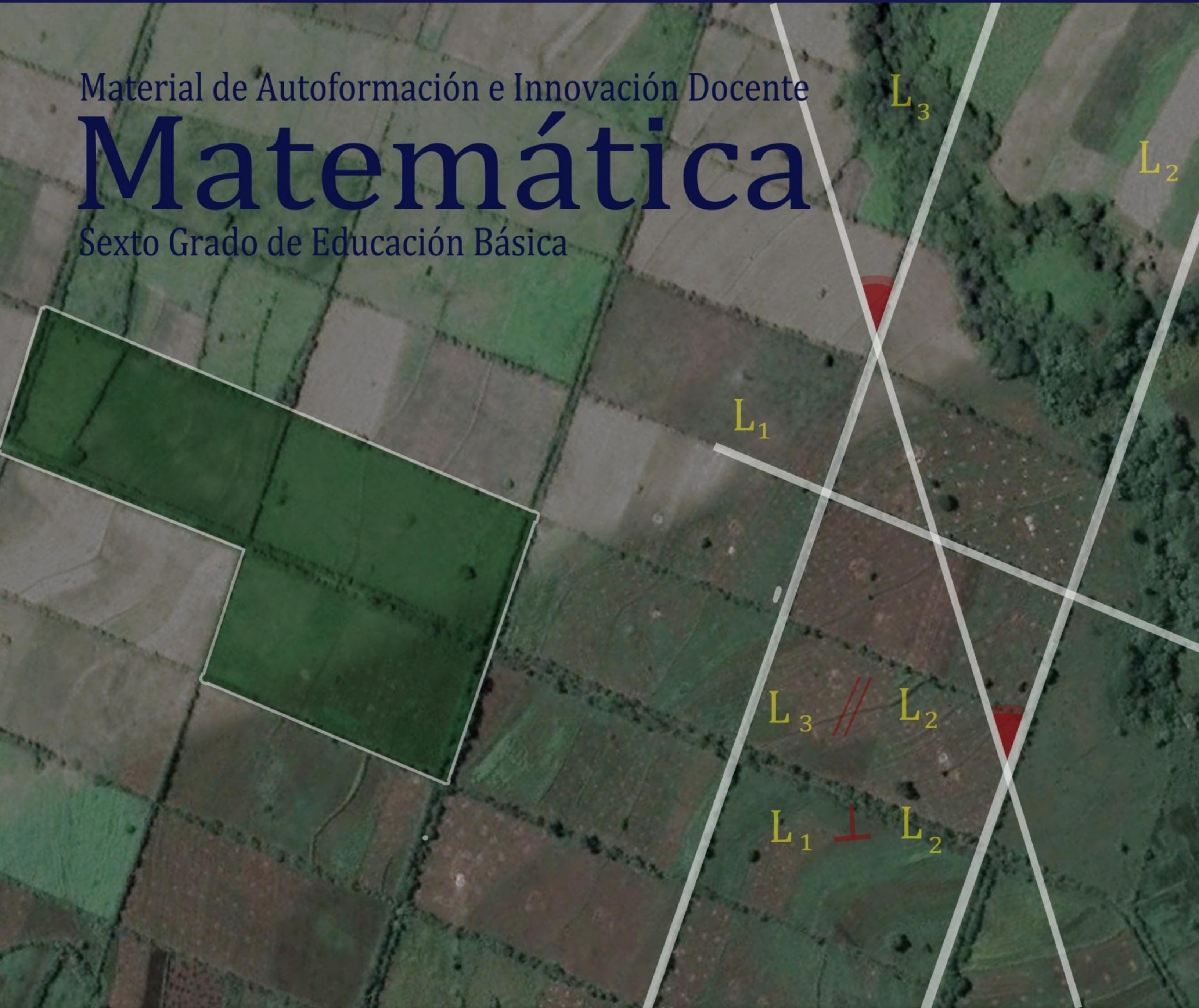
Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

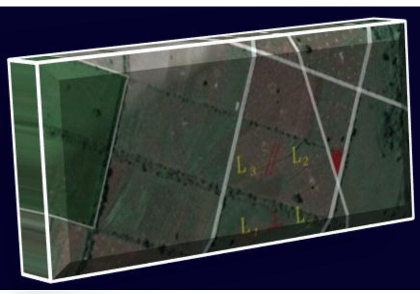
Sexto Grado de Educación Básica



Versión preliminar para plan piloto

6

Viceministerio de Ciencia y Tecnología



Captura de vista de Google Earth en las coordenadas 13° 33’ 16.43’’ N – 88° 47’ 20.20’’ O, elevación 384 m. Donde se aprecian parcelas para cultivo ubicadas en San Vicente, en la cercanía de El Arco.

Podemos distinguir la formación mosaicos constituidos por paralelogramos isométricos.

Ministerio de Educación.

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Material de Autoformación e Innovación Docente

Para Matemática 6° Grado

Versión Preliminar para Plan Piloto.

Plan Social Educativo

Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Mauricio Funes Cartagena
Presidente de la República

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Mejía
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Reina Maritza Pleitez Vásquez
Daniel Ulises Acevedo Arias
Autores

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Derechos reservados. Ministerio de Educación. Prohibida su venta y su reproducción parcial o total.

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2537-4217, + (503) 2537-4218, + (503) 2537-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo "Vamos a la Escuela" 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para los Niveles de Parvularia, Educación Básica y Educación Media. El propósito de éstos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o "pivotes" que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

I Parte

II Parte

Primera parte

¿Por qué material de autoformación e innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y su programa "Hacia la CYMA" que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular y de autoformación para docentes.

Este material de enriquecimiento curricular para docentes tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática de Sexto Grado de Educación Básica, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica. Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes[1] considerados necesarios para la educación de calidad de la niñez salvadoreña, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, creación de conocimiento y de utilización de ese conocimiento para la innovación.

Se busca que mediante la formación científica se mejoren las condiciones sociales y económicas para alcanzar una vida digna de nuestros futuros ciudadanos. Cada tema de este cuadernillo mantiene una relación con otros materiales curriculares como los programas de estudio, y la colección Cipotas y Cipotes (Guía para Docentes y Libros de texto).

El enriquecimiento que se ha hecho partiendo de temas pivotes, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento, bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener una persona para alcanzar sus propósitos de incorporarse de manera propositiva y útil a la sociedad, y sus propósitos formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos, para mejorar su calidad de vida y la de sus comunidad.

1. Un tema pivote es un contenido curricular clave, se considera que si los docentes manejan adecuadamente dichos temas, podrá desarrollar otros contenidos con facilidad y aplicar de forma más pertinente el conocimiento a la realidad en que se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje; por otra parte podrá seleccionar qué contenidos del programa desarrollar y en qué orden, de acuerdo a las necesidades e intereses del grupo de alumnos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[2], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática[3].

---

[2] José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.
[3] Miguel de Guzmán Ozámiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya[4] en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[5].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de la estructura de los cuadernillos

El cuadernillo de Matemática de Sexto Grado de Educación Básica es un material de apoyo para el docente, considerado Material de Autoformación e Innovación Docente que permite reorientar lecciones contenidas en el libro de texto de la Colección "Cipotas y Cipotes" a un entorno participativo y de investigación fundamentado en la resolución de problemas, donde el estudio de la Física, Química y Biología en conjunto con la Matemática fortalecen competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de la niñez salvadoreña. El cuadernillo de Matemática de Sexto Grado se elaboró a partir del estudio de tres bloques: Aritmética, Geometría, Medida; incorporando a estos: Álgebra y modelaje matemático Se proponen diez temas que llamamos contenidos pivotes, que por su importancia en la formación de competencias matemáticas, forman parte del enriquecimiento del libro de texto de la colección Cipotes y Cipotas, profundizando tanto en la explicación de los contenidos, como haciendo propuestas de abordaje metodológico fundamentalmente en la resolución de

[4] George Pólya (1887-1985), matemático Húngaro, How to solve it, Pricenton University Press.
[5] Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

problemas, con el propósito de que se puedan emular en el aula, para que docentes y estudiantes desarrollen habilidades intelectuales propias del pensamiento y del que hacer científico.

Las lecciones se estructuran normalmente en catorce partes, las cuales se detallan a continuación:

a. **Título.** Condensa la idea central de la lección. Se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
b. **Descripción.** Presenta todos aquellos puntos relevantes que se tratarán en la lección, haciendo énfasis en las características (generalidades, importancia, usos, etc.) que se desarrollan.
c. **Objetivos específicos.** Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.
d. **Habilidades y destrezas científicas.** Son las habilidades y destrezas que el estudiante puede adquirir al finalizar la lección.
e. **Tiempo.** Es la duración aproximada para el desarrollo de la lección. El tiempo puede variar según la planificación didáctica de la clase.
f. **Ilustración.** Imagen que busca representar de forma visual el contexto de la lección.
g. **Vocabulario clave.** En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos del contenido de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda en el momento de leer el marco teórico de la lección.
h. **Marco teórico.** Esta sección aborda los conceptos, proposiciones y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar. La información se respalda en principios, leyes, clasificaciones, características, propiedades, etc. Se acompaña de ilustraciones, esquemas, modelos y otros con la intención de que el contenido quede lo más claro posible.
i. **Actividades de Aplicación.** Las actividades de aplicación serán para contribuir al fortalecimiento del marco teórico, asimilando los conceptos de una manera práctica. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental; éstas se refieren a la ejecución de prácticas significativas de aprendizaje que van desde lo simple a lo complejo, desarrollándose con distintas alternativas de abordaje plasmando al menos tres alternativas de solución comentadas por el docente. Estas contienen estrategias de solución encaminadas a fortalecer la capacidad de razonamiento lógico.
j. **Notas históricas de la Matemática.** Es la sección que se encuentra a la par de cada actividad. Aquí se presentan comentarios, posibles respuestas a las preguntas planteadas en la actividad, ilustraciones, etc. En este espacio se abordan temas de historia de la Matemática y la Tecnología, así como aspectos destacados de la matemática (CTSA) y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales.
k. **Actividad integradora**. Las ciencias (Matemática y Ciencias Naturales) no deben estudiarse como un conjunto de saberes aislados y sin conexión. Los fenómenos de la realidad circundante no pueden ser interpretados bajo una sola visión científica, sino que su

comprensión demanda la integración de saberes de todas las áreas de las ciencias para una interpretación eficaz de tales fenómenos.

Matriz de justificación de lecciones propuestas y su ubicación en el programa de estudio de Segundo Ciclo de Educación Básica, Sexto Grado, Matemática.

LECCIÓN 1

Polígonos en la naturaleza, propiedades y mosaicos

LECCIÓN 2

Polígonos regulares diagonales, triangulación ángulos y áreas

Unidad 2: Tracemos figuras

Unidad 5: Calculemos áreas

Justificación:

El tratamiento de los polígonos sus ángulos, áreas y perímetros es una herramienta fundamental para el estudio sistematizado y avanzado de la geometría, debemos entonces capitalizar las competencias que demandan este componente de la geometría clásica.

Deberemos obtener el máximo provecho de l pensamiento recurrente y deductivo de muchas de las propiedades y problemas vinculados con los polígonos, la problematización es un elemento que hay que fortalecer ya que este tópico ha sido tratado históricamente con poca atención a las aplicaciones y riqueza de resultados.

LECCIÓN 3

Porcentajes Modelos Matemáticos

Unidad 3: Encontremos porcentajes.

Justificación:

Esta lección esta diseñada para introducir nuevos elementos que muy pocas veces se aborda en los libros úsales utilizados por los docentes, dicho tratamiento en los cuadernillos de enriquecimiento curricular evidencia las aplicaciones con un fuerte componente del enfoque CTI, mostrando desde un primer momento las riqueza y necesidad del manejo profundo de modelos matemáticos que provocan la conjetura y la estimación como recurso de formación científica.

LECCIÓN 4 Sistema de numeración maya

LECCIÓN 5 Numeración Romana

Unidad 10: Conozcamos Sistemas antiguos de numeración

Justificación:

Nuestra capacidad de transformar nuestro entorno esta vinculado a las manipulación y uso de sistemas numéricos, esta capacidad se ve reflejada en la diferente culturas desde el sistemas de numéricos como el babilonio hasta el simple pero poderoso sistema binario, esta dos lecciones nos permiten conocer cuan importante son las estructura y el número de símbolos necesarios que se utilizan para generar los sistemas de numéricos maya y romano tan utilizados y estudiados por sus transcendencia histórica.

El tratamiento de dichas lecciones permitirá a los docentes inferir el manejo de otro sistemas de numéricos poco conocidos y establecer conversiones con el sistema decimal, potenciando de esta manera la capacidad fundamentar el usos del sistema binario y decimal como sistemas de numéricos de uso universal.

LECCIÓN 6 Álgebra Introducción al álgebra. Construyamos fórmulas.

LECCIÓN 7 Ordenación de Expresiones Algébricas

LECCIÓN 8 Suma y producto de Expresiones Algebraicas

LECCIÓN 9 Fórmulas y patrones Algebraicos

LECCIÓN 10 Valor Numérico

Justificación:

Estas cinco lecciones están diseñadas para introducir el lenguaje de los modelos matemáticos de primer nivel como es el álgebra, dichas lecciones aunque no forman parte de los temas de Sexto Grado pueden ser introducidas tempranamente para fortalecer el razonamiento lógico mediante el tratamiento sistematizado estableciendo la capacidad de manejar el álgebra como herramienta en nuestra vida, para optimizar tiempo de trabajo, para asegurar resultados más fiables.

Los docentes tenemos el reto nada fácil de mostrar la utilidad de la matemática para que el estudiante entienda que le servirá para la vida. es fundamental entonces que el docente sepa que estos contenidos servirán de base para el desarrollo de conceptos que, según el marco de los modos de pensamiento, transitarán por modos de pensamiento geométrico, aritmético y estructural

Debemos asegurarnos que conforme el mundo se torna más tecnológico, el razonamiento y solución de problemas que exige el álgebra son requeridos en diversos ámbitos de trabajo.

Segunda parte

Lecciones

Contenidos trabajados con enfoque CTI.

6° Grado | Lección 1 | Unidad 2

Tiempo: Cuatro horas clases.

Polígonos en la naturaleza propiedades y mosaicos

Figura 1. La Calzada de los Gigantes. Irlanda del Norte.

Descripción del tema

Desde la antigüedad los polígonos (muchos ángulos) son formas geométricas estudiadas que presentan determinadas propiedades gráficas, las cuales es importante que el estudiantado conozca para futuras aplicaciones.

En nuestro entorno es muy frecuente encontrar objetos con forma poligonal, las estrellas de mar y algunas flores son los ejemplos más claros de seres de la naturaleza con forma de estrella. Aunque tienen ese nombre, las estrellas del firmamento son en realidad formas esféricas que tienen imagen estrellada, solo de forma aparente en determinadas circunstancias.

La carambola es una fruta cuya sección es una estrella de cinco puntas, las hojas de muchas plantas también tienen esta forma y es en esta que se puede apreciar en la mayoría de casos la imaginación de polígonos circunscritos.

Es evidente que los métodos de construcción de polígonos regulares para resolver problemas de aplicación en la industria, el diseño, la arquitectura y otras actividades se vuelve cada vez más trascendente. Asimismo, a través del conocimiento de los polígonos, el estudiantado puede comprender algunas construcciones geométricas trascendentes que se han desarrollado a lo largo de la historia de la geometría.

En cuanto a la utilización de su forma, encontramos en los polígonos una conexión general con el mundo, y es la aplicación de sus propiedades donde está la lógica del aprendizaje significativo.

Competencias por formar

- Comunicación y representación gráfica.
- Razonamiento creativo y crítico.
- El uso de instrumentos matemáticos.

Objetivos

- Ser capaz de construir triángulos y cuadriláteros, a partir de diferentes datos.
- Conocer los polígonos regulares y ser capaz de construirlos. Conocer los fundamentos teóricos de dichos trazados.
- Diferenciar polígonos regulares y estrellados, y conocer sus aplicaciones.

Presaberes

En esta sección es necesario recordarles cómo se calcula el área del rectángulo así como mostrar que el rectángulo con lados iguales es un cuadrado, fortalecer que todo cuadrado es un rectángulo, pero que no todo rectángulo es un cuadrado, fortalecer que todo cuadrado es un rectángulo, pero que no todo rectángulo es un cuadrado.

Para recordar

En la naturaleza que nos rodea encontramos numerosos ejemplos de formas poligonales: podemos descubrir hermosos polígonos con variadas formas y colores en flores, hojas, frutos... Con la ayuda de algunas de las herramientas como GeoGebra vamos a analizar algunas de estas formas, y destacar las formas matemáticas que nos sugieren. Los hexágonos más famosos de la naturaleza se encuentran en el reino animal, como el panal de cera que es una masa de celdas hexagonales construidas por las abejas para contener sus larvas y almacenes de la miel y del polen.

Un polígono es una porción del plano, cerrada, limitada por un número cualquiera de líneas rectas, cada una de las líneas se llama lado, el punto donde se cortan los lados se llama vértice. La longitud de la línea quebrada que rodea al polígono o la suma de las longitudes de los lados se llama perímetro del polígono.

¿Cuáles polígonos hemos visto alguna vez?

El triángulo: polígono de tres lados.

El cuadrilátero: polígono de cuatro lados.

El pentágono: polígono de cinco lados.

El hexágono: polígono de seis lados.

El heptágono: polígono de siete lados.

El decágono: polígono de diez lados.

"Durante aproximadamente dos mil años, el mundo matemático supuso que Euclides había dicho la última palabra y no se podía construir ningún otro polígono regular. Gauss demostró que no era así, cuando en 1,796 descubrió que un polígono regular de diecisiete lados era construible con compás".

Vocabulario Clave

Polígono convexo

a) Todos sus **ángulos menores que 180°**.

b) Todas sus **diagonales** son **interiores**.

Polígono regular

Durante casi 2,000 años, el concepto de un polígono regular permaneció tal y como lo desarrollaron los antiguos matemáticos griegos. Se puede caracterizar la definición griega como sigue: **Un polígono regular es una figura plana convexa, cuyos lados y esquinas son iguales.**

Polígono estrellado

Se construye uniendo los vértices no consecutivos, de un polígono regular convexo, de forma continua.

¿Cuáles son los elementos de un polígono?

Los lados: cada uno de los segmentos de la línea poligonal.

Los vértices: puntos de intersección entre cada dos segmentos o lados consecutivos.

Los ángulos interiores: determinados por cada dos lados consecutivos; y **los ángulos exteriores**: definidos como los suplementarios de los interiores.

Las diagonales: o cada uno de los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

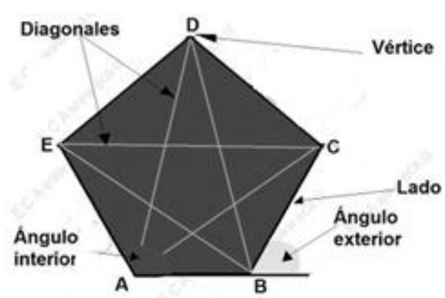


Figura 2. Elementos de un polígono.

Según el número de lados, los polígonos pueden ser ***triángulos*** (tres lados), ***cuadriláteros*** (cuatro lados), ***pentágonos*** (cinco lados), ***hexágonos*** (seis lados), ***heptágonos*** (siete lados), ***octógonos*** (ocho lados), etcétera.

Preliminares

Salvo en la flor de cuatro pétalos, no encontramos un polígono regular que se adapte a la flor. La naturaleza es perfecta, aunque el efecto del viento, del agua, etc., hace que la disposición de los pétalos de la flor no sea tan perfecta como en el modelo matemático que sigue. El resultado obtenido de insertar polígonos en las flores puede ser similar al siguiente:

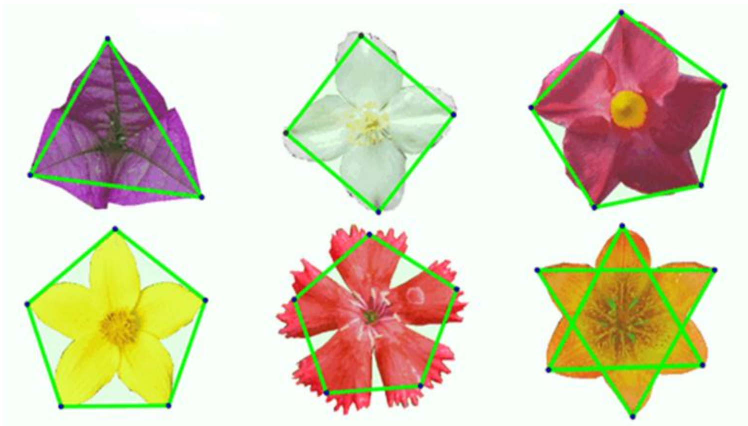


Figura 3. Polígonos en la naturaleza.

¿Cuál es el nombre de estos polígonos?

¿Cuántos y cuáles son polígonos convexos?

¿Cuántos y cuáles son polígonos regulares?

Entre todos los polígonos regulares de igual perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados. Por eso las abejas construyen sus celdillas con forma hexagonal, porque de esta manera, gastando la misma cantidad de cera para hacer las celdillas que con forma triangular o cuadrada, consiguen una mayor superficie.

Figura 4. Panal de abejas con mosaico hexagonal.

Polígonos estrellados, en el arte.

En la fotografía podemos ver cómo se encuentran frecuentemente en las decoraciones del arte islámico, la geometría de los polígonos en pavimentos, azulejos, estucos, rejerías.

Figura 5. Rosetón de la catedral de Burgos.

Figura 6. Rosetón de la catedral de Burgos, con un polígono estrellado incrustado.

Actividad 1

Indicación: En esta página va a encontrar formas geométricas que aparecen tanto en la naturaleza, como en objetos que utilizamos en la vida cotidiana. Concretamente proponga la búsqueda de estructuras geométricas con forma de polígono.

Figura 7 Foto de un narciso.

Observe el narciso, sus pétalos determinan varios polígonos regulares.

Solución

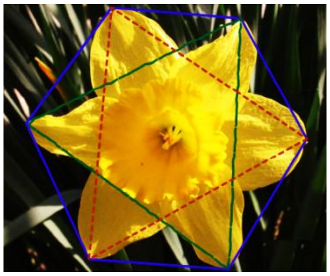


Figura 8. Hexágono circunscrito en el narciso.

Actividad 2

Indicación: En este pavimento, creación árabe, puede encontrar muchos polígonos. Busque el octógono formado por un cuadrado y cuatro hexágonos irregulares iguales; y el hexágono irregular formado por dos hexágonos y dos cuadrados.

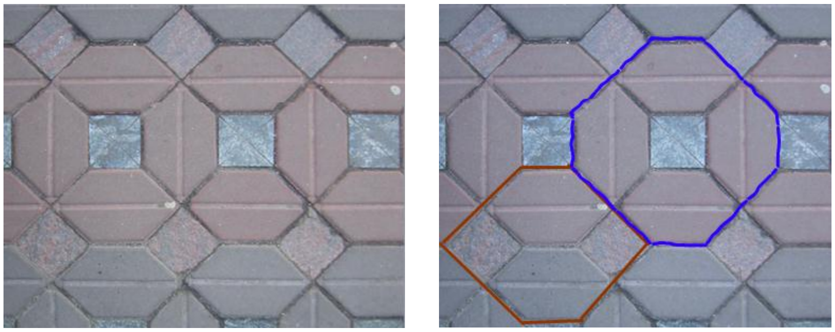


Figura 9. Pavimento creación árabe.

Actividad 3

Indicación: Este mosaico románico está formado por triángulos, cuadrados y hexágonos que determinan otro polígono regular, márcalo.

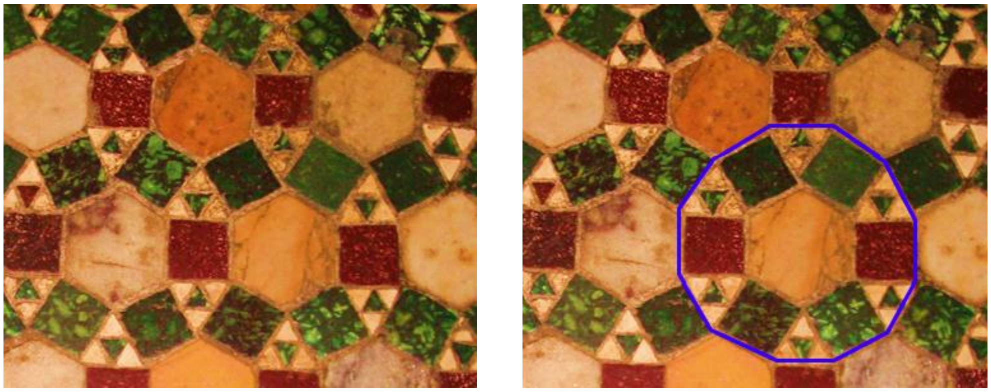


Figura 10. Mosaico románico.

Actividad 4

Indicación: El suelo está cubierto por estrellas y ¿qué logotipo?, márcalo. Después de limpiar encuentra un hexágono con la misma área que el logotipo.

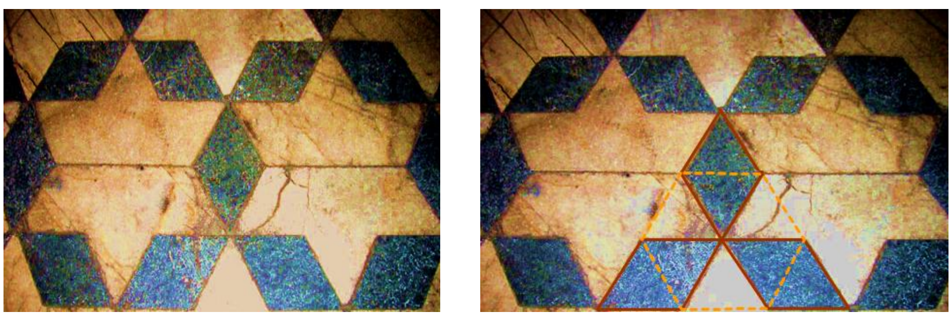


Figura 11. Mosaico con estrellas.

Actividad 5

Indicación: Diseñemos un mosaico.

Figura 12. Mosaico consecuencia de transformaciones geométricas.

Observa la secuencia de construcción de un mosaico, utilizando un polígono conocido, el cuadrado.

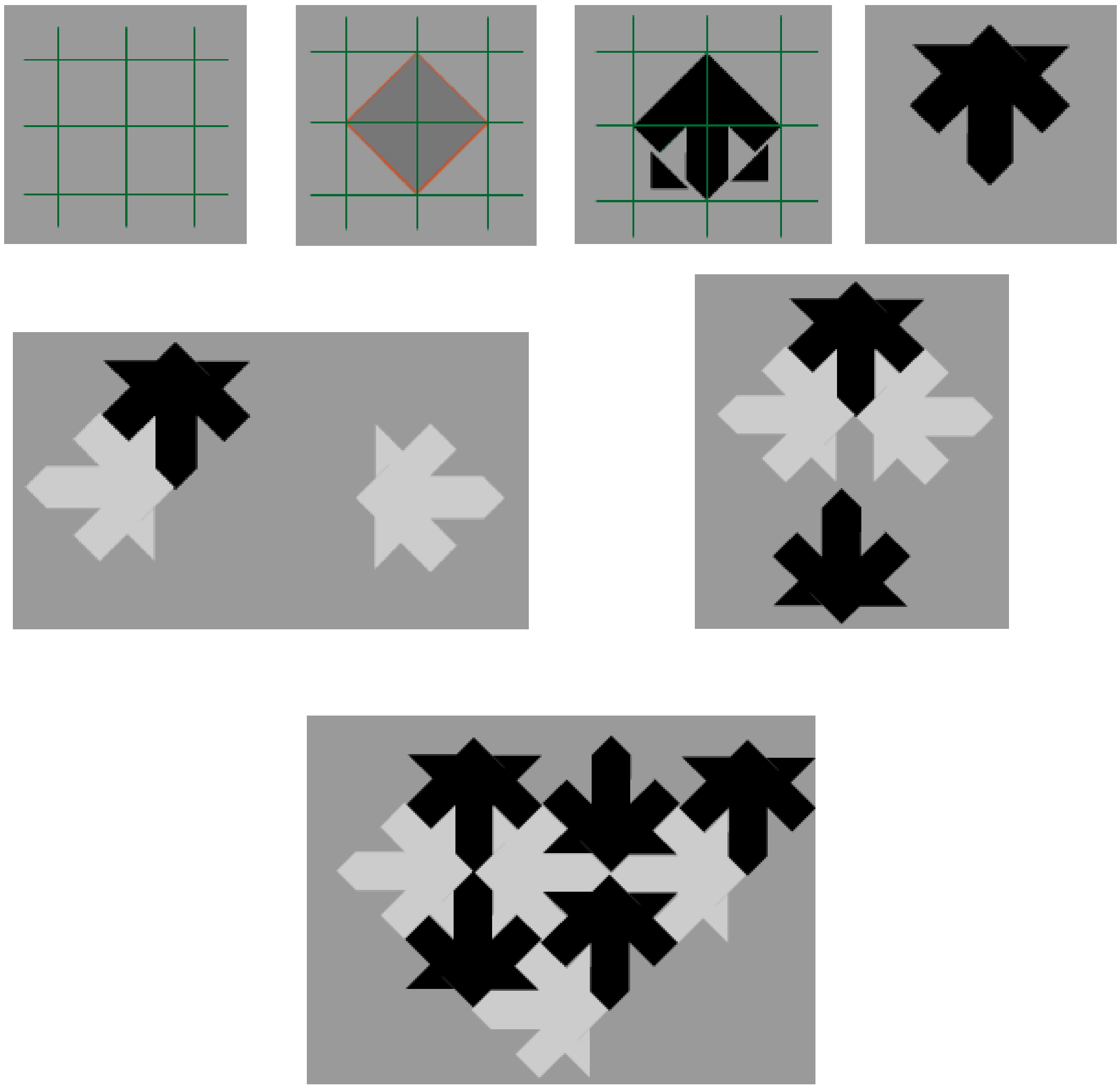


Figura 13. Proceso de construcción de un mosaico por transformaciones geométricas.

En algunas ocasiones es muy difícil reconocer el polígono inicial, sobre todo en las nuevas formas abstractas, de animales o de plantas; pero en la mayoría de los casos, los polígonos generadores son **cuadrados o triángulos equiláteros**.

Una familia de polígonos importante - Los cuadriláteros

Los cuadriláteros se clasifican en consideración a la posición que ocupan sus lados, en:

- **Paralelogramos:** Es un polígono que tiene la característica que los dos pares de sus lados son paralelos entre sí

Los paralelogramos son:

- **El cuadrado:** Polígono cuyos cuatro lados son iguales y sus cuatro ángulos son rectos.

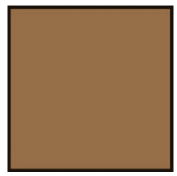


Figura 14. El cuadrado.

- **El rectángulo:** Polígono que tiene iguales dos lados, y los otros dos distintos, pero iguales entre ellos (por lo cual es usual decir que son iguales *dos a dos*) y cuyos cuatro ángulos son rectos.

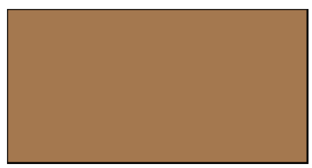


Figura 15. El rectángulo.

- **El rombo:** Es el polígono cuyos cuatro lados son iguales, pero tiene dos ángulos agudos iguales y dos ángulos obtusos iguales.

Figura 16. El rombo.

- **El romboide:** Es el polígono que tiene sus lados iguales dos a dos, pero tiene dos ángulos agudos iguales y dos ángulos obtusos iguales.

Figura 17. El romboide.

- **Trapecios:** Cuando solamente dos de sus lados son paralelos entre sí, por ejemplo

Figura 18. Clasificación usual de los trapecios.

- **Trapezoides:** Polígono en el que ninguno de sus lados es paralelo a otro.

Figura 19. El trapezoide.

Actividad 6. Síntesis conceptual

En esta actividad el profesor, luego de dar a conocer las características de este tipo de polígonos, elaborará con los estudiantes un diagrama de árbol y complementará la información.

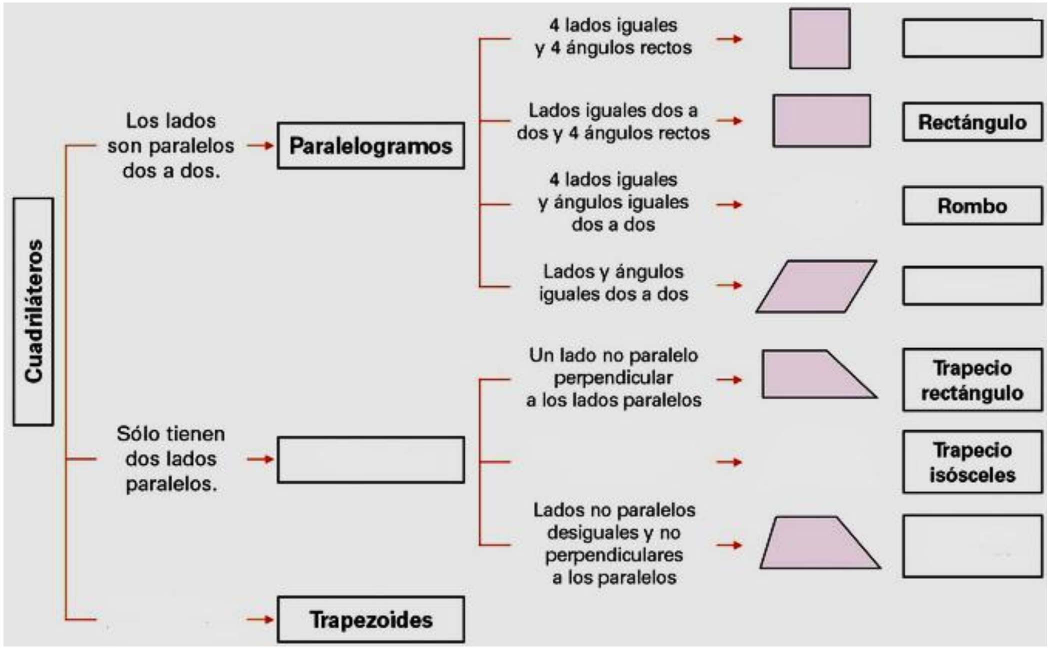


Figura 20. Síntesis conceptual de los polígonos.

Actividad 7. Presente el siguiente esquema a los estudiantes y discuta con ellos según las pistas dadas.

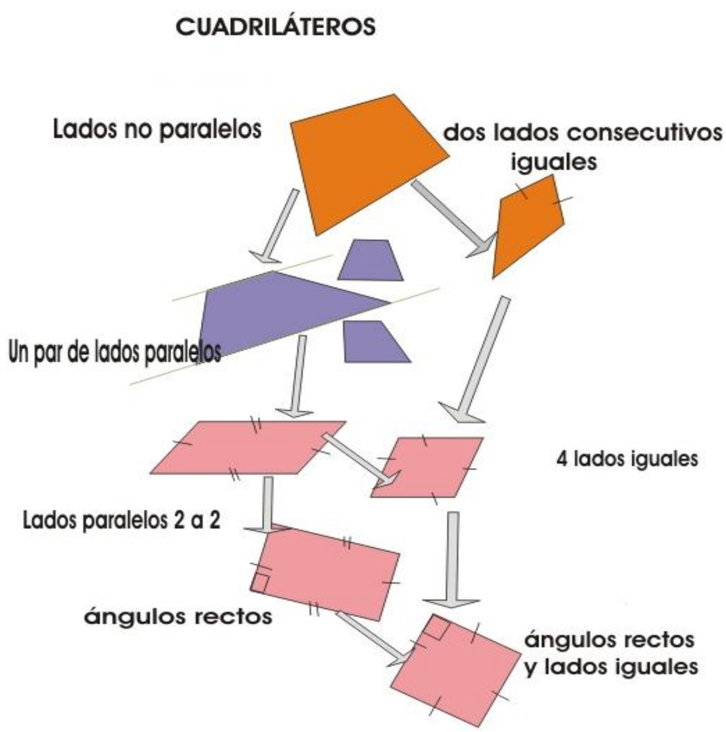


Figura 21. Desarrollo esquemático del conocimiento de polígonos.

Solución de la actividad 7.

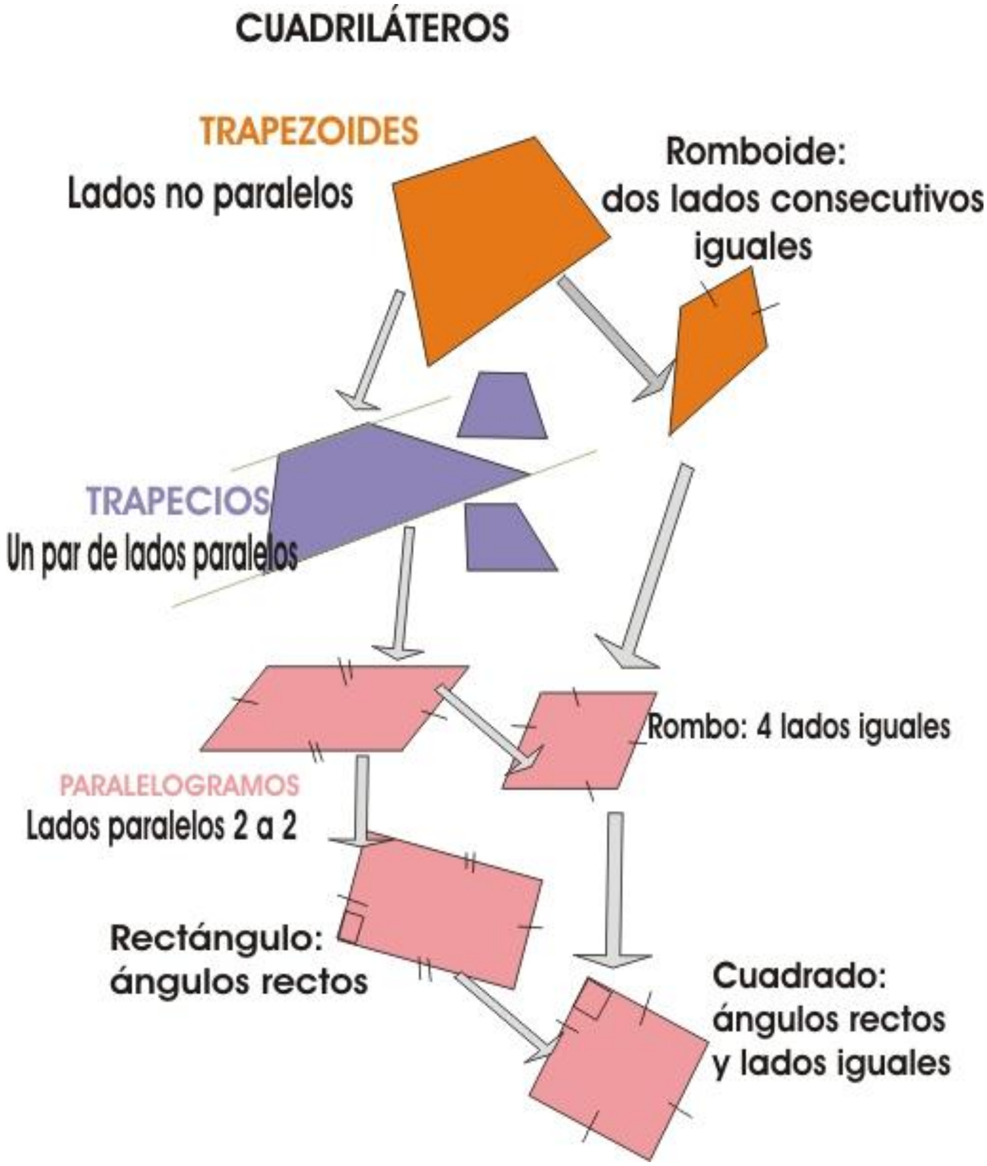


Figura 22. Solución del desarrollo esquemático del conocimiento de polígonos.

Referencias bibliográficas

1. Coxeter, H. H. (1981). *Fundamentos de Geometría*. México.
2. Kant, I. (2004). Geometría del hombre. Recuperado junio 2, 2010, a partir de http://platea.pntic.mec.es/aperez4/botanico/botanicodream.htm
3. Palmer, Claude Erwin. (1979,) *Matemáticas prácticas,* Editorial Reverte.
4. profesor en línea. (2011). Teselaciones. Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm
5. Quispe, E. (1995), *Geometría - Primer nivel, primera edición,* Lima – Perú.
6. Teselados, grupo descartes (s.f.) Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/teselacion/Indice_%20teselacion.htm.
7. Teselados, (s.f.) Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://www.geocities.com/teselados/.

Referencias de imágenes

1. Figura 1: Fuente http://t0.gstatic.com/
2. Figura 4: Fuente http://pleromahipotecado.wordpress.com/2011/05/08/%C2%BFcomo-habita-la-forma-hexagonal-en-el-cerebro-de-la-abeja/
3. Figura 20: Fuente http://boj.pntic.mec.es/~jherna34/ESO1/Poligonos/Cuadrilateros.jpg
4. Figura 21:Fuente http://1.bp.blogspot.com/_v0EGYSC3BSQ/TLcbzm97nHI/AAAAAAAAAAM/GQl-AW19iw/s1600/cuadrilateros+mary.jpg

6° Grado | Lección 2 | Unidad 2

Tiempo: Cuatro horas clases.

Polígonos regulares, diagonales triangulación, ángulos y áreas

Descripción del tema

Para los griegos se debía cumplir la exigencia de rigurosidad, no estaba permitido en las construcciones geométricas algo más que la regla y el compás. Dicha exigencia se mantuvo hasta pasada la Edad media.

En el siglo XVIII, los matemáticos no habían establecido aún con claridad cuáles eran los polígonos regulares que se construían de acuerdo con las condiciones establecidas por los griegos. De hecho, eran incapaces de determinar si existía algún modo de dibujar un polígono regular de 17 lados valiéndose sólo de una regla y un compás.

Gauss (1796), con sólo 19 años, encontró la forma de construir el heptadecágono (polígono regular de 17 lados) respetando las normas griegas. Lo conseguido por Gauss puede parecer que no tiene relevancia, pero la tiene si la comparamos con lo que consiguió Gauss. Aun así, es esta construcción la que da un impulso en 2,000 años en el análisis de los polígonos regulares.

Es este un punto de partida gracias a que Gauss se entusiasmó en definitiva por la matemática, dejando sus estudios de filosofía, seguidos hasta antes de su descubrimiento a los 19 años.

Gauss deseó que decoraran su lápida con un heptadecágono, aunque después de su muerte en 1855, no se realizó su aspiración, ya que una figura de este tipo podría ser confundida con un círculo, esto desanimó al encargado de esculpir en su lápida, quedando el deseo del genio solamente en las páginas de la historia de la matemática.

Competencias por formar

- La interpretación de gráficos, expresiones simbólicas, o ambas.
- El Cálculo simbólico.
- El Dominio lógico.
- El modelaje matemático.

Objetivos

- Saber realizar cálculos con porcentajes en situaciones de la vida cotidiana.
- Conocer el significado del IVA y cómo calcularlo.
- Saber calcular un interés simple en un préstamo o una inversión.

Presaberes

- Conocimiento de expresiones algebraicas.

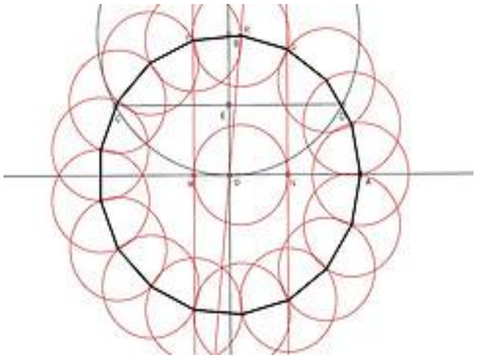


Figura 2. Heptadecágono regular formado por regla y compas

Se puede construir un heptadecágono (polígono regular de 17 lados) con regla y compás en el sentido clásico de este tipo de construcciones. A partir de este hecho demostró un resultado más general sobre construcciones con regla y compás.

Vocabulario Clave

¡Muy importante!

En un polígono regular podemos distinguir:

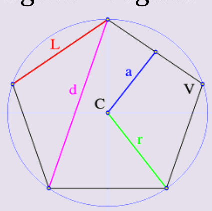


Figura 3. Partes de un polígono.

Lado(L): Cada uno de los segmentos que forman el polígono.

Vértice (V): Punto de unión de dos lados consecutivos de un polígono.

Centro(C): Es el punto central que equidista de todos los vértices.

Radio(r): Es el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.

Apotema(a): Es el segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.

Diagonal (d): Es el segmento que une dos vértices no continuos.

¿Qué es un polígono regular?

En un **polígono regular** todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos interiores son de la misma medida.

La característica de un polígono regular, está determinada por la propiedad de que pueden trazar y quedar inscrito en una circunferencia, trazo que tocará cada uno de los vértices del polígono. Y que a medida que crece el número de lados del polígono regular, su apariencia se asemeja cada vez más a la de una circunferencia. Por ello si se observa la figura del heptadecágono veremos casi una circunferencia.

Propiedades des los polígonos regulares

Dado un polígono regular este se diferencia por sus propiedades que son de gran utilidad en la resolución de problemas geométricos, es importante remarcar siempre estas propiedades y hacerlas valer en cada problema que involucre el cálculo de su área.

- ✓ Los polígonos regulares son equiláteros; todos sus lados tienen la misma longitud.
- ✓ Todos los ángulos interiores de un polígono regular tienen la misma medida, es decir, son congruentes.
- ✓ El centro de un polígono regular es un punto equidistante de todos los vértices del polígono.
- ✓ Los polígonos se pueden dividir en triángulos cuyos lados son el lado del polígono y los dos segmentos que unen el centro y los vértices (radios).
- ✓ El apotema es el segmento que une el centro y la mitad de cada lado del polígono.
- ✓ El radio es el segmento que une el centro y cada vértice.
- ✓ Todos los polígonos tienen tres o más lados.

Los ángulos de un polígono regular

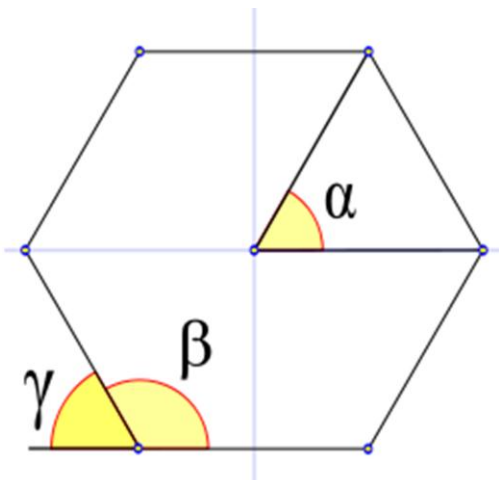


Figura 4. Ángulos de un polígono regular.

Entre los ángulos existentes en un polígono regular, podemos distinguir

a) El ángulo central α
b) El ángulo interior β
c) El ángulo exterior γ

Polígonos regulares más conocidos

- Tres lados: Triángulo equilátero
- Cuatro lados: Cuadrado
- Cinco lados: Pentágono regular
- Seis lados: Hexágono regular
- Siete lados: Heptágono regular
- Ocho lados: Octágono regular
- Nueve lados: Eneágono regular
- Diez lados: Decágono regular
- Once lados: Endecágono regular
- Doce lados: Dodecágono regular
- Trece lados: Tridecágono regular
- Catorce lados: Tetradecágono regular

Actividad 1

Determinación del número de diagonales de un polígono regular, y de paso, manipulación de los polígonos regulares.

Indicación: Dirá a sus estudiantes que respondan: ¿cuántas diagonales tiene un triángulo equilátero? posteriormente ¿cuántas, un cuadrado? ¿Cuántas, un pentágono regular? Para finalmente preguntar ¿cuántas diagonales tiene un hexágono regular? Es acá donde inicia la dificultad.

Soluciones

El número de diagonales de un triángulo es cero.

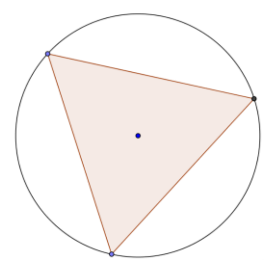


Figura 5. El número de diagonales en un triángulo es cero.

Para el cuadrado el número de diagonales es dos.

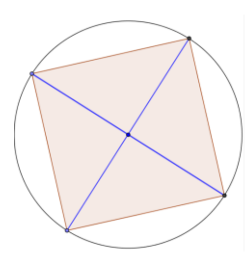


Figura 6. Número de diagonales en un cuadrado.

Continuación de la actividad

Se deberá usar colores o letras para que el estudiante verifique los resultados obtenidos.

Para el pentágono el número de diagonales es cinco.

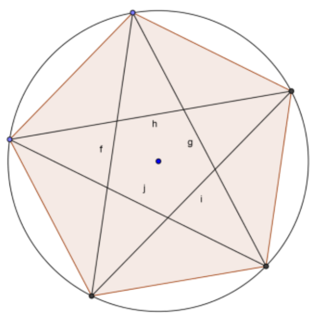


Figura 7. Diagonales de un pentágono

Para el hexágono el número de diagonales es nueve.

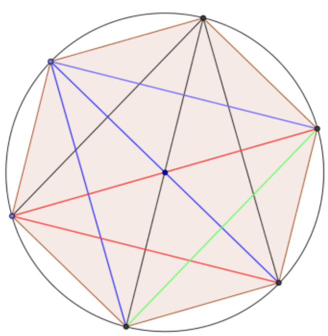


Figura 8. Diagonales de un hexágono.

Al final tendrá el siguiente patrón de datos

Triángulo: cero diagonales.

Cuadrado: dos diagonales.

Pentágono: cinco diagonales.

Hexágono: nueve diagonales.

¿Cómo lo generalizamos?

Número de diagonales de un polígono

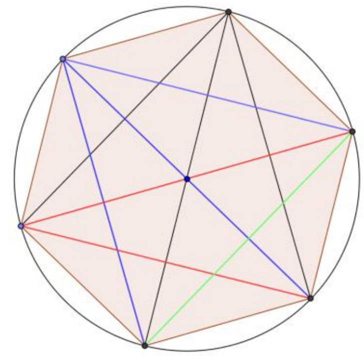


Figura 9. Representación de las diagonolases de un hexagóno.

Para determinar el número de diagonales N, de un polígono de **n** vértices realizaremos el siguiente razonamiento:

- ✓ De un vértice cualquiera partirán (n – 3) diagonales, donde n es el número de vértices, dado que no hay ninguna diagonal consigo misma, ni con ninguno de los dos vértices contiguos.

Esto es válido para los n vértices del polígono.

- ✓ Una diagonal une dos vértices, por lo que aplicando el razonamiento anterior tendríamos el doble de diagonales de las existentes. $n\,(n-3)$

Según este razonamiento tendremos que: $\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}-3)}{2}$ es el número de diagonales de un polígono regular, en realidad esta fórmula funciona para cualquier polígono convexo.

Llamemos $N = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}-3)}{2}$ el número de diagonales del polígono, podemos ver que:

Para un triángulo el número de diagonales es $\frac{3\,(3-3)}{2} = 0$

Para un cuadrado el número de diagonales es $\frac{4\,(4-3)}{2} = 2$

Para un pentágono el número de diagonales es $\frac{5\,(5-3)}{2} = 5$

Para el hexágono el número de diagonales es $\frac{6\,(6-3)}{2} = 9$

¿Cuántas diagonales tiene el heptadecágono de Gauss?

Triangulación y ángulos de un polígono regular

Los polígonos regulares tienen todos sus ángulos iguales, es fácil calcular cuánto miden sus ángulos internos y sus ángulos externos. En general, cuando se habla de los ángulos internos de un polígono, se le refiere en singular, expresada en otros términos, se dice el ángulo interno del polígono, porque es el mismo valor para todos los ángulos.

Para verificar que hablamos en los mismos términos, establezcamos que el ángulo interno de un polígono es β y que el ángulo externo es γ.

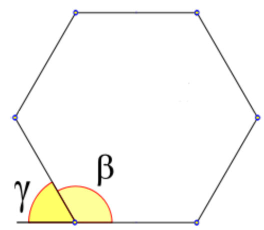


Figura 10. Angulo interior y exterior de un hexágono

Hace más de dos mil años, Euclides, matemático griego, demostró que la suma de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es exactamente 180°.

Tomemos como ejemplo un hexágono. Lo primero que hacemos es dividir al hexágono en triángulos, trazando líneas desde uno de los vértices.

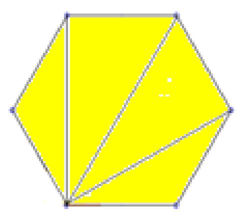


Figura 11. División de un hexágono en triángulos.

Con estas líneas que trazamos hemos distribuido los ángulos del hexágono en cuatro diferentes triángulos. Por lo tanto, podemos decir que los ángulos de los triángulos forman los ángulos del octógono. Como hemos formado cuatro triángulos y como los ángulos internos de cada uno de ellos suman 180°, sabemos que la suma total de todos los ángulos del hexágono es igual a lo que vale la suma de los ángulos en cada triángulo, es decir, 4 x 180° o sea 720°.

En efecto, la suma de los ocho ángulos del hexágono regular es de 720°. Ahora, como sabemos que todos los ángulos del octógono regular miden lo mismo, para saber cuánto mide cada uno de ellos, hay que dividir 720° entre seis que es el número de ángulos internos del hexágono regular. Luego, cada uno de los ángulos internos de un octógono regular mide 120°.

El ángulo interno y el ángulo externo son suplementarios, es decir, suman 180°. Así que para saber cuánto mide el ángulo exterior del octógono, sólo hay que restar 120° de 180°; (180°-120°). El ángulo externo de un hexágono mide 60°.

Para poder sacar una fórmula, necesitamos hacer una generalización: saber cuántos triángulos se forman cuando trazamos diagonales desde un solo vértice.

Notemos que si n es el número de lados del polígono, desde un vértice se pueden trazar (n - 3) diagonales y obtenemos (n - 2) triángulos.

Recuerde que para saber cuánto mide el ángulo interno del hexágono multiplicamos 4 x 180° (es decir, multiplicamos el número de triángulos por la cantidad que suman los ángulos internos de cada uno de ellos) y al final dividimos esta cantidad entre seis, el número de lados del hexágono.

Es eso precisamente lo que tenemos que hacer con cualquier polígono: multiplicar el número de triángulos (n- 2) por 180° y dividirlo entre el número de lados n. La fórmula general queda entonces así:

Si n es el número de lados del polígono, entonces el ángulo interno mide $\boldsymbol{\beta} = \frac{(n-2)*180°}{n}$

Actividad 2.

Indicación: En esta actividad el estudiante, con la información proporcionada por el docente completará la siguiente tabla para fijar el conocimiento, se deberá preguntar el nombre en cada caso y además, hacer un respectivo gráfico para una mejor comprensión.

Tabla1. Clasificación de polígonos.

Numero de lados	Nombre del polígono	Número de diagonales	Número de triángulos	Ángulo interno	Ángulo externo
4	Cuadrado	2	2	90°	90°
5	Pentágono	5	3	108°	72°
6	Hexágono	9	4	120°	60°
7					
8					
9					
10					

Pregunte a sus estudiantes ¿cuánto mide el ángulo interno del polígono de Gauss?

Área de un polígono regular

El área de un polígono regular está dada en función del **perímetro y la apotema, ¿sabe cómo deducir la fórmula?** ¿Sabe cómo aplicarla si le dan solamente la apotema, o el perímetro, o un lado del polígono regular? ¿Puede aplicar este conocimiento para calcular la cantidad de pintura a fin de pintar la fachada de un edificio?

Consideremos este hexágono regular

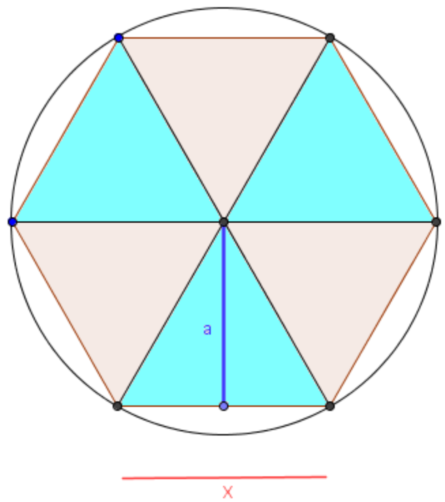


Figura 12. División de un hexágono regular.

Notemos que tenemos seis triángulos, y que el apotema de dicho hexágono es también la altura del triángulo que tiene base x, por lo tanto podemos calcular que el área del hexágono es:

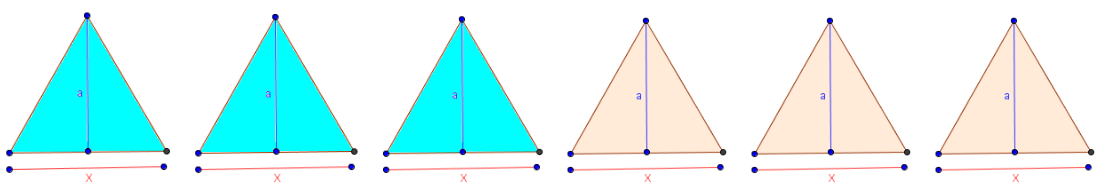


Figura13. División de un hexágono regular mediante triángulos.

Notemos que el área de cada triángulo es: $\frac{1}{2}xa$ y entonces tenemos que el área del hexágono es: $A = 6\frac{1}{2}xa{=}3xa$. Pero sabemos que x es el valor de uno de los lados, entonces $A = \frac{1}{2}Pa$ donde P es el perímetro del hexágono y a, su apotema.

Aplicaciones

Indicación: Reflexione con sus estudiantes las siguientes aplicaciones del resultado anterior.

Ejemplo

Calcular el área de un cuadrado con apotema 16 cm.

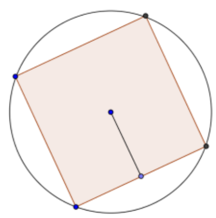


Figura 14. Cuadrado y su apotema

Según el teorema anterior con el apotema de 16 cm su lado valdría 32 cm, y su perímetro 4 (32 cm) = 128 cm, luego el área del cuadrado sería $A = \frac{1}{2}Pa$

$$A = \frac{1}{2}(128cm)(16cm) = 1024cm^2$$

Ejemplo

Calcule el área de un hexágono regular de apotema $10\sqrt{3}$ cm y lado 20 cm.

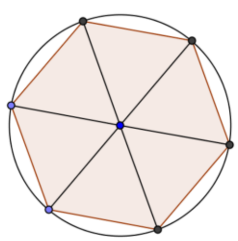


Figura15. Hexágono regular.

Nuevamente el perímetro sería

$$p = 6\left(10\sqrt{3}\ cm\right) = 60\sqrt{3}\ cm$$

$$A = \frac{1}{2}60\sqrt{3}\ cm(20cm) = 600\sqrt{3}cm^2$$

Actividad de Aplicación

Indicación: En esta actividad los estudiantes deberán resolver el siguiente problema, teniendo el cuidado de que siempre establezcan cómo se llaman el polígono que están manipulando y los elementos que contienen.

El telescopio óptico Hobby-Eberly en Fort Davis, Texas, es el más grande de América del Norte. El espejo principal del telescopio está formado por 91 espejos más pequeños que forman una figura hexagonal. Los espejos más pequeños son hexágonos con longitudes de lado de 0.5 metro y apotema $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ metro.

Halla el perímetro y el área de uno de los espejos más pequeños y el área del espejo principal.

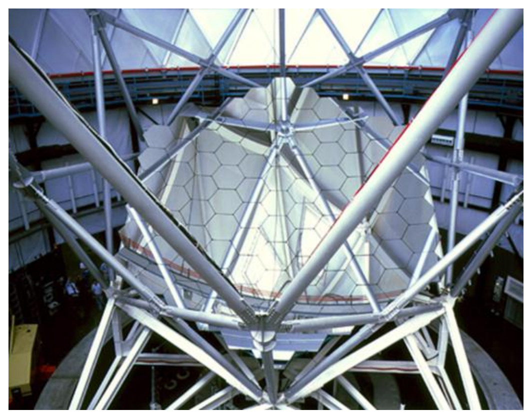


Figura 16. Telescopio óptico Hobby-Eberly en Fort Davis, Texas.

Solución

Como cada lado tiene 0.5 metro y su apotema es $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ entonces el área es $A = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{4}m^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}m^2$ donde $P = 6(0.5m) = 3m$ y $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, así el área de los espejos es $\frac{3\sqrt{3}}{8}m^2$ y su perímetro es 3m. El espejo $91\frac{3\sqrt{3}}{8}m^2 \approx 59.1m^2$

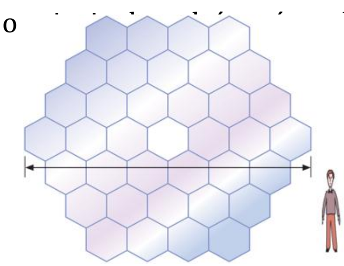
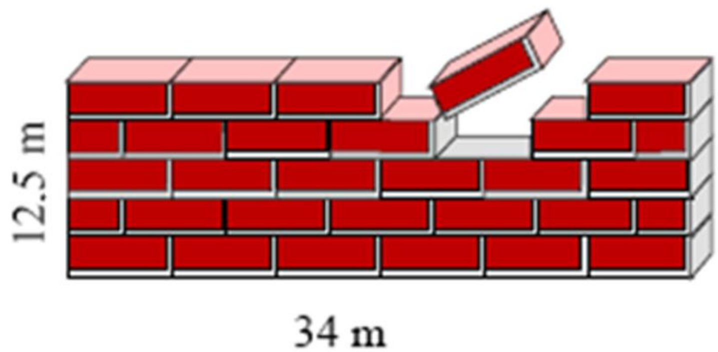


Figura 17. Comparación del tamaño del espejo con el de un hombre de estatura media.

Guía de problemas

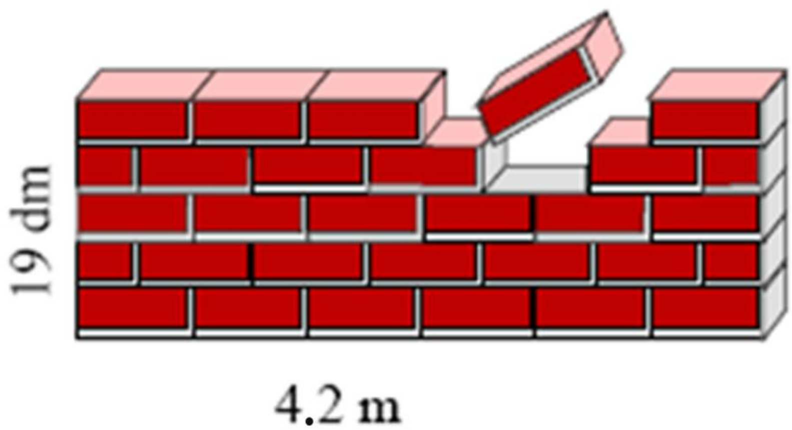
Problema 1

Queremos construir una pared de 12.5 m de largo y 34 metros de ancho, si en cada metro cuadrado se coloca 75 ladrillos, ¿cuántos necesitamos?



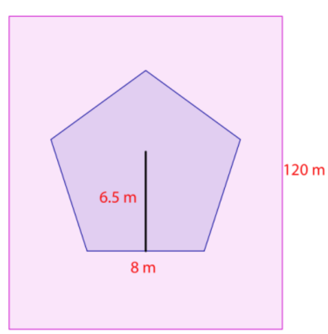
Problema 2

Para construir una pared de 19 dm (decímetros) de largo por 4.2 m de alto, se han colocado 80 ladrillos por metro cuadrado ¿cuántos ladrillos tiene la pared?



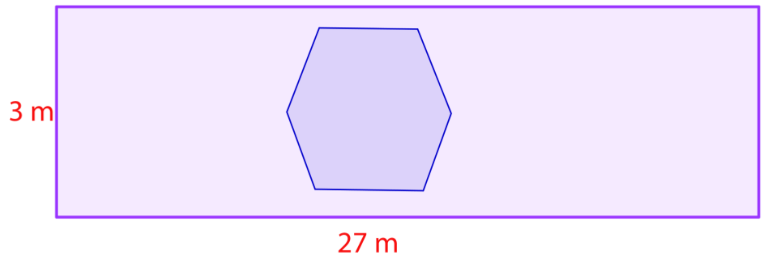
Problema 3

En el centro de un jardín cuadrado de 120 m de lado, hay una piscina que tiene forma de pentágono regular de 8 m de lado y 6.5 m de apotema. ¿Cuántos dm^2 tiene el jardín sin la piscina?



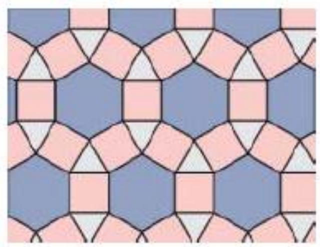
Problema 4

El suelo de una galería de 27 m por 3 m, se ha de enlosar con baldosas hexagonales regulares, de 0.9 dm de lado y 0.6 dm de apotema. ¿Cuántas baldosas se necesitarán?



Problema 5

Calcula el área de las coronas poligonales del mosaico representado (las formadas por cuadrados y triángulos que rodean a cada uno de los hexágonos). El lado del hexágono es igual al del dodecágono y mide 30 cm. La apotema del hexágono mide 25.98 cm. La apotema del dodecágono mide 55.98 cm.

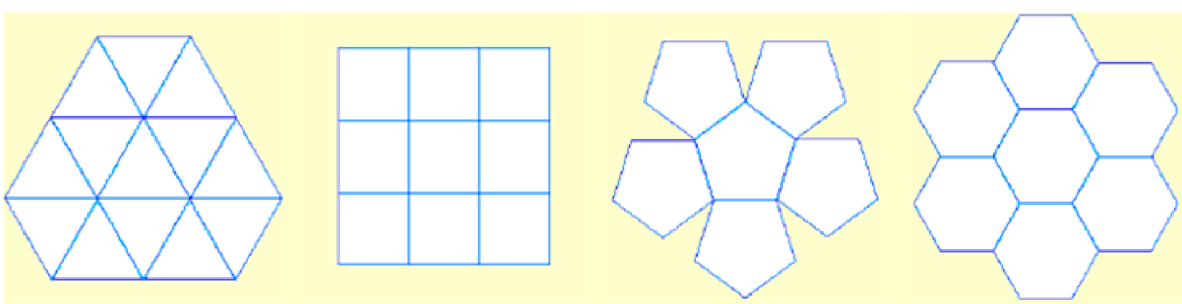


Problema 6

Una empresa fabrica sombrillas para la playa. Para ello usa tela cortada en forma de polígono regular. Calcula la cantidad de tela que necesitará para fabricar 36 sombrillas de 10 lados si sabemos que el lado mide 173 cm y su apotema mide 266.21 cm.

Problema 7 ¡Investigando!

En el arte, el diseño textil y las matemáticas, resulta muy interesante poder saber qué polígonos recubren totalmente al plano, sin dejar espacios vacíos ni superponerse entre ellos. En la siguiente escena puedes probar con algunos de ellos. ¿Cuáles te permiten recubrir totalmente el plano?



Con cualquier otro polígono regular no sería posible cubrir todo el plano, aunque sí sería posible, en algunos casos, utilizando polígonos distintos, por ejemplo, cuadrados y octágonos.

¿Es posible cubrir el plano con otro tipo de polígono? ¿Qué piensas? ¿Es posible si utilizamos más de un polígono?

Referencias bibliográficas

1. Coxeter, H. H. (1981). *Fundamentos de Geometría*. México.
2. Palmer, Claude Irwin. (1979), *Matemáticas prácticas*, Editorial Reverte.
3. Quispe, E. (1995), *Geometría - Primer nivel*, primera edición, Lima – Perú.
4. profesor en línea. (2011). Teselaciones. Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm
5. Polígonos (s.f.) Recuperado julio 28, 2010, a partir de http://www.cienciorama.unam.mx/index.jsp?action=vrArticulo&pagina=materia&aid=193
6. Teselados, grupo descartes (s.f.) Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/teselacion/Indice_%20teselacion.htm.
7. Teselados, (s.f.) Recuperado junio 3, 2010, a partir de http://www.geocities.com/teselados/ .

Tiempo: Cuatro horas clases.

Porcentajes
Modelos matemáticos

Figura 1. ¿En cuántas ocasiones hemos observado estos valores en los supermercados del país?

Descripción del tema

Muchas de las actividades cotidianas tienen vinculación directa con el manejo de información que nos permite en algún momento tomar decisiones sobre nuestro futuro, esta información muchas veces está vinculada a un número, por ejemplo, el impuesto sobre la renta, muchas veces nos preguntamos: ¿cuánto debo pagar en impuesto si tengo un salario de $350?, ¿cuánto tendría que pagar de IVA si el precio de un producto es $25? Si el precio de la gasolina aumentó en un 5% del precio anterior ¿cuál es el nuevo precio?

Estos son solo algunos ejemplos en los cuales es necesario tener conocimientos sólidos de cálculo de porcentajes, más aun cuando vemos ofertas que debemos meditar, por ejemplo:

Ha escuchado o visto las frases siguientes en el supermercado:

1) ¡Compre dos y pague tres!
2) ¡La segunda unidad a mitad de precio!
3) ¡Si compra dos, le regalamos el tercero!
4) ¡Un 25% más de producto gratis!

¿Cuál de estas es la mejor para nuestra economía?

¿Qué debo hacer para saber cómo calcular la mejor solución?

En esta lección se responderá estas preguntas utilizando la herramienta de los porcentajes.

Competencias por formar

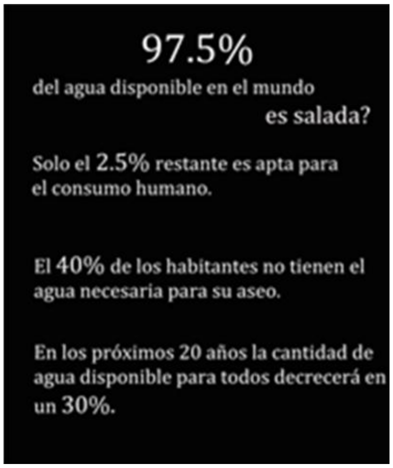
- Comunicación y representación
- Razonamiento crítico y creativo
- Dominio lógico
- Análisis e interpretación de resultados

Objetivos

- Definir y conocer los porcentajes
- Identificar la utilización de los porcentajes en la vida cotidiana
- Analiza planteamientos de problemas en situaciones para la toma de decisiones.

Presaberes

En esta sección recordar la regla de tres simple, fracciones y proporciones, sumas y productos.



Es fundamental cuidar nuestro porcentaje de agua

Actividad Comentada al estudiante

En la televisión o en la radio habrás escuchado que el banco ha tenido un 7% de beneficios, esto quiere decir que por cada 100 dólares ha conseguido siete más y ahora tiene 107 dólares. El porcentaje de beneficio ha sido el 7%. Porcentaje o tanto por ciento quiere decir lo mismo.

La ley del IVA dice que todos los comerciantes pagarán al Estado un impuesto del 13% de todas las ventas. Si una tienda ha vendido 100 dólares pagará al Estado 13 dólares; si hubiese vendido 200 dólares, tendría que pagar 26 dólares.

Ejemplos clave

Indicación: Resuelva estos ejercicios inicialmente y comparta las soluciones comentando las partes en oscuro, insistiendo periódicamente en este análisis.

La expresión 3% la leeremos como “tres por ciento”, esta expresión significa tomamos tres de cada cien partes $\frac{3}{100}$. ¿Qué significa 15% de 200? Aquí la palabra clave es “de” que se traduce “veces”, “multiplicado por” o simplemente “por”. Así, 15% de 200 es $15\% \times 200$ $15\% \times 200 = \frac{15}{100} \times 200 = 15 \times 2 = 30$. Es decir, que el 15% de 200 es 30.

¿Qué porcentaje de 500 es 75? Aquí buscamos el porcentaje que representa 75 de 500, si dividimos 75 entre 500 su resultado es 0.15 lo que como sabemos es 15/100.

El término usado en aritmética como “por ciento” deriva del idioma latín. Originalmente “per centum”, que significa “por el cien”. El porcentaje es un grupo de fracciones cuyos denominadores son 100. Dado el intenso uso del centésimo desapareció la coma decimal y se colocó el símbolo %, que se lee “por ciento” (por cien). Entonces, 0.1 y 10 % representan el mismo valor, 10/100, de igual manera 0.23 y 23% representa el mismo valor que 23/100, El primero se lee “diez centésimos” y el segundo se lee “veintitrés por ciento”.

Por lo general, el por ciento se usa para referir valores relativos. El decir “el 25 por ciento de trabajadores de una empresa no asistieron a trabajar” nos da una idea de qué parte de la tripulación se ha ido, pero no nos dice cuántos. Cuando es necesario usar un por ciento en cálculo el número se escribe en su forma decimal para evitar confusiones.

Convirtiendo todas las fracciones decimales de modo que todas ellas tengan el denominador común 100, se logra visualizar mentalmente el tamaño relativo de la parte total que está siendo considerada.

Fuente: http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas11.htm

Vocabulario

IVA: El Impuesto al Valor Agregado (IVA) es un impuesto al consumo, que se aplica a la venta de cosas, a la prestación de servicios y a las importaciones de ciertos bienes. Los impuestos al consumo gravan al acto de consumir bienes y servicios: tanto alimentos, bebidas, combustibles, servicios públicos, seguros, etc.

Tasa de Interés: En general, se denomina tasa de interés al porcentaje de capital o principal, expresado en centésimas, que se paga por la utilización de éste en una determinada unidad de tiempo (normalmente un año).

Utilidad: Beneficio que se obtiene de una cosa, para nuestro caso, la cantidad de dinero generada al final de un periodo de inversión

Actividad 1

¿Cuánto dinero tendré al final de tres años, si ahorro $100?

¿Cuánto habré ganado?

¿Cuál es mi porcentaje de ganancia al final de los tres años?

Supongamos que guardo $100 en un banco local, y me dan un interés de 5% por cada año, esto significa que al final del primer año tendré 5% de 100 esto es $\frac{5}{100}$ x $ 100 = $5

Entonces al final del primer año tendré $\$100 + 5 = 105$.

- Al final del segundo año tendré $105 + 5\%$ de 105

Esto es $105 + \frac{5}{100}$ x $\$105 = 105 + 5.25 = \$110.25$.

- Al final del tercer año tendré $ $110.25 + 5\%$ de 110.25

Esto es $110.25 + \frac{5}{100}$ x $\$110.25 = 110.25 + 5.5125 =$ $115.7625

La primera respuesta $115.7625

La pregunta ¿cuánto habré ganado?, es 15.7625

y el porcentaje ganado es $\frac{15.7625}{100} = 0.157625$

Actividad 2

Indicación: Proponga los siguientes problemas a sus estudiantes, haciendo énfasis en lo estudiado hasta las actividades anteriores, proponga la lectura de los ejemplos anteriores reflexionando las soluciones.

1. ¿Cuál es el 12% de $120?
2. Si un DVD cuesta $56 ¿cuánto deberá pagar si debo cancelar, además de los $56, el IVA?
3. ¿Qué porcentaje representa de aumento en el precio de un producto que cuesta 120 y hace un mes costaba 60?
4. ¿Qué número es mayor, el 40% de 50 o el 50% de 40?
5. ¿Qué número es mayor 40% de 50% o 40 de 50?

Solución

1. $\frac{12}{100} \times 120 = 14.4$
2. $56 + \frac{13}{100} \times 56 = \$63.28$
3. 200%
4. 4. Son iguales
5. 40 de 50

Actividad 3

Indicación: En esta actividad deberá simular el razonamiento expuesto en la actividad 1 e inducir a una fórmula algebraica que permita calcular ambas soluciones a estos problemas.

Debemos fortalecer el razonamiento inductivo y conjeturar un modelo algebraico que nos permita calcular, experimentar y, por supuesto, tomar decisiones, es necesario también explicar con precisión cada paso en el proceso de solución de este problema, se debe insistir en la asociación de cantidades o factorización, así como en la potenciación como medio de escritura.

Problema

Suponga que invierte dos cantidades iguales en dos bancos diferentes, estas cantidades son $1,000, en el banco A, la tasa de interés es de 3% mensual, y en el banco B, es de 9% trimestralmente, ¿en cuál de los bancos hay mayor utilidad al final de un año? Escribir una fórmula general para cualquier problema, a partir de los resultados obtenidos en ambos casos.

Solución de Actividad 3

Para el banco A:

a) En el primer mes se tendrá $1000 + 0.03x1000$

Es decir utilizando la propiedad asociativas, de los números 1,000(1+0.003)

b) En el segundo mes se tendrá 1,000(1 + 0.03)+1,000(1 + 0.03)0.03

   Utilizando la propiedad asociativa
   1,000(1 + 0.03) (1 + 0.03)

c) En el tercer mes se tendrá
   1,000(1 + 0.03) (1 + 0.03) + 1,000(1 + 0.03)(1 + 0.03)(0.03)
   Utilizando la propiedad asociativa
   1,000(1 + 0.03) (1 + 0.03) (1 + 0.03), notemos que hay un patrón, digamos que al final de un año tendríamos 1,000 multiplicado por (1 + 0.03) doce veces lo que es equivalente a $1{,}000(1 + 0.03)^{12}$
   Total = 1,425.760

Entonces, que tenemos una utilidad de 4,25.60 productos de los intereses

Para el banco A, haremos similar procedimiento

a) 1,000 + 0.09 * 1,000 =1000(1 + 0.09) en el primer trimestre
b) En el segundo trimestre 1000(1 + 0.09) + 1,000 (1 + 0.09)(0.09)
   1,000(1 + 0.09) (1 + 0.09)
c) Notemos que para el tercer trimestre tendremos
   1,000(1 + 0.09) (1 + 0.09) (1 + 0.09)
d) Así para el último semestre será
   1,000(1 + 0.09) (1 + 0.09) (1 + 0.09) (1 + 0.09) = 1,411.58
   Total = 1,411.58

Expresamos, que tenemos una utilidad de 411.58 de intereses

Por lo tanto nos conviene un interés de 3% mensualmente.

En efecto se puede deducir que:
$T = C(1 + I)^n$
C: Cantidad, I: Interés, n: Periodos
Así si tenemos un capital de $125 y un interés de 2%, mensualmente ¿Cuánto capital tendremos al final de 15 meses?

Sabía que…

España es el país del mundo en el que Google tiene una popularidad mayor a un 99%, cifra que siempre ha sorprendido, incluso a los propios directivos de Google. Hay países que se menciona que la cuota de mercado es bastante inferior: EE.UU. 42%; Reino Unido, 75%; Alemania, 91%. En otros lugares el uso de Google es tan bajo Así por ejemplo, en China, no supera el 21%, y Japón, no tiene ni la mitad de usuarios que Yahoo!

Investigar en internet

¿Cuántos alemanes tienen servicio de internet? Deducir con la medición, el número de alemanes que usan Google como motor de búsqueda de información.

Repetir el caso para calcular el número de chinos que usan Google como motor de búsqueda de información.

Fuente: http://www.cosassencillas.com/articulos/documental-google-tras-la-pantalla

Actividad 5.

Indicación: En esta actividad el estudiante trasladará cada uno de los datos a porcentajes, será necesario que se reflexione cada uno de los datos, haciendo comentarios sobre el futuro de la humanidad, y la necesidad de adquirir compromisos individuales para cambiar estos porcentajes, y hacer del mundo un lugar más digno y justo para vivir, se pueden hacer parejas y luego comentar los resultados.

Si reducimos el mundo a 100 personas, el resultado de un estudio hecho sobre los índices de 2001, sería como sigue:

En el núcleo urbano vivirían 47 personas, las otras 53 vivirían en aldeas alejadas, bosques y selvas.

Razas. Sesenta y uno serían asiáticos y el resto de treinta y nueve serían, trece americanos, trece africanos, doce europeos y un oceánico.

Religión. Treinta y tres serían cristianos, dieciocho musulmanes, dieciséis ateos, catorce hinduistas, seis budistas y trece en religiones minoritarias y sectas.

Sanidad. Cuarenta y tres no tendrían sistema sanitario alguno, nueve serían discapacitados, uno tendría sida, uno estaría a punto de morir y dos a punto de nacer.

Educación. Catorce analfabetos, siete nivel secundario y uno universitario.

Economía. El 60% de la riqueza estaría en manos de seis personas, cinco serían norteamericanas y una europea. Las otras noventa y cuatro personas dispondrían tan solo del restante 40%. De esas noventa y cuatro, cincuenta y tres dispondrían de dos dólares diarios para vivir, dieciocho solo tendrían un dólar diario, veintitrés tendrían algo de dinero disponible, pero no riqueza. Dieciocho no tendrían agua corriente, ni siquiera cerca de sus casas, y trece morirían por hambre.

De esos 100, sólo 25 tendrían un frigorífico con comida, cama con colchón, armario con ropa para cambiarse, y un techo u hogar digno. 20 vivirían en construcciones rústicas.

Por cada dólar que las religiones invierten en ayuda para la gente necesitada, gastan de 60 a 100 dólares para pagar edificios, salarios y otros gastos de consumo.

Fuente: http://www.seriesflash.com/n/SERIES_DE_FICCION/El_Mundo_con_100_Personas/El_Mundo_con_100_Personas.php

Indicación: Comente el siguiente párrafo con sus estudiantes y solicíteles que calculen y respondan las preguntas al final de la nota.

De acuerdo con una base de datos recopilada por la Unidad de Desarrollo Sostenible y Medio Ambiente, las inundaciones constituyen los desastres naturales más frecuentes de Centroamérica. De los aproximadamente 850 eventos desastrosos registrados entre 1960 y 1995 en Centroamérica, más de dos tercios (68%) fueron causados por inundaciones.

Si de 2010 a 2014 se pronostica un aumento de 46% respecto a los registrados entre 1960 y 1995 ¿de cuántos eventos estamos hablando?

Los daños producidos por inundaciones tienen inmensos costos sociales, económicos y ambientales, ya que, si bien es muy difícil eliminarlos totalmente, es posible minimizarlos mediante programas, proyectos y actividades que apunten a reducir la vulnerabilidad de la infraestructura económica y social.

Fuente: http://www.oas.org/nhp/inundacion%20link3.htm

Solución de Actividad Introductoria

1) ¡Compre dos y pague tres!
2) ¡La segunda unidad a mitad de precio!
3) ¡Si compra dos le regalamos el tercero!
4) ¡Un 25% más de producto gratis!

1) Si compro un artículo en 100, dos me costarían 200 y tres 300, pagaría entonces $\frac{200}{3} = \$66.7$ por cada uno.
2) Si pago 100 por el primer artículo pagaría 50 por el segundo, me estaría ahorrando $25 por cada artículo.
3) Este caso es el mismo del numeral 1, pero en otras palabras
4) Si un producto vale 100, tendría que comprar cuatro artículos para que me den uno gratis.

ÁCTIVIDAD FINAL

Indicación: Reflexione los siguientes datos con losuss estudiantes y comente estos solicitándoles que traduzcan los porcentajes a datos; analice con ellos los resultados haciendo una valoración. En la actividad evaluativa sería preciso retomar algunos datos que permitan a estudiantes hacer valoraciones y reflexiones sobre los índices porcentuales de la población; se pueden colocar, entre otra cosas, porcentajes de deforestación, criminalidad, remesas, etc.

La población de El Salvador es de 5.744,113 habitantes (censo 2007); el 86% de la población es mestiza, es decir, mezcla de indígenas con europeos. El 12% lo componen blancos de ascendencia española y de otros lugares de Europa.

Aproximadamente el 1% es indígena y muy pocos indígenas han retenido sus tradiciones. Virtualmente todos los habitantes de El Salvador hablan español. El inglés es hablado por personas en posiciones de clase alta, académicas o de negocios; otras segundas lenguas enseñadas, son el francés y el alemán.

El área metropolitana de San Salvador tiene una población de 1.566,569 habitantes. Aproximadamente el 37% de la población salvadoreña vive en zonas rurales. El ente oficial encargado de los registros y estudios demográficos es la Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC) del Ministerio de Economía.

Fuente: http://tecnologia2000.com/es/enciclopedia-general-psicologia-on-line-wiki-letra-d/35258-demografia-de-el-salvador.html

Problema 1

Analiza estos datos con tu docente, y deduce el número de habitantes al que se refiere el siguiente artículo.

"En seis departamentos, más de la mitad de los habitantes está en situación de pobreza, sea extrema o relativa, lo que es un factor de preocupación muy alto para el país (porque) se siguen notando evidentemente las desigualdades", indicó Dada. Cabañas tiene las tasas más altas, con casi 60%, seguido de Morazán (57.3%), Ahuachapán (56.5%), San Vicente (51.5%), Usulután (51.3%) y Chalatenango (50.4%).

La pobreza extrema tiene su lado más crónico en Ahuachapán, con 27%, mientras que la pobreza relativa más representativa está en Usulután, que se ubicó el año pasado en 35.5%. Para Corleto, uno de los factores que incidió significativamente en el incremento de la pobreza es el alza de la canasta básica urbana per cápita. Junto a la rural subió alrededor de 16% durante 2008. "(Está) asociado particularmente al efecto que tuvo el aumento de los precios internacionales de petróleo en costos de transporte y producción", dijo. Escrito por German Rivas, La Prensa Gráfica, jueves, 13 de agosto de 2009.

EL SALVADOR

PROYECCIONES DE POBLACIÓN

POR SEXO, SEGÚN DEPARTAMENTO

2010

DEPARTAMENTO	POBLACIÓN PROYECTADA		
	TOTAL	H0MBRES	MUJERES
TOTAL	7$_1$440,662	3$_1$662,603	3$_1$778,059
Ahuachapán	392,446	195,404	197,042
Santa Ana	667,392	328,943	338,449
Sonsonate	568,725	281,187	287,538
Chalatenango	206,890	108,508	98,382
La Libertad	880,107	433,084	447,023
San Salvador	2$_1$357,761	1$_1$126,197	1$_1$231,564
Cuscatlán	222,290	110,132	112,158
La Paz	334,821	171,743	173,078
Cabañas	160,850	82,356	78,494
San Vicente	180,793	92,346	88,447
Usulután	357,942	179,130	178,812
San Miguel	599,173	294.341	304,832
Morazán	184,757	95,674	89,083
La Unión	316,715	163,558	153,157

Fuente: proyecciones de Población de El Salvador 1995-2025.

Problema 2

Analiza los siguientes datos con tu docente y traslada a porcentajes los datos en cada caso

- Hombres: 3.382,839
- Mujeres: 3.565,234
- 0-14 años: (hombres 1.281,889/mujeres 1.228,478)
- 15-64 años: (hombres 1,942,674/mujeres 2,134,154)
- 65 años y más: (hombres 158,276/mujeres 202,602) (2007)

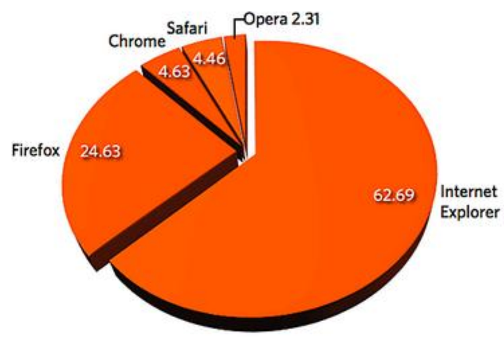
Estudios realizados por el ingeniero Stuart Solórzano, del Centro de Investigaciones Demográficas de El Salvador

Problema 3

Un navegador es un programa que permite ver la información que contiene una página web, también le permite interactuar con su contenido y navegar hacia otros lugares de la red mediante enlaces.

Los más importantes son:

- ✓ Internet Explorer
- ✓ Mozilla Firefox y Mozilla
- ✓ Opera
- ✓ Safari
- ✓ Chrome



En el mundo hay más de mil millones de personas usuarias de internet, según la consultora Market Share,

¿De cuántas personas usuarias de los navegadores estamos hablando?

Referencias Bibliográfías

1. Barnett, R. (1995). *Álgebra elemental*. Serie Schaum. McGraw Hill. México
2. Fiol, M. L. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad*. Madrid. España
3. Gobran, A. (1990). *Álgebra elemental*. Iberoamérica. México.
4. Jiménez, Douglas (2002). *Álgebra la Magia del Símbolo*, Los libros del Nacional – Editorial CEC,SA. Venezuela
5. Smith, S.; Charles, R.; Dossey, J. (1992). *Álgebra*. Addison-Wesley. México

6° Grado | Lección 4 | Unidad

Tiempo: dos horas clases.

Sistema de numeración Maya

Descripción del tema

El **sistema de numeración maya** está basado en un sistema de base 20 (vigesimal) y de base 5. Los **mayas** desarrollaron el concepto de cero. Los números mayas nacen de la necesidad de medir el tiempo, más que de una cuestión matemática. Así, los números representan los días, meses y años con el que organizaban su calendario. Con solo tres símbolos y con cantidades agrupadas en veintenas, en distintos niveles se podía representar todo tipo de cifras.

Los tres símbolos utilizados eran el punto, equivalente a uno, la raya, equivalente a cinco y el caracol, equivalente a cero. Con el sistema en base 20 y con estos tres símbolos, podemos representar sin dificultad hasta el número 19: así, con tres rayas horizontales el resultado es quince y con cuatro puntos cuyo valor es cuatro llegamos al número 19, el máximo valor por representar en cada nivel. Así cada nivel se suma al anterior, empezando desde abajo.

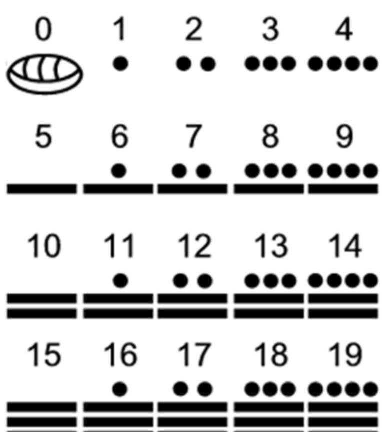


Figura 2. Números mayas del 1 al 19

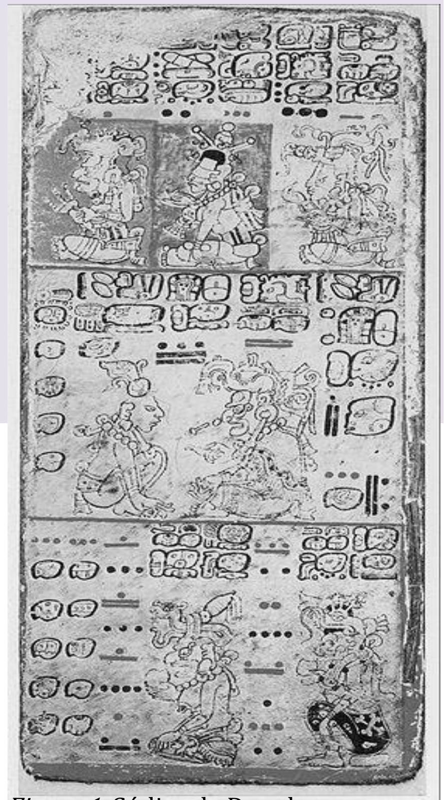


Figura 1. Códice de Dresde.

Competencias por formar

- La Comunicación y representación numérica.
- El Razonamiento creativo y crítico.
- El cálculo simbólico.

Objetivo

- Conocer los números mayas sus propiedades y relevancia en la historia de la humanidad como elemento de fechado y registro de hechos y actividades.

Presaberes

- Operaciones elementales con números naturales.

Figura 3. Códice de Dresde

Muy Importante

Nunca pueden existir más de cuatro puntos juntos, y pues cinco forman una línea.

Nunca pueden existir más de tres líneas juntas, pues cuatro líneas forman una veintena.

Debe saber que existen otros sistemas de numeración que son más sofisticados, como el sistema binario; es un sistema de numeración en el que los números se representan utilizando las cifras cero y uno, esto en informática tiene mucha importancia ya que las computadoras trabajan internamente con dos niveles de voltaje, lo que hace que su sistema de numeración natural sea binario, por ejemplo, 1 para encendido y 0 para apagado.

¿Qué debo saber del sistema de numeración maya?

Los números mayas están formados mediante tres símbolos que son los que estudiante debe conocer:

- *Figura* 4. Símbolos mayas

✓El punto que corresponde a una unidad.

✓La barra horizontal cuya equivalencia es cinco.

Los mayas con estos símbolos crearon un sistema de numeración vigesimal, es decir de 20 en 20, en el cual resalta la invención del cero, que permitió tener un valor posicional que permitió hacer el desarrollo aritmético y cálculos astronómicos, que son apreciables en su calendario.

Ejemplo: el año. ¿Cómo escribo 2012 en maya?

Primero escribamos números sencillos, por ejemplo el 20.

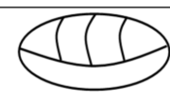
	1×20 Segundo Nivel
	0×1 En el primer Nivel

Figura 5. Representación simbólica del número 20

Ahora el 50

	2×20 Segundo Nivel
	10×1 En el primer Nivel

Figura 6. Representación simbólica del número 50

Veamos el 75

	3×20 Segundo Nivel
	15×1 En el primer Nivel

Figura 7. Representación simbólica del número 75.

Calculemos el 410

	$1 \times 20 \times 20$ Tercer Nivel
	0×20 Cuarto Nivel
	10×1 Primer Nivel

Figura 8. Representación simbólica del número 410.

Calculemos el 128,162

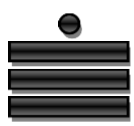
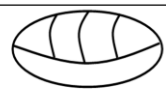
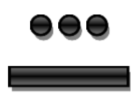
	$16 \times 20 \times 20 \times 20 = 128{,}000$ Cuarto Nivel
	$0 \times 20 \times 20 = 0$ Tercer Nivel
	$8 \times 20 = 160$ Segundo Nivel
	$2 \times 1 = 2$ Primer Nivel

Figura 9. Representación simbólica del número 128,162.

¿Cómo se escribe 2012?

	$5 \times 20 \times 20 = 2000$ Cuarto Nivel
	$0 \times 20 = 0$ Segundo Nivel
	$12 \times 1 = 12$ Primer Nivel

Figura 10. Representación simbólica del número 2012.

Actividad 1

Sus estudiantes deberán escribir en el sistema numérico maya las siguientes cantidades. Realizar esta actividad en equipos y luego someter a discusión los resultados.

a) Año de la Independencia de El Salvador.

b) Año de la firma de los Acuerdos de Paz.

c) Año de las próximas elecciones para presidente en El Salvador.

d) Número de estudiantes de tu aula.

e) Escribe tu edad en numeración maya.

Actividad 2

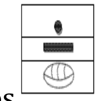
Los estudiantes descubrirán los números que están escritos en el siguiente códice:

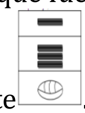
Figura 11. Códice de Dresde.

Respuestas: 2,852, 2,942, 3,232, 3,240

Actividad 3

Cada estudiante traducirá el siguiente párrafo, haciendo uso de sus conocimientos de números mayas.

El pueblo maya inventó el cero matemático, por lo menos  antes del pueblo hindú, este grandioso invento que permitió el desarrollo de la matemática maya, y por lo tanto, el desarrollo de ciencias como la astronomía, la historia y la aritmética, y es que el invento del cero solo ocurrió en las culturas mayas e hindú, en forma independiente.

El sistema de numeración maya tiene el honor de ser el sistema de numeración que fue elaborado basado en posiciones, que la humanidad produjo y fue utilizado desde aproximadamente . El cero y el sistema de posiciones apareció en Europa hasta el siglo .

He aquí una cultura que vive a través de su numeración y calendario, viva entre los logros de la humanidad y como una civilización de gran éxito en varias áreas científicas.

Actividad 4

Cada estudiante traducirá el siguiente párrafo sustituyendo las fechas en numeración maya.

El sitio arqueológico El Tazumal, ubicado en Chalchuapa, en el departamento de Santa Ana, a 85 kilómetros de San Salvador, es uno de nuestros patrimonios que conserva estructuras mayas de considerable tamaño y un museo arqueológico con vestigios valiosos de la época, entre los que resalta Xipe Totec.

Durante las excavaciones se encontraron dos cuerpos yacentes en cercanía de carbón y vasijas cerámicas. Corresponden a un niño y un adulto que vivieron alrededor del 770 d. C. y el 1,000 d. C., según estudios de carbono 14.

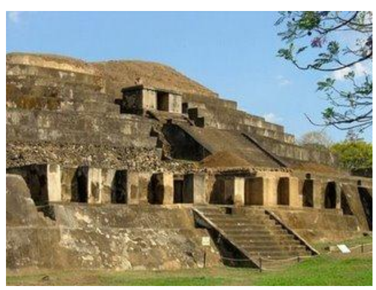


Figura12. El Tazumal

Guía de trabajo

Numeración Maya

Esta actividad se puede trabajar en equipos, solicitándoles:

a) Identificación de números mayas.

b) Traducir las cantidades a números indoarábigos.

c) Exposición de los números identificados y sus características.

Figura 13. Tabla de Cálculo

Tabla de Cálculo de los eclipses del códice Dresde, en el cual se puede ver la aplicación del cero maya.

Problema

El tablero

En el tablero maya cada uno de los niveles incrementa su valor de abajo hacia arriba, de acuerdo con la posición que tiene el número dentro de dicho tablero, como se muestra a continuación, ordenando los numerales por unidades, veintenas, veintenas de veintenas, veintenas de veintenas de veintenas, etcétera, por lo que un punto (o unidad) en cada nivel, tendría la siguiente equivalencia:

Sexta posición	$\mathbf{20^5 = 3200000}$
Quinta posición	$20^4 = 160000$
Cuarta posición	$20^3 = 8000$
Tercera posición	$20^2 = 400$
Segunda posición	$20^1 = 20$
Primera posición	$20^0 = 1$

Utilizando este método, los mayas hicieron cálculos con números por ejemplo de 8 cifras; analicemos el cálculo de $25_1673{,}295$ que se representa en numeración maya la siguiente forma, utilizando para este cálculo hasta el sexto nivel. Complete con el estudiantado la información faltante en el siguiente tablero y comente el resultado, proponga calcular cantidades como la anterior, estas pueden ser por ejemplo: 2345313, 54694342, 56402321.

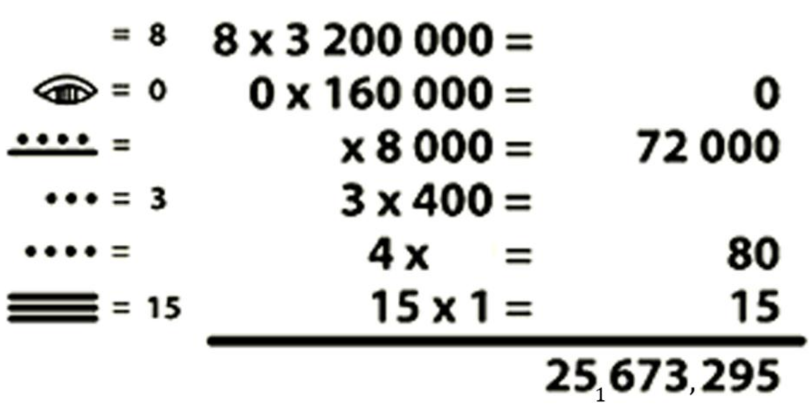


Figura 14: Cálculo maya

Referencias bibliográficas

1. Almaguer, B. (2004), *Matemáticas 1*, Editorial Limusa, S.A de C.V, Grupo Noriega Editores, México.
2. Goñi, J.(2006), *Matemáticas e interculturalidad*, Editorial GRAO, de IRIF. Barcelona.
3. Solana, Nelly Gutiérrez, *Códices de México.* Panorama Editorial, México.
4. Fernández, A. (2004), *Así vivieron los mayas*, Panorama Editorial S.A de C.V., México.

6° Grado | Lección 5 | Unidad 10 **Tiempo: Cuatro horas clases.**

Números Romanos

Figura 1. Calendario romano en piedra
Observe la numeración romana inscrita.

Descripción del tema

Las investigaciones arqueológicas afirman que el sistema numérico romano fue deducido del sistema numérico etrusco, civilización que se desarrolló en Italia entre los siglos VII y IV antes de Cristo. Los romanos utilizaron este sistema, que se basaba en el método aditivo. I y I eran II, V y II eran VII, y II y II eran IIII. El número para 30 era XXX y el ocho era representado como VIII. Sucesivamente, los romanos empezaron a utilizar el método sustractivo, en el que un número anterior resta su cantidad a la siguiente.

Así, en lugar de escribir 9 como la suma de 5 y 4 (VIIII) se escribió como la resta de 10 menos 1 (IX). La ventaja de este método era que acortaba la notación de los números, pues se usaban menos símbolos. De esta forma el número IIII pasó a ser IV. El sistema sustractivo fue utilizado en los tiempos del Imperio romano. Pero si se había hecho esta reforma, ¿por qué se utilizó la notación del IIII en vez del IV en los relojes medievales? De hecho, el 4 es el único número que se representa de esta forma, pues el nueve es representado como IX, y no como VIIII

El sistema romano de numeración tiene el mérito de ser capaz de expresar los números del 1 a 1$_{1}$000,000 con sólo siete símbolos: I para el 1, V para el 5, X para el 10, L para el 50, C para el 100, D para el 500 y M para el 1,000. Es importante acotar que una pequeña línea sobre el número multiplica su valor por mil. Actualmente los números romanos se usan para escribir la historia y con fines decorativos. El sistema de numeración romana tiene el inconveniente de no ser eficiente para hacer cálculos, entre estos, las cuatros operaciones básicas.

Todo el mundo occidental conoce el sistema numérico romano. Se enseña en las escuelas, se puede ver en créditos de muchas películas, marca los siglos y se usa para distinguir reyes y papas del mismo nombre. Los números romanos también se pueden encontrar con mucha frecuencia en los relojes. Sin embargo, a veces vemos una pequeña peculiaridad. Por lo general se enseña que el número 4 debe ser escrito IV, pero en muchos relojes este número está representado como IIII, por las razones descritas anteriormente.

Competencias por formar

- La Resolución de problemas.
- La Comunicación y representación numérica.
- Razonamiento creativo y crítico.
- El cálculo simbólico.

Objetivo

- Conocer los números romanos y sus propiedades, así como su enorme contribución en el fechado de actividades y hechos históricos de la humanidad.

Presaberes

- Operaciones básicas aritméticas.

Figura 2. Reloj que mide el tiempo con números romanos

Indicación: Hoy se siguen empleando números romanos obligatoriamente para los siglos, como en este ejemplo:

(1) Alex Ross, periodista y escritor, acaba de publicar un resumen sobre la historia del siglo XX a través de la música.

(2) Mucha gente conoce en Madrid los restos de la famosa cerca de **Felipe IV** que están junto a la Puerta de Toledo. Pero lo que no todo el mundo sabe es que existen más restos de esta antigua muralla de adobe y piedra que encerraba Madrid allá por el año 1625.

(3) **Pedro II** de Brasil, "El Magnánimo" (1825-1891), se llamaba realmente Pedro de Alcántara Juan Carlos Leopoldo Salvador Bibiano Francisco Javier de Paula Leocadio Miguel Gabriel Rafael Gonzaga de Borbón Bragança y Habsburgo y fue el segundo y último emperador de Brasil, de 1831 a 1889.

Por último, conviene aclarar que en nuestra tradición ortotipográfica los números romanos se escriben en mayúsculas.

¿Por qué estudiar números romanos?

La importancia de los números romanos está en su elegancia, pues se utiliza para indicar los siglos en la historia de la humanidad, en los actos de las obras de teatro, en los nombres de emperadores, reyes y papas, para designar capítulos en una obra escrita, en los congresos, asambleas y para decir la fecha en que se produce una película.

¿Por qué no los usamos en otras actividades?

El motivo fundamental del porqué la numeración romana sucumbió frente a la arábiga, fue la dificultad para realizar operaciones básicas. Se pretende que cada estudiante desarrolle las actividades que se proponen en acompañamiento de su docente, por lo que es necesario puntualizar en cada momento las reglas para la escritura en el sistema numérico romano.

El Sistema de numeración romana

Los símbolos que se usan son los siguientes:

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1,000

Los primeros diez números serían como siguen:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.

Con estos números ya notamos algunas particularidades. Como vemos, para escribir 2 y 3, basta con poner dos y tres unos, II y III, pero eso no ocurre en el 4. Esto es así porque **no se pueden poner más de tres números consecutivos del tipo I, X, C o M**. Del tipo V, L y D sólo se puede poner uno. Cuando un número está a la izquierda de otro mayor, está restando (IV = 4), pero esto sólo se cumple en las siguientes condiciones:

I sólo puede restar a **V y X**
X sólo puede restar a **L y C**
C sólo puede restar a **D y M**

Veamos las propiedades de los números romanos

Los números romanos disponen de cinco reglas fundamentales:

1ª Regla. Los números romanos emplean siete letras mayúsculas que representan los siguientes valores:
$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$

2ª Regla. Las letras mayúsculas I, X, C y M podrán aparecer hasta un máximo de tres veces en forma consecutiva.

Ejemplo de esta regla:

1) III = 3
2) XXX = 30
3) CCC = 300
4) MMM = 3000

3ª Regla. Al ubicar las letras I, X y C al lado izquierdo de otra de mayor valor, le restará su valor.

Ejemplo de esta regla:

1) IX = 9, (10 - 1)
2) XL = 40, (50 - 10)
3) XC = 90, (100 - 10)

4ª. Regla. Las letras ubicadas a la derecha de otra mayor suman su valor.

Ejemplo de esta regla:

1) CL = 150, (100 + 50)
2) VII = 7, (5 + 1 + 1)
3) XXI = 21, (10 + 10 + 1)

5ª. Regla. Una línea colocada sobre una o varias letras multiplica por mil su valor.

Ejemplo de esta regla:

1) $\overline{\text{IV}}$ = 4,000, (4 x 1,000)

2) $\overline{\text{LXX}}$ = 70,000, (70 x 1,000)

Actividad 1

Indicación: Los estudiantes deberán establecer en el sistema numérico decimal a qué época corresponden los hechos históricos, y posteriormente hacer una cronología de las siguientes notas históricas.

a) El siglo V, Esquilo, Sófocles y Eurípides, en la tragedia. Aristófanes en la comedia. Mirón, Fidias y Polícleto en escultura, e Ictinos y Calícrates en arquitectura. Desarrollo de la cerámica ática: perspectiva, sombreado y expresión de las emociones. Heródoto y Tucídides.

b) En el siglo XX finaliza la II Guerra Mundial, con el lanzamiento de bombas atómicas sobre Hiroshima y Nagasaki. En la Primera y la Segunda guerra se calcula que pudieron morir cerca de 100 millones de personas.

c) En el siglo XIX se produjeron: la Abolición de la esclavitud en los EE.UU., el fin del reinado de Isabel II en España y la Independencia de El Salvador.

d) América fue descubierta en el siglo XV.

Soluciones

a) Entre los años 400-499.

b) Entre los años 1900-1999.

c) Entre los años 1800-1899.

d) Entre los años 1400-1499.

Tabla 1. Números Romanos

1 = I	2 = II	3 = III	4 = IV	5 = V	6 = VI
7 = VII	8 = VIII	9 = IX	10 = X	11 = XI	12 = XII
13 = XIII	14 = XIV	15 = XV	16 = XVI	17 = XVII	18 = XVIII
19 = XIX	20 = XX	21 = XXI	29 = XXIX	30 = XXX	31 = XXXI
39 = XXXIX	40 = XL	50 = L	51 = LI	59 = LIX	60 = LX
61 = LXI	68 = LXVIII	69 = LXIX	70 = LXX	71 = LXXI	74 = LXXIV
75 = LXXV	77 = LXXVII	78 = LXXVIII	79 = LXXIX	80 = LXXX	81 = LXXXI
88 = LXXXVIII	89 = LXXXIX	90 = XC	91 = XCI	99 = XCIX	100 = C
101 = CI	109 = CIX	114 = CXIV	149 = CXLIX	399 = CCCXCIX	400 = CD
444 = CDXLIV	445 = CDXLV	449 = CDXLIX	450 = CDL	899 = DCCCXCIX	900 = CM
989 = CMLXXXIX	990 = CMXC	999 = CMXCIX	1,000 = M	1,010 = MX	1,050 = ML

Actividad 2

Cada estudiante traducirá los siguientes párrafos con fechas en números romanos al sistema decimal. El nombre oficial de “El Salvador” fue aceptado en la primera Constitución del país, promulgada el XII de junio de MDCCCXXIV. Sin embargo, la usanza de hacer contracción de la primera palabra provocó que fuera escrito como “República del Salvador”. Incluso, esa misma carta magna estipulaba que “El Estado se denominará Estado del Salvador” (art. VII).

Sería hasta el VII de junio de MCMXV, por medio de Decreto Legislativo, que fue establecido definitivamente como nombre oficial “El Salvador”. A pesar del precepto, en documentos oficiales internacionales continuaba la práctica de omitir la primera parte del nombre. Para MCMLVIII, por gestiones del secretario de Cultura, Jorge Lardé y Larín, se emitió otro Decreto Legislativo con fecha XXIII de octubre en el que se añadió al texto de MCMXV la prohibición de suprimir la palabra “El” cuando fuera asociado a las palabras “República” o “Estado”. Asimismo, se determinó la reserva del derecho a contestar cualquier documento o suscribir cualquier convenio donde apareciese escrito incorrectamente el nombre oficial de la república.

Así, El Salvador es un Estado soberano localizado en América Central. El territorio que comprendía, en su mayor parte, el territorio de El Salvador (Intendencia de San Salvador), adquirió su independencia de España en MDCCCXXI junto a la Capitanía General de Guatemala, y dejó de ser parte de la República Federal de Centroamérica en MDCCCXXXIX. Anteriormente, en la época precolombina, buena parte de la zona comprendida al oeste del río Lempa era conocida con el nombre de Cuscatlán, que significa “Lugar de joyas o de collares”, en lengua nahuat.

Una guerra civil de XII años, finalizó el XVI de enero de MCMXCII, cuando el gobierno y el FMLN firmaron los Acuerdos de Paz que dieron lugar a reformas militares, sociales y políticas, tan fundamentales para el desarrollo de nuestro país.

ACTIVIDAD FINAL DE SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANA

Indicación: El estudiantado pasara todos los números del sistema decimal al sistema de numeración romana.

En el actual El Salvador, los nahuat fundaron alrededor del año 1200 d. C., el Señorío de Cuzcatlán, núcleo que se extendía desde el río Paz hasta el río Lempa, en otros términos, cubría gran parte del occidente y centro de El Salvador.

En 1524, diversos pueblos nahuat fueron conquistados por Pedro de Alvarado y en 1528 fue conquistado el Señorío de Cuzcatlán; para 1530 habían sido conquistadas las poblaciones pipiles en Honduras y en Nicaragua.

Por la colonización y asimilación española se diezmaron las poblaciones indígenas en Guatemala, Honduras y Nicaragua. Pero pese a ello aun sobreviven las culturas prehispánicas en El Salvador.

En 1932 se produjo un levantamiento indígena-campesino que fue reprimido cruelmente por el gobierno del general Maximiliano Hernández Martínez, que provocó la muerte de miles de indígenas nahuatt. Debido a esto, muchas personas abandonaron su lengua y tradiciones.

En la actualidad la secretaría de Cultura (Secultura) de la Presidencia de la República hace todo lo posible para que la población indígena mantenga viva su lengua y tradiciones.

Guía de trabajo

Problema 1

Identifica el número inscrito en el siguiente monumento de arte moderno, para ello será necesario un pequeño repaso de la teoría expuesta por el profesor.

Problema 2

El tribunal supremo de Nueva Gales del sur, en Sídney, Australia. El número romano escrito representa la fecha de su construcción. ¿Puedes decir en qué fecha fue construido?

Durante los siglos XIX y XX era costumbre esculpir la fecha de construcción de los edificios.

Problema 3

Palillos y números romanos

Esta actividad se puede hacer en equipos fomentando la participación, recordar que se pueden crear potencias, radicales y que se necesita que el docente haya resuelto al menos un par.

1. Cambia de lugar 1 de los 12 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 6 - 4 no es 9. VI−IV=IX	**2.** Cambia de lugar 1 de los 13 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 5 no es igual a 2 + 8. V=II+VIII	**3.** Cambia de lugar 1 de los 7 palillos y haz que queden formada una igualdad verdadera.; porque 7 no es igual a 1. VII =I
4. Cambia de lugar 1 de los 9 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 1 - 3 no es 2. I−III=II	**5.** Cambia de lugar 1 de los 7 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 10 - 1 no es 1. X−I=I	**6.** Cambia de lugar 1 de los 12 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 4 + 3 no es 5. IV+III=V
7. La siguiente igualdad es verdadera porque $4^2 = 16$; sin embargo cambiando 2 palillos de posición es posible encontrar otra igualdad verdadera. $IV^{II}=XVI$	**8.** Cambia de lugar 1 de los 17 palillos y haz que quede formada otra igualdad verdadera. XII+VIII=XX	**9.** Cambia de lugar 2 de los 12 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 11 + 2 no es 6. XI+II=VI
10. Cambia de lugar 2 de los 14 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 12 - 5 no es 16. XII−V=XVI	**11.** Cambia de lugar 2 de los 14 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 8 + 2 no es 6. VIII+II=VI	**12.** Cambia de lugar 1 de los 14 palillos y haz que quede formada una igualdad verdadera, porque 15 no es igual a 4 + 6. XV=IV+VI

Referencias bibliográficas

1. Carrillo Z., Ricardo. (s.f.) *Historia de los números*, Matemática On-Line, www.math-online.cl/htmltonuke.php?, Documento Internet de siete páginas.
2. Castro, Juan Lirio, (s.f.) *Proyecto Kovalevskaya*: *investigación matemático-literaria en el aula de primaria,* Publicación del Ministerio de Educación de España.
3. Martín, J. (1996) *Matemáticas viva 3*: Educación Básica, primer ciclo, Primera Edición, Editorial Andrés Bello, Barcelona, España.
4. Perelman, Y. (1978) *Álgebra Recreativa* Ciencia popular, Editorial Mir, Moscú.
5. Renno M. (S.f.) Contributions To Civilizations, The Origin of the Numeral System, www.leb.net/fchp/num2.jpg, Documento Internet de dos páginas.
6. Smith, Stanley, (1992) *Álgebra,* por Addison-Wesley Iberoamericana, S.A,, Pearson Educación, México.

Referencias de imágenes

1. Figura 1: Fuente http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/b/b6/20070404202954%21Kalender.jpg

Tiempo: cuatro horas clases.

Álgebra
Introducción al álgebra

Figura 1. Al-Khwarizmi en frente de la Facultad de Matemática de Amirkabir, en la Universidad de Tecnología de Teherán, Irán, padre del Algebra (800-847).

Descripción del tema

Google y el Álgebra

El origen del buscador Google es ya bien conocido. Fue diseñado en 1998 por Sergei Brin y Lawrence Page, dos estudiantes de doctorado en Informática de la Universidad de Stanford: Brin se había graduado en Matemática, y Page, en Informática. Dos jóvenes que hoy se han convertido en multimillonarios. El curioso nombre del buscador es una variación del término **googol.**

El término gúgol (en inglés, googol) nombre de un número acuñado en 1938 por Milton Sirotta, nombre propuesto por un niño de 9 años, sobrino del matemático estadounidense Edward Kasner. Kasner anunció el concepto en su libro: *Las matemáticas y la imaginación*. Isaac Asimov dijo en una ocasión al respecto:"Tendremos que padecer eternamente un número inventado por un bebé". Un gúgol es un uno seguido de cien ceros, o que es lo mismo, en notación científica, uno por diez a la cien: 1 gúgol $= 10^{100}$, el apabullante número de esos que en potenciación manejamos con comodidad pero que, quizás, sea mayor que el número de partículas del Universo.

Aunque sin llegar a esos extremos, las escalas de la cuestión que nos interesa son también gigantescas. En 1997, cuando Brin y Page empezaban a trabajar en el diseño de Google, había censadas en torno a los 100 millones de páginas web. AltaVista, el buscador más popular por entonces, atendió 20 millones de consultas diarias. Hoy, esas cifras se han multiplicado, el propio buscador Google atiende 200 millones de consultas diarias e indexa varios miles de millones de páginas web.

Así que el diseño de un buscador ha de resolver con esencia ciertas cuestiones computacionales, cómo la manera en que se almacena toda esa información, cómo se actualiza, como se pueden gestionar las peticiones, cómo buscar en las gigantescas bases de datos, etc., problemas en los que, sin duda, el álgebra funciono como herramienta fundamental para crear una herramienta que, día a día, nos hace posible buscar con eficiencia, información en internet.

Leer artículo completo titulado El secreto de Google y el Álgebra lineal

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/fernandez1.pdf.

Competencias por desarrollar

- El Cuestionamiento lógico.
- La Comprensión del Contexto.
- La Interpretación de gráficos, expresiones simbólicas, o ambas.
- El Cálculo simbólico.
- El Modelaje Matemático.

Objetivo

- Fundamentar que el álgebra es una herramienta que permite la construcción de modelos matemáticos en las ciencias en general.

Presaberes

Operaciones con números reales, potencias y radicales.

Figura 2. Página de *Kitab al-jabr* .

¿Qué es Álgebra?

La palabra álgebra aparece inicialmente en el libro “Al-jabr w'al_muqabalah”, escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (hijo de Musa y nativo de Khwarizmi). *“Al-jabr”* significa transposición y con ello se hacía referencia al paso de términos de un miembro a otro en una ecuación y *“w'al-muqabalah”* significa eliminación, y se hacía referencia a la eliminación de términos iguales en los dos miembros de una ecuación.

El álgebra esta caracterizada por el uso de letras y expresiones literales, se tiene la posibilidad de representar con una sola letra una infinidad de cantidades y el hecho de poder operar con ellas de forma natural y sencilla, es lo que hace del álgebra una herramienta de enorme utilidad.

Vocabulario clave

Guarismo

Es cada una de las cifras arábigas que expresan una cantidad expresada por medio de dos o más cifras.

Expresión Algebraica

Se llama expresión algebraica a toda constante, variable o bien a toda combinación de constantes y potencias de variables que estén ligadas por alguno de los símbolos +, - , x, ÷, en un número finito.

Término algebraico

Es el producto y/o división de una o más variables (factor literal) y un coeficiente o factor numérico.

¿Cómo surge el Álgebra?

Una de las causas por las que la Matemática no avanzó suficientemente hasta el siglo XVI, fue sin duda la carencia de símbolos que ayudaran a los matemáticos a expresar sus trabajos de una manera más simple y que permitiera su lectura con mayor facilidad. Desde los babilonios (1,700 a. C.) hasta Diofanto[1] (250 d. C.) las operaciones se relataban con el lenguaje ordinario (Período retórico o verbal). Así, por ejemplo, en el papiro de Rhind (1650 a. C.) se puede leer para describir un problema: “Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24”.

Con la palabra “un montón” designaban la incógnita; Un par de piernas andando en la dirección de la escritura era el signo (+) y en contra el signo (-). Desde la primitiva Babilonia los matemáticos han ahorrado tiempo y esfuerzos al sustituir los símbolos por palabras. Entre dichas creaciones abreviadas se encuentran nuestros guarismos y los breves signos +, -, x, ÷ : que utilizamos para indicar suma, resta, multiplicación y división. Estos cuatro cálculos son relativamente nuevos en la historia matemática. Abajo aparecen algunas formas primitivas de representarlos.

 Símbolo para la suma, durante el renacimiento.

 Sustracción, época griega (Diofanto[1]).

 Multiplicación, Leibnitz (siglo XVIII).

 División, Francia del siglo XVIII, J. E. Gallimard.

Fuente: Colección Científica Life-Time-David Bergamini.

[1] Diofanto de Alejandría, matemático griego, a veces conocido como “el padre del álgebra”, tuvo enorme influencia en el desarrollo de la teoría de números.

Inducir el lenguaje matemático a través del álgebra

Indicación

En esta actividad, como docente deberá ilustrar con los siguientes ejemplos, dejando clara la intención de modelar algebraicamente; fomentará entonces introducir el lenguaje que utiliza letras en combinación con números y signos, esta herramienta se conoce como **Lenguaje algebraico.**

Características del lenguaje algebraico

1.- El lenguaje algebraico es más preciso que el lenguaje numérico: podemos expresar enunciados de una forma más breve.

El conjunto de los múltiplos de 5 es $\{\pm 5, \pm 10, \pm 15, ...\}$

En lenguaje algebraico se expresa $5n$, con n un número entero.

2.- El lenguaje algebraico permite expresar relaciones y propiedades numéricas de carácter general.

La propiedad conmutativa del producto se expresa $ab = ba$, donde a y b son dos números cualesquiera.

3.- Con el lenguaje algebraico expresamos números desconocidos y realizamos operaciones aritméticas con ellos.

El doble de un número es seis, se expresa $2x = 6$.

Veamos algunos ejemplos

Tengo el doble de mp3 en mi disco duro que tú (lo que significa que tú tienes la mitad en tu disco duro, que tengo yo).

Llamo p al número de mp3 que tengo yo, y t al número de mp3 que tienes tú. ("siempre se debe especificar qué es cada letra"), y además, ilustrar mediante los ejemplos la matematización de frases, ilustrando que

a) Si yo tengo dos más que tú, tú tienes dos menos que yo.

b) Si mi edad es el doble que la tuya, tú tienes la mitad de edad que yo.

La frase anterior se simbolizará $p = 2t$.

Ojo también se puede simbolizar $t = p/2$.

A continuación en la actividad 1, reflexione con sus estudiantes cada frase del lenguaje coloquial.

Actividad 1

Indicación

Sus estudiantes deberán matematizar las siguientes expresiones; procure que participen y hagan apreciaciones de cada uno de los ejercicios propuestos.

a) La edad de Carlos es la mitad de la edad de Enrique.

b) En la fiesta de ayer había tres chicas por cada chico.

c) Mi padre tiene tres años más que mi madre.

d) Si me regalaras cuatro cromos tendríamos la misma cantidad.

e) Yo tengo la mitad de la suma de sus edades.

f) El producto de dos números es 10.

Solución de actividad 1

a) $y = 2x$; b) $y = 3x$

c) $y = x+3$; d) $y = x+4$

e) $x = (y + z)/2$

f) $x\,y = 10$

Notemos que estas respuestas son una de las formas de representación.

Actividad 2

Indicación

Como docente fomentará mediante esta actividad que el estudiantado formule expresiones algebraicas para cada una de las siguientes situaciones.

1. Cuatro números consecutivos.
2. Una fracción cuyo numerador tiene como denominador su numerador disminuido en tres.
3. El cociente de dos números.
4. El antecesor de un número cualquiera.
5. Uno restado a un número.
6. Tres veces la diferencia de dos números.
7. Diez más que tres veces un número.
8. La semisuma de dos números.

Solución de actividad 2

1. x + x+1+x+2+x+3
2. x/(x-3)
3. x/y
4. x-1
5. n-1
6. 3(a – b)
7. 10+3b
8. (x + y)/2

Indicación

La siguiente lista de frases del lenguaje coloquial se deberá trasladar al lenguaje algebraico.

a) **Entre los dos tenemos cinco dólares**

Solución

X: lo que tengo yo.

Y: lo que tienes tú.

X + Y = 5.

b) **Ahora mismo, el padre de Carlos tiene triple edad que él.**

Solución

C: La edad de Carlos.

P: La edad del padre de Carlos.

P = 3C

c) **Si gastamos dos dólares cada uno, yo tendré el doble que tú.**

Solución

Y: Lo que tengo yo.

T: Lo que tienes tú.

Gastamos $2 cada uno

Y - 2: Lo que tengo ahora yo.

T- 2: Lo que tienes ahora tú.

Así, yo tendré el doble que tú, es Y - 2 =2 (T - 2).

d) **La suma de tres números consecutivos es 243.**

Solución

Inicie pidiendo ejemplos de números consecutivos, 1,2,3; 7,8,9; 10,11,12 y analizando que entre cada número a partir del primero hay una unidad que los separa, así llamamos N al primero, N + 1 el segundo y N + 2 el tercero tenemos N + N + 1 + N + 2 = 243.

Actividad 3

Indicación

El estudiante traducirá las siguientes expresiones algebraicas al lenguaje castellano, para esta actividad se debería trabajar en equipo para someter a discusión posteriormente en plenaria los resultados.

1. $\mathbf{A + A + 1 + A + 2}$
2. $\mathbf{y = x^2}$
3. $(\mathbf{x + y})^{\mathbf{3}}$
4. $(\mathbf{x - y})^{\mathbf{2}}$
5. $\mathbf{\frac{x}{2}}$
6. $\mathbf{A^2 + B^2}$

Solución de Actividad 3

1. La suma de tres números consecutivos.
2. Un número es igual al cuadrado de otro.
3. El cubo de un binomio.
4. El cuadrado de la diferencia de dos números.
5. La mitad de un número.
6. La suma de cuadrados de dos cantidades.

Del lenguaje Algebraico al lenguaje coloquial

Indicación

En esta actividad se consideran los **términos algebraicos** siguientes para los que el estudiante traducirá dichas expresiones algebraicas al lenguaje coloquial.

Ejemplos

$+\mathbf{2}$: Número aumentado en dos, un número más dos.

$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}$: El cuadrado de un binomio de números, el binomio al cuadrado.

$\mathbf{\frac{x+y}{2}}$: La semisuma de dos números, el promedio de dos números.

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$: Un número es igual al cuadrado de otro.

$\mathbf{\frac{2}{3}}\boldsymbol{x}$**:** Dos terceras partes de un número.

$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$: El cuadrado de un número más uno.

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{kx}$: Un número es directamente proporcional a otro.

$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{kx}}{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}$: F es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de y.

Importante

Se debe insistir en recordar al estudiantado que las expresiones de la forma $y = kx$ significan que una cantidad es directamente proporcional a otra, o que cuando una crece en magnitud la otra también. Y que las expresiones de la forma $\mathbf{y = \frac{k}{x}}$ significan que una de las expresiones es inversamente proporcional a la otra o que cuando crece una la otra decrece.

Soluciones

Newton: $F = ma$

Las **leyes de Newton**, también conocidas como *leyes del movimiento de* Newton, son tres principios a partir de los cuales se explica la mayor parte de los problemas planteados por la dinámica, en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos.

Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Einstein: $\mathrm{E} = mc^2$

La equivalencia entre la masa y la energía dada por la expresión de la teoría de la relatividad de Einstein, indica que la masa conlleva una cierta cantidad de energía aunque se encuentre en reposo, concepto ausente en mecánica clásica.

Newton: $F = k\frac{Mm}{r^2}$

La **Ley de Gravitación Universal** es una ley clásica de la gravitación presentada por Isaac Newton en su libro publicado en 1687, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica que establece una relación cuantitativa para la fuerza de atracción entre dos objetos con masa.

Actividad final

Indicación

En esta actividad el estudiante deberá modelar las siguientes frases, traduciendo del lenguaje algebraico al coloquial y del coloquial al algebraico.

Newton: La fuerza es directamente proporcional a la aceleración y la constante de proporcionalidad es la masa.

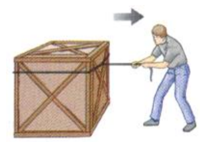


Figura 3. Aplicación de la ley de Newton

Para este ejemplo el profesor debe hacer referencias a ejemplos físicos de esta ley de Newton.

Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

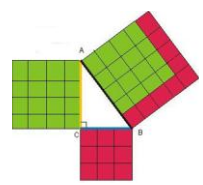


Figura 4. Ilustración del Teorema de Pitágoras.

Hacer referencia que este resultado sólo es válido para triángulos rectángulos.

Einstein: La energía es equivalente al producto de la masa por la velocidad de la luz al cuadrado, una aplicación del principio se observa en la ilustración (planta nuclear en Rusia).

Figura 5. Planta nuclear en Rusia.

Newton: La atracción gravitatoria entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas dividido por el cuadrado de la distancia que los separa.

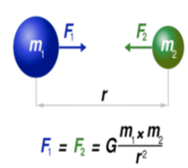


Figura 6. Ley de Newton

Guía trabajo

1. Traducir las siguientes expresiones a lenguaje matemático
   a. El doble de x
   b. El cuadrado de x
   c. El triple de x
   d. El cubo de x
   e. El cuádruple de x
   f. La cuarta potencia de x
   g. La diferencia entre a y b
   h. La diferencia entre b y a
   i. El exceso de a sobre b
   j. x aumento en a unidades
   k. x es a unidades mayor que y
   l. El producto de a y b
   m. x veces a
   n. El cociente entre a y b.

2. La edad de una persona es 35 años. ¿Cuántos años tenía hace (6- E) años?

3. Al escribir en lenguaje algebraico la diferencia entre el triple de a y el cuadrado de b resulta
   a. $3a - b^2$
   b. $3(a - b^2)$
   c. $(3a - b)^2$
   d. $b^2 - 3a$
   e. $a^3 - b^2$

4. El triple del cuadrado de k, es cinco unidades mayor que p, se expresa como
   f. $3k^2 - 5 = p$
   g. $3k^2 + 5 = p$
   h. $(3k)^2 + 5 = p$
   i. $3(2k) - 5 = p$
   j. $(3k)^2 - 5 = p$

5. Para comentar con el estudiantado
   La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil. Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir "la lengua vernácula a la algebraica". Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo, por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy distintas por el grado de su dificultad, como puede convencerse el lector a la vista del ejemplo.

Fuente: Álgebra recreativa, Yakov Perelman[2].

En la lengua coloquial	**En el idioma del álgebra**
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero	x
El primer año gastó 100 libras	x - 100
Aumentó el resto con un tercio de éste	$(x-10)+\frac{x-10}{3}=\frac{4x-400}{3}$
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	$\frac{(4x-400)}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
Y aumentó la suma restante en un tercio de ella	$\frac{(4x-700)}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	$\frac{(16x-2800)}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
Después de que hubo agregado su tercera parte	$\frac{(16x-2800)}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
El capital llegó al doble del inicial	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

[2] **Yakov Isidorovich Perelman** nació el 4 de diciembre de 1882, en la ciudad de Bielostok, de la provincia de Grodniy, en el actual territorio de Bielorrusia, Perelman nos dejó muchos libros que podemos leer ahora con el mismo interés que hace muchos años. Haciendo unos cálculos aproximados, solamente en Rusia, desde el año 1913, los libros de Perelman han tenido más de 300 ediciones, con una tirada de casi 15 millones de ejemplares. Además de esto, sus libros se tradujeron al alemán, al francés, al italiano, al checo, al portugués, al búlgaro, al finlandés, al inglés y a otras muchas lenguas de todo el mundo.

Referencias bibliográficas

1. Acevedo, M. (1997), *Redescubriendo el Algebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*, Universidad Nacional de Colombia-Colciencias.
2. Meserve, B. (1965) *Conceptos fundamentales de álgebra*, Ediciones de la Universidad de Chile y Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
3. Perelman, Y. (1978) *Algebra Recreativa* Ciencia popular, Editorial Mir Moscú

Referencias de imágenes.

1. Figura 2. Fuente http://www.superluminal.com/cookbook/index_gallery.html

6° Grado | Lección 7 | Unidad

Tiempo: cuatro horas clases.

Álgebra
Ordenar expresiones algebraicas

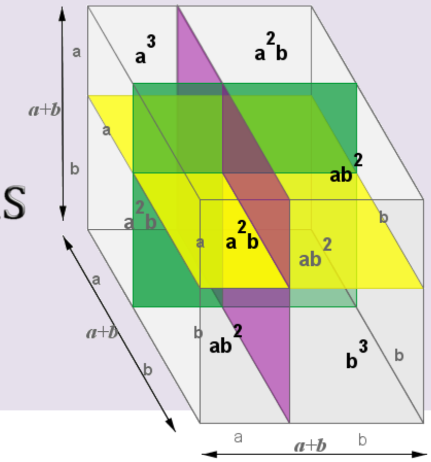


Figura 1. Vista geométrica de la descomposición algebraica del cubo del binomio.

Descripción del tema

Cuando hablamos de Álgebra debemos tener claro que es una herramienta para el modelaje matemático, la generalización y simplificación. A través del lenguaje matemático, herramienta que permite expresar por medio de símbolos (números, signos de operación y letras) los diferentes fenómenos estudiados en las ciencias, los logros humanos están en creciente aumento, esto nos ha permitido elevar significativamente la resolución de problemas y alcanzar cuotas de conocimiento nunca antes vista en la historia de la humanidad.

Para ilustrar un modelo matemático analicemos el siguiente ejemplo. La fórmula que se utiliza para calcular el perímetro de un cuadrado de lado **X**, tiene por modelo matemático:

$$Y = 4X$$

Este modelo permitirá visualizar lo que acurre con la expresión, cuando consideramos variaciones del perímetro si se aplica a cuadrados de diferentes dimensiones. En la fórmula **Y= 4X** hemos utilizado las letras Y y X, las cuales pueden tomar valores distintos, comúnmente conocidas por **"variables"**. Notemos también que el modelo contiene el número 4 cuyo valor no se altera, por lo que se le conoce como **"constante".**

En el cuadro siguiente se ilustra cómo varían los valores de "X" y "Y" de acuerdo con las dimensiones de los diferentes cuadrados, mientras que el número 4 permanece intacto.

X	4X	Y
1	4(1)	4
2	4(2)	8
6	4(6)	24
20	4(20)	80
100	4(100)	400

En esta lección, haremos un análisis de los principales elementos algebraicos, su orden basado en las propiedades aritméticas de los números.

Fuente: www.dgb.sep.gob.mx/emsad/modulos/.../MatematicasI.pdf

Competencias por desarrollar

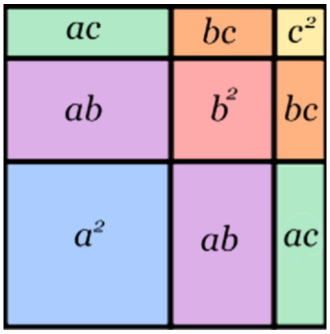
- La comunicación y representación matemática.
- El razonamiento creativo y crítico.
- El modelaje matemático.

Objetivo

- Clasificar, ordenar y distinguir elementos algebraicos que permitan hacer simplificaciones de expresiones algebraicas eficientemente con vínculos en los modelos matemáticos que representan fenómenos de la naturaleza.

Presaberes

- Propiedades de los números reales, potencias y radicales.



$(a+b+c)^2 =$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

Figura 2. Vista geométrica de la descomposición del cuadrado de un trinomio

¡Muy importante!

- Cuando un término no tiene escrito el coeficiente se sobreentiende que éste es igual a 1 (uno).

  $a^2 = 1a^2$

- Cuando la parte literal de una expresión algebraica carece de exponente se sobreentiende de que su exponente es 1(uno)

  $a = a^1$

- El exponente es un número racional que determina las veces que se toma la base (literal) como factor.

  $x^3 = x.x.x$

  $x^5 = x.x.x.x.x$

Vocabulario clave

Expresión Algebraica: Es toda constante, variable o bien toda combinación de constantes y potencias de variables que estén vinculadas por alguno de los símbolos +, - x, ÷ en un número finito.

Término Algebraico: Es una expresión algebraica que consta de un coeficiente y una variable

Coeficiente: Es todo número real que acompaña a una expresión algebraical.

Variable o parte literal: se representan por letras minúsculas del abecedario y en el término puede haber una o varias: a,b,c,...,x,y,z

Elementos de las expresiones algebraicas

Cunado ya conocemos las partes y características de un término, debemos considerar que las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo con su número de términos:

Monomio: Expresión algebraica formada por un sólo término: x^3; $2xy$; $3x^2yz$

Binomio: Expresión algebraica que tiene dos términos: $p-q$; $2z^3-3w^2$

Trinomio: Expresión algebraica formada por tres términos: $a^2+b^2-c^2$; $2x^2+4y^3-9z$

Polinomio: Expresión algebraica que tiene dos o más términos. $ab+xy^2-3m^2+n$

¿Qué ocurre cuando se tiene una expresión como la siguiente? $x+y-1$. En este trinomio el número - 1 no tiene variable alguna y, por lo tanto, al término se le identifica como el ***término independiente***.

Grado de las expresiones algebraicas

Grado de un monomio

Es el número que corresponde a la suma de los exponentes de sus partes literales.

Ejemplo 1

El monomio a^2b^3 es de quinto grado, pues los exponentes de la parte literal suman: $2+3=5$

El monomio $\frac{2}{5}y^3$ es un monomio de tercer Grado.

los monomios exclusivamente numéricos, también llamados **términos independientes**, son de grado 0 (cero)

Ejemplo 2:

2 es un monomio cuya parte literal vale 0

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio esta dado por el grado del monomio de mayor grado que él contiene y se clasifica por:

Grado Absoluto (GA): Está dado por el mayor grado absoluto de sus términos (monomios).

Grado Relativo (GR): Está dado por el mayor de los exponentes de la variable en mención.

$$2x^3yz^4+3x^2y^5z^2-5xy^2z^7$$

$$GA=10;\ GR_x=3;\ GR_y=5;\ GR_z=7$$

$$2p^5m^3n^2-5q^6m^2n^4$$

Entonces $GA=6\,;GR_m=3\,;GR_n=4$

Ejemplos

$3y^5-7y+11$ es un trinomio de quinto grado.

z^4+4z^2-8x+1 es un polinomio de cuarto grado.

Polinomio Homogéneo

Un polinomio es *homogéneo* si tiene todos los términos del mismo grado.

Actividad 1

Indicación El grupo de estudiantes deberá, para cada término algebraico, determinar el coeficiente numérico, factor literal y el grado.

a) $3x^2y$

b) m

c) mc^2

d) $-v\,t$

e) $0.3ab^5$

f) 3

g) $-8x^3y^2z^4$

h) $-\frac{\sqrt{2}}{3}a$

i) $-\frac{1}{2}x^3$

j) $\frac{7a^2}{3}$

k) $\frac{-3m}{4}$

l) $\frac{3}{4}a^4b^2$

Determina el grado y el número de términos de las siguientes expresiones, ¿hay alguno homogéneo?:

a) $7a^2b^2+x^3y$

b) $-1+2x+3x^2$

c) $4xy$

d) $vt+\frac{1}{2}at^2$

e) $7m^2n-6mn^2$

Actividad 2

Indicación

Como docente fortalecerá, mediante esta actividad, que sus estudiantes determinen el grado absoluto y relativo de polinomios.

$a)\ x^3 + 2x^2 - 4x - 2$

$b)\ x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3$

$c)\ 3x^5yz - 5x^5y^2 - 14xy^3$

Actividad 3

Indicación

Cada estudiante Clasifica los polinomios siguientes si son enteros, fraccionarios, racionales, homogéneos, heterogéneos, completos u ordenado. Para esta actividad se hace la sugerencia de crear equipos para resolver, luego hacer una plenaria para la discusión

$a)\ 5x^3 - 3x^2 + \frac{2}{3}x$

$b)\ \sqrt{7}x^3y^2 - 3y^2x^3 + 9x^3y^2$

$c)\ \frac{3}{4}x^3y + \frac{5}{6}x^2y - \frac{2}{3}x^6$

$d)\ \frac{4}{5}x^4y^3z - \frac{7}{8}y^3zx^4 + \frac{7}{12}zx^4$

$e)\ -3x^4 + 4x^4w - \frac{2}{3}x^4w^2$

$f)\ 5x^3 - 4x^3 - \frac{1}{5}x^3$

$g)\ -8\frac{x}{y} + 4\frac{x^2}{y^2} - 7\frac{x^3}{y^3}$

$h)\ x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6$

$i)\ x^3y + x^2y^2 + xy^3$

Clases de polinomios

Un polinomio puede ser:

a. *Entero.* Si ninguno de sus términos tiene factor literal.

$$z^2 - \frac{2}{3}z$$

b. *Fraccionario.* Si alguno de sus términos tiene literales en el denominador.

$$\frac{3}{4}\frac{m}{n} - \frac{7}{8}\frac{p^3}{q^2} + \frac{7}{2}zm^4$$

c. *Racional. Si* no contiene radicales; por ejemplo

$$x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x^5$$

d. *Irracional.* Si contiene radicales.

$$\frac{\sqrt{3a}}{2} + a - 1$$

e. *Homogéneo.* Si todos sus términos son del mismo grado absoluto; por ejemplo $z^3w + z^2w - \frac{2}{3}z^3$.

f. *Heterogéneo.* Si términos no son del mismo grado; por ejemplo $m^3 + m^2n - n^3$

g. *Completo.* Son aquellos polinomios que ordenados en relación a una letra contienen todos los exponentes sucesivos de esa literal; por ejemplo $3x^3 + 5x^2 + 2x + 3$. Es completo ya que contiene todos los exponentes sucesivos de x desde el más alto que es 3 hasta el más bajo, 0.

h. *Ordenado.* Son aquellos polinomios en los cual los exponentes de la literal escogida, van aumentando o disminuyendo; por ejemplo: $m^3 + m^2n - m$ está ordenado descendentemente con relación a la letra ordenatriz m.

Actividad 3.

Indicación

Cada estudiante ordenará los siguientes polinomios, para dicha actividad hará referencia a la variable ordenatriz que utilizará.

a) $\mathrm{x}^2 - 3x^4y + 6x^4\mathrm{y}^3$

b) $7\mathrm{x}^3y^2 - 3y^2x^3 + 9x^3y^2$

c) $3x^6ay + \frac{5}{6}xa^2y^3 - xa^4\mathrm{y}^2$

d) $\frac{4}{5}x^4y^3z - \frac{7}{8}y^3zx^4 + \frac{7}{12}zx^4y^3$

e) $-0.3\mathrm{xy}^3 + 0.4x^4y - \frac{2}{3}x^4$

f) $5\mathrm{x}^3 - 4x^6 - \frac{1}{5}x^8$

g) $-\mathrm{ax}^3 + bx^2 - cx$

h) $\mathrm{a}^2 - x^2 - 2xy - y^2$

i) $\mathrm{a}^2 - x^2 + 2xy - y^2$

j) $16\mathrm{y}^2 - x^4$

¿Cómo ordenar un polinomio?

Para ordenar un polinomio es necesario escribir sus términos, de modo que los exponentes de una letra escogida como la letra ordenatriz queden acomodados de forma ascendente o descendente.

Ejemplo 1

Ordenar el siguiente polinomio $x^8 + 2x^5y^7 + 6x^2 + 3xy^3$ de forma descendente con relación a la letra x.

Solución

$$3xy^3 + 2x^5y^7 + 6x^2 + x^8$$

Ejemplo 2

Ordenar el polinomio $x^8 + 2x^5y^7 + 6x^2 + 3xy^3$ de acuerdo con los exponentes del literal y

Solución

$$2x^5y^7 + 3xy^3 + 6x^2 + x^8$$

Ejemplo 3

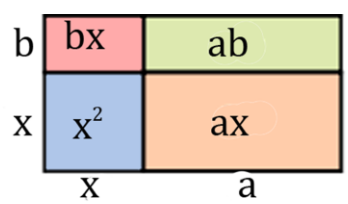
Ordenar el polinomio $a^8 + 3a^5b^7 + 6a^2 + 3ab^3 + \mathrm{b}^{12}$ de acuerdo con los exponentes del literal *b*, en forma descendente

Solución

$$\mathrm{b}^{12} + 3a^5b^7 + 6a^2 + 3ab^3 + a^8$$

Reflexión

Indicación: Reflexione las siguientes propiedades algebraicas y deduzca con sus estudiantes su naturaleza.



$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a\,b$$

Figura 3. Representación del binomio.

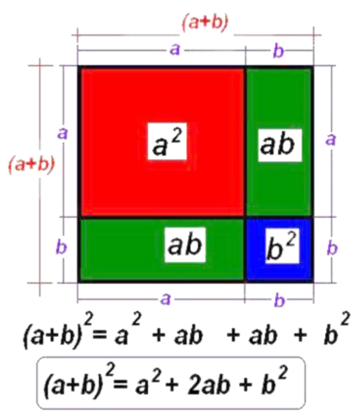


Figura 4. Representación del binomio.

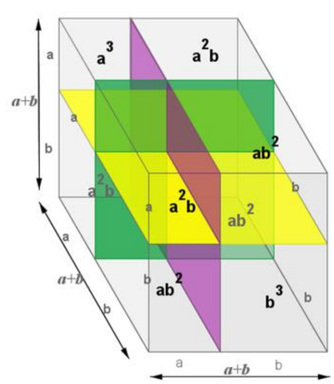


Figura 5. Representación del cubo de un binomio.

Actividad final

Indicación: En esta actividad los estudiantes deberán responder cada una de las preguntas, después de una discusión de equipo dirigida por el profesor, harán anotaciones y una plenaria para verificar que las soluciones estén correctas, será necesario que el profesor esté atento a las diferentes opiniones de los estudiantes y deberá hacer correcciones y sugerencias durante este ejercicio.

Para la siguiente lista de expresiones algebraicas cada estudiante deberá:

a) Clasificar las expresiones algebraicas: deberá asegurar la naturaleza de la expresión si es monomio, binomio, trinomio o polinomio.

$a)\ a^2 - x^2 - y^2$

c) $16y^2 - x^4$

$d)\ x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6$

$e)\ 3x^3$

b) Clasificar los siguientes polinomios deberá asegurar la naturaleza de la expresión si es entero, fraccionario, racional, irracional, homogéneo, heterogéneo, completo u ordenado.

$a)\ \frac{x^2}{4} - 3xy + 9y^2$

b) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{9}{16}y^2$

$c)\ \sqrt{x}y + xy^2$

$d)\ \frac{x}{y} - xy + x^2y^3$

$e)\ \frac{3}{2}x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4$

c) Ordenar los siguientes polinomios en las variables x , e y en formas ascendente y descendente:

$a)\ \frac{x^2}{4} - 3xy + 9y^2$ c) $\frac{x}{y} - xy + x^2y^3$

b) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{9}{16}y^2$ $d)\ \frac{3}{2}x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4$

Guía de trabajo

Ordenación de expresiones Algebraicas

Problema 1

Defina con sus palabras que entiende por:

(a) Coeficiente numérico (b) Factor literal (c) Término algebraico

Determine el coeficiente numérico, factor literal y el grado, en cada uno de los términos algebraicos propuestos:

(a) $7x^2y$ (b) $5mn$ (c) mc^3 (d) at e) $0.03xyz$ (f) 121

(g) $-8x^3y^2z^4$ (h) $-\frac{\sqrt{5}}{2}a$ (i) $-\frac{3}{5}x^2$ (j) $\frac{7a}{2}$ (k) $\frac{-3m^3}{7}$ (l) $\frac{5}{8}a^3b^7$

Determine el grado y el número de términos de las siguientes expresiones:

(a) $-8x^3y^2z^4 + 6yz$ (b) $-z^4 + z^2 - z + 2$ (c) $\frac{3yz}{4}$ (d) $vt + \frac{1}{2}at^2$ (e) $7p^3q^2 + 6pq$

(f) $\frac{a+b+c}{2}$ (g) $x^2 + x + 4$ (h)$2(3x + 4y)$ (i) $2x(3x^3 + 4y^2)$ (j) $\frac{b^2 + c^3h^4}{4}$

Problema 2

Dados los siguientes polinomios complete la tabla

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
$A(x) = 2(3x + 4y)$			
$B(x) = 3x^2 + 5x - 1$			
$C(x) = x^3 - 5x + 3$			
$D(x) = -6x^5 - 5x^{1/2}$			
$E(x) = 2x + 3$			

Problema 3

Escribir una expresión algebraica con la siguiente característica:

a) Un binomio de grado 5 y coeficiente principal negativo.

b) Un trinomio de grado 3 y término independiente positivo.

c) Un polinomio de grado 3 cuyo término independiente sea –2 y su coeficiente principal $-\frac{1}{4}$.

Referencias Bibliográficas

1. Barnett, R. (1995). *Álgebra elemental*. Serie Schaum. McGraw Hill. México.
2. Gobran, A. (1990). *Álgebra elemental*. Iberoamérica. México.
3. MINED. (2011)*Álgebra, Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
4. Perelman, Y. (1978), *Álgebra Recreativa*, Ciencia popular, Editorial Mir Moscú
5. Smith, S. (1992) *Álgebra*. Addison-Wesley. México.

6° Grado | Lección 8 | Unidad 10

Tiempo: cuatro horas clases.

Álgebra

Suma y producto de expresiones algebraicas

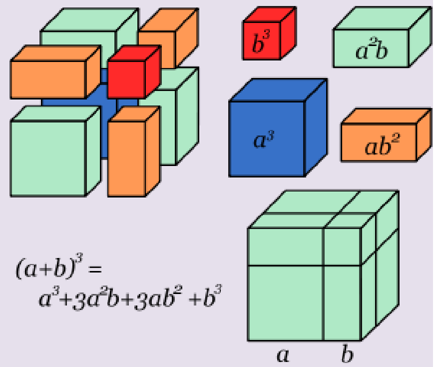


Figura 1. El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide. (D'Alambert).

Descripción del tema

El proceso de algebrización de la matemática no fue lineal ni en el tiempo ni en el espacio, ya que no fue el mismo ni dentro de cada país ni dentro de cada grupo de matemáticos.

Los grandes difusores e investigadores de este "arte analítico", con un lenguaje y métodos nuevos, tomaban postura y lo defendían frente a los que lo ignoraban o atacaban. No se aprecia una ruptura clara; pero en un siglo aproximadamente **se acabó imponiendo el álgebra como una parte útil de la matemática para resolver problemas que de otra manera era imposible solucionar,** uno de los puntos clave fue la constitución del **lenguaje algebraico**.

La utilización de un lenguaje propio por parte de los distintos matemáticos originó que estos nuevos métodos analíticos no fuesen considerados una nueva ciencia bien fundamentada, aunque fueran herramientas de cálculo muy potentes, frente a la síntesis geométrica.

Para poder entender todo este proceso con rigor histórico sería necesario analizar otros aspectos: el desarrollo del concepto moderno de número (los números imaginarios, los números negativos,...), la introducción y el aumento de métodos algebraicos en otros campos (teoría de números, trigonometría,...), el aumento de construcciones geométricas dadas las ecuaciones algebraicas (relación entre la ecuación y la representación, clasificación de curvas).

Fuente: www-ma1.upc.es/recerca/reportsre/01/rep0101massa.doc

Competencias por formar

- La Relación de conocimientos matemáticos y de ciencias.
- El Cálculo simbólico.
- El Dominio lógico.
- El Modelaje Matemático.

Objetivos

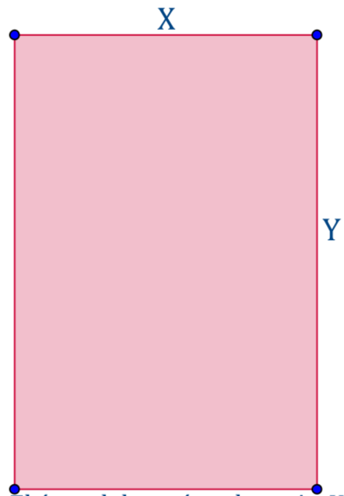
- Obtener equivalencias algebraicas tomando como referencia el rectángulo.
- Valorizar la simplicidad y la precisión del lenguaje algebraico.
- Incorporar el lenguaje y procedimientos algebraicos en la solución de determinados problemas.

Presaberes

- Mostrar que el rectángulo con lados iguales es un cuadrado, fortalecer que todo cuadrado es un rectángulo pero que no todo rectángulo es un cuadrado, recordar las operaciones básicas con números enteros.

Actividad preliminar

Indicación: Anteriormente, cada estudiante comprendió que el área de un rectángulo es el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura; además, que el perímetro del rectángulo es la suma de las longitudes de los lados. En la figura siguiente se pueden apreciar dos primeras expresiones algebraicas que representan área y perímetro.



El área del rectángulo es A=XY y su perímetro es P=2X+2Y

Figura 2. Rectángulo de dimensiones X e Y

Indicación

En la actividad siguiente construiremos expresiones algebraicas que permitirán a los estudiantes deducir cuándo es posible operar expresiones algebraicas y cuáles son las características que deben tener para ser simplificables, en esta actividad el estudiante deberá utilizar los conocimientos adquiridos en la lección anterior alternando con las formas geométricas y viceversa.

Sera necesario internalizar los resultados obtenidos para modelar formas geométricas más complejas, entre estas: círculos, rectángulos, cuadrados, triángulos y figuras compuestas.

“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo

Vocabulario clave

Expresión algebraica: Se llama expresión algebraica a toda constante, variable o bien a toda combinación de constantes y potencias de variables que estén ligadas por alguno de los símbolos +, -, x, ÷, en un número finito.

Término algebraico: es el producto y/o división de una o más variables (factor literal) y un coeficiente o factor numérico.
Monomio: las expresiones algebraicas que constan de un solo término.
Binomio: las expresiones algebraicas que constan de dos términos.
Coeficiente: Cada término consta de un factor numérico y un literal, el factor numérico se denomina coeficiente.

¿Cómo (

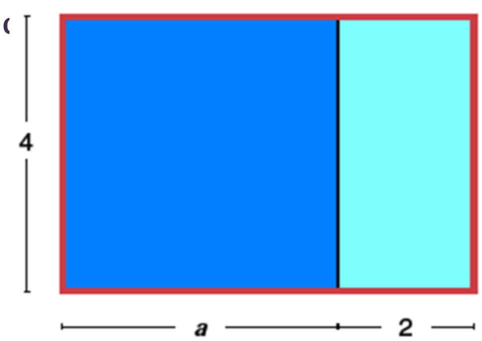


Figura 3. Área de un cuadrado

Notemos que para la figura anterior podemos calcular el área de dos formas

a) $A = 4(a + 2)$

b) $A = 4a\ (área\ del\ rectángulo\ azul)$

$+4(2)\ aréa\ del\ r$

de donde podemos deducir que

4a + 2(4) = 4a + 8 representa el área del rectángulo.

Es deducible también la propiedad distributiva, pues de a) y b) se deduce:

Preliminares

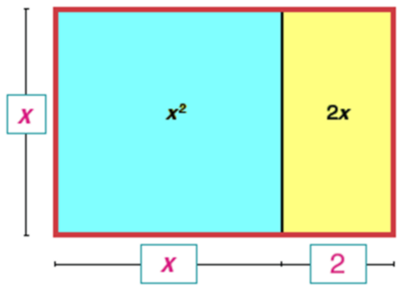


Figura 4. Rectángulo de base $(x+2)$ y altura x

Notemos que para la figura siguiente podemos calcular el área de dos formas

a) $A = x^2 + 2x$ b) $A = x(x+2)$

Notemos que la expresión $x^2 + 2x$ es un binomio y que representan, la primera, el área del cuadrado celeste y la amarilla el área del rectángulo amarillo. Se deduce que

$A = x(x+2) = x^2 + 2x$ Este resultado queda en términos de un binomio

Notemos que ambos monomios x^2 y $2x$ representan área distintas de un mismo rectángulo.

¿Por qué podemos sumar 3x + x? Analicemos su forma geométrica

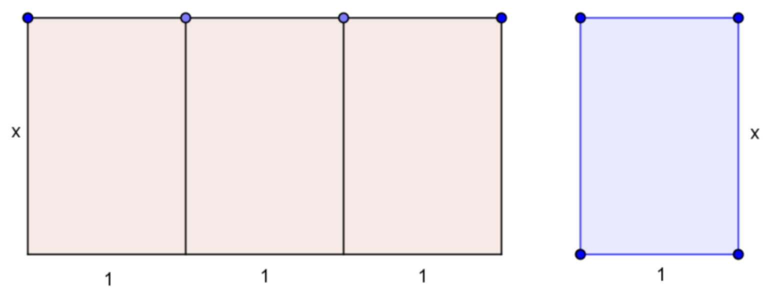


Figura 5. a) Rectángulo de base 3 y altura x b) rectángulo de base 1 y altura x.

En efecto, si nos fijamos en la figura, el área del primer rectángulo es 3.x y del segundo, x, si los unimos tendremos un área de 4x.

Luego 3 x + x = 4x.

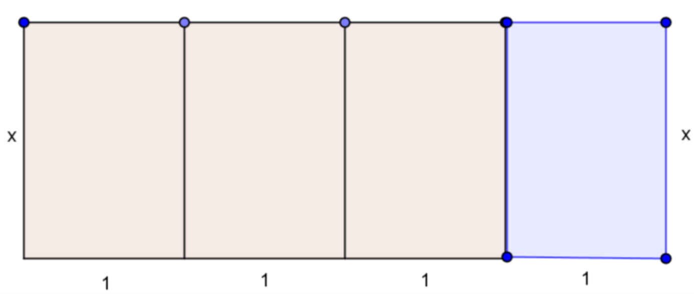


Figura 6. Rectángulo de base 4 y altura x.

Observaciones

Indicación

Analice con sus estudiantes el área de las siguientes figuras, utilizando conocimientos previos de áreas de rectángulos, círculos y cuadrados.

Figura 7. Ventana normanda.

Suponga que esta ventana tiene base x y altura y, encuentre una expresión algebraica para el área.

Notemos que el área del rectángulo es xy.

Para el área del círculo de la ventana sería $A = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$, así el área de la ventana sería:

$\mathrm{A} = \pi = \pi\frac{x^2}{4} + \mathrm{xy}$

Notemos que ambas expresiones no se pueden sumar, pero podemos deducir el espacio de ventilación e iluminación dando valores a **x** y **y.**

Actividad 1

A partir del gráfico, deduce tres formas de calcular el área de los rectángulos y compara los resultados, se deben armar equipos de trabajo para que elaboren una estrategia a fin de calcular de tres formas diferentes el área.

a) Determina una expresión algebraica para el área de la siguiente figura, de tres maneras distintas.

b) Compara resultados y comenta.

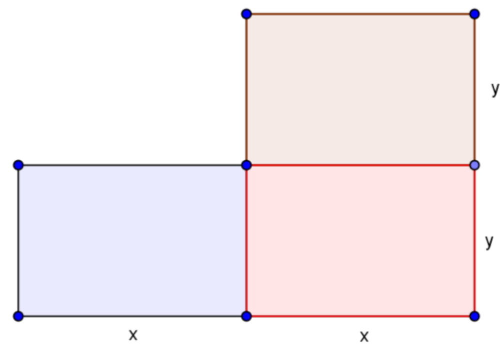


Figura 8. Forma geometría para determinar el área.

Sugerencia para esta actividad

Comprometa a sus estudiantes a que exploren diferentes formas de calcular el área de la figura, pídales que escriban sus resultados y los socialicen con sus compañeros de otros equipos para deducir formas de pensamiento matemático.

Solución

a) Podemos calcular el área de cada uno de los rectángulos, el cual sería xy, esto daría $A = xy + xy + xy = 3xy$, que lo conocemos como **monomio.**

b) Podemos calcular el área del rectángulo azul y rojo, y agregarle el área del color café, y como resultado $y(x + x) + xy = xy + xy + xy = 3xy$

c) Suponer que hay un rectángulo sobre el azul y calcular el área de todo, que sería $(2x)(2y)-xy=4xy-xy=3xy$

Por supuesto, podemos esperar otros análisis por parte de los estudiantes, pídeles ahora que deduzcan el área de la figura sombreada.

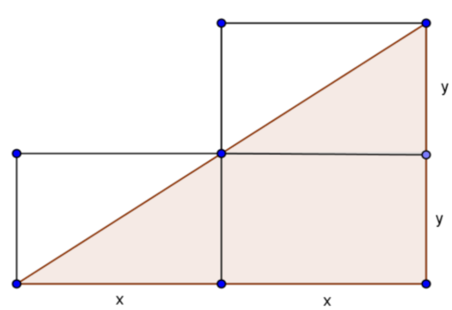


Figura 9. Área de la figura sombreada.

Actividad 2

Indicación

A partir del gráfico, deduce tres formas de calcular el área de los rectángulos y compara los resultados, se deben armar equipos de trabajo para que elaboren una estrategia para argumentar que las áreas de las siguientes figuras valen 3xy.

¿Cuál es el área total si unimos las tres figuras?

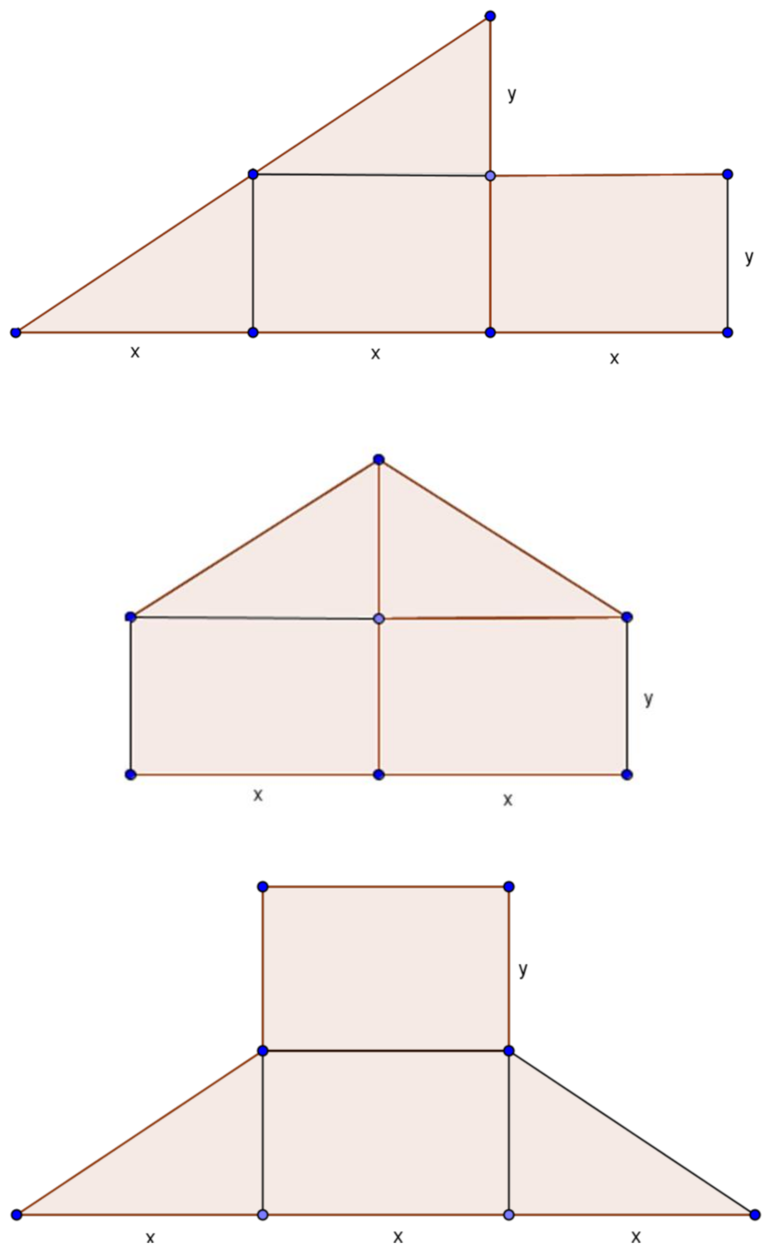
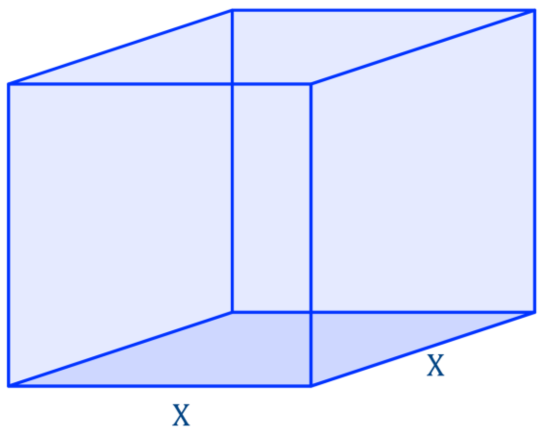


Figura 10. Polígonos.

Actividad 3. ¿Puedo sumar x^3 con x^2?



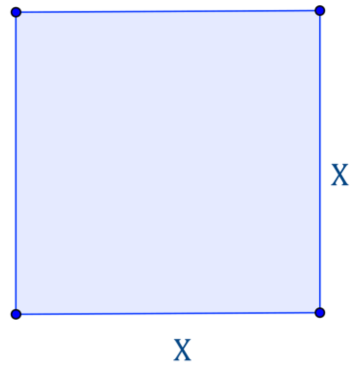


Figura 11. Cubo de lado x

Figura 12. Cuadrado de la do x o la cara de un cubo

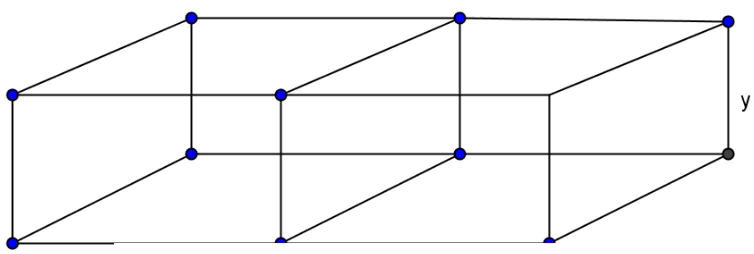
Notemos que el volumen de este cubo es x^3

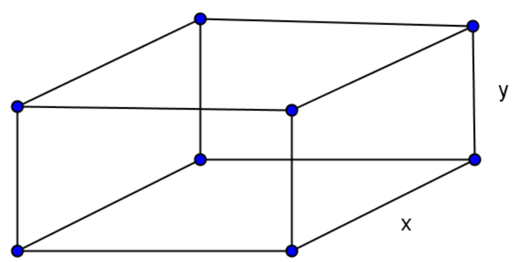
El área de este cuadrado es x^2

Área y volumen no son lo mismo, no puedo sumar dichas cantidades, geométricamente el x^3 representa un cubo y x^2 un cuadrado.

Actividad 4 ¿Cuál es el resultado de sumar $2yx^2 + yx^2$?

Solución





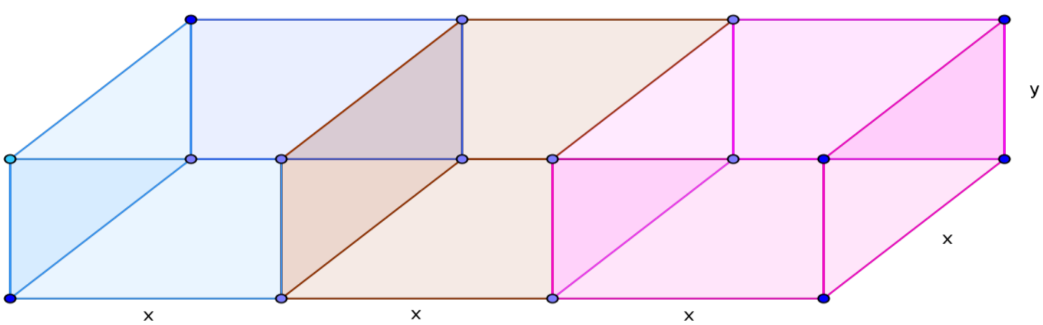


*Figura 13.*Unión de los paralepípedos para demostrar el resultado

El resultado se deduce al juntar las cajas $3yx^2$

Actividad - Interpretación geométrica de expresiones algebraicas.

Indicación para el profesor

a) Formen grupos de tres alumnos.

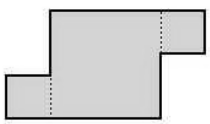
b) Cada grupo deber tener un juego de hojas con las expresiones algebraicas por representar.

c) Se debe seguir atentamente la secuencia de acciones propuesta.

d) Dados dos trazos, a y b, determinados de la siguiente forma

e) Se debe calcular la medida del área de las siguientes figuras en función de a y b, es decir debe expresar algebraicamente dichas medidas.

Ejemplo 1: Calcule el área y perímetro de la siguiente figura geométrica



Su área viene dada por $A = a^2 + 2b^2$ y su perímetro $P = 4a^2 + 6b$

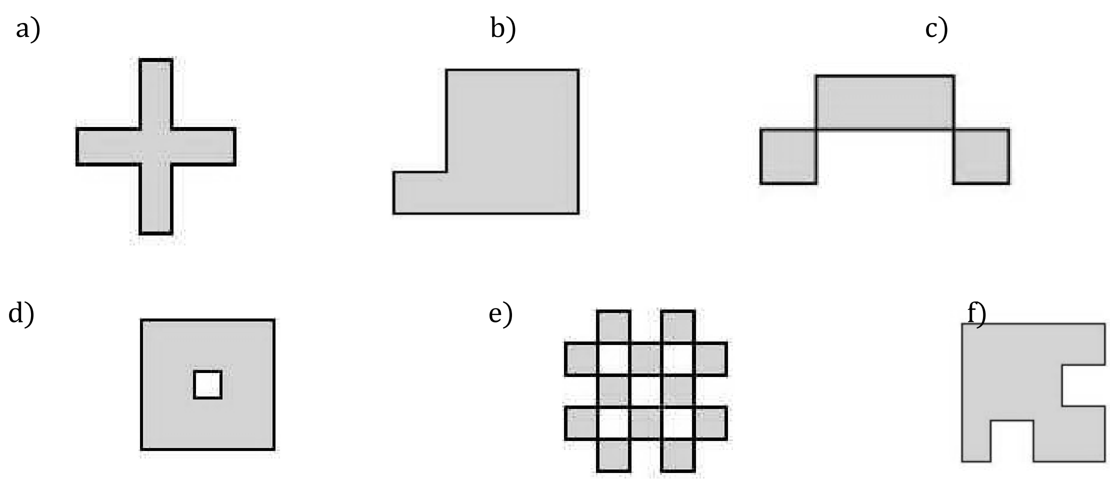


Figura14. Formas geométricas.

Actividad – Construcción geométrica de expresiones algebraicas.

Indicación para docente

a) Forme grupos de dos estudiantes.

b) Cada grupo deber tener un conjunto de hojas con las expresiones algebraicas por representar.

c) Se debe seguir atentamente la secuencia de acciones propuesta.

d) Se debe calcular la medida del área de las siguientes figuras en función de a y b , es decir, debe expresar algebraicamente dichas medidas.

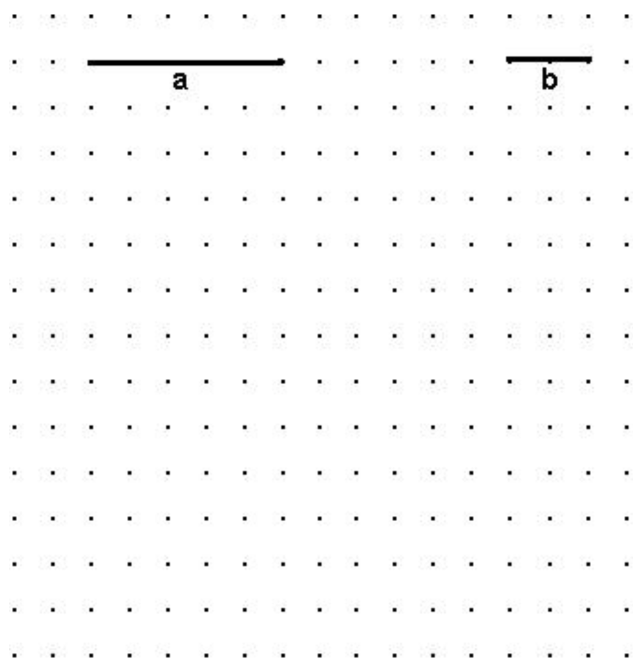
e) Dibuja en la trama cuadrada la superficie de las siguientes expresiones algebraicas:

i) $a^2 - 3b^2$

ii) $a^2 + ab + b^2$

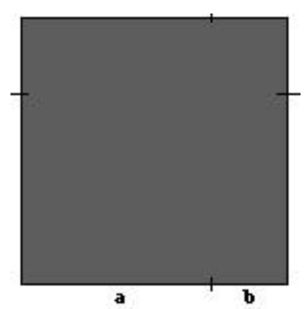
iii) $b^2 - 3ab^2 + 2a^2$

iv) $(a + b)a$



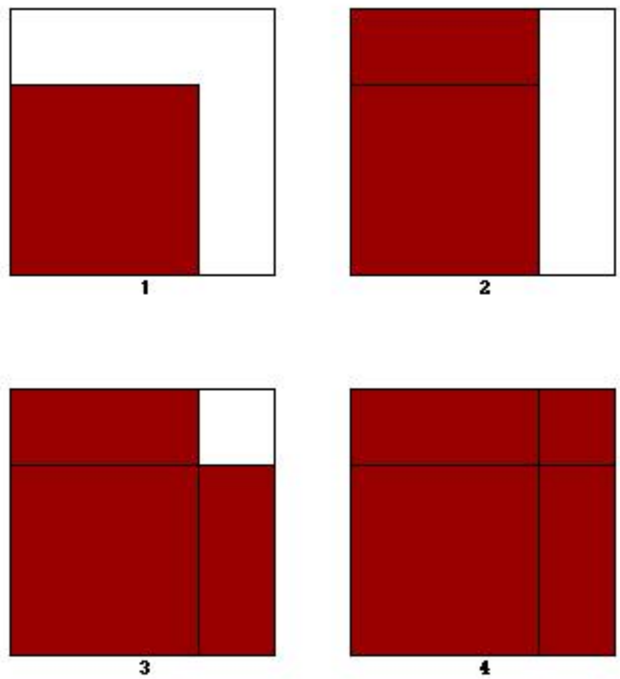
Actividad – Demostración geométrica de expresiones algebraicas.

Sea el cuadrado de la figura A.



A

a) ¿Cuánto mide la longitud de un lado del cuadrado A?
b) El área del cuadrado A es $(a + b)^2$.
c) Escriba la superficie de la parte coloreada de las siguientes figuras. En las numeradas de dos a cuatro se tendrá que calcular la superficie en relación con la anterior.



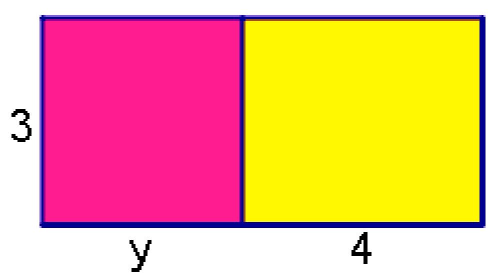
d) ¿Tienen la misma superficie las figuras A y 4?

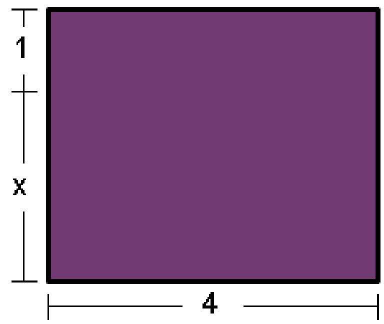
e) ¿Deduce la siguiente identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Guía de trabajo

Problema 1

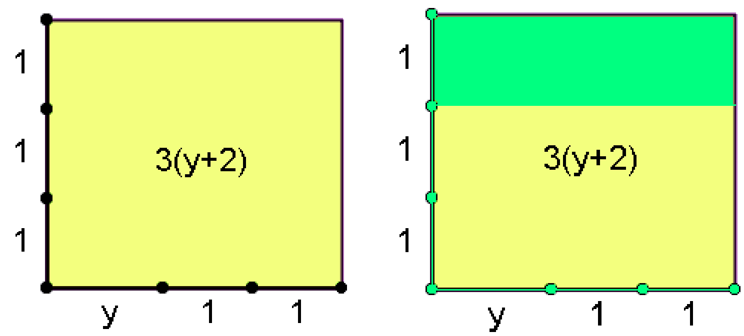
a) Identifica el área de cada región y verifica tu respuesta.





Problema 2

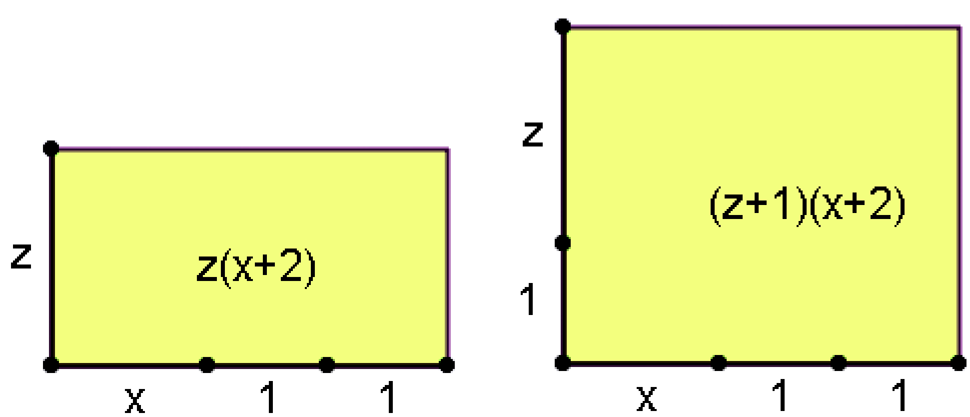
Genera expresiones equivalentes a la dada, dividiendo el rectángulo.



Por ejemplo $3(y+2) = 1.(y+2) + 2.(y+2)$

Problema 3

Genera expresiones equivalentes a la dada, dividiendo el rectángulo.



Problema 4

Construye un rectángulo cuya área sea la expresión dada 2(x+2)

Problema 5

Calcula las siguientes operaciones algebraicas

a) $ab + 3ab + 5ab - 4ab$
b) $2xy + 3ab + 5xy - 4ab$
c) $xyz + 3zy + 5yz - 4zxy$
d) $xy^3z + 5z^2y + 4z^2y - 4zxy^3$
e) $(x + y)(2x - 3y)$

Problema 6

Encuentra identidades algebraicas, calculando el producto

a) $a(b + c) =$
b) $(a + b)(a - b) =$
c) $(a + b)(a + b)$=
d) $(a + b)^2$=

Problema 7

Demuestre que $(a + b + c)(a + b + c) = 2ab + 2ac + 2bc + a^2 + b^2 + c^2$

Referencias bibliográficas

1. Barnett, R. (1995). *Álgebra elemental. Serie Schaum*. McGraw Hill. México.
2. Gobran, A. (1990). *Álgebra elemental*. Iberoamérica. México.
3. Jiménez, D. (2002). *Álgebra: La Magia del Símbolo, Los libros del Nacional* – Editorial CEC,S.A. Venezuela.
4. MINED,(2010) Álgebra, *Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
5. Perelman, Y. (1978) *Álgebra Recreativa, Ciencia popular*, Editorial Mir, Moscú.
6. Smith, S.; Charles, R.; Dossey, J. 1992. Álgebra. Addison-Wesley. México.
7. Vives, Sergio Macario. 2006, Matemáticas para el siglo XXI, Universitat Jaume.

6° Grado | Lección 9 | Unidad

Tiempo: cuatro horas clases.

Fórmulas
Modelos matemáticos

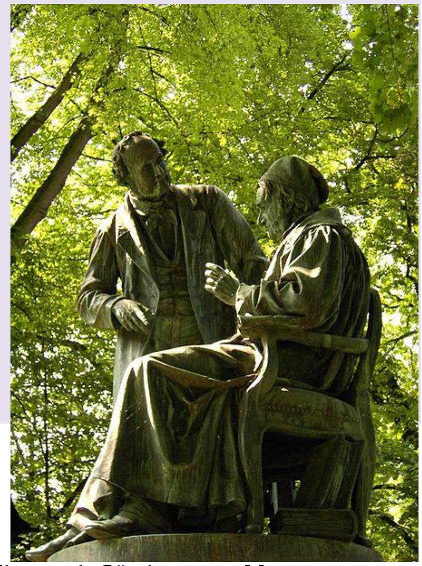


Figura 1. Göttingen – Monumento a Gauss-Weber, cerca de Bürgerstr. El monumento fue creado por Carl Ferdinand Hartzer en 1899.

Descripción del tema

Para separar un patio de otro, se colocan en línea ladrillos negros cuadrados rodeados de ladrillos blancos de la misma forma como se indica en la figura.

¿Cuál es la fórmula que nos permite calcular el número de ladrillos blancos en función del número de ladrillos negros?

Si los ladrillos negros cuestan el doble que los blancos, ¿cuánto costará cubrir una habitación de 11×12 metros cuadrados?

Durante toda esta lección el estudiantado obtendrá las herramientas para resolver este problema y encontrar fórmulas para el cálculo del costo y de construcciones como las siguientes, independientemente de la forma:

Figura 2.construciones de figuras geométricas.

Competencias por desarrollar

- El Cuestionamiento lógico.
- La Comprensión del Contexto.
- La Interpretación de gráficos, expresiones simbólicas, o ambas.
- El Cálculo simbólico.
- El Dominio lógico.
- El Modelaje Matemático.

Objetivo

- Fundamentar que el álgebra es una herramienta que permite la construcción de modelos matemáticos

Presaberes

- Conocimiento de expresiones algebraicas y operaciones aritméticas

¿Qué es una fórmula?

Figura 3. Rāmānujan trabajó principalmente en la teoría analítica de los números y devino célebre por sus numerosas fórmulas sumatorias referidas a las constantes tales como π y la base natural de los logaritmos y números primos.

Es una regla expresada por medio de expresiones algebraicas, son las fórmulas, herramientas que permiten resolver problemas, con la diferencia que los números empleados en los problemas aritméticos han sido sustituidos por letras.

El uso de fórmulas permite la generalización de modelos en ciencias. En la historia de las ciencias son un pilar que se evidencia en la teoría de la relatividad, la mecánica ondulatoria, la radiactividad artificial y en tantos otros ejemplos sobre las que personas de ingenio modelaron los fenómenos científicos matemáticamente.

¿Quién no podrá admirar las fórmulas de Ramanujan, cada una de ellas un trabajo de investigación?

La naturaleza esta descrita en lenguaje matemático. Galileo (1564-1642)

Vocabulario clave

Carl Friedrich Gauss

Considerado “el príncipe de los matemáticos” y el más grande desde la antigüedad, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia.

Patrón matemático

Cuando una secuencia numérica de interés matemático tiene un patrón o ley de formación, esta normalmente viene dada por una expresión algebraica.

Expresión algebraica

Se llama expresión algebraica a toda constante o variable, o bien a toda combinación de constantes y potencias de variables que estén ligadas por alguno de los símbolos +, -, x, ÷, en un número finito.

Término algebraico

Es el producto y/o división de una o más variables (factor literal) y un coeficiente o factor numérico.

Actividad 1. Descubriendo Patrones

En esta actividad serán necesarios los siguientes materiales

1. Una caja de hisopos.
2. Hojas de papel periódico o bond.

Pídale al estudiantado que forme las siguientes figuras, informando que la secuencia continúa, agregando en cada paso un cuadrado más:

Figura 4. Secuencia de cuadrados.

I. Calcular la cantidad necesaria de hisopos para construir la figura que ocuparía el sexto lugar.

II. Calcular la cantidad necesaria de hisopos para construir la figura en el lugar 100 de la figura.

III. Hallar una fórmula para calcular el número de hisopos para el lugar n.

El estudiantado elabora muchas conjeturas, la inicial será hacer las figuras hasta la sexta y contarán el número de hisopos, pero claramente este método no les servirá para el caso de la figura en el lugar 100.

1ª Manera: Contemos los lados y restemos el lado superpuesto $4n - (n - 1)$ y calculemos, para un cuadrado sería $4(1) - (1 - 1) = 4$; si fueran dos cuadrados, serían $4(2) - (2 - 1) = 7$ hisopos; para tres cuadrados serían $4(3) - (3 - 1) = 10$ hisopos y si fuera la sexta figura $4(6) - (6 - 1) = 19$ hisopos, y así sucesivamente.

2ª Manera: Supongamos que vemos n de estas formas ⊐ y un hisopo más para cerrar es decir 3n +1

y contemos para un cuadrado sería $3(1) + 1 = 4$; si fueran dos cuadrados serían $3(2) + 1 = 7$ hisopos, para tres cuadrados serían $3(3)+1 = 10$ hisopos y si fuera la sexta figura $3(6) + 1 = 19$ hisopos y así sucesivamente.

Para la figura 100 serían $3(100) + 1 = 301$ hisopos.

3ª Manera: Seguramente aparecerán más estrategias para este problema, como por ejemplo mirar un cuadrado entero y luego $n - 1$ de las formas anteriores $4 + 3(n-1)$.

Seguidamente será muy importante establecer las equivalencias algebraicas

$$3n + 1 = 4 + 3(n-1) = 4n - (n-1)$$

Todas difieren en el razonamiento, pero todas expresan el mismo modelo matemático.

Un problema para los aventajados sería preguntarse ¿Sí tengo 1,000 hisopos ¿cuántas figuras puedo armar? ¿Cuántos hisopos sobran?

Actividad 2

En esta actividad serán necesarios los siguientes materiales

1. Una caja de hisopos.
2. Hojas de papel periódico o bond.

Pídales al estudiantado que forme las siguientes figuras, informando que la secuencia continúa, agregando en cada paso un triángulo.

Figura 5. Secuencia continua de los triángulos.

I. Calcular la cantidad necesaria de hisopos para construir la figura que ocuparía el sexto lugar.

II. Calcular la cantidad necesaria de hisopos para construir la figura en el lugar 100 de la figura.

III. Hallar una fórmula para calcular el número de hisopos para el lugar n.

El estudiantado elabora muchas conjeturas, la inicial será hacer las figuras hasta la sexta y contarán el número de hisopos; pero claramente este método no les servirá para el caso de la figura en el lugar 100.

Solución de 2ª Actividad

1ª forma: Contemos los lados y restemos el lado superpuesto $3n - (n-1)$ y calculemos, para un triángulo sería $3(1) - (1-1) = 3$; si fueran dos triángulos serían $3(2) - (2-1) = 5$ hisopos; para tres triángulos serían $3(3) - (3-1) = 7$ hisopos y si fuera la sexta figura $3(6) - (6-1) = 13$ hisopos, y así sucesivamente.

Para la figura 100 serían $3(100) - (100-1) = 201$ hisopos.

2ª forma: Supongamos que vemos n de estas formas y un hisopo más para cerrar es decir $2n + 1$ y contemos cuadrado sería $2(1) + 1 = 3$; si fueran dos cuadrados serían $2(2) + 1 = 5$ hisopos; para tres cuadrados serían $2(3) + 1 = 7$ hisopos y si fuera la sexta figura $2(6) + 1 = 13$ hisopos, y así sucesivamente.

Para la figura 100 serían $2(100) + 1 = 201$ hisopos.

3ª forma: Seguramente aparecerán más estrategias para este problema, como por ejemplo, mirar un triángulo entero y luego $n - 1$ de las formas anteriores $3 + 2(n-1)$.

Seguidamente será muy importante establecer las equivalencias algebraicas

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 3 + 2(n-1) \\ &= 3n - (n-1) \end{aligned}$$

Actividad 3

El razonamiento de Gauss

Reflexione con sus estudiantes una estrategia para calcular la siguiente suma:

$$1 + 2 + 3 + \cdots 100$$

Seguramente se cansarán después de hacer la suma de los primeros 20 términos.

Veamos esta posible solución escribamos la suma $1 + 2 + 3 + \cdots 100$

De mayor a menor, en otras palabras

$$100 + 99 + 98 + \cdots + 1$$

Y sumemos:

$$100 + 99 + 98 + \cdots + 1$$

$$1 \;+\; 2 \;+\; 3 + \;\ldots + 100$$

Cuyo resultado es:

$$101 + 101 + \cdots + 101$$

El 101 está 100 veces pero se sumó dos veces. El resultado final es:

$$1 + 2 + \cdots 100 = \frac{100(101)}{2}$$

Podemos calcular la suma de

$$1 + 2 + 3 + \;\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

Actividad 4

Encuentre una fórmula que calcule el número de puntos que están en la figura del séptimo lugar y la figura que está en el quincuagésimo lugar

Figura 6. Secuencia de puntos a) un punto, b) 3 puntos y c)6 puntos.

Solución de actividad

En esta actividad cada estudiante encontrará una variante importante y es la de completar figuras como alternativa de solución.

Notemos que en la Figura 3b) podemos completar una forma cuadrada agregando un punto; tendríamos un cuadrado de lado 2, y sería $4 - 1 = 3$ puntos.

Para la figura 3c) podemos completar un cuadrado agregando 3 puntos; tendríamos una cuadrado de lado 3 y tendríamos $9 - 3 = 6$ puntos, y así sucesivamente.

Pídales que hagan una figura de base cuatro puntos y que verifiquen que para completar el cuadrado necesitan 6 puntos, y entonces el número de puntos es $16 - 6 = 10$ puntos.

¿Qué se observa?

Eso es el número de puntos necesario, siempre es el de la figura anterior, finalmente tenemos que la formula general sería:

Caso 1: $4 - 1 = 2^2 - 1 = 3$

Caso 2: $9 - 3 = 3^2 - 3 = 6$

Caso 3: $16 - 6 = 4^2 - 6 = 10$

Recordemos la **actividad 3** donde reconocemos los números de los casos.

La fórmula general sería $\frac{n(n+1)}{2}$ para calcular el número de puntos, notemos que esta fórmula es la misma que calcula el área de un triángulo de base n y altura n+1.

Actividad 5

Para comentar la siguiente actividad con sus estudiantes, será necesario meditar cada uno de los pasos descritos. Colocando dos puntos, después cuatro puntos más, después seis puntos, más y así sucesivamente se obtiene una serie de rectángulos como se indica en la Figura 7.

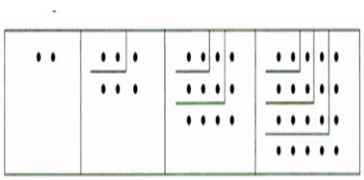


Figura 10. Serie de rectángulos entre puntos.

Contando los puntos de cada uno de los rectángulos, podemos obtener la siguiente secuencia:

$$2, 2 + 4 = 6, 2 + 4 + 6 = 12$$

Notemos ahora que:

$$2 = 1 \times 2, \;\; 6 = 3 \times 2, \;\; 12 = 3 \times 4$$

$$2 = 1 \times 2, \;\; 2 + 4 + 6 = 2 \times 3$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5$$

y así sucesivamente,

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + n = n\,(n + 1)$$

Para el primer cuadro hay 2 puntos; para el segundo, 6; para el tercero 12; para el cuarto, 20; y así sucesivamente hasta el n, cuyo número de puntos es $n(n + 1)$.

Actividad 6

¿Cuál es la fórmula que nos permite calcular el número de ladrillos blancos en función del número de ladrillos negros?

¿Cuánto ladrillos blancos se necesitaran para cubrir una habitación de 11 metros cuadrados?

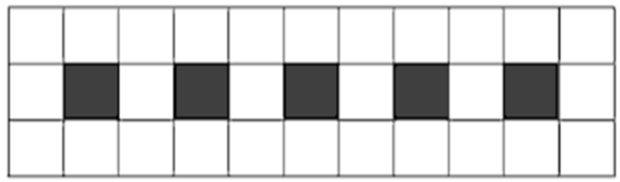


Figura 7. Ilustración de ladrillos blancos y negros.

Solución

Notemos que podemos si tomamos

Figura 8. Ilustración de cuadrícula de ladrillos.

Tenemos ocho ladrillos blancos y uno negro

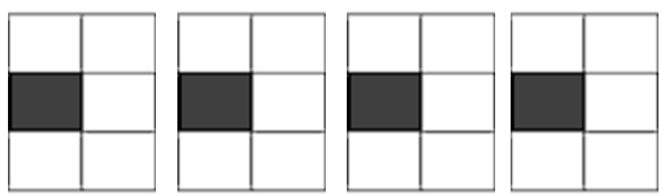


Figura 9. Ilustración de ladrillos los cuales son simétricos.

Entonces ocho ladrillos blancos rodean el primer ladrillo negro y cinco por cada uno de los restantes, es decir $8 + 5\,(n - 1)$, notemos que podemos verificar la cuenta que sus estudiantes deben haber hecho al iniciar la actividad, si son cuatro figuras idénticas tenemos entonces que el total de ladrillos blancos es 8+5(5-1) = 28.

Para la pregunta del rectángulo de 11×12 metros cuadrados la solución es obvia, el número de ladrillos negros es 20 y el total de blancos es $8 + 5\,(20 - 1) = 8 + 5(19) = 103$ ladrillos blancos.

Escriba las siguientes fórmulas con sus estudiantes, para ello deberá desarrollar en cada caso valoraciones de su uso y comentar haciendo algunos ejemplos de cálculo numérico, asignando valores e interpretando el resultado.

1. El recorrido es igual a la velocidad por el tiempo.

2. La densidad de cualquier objeto es la división de su peso entre su volumen.

3. El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura.

4. El volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura.

Soluciones

1) $R = Vt$
2) $D = \frac{P}{V}$
3) $V = \frac{1}{3}Ah$
4) $V = Ah$

Actividad final

En esta actividad pedirá a sus estudiantes que digan cuántos cuadrados tendrá la figura que se encuentra en la posición 10 y, además, dirán cuántos cuadrados habrá de cada color.

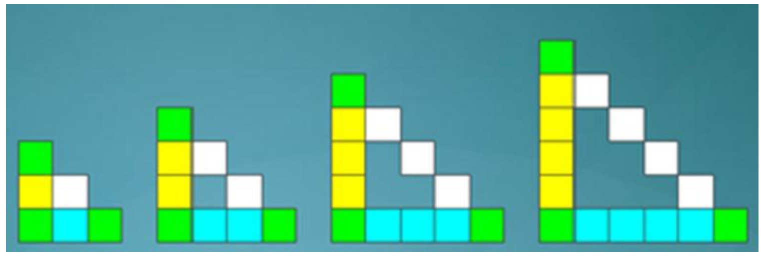


Figura 11. Ilustración de cuadrados de colores.

Solución de la actividad final

Si analizamos en detalle las ilustraciones de la Figura 8, veremos que la primera tiene 6 cuadrados; la segunda, 9; la tercera, 12 y la cuarta, 15, Desde luego, en cada una de esta figuras las verdes son siempre 3, y las celestes parten de 1, 2, 3 y 4, así como las amarillas, blancas y celestes, es decir que el número de cuadrados sería:

$3 + n + n + n$, donde n cuenta desde la primera figura; dicho de otra manera, 3 + 3n calcula el total de cuadrados que hay

Por ejemplo para la 1ª ilustración $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ cuadrados (1 amarillos, 1 celeste y 1 blanco)

Para la 2ª ilustración $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ cuadrados (2 amarillos, 2 celeste y 2 blancos)

Para la 3ª ilustración $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ cuadrados, luego para la ilustración 10 tendríamos:

$3 + 10 + 10 + 10 = 33$ cuadrados y existen 10 blancos, 10 amarillos y 10 celestes.

Si la ilustración fuera la que está en la posición 100, se tendrían:

$3\,(100) + 3 = 303$ cuadrados, 3 verdes y 100 de los otros colores.

¿Cuántos cuadrados amarillos y blancos hay en la posición 125?

$3(125) + 3 = 378$ cuadrados, y existen 125 amarillos y 125 blancos.

Guía de trabajo

Fórmulas y patrones

Problema 1

Para continuar el desarrollo del pensamiento algebraico iniciado en la primaria con la construcción de fórmulas geométricas, se sugiere utilizar sucesiones numéricas y figurativas sencillas para encontrar la expresión general que define un elemento cualquiera de la sucesión. Por ejemplo, dada la siguiente sucesión de figuras:

Se pueden plantear preguntas como éstas:

• Si la cantidad de mosaicos que forman cada figura continúa aumentando en la misma forma:

¿Cuántos mosaicos tendrá la figura que ocupe el lugar 10?

¿Cuántos mosaicos tendrá la figura que va en el lugar 20?

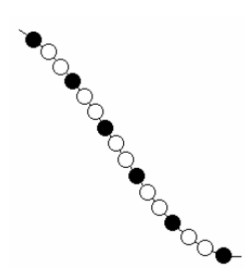
¿Cuántos mosaicos tendrá la figura que va en el lugar 50?

Observación: Es probable que para responder la primera pregunta, sus estudiantes dibujen las figuras, pero para contestar la segunda, y sobre todo la tercera, observarán que deben encontrar una regla, que en principio puedan enunciar verbalmente y luego de manera simbólica, hasta llegar a la expresión algebraica usual.

Fuente:http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/primer.html

Problema 2

El collar dibujado combina dos colores. Su patrón de formación lo podemos expresar como “negra-blanca-blanca, negra- blanca-blanca, negra-blanca -blanca…” o, en modo más abreviado: NBBNBBNBB… donde la N significa una bolita negra y la B una blanca.



Con estos mismos colores fabrica tres collares distintos:

a) ¿Cuál es el patrón correspondiente a cada uno?

b) ¿Cuál es el color que le corresponderá a la bolita 50 de cada uno de tus collares? ¿Y a la 100? Trata de calcular el resultado sin dibujar esa cantidad de bolitas.

c) ¿Los collares que haz fabricado poseerán un número par o impar de cuentas? (Debes trabajar siempre sin romper el patrón de bolitas).

Fuente: http://ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110512_regularidades.elp/collares.html

Problema 3

¿Cuál es el patrón de esta tira de números? ¿Podrías completar los cuadros que faltan?

2	9	16	23			

+7 +7 +7

a) Si continuaras la tira, ¿estaría el número 100 en ella? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Qué ocurre con el número 198? ¿Y con el 200?

c) Escribe un número grande que nunca aparecerá en esta tira. ¿Cómo lo sabes con

Seguridad?

d) Un alumno dice que la regla para saber qué número pertenece a esta tira está dada

Por la fórmula $2 + 7n$ donde, n toma el valor de sucesión de números naturales.

Prueba si es correcta su afirmación.

Problema 4

Martín está ahorrando dinero del que le dan para sus gastos semanales. Tiene actualmente

$ 75. Decide añadir cada semana $ 5 a sus ahorros.

a) Crea una tira de números que comience con el 75 y que muestre el total de ahorros de Martin cada semana.

b) ¿Cuántos son sus ahorros después de 10 semanas?

c) Escribe una fórmula que indique cómo calcular los ahorros de Martín semana a semana.

Problema 5

Analiza la siguiente tira de números.

85	83	81	79	77	75	…	…	…

a) ¿Cuál es el patrón utilizado para formarla?

b) ¿Qué propiedad poseen los números de esta tira?

c) ¿Puedes anticipar qué tipo de números no estarán en ella?

d) Escribe una fórmula para esta tira de números.

e) ¿En qué se diferencia la tira del ejercicio 1 con la de este ejercicio?

Fuente: www.gpdmatematica.org.ar/aula/**patrones**.pdf

Referencias bibliográficas

1. Barnett, R. (1995). *Álgebra elemental*. Serie Schaum. McGraw Hill. México.
2. Bergamini, David. (s.f.) *Matemáticas*: Colección Científica Life-Time.
3. Gobran, A. (1990). Álgebra elemental. Iberoamérica. México.
4. MINED, (2011) Álgebra*, Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
5. Perelman, Y. (1978) *Álgebra Recreativa* Ciencia popular, Editorial Mir, Moscú.
6. Smith, S. (1992). *Álgebra*. Addison-Wesley. México.
7. Vives, S. (2006), *Matemáticas para el siglo XXI*, Universitat Jaume.

6° Grado | Lección 10 | Unidad 10

Tiempo: cuatro horas clases.

Valor numerico y Modelos matemáticos

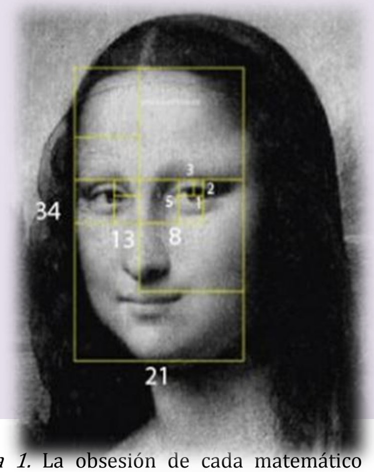


Figura 1. La obsesión de cada matemático siempre será interpretar la naturaleza de las cosas mediante fórmulas y que permitan dar una explicación, por qué no decirlo, hasta del universo.

Descripción del tema

Un juego para Iniciar…

Adivinemos el número propuesto por nuestros estudiantes, para ello

1. Piensa un número.
2. Multiplícalo por 3.
3. Añade 2 al resultado.
4. Multiplica lo que has obtenido por 2.
5. Réstale 4 al resultado.
6. Dime lo que te sale y te diré, rápidamente, tu número inicial.

¿Podría encontrar el truco utilizado para adivinar el número inicial?

Si llamamos x al número inicial, podemos escribir las expresiones algebraicas que obtenemos en cada paso:

1. X
2. 3X
3. 3X+2
4. 2(3X+2)
5. 2(3X+2) - 4

Expresión que simplificamos: 6X

De esto se deduce que:

Si X=1 el resultado es 6

Si x = 2 el resultado es 12

Si X= 3 el resultado es 18

Entonces si dice su estudiante que le sale 48, entonces puedes recuperar el valor inicial de X = 8 deshaciendo la operación.

Competencias por desarrollar

- El modelaje matemática
- El dominio lógico.
- El modelaje matemático.

Objetivo

- Calcular mediante casos especiales y por asignación de valores numéricos el comportamiento de modelos matemáticos del entorno.

Presaberes

- Conocimiento de expresiones algebraicas y operaciones aritméticas básicas, cálculo de áreas de polígono.

Valor numérico: Llamamos valor numérico de una expresión algebraica para unos valores fijos de las letras, al resultado obtenido al sustituir las letras por estos valores fijados y efectuar las operaciones que se nos indique.

¿Qué debemos hacer para verificar si una identidad algebraica es válida o no?

¿Cómo debe conjeturar si para diferentes valores en una expresión algebraica esta siempre es una identidad?

Por ejemplo $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

No es en general una identidad algebraica.

Basta con asignar $x = 2yy = 1$

$$(2+1)^2 = 2^2 + 1^2$$

$$9 \neq 5$$

Lo que prueba que no es una identidad algebraica.

Verifica que las siguientes no siempre son identidades algebraicas, utilizando valores numéricos para cada una de las variables y haciendo simplificaciones:

a) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$

$b)$ $(x-y)(x-y) = x^2 - y^2$

$c)$ $x^2 + x^3 = x^5$

$d)$ $x^{0.2} + x^{0.3} = x^{0.5}$

***La naturaleza está descrita en lenguaje matemático**. Galileo (1564-1642).*

Importante

Algunas igualdades podrían ser:

$$A = 4^2 - 3^2 = 1^2$$

$$7.10^3 = 7000$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

Estas igualdades no tienen el mismo carácter. Para empezar, las igualdades pueden ser ciertas o falsas: la igualdad numérica a) es falsa, pero la b) es cierta. La igualdad algebraica c) es cierta para cualesquiera valores de a y b; sin embargo, la igualdad d) es cierta (decimos que se verifica) para $x = 21$ y para cualquier otro valor de x es falsa.

Actividad 1. Comente con sus estudiantes la siguiente actividad.

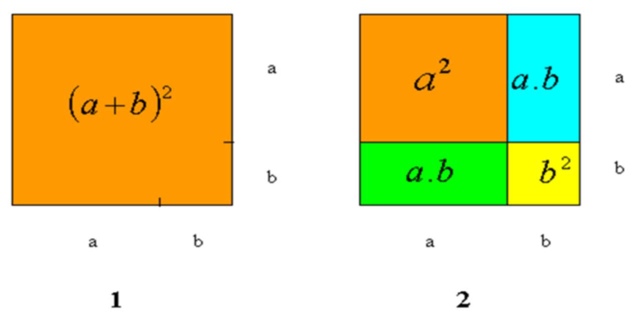


Figura 2. Cuadrados con sus respectivas dimensiones.

Al calcular el área de cada uno, obtenemos las expresiones algebraicas:

1. $A = (a+b)^2$
2. $B = a^2 + 2ab + b^2$

Al ser las figuras equivalentes, ¿cómo son sus áreas?: fíjate que son iguales y que, por tanto, en las dos expresiones al sustituir cualesquiera valores numéricos de las letras *a* y *b*, por ejemplo $a = 5$ y $b = 3$ obtenemos los mismos valores numéricos en las expresiones algebraicas:

$$A = (5+3)^2 = 8^2 = 64; B = 5^2 + 2(5)(3) + 3^2 = 64$$

Importante.

Identidades

Son igualdades que se verifican siempre, tanto si son numéricas o algebraicas. Por ejemplo,

1 + 2 - 3 = 0

que es una identidad numérica y

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

que es una identidad algebraica.

Ecuaciones

Son igualdades que se verifican para algunos valores determinados de las letras. Por ejemplo: $\frac{4}{x-1} = 2x$

es una ecuación que se verifica para $x = 2\ y\ x = -1$. Por otra parte, la ecuación: $x - y = 1$

se verifica para una infinidad de parejas de números: x = 3 , y = 2 ; x = 4 , y = 3 ; x = 10 , y = 9 ; etc.

Soluciones o raíces de la ecuación:

Son los valores numéricos que verifica una ecuación, es decir, los que al ser sustituidos en las letras convierten a la ecuación en una igualdad.

Resolver una ecuación

Es encontrarle la solución.

Incógnitas de una ecuación:

Son las letras que aparecen en una ecuación y deben ser calculadas como valores que cumplen la ecuación.

Actividad 2. Analice el siguiente modelo matemático con sus estudiantes, si es posible haga una demostración del modelo.

Figura 3. Imagen de un péndulo.

El período de un péndulo (T) es el tiempo medido en segundos, que tarda en realizar una oscilación (ida y vuelta) y depende únicamente de su longitud (l), el modelo matemático que representa dicha situación es la siguiente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ es la aceleración de la gravedad de la tierra, T el periodo del péndulo medido en metros y l la longitud del péndulo medido en metros.

Por ejemplo, Al investigar el período del péndulo de 1 metro de longitud, deberemos sustituir la longitud $l = 1$ m en el modelo anterior:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1m}{9.8\ \frac{\text{m}}{seg^2}}} = 2\pi\sqrt{0.102s^2} = 2.007s$$

Es decir, que si se mide con un cronómetro lo que tarda en realizar una oscilación, se vera que tarda 2.007 segundos.

A este resultado lo llamamos valor numérico de la expresión.

Calcule para valores de $L = 0.5\,m$, 3 m y haga un análisis del resultado.

Fuente:http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/46-1-u-ecuaciones.html

Actividad 3. En esta actividad deberá recordar las fórmulas de cálculo de área de figuras geométricas.

El área de un triángulo

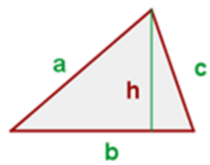


Figura 4. Triángulo de lados a, b, c y altura h.

El modelo matemático para esta área viene dado por la fórmula.

$A = \frac{bh}{2}$ ¿Cuál es el área del siguiente triángulo?

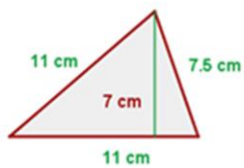


Figura 5. Triángulo de lados 11cm, 11cm, 7.5cm y de altura 7cm.

$$A = \frac{7cm(11cm)}{2} = 38.5cm^2$$

Actividad 4. En esta actividad deberá recordar las fórmulas de cálculo de área del trapecio.

Área del trapecio

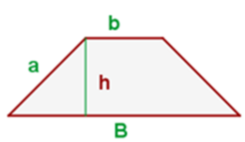


Figura 6. Trapecio de base mayor B, base menor b y altura h, y lados no paralelos con valor de a.

El modelo matemático para esta área viene dado por la fórmula $A = \frac{(b+B)h}{2}$

¿Cuál es el área del siguiente trapecio?

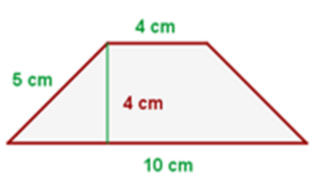


Figura 7. Trapecio de lados no paralelos de 5cm,base mayor de 10cm y base menor de 4cm.

$$A = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(10cm+4cm)4cm}{2} = 28cm^2$$

Actividades interesantes con números

En esta actividad los estudiantes deberán unirse a trabajar en equipos y dar los resultados obtenidos, se deberá discutir los resultados en cada caso.

Mersenne, antiguo matemático, propuso la expresión $2^p - 1$. Al reemplazar **p** por un número entre 1 y 10, ¿cuáles resultan números primos?

Verifica si la siguiente fórmula

$24n + 4(n + 1) + 10$ entrega múltiplos de 7, para $n \in N$.

Evalúa la expresión

$x^2 + x + 41$ para los valores de $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 40$. ¿Qué característica tienen los números que resultan?

Para recordar

Marin Mersenne (8 de septiembre de 1588-1 de septiembre de 1648) filósofo francés del siglo XVII que estudió diversos campos de la teología, las matemáticas y la teoría musical.

La expresión del literal c) durante mucho tiempo se creyó que realmente todos los números que producía eran primos, pero para $n = 40$ Gauss probó que era falso.

Actividad 6

Calcule con sus estudiantes los valores numéricos de los siguientes polinomios cuando $x = 2, 5, 7, -3$ y 0.

a) $\left(\frac{3+x}{5}\right)^2$

b) $\frac{3+x^2}{5}$

c) $3+\frac{x^2}{5}$

d) $3+\left(\frac{x}{5}\right)^2$

e) $\frac{(3+x)^2}{5}$

¿Cuál de las cantidades es un número entero?

¿Cuál es la máxima?

¿Cuál es la mínima?

¿Cuál es racional?

Repita la actividad con las siguientes expresiones algebraicas cuando $x = -3$:

a) $2x + 1$
b) $(2x)^2 - 1$
c) $(2x + 3)^2$
d) $2\,(3x)^2$
e) $\frac{2+3x}{6-x}$
f) $\frac{x-2}{3(x-3)}$

Actividad 7: En esta actividad los estudiantes completarán la siguiente tabla, haciendo cálculos y comparando

x, y	$x - y$	$x + 3y$	$x - 2xy + y$
$x = 1, y = 1$			
$x = 0, y = 1$			
$x = -1, y = 1$			
$x = 1, y = -1$			
$x = -2, y = 0$			
$x = 0, y = -2$			
$x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$			
$x = 2, y = -\frac{1}{2}$			

a) ¿Cuál de las tres columnas genera siempre números positivos?

b) ¿Existe alguna columna que genera siempre valores enteros?

c) ¿Cuál es el máximo valor que se obtiene de todos los resultados?

d) ¿Cuál es el mínimo valor que se obtiene?

Actividad 8. En esta actividad los estudiantes completarán la siguiente tabla, haciendo cálculos, comparando cantidades -

a	b	$a^3 - b$	$0.3a - 0.5b$	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + ab$
1	1			
-1	-1			
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			
0	1			
-4	-3			
$\frac{1}{2}$	0			
-0.1	0.1			
5	10			

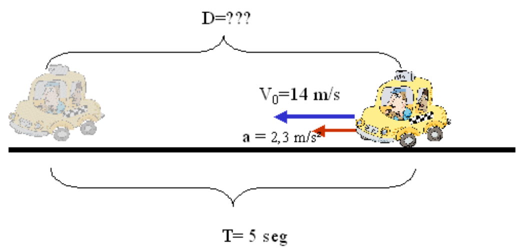
a) ¿Existe alguna columna que dé siempre valores enteros?
b) ¿Cuál es el máximo valor que se obtiene de todos los resultados?
c) ¿Cuál es el mínimo valor que se obtiene?

Actividad final

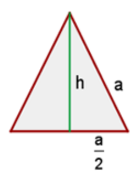
Indicación: En esta actividad será necesario ilustrar cada uno de los modelos matemáticos y hacer referencia a sus aplicaciones, se deberá verificar el buen desempeño de sus estudiantes.

Encuentra el valor numérico de las siguientes fórmulas, aplicando en cada caso solo los valores asignados para las variables respectivas.

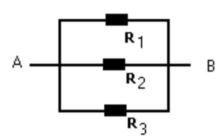
a) $d = v_i t + \frac{at^2}{2}$ Si $v_i = 14 m/seg$, $t = 5$ seg, $a = 2.3\ m/seg^2$ (d : distancia que recorre un móvil)



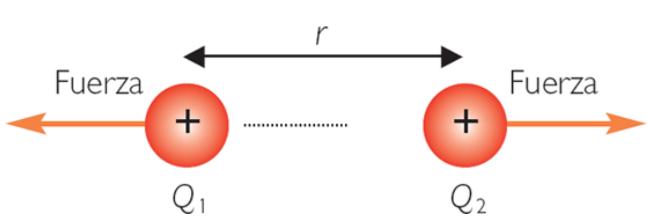
c) $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ Si a = 3,2 m (A : área de triángulo equilátero).



d) $R = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ Si $r_1 = 4$ ohm y $r_2 = 6$ ohm (R : resistencia eléctrica total en paralelo)



e) $F = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$; si $k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{c^2}$; $q_1 = q_2 = 4c$ y $r = 10$ m (F : fuerza atracción entre dos cargas)



Guía de Trabajo

Problema 1

1.Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican

$3x^2 - 2$	para $x = 3$	
$10 - 5x^2$	para $x = 5$	
$\frac{3x}{4} + 2$	para $x = 8$	
$\frac{x^2}{5} + 3$	para $x = 5$	

Problema 2

VAMOS A CODIFICAR EL ABECEDARIO

a. Supongamos que a cada letra se le da un valor:

A	B	C	CH	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
LL	M	N	Ñ	O	P	Q	R	RR	S	T	U	V
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
W	X	Y	Z									
27	28	29	30									

Cada LETRA tiene un valor representado por un número. Cambia la letra por su valor numérico, luego suma los números, el total es el valor de una palabra.

La palabra LUCHAR tiene un valor de 64. Al sumar los números de cada letra

$13 + 25 + 4 + 1 + 21 = 64$. El total se convierte en el valor numérico de la palabra "luchar".

Lee cada palabra, escribe su valor numérico:

vaca

cerdo

perro

león

oso

caballo

b. Busca el valor numérico del nombre de un animal que tenga un valor entre 80 y 100.

Problema 3

1. Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, considere para cada caso $a = 2$; $b = 5$; $c = -3$; $d = -1$ y $f = 0$

a) $5a^2 - 2bc - 3d$

b) $7a^2c - 8d^3$

c) $2a^2 - b^3 - c^3 - d^5$

d) $d^4 - d^3 - d^2 + d - 1$

e) $3(a - b) + 2(c - d)$

f) $\frac{c-d}{2} + \frac{a+b}{7}$

g) $\frac{3}{4}a - \frac{2}{5}c - \frac{1}{2}b + \frac{7}{8}f$

h) $(b+c)^a$

i) $\left((a-b+c)^{(2a-3d)}\right)^f$

2) Valorar $5x^2 - \frac{1}{27}y^6 - 2xyz$, para $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$; $z = 0$

3) Valorar $a^{-1}b^{-2}c^{-3}-a(b+c)^{-1}+\dfrac{(1-a)^{-2}}{\left(b^{-1}-c+1\right)^{-1}}$; para a = $\dfrac{1}{2}$, b = – 1 ; c = 2

4) Valorar $5\left(\sqrt{2mn}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^3}\right)+\dfrac{1}{mn}$; para m = $\dfrac{1}{4}$, n = 2

5) Valorar $\dfrac{a^2bc^{-1}-1}{2ab}-\dfrac{3}{4}a^3bc^2$; para a = $\dfrac{1}{3}$; b = – 6 ; c = 2

Fuente: www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_algebra%20.doc

Referencias bibliográficas

1. Barnett, R. 1995. *Álgebra elemental*. Serie Schaum. McGraw Hill. México.
2. Bergamini, David. *Matemáticas*, Colección Científica Life-Time.
3. Gobran, A. 1990. *Álgebra elemental*. Iberoamérica. México.
4. MINED, (2010) *Álgebra, Cuadernos Curso de Postgrado para Profesores*, El Salvador.
5. Perelman, Y. (1978) Álgebra Recreativa, Ciencia popular, Editorial Mir, Moscú.
6. Smith, S. (1992). *Álgebra*. Addison-Wesley. México.
7. Vives, S. (2006), *Matemáticas para el siglo XXI*, Universitat Jaume.

Viceministerio de Ciencia y Tecnología
Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera "viva" en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación).