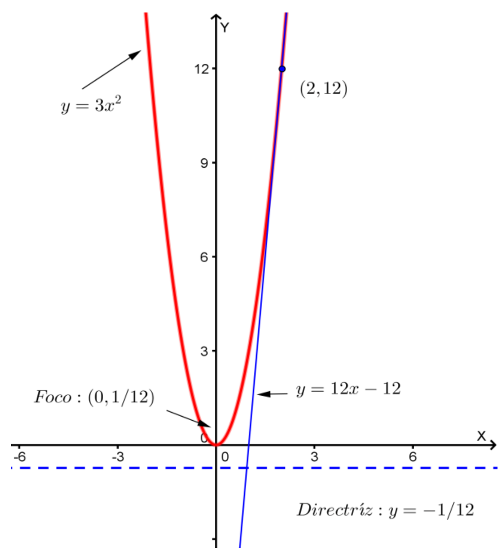


Figura **9.6**

Por lo discutido anteriormente obtenemos el esquema de la ***figura* 9.7**

Donde $\overline{AB} = \overline{BC}$ por la definición de la parábola, y $\overline{CB} = \overline{AD}$, por los cálculos ya realizados. Luego deducimos que el triángulo ABD es isósceles, por lo tanto los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales, por lo que podemos afirmar que un rayo vertical cualquiera rebota en la parábola y va a dar al foco.

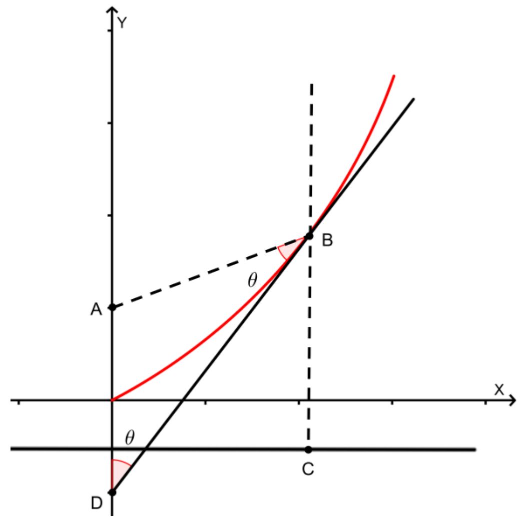


***Figura* 9.7**

Ejemplo 2

Graficar en un mismo plano las siguientes ecuaciones:

$$3x + 2y = 1 \text{ y } y + x^2 + 3x = 0$$

Solución

La gráfica de la primera ecuación es una línea recta, y si completamos cuadrados en la segunda nos queda una parábola.

La recta $3x + 2y = 1$ tiene interceptos con los ejes cartesianos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Luego completamos cuadrados en la otra ecuación obteniendo:

$$y + x^2 + 3x = 0$$

$$y + \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$y + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}; \quad y = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

Nos queda una parábola abierta hacia abajo con vértice en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y pasa por el origen.

Para encontrar los interceptos entre ambas gráficas, despejamos la variable dependiente en la recta y la sustituimos en la ecuación de la parábola.

$$3x+2y=1;\quad 2y=1-3x;\quad y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$$

Luego sustituimos en la ecuación de la parábola

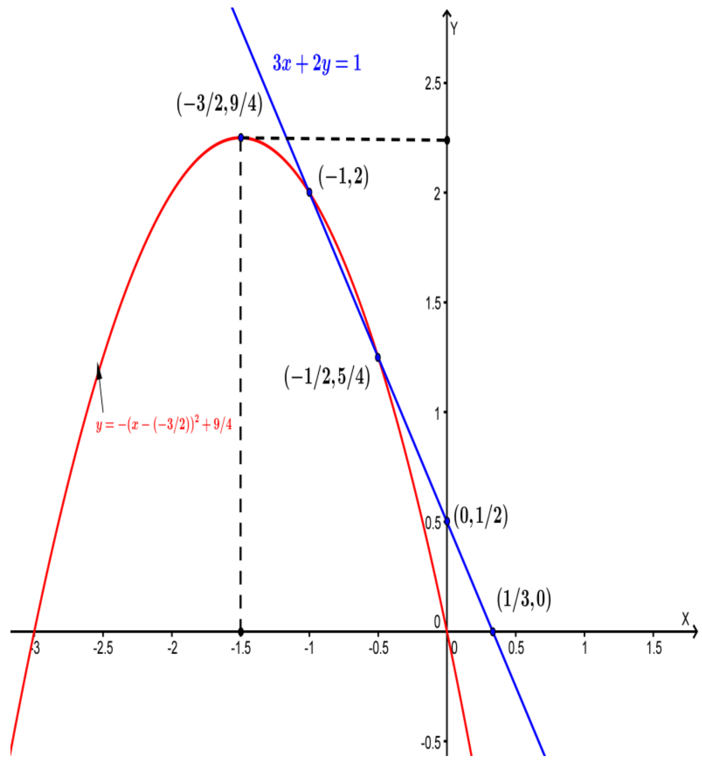
$$y+x^2+3x=0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+x^2+3x=0;\ 1-3x+2x^2+6x=0$$

Finalmente obtenemos la ecuación $2x^2+3x+1=0$, la cual la resolvemos aplicando la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(2)(1)}}{2(2)}=\frac{-3\pm 1}{4}.$$

Luego
$$x_1=-\frac{1}{2},\quad y_1=\frac{5}{4};\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$$
$$x_2=-1,\quad y_2=2;\quad (-1,2)$$



La figura 9.8 muestra el gráfico y los respectivos puntos de intercepción.

***Figura* 9.8**

Ejemplo 3

Un hombre está en un bote en el punto P a un kilómetro de distancia de la orilla, según el diagrama de *la* ***figura 9.9.***

Él quiere llegar al punto B en el más corto tiempo. Si la velocidad en el bote es $3\ km/h$ y la velocidad a pie es de $1\ km/h$, caminando por la orilla. ¿A qué punto C debe llegar el bote?

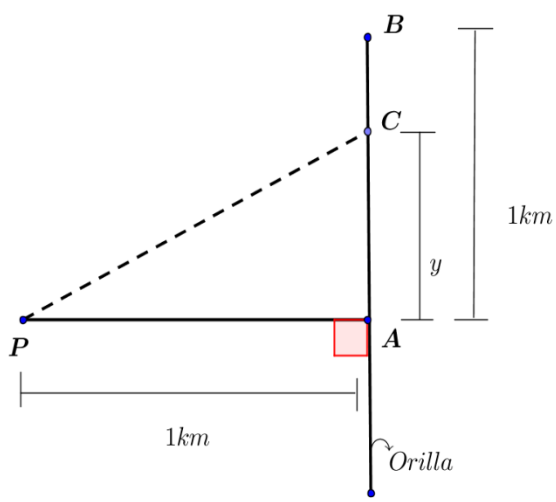


***Figura* 9.9**

Solución

Tiempo total = tiempo en el bote + tiempo en la orilla.

$$t = \frac{\text{distancia recorrida en el bote}}{\text{velocida del bote}} + \frac{\text{distancia caminada}}{\text{velocida a pie}}$$

$$t = \frac{\overline{PC}}{3\ km/h} + \frac{\overline{CB}}{1\ km/h} = \frac{\sqrt{1+y}\,km}{3\ km/h} + \frac{(1-y)\,km}{1\ km/h}$$

$$t = \frac{\sqrt{1+y}}{3}h + (1-y)h = \left\{-\left[(y+1) - \frac{\sqrt{1+y}}{3}\right] + 2\right\}h$$

$$t = \left\{-\left[(y+1) - \frac{\sqrt{1+y}}{3} + \frac{1}{4(9)}\right] + 2 + \frac{1}{4(9)}\right\}h = \left\{-\left[\sqrt{y+1} - \frac{1}{6}\right]^2 + \frac{73}{36}\right\}h$$

El tiempo es mínimo cuando $\sqrt{y+1} - \frac{1}{6}$ es máximo, esto es cuando y vale 1. El bote debe llegar al punto A.

Ejemplo 4

Aproximación del área bajo la parábola por rectángulos.

En cada paso dividiremos la base en dos partes iguales, y calcularemos el área de los rectángulos que quedan bajo la parábola.

Área del rectángulo $= \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^2$

La ***figura 9.10*** ilustra dicho proceso.

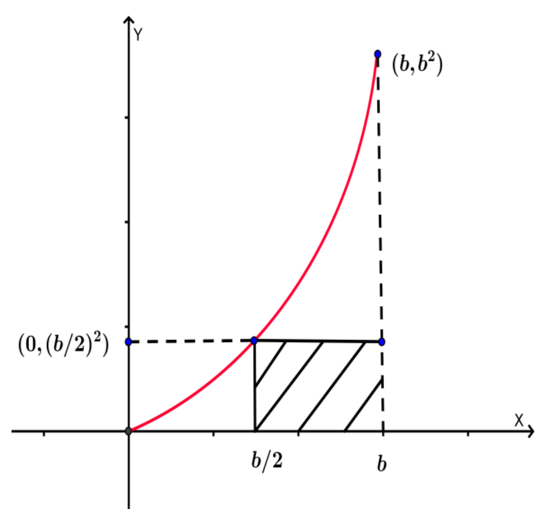


***Figura* 9.10**

Si dividimos la base en cuatro partes iguales, la suma de las áreas de los rectángulos bajo la parábola es: $\frac{b}{4}\left(\frac{b}{4}\right)^2+\frac{b}{4}\left(\frac{2b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{4}\right)\left(\frac{3b}{4}\right)^2=$

$\frac{b^3}{4}\left[\frac{1}{4^2}+\frac{2^2}{4^2}+\frac{3^2}{4^2}\right]$. En general tendremos que encontrar la suma de:

$$s=\frac{b^3}{2^n}\left[\left(\frac{1}{\left(2^n\right)^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2+\left(2^n-1\right)^2\right)\right].$$

Apliquemos la formula $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ al lado derecho de la ecuación

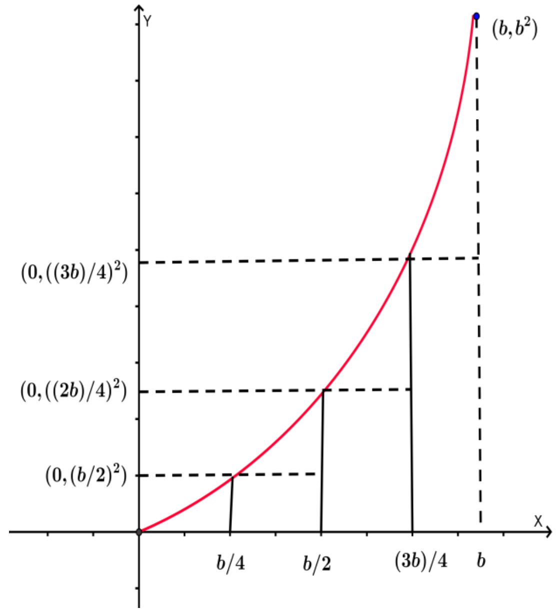


***Figura* 9.11**

Luego $s=\frac{b^3}{2^n}\;\frac{1}{2^{2n}}\left[\frac{\left(2^n-1\right)\left(2^n\right)\left(2\left(2^n-1\right)+1\right)}{6}\right]=b^3\,\frac{2^n}{2^n}\;\frac{1}{2^{2n}}\left[\left(2^n-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)\right]\left(\frac{1}{6}\right)$

$$=b^3\;\frac{2^n-1}{2^n}\;\frac{\left(2^{n+1}-1\right)}{2^n}\;\left(\frac{1}{6}\right)=b^3\;\left(\frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=b^3(1)(2)\frac{1}{6}=\frac{1}{3}b^3$$

Ya que cuando n es muy grande $\frac{1}{2^n}$ es muy pequeño y es despreciable.

Ejemplo 5

Comprobemos que si la cuerda que une dos puntos de una parábola pasa por el foco, entonces las rectas tangentes a la parábola en esos puntos son perpendiculares entre sí.

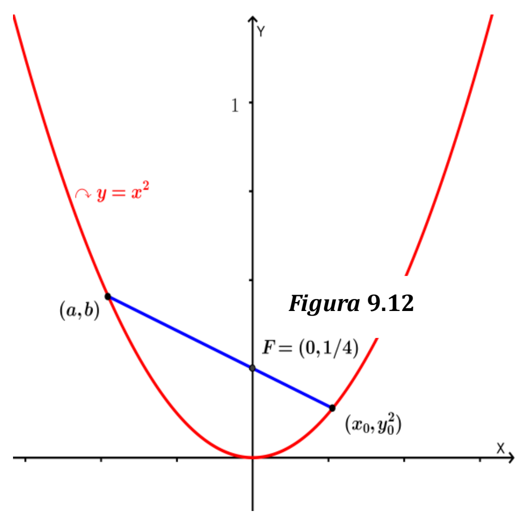


***Figura* 9.12**

Solución

Sin pérdida de generalidad podemos considerar la ecuación $y = x^2$, y consideremos su gráfico.

La pendiente en el punto $\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$ es: $m_{T_1} = 2x_0$.

La recta que une el foco con el punto $\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$ es : $y - x_0^{\ 2} = \dfrac{x_0^{\ 2} - \frac{1}{4}}{x_0}\left(x - x_0\right)$.

Encontraremos las intercepciones de esa recta con la parábola $y = x^2$; sustituyendo en la ecuación de la recta no queda:

$$x^2 - x_0^{\ 2} = \frac{x_0^{\ 2} - \frac{1}{4}}{x_0}\left(x - x_0\right)$$

Claramente $x = x_0$ satisface la ecuación, ahora encontraremos otra solución.

$$\left(x - x_0\right)\left(x + x_0\right) = \frac{x_0^{\ 2} - \frac{1}{4}}{x_0}\left(x - x_0\right)$$

$$x + x_0 = \frac{x_0^{\ 2} - \frac{1}{4}}{x_0}; \quad x = \frac{x_0^{\ 2} - \frac{1}{4}}{x_0} - x_0 = -\frac{1}{4x_0}$$

La pendiente de la recta tangente en este valor resulta.

$$m_{T_2} = 2\left(-\frac{1}{4x_0}\right) = -\frac{1}{2x_0}.$$

AL multiplicar las dos pendientes resulta menos uno; de donde deducimos que las dos rectas tangentes son perpendiculares entre sí.

9.2 La Circunferencia

Definición

La circunferencia es el lugar geométrico descrito por todos los puntos que equidistan de un punto fijo. El punto fijo es llamado centro y la distancia es llamada radio.

La ecuación de una circunferencia de centro (h,k) y radio r es: $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$, o sea $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ la cual podemos dejar como:

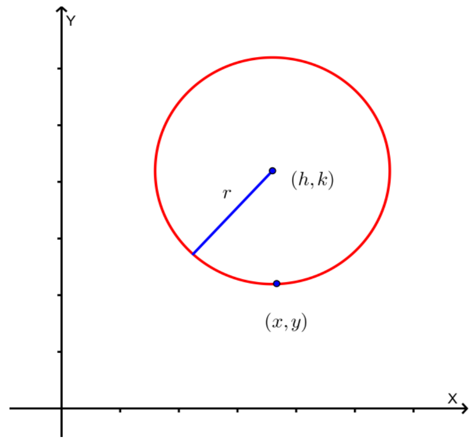


***Figura* 9.13**

$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$; que puede expresarse como:

$x^2+y^2+Ax+By+C=0;$ con $A=-2h,\ B=-2k$ y $C=h^2+k^2-r^2$.

Esta última ecuación es conocida como la ecuación general de la circunferencia.

Para ser circunferencia debe cumplirse $r^2=h^2+k^2-C>0;\ r^2=\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-\dfrac{4C}{4}>0$, o lo que es lo mismo:

$$A^2+B^2-4C>0$$

Ejemplo 1

Estudiar la ecuación $x^2+y^2-2x+4y=0$.

Solución

Aquí $A=-2,\ B=4$ y $C=0$.

$A^2+B^2-4C=4+16>0.$

Así la ecuación corresponde a una circunferencia, completando cuadrados nos queda:

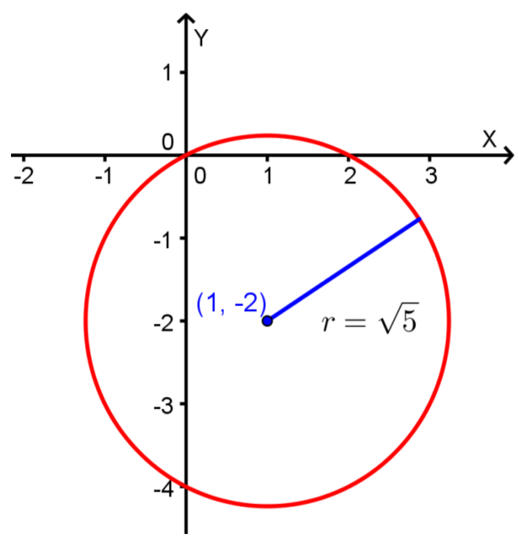


***Figura* 9.14**

$$\left(x^2-2x+1\right)-1+\left(y^2+4y+4\right)-4=0$$
$$\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=5$$

La cual representa una circunferencia con centro en $\left(1,-2\right)$ y radio $\sqrt{5}$.

Ejemplo 2

Graficar en un mismo plano las siguientes dos ecuaciones:

$$x^2+4x+y^2-6y=0 \quad \text{y} \quad y=2x+3$$

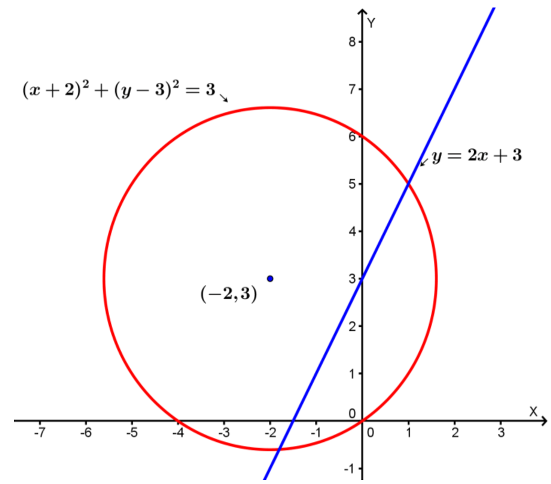


Figura **9.15**

Solución

Al completar los cuadrados en la primera ecuación obtenemos una circunferencia.

$$\left(x+4x+4\right)^2+\left(y-6y+9\right)^2=4+9;$$
$$\left(x+2\right)^2+\left(y-3\right)^2=13.$$

Esta circunferencia tiene centro $\left(-2,3\right)$, radio $\sqrt{13}$ y pasa por el origen.

Para encontrar los puntos donde se interceptan ambas gráficas, el valor y en la recta la sustituimos en la ecuación de la circunferencia, esto nos queda:

$$5x^2+4x+4=13; \quad 5x^2+4x-9=0.$$

Ahora resolvemos la ecuación anterior mediante la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(5)(-9)}}{2(5)}=\frac{-4\pm\sqrt{196}}{10}.$$

Así $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{196}}{10}=\dfrac{-4+14}{10}=1$, y $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{196}}{10}=\dfrac{-4-14}{10}=-\dfrac{18}{10}$, luego encontramos las respectivas imágenes para estos puntos.

Para $x_1=1;\ y_1=5$, y para $x_2=-1.8;\ y_2=-0.6$.

Ejemplo 3

Supongamos que queremos encontrar la distancia más corta del punto $(4,0)$ a la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución

Consideramos un punto (x,y) sobre la circunferencia. La distancia de este punto a $(4,0)$ viene dada por $d=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$

$$d=\sqrt{(x-4)^2+(1-x^2)}$$

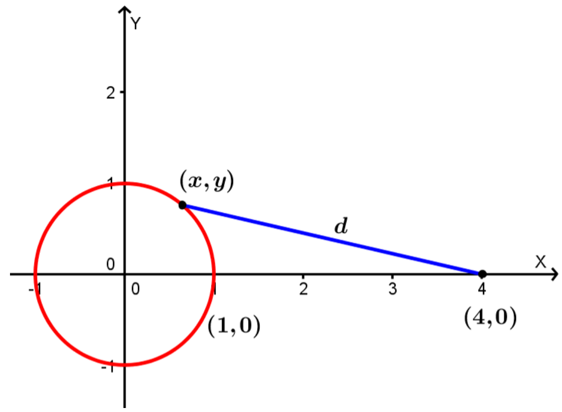


***Figura* 9.16**

Ahora el problema se convierte en encontrar x tal que d sea mínimo, es decir tenemos que minimizar:

$$d^2=(x-4)^2+(1-x^2)=x^2-8x+16+1-x^2=-8x+17 \qquad 0\le x\le 1$$

Este valor mínimo resulta para $x=1$, $d^2=9$, $d=3$. Observemos también que el valor máximo resulta cuando $x=0$, $d^2=17$, $d=\sqrt{17}$

Ejemplo 4

Movimiento circular uniforme.

El movimiento de una partícula de masa m sobre una circunferencia es llamado circular uniforme; cuando el movimiento describe ángulos iguales en tiempos iguales.

Las coordenadas de la masa m vienen dadas por $(\cos\theta, sen\theta)$. La velocidad se define como

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t}, \qquad \Delta t=\frac{1}{k}\Delta\theta$$

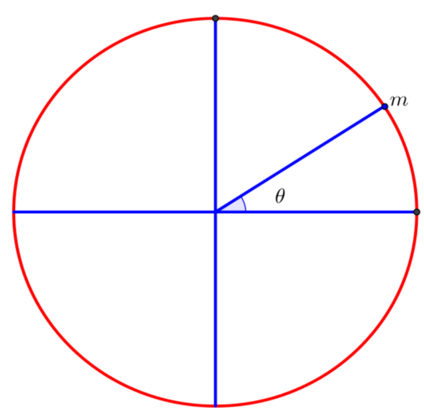
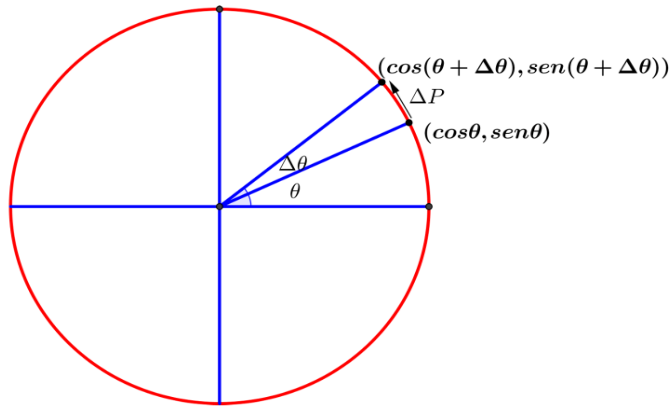


***Figura* 9.17**



$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(\theta+\Delta\theta)-P(\theta)}{\frac{1}{k}\Delta\theta}$$

***Figura* 9.18**

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}\Big(\big(\cos(\theta+\Delta\theta), sen(\theta+\Delta\theta)\big)-\big(\cos\theta, sen\theta\big)\Big)$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}k\left[\left(\frac{sen\left(\theta+\Delta\theta+\frac{\pi}{2}\right)-sen(\theta+\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right),\frac{sen(\theta+\Delta\theta)-sen\theta}{\Delta\theta}\right]$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\cos\theta\right)=(-sen\theta,\cos\theta)$$

Los vectores posición y velocidad son perpendiculares.

Examen de conocimientos

1. Calcule el área bajo la parábola $y = x^2 + 2,$ y sobre el eje X , para las x cuyo valor absoluto es menor que 3.
2. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 1$, luego grafique la curva y su recta tangente.
3. Grafique la curva $y = \dfrac{2}{3}x^3 + x$.
4. Graficar la curva $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$

Ejercicios

1. Calcular la pendiente de las rectas tangentes a las curvas dadas cuando $x = 1$. Dibujar las curva y la recta tangente.

   $a.\ y = -x^2$ b. $y = 4x^2$ c. $y = x^2 + 4$

   $d.\ y = x^2$ $e.\ y = 3x^2$ $f.\ y = 2x^2 + 1$
2. Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de la curva cuya ecuación es $y = -4x^2 + 16x$. Especificar la dirección del movimiento del objeto en términos de la pendiente y el ángulo de inclinación de la tangente.
3. Encuentre la pendiente de la recta tangente a las curvas dada y encuentre los valores máximos y mínimos de:

   $a.\ y = x^3 + x$ b. $y = x^2$+x
4. Completar cuadrados y graficar las ecuaciones resultantes para:

   $a.\ x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$

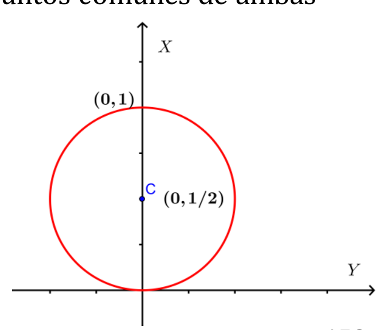
   b. x^2+2x+y^2 4y=4

   c. $x^2 + y^2 = 16$
5. In trisección de rectas con circunferencia. Encontrar los puntos comunes de ambas curvas, según sea el caso.

   $a.\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4, \quad y = x$

   $b.\ x^2 - 2x + y^2 + 4y = -1, \quad y = -x + 1$

   c. $x^2 + 6x + y^2 - 10y = 0, \quad x - y = 1$



6. Juego de la proyección estereográfica
   Consideremos una circunferencia de radio uno, tomamos el polo norte, el punto $(0,1)$ y trazamos una recta entre el polo norte y otro punto cualquiera de la circunferencia. La intersección de la recta con el eje X es llamada proyección estereográfica.
   Encuentra diferentes puntos de la circunferencia y sus proyecciones estereográficas. Este es un ejemplo de biyección entre los puntos del eje X y la circunferencia.

7. Menciona objetos de la vida diaria que tengan forma de una circunferencia.

8. Dibuja una parábola gigante sobre una cande de cemento. Usa carbón o ladrillo rojo para marcar los puntos sobre el cemento.

Bibliografía

1. Coxeter, M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. E.E.U.U. : Editorial Jhon Wiley & Sons.
2. Martin, J.(1991). *Cuors de Mathématiques*. París, Francia: Editorial Dunod.
3. Kline, M. (1998). Dover Publications. INC. New York, E.E.U.U.

Lección 10 — 2° Año de Bachillerato — Tiempo: 8 horas clase

GEOMETRÍA ANALÍTICA: ELIPSE E HIPÉRBOLA

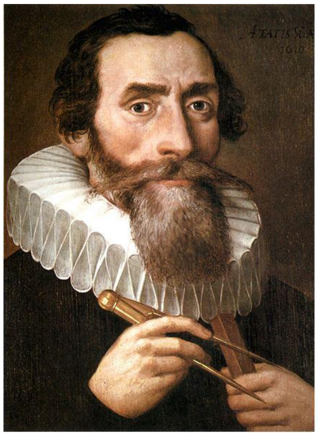


***Figura* 10.1**

Johannes Kepler (1571-1630) Astrónomo, matemático y físico alemán, revolucionó la astronomía. Descubrió que las trayectorias de los planetas alrededor del sol no eran circulares, sino elípticas. En su obra, *Astronomía Nova, presenta la primera y segunda leyes que llevan su nombre.*

1°) Los planetas en su desplazamiento alrededor del Sol describen elipses, con el Sol ubicado en uno de sus focos.

2°) La línea que une los planetas al centro del Sol

Competencias a desarrollar

Saber argumentar, cuantificar y analizar críticamente la información.
Representar y comunicar información.
Resolver y enfrentarse a problemas.
Usar técnicas e instrumentos matemáticos.
Modelar e Integrar los conocimientos adquiridos.

Objetivos de la lección

1. Analizar las propiedades geométricas de la elipse y la hipérbola.
2. Deducir las ecuaciones de la elipse y la hipérbola.
3. Aplicar la rotación de ejes coordenados.

Pre-saberes

Distancia entre dos puntos
Pendiente de una recta
Identidades trigonométricas

Descripción

Se estudiaran las definiciones de la hipérbola y la elipse, deduciendo en cada caso, mediante ejemplos su ecuación. También se presentan algunas propiedades de las mismas, para finalmente hacer un estudio general de la rotación de ejes coordenados.

Contenido

10.1 La Elipse

Definición:

La elipse surge de la intersección de una superficie cónica con un plano, de tal manera que la inclinación del plano no supere la inclinación de la recta generatriz del cono, consiguiendo así que la intersección sea una curva cerrada. En otro caso el corte podría ser una hipérbola o una parábola.

La elipse es el lugar geométrico del plano cartesiano descrito por todos los puntos que cumplen la propiedad de tener la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante.

Esto es, sean (x, y) un punto de la elipse cualquiera, $P_1 = (-c, 0)$ y $P_2 = (c, 0)$ dos fijos del plano. Entonces se cumple la ecuación:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = k$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$(x+c)^2 + y^2 = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - k^2 = -2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión obtenemos:

$$\left(4xc - k^2\right)^2 = \left(-2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$4^2x^2c^2 - 8xck^2 + k^4 = 4k^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$4^2x^2c^2 - 8xck^2 + k^4 = 4k^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right]$$

$$4^2x^2c^2 - 8xck^2 + k^4 = 4k^2x^2 - 8k^2xc + 4k^2c^2 + 4k^2y^2$$

$$4^2x^2c^2 + k^4 = 4k^2x^2 + 4k^2c^2 + 4k^2y^2$$

$$x^2\left(4^2c^2 - 4k^2\right) - 4k^2y^2 = 4k^2c^2 - k^4$$

$$x^2\left(4c^2 - k^2\right)(4) - 4k^2y^2 = k^2\left(4c^2 - k^2\right)$$

Dividimos entre $k^2\left(4c^2 - k^2\right)$ nos queda:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k^2}{4}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{4c^2 - k^2}{4}\right)} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{k^2}{4} - c^2\right)} = 1$$

Observemos además que $\frac{k^2}{4} + \frac{4c^2 - k^2}{4} = c^2$

Al graficar todos los puntos de la elipse obtenemos:

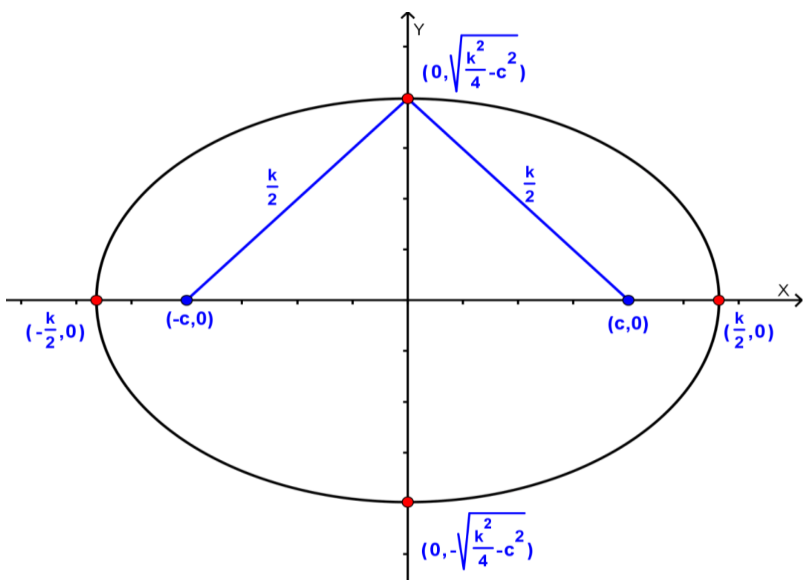


***Figura* 10.3: Elementos de la elipse**

Los puntos $(-c,0)$ y $(c,0)$ son llamados focos. El segmento que va del punto $\left(0,-\sqrt{\frac{k^2}{4}-c^2}\right)$ hasta el punto $\left(0,\sqrt{\frac{k^2}{4}-c^2}\right)$ es llamado eje menor y el segmento que va desde $\left(-\frac{k}{2},0\right)$ y hasta $\left(\frac{k}{2},0\right)$ es llamado eje mayor.

Ejemplo:
Obtenga una ecuación de la elipse que tiene focos en (-8, 2) y (4, 2), y la constante k es 20.

Solución:
El centro de la elipse es el punto medio entre los focos, en este caso el centro de la elipse es el punto (-2,2), y el valor de c que aparece en la ecuación es $c=4-2(2)$

La ecuación resultante es:

$$\frac{(x-(-2))^2}{\left(\frac{20}{2}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{\left(\left(\frac{20}{2}\right)^2-6^2\right)}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{(10)^2}+\frac{(y-2)^2}{(8^2)}=1$$

En general la ecuación de la elipse aparece como:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ; \quad \text{con} \quad c^2=a^2-b^2$$

Donde al sustituir

$$x=a\cos(\theta)$$
$$y=bsen(\theta)$$

Se satisface la ecuación, y se dice que la ecuación está parametrizada.

Para encontrar un vector tangente a la elipse, derivamos su posición, esto es:

$$\text{vector tangente}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{P(\theta+\Delta\theta)}{\Delta\theta}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{P(\theta+\Delta\theta)}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}\left[\left(a\cos(\theta+\Delta\theta),bsen(\theta+\Delta\theta)\right)-\left(a\cos(\theta),bsen(\theta)\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}\left[a\left(\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos(\theta)\right),b\left(sen(\theta+\Delta\theta)-sen(\theta)\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}\left[a\frac{\left(\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos(\theta)\right)}{\Delta\theta},b\frac{\left(sen(\theta+\Delta\theta)-sen(\theta)\right)}{\Delta\theta}\right]=\left(-asen(\theta),b\cos(\theta)\right)$$

10.1.1 Propiedad Fundamental de la Elipse.

Los ángulos que forman las rectas que unen los focos con un punto de la elipse, y la recta tangente son iguales.

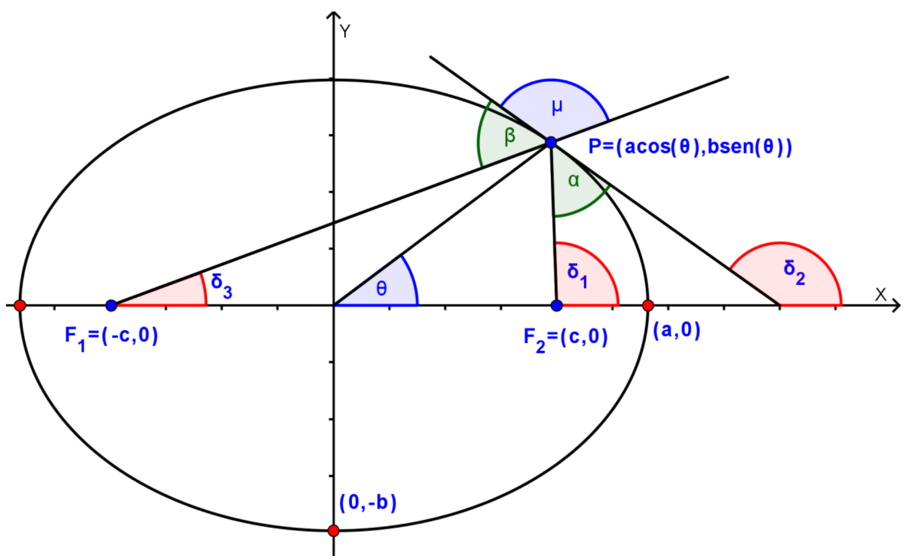


***Figura* 10.4: Ángulos de la elipse**

Comprobaremos que $\tan(\alpha)=\tan(\beta)$

Como $P=\left(a\cos(\theta),bsen(\theta)\right)$, derivando P obtenemos $\left(-asen(\theta),b\cos(\theta)\right)$.

Un vector director de la recta tangente a la elipse en P es $\left(-asen(\theta),b\cos(\theta)\right)$. Ahora ya podemos obtener:

$$\tan(\delta_2)=\frac{b\cos(\theta)}{-asen(\theta)},\qquad \tan(\delta_1)=\frac{bsen(\theta)}{a\cos(\theta)-c},\qquad \tan(\delta_3)=\frac{bsen(\theta)}{-a\cos(\theta)+c}$$

Luego usando el diagrama siguiente:

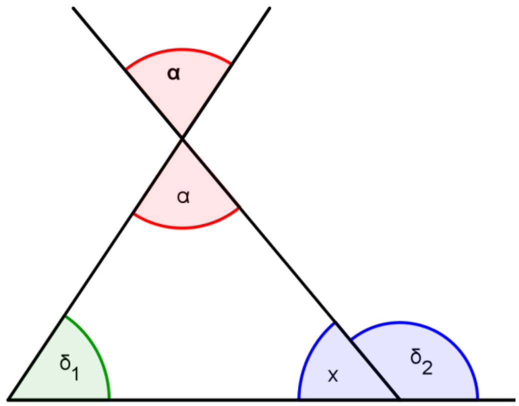


***Figura* 10.5**

Podemos deducir que:

$$\alpha+\delta_1+x=180°=x+\delta_2$$
$$\alpha+\delta_1=\delta_2$$
$$\alpha=\delta_2-\delta_1$$

$$\tan(\alpha)=\tan(\delta_2-\delta_1)=\frac{\tan(\delta_2)-\tan(\delta_1)}{1+\tan(\delta_2)\tan(\delta_1)}$$

$$=\frac{-\dfrac{b\cos(\theta)}{asen(\theta)}-\dfrac{bsen(\theta)}{a\cos(\theta)-c}}{1+\left(-\dfrac{b\cos(\theta)}{asen(\theta)}\right)\left(\dfrac{bsen(\theta)}{a\cos(\theta)-c}\right)}=\frac{-b\cos(\theta)(a\cos(\theta)-c)-(bsen(\theta))(asen(\theta))}{(asen(\theta))(a\cos(\theta)-c)-b^2sen(\theta)\cos(\theta)}$$

$$=\frac{-ba+cb\cos(\theta)}{(a^2-b^2)sen(\theta)\cos(\theta)-acsen(\theta)}$$

Finalmente

$$\tan(\beta)=-\tan(\mu)=-\tan(\delta_2-\delta_3)=-\left[\frac{\tan(\delta_2)-\tan(\delta_3)}{1+\tan(\delta_2)\tan(\delta_3)}\right]$$

$$=-\left[\frac{-\dfrac{b\cos(\theta)}{asen(\theta)}-\dfrac{bsen(\theta)}{a\cos(\theta)+c}}{1+\left(-\dfrac{b\cos(\theta)}{asen(\theta)}\right)\left(\dfrac{bsen(\theta)}{acos(\theta)+c}\right)}\right]=-\left[\frac{-b\cos(\theta)\left(a\cos(\theta)+c\right)-\left(bsen(\theta)\right)\left(asen(\theta)\right)}{\left(asen(\theta)\right)\left(a\cos(\theta)+c\right)-b^2sen(\theta)\cos(\theta)}\right]$$

$$=-\left[\frac{-ba-cb\cos(\theta)}{\left(a^2-b^2\right)sen(\theta)\cos(\theta)+acsen(\theta)}\right]=\frac{ba+cb\cos(\theta)}{\left(a^2-b^2\right)sen(\theta)\cos(\theta)+acsen(\theta)}$$

Al multiplicar cruzado las fracciones de $\tan(\alpha)$ y $\tan(\beta)$; y ocupando que $c^2=a^2-b^2$ se comprueban las igualdades.

10.1.2 Área de la Elipse.

Supongamos la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$, entonces el área de la elipse es πab.

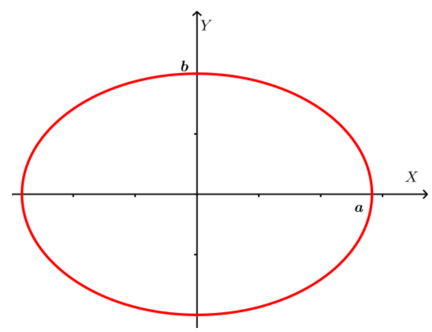


***Figura* 10.6**

Para demostrarlo, dibujaremos una circunferencia de radio a, sobre la elipse según la ***figura 10.7***

Al considerar la ecuación de la elipse se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}$$

$$y=\frac{b}{a}z$$

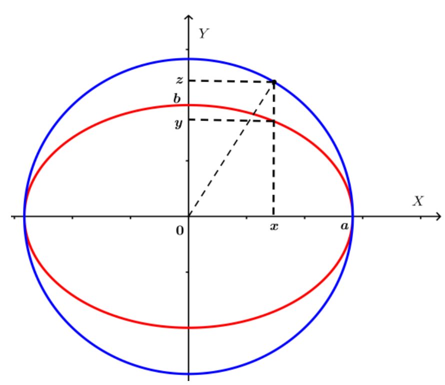


***Figura* 10.7**

Ahora consideremos los polígonos P' y P'' inscritos en la circunferencia y en la elipse respectivamente.

Los trapecios $MNRS$ y $MNPQ$ tienen una proporción entre sus alturas como $\frac{P}{R} = \frac{Q}{S} = \frac{a}{b}$

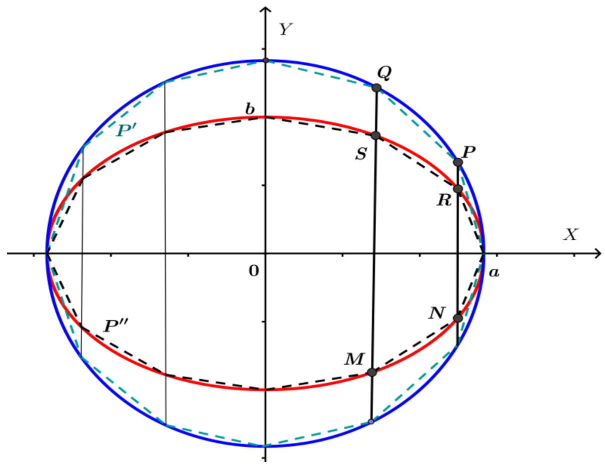


***Figura* 10.8**

Luego el área que estos trapecios encierran también tiene esta misma proporción, esto es:

$\frac{(MNPQ)}{(MNRS)} = \frac{a}{b}$, cuando estos polígonos son muy finos se aproximan al área del círculo y la elipse, esto es:

$$\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área de la elipse}} = \frac{a}{b}; \quad \text{Área de la elipse} = \frac{a}{b}(\text{Área del círculo}) = \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab.$$

10.2 La Hipérbola

Definición

Una hipérbola es un conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se denominan focos.

Con el fin de obtener la ecuación de una elipse, consideraremos como focos a los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$. Luego un punto (x, y) estará en le elipse si y solamente si:

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = k$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

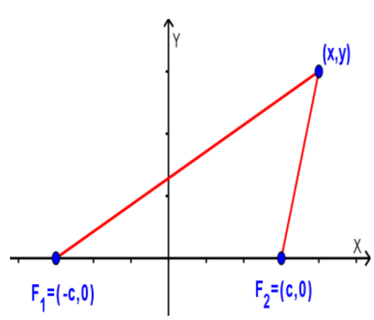


***Figura* 10.9**

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(k+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=k^2+(x-c)^2+y^2+2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=k^2+x^2-2xc+c^2+y^2+2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4xc-k^2=2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión obtenemos:

$$\left(4xc-k^2\right)^2=\left(2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$\left(4xc-k^2\right)^2=4k^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$4^2x^2c^2-8xck^2+k^4=4k^2\left[x^2-2xc+c^2+y^2\right]$$

$$4^2x^2c^2-8xck^2+k^4=4k^2x^2-8k^2xc+4k^2c^2+4k^2y^2$$

$$4^2x^2c^2-4k^2x^2-4k^2y^2=4k^2c^2-k^4$$

$$4x^2\left(4c^2-k^2\right)-4k^2y^2=k^2\left(4c^2-k^2\right)$$

Dividiendo entre $k^2\left(4c^2-k^2\right)$ nos queda:

$$\frac{4x^2\left(4c^2-k^2\right)}{k^2\left(4c^2-k^2\right)}-\frac{4k^2y^2}{k^2\left(4c^2-k^2\right)}=\frac{k^2\left(4c^2-k^2\right)}{k^2\left(4c^2-k^2\right)}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k^2}{4}\right)}-\frac{y^2}{\left(\frac{4c^2-k^2}{4}\right)}=1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(c^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)}=1$$

Haciendo $a = \frac{k}{2}$ y $b^2 = c^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$ obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

10.3 Rotación de Ejes Cartesianos

Existen ecuaciones cuadráticas en x y y a las cuales es difícil identificar inmediatamente si se trata de una elipse, una parábola o hipérbola, y esto es debido a que aparecen rotadas un ángulo dado, para introducirnos en la técnica de rotación de figuras comenzaremos por rotar un ángulo α los vectores unitario $i = (1,0)$ y $j = (1,0)$, como muestra en la siguiente figura

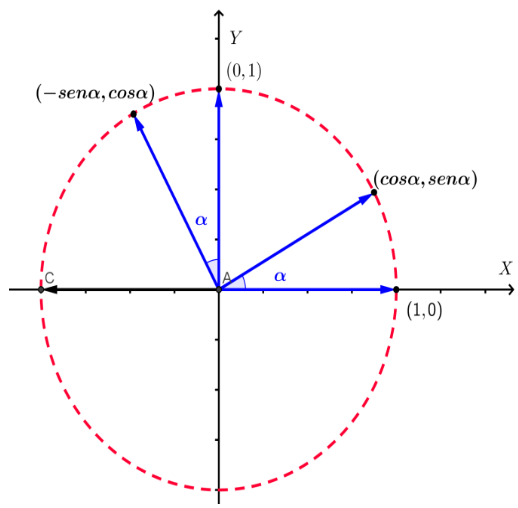


figura 10.10

Luego rotamos un vector cualquiera (a,b) el ángulo θ .

Que es equivalente a rotar el vector $(a,0)$ y $(0,b)$, luego sumarlos como muestran las siguientes figuras.

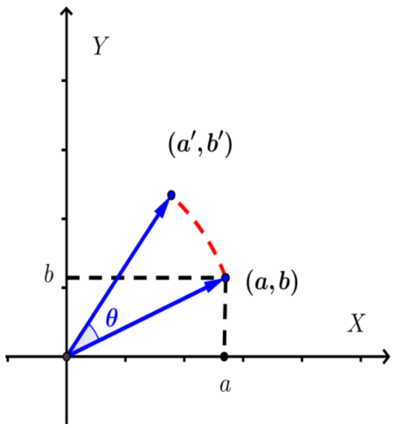


Figura **10.11**

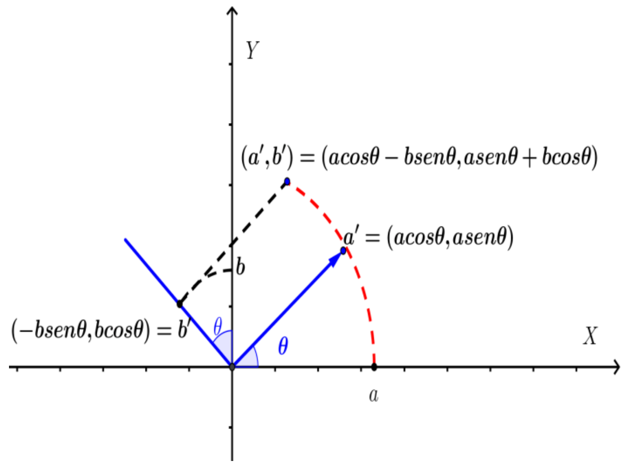


Figura **10.12**

Ejemplo 1

Aplicar un cambio de coordenadas rotando un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ a las coordenadas de la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Solución

$$x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'sen\frac{\pi}{4} = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \text{ y } y = x'sen\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo en la ecuación original.

$$\frac{(x'-y')^2}{2} - \frac{(x'^2 + y'^2)}{2} + \frac{(x'+y')^2}{2} = 1$$

Que se reduce a $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2/3} = 1$, la cual es la ecuación de una elipse.

La cual se muestra en la ***figura 10.13***

Cuya grafica es una elipse con eje mayor en el eje X', y eje menor en el Y'.

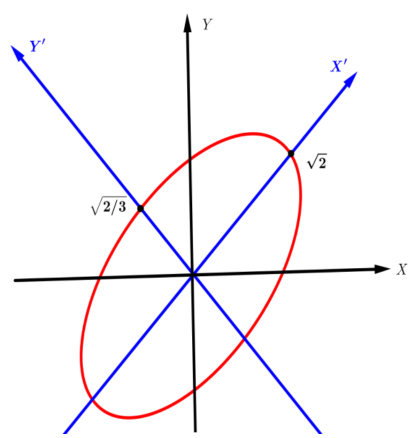


Figura **10.13**

Ejercicios

1. Construya con una hoja de papel un cono, luego con unas tijeras haz un corte. La figura que forma el corte puede ser una circunferencia una parábola o una elipse.
2. Puedes construir con una hoja de pape un cilindro, esto es un tubo como los de papel higiénico. Luego le haces cortes verticales u oblicuos, formarás circunferencias o elipses.
3. Calcula la ecuación de la elipse formada por los puntos cuya suma de distancias a $F_1 = (1,0)$ y $F_2 = (3,2)$ es igual a 12.
4. Calcula la ecuación de la hipérbola cuya diferencia de distancias a los puntos $F_1 : \ (-2,0)$ y $F_2 : \ (3,5)$ es igual a 5.
5. Calcula la ecuación de la parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $3x - 4y + 1 = 0$ y del foco $F : (1,4)$.
6. En el ejercicio anterior apliquemos una rotación de coordenadas de θ si : $\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{4}$ y obtendremos una parábola vertical.
7. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancia al punto $F(3,0)$ y a la $d : x = \dfrac{25}{3}$ recta vale $\dfrac{3}{5}$. Comprueba que es una elipse.
8. Encontrar los vértices, focos, eje mayor y excentricidad de la elipse cuya ecuación es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
9. Halla la ecuación de la elipse de focos $F : (3,0)$ y $F' : (-3,0)$ cuya suma de distancias sea 10.
10. Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias al punto $F(5,0)$ y a la recta $x = \dfrac{16}{5}$ vale $\dfrac{5}{4}$.
11. Encuentre los vértices, focos, asíntotas de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.
12. Consideremos un ángulo θ con $\tan 2\theta = \dfrac{4}{3}$ y compruebe que la ecuación

    $8x^2 \,'12xy + 17y^2 = 20$ se reduce a $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

    Sugerencia

    Para $0 < 2\theta < 90°$, obtenemos $sen(2\theta) = \dfrac{4}{5}$, $\cos(2\theta) = \dfrac{3}{5}$.

$$sen\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

13. Transforme las ecuaciones siguientes girando los ejes el ángulo que se indica, y a continuación, haga aun croquis de la gráfica de la ecuación que muestre ambos sistemas de referencia.

$a)\ xy = 4, \quad \theta = 45°$

$b)\ x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0, \quad \theta = 45°$

$c)\ 4x^2 + 4xy + y^2 + 6x - y = 0,\ \tan\theta = \frac{1}{2}$

$d)\ x^2 - 3y^2 = 5,\ \tan\theta = 3$

Bibliografía

Coxeter, M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. E.E.U.U. : Editorial Jhon Wiley & Sons.

Martin , J. (1991). *Cuors de Mathématiques*. París, Francia: Editorial Dunod.

Kline, M. (1998). Dover Publications. INC. New York, E.E.U.U.

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera “viva” en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación)