Material de Autoformación e Innovación Docente

Matemática

Séptimo Grado de Educación Básica

Versión preliminar para plan piloto

7

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Plaza Masferrer, dedicada a Vicente Alberto Masferrer Mónico, ensayista, orador y periodista de San Salvador nacido el 24 de julio de 1968 y falleció el 4 de septiembre de 1932. En su construcción se utilizó un óvalo y en su interior se ubicó un ovoide en cuyo centro se figura un círculo. En las tres construcciones se emplean circunferencias.

Ministerio de Educación

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Material de Autoformación e Innovación Docente

Para Matemática 7° Grado

Versión Preliminar para Plan Piloto

Plan Social Educativo

Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Mauricio Funes Cartagena
Presidente de la República

Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

William Ernesto Mejía
Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez
Jefe de Educación Media en CTI (Coordinador de Matemática)

Carlos Ernesto Miranda Oliva
Jefe de Educación Básica en CTI (Coordinador de Ciencias Naturales)

Reina Maritza Pleitez Vásquez
Autora

Jorge Vargas Méndez
Revisión de texto

Primera edición (Versión Preliminar para Plan Piloto).

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2537-4217, + (503) 2537-4218, + (503) 2537-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Estimadas y estimados docentes:

El Plan Social Educativo "Vamos a la Escuela" 2009-2014 nos plantea el reto histórico de formar ciudadanas y ciudadanos salvadoreños con juicio crítico, capacidad reflexiva e investigativa, con habilidades y destrezas para la construcción colectiva de nuevos conocimientos, que les permitan transformar la realidad social y valorar y proteger el medio ambiente.

Nuestros niños, niñas y jóvenes desempeñarán en el futuro un rol importante en el desarrollo científico, tecnológico y económico del país; para ello requieren de una formación sólida e innovadora en todas las áreas curriculares, pero sobre todo en Matemática y en Ciencias Naturales; este proceso de formación debe iniciarse desde el Nivel de Parvularia, intensificándose en la Educación Básica y especializándose en el Nivel Medio y Superior. En la actualidad, es innegable que el impulso y desarrollo de la Ciencia y la Tecnología son dos aspectos determinantes en el desarrollo económico, social y humano de un país.

Para responder a este contexto, en el Viceministerio de Ciencia y Tecnología se han diseñado materiales de autoformación e innovación docente para las disciplinas de Matemática y Ciencias Naturales, para los Niveles de Parvularia, Educación Básica y Educación Media. El propósito de éstos materiales es orientar al cuerpo docente para fundamentar mejor su práctica profesional, tanto en dominio de contenidos, como también en la implementación de metodologías y técnicas que permitan la innovación pedagógica, la indagación científica-escolar y sobre todo una construcción social del conocimiento, bajo el enfoque de Ciencia, Tecnología e Innovación (CTI), en aras de mejorar la calidad de la educación.

Los materiales, son para el equipo docente, para su profesionalización y autoformación permanente que le permita un buen dominio de las disciplinas que enseña. Los contenidos que se desarrollan en estos cuadernillos, han sido cuidadosamente seleccionados por su importancia pedagógica y por su riqueza científica. Es por eso que para el estudio de las lecciones incluidas en estos materiales, se requiere rigurosidad, creatividad, deseo y compromiso de innovar la práctica docente en el aula. Con el estudio de las lecciones (de manera individual o en equipo de docentes), se pueden derivar diversas sesiones de trabajo con el estudiantado para orientar el conocimiento de los temas clave o "pivotes" que son el fundamento de la alfabetización científica en Matemática y Ciencias Naturales.

La enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática debe despertar la creatividad, siendo divertida, provocadora del pensamiento crítico y divergente, debe ilusionar a los niños y niñas con la posibilidad de conocer y comprender mejor la naturaleza y sus leyes. La indagación en Ciencias Naturales y la resolución de problemas en Matemática son enfoques que promueven la diversidad de secuencias didácticas y la realización de actividades de diferentes niveles cognitivos.

Esperamos que estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente establezcan nuevos caminos para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemática, fundamentando de una mejor manera nuestra práctica docente. También esperamos que el contenido de estos materiales nos rete a aspirar a mejores niveles de rendimiento académico y de calidad educativa, en la comunidad educativa, como en nuestro país en general.

Apreciable docente, ponemos en sus manos estos Materiales de Autoformación e Innovación Docente, porque sabemos que está en sus manos la posibilidad y la enorme responsabilidad de mejorar el desempeño académico estudiantil, a través del desarrollo curricular en general, y particularmente de las Ciencias Naturales y Matemática.

Lic. Franzi Hasbún Barake
Secretario de Asuntos Estratégicos de la Presidencia de la República
Ministro de Educación Ad-honorem

Dr. Héctor Jesús Samour Canán
Viceministro de Educación

Dra. Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Índice

Primera parte

¿Por qué material de autoformación e innovación docente?

Presentación

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y su programa "Hacia la CYMA" que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en el área de Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular y de autoformación para docentes.

Este material de enriquecimiento curricular para docentes tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática de Séptimo Grado de Educación Básica, introduciendo el enfoque Ciencia Tecnología e Innovación (CTI) como parte inherente y relevante del proceso de formación científica. Con este propósito se han elaborado lecciones con temas pivotes[1] considerados necesarios para la educación de calidad de la niñez salvadoreña, para obtener una fundamentación científica que permita fortalecer las capacidades de investigación, creación de conocimiento y de utilización de ese conocimiento para la innovación.

Se busca que mediante la formación científica se mejoren las condiciones sociales y económicas para alcanzar una vida digna de nuestros futuros ciudadanos. Cada tema de este cuadernillo mantiene una relación con otros materiales curriculares como los programas de estudio, y la colección Cipotas y Cipotes (Guía para Docentes y Libros de texto).

El enriquecimiento que se ha hecho partiendo de temas pivotes, tiene la posibilidad de ser plataforma de construcción de conocimiento, bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se desarrollan competencias matemáticas necesarias, que debe tener una persona para alcanzar sus propósitos de incorporarse de manera propositiva y útil a la sociedad, y sus propósitos formación intelectual, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos, para mejorar su calidad de vida y la de sus comunidad.

1. Un tema pivote es un contenido curricular clave, se considera que si los docentes manejan adecuadamente dichos temas, podrá desarrollar otros contenidos con facilidad y aplicar de forma más pertinente el conocimiento a la realidad en que se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje; por otra parte podrá seleccionar qué contenidos del programa desarrollar y en qué orden, de acuerdo a las necesidades e intereses del grupo de alumnos.

La resolución de problemas en Matemática

Desde asegurar la subsistencia cotidiana, hasta abordar los más complejos desafíos derivados desde la Ciencia y la Tecnología, sin excepción todos resolvemos problemas. Lo vital de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[2], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales de la psicología, ingeniería, física, química, biología, matemática, etc.

En Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas.

¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está el estudiantado resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de un profesor en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se sabe resolver o no; Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que los niños y niñas pueden conocer o ignorar, pero una vez encontrado este algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, tratan de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a la niñez la posibilidad de aprender hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática[3].

[2] José Heber Nieto Said; Resolución de Problemas Matemáticos 2004.
[3] Miguel de Guzmán Ozámiz, (1936 - 2004) matemático español.

Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada por el matemático húngaro George Polya[4] en 1945. Fase que consisten en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado.

Por supuesto hay que pensar que no sólo basta con conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente hay que enseñar también a las niñas y niños, a utilizar las estrategias que conocen, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y los demás, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autoregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[5].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que las niñas y niños sean capaces de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que no sepan qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención y motivación, para que se impliquen en el proceso de resolución. Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que las niñas y los niños visualicen el problema, utilizando materiales concretos, materiales que manipulen, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Descripción de contenidos de cuadernillos

Para elaborar el cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente de Séptimo Grado de Educación Básica se han seleccionado 10 temas a desarrollar, llamados temas pivotes, los cuales han sido considerados fundamentales en la educación de la niñez en este nivel, tanto para desarrollar su nivel cognitivo, desarrollo de cálculo, análisis e interpretación, los cuales son necesarios para el enriquecimiento conceptual, metodológico y de aplicación, adoptando en las lecciones el enfoque en CTS (Ciencia, Tecnología y Sociedad) y CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación) y el enfoque de resolución de problemas.

Para la selección de contenidos, se realizaron los siguientes pasos:

1. Se realizó una revisión de la secuencia lógica que llevan los libros de texto, con respecto a los bloques de contenido.
2. Se revisaron libros utilizados por los docentes para hacer una comparación, y así obtener una perspectiva sobre los contenidos y su secuencia.
3. Se revisaron los temas por unidad de los programas del Ministerio de Educación, de Tercer Ciclo de Educación Básica en la asignatura de Matemática.

[4] George Pólya (1887-1985), matemático Húngaro, How to solve it, Pricenton University Press.
[5] Allan Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

4. Se realizó un análisis detallado sobre los temas específicos en el programa de estudio de la asignatura de matemática, seleccionando 15 temas de la tabla anterior por cada uno de los 3 grados y ordenándolos en bloques de contenidos.
5. Se realizó también una consulta con docentes de Tercer Ciclo de educación Básica, asesores pedagógicos y formadores de docentes de la Universidad de El Salvador.
6. Selección de temas pivotes de séptimo grado de educación básica.

Todo esto, respaldado con estudios e investigaciones de la educación bajo el enfoque en CTI y CTS, permite la creación de temas pivotes que abren una brecha hacia el descubrimiento de nuevos horizontes donde la Matemática, la Ciencia y la Tecnología, ayudan al estudiantado y docentes a desarrollar sus capacidades y forjar pensamiento investigativo-critico-reflexivo y un desarrollo en armonía con la sociedad.

Los temas pivotes han sido estructurados, de tal forma que en pocas páginas se condensan gran cantidad de conocimientos relevantes para la educación básica salvadoreña, entre ellos, se estudian aspectos históricos del desarrollo de la Matemática; aspectos científicos que relacionan la Matemática con su aplicación en otras ramas del saber; actividades que motivan el aprendizaje de las matemáticas y orientan a la aplicación de la misma.

Con la elaboración de estas lecciones se pretende que cada docente tenga una herramienta de apoyo, para consultar dudas, así como para desarrollar actividades que fomenten la creatividad y razonamiento critico, lógico de sus estudiantes. Además de la capacidad de resolución de problemas de la vida cotidiana, fomentando el desarrollo del cálculo mental.

En el desarrollo de la lección de cuadernillo se sugiere la utilización de materiales que se puedan encontrar en el entorno, es decir que sean factibles o se puedan construir sin necesidad de recurrir a grandes gastos económicos, para que la niña y el niño logren un excelente aprendizaje de la Matemática.

Descripción de la estructura de las lecciones

Las lecciones se estructuran normalmente en catorce partes, las cuales se detallan a continuación.

- **a.** **Número de lección y ubicación de la lección en el programa de estudio**. Se detalla el grado, y la unidad a la que pertenece.
- **b.** **Tiempo:** Es el tiempo estimado para aplicar la lección. Este es un tiempo aproximado que el docente puede readecuar según sus necesidades.
- **c.** **Titulo:** Condensa la idea central de la lección, se presenta como una idea clara y precisa del contenido.
- **d.** **Ilustración:** Está inspirada en la historia de la Matemática, o bien en ilustraciones que muestren la aplicación de la temática en la vida cotidiana algunos orientados personajes matemáticos destacados cuya vida y obra inspiran el desarrollo de la lección como elemento motivador.
- **e.** **Introducción del tema:** Presenta una breve discusión de la temática mostrando puntos relevantes que se tratarán en la lección. Es un espacio para generar interés y motivación en cada docente, para que esta curiosidad pueda trasmitirla a sus estudiantes.
- **f.** **Competencias a fortalecer:** Son los conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiantado puede adquirir al finalizar la lección. Se pretende que este, con ayuda de su docente desarrolle las competencias esenciales en matemática para una formación científica de calidad y con capacidad de innovación. Dichas competencias son:
    - i. saber argumentar.
    - ii. Saber cuantificar.

iii. Saber analizar críticamente la información.
iv. Saber representar y comunicar.
v. Saber resolver y enfrentarse a problemas.

g. Objetivos: Son las metas que se persiguen con la lección, es decir, lo que se pretende alcanzar con el desarrollo de la lección.

h. Presaberes: Es un conjunto de conocimientos y habilidades que se estima posee cada estudiante antes de iniciar la lección, los Presaberes también son nombrados conocimientos previos. La existencia de los conocimientos previos requeridos para la lección son identificados mediante actividades diagnóstico.

i. Vocabulario clave: En este apartado se encuentra un pequeño glosario de conceptos básicos de la lección. La elección de estos conceptos se ha realizado con la intención de que sirva de ayuda para comprender algunos términos que se utilizan en el desarrollo de la lección.

j. Relato histórico. Breve relato histórico que guarda estrecha relación con el título de la lección. En este relato se hace referencia a la vida y obra de diversos matemáticos de la historia. Este elemento introduce a la lección el ingrediente motivador, puesto que se identifica el surgimiento de algunas temáticas, así también, la relevancia de las mismas.

k. Marco teórico: Al final del relato histórico se llega a una idea particular, a partir de esta se construye un marco teórico que es el que guía la lección. Esta sección aborda los conceptos, proposiciones y toda la información relevante que se establece como marco de referencia de los tópicos a estudiar.

l. Desarrollo de la lección: Se presenta una secuencia de actividades donde se muestran ejercicios y aplicaciones que explican de forma detallada los objetivos, materiales a utilizar y procesos que se van a seguir. Las actividades propuestas tienen la cualidad de ser de carácter interesante e innovador, buscan relacionar aspectos teóricos, históricos y científicos con algoritmos matemáticos. Las actividades están encaminadas a forjar ideas que construyan la comprensión, el análisis y la resolución de problemas como eje fundamental.

m. Guía de ejercicios y aplicaciones: Hay que hacer una valorización importante en este apartado, la guía de evaluación estará integrada por ejercicios, problemas o una integración de ejercicios y problemas. Esta guía pretende fortalecer los conocimientos y habilidades tanto en docentes como en estudiantes, así también, brindar un punto de partida hacia el estudio de nuevas temáticas.

n. Referencias bibliográficas: Se hacen referencias a texto, videos y otros materiales para que cada docente pueda consultar y profundizar su conocimiento.

¿Cómo utilizar el cuadernillo?

En vista de que para la enseñanza de la Matemática en Séptimo Grado no se cuenta con un libro de texto avalado por el Ministerio de Educación, se propone el Material de Autoformación e Innovación Docente en el que se destacan 10 temas pivotes, que por su relevancia y aplicabilidad en el entorno científico y social han sido enriquecidos introduciendo el enfoque CTI, CTS y resolución de problemas, favoreciendo grandemente el desarrollo de la juventud salvadoreña. El uso de este material en el salón de clases presenta las siguientes situaciones.

a. El material ha sido elaborado pensando en primer lugar, en cada docente, en consecuencia, los conceptos y procesos que se incluyen presentan un nivel de complejidad adecuado para la misma persona docente, quien tendrá que dosificar la información y utilizar algunas de las actividades que se muestran en la lección para hacer que el estudiantado comprenda la temática.
b. La historia de la matemática es un elemento enriquecedor que favorece el desarrollo de la lección

brindando el ingrediente motivación, además orienta al lector acerca de los fundamentos que dieron lugar a la concreción de un tema específico.

c. Posteriormente, es indispensable verificar los conocimientos del estudiantado mediante un diagnóstico, para corroborar si cumple o no con los presaberes necesarios para comprender la temática, considerando que algunas temáticas pueden ser abordadas de diversas formas.
d. Las actividades contenidas en cada una de las lecciones, muestran situaciones de aprendizaje donde el estudiantado en conjunto con su docente construyen conocimientos y resuelven problemas siguiendo una secuencia de pasos inspirados en el proceso de resolución de problemas de G. Polya. Los procesos que se describen no son arbitrarios, únicamente se muestra una opción, tanto docentes como estudiantes pueden proponer otras estrategias de abordaje de problemas y de desarrollo de las actividades.
e. El Cuadernillo de Autoformación e Innovación Docente, puede utilizarse además como guía para el desarrollo de una clase, puesto que posee elementos que orientan la utilización del mismo, así también, describe los materiales y procesos que se han de realizarse durante la clase.

Matriz de justificación de lecciones propuestas y su ubicación en el programa de estudio de Tercer Ciclo de Educación Básica, Séptimo Grado, Matemática.

LECCIÓN 1 Números enteros

Unidad 1: Apliquemos los números enteros

Justificación:

El estudio de los números enteros debe ser pieza fundamental para comprender operaciones, que con los números naturales no sería posible realizar; en efecto, los fenómenos en la vida cotidiana, temperatura bajo cero o sobre cero, el desplazamiento en un ascensor, etc., son por lo general representaciones de números enteros; por tanto, es necesario incluir a nuestro sistema de numeración, que nos servirá como desarrollo de aplicaciones tanto en las ciencias naturales, como en la economía, etc., implementando en ella algo de la historia de números enteros, las operaciones, leyes y representación gráfica mediante procesos que orienten al estudiantado hacia el desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida cotidiana, mostrando actividades que orienten a cada docente a obtener un resultado favorable.

LECCIÓN 2

Unidades métricas de longitud y de superficie

Unidad 2: Utilicemos unidades de superficie

Justificación:

El estudiantado debe tener comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles; de las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones, conociendo la historia de la evolución de las unidades básicas de longitud, potenciando que la unidad fundamental es el metro, y mostrando sus múltiplos y submúltiplos, al igual que las medidas de superficie que es el metro cuadrado, estableciéndolos mediante actividades de resolución de problemas, donde se utilicen estas unidades y se vincule con las ciencias naturales; mostrando diferentes estrategias y potenciando el cálculo mental en las conversiones de unidades.

LECCIÓN 3

Números racionales y fracciones equivalentes

Unidad 3: Operemos con números racionales.

Justificación

Los números racionales están formados por números enteros que pueden ser divisibles o no entre sí. De esta manera se forma un nuevo conjunto de números denominados Racionales, o lo que comúnmente se llaman fracciones. Es necesario trabajar las operaciones de los números racionales mediante ejemplos que conlleven a reflexionar al estudiantado sobre la presencia de las fracciones en distintos contextos: situaciones de compra o consumo, figuras geométricas, etc.

También la relación de las fracciones equivalentes para identificar que ciertas cantidades son idénticas y varían sólo por un múltiplo o submúltiplo de dicha cantidad, todo esto involucrando la resolución de problemas como herramienta de aprendizaje en el educando.

LECCIÓN 4

Circunferencia y Círculo

Unidad 4: Calculemos áreas circulares y utilicemos medidas

Justificación

Es importante que el estudiantado sepa diferenciar entre círculo y circunferencia, y además que reconozca características como lo son: centro, radio, diámetro, y otros elementos que se utilizan con ángulos en una circunferencia, de tal manera que los orienten para estudios posteriores. La mayor parte del tiempo el estudiantado tiende a confundir dichos conceptos, se trabajará dichas temáticas mediante aplicaciones de la vida cotidiana, o integrando con otras ciencias, nuestro entorno toma la forma de una circunferencia o de un círculo.

Cada estudiante utilizará de manera correcta los términos mencionados, y podrá conocer otras características utilizando los ángulos, y conociendo cuerdas, arcos que se utilizarán para detallar aspectos relevantes en este estudio de la circunferencia y el círculo.

LECCIÓN 5

Medidas de Capacidad y Volumen

Unidad 4: Calculemos áreas circulares y utilicemos medidas

Justificación

Las medidas de capacidad y de volumen son temáticas que ayudan al estudiantado a comprender, aspectos relacionados a la física y la química. Es por ello que se deben estudiar las formas de algunos objetos, que permiten contener sustancias; esos objetos se llaman recipientes y de ellos se puede medir tanto su capacidad como su volumen. También se puede conocer el volumen de su contenido. Es importante que se sepa que todos los objetos tienen un volumen ya que todos ocupan un lugar en el espacio; y no solo trabajar las unidades de conversión; además, es importante identificar la relación que hay entre estos dos unidades para no tratarlas como dos temas que no tienen relación, e interrelacionar los problemas de aplicación mediante ejemplos de ayuden al estudiantado a reflexionar sobre la temática.

LECCIÓN 6

Proporcionalidad y conversiones

Unidad 4: Calculemos áreas circulares y utilicemos medidas

Unidad 5: Utilicemos proporcionalidad

Justificación

Se debe trabajar la definición de razón y proporción, de manera que también logremos utilizar las conversiones para desarrollar de manera eficiente las resolución de problemas y no sólo trabajar ejercicios, sino más bien proponer problemas donde involucremos procesos de conversión de unidades de medida, o bien donde se puedan utilizar en las diferentes ciencias.

Al estudiantado se le dificulta diferenciar la correcta utilización y saber aplicar la proporcionalidad inversa y cuándo la proporcionalidad directa. Se propone para ello abordar los temas proporcionando ejemplos de uso cotidiano e interrelación con las ciencias naturales, fomentando el análisis e interpretación de dichos problemas, para que sean capaces de identificar y diferenciar las proporciones, así como también las conversiones de las unidades agrarias en donde se utilicen las proporciones para brindar apoyo en el conocimiento de estas unidades de medida.

LECCIÓN 7

Plano cartesiano

Unidad 5: Utilicemos proporcionalidad

Justificación

El plano cartesiano debe dar orientaciones o conocer regiones. La teoría de situaciones didácticas postula que el aprendizaje se obtiene por enfrentamiento a un "medio".

La estructuración del "medio" didáctico precisa de un nivel objetivo. El plano cartesiano cumple en ocasiones la función de "medio" material en este nivel. El uso correcto implica la capacidad de tránsito entre los distintos "medios" materiales a que da lugar éste. Las escalas juegan entonces un papel central, mostrar las propiedades y la representación, así como resolver ejercicios y problemas en nuestra vida cotidiana.

Es importante relacionarlo a otras ciencias, además de introducirnos a conocer ciertas funciones básicas, para la realización de problemas cotidianos u orientaciones. En física, se utiliza el plano para orientar movimientos entre ciertos objetos, y orientar la posición de estos en un tiempo determinado.

LECCIÓN 8

Lenguaje Algebraico

Unidad 6: Conozcamos y utilicemos álgebra

Justificación

En el programa de estudio se le llama a esta temática álgebra; sin embargo, la palabra álgebra es muy extensa para llevar un estudio exhaustivo en una sola lección; y lo que se trabaja en esta temática es la nomenclatura, pero al igual que las temáticas de números enteros y racionales sólo se orientan a realizar procesos mecanizados y memorísticos, lo cual no permite al estudiantado desarrollar su análisis y comprensión de los problemas.

Con el lenguaje numérico realizamos operaciones en las que sólo aparecen números. El lenguaje que utiliza letras y números unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas, se denomina lenguaje algebraico. En esta ocasión se pretende pasar del lenguaje cotidiano, al lenguaje simbólico, por ello el cambio de nombre a la temática.

Se debe fomentar en el estudiantado la convicción de que el análisis, comprensión y desarrollo de la lectura del problema cotidiano nos ayuda a la traducción del lenguaje común a lenguaje algebraico, para la resolución de problemas.

LECCIÓN 9

Exponentes, propiedades y notación científica

Unidad 7: Utilicemos exponentes

Justificación

El estudio de los exponentes con su significado y las propiedades, son abordados en el programa; sin embargo, no se hace énfasis en realizar estas propiedades utilizando problemas cotidianos. Es por esto que se debe señalar la presencia y utilidad de las potencias y la notación científica en distintos contextos reales.

La expresión de números en notación científica también es importante, porque en diversas ocasiones es más factible utilizar la notación que escribir cantidades sumamente grandes o muy pequeñas.

LECCIÓN 10

Operaciones básicas con monomio

Unidad 6: Conozcamos y utilicemos álgebra

Justificación

Se sugiere trabajar las 4 operaciones fundamentales en un monomio; sin embargo, en los libros de textos se trabajan los procesos mecanizados y sin dar importancia a la utilización de los monomios que son vistos en fórmulas de Física por ejemplo.

Se debe abordar con las operaciones básicas del monomio determinando que un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

En estas expresiones se deben seguir procedimientos básicos para calcular las operaciones de sumas, restas, productos y cocientes. Estudiantes no logran realizar cada uno de estos procesos, porque lo toman como algo mecanizado o memorístico, es por esta razón que se pretende retomar dicha temática y convertir no sólo en procesos, sino también buscando conocer los monomios y así desarrollar las aplicaciones del lenguaje común, al lenguaje algebraico.

Segunda parte

Lecciones

Contenidos trabajados con enfoque CTI.

Lección 1 **7° grado** **Unidad 1** **Tiempo: 5** horas clase

Números Enteros

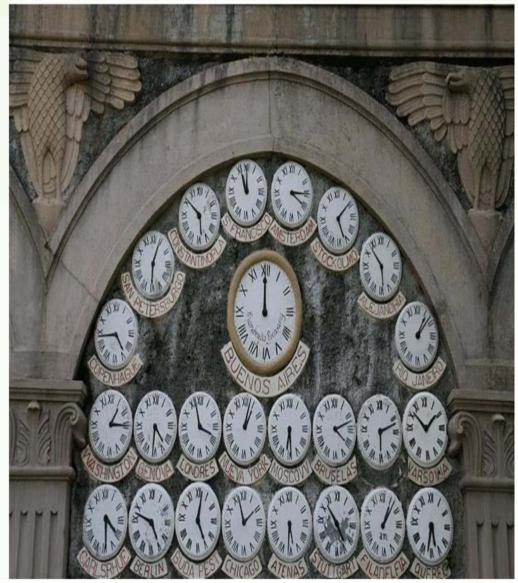


Figura 1. Composición con los distintos husos horarios del mundo. En la esfera central, marcando las 12 en Buenos Aires, se lee el mensaje “Cronómetro Escasany”.

Introducción del tema.

La Tierra tiene su movimiento de rotación de oeste a este, y se ha dividido en 24 franjas que son los husos horarios. Cada huso horario corresponde a cada una de las 24 horas del día. Así, si en El Salvador es una hora X, en los lugares ubicados que están hacia el oeste será más temprano.

Se llama hora universal o huso cero a la hora del meridiano de Greenwich, cada vez que se pasa de un huso a otro se pierde o se gana una hora, según se vaya hacia la izquierda o hacia la derecha, respectivamente. La hora cero corresponde a las 12 p.m., o sea, al comienzo de un nuevo día.

Cuando en la ciudad de Greenwich (Inglaterra) son las 0 horas, en El Salvador son las 6 p.m. del día anterior, por lo que nos encontramos en el meridano -6.

Competencias a desarrollar.

- Construir e interpretar modelos matemáticos.

Objetivos.

- Comprender el número entero como una variación o como un estado.
- Desarrollar la operatividad con números enteros.
- Desarrollar las leyes de signos.

Presaberes.

- Operaciones con números naturales.

Reseña Histórica de los números enteros.

Desde los comienzos de la matemática deductiva en Grecia, el concepto de número entero, como el de número en general, está vinculado con las nociones de cantidad y magnitud.

Es importante señalar que los números enteros o números con signo no responden tanto a la necesidad de modelar matemáticamente situaciones del mundo sensible. Es en el contexto algebraico donde aparecen las condiciones que hacen posibles y deseables la introducción de los números con signo, precisamente para el desarrollo de la misma álgebra. Así la aparición de los números negativos es más tardía que la de los naturales, fraccionarios e irracionales.

Los números negativos pasan a lo largo de la historia matemática por etapas que van desde el rechazo, admisión con cautela, hasta su legitimación, dándose esta última etapa durante el siglo XIX.

En el siglo XVII se conoce la mayoría de datos sobre los números negativos que son necesarios para establecer la estructura de los números enteros. Sin embargo, las distintas nociones, fenómenos, conceptos y propiedades no están suficientemente depuradas y no se presentan articuladas en una estructura coherente.

Cronológicamente los números negativos pasan por los siguientes sucesos que marcan su desarrollo hasta su aceptación plena:

- **Simon Stevin** (1548-1620) acepta los números negativos como raíces y coeficientes, utilizándolos como herramientas de cálculo.
- **Albert Girard** (1595-1632) fue el primero en aceptar la existencia de raíces negativas como solución de ecuaciones algebraicas, meditando el hecho de la aparición de estas soluciones consideradas como imposibles.
- **René Descartes** (1596-1650) desarrolla la perspectiva algebraica y, condicionado por el razonamiento aritmético, considera que son sensatas y verdaderas raíces aquellas que son positivas, mientras que las raíces negativas son falsas. Descartes dota de significado a las raíces negativas de una ecuación mediante su geometría analítica, como valores situados a la izquierda del origen de coordenadas, y hace uso de ellas.
- **John Wallis** (1616-1703) acepta los negativos con todas sus consecuencias, e incluso da reglas para operar con potencias de exponentes negativos. Fue uno de los primeros matemáticos en reconocer la importancia de la generalización de exponentes, para así incluir los números negativos, fraccionarios, positivos y, en general, los enteros.
- **Jean le Rond D'Alembert** (1717-1783) expresa sus reservas respecto a las cantidades negativas, entre otras razones porque considera que la complejidad del concepto presenta dificultades no resueltas, o no suficientemente aclaradas. Una de las dificultades consiste en establecer que su valor es menor que cero. Otra dificultad se presenta cuando se toma como cantidad negativa una cantidad positiva, pero en una falsa posición respecto del cálculo, ya que se presentan como sumandos y no como sustraendos. De ahí, concluye, que se pueden aceptar las cantidades negativas de manera aislada, pues estas deben definirse siempre en relación con las cantidades positivas.

- **Leonhard Euler** (1707-1783) acepta las cantidades negativas y justifica su construcción en forma análoga a los positivos, pero en lugar de incrementos, utiliza sustracciones sucesivas de unidades; además, los considera números enteros y define la regla de los signos; también considera su existencia como entidades independientes. Euler comprende la naturaleza abstracta de los números negativos, pero aun no dispone del aparato y la estructura algebraica moderna para formalizarlos axiomáticamente, como actualmente se les acepta.
- Finamente, **Herman Hankel** (1839-1873) reconoce y legitima los números negativos como cantidades independientes con una estructura algebraica propia, otorgándoles estatus de números enteros. Hankel afirmaba que las leyes de composición no son propiedades de los números, sino que estas leyes, que se establecen por definición, crean el correspondiente campo numérico. Así apoyándose en la ley de composición interna y las leyes del cálculo, estableció la construcción del sistema numérico de los enteros.

El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

Existe una gran variedad de modelos concretos en la enseñanza de números enteros, algunos ejemplos de estos son: pérdidas y ganancias, deudas y haberes, personas que entran o salen de un lugar, personas que suben o bajan de un medio de transporte, temperaturas medidas por un termómetro, altitudes sobre o bajo el nivel del mar, años antes o después de Cristo, objetos o seres que recorren un camino con dos sentidos de recorrido, posiciones y desplazamiento sobre la recta numérica. Cada una de estas situaciones se expresan con un número natural y el signo $+$ o – delante de dichos números, donde el signo más ($+$) puede representar un ingreso o incremento o el viaje en un sentido determinado, mientras que el signo menos (–) puede representar un egreso o una disminución o el viaje en el sentido contrario. Estas situaciones obligan a extender el conjunto de los números naturales hasta llegar al conjunto de los enteros. Para ello, hacemos lo siguiente:

- Consideramos los números naturales como enteros positivos, identificándolos por ende con el signo positivo, por ejemplo, 7 con $+7$, 10 con $+10$, 115 con $+115$, etc.
- Por cada entero positivo, añadimos el correspondiente entero negativo; estos enteros negativos se identificarán con el signo contrario, es decir el negativo, por ejemplo al $+7$ le relacionamos el -7, al $+10$ con el -10, etc.

Dada la necesidad de definir una relación de ordenamiento compatible con la suma, se define el ordenamiento de los números con el signo que utilizan a partir de las reglas siguientes:

- Para cualesquiera n y m números naturales se tiene que $-n < m$.
- Si $n < m$, entonces $+n < +m$
- Si $n > m$, entonces $-n < -m$

El conjunto de los números enteros suele designarse por $\mathbb{Z}$. En el siguiente cuadro se muestran las propiedades de los números enteros, suponga a, b, c $\in \mathbb{Z}$.

Propiedad	Adición	Multiplicación
Clausura	$a + b \in \mathbb{Z}$	$a \times b \in \mathbb{Z}$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
Elemento inverso	$a + (-a) = 0$	No existe
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	
Uniforme	Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$	Si $a = b$ entonces $a \times c = b \times c$
Cancelativa	Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$	Si $a \times c = b \times c$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$
Orden	$a < b$ si y solo si $b - a > 0$	
Transitiva	Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$	
	Entre dos enteros existe un número finito de enteros	
	$\mathbb{Z}$ no tiene ultimo ni primer elemento	

Todo números entero tiene un antecesor y un sucesor

Figura 2. Aplicación de números enteros.

Un número con signo puede tener dos interpretaciones: un estado o una variación. Un ejemplo de ello viene dado en el caso de las temperaturas donde -2 puede bien significar que la temperatura es 2 grados por debajo del cero, por lo tanto muestra un estado, o puede significar que la temperatura ha sufrido un descenso de 2 grados, por ende muestra una variación. Análogamente, +2 puede significar que la temperatura es 2 grados por arriba de cero o que la temperatura se ha incrementado en 2 grados.

Metodológicamente hablando, si bien hemos dicho que en el aula se utiliza una gran variedad de modelos para entender el uso de los enteros, también es conveniente incluir otros métodos para la interpretación de las operaciones básicas y la comprensión de las leyes de signos. De ahí que, dentro de las actividades 2 y 3 de esta lección, desarrollaremos el método de fichas de colores para obtener las leyes de los signos:

$$(+)(+) = +$$

$$(+)(-) = -$$

$$(-)(+) = -$$

$$(-)(-) = +$$

Este método funciona de la siguiente forma: Se necesita un área de trabajo para realizar las operaciones indicadas, el pupitre funcionará; además, es necesario tener fichas de dos colores, un color para representar los positivos y otro color para representar los negativos. Acá la operación suma se entiende como la actividad de agregar y la operación resta como la actividad de retirar. Es importante notar que una ficha positiva se cancela con una ficha negativa, por lo tanto podemos retirar o agregar parejas de fichas de colores opuestos según convenga en el área de trabajo. Este resultado se puede mostrar de muchas maneras prácticas, por ejemplo: caminar un metro hacia la derecha y luego uno hacia la izquierda produce una variación total de cero, pues se regresa al mismo punto; que la temperatura disminuya un grado por la mañana y aumente un grado al mediodía producirá un cambio igual a cero en la temperatura.

Actividad 1

Objetivo

Distinguir el número entero en su aplicación como un estado o una variación.

Este trabajo puede ser realizado de forma grupal o individual, y luego discuta en clases por qué se ha llegado a esas conclusiones.

Complete el siguiente cuadro, indicando con una X si la situación es una variación o un estado, y agregue el valor numérico correspondiente. En las partes donde la situación no esté escrita, agregue una frase que describa las características que se indican.

Situación	Estado	Variación	Número entero
Al medio día la temperatura subió 5 grados			
Faltan 5 minutos para que termine la clase			
Me comí dos pupusas en el receso			
Mi equipo de futbol gano por 2 goles			
La temperatura de ebullición del alcohol es 78°			
El agua se vuelve hielos a los 0°			
El Avión descendió 3000 metros para aterrizar			
		X	-3
		X	+4
		X	-5
	X		+2
	X		-4

Actividad 2

Objetivo

Desarrollar la operación suma y resta en el conjunto de los números enteros e introducir las leyes de los signos.

Materiales:

Fichas de color (azul y verde) por ejemplo.

Cuaderno de trabajo.

Indicaciones:

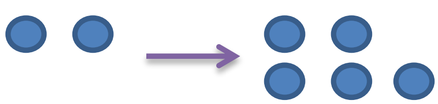
En esta actividad haremos uso de las fichas de colores y trataremos de sacar conclusiones que nos ayudarán luego a obtener las leyes de los signos.

Desarrollaremos acá, paso a paso, el trabajo de las siguientes cuatro operaciones:

$$(+2) + (+3), (+2) + (-3), (+2) - (+3), (+2) - (-3)$$

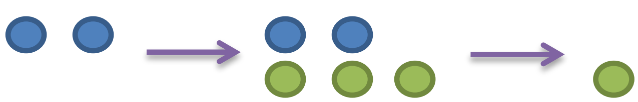
Note que estamos jugando únicamente con los valores 2 y 3, tomando 2 siempre positivo y 3 tanto positivo como negativo, y realizando operaciones con suma y resta.

- (+2) + (+3): A dos fichas de color positivo AGREGAMOS tres fichas del color positivo. En el área de trabajo tendríamos:



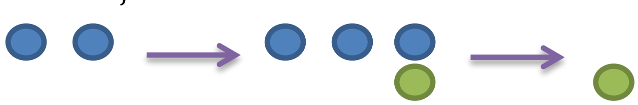
Entonces el resultado final sería: (+2)+ (+3)=+5

- (+ 2)+ (- 3): A dos fichas de color positivo AGREGAMOS tres fichas del color negativo. En el área de trabajo tendríamos:



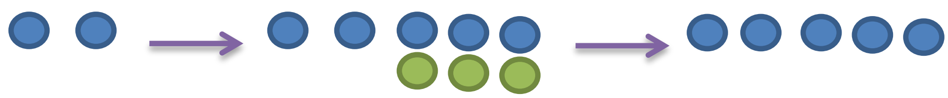
Identificamos y retiramos pares de colores opuestos. Entonces el resultado final seria: (+2) + (-3)=-1

- (+2)-(+3): A dos fichas de color positivo RETIRAMOS tres fichas del color positivo. En el área de trabajo tendríamos:



Debemos retirar más fichas azules que las disponibles, así que agregamos pares de fichas de colores opuestos hasta obtener lo que necesitamos y luego retiramos las fichas que se nos piden. Entonces el resultado final sería: (+ 2) - (+ 3)= - 1

- (+2)-(-3): A dos fichas de color positivo RETIRAMOS tres fichas del color negativo. En el área de trabajo tendríamos:



Debemos retirar más fichas verdes que las disponibles, así que agregamos pares de fichas de colores opuestos hasta obtener lo que necesitamos y luego retiramos las fichas que se nos piden. Entonces el resultado final sería: $(+2) + (-3) = +5$

Luego de realizadas estas cuatro operaciones simples, la pregunta seria: ¿Qué operaciones nos producen los mismos resultados?

$$(+2) + (+3) = (+2) - (-3) = +5$$

$$(+2) + (-3) = (+2) - (+3) = -1$$

La lectura de las operaciones nos indica lo siguiente:

- Si a una cantidad positiva se le agrega otra cantidad positiva, el resultado es equivalente a una cantidad positiva que se le quita una cantidad negativa.
- Si a una cantidad positiva se le agrega una cantidad negativa, el resultado es equivalente a una cantidad positiva que se le quita otra cantidad positiva.

¿Cómo trabajar con el estudiante? Luego de realizar este ejemplo en la clase, pida al grupo que realice las mismas cuatro operaciones, pero ahora en lugar de +2 que tome -2. Realice la misma pregunta final y la lectura correspondiente a las operaciones, con el fin de concluir con que el signo del primer término no es importante más que para determinar el valor del resultado, sin embargo, operacionalmente se desea obtener los resultados siguientes:

AGREGAR positivos = RETIRAR negativos; con signos $+(+) = -(-)$

AGREGAR negativos = RETIRAR positivos; con signos $+(-) = -(+)$

Realice tantos juegos de operaciones como sean necesarios, tanto para reafirmar estas dos conclusiones, como para afinar las operaciones de suma y resta de enteros.

Actividad 3

Objetivo

Desarrollar la operación de multiplicación en el conjunto de los números enteros y concluir la ley de los signos.

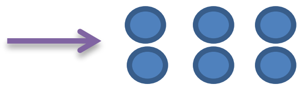
En esta actividad haremos uso de las fichas de colores para obtener las leyes de los signos.

Desarrollaremos acá, paso a paso, el trabajo de las siguientes cuatro operaciones:

$$(+2)(+3),\ \ (+2)(-3),\ \ (-2)(+3),\ \ (-2)(-3)$$

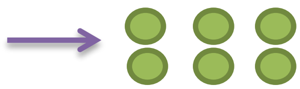
Note que estamos jugando únicamente con los valores 2 y 3, tomándolos tanto positivos como negativos; entenderemos la multiplicación como una extensión de la suma abreviada que trabajamos con los naturales; y definimos el primer factor como la operación a realizar: si es positivo, agregar esa cantidad de veces; si es negativo, retirar esa cantidad de veces; mientras que el segundo factor nos dice el número y el color de fichas a agregar o retirar.

- (+2)(+3): Agregar dos veces tres fichas de color positivo. En el área de trabajo tendríamos:



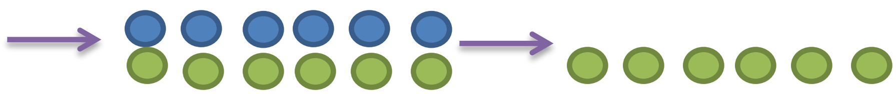
Entonces el resultado final seria: (+2)(+3)=+6

- (+2)(-3): Agregar dos veces tres fichas de color negativo. En el área de trabajo tendríamos:



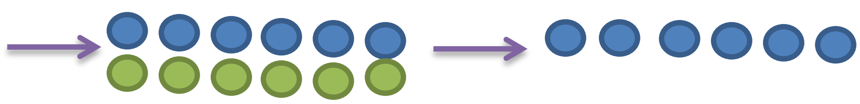
Entonces el resultado final seria: (+2)+(-3)=-1

- (-2)(+3): Retiramos dos veces tres fichas de color positivo. En el área de trabajo tendríamos:



Debemos retirar más fichas positivas (azules) que las disponibles, así que agregamos pares de fichas de colores opuestos hasta obtener lo que necesitamos y luego retiramos las fichas que se nos piden. Entonces el resultado final seria: (-2)(+3)=-6

- (-2)(-3): Retiramos dos veces tres fichas del color negativo. En el área de trabajo tendríamos:



Debemos retirar más fichas verdes que las disponibles, así que agregamos pares de fichas de colores opuestos hasta obtener lo que necesitamos y luego retiramos las fichas que se nos piden. Entonces el resultado final seria: (-2)(-3)=+6.

Luego de realizadas estas cuatro operaciones la pregunta seria: ¿Qué operaciones nos producen los mismos resultados?

$$(+2)(+3)= (-2)(-3)=+6$$

$$(+2)(-3)= (-2)(+3)=-6$$

La lectura de las operaciones nos indica lo siguiente:

- AGREGAR positivos = RETIRAR negativos; con signos (+)(+)=(-)(-)
- AGREGAR negativos = RETIRAR positivos; con signos (+)(-)=(-)(+)

Esa es justamente la conclusión que ya teníamos en la actividad 2. Pero ahora, ¿a qué son iguales estos resultados? Observe que en la primera igualdad el resultado final fue +6, un valor positivo;

mientras que en la segunda fue -6, un valor negativo. ¿Será esto cierto no importa el valor numérico?

¿Como trabajar con el alumnado? Luego de realizar este ejemplo en la clase, pida a sus estudiantes que realicen otro conjunto de cuatro operaciones. Realice la misma pregunta final y la lectura correspondiente a las operaciones, esto con el fin de concluir que, en efecto, los signos del resultado están determinados por los signos que se operan. Obtendríamos entonces:

$$(+)(+)=(-)(-)=+$$

$$(+)(-)=(-)(+)=-$$

Realice los juegos de operaciones que sean necesarios, tanto para reafirmar estas dos conclusiones, como para afinar las operaciones de suma y resta de enteros.

Guía de Problemas

1- Un submarino viaja a 100 metros bajo el nivel del mar, si el submarino sube 40 metros y luego baja 20 metros. ¿Cuál es la variación de la profundidad? ¿A qué profundidad se encuentra?

2- Suponga un edificio con muchos pisos, si nos encontramos en el piso 20 y hemos subido 15 pisos, ¿en qué piso nos encontrábamos? Si luego bajamos 21 pisos, ¿en qué piso nos encontraríamos?

3- Un caracol tiene que subir una pared de 8 metros de altura. Durante el día sube 3 metros pero durante la noche se duerme y resbala 2 metros. ¿Al cabo de cuantos días llega a la cúspide de la pared?

4- Si un traje cuesta $200 y tenemos $175: ¿Podemos cómpralo? ¿Por qué? Si siempre fuera ¿Cuál seria nuestro capital después de la compra?

5- En Egipto se encontró un sarcófago de una persona que murió a los 38 años de edad, en el año 12 después de cristo. Determine en qué año nació esta persona.

Referencias Bibliográficas

1. Ministerio de Educación, El Salvador, 2009, *Álgebra de los números reales*, Cuadernos Curso de Postgrado Para Profesores de tercer ciclo.

Lección 2 7° grado Unidad 2 Tiempo: 6 horas clase

Unidades métricas de longitud y superficie

Figura 1. Fotografía tomada desde el Desvío de Apopa, carretera que se dirige a dicho municipio, ubicado a 10.03 km del centro de San Salvador (www.flickr.com) dato calculado en Google Earth.

Introducción del tema

En 1999 la sonda espacial Mars Climate, de la NASA, se estrelló en Marte y quedó completamente destruida. Según fuentes de la NASA, el desastre se debió a un error en la conversión al Sistema Internacional de Unidades de los datos que se habían suministrado al ordenador de abordo.

¿Por qué ocurrió el desastre? En la construcción y programación de los sistemas de navegación y lanzamiento de la sonda espacial participaron varias empresas, entre estas Lockheed Martin Astronautics de Denver, la encargada de diseñar y construir la sonda espacial, mientras que la Jet Propulsión Laboratory de Pasadena fue la encargada de programar los sistemas de navegación de la sonda.

Pero resulta que los dos laboratorios no trabajan de la misma manera; el primero de ellos, realiza sus medidas y proporciona sus datos con el sistema anglosajón de unidades (pies, millas, libras, etc.), mientras que el segundo utiliza el Sistema Internacional de Unidades (metros, kilómetros, kilogramos, etc.). Así, parece que el primero de ellos realizó los cálculos correctamente utilizando el sistema anglosajón y los envíos al segundo, pero los datos que proporcionó iban sin especificar las unidades de medida utilizadas (¡grave error!).

Lo anterior es tan sólo una muestra de la gran importancia que tiene el uso correcto de las unidades de medida. No es lo mismo utilizar un sistema de unidades que otro. Así el sistema anglosajón mide las longitudes en pies, yardas o millas, mientras que el Sistema Internacional las mide en metros o kilómetros.––

Tomado de M.A. Gómez, I.E.S. Victoria Kent, *El rincón de la Ciencia*

Competencias a desarrollar

Saber cuantificar, representar, comunicar y resolver problemas

Objetivos

- Evidenciar la evolución de la definición de metro a lo largo de la historia.
- Mejorar el desempeño del cálculo mental, mediante actividades de razonamiento lógico.
- Resolver problemas utilizando las unidades de medida de longitud y superficie.

Presaberes

- Operaciones básicas con números enteros y decimales.
- Áreas y perímetros de figuras geométricas.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Metro. Es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en un lapso de $\frac{1}{299{,}792{,}458}$ de segundo, (17ª Conferencia General de Pesas y Medidas, CGPM, 1983).

Unidad de medida compleja. Cuando utiliza varias unidades, por **ejemplo**: (3 m y 80 dm).

Figura2. Unidades de medida compleja.

Unidad de medida incompleja. Cuando sólo se utiliza una unidad, por ejemplo: (28 dm).

Medidas de superficie. Son las que sirven para medir superficies con unidades cuadradas, es decir, en dos dimensiones: largo y ancho.

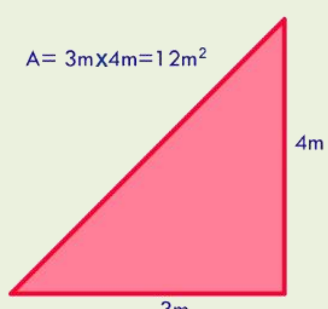


Figura 3 Área de un triángulo.

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

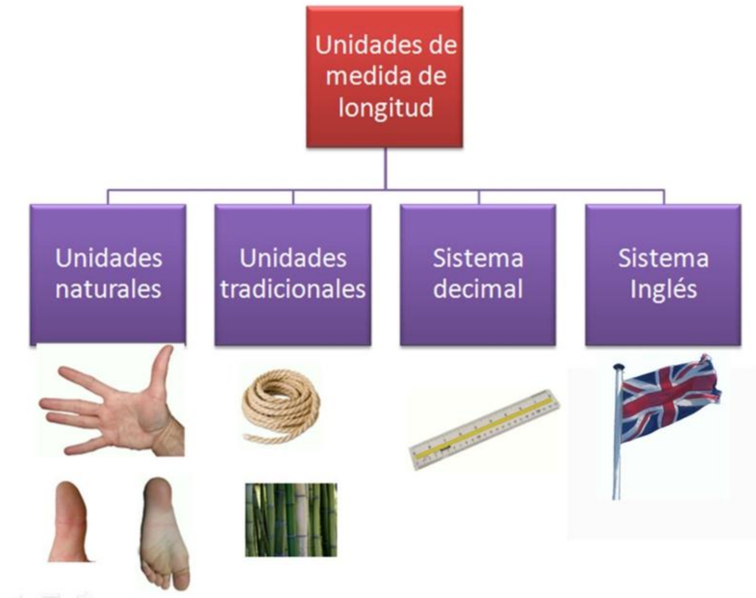


Figura 4. Unidades de medidas de longitud.

Unidades naturales

En la antigüedad las personas utilizaban partes de su cuerpo para medir. Por ejemplo, usaban el brazo, la mano, el pie, el antebrazo, el dedo pulgar y los pasos. El inconveniente de estas unidades de medida fue que variaban según la persona.

Unidades tradicionales

Como las unidades de medida cambiaban según las personas e incluso en la misma persona debido al crecimiento, se establecieron patrones de medida. Cada pueblo desarrolló los propios y de esta forma surgieron las unidades tradicionales: la palma, la vara, el pie, la cana, etc.

Sistema decimal

En 1792 se logró un acuerdo internacional y se adoptó el sistema decimal de medida. Este sistema tiene como unidad inalterable el metro, que corresponde a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Del metro surgieron divisores y múltiplos que dan origen a las unidades que se utilizan a diario.

El sistema métrico decimal es un sistema de unidades de longitud basado en el metro, en el cual los múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida están relacionadas entre sí por múltiplos o submúltiplos de base 10.

Cada unidad de longitud es 10 veces mayor que la unidad inmediata inferior y a unidad inmediata inferior 10 veces menor que la unidad inmediata superior

Tabla 1: símbolo, prefijo e equivalencias en metros

Unidad	símbolo	Prefijo	Equivalencia en metros
kilómetro	km	kilo= 1,000	1,000
hectómetro	hm	hecto=100	100
decámetro	dam	deca= 10	10
decímetro	dm	deci = $^1/_{10}$	0.1
centímetro	cm	centi= $^1/_{100}$	0.01
milímetro	mm	mili = $^1/_{1,000}$	0.001

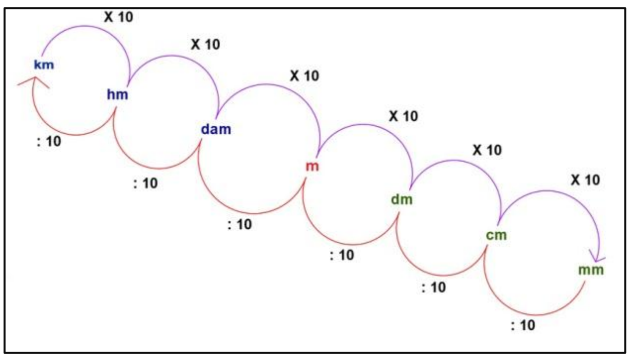


Figura 5. Múltiplos y submúltiplos del metro.

Método de conversión de unidades

Con base a la división de múltiplos y submúltiplos del metro, podemos decir por ejemplo, que 4 km son 400,000 cm, ya que para llegar desde la unidad km a la unidad cm hay cinco posiciones y cada una supone multiplicar por 10 a la anterior. Por tanto, (10 x 10 x 10 x 10 x 10) es igual a multiplicar 100,000 x 4 = 400,000 cm. Si realizamos la conversión de 400,000 cm a kilómetros, nos encontraremos que al pasar de una unidad menor a una mayor, dividiremos entre 10 cada posición que avancemos a la izquierda. Por lo tanto, el cálculo será: (10: 10:10:[6]10) igual a dividir por 100,000 cm.

Sistema inglés

En Estados Unidos y en Inglaterra, si bien se acepta el sistema métrico decimal de medidas se utiliza principalmente el sistema inglés, con unidades y equivalencias en el sistema métrico. Entre las unidades están: la pulgada, pie, yarda, brazada, milla.

Tabla 2: Unidades, símbolos y equivalencias del sistema Inglés al sistema decimal.

Unidad	Símbolo	Equivalencia
Pulgada	pulg	2.54 cm
Pie	ft	30.48 cm
Yarda	yd	91.44 cm
Milla	mi	1,620 m

Unidades de superficie

La unidad fundamental de superficie es el metro cuadrado, y es la superficie que ocupa un cuadrado de 1 metro por lado. Al igual que el metro se divide en múltiplos y submúltiplos, con la diferencia de que hoy se utiliza el producto y el cociente por 100 unidades.

Historia del sistema métrico

Desde los albores de la humanidad se vio la necesidad de disponer de un sistema de medidas para los intercambios. Según estudios históricos, las unidades de medida empezaron a utilizarse en el antiguo egipcio, donde se tomó el cuerpo humano como base (El cuerpo del faraón) para las unidades de longitud, tales

[6] Para los cálculos ":" significará cociente entre dos cantidades

como: las longitudes de los antebrazos, pies, manos o dedos del faraón.

El codo[7], cuya distancia es la que hay desde el codo hasta la punta del dedo medio, conocido como el corazón de la mano, fue la unidad de longitud más utilizada en la antigüedad; de tal forma que el codo real egipcio, es la unidad de longitud más antigua conocida.

El codo, como unidad de medida, fue heredado por griegos y romanos, aunque no coincidían en sus longitudes.

Hasta el siglo XIX proliferaban distintos sistemas de medición. La primera adopción oficial del sistema ocurrió en Francia en 1791, después de la Revolución Francesa de 1789.

La Revolución, con su ideología oficial de la razón pura, facilitó este cambio y propuso como unidad fundamental el metro (medida, en griego). Lavoisier se refirió, en este caso, de la siguiente manera: "Nada más grande ni más sublime ha salido de las manos del hombre que el sistema métrico decimal".

Unidad de longitud

En su inicio, en 1793, se definió como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Luego se materializó en una regla de platino. Posteriormente, fue una barra de Platino-Iridio[8]. Después se redefinió por medio de la longitud de onda de la luz y finalmente en términos de la velocidad de esta.

Actualmente, en la práctica, la unidad de longitud se reproduce y se disemina por medio de láseres estabilizados, lámparas espectrales y patrones materializados de acuerdo a su definición.

Metro

Es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en un lapso de 1/299,792,458 de segundo, (17ª CGPM, 1983).Fue implantado por la Primera Conferencia General de Pesos y Medidas (París, 1889); se pretendía buscar un sistema de unidades único para todo el mundo y así facilitar el intercambio científico, cultural, comercial de datos.

Figura 6. Definición del metro a partir de año 1790 a la actualidad.

Nota: De abajo hacia arriba: péndulo, la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, patrón de latón, patrón de plata, patrón de platino, patrón de platino Iridio una atmósfera, átomo de kriptón, y la definición de metro mediante la luz.

[7] La articulación del brazo y el antebrazo.

[8] Barra de platino-iridio en el punto de fusión del hielo, a presión atmosférica, soportada por dos rodillos, unidad de medida utilizada en 1889-1927.

DIAGNÓSTICO DE CONOCIMIENTOS PREVIOS EN EL AULA

Actividad 1:

Realicemos mediciones de objetos y lugares.

Objetivo

Identificar unidades de medida de longitud y superficie en el entorno.

Materiales

Cartulina o cartoncillo
Regla graduada

Indicaciones

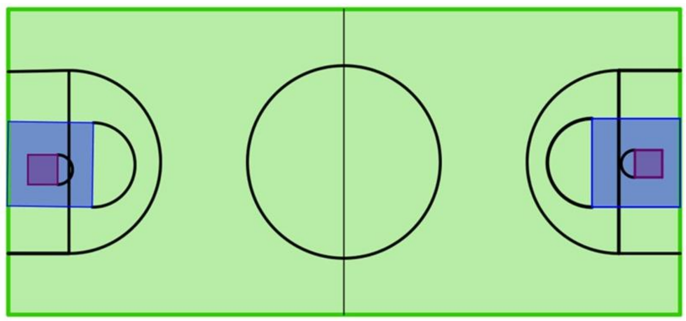


Figura 7. Cancha de Basquetbol.

Formar equipos de 5 integrantes y pedir que elaboren un metro utilizando la cartulina y la regla graduada.

Indicar que hagan mediciones en la cancha, el corredor o el largo del salón de clases; primero, utilizando las unidades de medidas naturales, por ejemplo: pies y manos, de cada integrante del equipo y comparar las medidas. Luego utilizar el sistema métrico de longitud, es decir, el metro. Después hacer las preguntas: ¿varía la unidad de medida del largo de la cancha dependiendo de cada integrante del equipo? ¿Qué sucede cuando utilizamos medidas corporales? ¿A qué se debe el resultado? Puedes acompañar las respuestas con la breve historia de las unidades de medida que ya se te presento en este material. Menciona que antes se utilizaban las unidades de medida naturales, pero al darse cuenta que las medidas varían dependiendo de la persona y que para el comercio esto no era factible; se buscó una unidad de medida que fuese internacionalizada para facilitar el intercambio científico, cultural, comercial de datos. Esa unidad de medida es el metro, que es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en un lapso de 1/299,792,458 de segundo. A manera de ejercicio puedes pedir lo siguiente:

Un objeto que mida un metro:____

Un objeto que mida más de un metro e indica cuánto debe medir: ____________________

Un objeto que mida menos de un metro e indica cuánto debe medir: __________________

Para facilitar la comprensión de esta unidad de medida, puedes pedir a los equipos formados que midan el ancho y largo de la cancha o el corredor de la escuela y preguntar ¿Qué figura geométrica tiene la cancha de tu escuela? ¿Podrían encontrar el área de dicha cancha?

SABÍAS QUE…

Los submúltiplos del metro de los elementos con que trabajan las ciencias biológicas experimentales tienen dimensiones por debajo del metro. Una forma comparativa es el tamaño de las células, las bacterias, los virus y las moléculas. Algunos múltiplos y submúltiplos del metro son:

decímetro (dm): $10^{-1} = 0.1\ m$
centímetro (cm): $10^{-2} = 0.001\ m$
milímetro (mm): $10^{-3} = 0.0001\ m$
micrómetro (µm): $10^{-6} = 0.000001\ m$ (erróneamente indicada como micra)
nanómetro (nm): $10^{-9} = 0.000000001\ m$ (mal nominada milimicra)
angstrom (Å): $10^{-10} = 0.0000000001\ m$

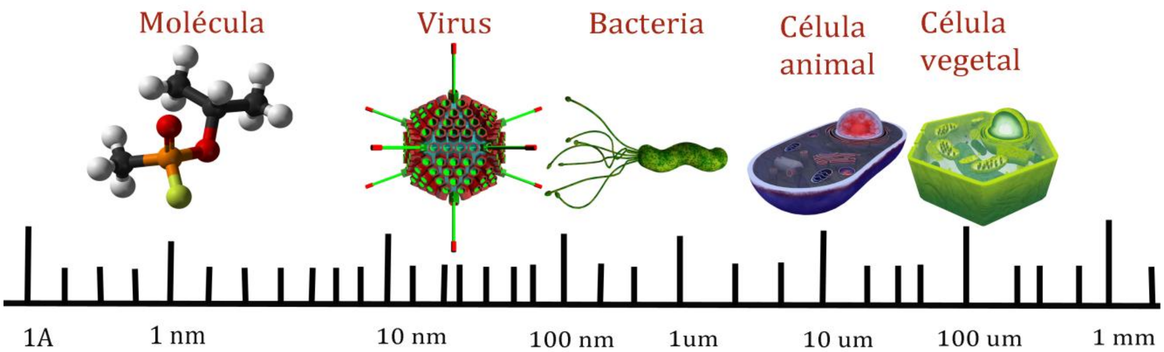


Figura 8. Medidas usadas en biología

De todos los submúltiplos del metro, los más usados son: el milímetro (10^{-3} metros), el micrómetro (10^{-6} metros), el nanómetro (10^{-9} metros) y el Armstrong (10^{-10} metros). En todos los casos, nos estamos refiriendo a entidades microscópicas o submicroscópicas. Es decir, que no son observables a simple vista. Como se muestra en la figura8, las células de los animales superiores tienen diámetros en el orden de decenas de micrones; en el caso de las plantas, hay células cuyo tamaño es de 100 µm o más. Los tamaños de las células del organismo son variables, así por ejemplo: los glóbulos rojos o hematíes miden 7 µm, los hepatocitos 20 µm.

Actividad 2

Encontremos múltiplos y submúltiplos del metro y el metro cuadrado.

Objetivo

Identificar los múltiplos y submúltiplos del metro (m) y del metro cuadrado (m^2)

Instrucciones

Resolver los siguientes problemas:

Melissa opina que la pizarra mide 120 cm de alto por 2.4 m de largo, mientras que Melvin opina que mide 1200 mm de alto por 0.24 km de largo ¿Quién está proporcionando la respuesta correcta?

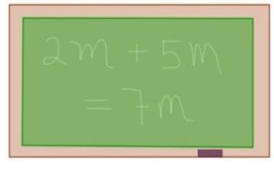


Figura 9. Pizarra

Ambos proporcionan una opinión correcta, a diferencia, pero utilizando los múltiplos o submúltiplos del metro, respectivamente.

Tabla 3: Unidades de longitud múltiplos y submúltiplos del metro

Unidad	Símbolo
kilómetro	km
hectómetro	hm
decámetro	dam
decímetro	dm
centímetro	cm
milímetro	mm

Los primeros tres: el kilómetro, hectómetro y decámetro, son los múltiplos del metro; y los otros, el decímetro, centímetro y milímetro, son los submúltiplos del metro. Así para calcular los múltiplos y submúltiplos del metro, basta con multiplicar por 10 o dividir entre 10 respectivamente.

SABÍAS QUE…

A medida que la Tierra gira sobre su eje, un punto sobre el ecuador se mueve a unos 1,600 km por hora.

Figura 10. Giro de la tierra alrededor del sol

En su giro alrededor del Sol, la Tierra recorre unos 30 km por segundo. En un día recorre más de 2,500,000 km.

Es bastante curioso comprobar que el diámetro de la órbita terrestre es casi exactamente mil veces mayor que la distancia recorrida por la luz en un segundo.

El recorrido anual de la Tierra alrededor del Sol es de casi mil millones de km. Un niño de diez años de edad ha viajado casi diez mil millones de km, aun cuando nunca haya salido de la localidad en que vive. Al girar la Vía Láctea sobre sí misma, el Sol y sus planetas se mueven a unos 250 km por segundo. Aun así, el Sol necesita unos 200 millones de años para realizar un giro completo alrededor del centro de la galaxia. Las galaxias se alejan velozmente unas de otras en el universo. Algunas de ellas recorren más de 100,000 km por segundo. Se necesitaría más de un millón de esferas iguales a la Tierra para hacer una esfera igual a la del Sol. Algunas de las grandes “llamaradas” que brotan del Sol (protuberancias solares) alcanzan una altura de varios cientos de miles de kilómetros. La más alta que se haya registrado tenía 1, 600,000 kilómetros”. Tomado de www.portalplanetasedna.com.ar/cifras_astronomicas.htm

Actividad 3:

Utilicemos las medidas de longitud en la galaxia.

Objetivo:

Utilizar conversiones de los datos encontrados sobre la Tierra y sus movimientos.

Indicaciones

Formar equipos de 5 integrantes y que resuelvan las siguientes preguntas:

- En la medida que la Tierra gira sobre su eje, un punto se mueve alrededor del Sol a 1,600 km. ¿Qué cantidad será en metros y en decámetros?
- La Tierra gira 30 km por segundo alrededor del Sol. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 30 minutos? Convierta el valor resultante en metros.
- El recorrido anual de la Tierra es aproximadamente mil millones de km. ¿Qué cantidad resulta en hectómetros?
- Al girar la Vía Láctea sobre sí misma, el Sol y sus planetas se mueven a unos 250 km. ¿Qué cantidad se convertirá en decámetros, si fueran en milímetros?
- Las galaxias se alejan velozmente unas de otras en el universo. Algunas de ellas recorren más de 100,000 km. ¿Cuántos metros se obtendrían de distancias recorridas?

Para la resolución de estas preguntas se debe auxiliar, del método de conversión de unidades de los múltiplos y submúltiplos proporcionado en la Figura 4.

NOTA IMPORTANTE

Se puede trabajar, con los cuadriláteros y la circunferencia, ya que sus estudiantes tienen una idea de cómo es el área e incluso el perímetro de estas figuras.

De ahí que se espera que sean capaces de realizar las conversiones pertinentes entre las unidades de longitud y superficie, con sus múltiplos del metro y metro cuadrado.

También puede pedirles que no solo cambien a metros, ya que se puede indicar la respuesta de acuerdo a los múltiplos o submúltiplos del metro y metro cuadrado.

En la indicación puede también sugerir que ellos/as realicen la conversión que consideren pertinente para encontrar el área de las figuras.

Actividad 4

Resolvamos problemas con unidades de medida de longitud y superficie.

Objetivo

Utilizar figuras geométricas para realizar conversiones de unidades de longitud y superficie.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Regla graduada.

Indicaciones

Indicar a sus estudiantes que realicen el siguiente planteamiento:

Encuentre el área de los siguientes triángulos en metros a partir de la base y la altura que se proporcionarán. El resultado debe ser en m^2.

Para realizar este tipo de problemas se debe conocer que el área de un triángulo es: $A = \frac{b \times h}{2}$

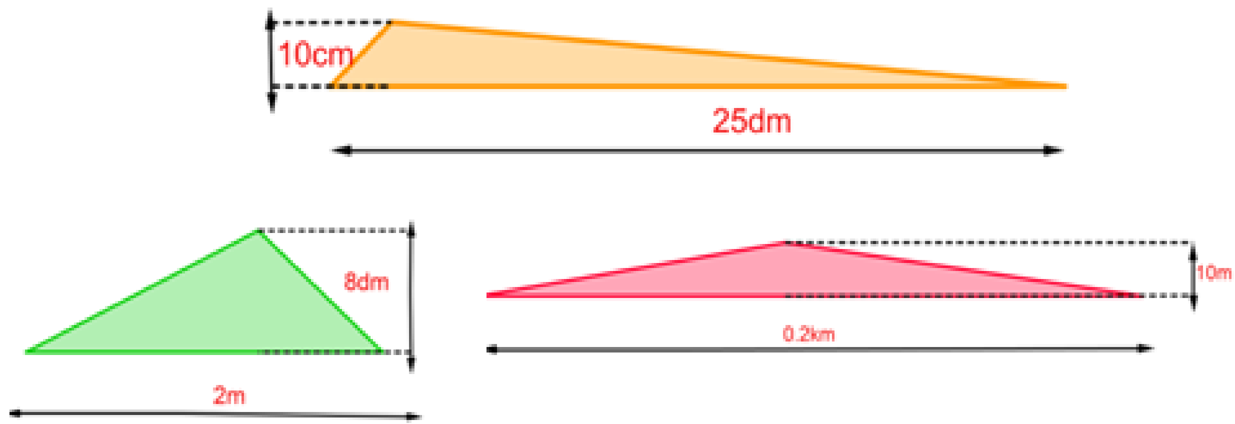


Figura 11: Triángulos en los que se les proporciona la base y la altura en diferentes múltiplos y submúltiplos del metro.

Solución

Primero se realizarán las conversiones mediante la regla de múltiplos y submúltiplos. En el primer triángulo se tiene que la base es 25 dm; como los dm son submúltiplos del metro se dividen los 25 entre 10 y el resultado es en metros. Por tanto, se tiene 2.5 m. Al igual se tiene 10 cm es igual a 0.1 m, lo que al multiplicar da como resultado 0.25 y luego se divide este resultado entre 2 y, por lo tanto, la respuesta es $0.125m^2$. Se hace el mismo proceso para el triángulo dos y el triángulo tres. Así, el resultado es: 0.8 m^2 y 100 m^2.

NOTA IMPORTANTE

Para resolver este tipo de problemas se debe conocer el área de un cuadrado que es: $A = l \times l = l^2$

El área de un círculo que es $A = \pi r^2$ donde r es el radio de dicho círculo.

Para la resolución del primer planteamiento se tiene que encontrar el área de la región sombreada, que es el área del cuadrado menos el área de los 4 arcos que son iguales.

Si notamos, al unir los 4 arcos forman un círculo, lo que hace que el área de la región sombreada sea el área del cuadrado menos el área del círculo.

Actividad 5:

Realicemos mediciones para encontrar áreas sombreadas utilizando medidas de longitud.

Objetivo

Identificar áreas y perímetros de figuras Geométricas utilizando medidas de longitud.

Materiales

Cuaderno de trabajo
Regla graduada

Indicaciones

1. Hallar el área de las figuras sombreadas, cuando el cuadrado mide 4 cm, el cuadrado mide 2 m, el cuadrado mide 3 km.

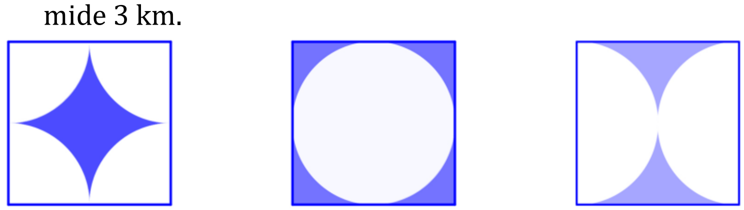


Figura 12. Regiones sombreadas.

Así, se tiene el área del cuadrado es $A_c = 16cm^2$ y el del círculo es $A_{cir} = \pi(2cm)^2 = 4\pi cm^2$ Así, el área de la región es:

$\boldsymbol{A_r = A_c - A_{cir} = 16cm^2 - 4\pi cm^2}$

Una aproximación tomando $\pi = 3.1416$ da como resultado $A_r = 28.57cm^2$

La respuesta se puede dejar indicada o se puede encontrar el valor numérico aproximado.

Caso similar es para las otras figuras y con las otras unidades de medida de longitud.

REPUESTAS

Figura 14. Representación del patio rectangular.

Antonio tiene la razón porque al hacer las conversiones correspondientes y aplicar la definición de perímetro el resultado es 136.

En el segundo planteamiento se pueden obtener dos repuestas entre ellas están:

13,600 m ó la respuesta de 1.36 hm, ya que el resultado puede estar en metros o en hectómetros.

2. Hallar el perímetro en kilómetros del terreno que se representa en la figura 12.

Figura 12: Terreno con 2 km de largo y 1500m de alto

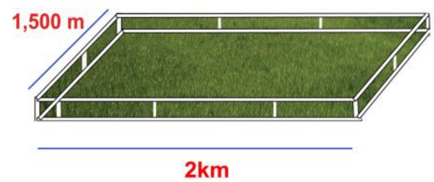


Figura 13. Terreno con 2 km de largo y 1500m de alto

En este ejercicio se pretende que cada estudiante, además, de resolver conversiones, pueda verificar en qué se utilizan las unidades de medida. Se pueden trabajar diferentes medidas como 200 dm o 1500 cm.

Como docente puedes retroalimentar el ejercicio utilizando otros múltiplos o submúltiplos del metro, conociendo que el perímetro de un rectángulo es: $P = 2(b + h)$, lo que implica que en este caso la respuesta es 7 km.

Actividad 6:

Resolvamos problemas con unidades de medida de longitud y superficie.

Objetivo

Resolver planteamientos de problemas utilizando las unidades de medida de longitud y superficie.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Pedir a sus estudiantes que resuelvan los siguientes problemas

- En el patio rectangular de una escuela de 28 m. de largo y 4 dam de ancho quieren poner una valla alrededor. Josué y Antonio discuten sobre la longitud total de la valla. El primero ha calculado que medirá 110 m. y el segundo 136 m. ¿Quién de los dos tiene razón? (Haz un dibujo)
- Un labrador tiene una finca de forma rectangular en la que ha sembrados papas. Sus dimensiones son 2 hm de largo y 68 m de ancho. ¿Cuál es el área de dicha finca?

Esto se debe a qué el planteamiento no específica en que unidades se debe de convertir.

Para el tercer caso la cinta de color azul tiene una longitud de 125 cm, y la cinta de color blanco se tiene una longitud de 68.5 cm.

Para realizar este tipo de problemas, se debe hacer uso de la tabla de conversiones de los múltiplos y submúltiplos del metros para convertirlos en centímetros.

- Andrea tiene una cinta azul y una cinta blanca. La cinta azul mide 1 m, 2 dm y 5 cm, la cinta blanca mide 6 dm, 8 cm y 5 mm. Calcule la longitud de cada cinta en centímetros.

Posible solución

En el primer ejercicio, dibujar la figura del patio de la escuela, que tiene forma de rectángulo; después convertir las unidades de longitud en una sola unidad, en este caso en metros. Para ello se debe conocer la fórmula del perímetro de un rectángulo, que viene dado por: $P = 2(b + h)$.

Caso similar se da para el planteamiento dos. Sólo que en esta ocasión es necesario conocer el área del rectángulo, que viene dada en forma general por: $A = b \times h$.

Para el planteamiento tres se debe realizar las conversiones pertinentes de cada uno de los listones; por ejemplo, el primero se divide 1 m = 100 cm, 2 dm=20 cm; luego se suman las cantidades y se obtiene la longitud de la cinta azul. Caso similar para la cinta blanca.

Guía de Ejercicios y Problemas

1. De los siguientes edificios más altos de El Salvador, cuyas alturas están dadas en metros, encuentre su equivalencia en km y cm.

Los edificios más altos de El Salvador

Torre el Pedregal 110 m

Torre Futura 92 m

Torre A del Ministerio de Hacienda 79 m

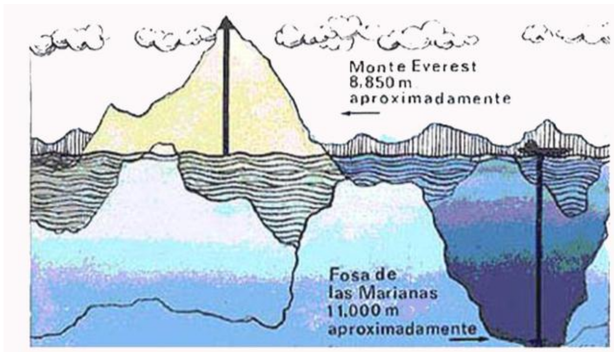
Torre Telefónica 77 m

Torre Cuscatlán 74 m

Torre del Ministerio de Gobernación 52 m

2. En el pacífico noroccidental y próxima a las Islas Marianas, se encuentra la ***homónima Fosa de las Marianas***, la región oceánica más profunda conocida hasta la fecha. Se sabe que la profundidad de este misterioso rincón del planeta alcanza los 11,000 metros y que en su profundidad alberga formas de vida realmente increíbles[9]. ¿Cuál es la profundidad de esta fosa en kilómetros y en milímetros? Entre el Monte Everest que mide 8,850 metros de altura y la profundidad de la Fosa de la Marianas, ¿Cuál tiene mayor cantidad en kilómetros?

El monte Everest y la fosa de las Marianas



3. Analiza la siguiente noticia:

Concluida la primera etapa de estudio del lago Baikal[10]

"Científicos concluyeron el trabajo de estudio de Baikal, el más profundo lago de agua dulce en el planeta, planificado para 2008. La segunda etapa de la expedición empezará en primavera de 2009 y será más saturada que la de este año", dijo Borzin.

Con 31,494 km^2 de superficie, 636 km de largo, 80 km de ancho y 1,637 m de profundidad, el Baikal es el más grande de los lagos de agua dulce en Asia y el más profundo en todo el mundo. Contiene 23.000 km^3 de agua, equivalente al 20% del agua dulce de todo el planeta.

Los batiscafos Mir, en servicio desde 1987, son capaces de bajar a una profundidad de hasta 6,000 metros. El director de cine James Cameron los usó para el rodaje de "Titanic", y los exploradores polares para descender al fondo del Océano Glacial Ártico bajo el Polo Norte[11].

---

[9] **Tomado de: http://www.ojocientifico.com/2011/05/09/la-profunda-fosa-de-las-marianas-a-escala**

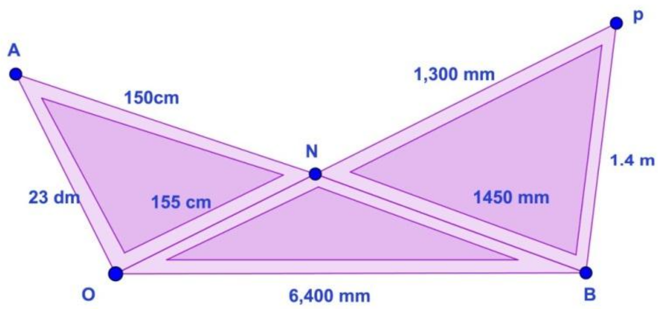
[5] Lago de origen tectónico, localizado en la región sur de Siberia, Rusia, se lo conoce como el **Ojo azul de Siberia** o **La Perla de Asia**

[11] http://sp.rian.ru/news/20080910/116690564.html

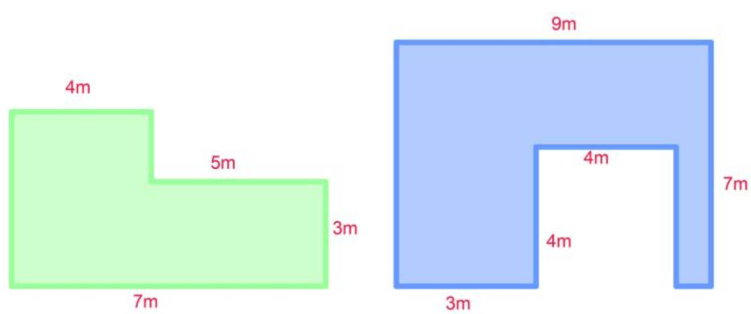
Responde las siguientes preguntas

a) Investiga y compara la extensión territorial de El Salvador con la del lago Baikal. ¿Cuántas veces cabe El Salvador en el lago?
b) Convierte todas las cantidades que aparecen en la noticia a kilómetros o bien todas a metros.
c) Investiga cómo calcular la cantidad de agua dulce del planeta con los datos proporcionado por RIA NOVOSTI, en su noticia del lago Baikal.

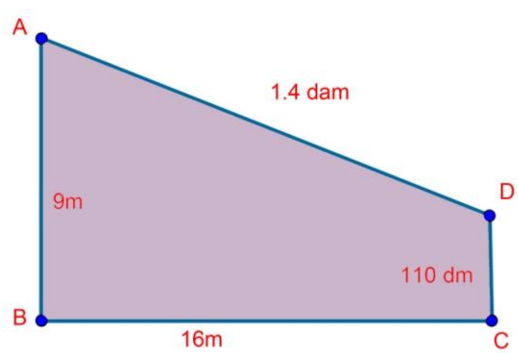
4. Determine cuál es el camino que va desde el punto O hasta el punto B y tiene una longitud de 6.5 m.



5. Calcule el área de las fincas cuyos dibujos se muestran en la parte inferior con las medidas reales. Puedes descomponerlas en otras más simples para resolver.



6. El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados y se simboliza por P. Encontrar el perímetro del siguiente polígono.



Referencias Bibliográficas

1. C., Mal, y otros, Mathematics for the international Student, Mathematical Studies SL, primera edición 2004, Haese & Harris publications, Australia.
2. Concluida la primera etapa de estudio del lago Baikal | Noticias | RIA Novosti. (s.f.). Recuperado Agosto 19, 2011, a partir de http://sp.rian.ru/news/20080910/116690564.html
3. Ejercicios de medidas de longitud y superficie (s.f.). Recuperado Junio 23 de 2011, a partir de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1eso/unidad4.pdf
4. Torre del Ministerio de Gobernación | San Salvador | 14 P | 53 Mts | 1982 - SkyscraperCity. (s.f.). Recuperado Junio 28, 2011, a partir de http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=1098635
5. Unidad Didáctica Interactiva en Red. (s.f.). Recuperado Junio 14, 2011, a partir de http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/softEduca/umedida/index.html
6. Unidad de medida como un patrón (s.f.). Recuperado Junio 23, a partir de http://contenidos.cnice.mec.es/feria/ies_alhakenii_cordoba/Elmetro.htm
7. Unidades de medida de longitud y superficie (s.f.). Recuperado Junio 23, a partir de http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/unidades%20de%20longitud.pdf

Lección 3 **7° grado** **Unidad 3** **Tiempo: 8 horas clase**

Los números racionales y fracciones equivalentes

Figura 1. En Chalatenango, la comunidad planea plantar alrededor de 12,500 árboles por año y plantar $\frac{2}{3}$ de los árboles en una primera campaña.

Introducción del tema:

En la matemática, las fracciones o números racionales surgen como necesidad de ampliación del campo numérico de los números enteros.

El camino para el aprendizaje de las fracciones, lo constituirán los problemas dados en los distintos contextos en que aparecen las fracciones: medida, reparto equitativo, ganancias, recetas, áreas, etc.

En matemática, la fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales, como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de un pastel o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina.

Tres cuartos de hora no son, evidentemente, la misma cosa que las tres cuartas partes de un pastel, pero se "calculan" de la misma manera: dividiendo la totalidad (una hora, o el pastel) en cuatro partes iguales y tomando luego tres de esas partes. Por esta razón, en ambos casos, se habla de dividir dicha unidad (una hora, un pastel, etc.) en 4 partes iguales y tomar luego 3 de dichas partes.

Competencias a desarrollar

Saber cuantificar, representar, comunicar y resolver problemas.

Objetivos

- Reconocer las fracciones en la vida cotidiana.
- Mejorar el desempeño del cálculo mental, mediante actividades de razonamiento lógico.
- Representar los números fraccionarios mediante la recta numérica de forma correcta.

Presaberes

- Operaciones básicas con números enteros.
- Reconocimiento de figuras planas.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Fracciones propias: son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador. Su valor está comprendido entre cero y uno Ejemplo: $\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12} \ldots$

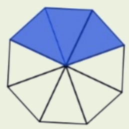


Figura 2. Representación geométrica de una fracción propia 3/8

Fracciones impropias: Las fracciones impropias son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Su valor es mayor que 1. Ejemplo: $\frac{7}{3}, \frac{5}{4}, \frac{15}{11} \ldots$

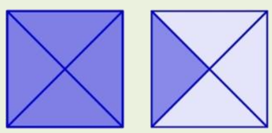


Figura 3. Representación geométrica de una fracción impropia 5/4

Fracción mixta: está compuesta de una parte entera y otra fraccionaria. Ejemplo: $2\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{4}, \ldots$

Fracción unidad: Las fracciones unidad tienen el numerador igual al denominador. El valor numérico es igual a 1. Ejemplo: $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{11}{11} \ldots$

Fracciones unitarias: Las fracciones unitarias tienen de numerador la unidad. Ejemplo: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$

Fracciones decimales: Las fracciones decimales tienen como denominador una potencia de 10. Ejemplo: $\frac{3}{100}, \frac{5}{1{,}000}, \frac{11}{10{,}000} \ldots$

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes cuando el producto de extremos es igual al producto de medios. Ejemplo: $\frac{4}{6}\, y\, \frac{8}{12}$ son equivalentes ya que $4 \times 12 = 6 \times 8 = 48$

ALGO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Sí se desea dividir dos números enteros, el resultado no siempre es otro número entero. Esto llevó a la necesidad de ampliar el conjunto Z y dar paso a un nuevo conjunto, llamado de los **Números Racionales** y simbolizado por Q. Este conjunto incluye a Z y N.

Así, se llama número racional o fracción a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero. El término "racional" alude a "ración" o parte de un todo.

O bien Q es el conjunto de los números de la forma a/b, siendo a y b números enteros, con b distintos de 0.

Los números racionales o fracciones se dividen en **fracciones propias, fracciones impropias, fracción unidad, fracciones mixtas, fracciones unitarias, fracciones decimales, fracciones equivalentes, fracciones irreducibles y fracciones complejas.**

Las fracciones irreducibles son aquellas que no se pueden simplificar, esto sucede cuando el numerador y el denominador son primos entre sí. Ejemplo: $\frac{5}{3}, \frac{11}{7}, \frac{2}{13} \ldots$

Las fracciones complejas son aquellas cuyo numerador o denominador, o ambos tienen fracciones.

Ejemplo: $\dfrac{3}{\frac{1}{5}}, \dfrac{\frac{2}{3}}{7}.$

Representación de números racionales en la recta numérica

Los números racionales se representan en la recta numérica junto a los números enteros.

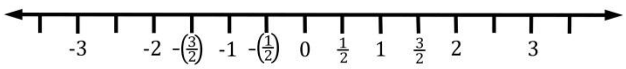


Figura 4. Recta numérica representando medios.

Representación de las fracciones mediante figuras geométricas o bien por subconjuntos

Los números racionales, además de su representación de la recta numérica, se simbolizan mediante figuras las cuales se seleccionan regiones para que los estudiantes puedan identificar el racional. O bien, mediante subconjuntos de conjuntos. En la Figura 5, un círculo y un Octágono representan las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{8}$.

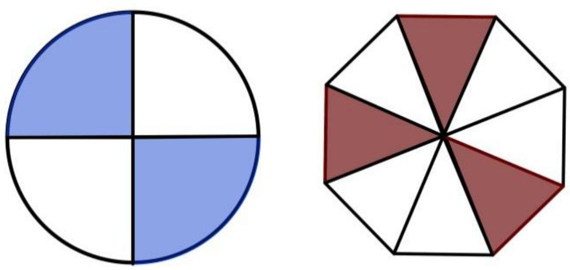


Figura 5. Representación de fracciones mediante figuras planas

La Figura 6 representa un conjunto de cuadrados donde hay dos subconjuntos del conjunto; por tanto, se tiene que hay dos cuadrados de color amarillo de un total de 5, es decir, formamos la fracción $\frac{2}{5}$ o bien tomando los de color azul se tendrá la fracción $\frac{3}{5}$.

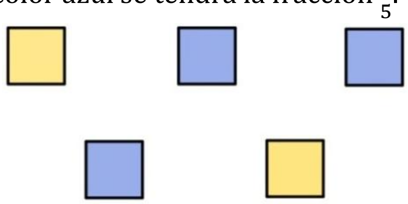


Figura 6. Representación de fracciones mediante conjuntos de conjuntos.

¿Por qué la división de un número por cero no es posible?

Supongamos que entras a un negocio donde todos los artículos cuestan lo mismo, es decir, que todos tienen un costo de $10.00.

Sí tú llevas en el bolsillo $10.00, ¿cuántos artículos puedes comprar?

Figura 7. Negocio de venta de artículos

La respuesta es muy obvia: solamente uno. Pero si todos los artículos costaran $5.00 y tú siempre llevas $10.00, podrás comprar 2 artículos, y si los artículos costaran $1.00 entonces podrías comprar 10 objetos. Pero, ¿qué sucede si los artículos no costaran nada, es decir, fueran gratuitos? ¿Cuántos artículos podrías llevar? Independientemente que llevará o no los 10 dólares, podrías llevar todos los objetos del negocio. Entonces, ¿habría negocio? Así, podríamos decir que no es posible dividir $10 dólares entre algo que no vale nada. En definitiva, no es posible dividir un número entre cero.

Historia de los números Racionales o Fracciones en Egipto

El uso de fracciones es sin duda el rasgo más peculiar de la matemática egipcia. La base de la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1, todas distintas.

En la representación de fracciones se empleaba el símbolo (r) que en hierática se convirtió en un punto (·), y que significaba "parte". Cuando se quería escribir un valor fraccionario se representaba el símbolo anterior seguido por el valor numérico del denominador.

= 1/5 (jeroglífica); = 1/5 (hierática)

Y tenía el sentido de un ordinal, nunca de un cardinal. Se traduciría, literalmente, como "parte 5". Las únicas excepciones eran 1/2, 2/3, 1/4 y 3/4, que se representaban con un jeroglífico especial: (gs) "lado", (rwy), (Hsb) y respectivamente. Los signos para 1/2, 2/3 y 1/4 son frecuentes, pero raramente se empleó el de 3/4. En aritmética sólo se usaba la fracción 2/3, que en literatura hierática se representaba como .

Era muy frecuente el uso de las fracciones denominadas "fracciones ojo de Horus", que representaban cada una de las partes en las que fue seccionado el ojo de Horus durante su batalla con Seth.

Las cejas equivalían a 1/8, la pupila era 1/4, la parte izquierda de la pupila 1/2, la parte derecha 1/16, la parte inferior vertical bajo el ojo 1/32 y la parte inferior diagonal del ojo representaba 1/64.

Las fracciones con numerador distinto de 1 se reducían a sumas de fracciones conocidas, con numerador 1, pero siempre los sumandos tenían que ser diferentes. Así, Ahmes en el papiro Rhind escribe 2/5 como 1/3 + 1/15 y nunca se podría emplear 1/5 + 1/5. La propia expresión 2/5 no tenía sentido en el pensamiento egipcio.

Cualquier cantidad se expresaba como una parte entera más una suma de fracciones unitarias, y a lo sumo 2/3. El símbolo "+" no se empleaba y las fracciones aparecían secuencialmente. Lógicamente el problema era encontrar estas reducciones.

Actualmente conocemos y podemos encontrar algoritmos de cálculo que nos permiten tales adiciones, pero hace 4000 años los escribas no conocían un método rápido para efectuar las transformaciones, por lo que se limitaban a emplear tablas ya escritas o a efectuar el proceso de división aprendido.

Cuando un egipcio se encontraba con una fracción 5/8 no preguntaba: ¿cómo puedo transformar 5/8 en una suma de fracciones unitarias?, sino que se limitaba a dividir 5 entre 8 utilizando la técnica usual de este tipo de fracciones.

El papiro Rhind incluye, al principio, una tabla en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101, como suma de fracciones unitarias. Como es lógico, se eliminan las descomposiciones en las que el denominador es par.

Los egipcios utilizaban sumas de fracciones unidad $\left(\frac{1}{n}\right)$, junto con la fracción $\frac{2}{3}$, para expresar todas las fracciones. Por ejemplo: $\frac{2}{7}$ era la suma de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{28}$. Utilizando este sistema, los egipcios fueron capaces de resolver problemas aritméticos con fracciones, así como problemas algebraicos elementales.

Diagnóstico de conocimientos previos en el aula

Actividad 1:

Realice una lista de compras en la que utilice números racionales o fracciones.

Objetivo:

Identificar en la vida cotidiana el uso de los números racionales o fracciones

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Formar equipos de 5 integrantes y pedirles que elaboren un listado de los ingredientes que necesitarían para preparar un platillo. Por ejemplo: Un sándwich saludable

Ingredientes

Dos rebanadas de pan de caja cortadas por la mitad, un tomate divido en 6 rodajas, un tercio de cucharada de mostaza, unas dos gotas de salsa inglesa, un cuarto de aguacate, una taza y media de lechuga picada y desinfectada, media rodaja de cebolla (opcional).

La actividad consiste en identificar que en la lista de ingredientes están involucrados los números racionales. Inmediatamente después, solicitar a todos los equipos lo siguiente:

1. Expresa en fracción cada uno de los ingredientes del platillo seleccionado:
2. ¿Crees que es importante utilizar los números racionales o fracciones en la vida cotidiana?
3. ¿Puedes mencionar en qué ocasiones utilizamos los números racionales o fracciones?
4. ¿Crees que los números enteros se pueden expresar como números racionales?

Las respuestas para estas interrogantes se pueden dialogar primero en equipo y, luego, en plenaria con todo el salón de clases para lograr una mayor comprensión, y que cada estudiante conozca en qué ocasiones se pueden utilizar los números racionales o fracciones.

Actividad 2:

Identifiquemos números racionales en la recta numérica.

Objetivo

Utilizar la recta numérica en la ubicación de los números racionales.

Indicaciones

Indique a sus estudiantes que se reúnan en parejas y discutan lo siguiente:

¿Crees que si colocamos los números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ en la recta numérica podremos encontrar otro número racional entre ellos dos? ¿Cuáles?

¿Cuál de los números es mayor, $\frac{1}{2}$ ó $\frac{5}{2}$?

Y si en lugar de tener el número racional $\frac{5}{2}$, se tuviese por ejemplo $\frac{5}{3}$, ¿Cuál es el mayor entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$? Explica tu respuesta utilizando como recurso la recta numérica, o mediante fracciones equivalentes.

Veamos otro ejemplo: $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$. ¿Cuál es el mayor?

Posible solución y desarrollo de la actividad:

Cada estudiante debe dibujar la recta numérica en su cuaderno haciendo las particiones pertinentes. En nuestro ejemplo, se tiene que dividir la unidad en dos; por tanto, la recta quedará como la Figura 8.

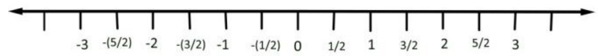


Figura 8. Representación de los números racionales en la recta numérica.

Se puede dar el caso en que sus estudiantes coloquen las fracciones en lugar de los números enteros; por ejemplo el número 1, como la división es en dos se tendrá que la fracción se representa $\frac{2}{2}$. Y así para cada uno de los enteros, tanto los negativos como positivos.

Para la pregunta de que si entre ambos números racionales, $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$, podemos encontrar otro número racional, la respuesta es evidente después de elaborar la recta numérica.

Sin embargo a la hora de discutir las respuestas en plenaria con todo el salón de clases, es importante dialogar sobre el hecho, de que, entre un par de números racionales, hay infinidad de números racionales.

Así, en nuestro caso, se tiene que entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ están los números $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{8}{7} \dots$ por mencionar algunos.

Recuerde que $\frac{1}{2} = 0.5$ y $\frac{5}{2} = 2.5$, y que para encontrar fracciones entre dos números enteros se realiza la división entre sus partes. Por ejemplo, si deseamos conocer la ubicación de $\frac{7}{8}$, entonces dividimos la unidad en 8 partes, es decir, del 0 al 1 dividimos el segmento en 8 partes iguales.

Ahora bien, para comparar los números racionales entre el mayor y el menor, lo primero que se observa es si los denominadores son iguales y entonces la comparación se hace con los numeradores; el mayor numerador mostrará cuál de los dos números racionales es mayor. En nuestro caso, como 5>1, entonces $\frac{1}{2} < \frac{5}{2}$.

En el caso de que los números racionales tengan igual numerador, se tomará en cuenta la comparación con los denominadores; el que resulte mayor mostrará cuál de los dos números racionales es el menor, ya que entre más grande es el número más pequeña es la cantidad fraccionaria.

En el caso de que las fracciones sean diferentes, tanto en numerador y denominador, se deben buscar fracciones que nos lleven a obtener igual denominador, las cuales se denominarán fracciones equivalentes, y posteriormente aplicar la misma definición para fracciones de igual denominador.

Así, en el caso de la comparación de $\frac{1}{2}\ y\ \frac{5}{3}$, debemos encontrar fracciones equivalentes, donde ambos tengan igual denominador. Para ello, buscaremos el MCM de 2 y de 3, que es 6; por tanto, nuestro denominador en ambas fracciones es el número 6.

Para convertir $\frac{1}{2}$ en una fracción equivalente debemos multiplicar por un número que, al multiplicarlo por 2, el resultado sea 6; en este caso, es el número 3. Así, multiplicamos la fracción y la dividimos para convertirla en fracción equivalente.

De esta forma el resultado será $\frac{3}{6}$; y en el caso de $\frac{5}{3}$, multiplicamos y la dividimos por 2 dicha fracción, así el resultado es $\frac{10}{6}$. Ahora las dos fracciones resultantes son fracciones equivalentes a las que se pedía comparar; por tanto, 10>5. Entonces podemos concluir: $\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$.

Luego, para responder la pregunta: ¿cuál número es mayor entre $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$? Debido a que tienen igual denominador podemos solo comparar los numeradores, pero en el caso de los racionales negativos es importante la posición en que se ubican en la recta numérica. Así, entre más grande es la cantidad precedida del signo negativo, es menor la cantidad; por tanto, la respuesta de nuestro planteamiento es $-\frac{1}{2} > -\frac{5}{2}$.

Actividad 3

Utilicemos figuras geométricas para identificar fracciones o racionales.

Objetivo

Utilizar figuras geométricas para la identificación de racionales.

Indicaciones

Pedir a sus estudiantes que con las siguientes figuras geométricas mencionen qué fracción representa.

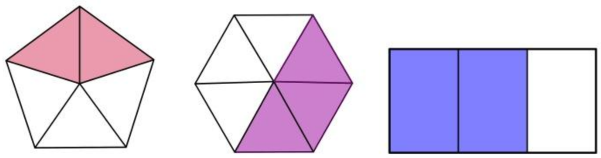


Figura 9. Figuras geométricas representando fracciones.

Después, en equipos de trabajo de 3 estudiantes, que seleccionen figuras planas y coloquen las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{8}{3}, \frac{5}{4} \dots$ Proporcione otras cantidades de ser necesario. Notará que en el valor de $\frac{8}{3}$ será necesario elaborar tres figuras para representar la fracción.

Luego se discutirán las respuestas en plenaria, y seleccionará entre el grupo quienes desarrollarán la representación de la fracción en la pizarra.

Actividad 4

Resolvamos problemas usando fracciones

Objetivo

Orientar hacia el análisis al grupo de estudiantes para la comparación de fracciones.

Indicaciones:

Pedir al grupo de estudiantes que comente los siguientes planteamientos y saque conclusiones.

1. 7 litros de agua se repartieron en 20 frascos en cantidades iguales. 7 metros cuadrados de alfombra se cortaron en 20 pedazos de igual superficie. ¿Qué tienen en común estas dos situaciones?

Posible respuesta: ambas situaciones son representadas por el número racional 7/20. Puedes agregar a la respuesta, que aquí se aprecia, que el número es una expresión abstracta; y que con un mismo número puedo referirme a situaciones concretas muy variadas. 7/20 tiene sentido sólo si sabemos "siete veintavos de qué".

2. Hace unos años Pedro tenía 24 años, cantidad que representa 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?

Posibles soluciones:

Solución 1

Para resolver este problema sin recurrir a los métodos de solución de variables, podemos utilizar el razonamiento de que la edad actual es un múltiplo de 3. Para que la cantidad sea un valor entero, ya que deseamos saber la edad actual, recurrimos al método del tanteo; es decir, expresar el resultado sacando los múltiplos de 3. En este caso, son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39… Se debe elegir entre estos números el adecuado, tomando en consideración que hace unos años Pedro tenía 24 años. Es claro que elegiremos entre los múltiplos después de 24. Pero 27 no es el resultado, porque al multiplicar por $\frac{2}{3}$ el número 27, el resultado no es 24. Así, se pueden ir descartando los números hasta concluir que el resultado es 36, porque al multiplicar el número $36 \times \frac{2}{3} = 24$. Por tanto, la edad actual de Pedro es 36 años.

Solución 2

Podemos utilizar figuras geométricas para resolver este problema con los datos que tenemos. Como sabemos, 24 representa $\frac{2}{3}$ de la edad actual. Dado que las partes del rectángulo son iguales, se tendrá que cada una de color es un tercio y como son iguales dos tercios equivale a 24; entonces, $\frac{1}{3}$ equivale a 12. Así, para completar la figura del rectángulo, tendríamos que el 24+12=36; es decir, que la edad de Pedro es 36 años.

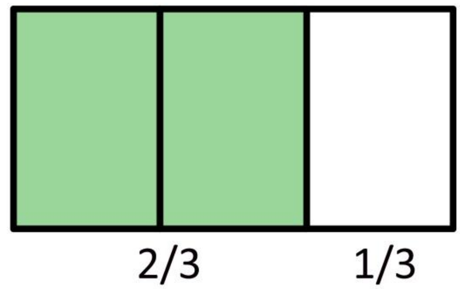


Figura 10. Ilustración geométrica de la edad de Pedro

Sus estudiantes pueden proponer otra solución diferente a las propuestas en esta actividad. Después de un tiempo prudencial pueden discutir las soluciones obtenidas o comentarios sobre los planteamientos propuestos, en el salón de clases.

SABÍAS QUÉ…

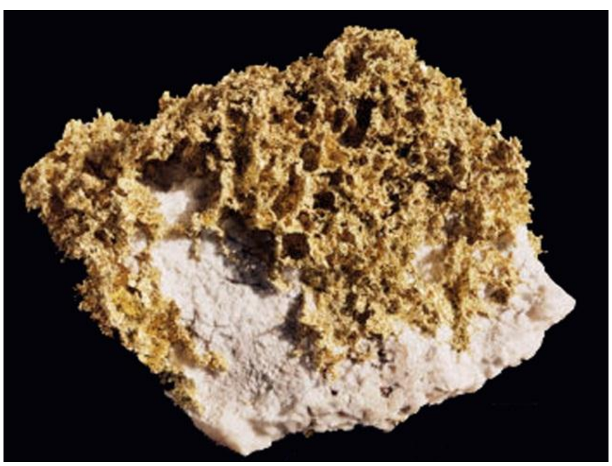


Figura 11. Trozo de oro

"El oro, entre otras propiedades muy apreciadas, es dúctil y maleable, es decir, con él podemos formar hilos muy finos y láminas extraordinariamente delgadas. Por eso ha sido utilizado a lo largo de la historia para hacer joyas y, en la actualidad, se usa en diversos aparatos electrónicos, como los ordenadores.

En la práctica, para trabajar con el oro se le añaden una serie de metales, con objeto de darle mayor consistencia y poder utilizarlo más adecuadamente, creando una mezcla o aleación.

Según las aleaciones, la cantidad de oro presente será distinta. Para indicar la proporción de oro que hay en una aleación, llamada ley de la aleación, se utilizó durante mucho tiempo una unidad: el quilate.

Así, una joya de oro de 18 quilates quiere decir que los 18/24 de esa joya son de oro, siendo el resto de otro metal. De igual forma, una joya de 24 quilates sería una joya compuesta totalmente de oro; los 24/24= 1, serían de ese metal. Por tanto, una moneda de oro de 16 quilates y 3 gramos de peso, contendrá: $\frac{16}{24} \times 3\ gr = \frac{48}{24} gr = 2\ gr$ de oro puro".

Actividad 5.

Utilicemos fracciones en la naturaleza.

Objetivo

Utilizar fracciones en la naturaleza

Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos gramos de oro hay en un collar de 18 quilates que pesa en total 6 gramos?
b) ¿Cuántos gramos de oro habrá en un collar de 20 quilates que pesa 5 gramos?

Figura 12. Collar en quilates

Para responder las preguntas anteriores utilizando los datos que se te proporcionan en el apartado de "sabías qué…", con la referencia de los quilates y cantidad en gramos de las joyas aludidas en los ejercicios.

Así, las respuestas son:

a) 52 gr
b) $\frac{25}{6}\ gr$ o 4.17 aproximado.

Actividad 6

Utilicemos, frases de la vida cotidiana para identificar fracciones.

Objetivo

Identificar fracciones mediante frases de la vida cotidiana.

Indicaciones

Pedir al estudiantado que se reúna en equipos de 5 integrantes y que comenten las siguientes situaciones y trasformen el lenguaje común en lenguaje numérico, identificando las fracciones en cada caso.

1. Si Juan tiene dos terceras partes de una barra de chocolate y decide comprar el doble de esas terceras partes, ¿cuánto tiene ahora de chocolate?
2. Al realizar una encuesta entre 45 estudiantes, para indagar el tipo de música de su preferencia: 20 escogieron el rock, 10 la tropical y 15 se decidieron por el género salsa. ¿Cuántas personas prefieren escuchar música salsa o tropical?
3. Doña Lupe fue a la tienda a comprar 3 litros de crema que le hacían falta para preparar un pedido de pasteles, pero en la tienda sólo encontró tarritos de crema de $\frac{1}{4}$ de litro. Doña Lupe quiere saber cuántos tarritos

debe comprar para completar los 3 litros que le hacen falta.

Posibles soluciones:

Solución de 1

En el primer caso, cada estudiante debe identificar que la fracción es $\frac{2}{3}$, y como se pide el doble significa que debe multiplicar la fracción por el valor de 2. Así, la respuesta será $\frac{4}{3}$, lo cual implica que tendrá un chocolate más un tercio.

Solución de 2

Primero, como son 45 personas de quienes se obtiene que 20 escogieron música rock, la fracción se ubica como $\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$.

Luego, como 10 eligieron música tropical, se ubica la fracción $\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$. Y 15 eligieron música salsa, entonces $\frac{15}{45}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Dado que se les pide cuántas personas prefieren escuchar música salsa o tropical, entonces el resultado es $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$.

Solución de 3

Doña Lupe necesita saber cuántos tarritos de $\frac{1}{4}$ de litro hay en 3 litros, lo cual se puede expresar como una división.

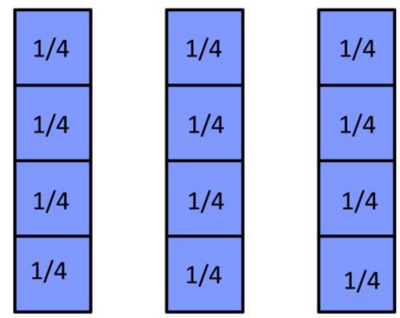


Figura 13. Tarritos de crema de $\frac{1}{4}$ de litro.

Obsérvese que son 3 litros y cada litro contiene 4 tarritos de $\frac{1}{4}$ de litro, entonces 3 litros contienen 3 veces 4, o sea, 12 tarritos de crema.

Este problema nos hace recordar que la división es el inverso de la multiplicación, y de aquí se origina la siguiente regla para dividir fracciones: Para dividir un número (entero o fracción) entre una fracción, multiplique el número por el inverso de la fracción.

El inverso (recíproco) de una fracción se obtiene invirtiendo el numerador por el denominador.

Guía de problemas y ejercicios

Resuelva los siguientes problemas:

1. En las elecciones locales celebradas en un pueblo, 3/11 de los votos fueron para el partido A, 5/10 para el partido B, 5/1 para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15, 400. Calcular:
    a. El número de votos obtenidos por cada partido.
    b. El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa 5/8 del censo electoral.

2. Un padre reparte entre sus hijos 1,800 dólares. Al mayor le da 4/9 de esa cantidad, al mediano 1/3 y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

3. Una clase tiene 28 estudiantes. El presidente de la clase dice que se han apuntado para ir de excursión al bosque El Imposible 2/3 de los alumnos. ¿Es cierto lo que dice el presidente del salón de clases? Si fuera cierto, ¿cuántas personas se habrían apuntado para la excursión?

4. ¿A cuántos centímetros corresponden 3/5 de un metro? ¿Cuántos metros son 3/4 de un kilómetro?

5. ¿Cuál es el número que hay que multiplicar por 3 para obtener 5?

6. Ignacio y Emilia fueron a comer pizza con sus compañeros de la escuela. Ignacio comenta que comió 6/8 de pizza y Emilia dice que ella comió 3/4. ¿Quién comió más? ¿Cómo podemos aclarar esta situación?

Referencia Bibliográfica

1. Bressan, Ana. (2001), *Obra colectiva de los docentes de la red escuelas de campana*, La enseñanza de las fracciones en segundo ciclo de educación general básica, Buenos aires, Argentina.
2. Malet, Omar. *Los significados de las fracciones una perspectiva fenomenológica* , revista # 21, octubre 2010, Buenos aires, Argentina.
3. Flores, Francisco.(2008), *Historia y didáctica de los números racionales e irracionales*, España, Publicatuslibros.com
4. Números Racionales. (s.f.). Recuperado Julio 29, 2011, a partir de http://es.scribd.com/doc/13313144/03-Numeros-Racionales
5. Números Racionales. (s.f.). Recuperado Julio 29, 2011, a partir de http://es.scribd.com/doc/3770332/NUMEROS-RACIONALES
6. Las Matemáticas. (s.f.). Recuperado Agosto 9, 2011, a partir de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/fracciones.htm

Lección 4 | 7° Grado | Unidad 4 | Tiempo: 8 horas clase

Circunferencia y círculo

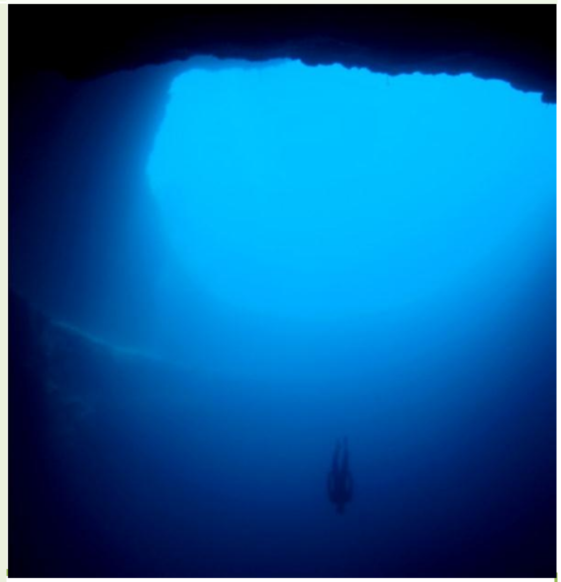


Figura 1. En medio de un paraíso natural, la bahía oeste de Clarence Town, en Long Island, islas Bahamas, se encuentra el agujero azul submarino que es un círculo casi perfecto.

Introducción del tema:

Los mapas actuales se basan en la geografía matemática que se inició en la Grecia clásica, y aunque los avances cartográficos conseguidos por los griegos llegaron a niveles de perfección no volvieron a ser igualados hasta el siglo XV. La idea general del mundo de la que partían, no era muy distinta a la de los babilonios.

Se cree que el primer mapa que representaba al mundo conocido fue realizado en el siglo VI a.C. por el filósofo griego Anaximandro. Dicho mapa tenía forma circular y mostraba el mundo conocido agrupado en torno al mar Egeo y rodeado por el océano.

Así, cuando se realiza una larga travesía oceánica, se plantea la ruta en función de la meteorología, pero también el recorrido que represente la mínima distancia.

Por ello, se emplea la navegación ortodrómica, que es el círculo máximo, aquél que representa la mínima distancia entre dos punto en una esfera. Este círculo máximo tiene la característica de que su centro pasa por el centro de la esfera y al ser un arco no mantiene el rumbo constante con el norte o con los meridianos.

Competencias a desarrollar

Saber representar, comunicar, resolver problemas y utilizar instrumentos matemáticos.

Objetivos

- Conocer la diferencia y relación entre circunferencia y círculo.
- Manejar adecuadamente las posiciones relativas de punto, recta y circunferencias.
- Mostrar la importancia de la circunferencia y el círculo en el entorno.

Presaberes

- Operaciones básicas con números enteros y decimales.
- Reconocimiento de figuras planas
- Utilización de instrumentos como regla y compás.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Circunferencia. Es una curva plana cerrada, cuyos puntos equidistan todos de otro punto del mismo plano, como en la Figura 1, donde A, B, C y D que equidistan del punto O, que es el centro de dicha circunferencia.

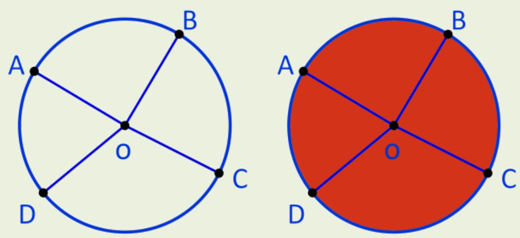


Figura 2. Circunferencia de centro O y el círculo

Círculo. Es la superficie plana limitada por la circunferencia.

Radio. Es toda recta limitada por el centro y un punto de la circunferencia. Un círculo tiene infinitos radios y todos ellos iguales, OD, OB, OA y OC son radios.

Cuerdas. Es toda recta limitada por dos puntos de la circunferencia.

Diámetro. Es toda cuerda que pasa por el centro del círculo. Es también el doble del radio y los infinitos diámetros de un mismo círculo son todos iguales, así el diámetro también divide en dos partes iguales a la circunferencia.

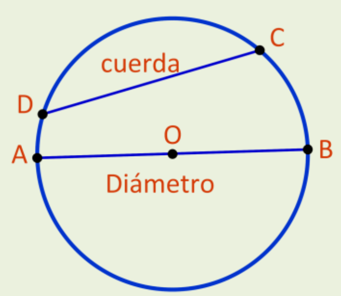


Figura 3. Representaciones de cuerda y del diámetro

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

La circunferencia es una línea curva plana cerrada, cuyos puntos tienen la propiedad de equidistar de otro punto llamado centro. El término equidistar significa que están a la misma distancia. Los puntos de la circunferencia y los que se encuentran dentro de ella forman una superficie llamada círculo. Sus principales elementos son centro, radio, diámetro, cuerda y semicircunferencia.

Una semicircunferencia es cada una de las partes que un diámetro divide a la circunferencia.

Posiciones relativas, punto y circunferencia

Entre un punto y una circunferencia pueden producirse distintas situaciones a las que llamamos posiciones relativas.

Se dice que el punto es exterior a la circunferencia si se encuentra a una distancia del centro mayor que el radio; en este caso, el punto está fuera de la circunferencia. El punto es interior si se encuentra a una distancia del centro menor que el radio, está entonces dentro de la circunferencia.

Si el punto está situado sobre la circunferencia, decimos que pertenece a ella; en este caso, la distancia al centro es igual al radio. Un punto que no pertenezca a la circunferencia puede ser interior o exterior a ella.

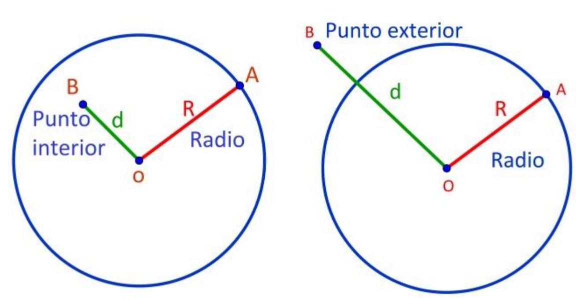


Figura 4. Posiciones de un punto en la Circunferencia.

Recta y circunferencia

Los casos son los siguientes:

i. Si la recta no tiene ningún punto en común con la circunferencia, decimos que son exteriores.
ii. Si tienen un punto en común, decimos que la recta y la circunferencia son tangentes; en este caso, la recta es perpendicular al radio.
iii. Si tienen dos puntos comunes, entonces decimos que la recta y la circunferencia son secantes.

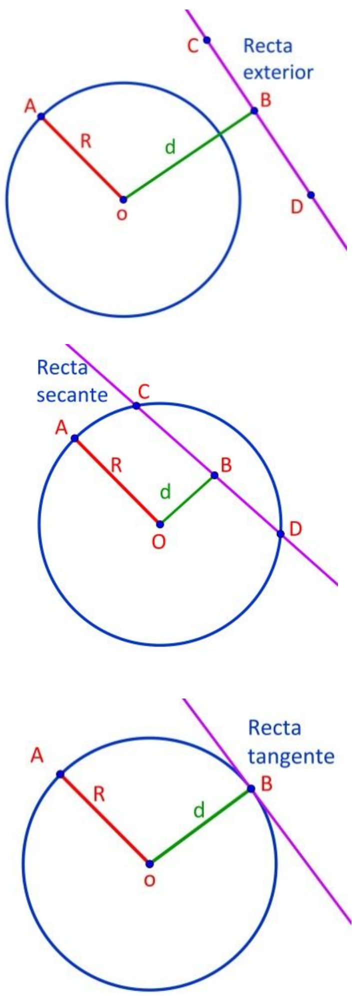


Figura 5. Posiciones relativas de una recta a una circunferencia recta exterior, recta tangente y recta secante.

Dos circunferencias

Entre dos circunferencias, se pueden producir las siguientes posiciones relativas:

- Exteriores: todos los puntos de cada circunferencia son exteriores a la otra.
- Interiores: todos los puntos de una de las circunferencias son interiores a la otra. Si además tienen el mismo centro, decimos que son concéntricas.
- Tangentes: tienen un punto en común y serán tangentes exteriores o tangentes interiores, dependiendo de la posición de los puntos que no son comunes a ambas.

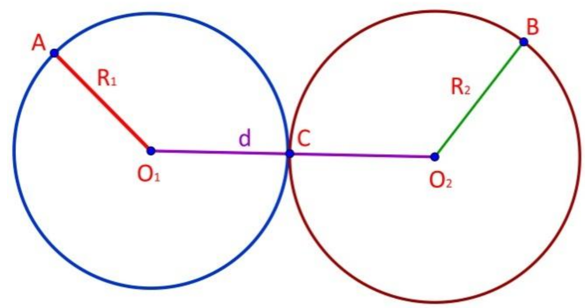


Figura 6. Tangentes exteriores en el punto C, de radios R_1 y R_2, y centros O_1 y O_2, con distancia d desde el centro O_1 al O_2.

- Secantes: tienen dos puntos en común y cada circunferencia divide a la otra en dos arcos.

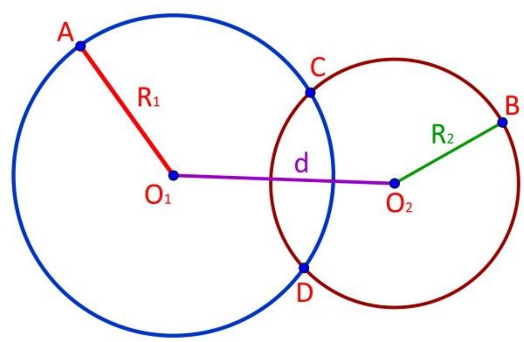


Figura 7. Secantes exteriores en el punto C y D, de radios R_1 y R_2, y centros O_1 y O_2, con distancia d desde el centro O_1 al O_2.

Perímetro de la circunferencia y área del círculo.

El perímetro de la circunferencia es designado comúnmente por la letra P, y es la línea fronteriza que encierra un círculo.

El número Pi, designado con la letra griega π y cuyo valor aproximado es $\pi = 3.1415$, surge del cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro 2R, donde R es el radio de la circunferencia.

En efecto, $\pi = \frac{P}{d} \Longrightarrow P = \pi d$ o bien $\pi = \frac{P}{2R} \Longrightarrow P = \pi 2R = 2\pi r$.

La última expresión es la más utilizada en la literatura matemática para calcular el perímetro de una circunferencia (P).

En cambio, un círculo es una región que está limitada por una circunferencia, que es su frontera. Es decir, es una superficie interior a la circunferencia y podemos calcular el área del círculo, la cual viene dada por $A = \pi R^2$.

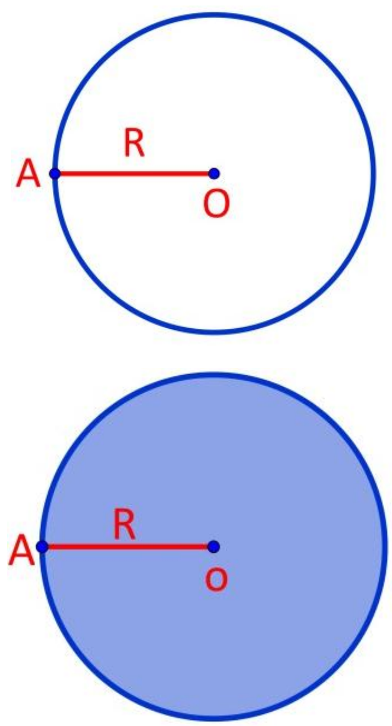


Figura 8. Circunferencia y Círculo.

NOTA: Para encontrar el perímetro de la circunferencia, por ser una línea curva, es $P = 2\pi R$; y el círculo, por ser una superficie encontramos el área, que es $A = \pi R^2$.

Ahora bien, no se podría hablar de perímetro del círculo porque éste no mide superficies, sino longitudes dimensionales lineales. Sin embargo, cuando se pida el perímetro del círculo sabremos que se refiere a la circunferencia que limita al círculo.

A continuación se le presentan algunos ejemplos para encontrar áreas y perímetros.

1. Encontrar el área y perímetro del círculo cuyo radio es 5cm.

Solución

Remplazando el valor de R=5cm en las formulas del área y perímetro se tendrá:

$A = \pi R^2 \Longrightarrow A = \pi(5cm)^2 \Longrightarrow A = 25\pi cm^2$.

$P = 2\pi R \Longrightarrow P = 2\pi(5cm) \Longrightarrow P = 10\pi cm$.

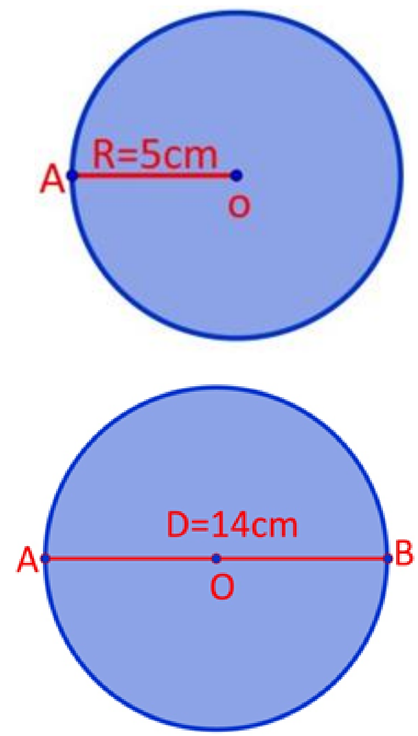


Figura 9. Círculos uno de radio 5cm y el otro de Diámetro de 14cm.

2. Encontrar el área y perímetro de la circunferencia de diámetro 14cm.

Solución

Como $d = 14cm$, entonces $R = 7cm$.

Remplazando el valor de R=7cm en las fórmulas del área y perímetro se tendrá:

$A = \pi R^2 \Longrightarrow A = \pi(7cm)^2 \Longrightarrow A = 49\pi cm^2$.

$P = 2\pi r \Longrightarrow P = 2\pi(7cm) \Longrightarrow P = 14\pi cm$.

3. Encontrar el área y perímetro de la región sombreada donde O es el centro de la circunferencia mayor.

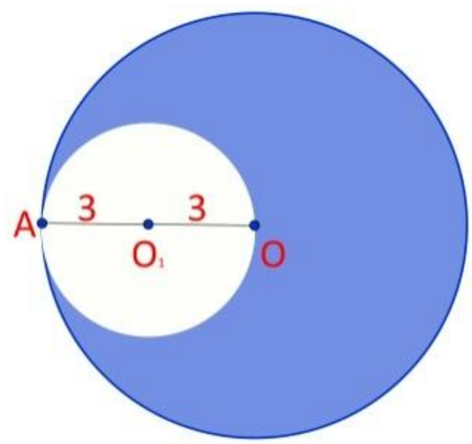


Figura 10. Circunferencias de radio 6 y de radio 3.

Solución

La región sombreada tiene por área la diferencia de áreas de dos círculos

Así, el área es: $A = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2)$

Como el radio $R_1 = 6cm$ y $R_2 = 3cm$

Entonces el área es $A = \pi((6cm)^2 - (3cm)^2) = \pi(36 - 9)cm^2 = 25\pi cm^2$.

Y su perímetro viene dado por la suma de las dos circunferencias:

$$P = 2\pi R_1 + 2\pi R_2 = 2\pi(R_1 + R_2) = 2\pi(6cm + 3cm) = 2\pi(9cm) = 18$$

Circunferencia y círculo

Actividad 1

Diferenciemos círculo de circunferencia e identifiquemos los elementos de un círculo y una circunferencia

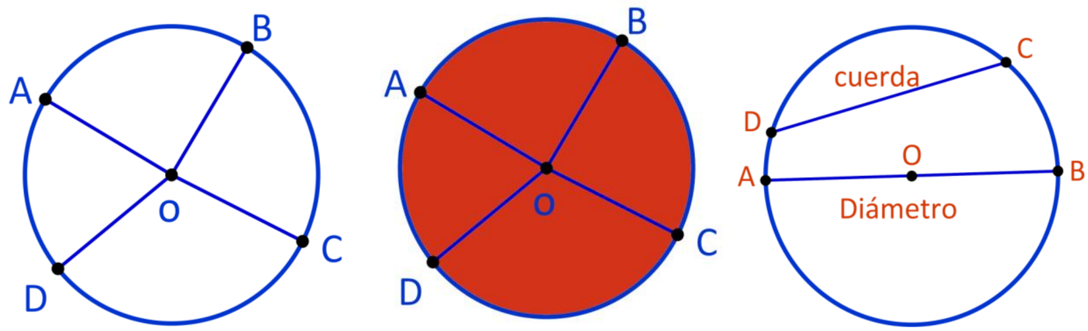
Objetivo

Diferenciar círculo de circunferencia e identificar sus elementos.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Pizarra



Indicaciones

Se realizará con el grupo de estudiantes una lluvia de ideas, sobre los elementos del círculo y la circunferencia, con las siguientes preguntas: ¿Podrían mencionar a qué le llamamos circunferencia? ¿A qué le llamamos círculo? ¿Hay diferencia entre círculo y circunferencia o es lo mismo? ¿Pueden identificar estas figuras en el salón de clase?

Se espera que el grupo participe activamente respondiendo las preguntas, haciendo afirmaciones tales como: "circunferencia es una curva cerrada" o que "es el contorno o límite del círculo". Tras obtener respuestas que logren construir el verdadero concepto de círculo y circunferencia, se escribirá el concepto en la pizarra e ilustrará para una mayor comprensión. Después, se puede retomar la pregunta: ¿Hay diferencia entre círculo y circunferencia? La respuesta es evidente al tener los dos conceptos, ya que la circunferencia es una curva plana cerrada, cuyos puntos equidistan todos de otro punto del mismo plano, y el otro es la superficie limitada por la circunferencia; por tanto, las figuras no son las mismas, aunque una depende de la otra.

Discutir con el grupo de estudiantes la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los elementos de la circunferencia? Se espera que respondan: el radio, diámetro, centro y cuerda. Habrá que ilustrar cada concepto, no olvidando las relaciones que haya entre radio y diámetro.

Actividad 2

Encontremos las posiciones relativas de la circunferencia y un punto, una recta y otra circunferencia, auxiliándonos con la regla y el compás.

Objetivo

Conocer y trabajar con las posiciones relativas de una circunferencia, respecto a un punto, una recta y otra circunferencia.

Materiales

Compás

Regla

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que se reúna en equipos de 5 integrantes para discutir lo siguiente, dibujando con las herramientas geométricas (compás, regla, etc.).

1. Indica si los siguientes puntos son interiores, exteriores o pertenecen a la circunferencia.

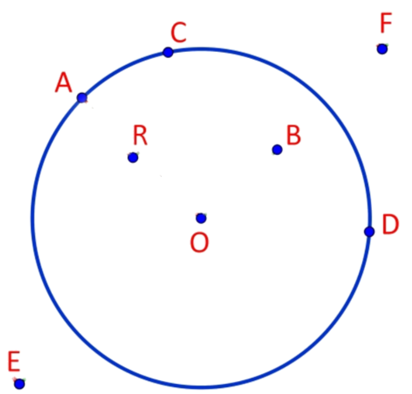


Figura 12. Posiciones relativas de una circunferencia respecto a los puntos

Solución

F y E son exteriores; O, B y R son interiores;
A, C y D pertenecen a la circunferencia.

2. Indica cuáles de los puntos están a igual distancia del centro, cuáles se encuentran a una distancia del centro mayor que el radio, cuáles están a distancia menor que el radio y cuáles están a una distancia equivalente al doble del radio.

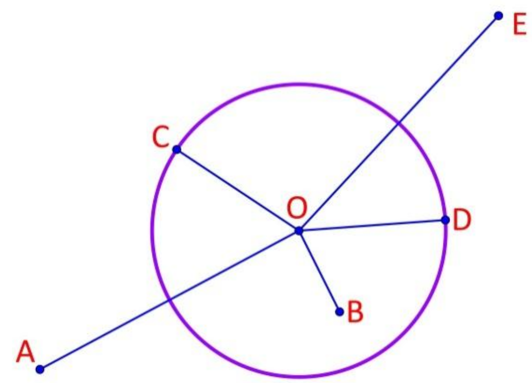


Figura 13. Distancias de cada uno de los puntos interiores, exteriores y en la circunferencia.

Solución

Los puntos C y D están situados a igual distancia del centro O; A y E están situados a mayor distancia que el radio; B está situado a menor distancia que el radio; E está situado a una distancia doble del radio.

3. Indica la posición relativa de las rectas que aparecen en la figura, con respecto a la circunferencia.

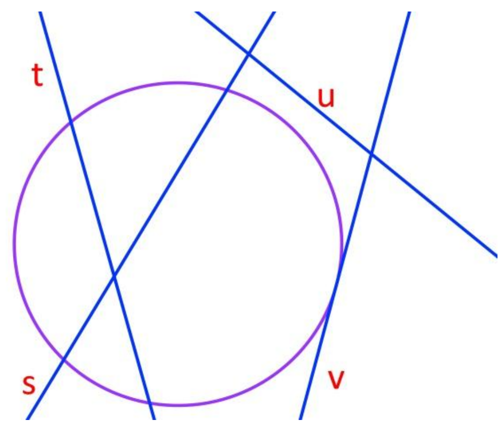


Figura 14. Posición relativa de las rectas respecto a la circunferencia.

Solución

Las rectas t y s son secantes; u es exterior a la circunferencia; v es tangente.

4. Indica la posición relativa de los pares de circunferencias que aparecen en la figura: a y b, a y c, b y c, c y f, e y d, e y b.

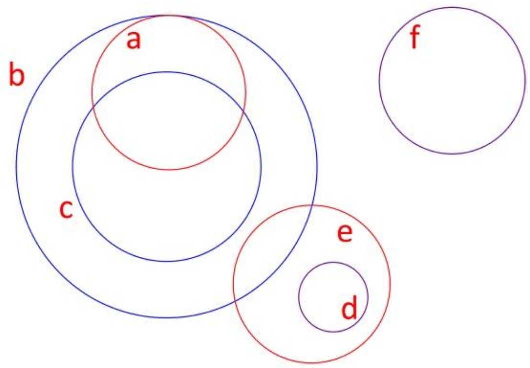


Figura 15. Posiciones relativas entre circunferencias.

Solución

Las circunferencias a y b son tangentes interiores; a y c son secantes; b y c son interiores concéntricas; c y f son exteriores; e y d son interiores; e y b son secantes.

5. Dibuja dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm respectivamente que sean tangentes interiores. ¿A qué distancia se encuentran sus centros?

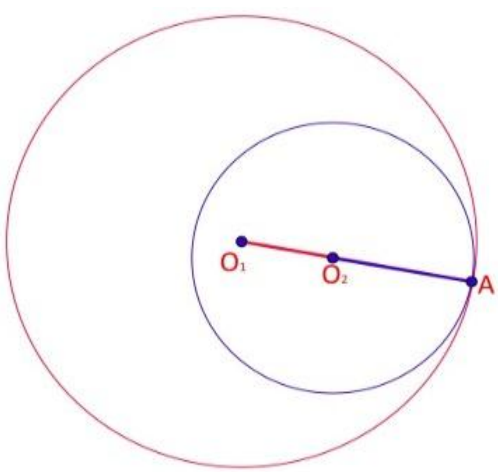


Figura 16. Distancia entre el centro de dos circunferencias tangentes.

Solución

La distancia entre los centros es de 2 cm, porque, dado que las circunferencias son tangentes, los centros quedan alineados de tal forma que el radio mayor pasa por el centro de la circunferencia más pequeña. Así, el resultado es la diferencia del radio más grande menos el más pequeño.

Actividad 3

Conocer El perímetro de una circunferencia

Objetivo

Identificar el perímetro de una circunferencia

Materiales

Cinta
Un disco o CD
Un marcador.

Indicaciones

Si se quiere conocer el perímetro de una circunferencia, un método muy fácil consiste en tomar una cinta (inextensible), fijar uno de sus extremos en un punto A de la circunferencia y bordear ésta con la cinta hasta completar la curva. El punto en el cual la cinta completa la curva se marca y se llamará B. Así, se obtiene un segmento AB, la cinta cuya longitud es el perímetro de la circunferencia que llamaremos L.

Figura 17. Disco enrollado.

NOTA: El disco enrollado desde su inicio marcado con la letra A, hasta el final en B; d representa el diámetro de la circunferencia y R es el radio.

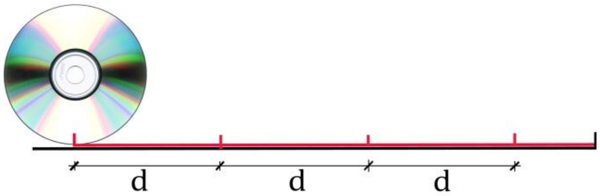


Figura 18. Disco desenrollado.

NOTA: Al desenrollarlo, notamos que si medimos el diámetro de dicha circunferencia es 3 veces y un poquito más.

Si se efectúa esta operación con diferentes objetos circulares como monedas, ruedas, etc., y se observa los resultados, se notará que siempre el segmento AB resultante contiene tres veces el diámetro d y sobra un pequeño trozo CB, el cual podemos comprobar que es aproximadamente el diámetro. Es decir, que la medida de cualquier circunferencia, con respecto a su diámetro d como unidad, es la misma; esta constante es el número que conocemos como π (pi). Entonces π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Es decir: $\pi = \frac{L}{d}$ es aproximadamente igual a $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Entonces, la longitud de una circunferencia de radio R viene dada por la fórmula: L=2 πR.

Dato importante

El área de un circulo viene dada por $A = \pi R^2$.

Se dice que en la circunferencia encontramos el perímetro y en el círculo su área.

Actividad 4

Áreas y Perímetros en una circunferencia

Objetivo

Calcular el área de los recintos arquitectónicos

Indicaciones

Mostrar al grupo de estudiantes la Figura 19 y comentar lo siguiente:

En el teatro griego estaba la orquestra, ésta era la parte más antigua del teatro griego, utilizada por los coros. La orquestra, que en general tenía forma circular, posee 20 metros de diámetro, y estaba situada al pie de la ladera en un lugar aplanado. Cuando se creó la *skené*, ésta se adentraba en ocasiones en el círculo hasta ocupar un séptimo de su diámetro.

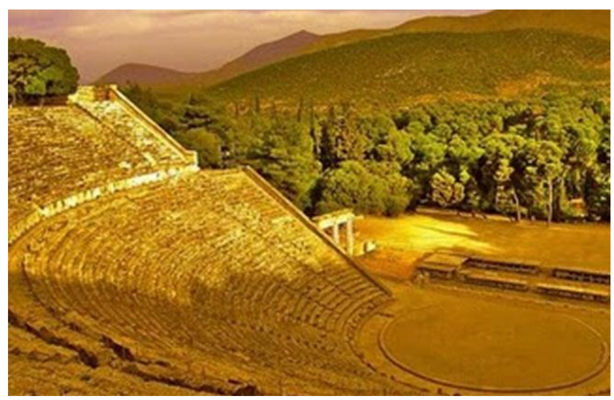


Figura 19. Teatro de Epidauro.

Nota: Cerca del pueblo de Ligurio, en un bosque de pinos, se encuentra el Teatro de Epidauro, este es con una antigüedad con mejor acústica del mundo.

Encontrar el área y perímetro del círculo y su circunferencia, sabiendo que su diámetro mide 20 m.

Solución

Como el diámetro mide 20 m entonces su radio equivale a 10 m

$A = \pi R^2 \Longrightarrow A = \pi(10m)^2 \Longrightarrow A = 100\pi m^2.$

$P = 2\pi r \implies P = 2\pi(10m) \implies P = 20\pi m.$

SABÍAS QUE…

Belice esconde en el interior de sus aguas un fenómeno natural de lo más increíble para las personas amantes del buceo y el snorkel. Se trata del gran Hoyo Azul que forma parte del sistema de Atolón del Arrecife Faro, ubicado a 100 kilómetros de la ciudad de Belice. Es un círculo azul casi perfecto con un diámetro de 305 metros y una profundidad de 123 metros. Esta maravilla se hizo famosa gracias a Jaques Cousteau y es uno de los diez mejores lugares del mundo para practicar buceo.

Figura 20. El Hoyo Azul, se formó como un círculo casi perfecto.

El Hoyo Azul nació originalmente como un sistema de cavernas durante la Era de Hielo. Cuando el hielo comenzó a derretirse subió el nivel del agua y las cavernas se inundaron, dando forma a este espectacular agujero que puede ser visto desde el espacio[12].

Actividad 5

Encontremos áreas y perímetros del círculo y circunferencia

Objetivo

Encontrar el área del círculo y el perímetro de su circunferencia

[12] Tomado de:http://viajesnorteamerica.com/aventura-en-el-gran-hoyo-azul-de-belice/

Materiales

Compas
Regla
Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que elaboraren un círculo con un diámetro 6 cm que represente el gran Hoyo Azul y que encuentren el área y el perímetro del mismo. Así como también el área y perímetro, si el diámetro original es de 305 m. Utilizar las fórmulas de área y perímetro.

Pídales además que…

i. Tracen 2 rectas tangentes a la circunferencia que se corten en un punto exterior.
ii. Una recta secante que pase por los dos puntos de corte que están en la circunferencia.
iii. Una recta exterior que pase por un punto exterior a la circunferencia cuya distancia sea el doble del radio.

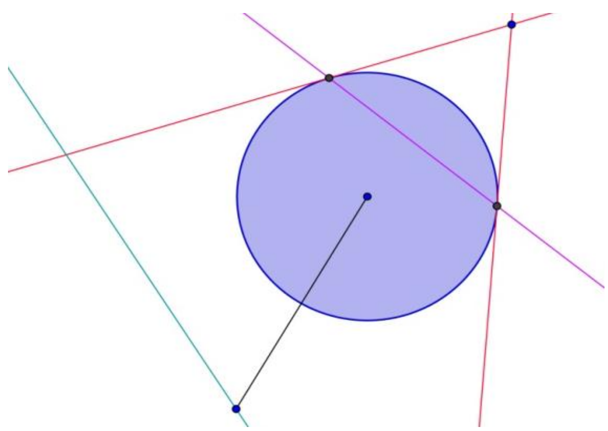


Figura 21. Dos rectas tangentes, una recta secante y una recta que tiene por distancia el doble de su radio

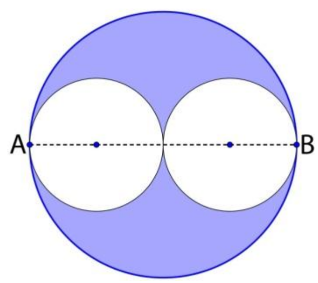
Guía de ejercicios y problemas

1. Investiga edificios, tanto de la arquitectura moderna como de la antigua, en la naturaleza y en la pintura. ¿Cómo, dónde o en qué elementos se utiliza el círculo y la circunferencia? Elabora un listado de los lugares que encuentres.

2. Representa en el mismo dibujo:

   i. Dos circunferencias exteriores C_1 y C_2.
   ii. Una circunferencia tangente a las dos, C_3
   iii. Una recta r tangente a C_1 y C_2.
   iv. Una recta v secante a C_1 y C_2.

3. Hallar el área y perímetro de la región sombreada en la siguiente figura, $AB = 12\ cm$, donde $\overline{AB}$ es diámetro del círculo más grande.



4. Observa la noticia y responde

Mientras los fragmentos del destrozado cometa 73P/Schwassmann Wachmann 3 se deslizan este mes inofensivamente delante de la Tierra, a plena vista de los telescopios de personas aficionadas, el público espectador solo puede preguntarse lo que pasaría si un cometa como ése no pasara cerca sino que, de hecho, impactara nuestro planeta. Para responder a esa pregunta, miramos el Desierto del Sahara.

Fuente. http://ciencia.nasa.gov/science-at-nasa/2006/12may_craterchains/

En una distante región azotada por el viento llamada Aorounga, en Chad, se encuentran tres cráteres en fila, cada uno de aproximadamente 10 km de diámetro. "Creemos que esta es una "cadena de cráteres" creada por el impacto de un cometa o asteroide fragmentado hace casi 400 millones de años, a finales del período Davoniano", explica Adriana Ocampo del centro de operaciones de la NASA. Texto tomado de http://ciencias.nasa.gob/sciencie-at-nasa/2004.

El fenómeno dejó cicatrices en el paisaje que todavía son visibles en esta imagen de radar espacial de un área en el Desierto del Sahara en el norte de Chad. La estructura de circunferencias concéntricas es el cráter de impacto Aorounga, con un diámetro de unos 17 kilómetros (10.5 millas).

i. Con los diámetros proporcionados encontrar el perímetro de la circunferencia.
ii. En la notica dice que son circunferencias concéntricas. ¿Puedes explicar a qué se refiere con que sean concéntricas?
iii. ¿Qué relación hay entre sus radios? Por ejemplo, si uno de sus diámetros mide 10km y la otra tiene diámetro 17km, ¿cuál es la distancia de la circunferencia menor a la mayor?

5. Analiza la siguiente información:

El monumento Stonehenge representa un colosal esfuerzo de planeación y elaboración, y fue construido en cuatro fases con piedras de diferentes orígenes. Algunas provienen de Avenbury, a una treintena de kilómetros al noroeste, otras de los montes Prescelly en el País de Gales, a más de 200 kilómetros de Stonehenge, y de Mildford Haven, a 250 kilómetros. Definitivamente no se hizo de un día para otro, sino a lo largo de la vida de cuarenta generaciones.

El emplazamiento de Stonehenge fue elaborado según un plan extremadamente preciso. La sección principal consta de un círculo de treinta columnas rectangulares coronadas con dinteles, de las cuales, diecisiete sobreviven y solo seis dinteles. Este círculo de piedras tiene un diámetro de 29.6 metros y sus piedras son de gres silicio de un color amarillento. Tres metros al interior existe un segundo anillo de sesenta menhires. Una zanja circular de 4 m. de ancho por 1,50 m. de profundidad. Al interior, sobre el talud, un segundo anillo está dibujado por 56 agujeros, conocidos por el nombre de Agujeros de Aubrey, derivado del nombre de uno de los primeros exploradores del emplazamiento (1650). **Datos tomados de diversos sitios electrónicos.**

De la información proporcionada resuelve:

i) Encuentra el área y perímetro de círculo de 29.6m.

ii) Se dice, en la información, que tres metros al interior del círculo mayor se encuentra una circunferencia. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia concéntrica? Luego encuentra su perímetro.

iii) Encuentra el área y perímetro de las zanjas circular es de 4m.

Referencias Bibliográficas

1. Aorounga Impact Crater, Sahara Desert, Chad. (s.f.). Recuperado Agosto 22, 2011, a partir de http://southport.jpl.nasa.gov/cdrom/sirced03/cdrom/DATA/LOCATION/AFRICA/SAHARA/POSTSIRC/CHAD.HTM
2. Amira: Sueños y dolmones. (s.f.). Recuperado Agosto 22, 2011, a partir de http://amiramelull.blogspot.com/2011/07/suenos-y-dolmenes.html
3. Corbacho, G. (2009) "circunferencias y círculos", Universidad Católica de Chile. Parinacota Quilicura.
4. Ejercicios + solucionarios circunferencia y círculo. (s.f.). Recuperado Agosto 22, 2011, a partir de http://www.slideshare.net/Julio1960/ejercicios-solucionarios-circunferencia-y-crculo
5. Navegación Oceánica. (s.f.). Recuperado Agosto 22, 2011, a partir de http://www.revistayate.com/listado-de-cruceros/460-navegacion-oceanica
6. Quispe, E. (1995) *Geometría - Primer nivel* primera edición, Lima – Perú.
7. Parallel Universe: octubre 2008. (s.f.). Recuperado Agosto 22, 2011, a partir de http://jaglezba.blogspot.com/2008_10_01_archive.html.

Lección 5 **7° grado** **Unidad 4** **Tiempo: 6 horas clase**

Medidas de capacidad y volumen

Figura 1. Depósito de acero inoxidable de una bodega vitivinícola ubicada en las fincas de la constancia.
Fuente:
http://www.lacomarcadepuertollano.com/diario/noticia.php?dia=2010_12_31&noticia=2010_12_31_No_06.xml

Introducción del tema:

Cuando se desea medir algo se tiene que elegir la unidad de medida adecuada, así como los instrumentos que nos posibiliten una mayor precisión. Por ejemplo, no podríamos medir el largo del salón de clase usando como unidad el kilogramo, ni decir cuánto pesa un elefante usando el litro o el metro.

Los resultados de las mediciones son siempre aproximaciones, los valores que se obtienen dependen de la habilidad de la persona que mide y de la precisión del instrumento del que se disponga.

Por su forma, algunos objetos pueden contener sustancias; esos objetos se llaman recipientes y de ellos se puede medir su capacidad como su volumen. También se puede conocer el volumen de su contenido. Por ejemplo, una taza vacía tiene un volumen, ocupa un lugar en el espacio y, como es un recipiente, también se puede medir su capacidad y el volumen del líquido que contenga.

En cambio, de otros objetos, por ejemplo una piedra, sólo se puede medir su volumen. Tanto las unidades de capacidad como las de volumen, indican de manera diferente cuál es el tamaño de un recipiente.

Competencias a desarrollar

Formulación de modelos matemáticos que permitan la manipulación numérica y la lectura comprensiva verificando el ámbito de validez de las soluciones.

Objetivos

- Evidenciar la evolución de la definición de medidas de capacidad y volumen a lo largo de la historia.
- Mejorar el desempeño del cálculo mental, mediante actividades de razonamiento lógico.
- Resolver problemas utilizando las conversiones para desempeñar la relación capacidad - volumen

Presaberes

- Operaciones básicas con números enteros y decimales y fracciones.
- Porcentajes.
- Reconocimiento de figuras

VOCABULARIO MATEMÁTICO

La medida de una cantidad es el número de veces que esa cantidad contiene la unidad elegida.

La capacidad indica cuánto puede contener o guardar un recipiente. Generalmente se expresa en litros (l) y mililitros (ml).

El volumen, indica cuánto espacio ocupa un objeto. Generalmente se expresa en metros cúbicos (m^3) y centímetros cúbicos (cm^3). Un cubito de 1 cm de arista ocupa un volumen de 1 cm^3.

El litro (l) es la unidad fundamental del Sistema Métrico Decimal para medir la magnitud de la capacidad. El litro es la capacidad que contiene un cubo de 1 decímetro de lado.

Por tanto, 1 litro $= 1\ dm^3$.

Esta igualdad establece la relación entre las magnitudes Capacidad y Volumen.

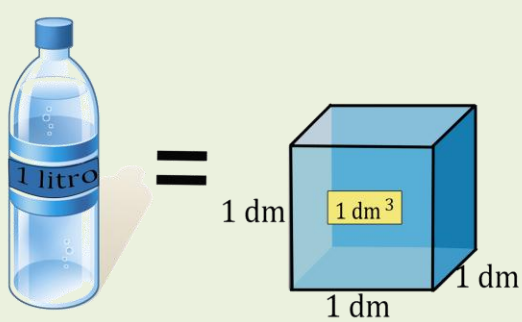


Figura 2. Relación entre capacidad y volumen.

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

La medida se obtiene eligiendo una unidad de medida, que es la cantidad tomada como referencia para medir.

Cada magnitud tiene sus propias unidades de medida. Luego se compara la cantidad a medir con la unidad elegida y se obtiene el valor de la cantidad, o sea el número de unidades que contiene esa cantidad.

Por ejemplo: la magnitud medida es el volumen, la unidad elegida es el centímetro cúbico y el valor de la cantidad medida es 473 cm^3.

El volumen es una propiedad cuantitativa de la materia, y es el espacio que ocupa un cuerpo. La unidad de volumen es el metro cúbico.

Tabla 1. Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

UNIDADES DE VOLUMEN	SÍMBOLO	m^3
Kilómetro cúbico	km^3	10^9
Hectómetro cúbico	hm^3	10^6
Decámetro cúbico	dam^3	10^3
metro cúbico	m^3	1
decímetro cúbico	dm^3	10^{-3}
centímetro cúbico	cm^3	10^{-6}
milímetro cúbico	mm^3	10^{-9}

La capacidad es el contenido de un recipiente, también se expresa como medida de volumen. La unidad de capacidad es el litro.

Tabla 2. Múltiplos y submúltiplos del litro.

UNIDADES DE CAPACIDAD	SÍMBOLO	Litros (l)
Kilolitro	kl	1000
Hectolitro	hl	100
Decalitro	dal	10
Litro	l	1
decilitro	dl	10^{-1}
centilitro	cl	10^{-2}
mililitro	ml	10^{-3}

Historia de las unidades de medida de capacidad y volumen

Desde un principio el peso, la capacidad y el volumen estaban estrechamente unidos. El volumen era una medida que se asociaba con la capacidad del recipiente y el peso de este con su contenido.

Las primeras medidas de capacidad eran reconocidas en objetos naturales, como la capacidad de una calabaza, conchilla o cáscara de huevo.

Los babilónicos presentaron la primera medida exacta de capacidad que se conoce. Era un cubo hueco de un palmo de arista. Este cubo lleno de agua era la unidad de capacidad de agua que contenía. El peso de ese cubo lleno fue su unidad de peso.

El galón fue otra medida de capacidad; volumen y peso a la vez. Nadie sabe bien dónde se originó, pero se conocía como medida líquida y su uso aún prevalece en los pueblos anglosajones. Junto a las medidas líquidas existían otras que se llamaban medidas áridas, que se usaban con elementos secos como frutos y granos.

El dracma era una medida de volumen y peso. La palabra dracma viene del griego y significa puñado. En esta medida se consideraba el espacio que ocupaban 27 granos de trigo y el peso de este puñado.

Cuando se tenían 16 dracmas se lo llamaba onza, dado que los romanos consideraban que la doceava parte de una libra era equivalente a estos 16 puñados.

La libra era una unidad que utilizaban en la medida de peso los romanos y estos además usaban el quintal que eran 100 libras.

La Tonelada también era una unidad muy usada en la antigüedad y tampoco se sabe bien dónde se originó, pero si se reconoce que en el norte de Europa tenía mucha utilidad. La tonelada de registro es una unidad de volumen y expresa el contenido de un barco; la tonelada de desplazamiento en cambio expresa el volumen de agua que desaloja un barco en su desplazamiento y la tonelada de arqueo es una unidad de peso que corresponde a un volumen ocupado.

Otras tantas unidades han surgido por los envases que contenían algunos elementos y aún se utilizan, como un saco de harina, un barril de aceite o un tonel de vino.

En la historia de la humanidad llegó el momento donde el manejo de tantas unidades y de la arbitrariedad de estas originaban un obstáculo para las relaciones comerciales, entonces comenzaron los movimientos para un ordenamiento, lo que llevó a un sistema de unidades unificadas, fiables y de conocimiento generalizado. Este reconocimiento de unificación era muy viejo, dado que en el siglo IV a.C. hubo intentos para ello, pero fracasaron. Con la Revolución Francesa se introduce el Sistema Métrico Decimal y los pueblos en su mayoría lo incorporaron por lo sencillo que era operar con él. No obstante los países anglosajones conservaron el propio.

Diagnóstico de conocimientos

Actividad 1

Conozcamos las unidades de capacidad y volumen.

Objetivo

Identificar medidas de capacidad y volumen.

Materiales

Latas y envases de distintos tamaños, de uso cotidiano por lo menos 5 diferentes.

Figura 3. Botellas y envases de uso cotidiano

Indicaciones

Pedir los materiales con anticipación al desarrollo de la clase ya en la clase, forman equipos de 5 integrantes para que clasifiquen todos los envases o latas que llevaron a partir de alguna característica en común, como la cantidad que indica el envase. Luego haga las siguientes preguntas: ¿Qué observaste en los envases? ¿Por qué los clasificaron de esa manera? ¿Esas son unidades de medida? ¿Qué unidades de medida representan?

Haga estas preguntas por cada equipo, dando un tiempo prudencial para la respuesta. Se espera que al final logren identificar, por ejemplo, que unas se clasifican en litros o sus múltiplos o submúltiplos, o bien que se clasifican mediante unidades de metros cúbicos o sus múltiplos o submúltiplos.

Si logramos que el grupo conteste de esta manera las preguntas planteadas, podemos explicar qué son las unidades de medida de capacidad y volumen.

Después haga la pregunta: ¿Es lo mismo medir capacidades que medir volúmenes?, y pida que anoten las cantidades de los envases que recolectaron y que en equipo hagan un listado de acuerdo a la siguiente tabla:

Tabla 3. Clasificación de envases.

Producto	Tipo de envase	Valor de la cantidad	Unidad de medida	Magnitud
Gaseosa	Lata	475cm^3	centímetro cúbico	Volumen
Gaseosa	botella	1.5 litros	litro	capacidad

Se podrá explicar que los envases tienen como características: se clasifican por unidades de capacidad, es decir, por la cantidad de líquido que contienen; o por unidades de volumen, que es la que indica cuanto espacio ocupa un objeto. Por tanto, la respuesta será que una mide cantidad de líquido y la otra el espacio que ocupa un objeto.

Actividad 2

Utilicemos las medidas de volumen y capacidad

Objetivo

Utilizar medidas de volumen y capacidad.

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que se reúna en parejas y que resuelvan los siguientes planteamientos:

1. Calcular, por tanteo, la longitud de la arista de un cubo de $343 m^3$ de volumen.

Posible solución

Realizando por tanteo nos damos cuentas que la arista medirá 7 m, ya que:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343\, m^3$$

2. ¿Cuántos peces, pequeños o medianos, se pueden introducir en un acuario cuyas medidas interiores son 88 x 65 x 70 cm? (Se recomienda introducir, a lo sumo, un pez mediano o pequeño por cada cuatro litros de agua).

Figura 4. Pecera con peces

Posible solución

La capacidad del acuario es:

$$V = 85 \times 65 \times 70 = 386{,}750 \text{ cm}^3$$

$$= 386.8 \text{ litros}$$

Se pueden introducir:

$$\frac{386.8}{4} \approx 96 \text{ peces}$$

3. Se echan 7 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 1.3 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

Posible solución Lo primero que tenemos que conocer el la fórmula del volumen de un cilindro y esta es: $V = \pi\ r^2 h$

Despejando h, nos queda

$$h = \frac{V}{\pi\ r^2} = \frac{7}{\pi\ (1.3\text{cm})^2} V$$

$$= (\pi\ (3.6)^2 (6.5))/3\ 1.32\text{cm}$$

4. ¿Cuántas copas se pueden llenar con 6 litros de vino, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 6.5 cm y un radio interior de 3.6 cm?

Posible solución:

Primero debemos saber cuál es el volumen de un cono:

$$V = \left(\pi\ r^2 h\right)/3$$

La capacidad de cada copa es:

$$V = \left(\pi\ (3.6)^2 (6.5)\right)/3 \approx 88.22 cm^3$$

Se pueden llenar:

$$\frac{6000}{88.22} \approx 68 \text{ copa}$$

Actividad 2

Relación entre volumen y capacidad

Objetivo

Observar y comprender la relación entre volumen y capacidad

Materiales

Cartoncillo o cartulina

Tijeras

Pegamento.

Envase de un litro

Jabón blanco

Indicaciones

Plantear la siguiente pregunta: ¿Qué volumen ocupa un litro de agua? Pero antes de obtener la respuesta, es preciso que realicemos algunas experiencias con distintas unidades de volumen. Para ello, se deben construir algunas cajas o “cubos sin tapa.”

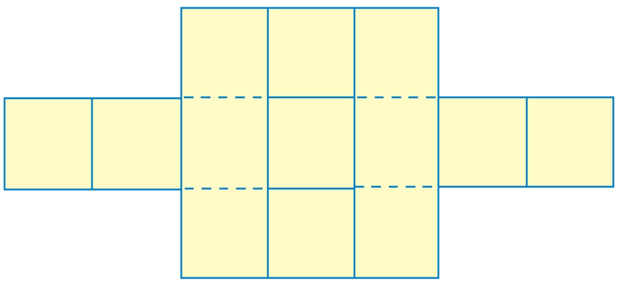


Figura 5. Molde del cubo sin tapa

a) Copiar el molde en cartulina o cartoncillo fino y preparar varios recipientes con forma de cubos; elaborar uno de 5 cm de arista, otro de 10 cm de arista y otro de 12cm.

   Si se puede armar un cubito de 1 cm de arista, se elabora. De lo contrario, se puede elaborar cortando un trozo de jabón blanco que, aunque no quede perfecto, dará una idea aproximada. Además, conseguir algún recipiente con medida de un litro.

b) ¿En cuál de los recipientes que elaboró cree que cabe un litro de agua?

   Anote en su cuaderno qué es lo que piensa sobre cuál de los recipientes puede recibir un litro de agua. Ahora compruébelo con sus cubitos. En lugar del litro de agua podemos utilizar tierra seca, arena o harina de maíz, traspasando de un recipiente a otro.

c) Calcule cuántos cubitos de 1 cm de lado puede contener cada uno de los cubos sin tapa que construyó; utilice el cubito de 1cm que construyó con el cartoncillo o que cortó del pedazo de jabón blanco. Anote las respuestas en su cuaderno de trabajo y responda a la pregunta que se planteó al inicio de la esta actividad.

Las relaciones que observó entre la capacidad y el volumen están resumidas en la Tabla 4. Antes, escriba a sus estudiantes las siguientes explicaciones:

- Un cubo de un decímetro de lado o un decímetro cúbico (1 dm^3) de volumen puede contener un litro.
- Un decímetro cúbico equivale a 1,000 centímetros cúbicos (1,000 cm^3).

A partir de una unidad de longitud lineal (u) se puede construir un cuadrado de una unidad de lado; se llama unidad cuadrada y se simboliza u^2. A partir de ella se puede construir un cubo de una unidad de arista; se llama unidad cúbica y se simboliza u^3.

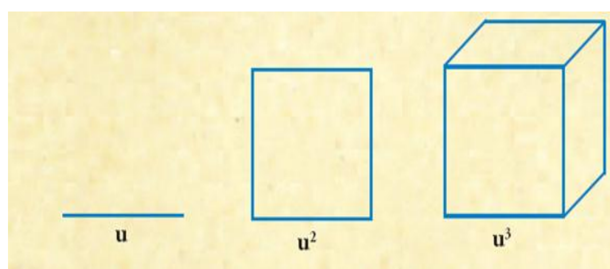


Figura 6. Representación geométrica de la unidad, unidad cuadrada y unidad cubica

Tabla 4. Símbolo, unidades y magnitudes.

SIMBOLO	UNIDAD	MAGNITUD
m^3	metro cúbico	volumen
dm^3	decímetro cúbico	volumen
cm^3	centímetro cúbico	volumen
mm^3	milímetro cúbico	volumen
l	litro	capacidad
ml	mililitro	capacidad
Equivalencias	1 l= 1 dm^3	1ml = 1 cm^3

Actividad 3

Conozcamos el espacio que ocupa un metro cúbico.

Objetivo

Identificar cual es el volumen que ocupa un metro cúbico

Materiales

Hojas de papel periódico
Metro o reglas.

Indicaciones

a) Para formarte una idea clara del espacio que ocupa un cubo de 1 metro de arista, formar equipos de trabajo de 5 integrantes.

   Luego, con el papel periódico y el pegamento armar dos o tres cuadrados de 1 metro de lado. Después, usar las paredes de un rincón del salón de clases para armar un cubo de un metro de lado, sosteniendo convenientemente con las manos los cuadrados de papel. Lo que importa es que puedan apreciar el espacio que ocupa un metro cúbico.

b) Construir con el procedimiento anterior un cubo de medio metro de arista y luego hacer las comparaciones necesarias para contestar la pregunta: ¿es lo mismo medio metro cúbico que un cubo de medio metro de arista?

Para contestar a la interrogante piensa las respuestas a estas preguntas:

1. ¿Cuántos cubos de 1 dm^3 se necesitan para llenar un volumen de un cubo de 1 metro de arista? ¿Cómo podrían verificar tu estimación?
2. ¿Cuántos litros puede contener un cubo de 1 m de arista? ¿Y un cubo de $\frac{1}{2}$ metro de arista?

c) Pedir al grupo de estudiantes que anote cada una de las conclusiones en su cuaderno de trabajo y que las discutan en plenaria.

Actividad 4

Utilicemos las unidades de capacidad y volumen en la vida cotidiana.

Objetivo

Hacer uso de las unidades de capacidad y volumen.

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que se reúna en parejas para resolver las siguientes situaciones.

1. **Producción lechera**

En las proximidades de una ciudad de la cuenca lechera se estima que la producción diaria de leche alcanza los 60,000 litros.

- Si la producción es buena, cada vaca puede dar entre 17 y 19 litros de leche por día. ¿A qué cantidad de vacas corresponde la producción de 60,000 litros?

Posible solución

Formulando una regla de 3 simple, se tendrá que si son 17 litros al día por cada vaca, el resultado es 3,529 vacas aproximadamente; y en el caso de 19 litros al día por cada vaca, se tiene que el resultado es 3,158 aproximadamente.

- En el caso de 360 vacas, ¿cuántos litros diarios de leche se pueden producir?

Posible solución

Si son 360 vacas y cada vaca produce 17 litros entonces el resultado es 6,120 y si son 19 litros entonces el resultado es 6,840 litros

2. **Un frasco de vitaminas**

Un frasco de vitaminas contiene 50 ml. A menores de hasta 3 años, el médico les indicó tomar 1.5 ml por día y a mayores de 3 años, el doble por día.

- Marcela tiene 4 hijos: Juan, que es un bebé de 10 meses; Andrea que tiene 4 años y mellizos de 6 años. Si todos toman las vitaminas, ¿cuánto tiempo dura el frasco?

Posible solución

Para solucionar este problema se debe clasificar a cada niña o niño por sus edades y la dosis recomendada en mililitros por el médico. El resultado puede variar. Sin embargo la dosis completa para cada niño será de 4 días. Para el quinto día, para terminarse el frasco solo le resta 8 mililitros, los cuales deberán repartir entre 4 niños o niñas, solo dar la dosis completa a 2 ó 3, quedando 1 sin la dosis.

Guía de problemas y ejercicios

1. Expresa los siguientes volúmenes en litros:
   a) 3 dm^3
   b) 50 dam^3
   c) 1200 cm^3
   d) 0.0007 m^3

2. Lee la siguiente información extraída de un artículo publicado en la Revista Ambientum, de septiembre de 2005, y responde en tu cuaderno de trabajo las preguntas que están al final.

Se entiende por consumo doméstico de agua por habitante, a la cantidad de agua de que dispone una persona para sus necesidades diarias de consumo, aseo, limpieza, riego, etc., y se mide en litros por habitante y día (l/hab/día). Es un valor muy representativo de las necesidades y/o consumo real de agua dentro de una comunidad o población y, por consiguiente, refleja también de manera indirecta el nivel de desarrollo económico y social de esa comunidad.

El destino aplicado al agua dulce consumida varía mucho de una región a otra del planeta, incluso dentro de un mismo país. Por regla general, el consumo elevado de agua potable se da en países ricos y, dentro de estos, los consumos urbanos duplican a los consumos rurales.

A nivel mundial, se extraen actualmente unos 1,800 litros/hab/día de agua dulce para consumo humano, de los cuales, aproximadamente la mitad, no se consume (se evapora, infiltra al suelo o vuelve a algún cauce); de la otra mitad se calcula que el 65% se destina a la agricultura, el 25% a la industria y tan solo el 10% a consumo doméstico.

Ahora bien, la Organización Mundial de la Salud estima como razonable un consumo de agua de 200 litros por día por persona que habita en una vivienda urbana.

En la tabla siguiente, se aprecia el consumo en diferentes zonas del planeta (datos 1996):

Tabla 5. Consumo mundial de agua

Área de geográfica	Consumo	
	m^3/hab./año	l/hab./año
América del norte y central	1,874	5,134
Europa	1,290	3,534
Oceanía	887	2,430
Asía	529	1,449
América del sur	485	1,329
África	250	685
Media mundial	657	1,800

a) Observa las dos columnas de la tabla; ¿qué cálculo hay que hacer para pasar de un dato de la columna de la derecha a su correspondiente en la otra? ¿Por qué? ¿Cómo se pueden obtener los valores de la "media mundial"?
b) A partir de la información de que se extraen 1.800 litros/hab/día de agua dulce, calcule para cada área geográfica la cantidad de agua en litros/hab/día que se destina a la agricultura, la que va a la industria y cuánto se emplea en el consumo doméstico.
c) Escriba un breve comentario acerca de lo que piensa sobre la "nueva cultura del agua".

3. Don Jorge está enfermo y ha acudido al médico. Éste le ha recetado un jarabe que viene en un frasco de 200 cm^3. En el prospecto de dicho medicamento, se recomienda no superar una dosis máxima diaria de 25 ml.

   Si el médico le ha recetado una dosis de 4 tomas al día de 5 ml cada una, ¿cuántos cm^3diarios tomará? ¿Cuántos días le durará un frasco de jarabe?

Si el tratamiento durase 8 días y le hubiesen recetado la dosis máxima diaria, ¿tendría bastante con un frasco de jarabe para todo el tratamiento?

4. Una bodega vitivinícola con una capacidad de 450.000 litros de vino ha vendido, en un buen año, la mitad de sus existencias en botellas de 750 cm^3 y la cuarta parte en botellas de 250 ml. ¿Cuántas botellas ha vendido en total? ¿De qué tipo ha vendido más botellas?

5. Un pantano tiene una capacidad de 450 hm^3. Si actualmente está a un 76% de su capacidad, ¿cuántos metros cúbicos de agua contiene?

Referencias bibliográficas

1. Capacidad y volumen, Recuperado Octubre 5, 2011, a partir de http://agrega.hezkuntza.net/repositorio/31052011/0b/eseu_2011051513_1310505/sistema_metrico/modulos/es/content_1_5.html
2. Del número a la medida, Recuperado Octubre 5, 2011, a partir de http://www.gesell.com.ar/vgol/locales/ong/iabgp/medida.htm
3. Medidas de capacidad y volumen, Recuperado Octubre 5, 2011, a partir de http://www.portalplanetasedna.com.ar/numero_medida_2.htm
4. Unidad didáctica interactiva, medidas de capacidad y volumen Recuperado Octubre 5, 2011, a partir de: http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/softEduca/umedida/2-_capacidad.html
5. Volumen de los cuerpos geométricos, Recuperado Octubre 6, 2011, a partir de

   http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2esoquincena10.pdf

Lección 6 7° grado Unidad 4 Tiempo: 8 horas clase

Proporcionalidad y conversiones

Figura 1. El tiempo de recoleta de una cosecha, es inversamente proporcional al número de trabajadores que se encuentren en dicha finca.

Introducción del tema

En la vida corriente utilizamos el término PROPORCIÓN con distintos sentidos. Cuando decimos que alguien está bien proporcionado damos a este término un sentido de armonía y estética: "Este niño ha crecido mucho, pero está bien proporcionado". Si comentamos que el éxito de una persona es proporcional (o está en proporción) a su trabajo ponemos de manifiesto la correlación entre estas dos variables: ÉXITO y TRABAJO. También solemos utilizarlo para comparar fenómenos en distintos ámbitos.

En matemáticas, dicha palabra tiene un significado más restringido que trataremos de precisar. Existe una relación entre dos magnitudes. Además, cuando una varía provoca que varíe la otra.

El tema comienza con los conceptos de las magnitudes directamente proporcionales y la razón o constante de proporcionalidad directa, incidiendo en el cálculo de términos desconocidos en proporciones directas como método de resolución de reglas de tres.

Competencias a desarrollar

Sabe representar, comunicar, resolver problemas y utilizar experimentos sencillos para comprender los conceptos.

Objetivos

- Explicar e interpreta los resultados obtenidos para diferencias proporción directa e inversa.
- Manejar adecuadamente los conceptos de proporción inversa y directa
- Mostrar la importancia del uso de la regla de tres para resolver problemas.

Presaberes

- Operaciones básicas con números enteros y decimales.
- Reconocimiento de figuras planas.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Razón. Es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida.

Proporción. Cuando en la situación considerada sólo intervienen dos pares de números que se corresponden.

Proporción directa: directamente proporcionales, es decir, que ambas variables aumentan o disminuyen a la vez.

Ejemplo:

Un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos?

Tabla1. Relación directa entre sacos y su peso

N° de sacos	1	2	3	4	5
Peso en kg	20	40	60	80	100

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20.

Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20.

Obsérvese que $\frac{1}{20}=\frac{2}{40}=\frac{3}{60}$; por tanto, son directamente proporcionales.

Proporción inversa: inversamente proporcionales, es decir, que si una variable aumenta la otra disminuye en una relación similar.

Ejemplo:

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

Tabla2. Relación inversa entre hombres y día de trabajo

Hombres	3	6	9	12	...	18
días	24	12	8	6		4

Vemos que los productos 3 por 24 = 6 por 12 = 9 por 8 = 72

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

En el tema "Fracciones y números racionales" hemos visto que entre los usos de las fracciones figura el de la razón, entendida, de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra parte. Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para las personas. Hoffer[1] explica claramente estas distinciones. La idea clave es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 2 de dólar. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto, la razón 3 jamones/3 dólares no es una fracción.
- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

1. Hoffer, A. R. (1988). Ratios and proportional thiking. En Th. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8. Boston: Allyn and Bacon.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \rightarrow 7$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo: 2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

Proporción numérica

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

En donde se dan los siguientes casos:

1. El resultado de dividir el numerador entre el denominador siempre es el mismo y se llama constante de proporcionalidad.

   Ejemplo:

cantidad de cucharas	16	32	48	64	80
cantidad de litros	1	2	3	4	5

En este caso la constante de proporcionalidad es k=16

2. Dos relaciones, cualesquiera de las establecidas en el cuadro anterior, cumplen que al multiplicar sus extremos el resultado es el mismo. Por ejemplo:

$$\frac{32}{2} = \frac{80}{5} \Longrightarrow \frac{32}{2} \quad \frac{80}{5}\ , \quad 160 = 160$$

   1. Si toma dos fracciones equivalentes, por ejemplo $\frac{32}{2}$ y $\frac{48}{3}$, y suma directamente los numeradores y los denominadores, el resultado es una fracción equivalente a los anteriores: numeradores $32 + 48 = 80$ y los denominadores $2 + 3 = 5$, resulta que $\frac{80}{5}$ es equivalente a $\frac{32}{2}$ y $\frac{48}{3}$.

Todas estas características se cumplen porque la relación de proporcionalidad está expresada por una función lineal.

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa**.

Razón de proporcionalidad: $r = \frac{m_1}{m_2}$

Si 1 kilogramo de manzanas vale $2.00 ¿cuál será el precio de la compra según el peso?

Tabla 1. Representación de resultados

# de kilos	Precio $	Razón de proporción
1	2.00	$\frac{2}{1} = 2$
2	4.00	$\frac{4}{2} = 2$
3	6.00	$\frac{6}{3} = 2$
4	8.00	$\frac{8}{4} = 2$
5	10.00	$\frac{10}{5} = 2$

Al dividir cualquier valor de la segunda magnitud por el valor de la primera magnitud se obtiene el mismo cociente.

Regla de tres directa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad directa es un procedimiento llamado regla de tres.

Consiste en aprovechar la razón o constante de proporcionalidad directa para calcular el cuarto término.

Esta es muy útil cuando se desean hacer conversiones directas, por ejemplo:

Una maquina embotelladora llena 240 botellas en 20 min ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

Aplicamos la conversión de horas a minutos. Utilizando la regla de tres directa

1h-----------------------60min

$1\frac{1}{2}$ h--------------------- x min

Primero convertimos el número mixto a fracción impropia. De manera que es $\frac{3}{2}$; luego se realizará el producto cruzado y se obtiene: $\frac{\frac{3}{2}h \times 60min}{1h}$.

Así el resultado es 90 min; simplificando la unidad de tiempo en horas nos quedará como resultado min.

Ahora para resolver el problema aplicamos otra vez la regla de 3 directa. Y se obtiene $\frac{240\ botellas \times 90min}{20\ min} = 1{,}080\ botellas$

Proporcionalidad inversa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Si a un valor m1 de la primera magnitud le corresponde un valor m2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto de estos dos valores es siempre constante. A este producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Ejemplo:

Una alumna compra un regalo de $72 para una compañera de la clase. ¿Cuánto tendrán que pagar según el número de personas que participen?

Tabla 2. Representación de resultados

# de kilos	Precio $	Razón de proporción
1	72	$72 \times 1 = 72$
2	36	$36 \times 2 = 72$
3	34	$34 \times 3 = 72$
4	18	$18 \times 4 = 72$

Al multiplicar los valores correspondientes a las dos magnitudes se obtiene el mismo producto.

Regla de tres inversa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad inversa es un procedimiento llamado regla de tres. Consiste en aprovechar la constante de proporcionalidad inversa para calcular el cuarto término.

Ejemplo:

Diez pintores tardan 16 días en pitar una vivienda completa. ¿Cuánto tardarán en hacerlo ocho trabajadores?

En primer lugar, es una proporcionalidad **INVERSA** porque cuantos **MÁS** pintores sean, **MENOS** días tardarán en pintar la casa.

Construimos la tabla con los datos que nos dan:

PINTORES	Nº DÍAS
10	16
8	X

Multiplicamos en PARALELO: $10.\,16 = 8.\,X$

Resolvemos la ecuación: $160 = 8.X$

Despejamos: el número que va con X pasa dividiendo: 20 es decir, tardarían 20 días.

Actividad 1

Conozcamos proporciones.

Objetivo

Identificar mediante piezas las proporciones.

Materiales

Cartulina
Tijeras
Pegamento

Indicaciones

Formar parejas de estudiantes para que, con la Figura 1, trabajen a de la siguiente manera: los números escritos a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm.

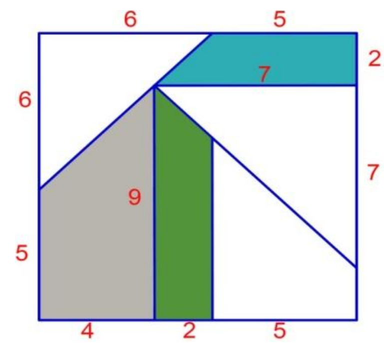


Figura 2. Puzle o rompecabezas.

Con esta actividad se pretende que cada estudiante adquiera la noción de la palabra proporción, ya que la pieza de 4 cm se convertirá en 7cm y deberán formar una proporción. De manera que al comparar cada proporción, la constante de proporcionalidad sea la misma.

Actividad 2

Identifiquemos las proporciones, proporciones inversas y directas.

Objetivo

Resolver e identificar problemas de proporcionalidad y clasificarlas según el caso.

Instrucciones

Pedir al grupo de estudiantes que se reúna en parejas para resolver los siguientes ejercicios y planteamientos de problemas:

1. Un equipo ha marcado 68 goles a favor y 44 en contra. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

Solución

Razón entre goles marcados y goles en contra:

$$\frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1.55$$

Razón entre goles encajados y goles marcados:

$$\frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0.65$$

2. Marta, Pablo y Luisa se proponen vender 600 boletos de una rifa, con el fin de recaudar fondos para ayudar a la Casa de la Cultura de su pueblo. Se las reparten proporcionalmente a 3, 4 y 5, respectivamente ¿Cuántos boletos debe vender cada persona?

Solución

Si por cada reparto Marta recibe 3 boletos, Pablo 4 y Luisa 5, el total de los boletos será entonces $3 + 4 + 5 = 12$. Además, el número de repartos posibles es de $\frac{600}{12} = 50$.

Según lo anterior:

A Marta le corresponde $50 \times 3 = 150$ boletos.

A Pablo le corresponde $50 \times 4 = 200$ boletos.

A Luisa le corresponde $50 \times 5 = 250$ boletos.

3. Un automóvil ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 min. Calcular el tiempo que tardará en recorrer un circuito en 40 vueltas.

Solución

Utilizar la regla de tres directa:

1ra. Magnitud 2da. Magnitud

N° de vueltas minutos

60----------------------- 105

40----------------------- X

$$\frac{105}{60} = \frac{X}{40} \Longrightarrow X = \frac{105 \times 40}{60} = 70$$

Entonces, el resultado es 70 min.

4. 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿Cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

Solución

1ra Magnitud 2da Magnitud

Fotocopiadoras horas

6----------------------- 6

4----------------------- X

$$\frac{6}{4} = \frac{X}{6} \Longrightarrow X = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Entonces, el resultado es 9 horas.

¿Puedes identificar en cada caso que clases de proporción es?

Sabias qué…

La semejanza de figuras es un importante concepto geométrico que se aplica en el diseño de casas, edificios, automóviles, construcción de circuitos impresos, fotografías. En la televisión, en el cine y en el microscopio vemos objetos que son semejantes a los objetos originales.

Figura 3. Semejanza de fotografías proporcionales

Dos figuras son semejantes cuando tienen igual forma pero no necesariamente tienen el mismo tamaño. La expresión "igual forma" está relacionada con las ideas numéricas de razón y proporción.

Actividad 3

Conociendo los segmentos de proporcionalidad

Objetivo

Aplicar los segmentos de proporcionalidad en las figuras geométricas

Los rectángulos ABCD y XYZW son semejantes. Una correspondencia entre los vértices es:

A ⟷ X, B⟷Y, C ⟷Z y D ⟷ W

Y así corresponden los lados:

AB ⟷ XY, AD⟷XW, BC ⟷ YZ y CD ⟷ ZW.

Si el factor de proporcionalidad es 2, entonces cada segmento de XYZW es el doble de su correspondiente de ABCD:

XY = 2AB, XW = 2AD, YZ = 2BC y WZ = 2DC.

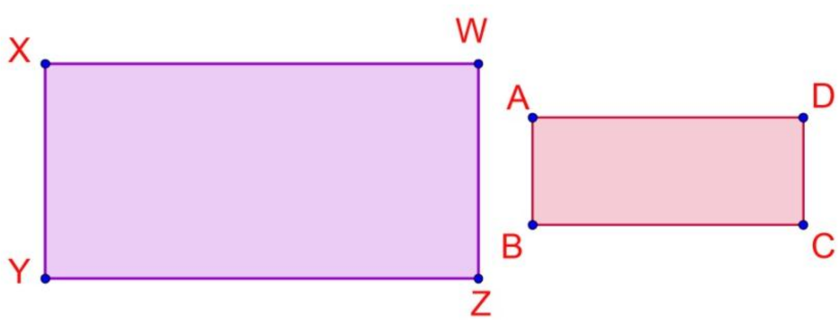


Figura 4. Rectángulos semejantes con lados proporcionales.

La proporción se establece entre pares de segmentos así:

$$\frac{XY}{AB}=\frac{2}{1};\ \frac{YZ}{BC}=\frac{2}{1};\ \frac{ZW}{CD}=\frac{2}{1};\ \frac{WX}{DA}=\frac{2}{1}$$

"La longitud del segundo segmento es a la del primero como 2 es a 1." En las figuras semejantes, los ángulos se conservan y las longitudes se multiplican por un número $K>0$. Si $K>1$, la figura se agranda; y si $K<1$, se reduce.

Ahora, con lo estudiado, pida a sus estudiantes que se reúnan en parejas y que elaboren semejanzas de rectángulos, Si el factor de proporcionalidad es 5, encontrar en cada lado del rectángulo su correspondencia con el otro.
Puedes utilizar otro tipo de figuras planas, siempre y cuando sean figuras que tienen relación entre los vértices.

Actividad 4
Elaboremos un pantógrafo[13] y construyamos figuras semejantes.
Objetivo
Construir figuras semejantes.

Materiales
Lápiz
Hules
Tachuelas

Indicaciones
1. Se cruzan los hules como en la Figura 5.
2. Se fija un extremo en un punto y en el otro extremo se coloca un lápiz.
3. A medida que el nudo recorre la figura, se va dibujando con el lápiz la figura semejante.

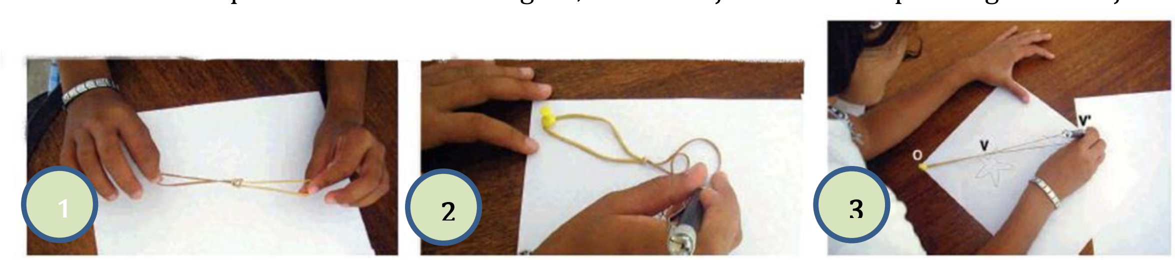


Figura 5. Proceso para crear un pantógrafo

Ejercicios

[13] El pantógrafo es un instrumento mecánico para reducir o aumentar figuras, produciendo figuras semejantes.

Dibuja una figura semejante al pentágono, y luego otra cuyos lados midan la mitad del pentágono dado.
Dibuja una figura semejante al hexágono, y luego otra cuyos lados midan tres medios de los lados del hexágono dado.

Actividad 5
Utilicemos la proporcional directa.

Objetivo
Conocer la aplicación de la de la proporcionalidad directa en las ciencias físicas.

Materiales
Un soporte universal.
Dos resortes de diferente constante de elasticidad.
Cinco masas aproximadamente 10, 20, 30, 40, 50 g.
Una regla graduada en milímetros.

Indicaciones
Con base en las siguientes preguntas se guiará en lo que corresponde a la identificación del problema y la formulación de las respectivas hipótesis, para conocer la ley de Hook y que es proporcionalmente directa.

Coloque una masa en uno de los resortes, desplace ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, suéltelo y describa el movimiento que observa.
Lo que se puede observar en el movimiento de la masa con respecto al resorte es una oscilación vertical, ya que el resorte trata de retornar a su punto de equilibrio.

¿Qué variables con sus respectivas unidades están involucradas en este estudio?

- Masa en gramos.
- Distancia de elongación del resorte en centímetros.

Construya y anote en una tabla los resultados de cada una de los ejercicios o experimentos.
R. Hooke estudió un fenómeno y estableció una Ley que hoy lleva su nombre: Ley de Hooke, según la cual, cuando un cuerpo es deformado dentro de su rango elástico, la deformación es proporcional a la fuerza que la produce.

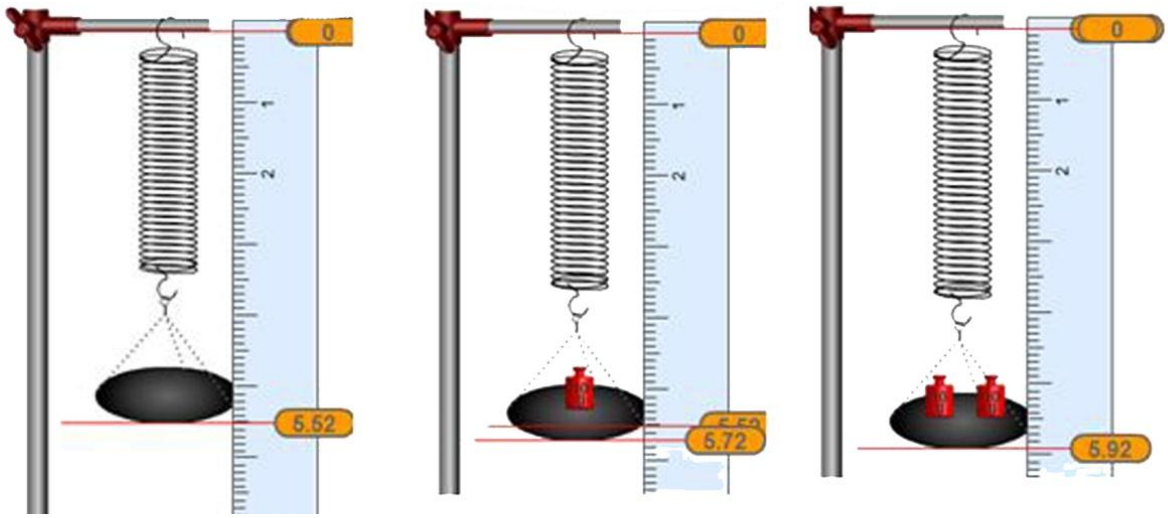


Figura 6. Proceso para encontrar la constante de proporción en la ley de Hook

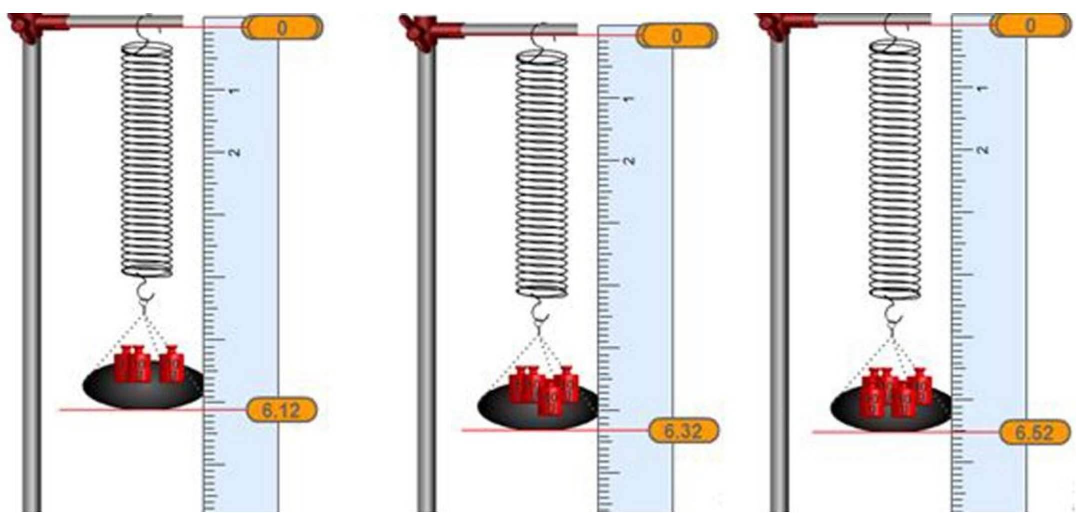


Figura 7. Proceso para encontrar la constante de proporción en la ley de Hook

Es decir, cuando se cuelga una masa m en un resorte, éste se alarga (se deforma); y el alargamiento está relacionado con la fuerza aplicada (peso que se cuelga) según:

$$Peso = k \times x$$

Así, la condición de equilibrio es $mg = k\ x$ donde k es la constante de fuerza cuyas unidades de medida en el sistema MKS son *Nw/mt.*

Dicha ley significa que en el rango elástico, a mayor fuerza aplicada, mayor es la deformación en la misma proporción. La constante de fuerza es diferente para los diferentes materiales. Es alta para el acero y baja para una liga. Pero no solamente depende de la naturaleza del cuerpo, sino también de su sección transversal. En el caso de un resorte, dependerá del material, del diámetro del alambre y del diámetro del resorte.

Puede responder ahora: ¿qué clase de proporción utiliza la ley de Hooke según lo observado en el experimento? ¿Cuál es la constante de proporción en el experimento después de haber elaborado la tabla?

Guía de problemas y ejercicios

1. Diga si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales:

   a) La edad en años de una persona y su talla en centímetros.
   b) Peso de una persona y su edad.
   c) Kilos de patatas y su precio.
   d) Velocidad a que va un coche y litros que gasta.
   e) Velocidad a que va un vehículo y kilómetros recorridos.

2. Busque:

   a) Tres pares de números cuya razón sea igual a $\frac{1}{2}$
   b) Tres parejas de números que estén en la relación de tres a uno.
   c) Tres parejas de números que estén en razón de dos a cinco.

3. Indique cuáles de las siguientes razones forman proporción con $\frac{3}{5}$:

$$\frac{4}{8}, \qquad \frac{6}{10}, \qquad \frac{8}{9}, \qquad \frac{9}{15}$$

4. La siguiente tabla representa a dos magnitudes directamente proporcionales. Calcula los huecos que quedan en la tabla.

Metros de tela	12		45	240
Precios		100		1200

5. Una rueda de 25 dientes está engranada a otra rueda de 50 dientes. Si la primera gira a 120 revoluciones por minuto, ¿A cuántas revoluciones por minuto girará la segunda? ¿Es una proporción directa o inversa? Explique.

6. Sir Isaac Newton (4 de enero de 1643 – 31 de marzo de 1727) fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae naturalis principia mathematica,* más conocidos como los Principia, donde describió la Ley de Gravitación Universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. **Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/isaac_Newton**

La referida Ley, dice así: "La fuerza "F" que ejerce un objeto dado con masa (m_1) sobre otro con masa (m_2) es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (d) que separa sus centros de gravedad". Representar esta ley simbólicamente, donde G sea el centro de gravedad.

7. Un grifo, abierto durante 10 minutos, hace que el nivel de un depósito suba 35 cm. ¿Cuánto subirá el nivel si el grifo permanece abierto 18 minutos más? ¿Cuánto tiempo deberá permanecer abierto para que el nivel suba 70 cm? ¿Es una proporción directa o inversa? Explica.

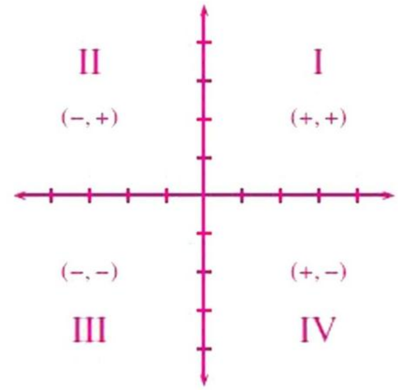
8. Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tardaría en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras? ¿Es una proporción directa o inversa? Explica.

Referencias bibliográficas

1. Ley de hook, experimentación simulada. Recuperado Septiembre 18, 2011, a partir de http://www.educaplus.org/play-119-Ley-de-Hooke.html.
2. Godino, J. (2002), *Matemáticas y su didáctica (Proporcionalidad)* Proyecto Edumat-Maestros
3. Proporcionalidad Recuperado Septiembre 18, 2011, a partir de: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2eso/unidad5.pdf
4. Revista matemática fundación polar. Fascículo 10 "El mundo de las proporciones" Matemática para todos.

Lección 7 **7° grado** **Unidad 5** **Tiempo: 6 horas clase**

Plano cartesiano



Cuadrante	*Abcisa*	*Ordenada*
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Figura 1. Esquemas de los signos de las coordenadas cartesianas de un punto según su cuadrante.

Descripción del tema

La necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad, a elaborar mapas o cartas geográficas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números.

Para fijar una figura en el espacio o en un plano e requiere relacionarla con un sistema de referencia. En el actual sistema geográfico, cualquier lugar del mundo queda determinado con precisión si se conocen su latitud (*a*) y su longitud (*b*), es decir, si se tienen su distancia ***a*** al norte o al sur del ecuador, y su distancia ***b*** al este o al oeste del meridiano de Greenwich.

No basta con tener uno sólo de estos datos, ya que hay lugares que tienen la misma latitud ***a***.

Todos los puntos del globo terrestre que están situados en el mismo paralelo, a una distancia ***a*** del ecuador tienen la misma latitud. Lo mismo sucede con la longitud.

En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto, que se denota con la letra O.

Competencias a desarrollar

Sabe representar, comunicar, resolver problemas y utilizar experimentos sencillos para comprender los conceptos.

Objetivo

- Representar e interpreta los resultados obtenidos en el plano cartesiano.
- Manejar adecuadamente los instrumentos para graficar en el plano cartesiano.
- Diferencias los conceptos de abscisas y ordenas.

Presaberes

- Los números enteros
- Manejo de la regla graduada

VOCABULARIO MATEMÁTICO

El plano cartesiano. Es uno de los dispositivos más importantes en las matemáticas. El plano sirve para dar con precisión la posición de cualquier objeto, en relación a un punto fijo que llamaremos origen.

Origen. El origen de coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas. En este punto, el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo. Sin embargo, en algunos sistemas de coordenadas no es necesario establecer nulas todas las coordenadas**.**

En un sistema de coordenadas cartesianas, el origen es el punto en que los ejes del sistema se cortan.

Sistema de Coordenadas. Un sistema de coordenadas es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un plano.

Abscisa. Es la recta horizontal del eje X.

Ordenada. Es la recta vertical y se le llama eje Y.

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

El plano cartesiano es usado en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias, como en la geometría, el cálculo, la física, etc.

Sus principales elementos son: un punto llamado origen, de donde parte toda medición (o coordenada); y dos rectas perpendiculares o ejes.

El eje vertical es llamado el eje de la coordenada ***y***, o eje de las ordenadas, o simplemente "eje y"; el eje vertical, o el eje de la coordenada ***x***, o eje de la las abscisas, o simplemente "eje x". Estos dos ejes dividen al plano en 4 partes: primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante.

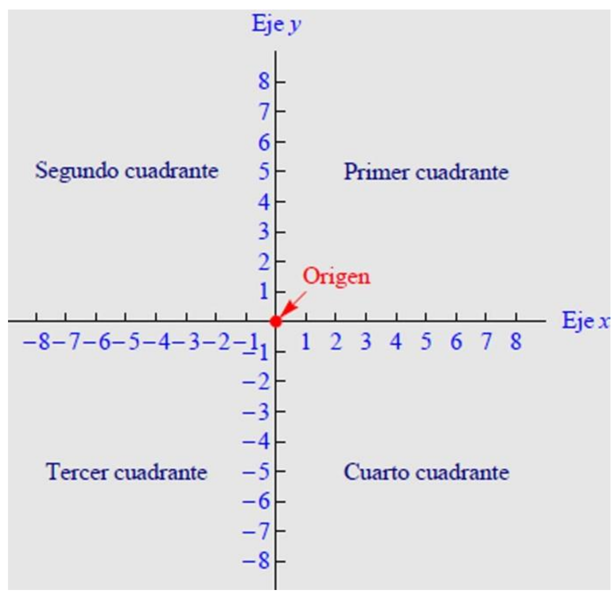


Figura 2. Plano cartesiano

Las coordenadas (*x; y*) son llamadas también coordenadas rectangulares. Esto debido a que todo punto puede estar bien localizado con sus dos coordenadas, la coordenada *x* y la coordenada *y*.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

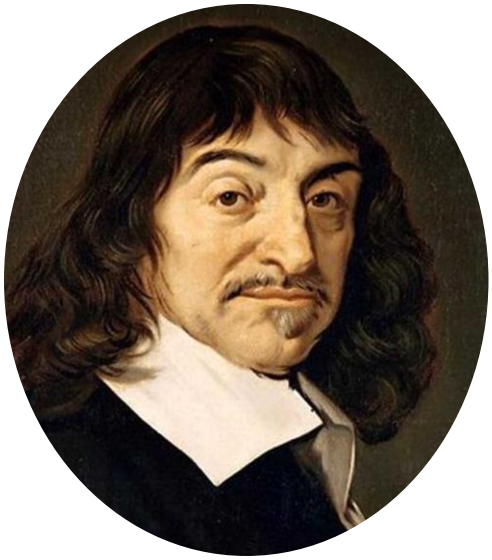


Figura 3. René Descartes fue el inventor de la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, y las variables o incógnitas por las últimas, es decir, x, y, z.

Considerado el padre de la filosofía moderna, René Descartes fue un pensador completo, que abordó también el estudio de las ciencias.

En física, sin saber que Galileo ya lo había hecho, resolvió el problema de las leyes que rigen el movimiento de caída de los cuerpos. En matemáticas, fue el creador de la geometría analítica, para lo que estableció el sistema de coordenadas ortogonales, conocido en la actualidad como sistema cartesiano. Asimismo, contribuyó a simplificar y normalizar la nomenclatura algebraica.

Tras escribir las *Reglas para la dirección del espíritu* (1628-1629) y *El mundo o Tratado de la luz* (1633), en el que se incluyó su *Tratado del hombre*, publicó su obra de mayor relieve, el *Discurso del método* (1637), que servía de prologó a la edición conjunta de tres ensayos de índole científica: la Dióptrica, la Geometría y los Meteoros. En 1641 escribió *Meditaciones metafísicas,* y en 1644, los *Principios de la filosofía.* Por ´ultimo, en 1649 se publicó su obra

Pasiones del alma.

En el sistema de pensamiento de Descartes, la filosofía engloba a todas las ciencias. Representó el conocimiento como un árbol cuyas raíces son la metafísica y cuyo tronco es la física, del que salen tres ramas principales- la medicina, la mecánica y la ética- de las que derivan todas las otras ciencias.

Consideraba que había tres sustancias: una infinita y autosubsistente, es decir, que existe por sí misma, a la que denominó res infinita e identificó con Dios, y dos sustancias finitas, que dependen para su existencia de la *res infinita*, a las que llamó *res cogitans* o sustancia pensante y *res extensa* o sustancia corpórea, cuya principal característica es la extensión en el espacio.

El pensamiento filosófico de Descartes se fundamenta en un método que consiste en tomar un punto de partida indudable sobre el que construir todo el conocimiento. En matemáticas creó la geometría analítica según el mismo principio, a partir de un sistema de coordenadas formado por dos rectas que se cortan en un punto, denominado origen.

(Texto tomado de http://www.edilatex.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf)

El plano

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.

Cualquier punto en el plano puede ser localizado con sus coordenadas, y se representa como (*x; y*).

Por ejemplo el punto de coordenadas (3; 3) se muestra en la Figura 4.

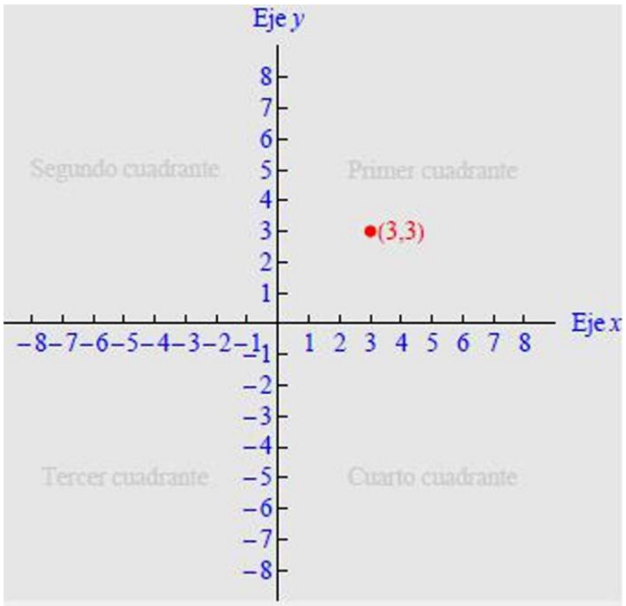


Figura 4. Coordenadas de un punto

Las coordenadas (*x; y*) son llamadas también coordenadas rectangulares. Esto debido a que todo punto puede estar bien localizado con sus dos coordenadas, la coordenada *x* y la coordenada *y*.

El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las "X" y uno de las "Y", respectivamente. Esto indica que un punto se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas, lo cual se representa como:

P (x, y)

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.
2. Desde donde se localiza el valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas, y de esta forma se localiza cualquier punto dadas sus coordenadas.

El plano en los mapas

Quizá el uso más popular del plano es hacer que todo objeto puede ser localizado respecto a una referencia. El plano permite ubicar de manera exacta, a todo objeto respecto a otros objetos. Generalmente se fija un punto de referencia llamado origen, que se representa en el plano con el punto (0; 0), y así todo objeto puede ser referenciado respecto al origen.

Los ejemplos más comunes los tenemos en los mapas, donde el norte es el eje *y* positivo, el sur el eje *y* negativo, el este el eje *x* positivo y el oeste el eje *x* negativo

Figura 5. Coordenadas de un punto en un mapa

Actividad 1

Participan en una batalla naval

Objetivo

Identificar coordenadas en para introducirnos al plano cartesiano.

Materiales

Dos hojas cuadriculadas por cada alumno

Indicaciones

Antes de comenzar el juego cada participante dibuja en papel cuadriculado dos tableros cuadrados de 10 × 10 casillas. Las filas se identifican con letras, de la A hasta la J, y las columnas del 1 al 10. Basta con indicar las coordenadas de un disparo con un par letra/número (por ejemplo, A6 o J9).

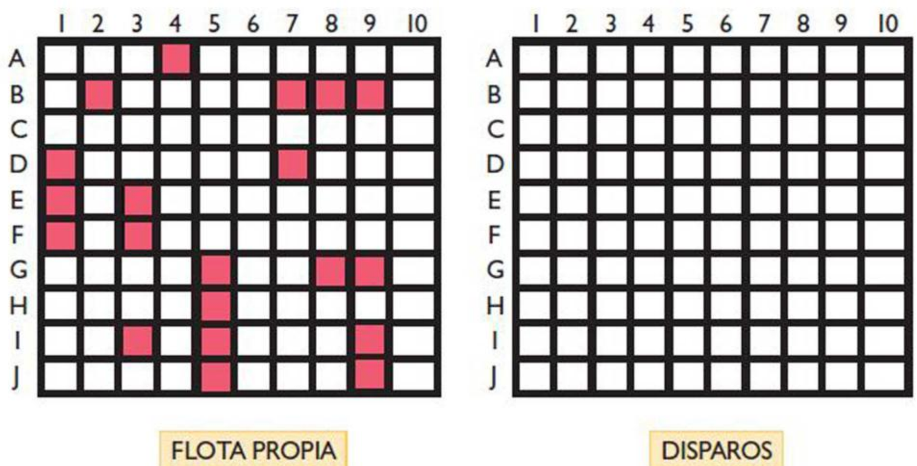


Figura 6. Cuadrículas para el juego por cada uno de los participantes

La flota:

Cada jugador o jugadora dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición. Los barcos no pueden tocarse entre sí, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero. La flota está formada por:

1. portaviones (de cuatro cuadraditos);
2. acorazados (de tres cuadraditos);
3. buques (de dos cuadraditos);
4. submarinos (de un cuadradito).

Mecánica del juego

- El turno pasa alternadamente de una persona a otra.
- En su turno, la persona hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (letra y número). Si no hay barcos en ese cuadradito, la otra persona dice: « ¡Agua!»; si el disparo ha dado en algún barco dice: « ¡Tocado!»; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir «¡Hundido!» En el ejemplo, un primer disparo sobre H9 sería:

«Agua»; sobre G5, «Tocado», y sobre D7, «Hundido».

- Gana la persona que consigue hundir todos los barcos del rival.

Actividad 2.

Ubicar las coordenadas de un punto

Objetivo

Identificar puntos en el plano cartesiano

Materiales

Cuaderno de trabajo y regla graduada

Indicaciones:

1. Determinar la abscisa y la ordenada del punto P de la figura siguiente:

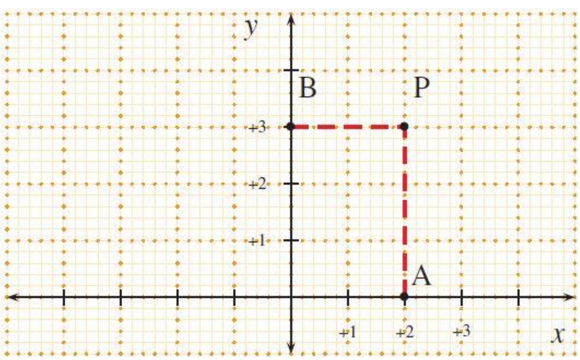


Figura 7. Coordenadas del punto P

Solución

Por el punto P del plano pasa una recta paralela a cada uno de los ejes, es decir, una paralela al eje de las *x* y otra al de las *y*. Estas rectas cortan los dos ejes en dos puntos, A y B. Si se consideran las distancias OA y OB, ambas representan la abscisa y la ordenada del punto P. En este caso, P tiene de abscisa +2 y de ordenada +3.

2. Determinar las coordenadas del punto Q del siguiente plano:

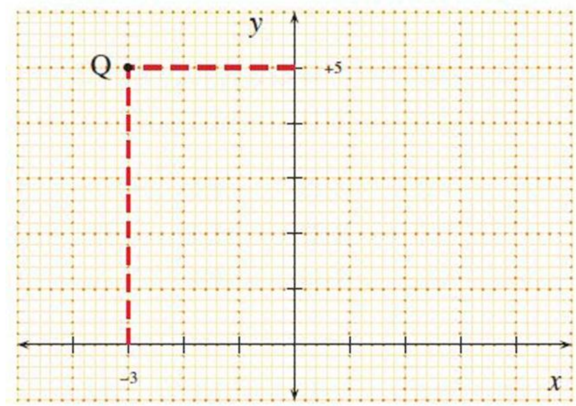


Figura 8. Coordenadas del punto Q

Solución

Q (–3, +5)

3. Colocar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

A (+5, +2) y A_ (+2, +5); B (–2, +3) y B_ (+3, –2);

C (+5, –6) y C_ (–6, +5) y D (–2, –3) y D_ (–3, –2).

Solución

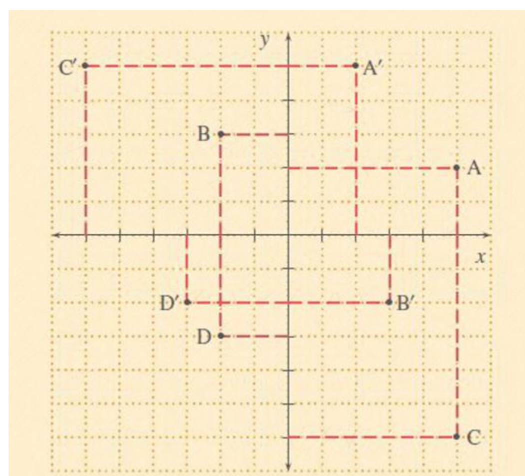


Figura 9. Coordenadas de puntos en el plano cartesiano

4. Indicar las coordenadas de los puntos marcados en negro en el siguiente dibujo.

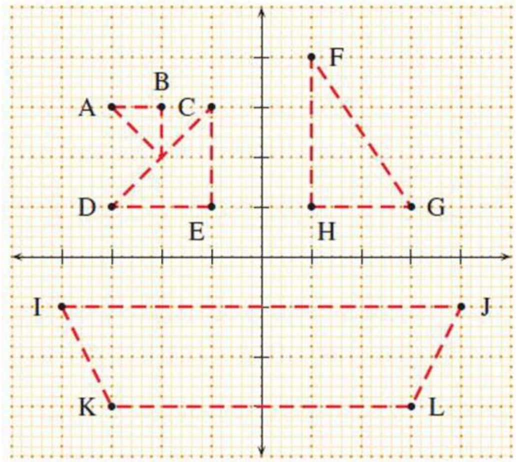


Figura 10. Coordenadas de puntos en el plano cartesiano

Solución

A (−3, +3); B (−2, +3); C (−1, +3)

D (−3, +1); E (−1, +1); F (+1, +4)

G (+3, +1); H (+1, +1); I (−4, −1)

J (+4, −1); K (−3, −3); L (+3, −3)

Actividad 3

Señalar la peculiaridad en los puntos del plano cartesiano.

Objetivo

Identificar particularidades en las coordenadas del plano cartesiano.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Regla graduada

Indicaciones

1. Observar los puntos representados

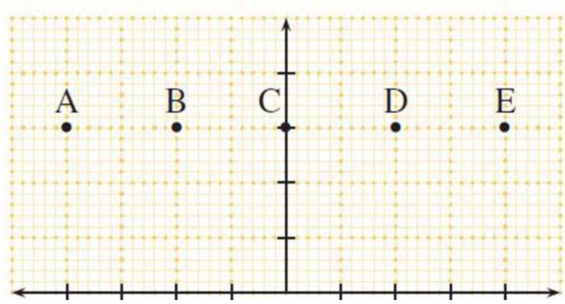


Figura 11. Coordenadas de puntos con la peculiaridad de que el número en la ordenada es el mismo.

Escribir las coordenadas de los puntos. ¿Qué particularidad tienen?

Solución

A (−4, +3); B (−2, +3); C (0, +3)

D (+2, +3); E (+4, +3)

Todos estos puntos tienen la segunda coordenada igual, es decir, la ordenada es la misma para todos ellos, e igual a 3.

2. ¿Qué abscisa tienen todos los puntos marcados sobre la siguiente recta? ¿Qué conclusión se puede deducir?

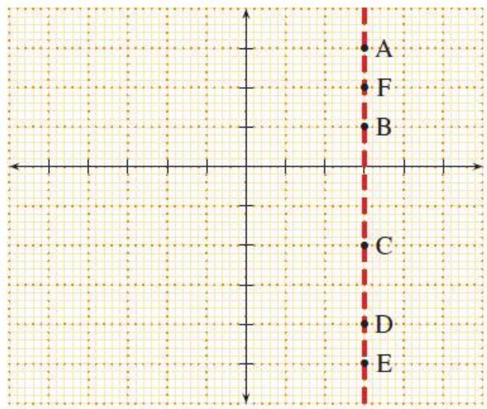


Figura 12. Coordenadas de puntos con la peculiaridad de que el número en la abscisa es la misma.

Solución

Todos los puntos marcados sobre la recta vertical tienen abscisa 3. Como conclusión, se puede deducir que todos los puntos de una recta vertical tienen la misma abscisa, mientras que su ordenada varía de uno a otro.

SABÍAS QUE…

Sobre el "mapa de cobertura y uso de la tierra", elaborado por la Fundación Moscoso Puello (FMP), se procedió a sectorizar en cuadrantes geográficos el área del PNJBPR, con el fin de facilitar el análisis de información; para ello se consultó al equipo sobre el número ideal de sectores y cuál sería la nomenclatura que pudiera ser comprensible para miembros del PNJBPR, y las comunidades que habitan dentro del área protegida y en su periferia. Se decidió utilizar un cuadrante del "plano cartesiano", sobre el cual se sectorizaría en cuadrantes geográficos el mapa de cobertura del área protegida, tal como se muestra en la figura que se presenta a continuación:

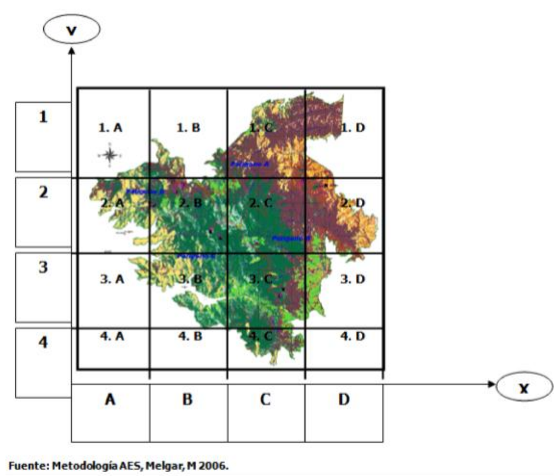


Figura 13. Primer cuadrante del plano cartesiano representando "mapa de cobertura y uso de la tierra".

A partir de la sectorización en cuadrantes geográficos, el equipo participante en el micro-taller procedió a identificar las variables sociales, económicas, ambientales y ecológicas a cualificar y cuantificar, lo que permitirá establecer niveles de priorización por cuadrante geográfico y con ello establecer estrategias y acciones a nivel preventivo, control y/o combate en la temporada de incendios forestales 2006.

Actividad 4

Representación de coordenadas en el plano cartesiano

Objetivo:

Representar cantidades en el plano cartesiano

Materiales

Cuaderno de trabajo

Regla graduada

Indicaciones:

Realizar con su grupo de estudiantes el juego del náufrago. Formar parejas, en las cuales una persona elige un punto en el plano cartesiano para ubicar a la naufraga y trata de adivinar las coordenadas hasta que la encuentra. Proponga a sus estudiantes esta modalidad:

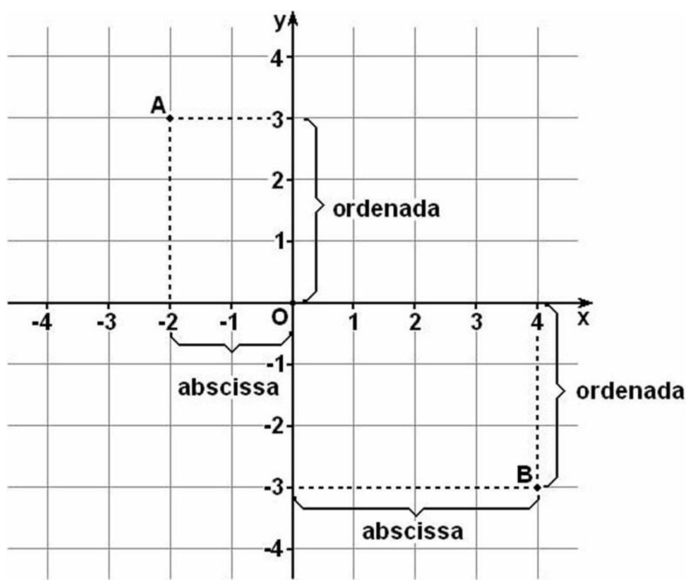


Figura 14. Coordenadas de un punto en el plano

Cada una de las parejas trace en su cuaderno dos ejes de coordenadas, como se muestra en la Figura 14.

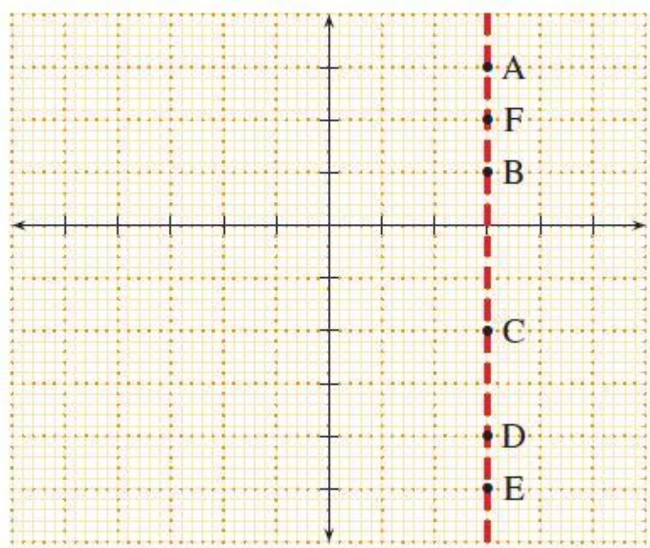
Cada estudiante, sin que su compañero vea, elijará en el plano un punto cuyas coordenadas sean números enteros. Su compañero deberá encontrar el punto planteando el menor número de preguntas posible, que puedan responderse con un sí o un no. Una vez encontrado el punto, intercambiarán los papeles. Gana el juego quien haya utilizado menos preguntas para encontrar el punto del compañero o compañera, donde involucren las partes del plano cartesiano, que son la abscisa, el origen, la ordenada y los cuadrantes.

Ejemplos de posibles preguntas: ¿Es el punto (4,3)? ¿Está en el primer cuadrante? ¿La abscisa es impar? ¿La ordenada es mayor que 5? ¿La abscisa es positiva? ¿El punto está en uno de los ejes? (La pregunta: "¿Es el punto (4, 3)?", si se contabiliza).

Se sugiere que el juego se lleve a cabo varias veces con el propósito de que el estudiantado construya estrategias y descubra las preguntas que permiten descartar el mayor número de puntos. Finalmente, pida que hagan comentarios sobre las estrategias que utilizaron.

Guía de problemas y ejercicios

1. Indicar las coordenadas de los siguientes puntos:



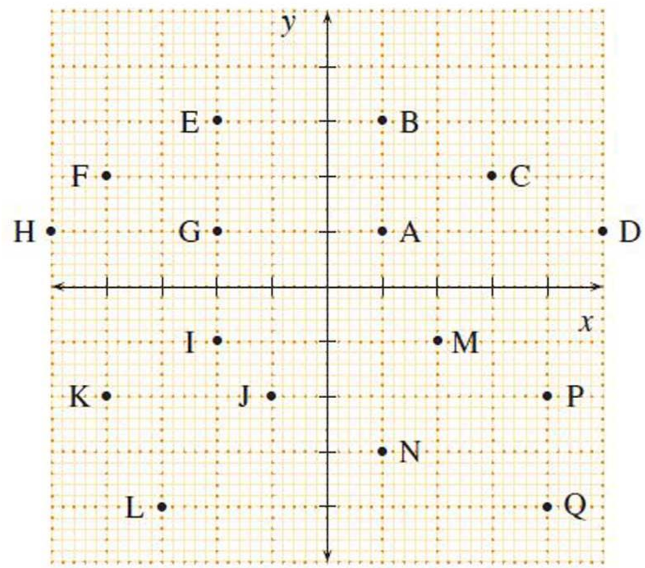
2. Indicar las coordenadas de los puntos siguientes en el plano cartesiano: A (2, 3), B (4, 1), C (2, –1), D (–2, –2), E (–2, 2) y F (0, –3). Luego cambiar el orden de los números en cada par ordenado y graficar en el mismo plano cartesiano. Puede utilizar colores para ver el cambio de coordenadas.

3. Representar en el plano cartesiano los siguientes puntos: A (5, 4); B (5, 2) C (5, –4); D (5,0), y mencionar si tienen alguna particularidad.

4. Indicar en el plano cartesiano los siguientes puntos: A (–3, 6); B (0, 6); C (2, 6); D (4, 6), y mencionar si tienen alguna particularidad.

5. Obsérvese la siguiente figura:

   En primer lugar, escribir las coordenadas de los puntos que se encuentran en el primer cuadrante; luego, las de los puntos situados en el segundo cuadrante. Hacer lo mismo con el tercer y el cuarto cuadrante. Finalmente, indicar qué signo tienen las coordenadas de los puntos que pertenecen a cada cuadrante.



Referencias bibliográficas.

1. Evaluación de la incidencia de incendios forestales del Parque Nacional Juan Bautista Pérez Rancier, temporada 2006, Recuperada en Octubre 18, 2011, a partir de: http://www.gestiopolis.com/recursos6/Docs/Eco/evaluacion-incendios-forestales.htm.
2. El plano cartesiano, Recuperada en Octubre 18, 2011, a partir de: http://www.edilatex.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf

Lección 8	7° grado	Unidad 5	Tiempo: 6 horas clase

Lenguaje algebraico

Figura 1. Cálculo de la superficie de un terreno, en el idioma de los babilonios. Foto E. LESSING-MAGNUM en "Ciencia y Vida" nº 2 Abril 1998.

Descripción del tema

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así se da el gran paso de la aritmética al álgebra.

La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados.

Los problemas de aplicación no vienen en forma de "resuelva la ecuación", sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos, por lo que debemos ser capaces de traducir una descripción verbal en lenguaje matemático.

Cualquier solución matemática debe ser verificada si soluciona el problema en cuestión, porque podría ser una solución matemática que carezca de sentido en el contexto del problema.

Competencias a desarrollar

Sabe construir e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales

Objetivos

- Propiciar la comprensión de conceptos algebraicos mediante el planteamiento de situaciones problemáticas.
- Desarrollar habilidades y favorecer actitudes que permitan adquirir conocimientos de manera significativa, y aplicar estos para la generalización de situaciones reales.

Presaberes

- Los números enteros
- Operaciones básicas
- Fracciones

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Álgebra: (latín tardío algebra, abreviado del árabe clásico algabru walmuqabalah, reducción y cotejo).

Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas al emplear números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente

un número u otra entidad matemática.

Incógnitas: cantidad o cantidades desconocidas, también denominadas variables.

Lenguaje simbólico: Conjunto de incógnitas representadas por letras.

Lenguaje algebraico: es el que se deriva del lenguaje simbólico.

Expresión algebraica: resultado de traducir un problema al lenguaje algebraico, que es una secuencia de operaciones entre números y letras.

Constantes: son números arbitrarios pero fijos.

Signos del álgebra: Los *signos* utilizados en *álgebra* son de tres clases: operación, relación y agrupación

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

La matemática es el lenguaje que nos ayuda a describir los procesos naturales, ya que el lenguaje común es insuficiente para una comunicación objetiva de las características del medio. Russell (1988) lo afirma de la siguiente manera:

«El lenguaje corriente no dispone de palabras capaces de expresar de un modo natural exactamente lo que deseamos expresar (...) la gramática y la sintaxis corrientes son extraordinariamente engañosas».

El lenguaje matemático nos permite, no sólo comunicar, sino también analizar e incluso predecir fenómenos basándonos en las leyes naturales.

Pero la matemática no es sólo un lenguaje, su carácter ha venido evolucionando a lo largo de la historia desde una concepción exclusivamente utilitarista, al servicio de otras disciplinas, hasta una condición filosófica, en la que se sistematiza como objeto de estudio en sí misma.

Efectivamente, en sus comienzos la matemática surge como una necesidad para el progreso de la técnica y, como consecuencia, de la sociedad.

En ocasiones has visto expresiones como la siguiente: $a + b = b + a$.

Con ella representamos la propiedad conmutativa de la suma. Esta propiedad es cierta para cualquier par de números y por ello utilizamos letras en lugar de valores concretos.

En matemáticas es frecuente utilizar expresiones que combinen números y letras o solamente letras. Esto lo hacemos cuando, como en el caso anterior, expresamos relaciones que se dan para todos los números.

También cuando desconocemos el valor de algún dato lo representamos con una letra hasta que lo hallamos. Y también cuando no conocemos el valor numérico de algún dato y se ha de escribir una expresión en la que interviene aunque no se trate de hallar su valor.

Las expresiones que resultan de combinar números y letras relacionándolos con las operaciones habituales se llaman expresiones algebraicas. La parte de las Matemáticas que utiliza las expresiones algebraicas se llama

Álgebra.

Muchas expresiones algebraicas que utilizaremos resultan de una "traducción" del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Fíjese en los ejemplos y observe que a los números cuyo valor desconocemos, unas veces les hemos dado el nombre de una letra y otras veces el de otra. (El signo · entre número y letra o entre dos letras no es necesario escribirlo y lo sobreentenderemos)

Tabla1. Cambio de lenguje común a lenguaje algebraico.

Lenguaje común	**Lenguaje algebraico.**
El doble de un número	$2n$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El triple de un número menos dos	$3y-2$
El doble del producto de dos números	$2ab$
La mitad del cuadrado de un número	$\frac{x^2}{2}$
La mitad de un número más su triple	$\frac{t}{2}+3t$

La matemática se distingue por un lenguaje preciso, sometido a reglas de sintaxis con símbolos de significado único; una de las dificultades para su aprendizaje deriva de las diferencias entre el lenguaje aritmético y el lenguaje del álgebra y entre éstos y el lenguaje común.

Numerosas palabras del lenguaje común tienen un significado diferente para el uso habitual y el matemático, tales como racional, irracional, raíz, potencia, producto, primo y otras.

Es cierto que el lenguaje algebraico se construye a partir de las propiedades del sistema numérico; sin embargo, sus lenguajes tienen diferencias.

En el ámbito de los números el signo igual se utiliza, generalmente, para indicar el resultado de una operación. En álgebra tiene al menos, dos sentidos:

i) como acción de transformación de expresiones que siguen siendo equivalentes, por ejemplo:

$2(a+b+c)=2a+2b+2c$

ii) para relacionar los dos miembros de una ecuación. En este caso las afirmaciones no son universalmente verdaderas, ya que están condicionadas a ciertos valores que las hacen verdaderas.

Los signos utilizados en álgebra son de tres clases: operación, relación y agrupación.

Un poco de historia del álgebra

El álgebra en la antigua babilonia

La principal fuente de información sobre la civilización y la matemática babilónica procede de textos grabados con inscripciones cuneiformes en tablillas de arcilla. Los textos se escribían sobre las tablillas cuando la arcilla estaba aún fresca. Después podían borrarse y usarse otra vez o también cocerse en hornos o simplemente se endurecían al sol. Las tablillas más antiguas que se conservan son del 2000 a.C. Varios miles de tablillas esperan todavía ser descifradas.

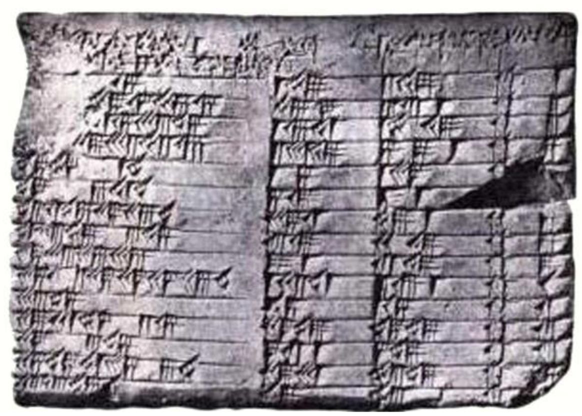


Figura 2. La tabla de Plimpton

Es una de las tablas más conocidas de la antigua Babilonia. En estas tablas se ponían problemas, enunciados y soluciones algebraicos.

Estas tablillas han proporcionado abundante información sobre el sistema numérico y los métodos de cálculo que se usaban. También las hay con textos que contienen problemas algebraicos y geométricos. Los babilonios disponían de fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas.

No conocían los números negativos, por lo que no se tenían en cuenta las raíces negativas de las ecuaciones. Su sistema de numeración era de base 60 y ha llegado hasta nosotros en la medida del tiempo y de los ángulos. Llegaron a resolver problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas e incluso se conoce un problema astronómico que conduce a un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas.

Tampoco conocían el cero, lo que lleva a problemas de interpretación de las cantidades. Para evitar el problema, reducían el tamaño de las cifras adyacentes. A partir del siglo VI a.C. , sin embargo, fue utilizado un signo de omisión interior, es decir, una especie de cero. Por supuesto en esta fase el álgebra es retórica, es decir, no se usan símbolos especiales.

Sí aparecen palabras, como por ejemplo *us* (longitud), usadas como incógnitas; posiblemente porque muchos problemas algebraicos surgen de situaciones geométricas y esto hizo que esa terminología se impusiera. También usaban antiguos pictogramas sumerios para designar las incógnitas de una ecuación.

Un ejemplo de la manera en que aparecen formulados los problemas podría ser:

"He multiplicado la longitud por la anchura y el área es 10. He multiplicado la longitud por ella misma y he obtenido un área. El exceso de longitud sobre la anchura lo he multiplicado por sí mismo y el resultado por 9. Y esta área es el área obtenida multiplicando la longitud por ella misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura?"

Hoy traduciríamos este problema a lenguaje algebraico así:

$xy = 10$

$9(x - y)^2 = x^2$

Signos de operación

En álgebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en aritmética: suma, resta, multiplicación, división, elevación de potencias y extracción de raíces.

Los signos que se utilizan para dichas operaciones son:

a) Para la suma (+).

b) Para la sustracción (-).

c) Para la multiplicación (x).

También en lugar del signo (x), suele colocarse un punto (.) entre los factores y a veces se indica entre paréntesis a los factores. Entre los factores literales, o entre un factor literal y uno numérico el signo normalmente se omite.

d) Para la división (÷).

También se indica la división separando el dividendo del divisor mediante una raya (-) horizontal.

e) Elevación a potencia.

El signo de elevación a potencia es el exponente, colocado arriba y a la derecha de una cantidad, el cual indica las veces que dicha cantidad llamada base, se toma como factor, cuando una letra o cantidad no tiene exponente, su exponente será la unidad.

f)Extracción de raíces.

El signo de raíz es n , llamado radical y dentro de él se escribe la cantidad a la cual se le extraerá raíz, esta cantidad recibe el nombre de subradical y la (n) recibe el nombre de índice del radical.

Signos de relación

En *álgebra* hay tres *signos* que sirven para relacionar a las cantidades:

1. = *igual a.*

2. > *mayor que.*

3. < *menor que.*

Signos de agrupación

Entre los signos de agrupación tenemos:

1. ( ) Paréntesis Circular.

2. [ ] Paréntesis Rectangular o Corchetes.

3. { } Llaves.

4. | Barra o Vínculo.

Para Kaput (1995), tanto la aritmética como el álgebra dan soporte formal al razonamiento cuantitativo, es decir, a las operaciones mentales que subyacen a la operatividad numérica:

«Tanto la aritmética como el álgebra proporcionan medios formales de externalización del razonamiento cuantitativo».

Este razonamiento cuantitativo asegura una operatividad cargada de sentido, que excede la aplicación de ciertos algoritmos memorizados sin profundización conceptual. En el caso de la aritmética, el propósito es el de operar con valores numéricos específicos, mientras que en el del álgebra el doble propósito es el de generalizar y formalizar relaciones cuantitativas.

Algunas palabras que indican **adición** son:

Suma, aumentar, mayor que, más, incrementar, más grande que.

Algunas palabras que indican **sustracción** son:

Resta, menos, menor que, diferencia, disminuir, perder.

Algunas palabras que indican **multiplicación** son:

Producto, veces, triple, multiplicado, doble cuádruple.

Algunas palabras que indican **división** son:

Cociente, mitad, dividido, entre, tercera, razón.

Actividad 1

Complementar la pirámide

Objetivo

Resolver acertijos matemáticos para introducir al lenguaje algebraico.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

En equipos de trabajo resolver lo siguiente:

En muchas revistas de pasatiempos aparecen estos acertijos. Se trata de pirámides que se rellenan teniendo en cuenta que el número de cada casilla, es la suma de los dos números que tiene debajo. Pero para resolverse la que te presentamos a continuación necesita el recurso del álgebra y de las letras.

Con la ayuda de los números que aparecen, debes acabar de rellenar todas las casillas de esta pirámide:

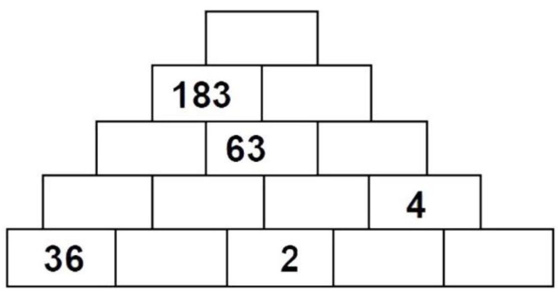


Figura 3. Pirámide numérica y algebraica

AYUDA

No podemos empezar a sumar casillas para obtener el contenido de la casilla superior. Por eso, supongamos que conocemos el contenido x de cada casilla; subiendo por las casillas, vamos a expresar el máximo número de casillas posibles en función de la incógnita x.

Actividad 2

La competencia de Matemática

Objetivo

Traducir al lenguaje algebraico relaciones cuantitativas en las que utilizan letras como incógnitas.

Materiales

La tabla con las frases.

Indicaciones

Formar equipos de 4 integrantes. Cada equipo debe traducir las frases a su expresión simbólica, simplificando al máximo las expresiones.

Presentación

Este año se realizó una competencia en el centro escolar. En la primera fase clasificaron para la segunda ronda 14 alumnos y alumnas: Daniel, Ana, Rafael, Pablo, Sergio, etc. El grupo había sacado una puntuación muy buena en la primera parte, pero los profesores de matemáticas perdieron los apuntes. Sólo recuerdan que:

g

Tabla 2. Traducción del lenguaje común al algebraico

Frase	Expresión	Expresión simbólica reducida*
Ana tenía x puntos.	x	x
Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos.		
A Pablo le faltaban 500 puntos para alcanzar a Isabel.		
Sergio consiguió el triple de Ana más 300 puntos.		
Lo de Pilar menos lo de Isabel es 3 veces lo de Ana. Pilar tuvo entonces.		
Marta tuvo la quinta parte de lo de Pilar.		
A Rafael le faltan 1,000 puntos para tener lo de Sergio.		
Si a Raquel le quitase Ana Belén 500 puntos, tendría como Ana. Raquel tiene.		
Patricia tiene dos veces los de Raquel, más 100 puntos.		
Juntas, Teresa y Patricia, suman tres veces lo de Ana. Teresa tiene.		
Daniel obtuvo la tercera parte de Sergio más 2,000 puntos.		

***** Realizar las operaciones si es necesario para reducir la expresión.

Actividad 3

Convertir el lenguaje común, a lenguaje algebraico.

Objetivo

Resolver los siguientes planteamientos para expresar el lenguaje común en lenguaje algebraico.

Materiales

Cuaderno trabajo

Indicaciones

Pedir a los estudiantes que se reúnan en equipos de 4 integrantes y que resuelvan los siguientes planteamientos:

1. El perímetro de un rectángulo viene dado por la expresión: $2x + 2y$ (x: largo; y: ancho). Calcula el perímetro de cualquier rectángulo; el que tú elijas.

Posible solución

Respuesta abierta, por ejemplo, el perímetro de la tabla de una mesa de 1.0 metros de largo y 90 centímetros de ancho:

$P = 2x + 2y = 2(1.0) + 2(0.90) = 2.0 + 1.8 = 3.8$

El perímetro de la mesa mide 3.8 metros.

2. Expresa en lenguaje algebraico, lo siguiente:

   a) El número natural anterior al número n.
   b) El doble de un número.
   c) El tercio de un número.
   d) El cuadrado de un número menos el mismo número.

Solución

a) $n - 1$

b) 2n

c) $\frac{x}{3}$

d) $y^2 - y$

3. Lee correctamente las siguientes expresiones algebraicas y escribe las frases correspondientes:

   a) $a - x$
   b) 2y
   c) $a^2 - y^2$
   d) $(a - y)^2$
   e) $(a - y)^2$
   f) $(2p)^3$

Posible solución

a) Diferencia de dos números
b) Doble de un número
c) Diferencia de los cuadrados de dos números
d) Cuadrado de la diferencia de dos números
e) Cuadrado de la suma de dos números
f) Cubo del doble de un número

4. Escribe la expresión algebraica de las siguientes frases.
   a) La diferencia de a y b.
   b) La diferencia del doble de a y del doble de b.
   c) El doble de la suma de a y b.

Posible solución

a) $a - b$
b) $2a - 2b$
c) $2(a - b)$

Guía de problemas y ejercicios:

1. Relaciona la columna de la izquierda, que es el lenguaje común, con la columna de la derecha que es el lenguaje algebraico

Lenguaje común	**Lenguaje algebraico**
A un número le quitamos 5	$\mathbf{5x}$
El doble de un número	$\mathbf{r^2}$
El cuadrado de un número	$\mathbf{x^2}$
El área de un cuadrado de lado r	$\mathbf{4r}$
El precio de un pantalón aumentado en 15	$\mathbf{x+ x^2}$
El quíntuplo de un número	$\mathbf{x - 5}$
La suma de un número y su cuadrado	$\mathbf{0.17x}$
El perímetro de un cuadrado de lado r	$\mathbf{1.15x}$
El 17% de un número	$\mathbf{2x}$

2. Si ‘x’ representa la edad de Pedro, escribe en lenguaje algebraico:
   a) El doble de la edad:
   b) El triple de la edad:

c) La edad de una persona dos años mayor:
d) La edad de una persona cinco años más joven:
e) La edad de Pedro hace 10 años:
f) La edad de Pedro dentro de 12 años:
g) La edad de su hija María que nació cuando Pedro tenía 32 años:
h) El número de meses que ha vivido Pedro:
i) El número de años que suman entre Pedro y María:
j) La edad del abuelo de María que tiene 10 años más del doble de la de su padre:

3. Dados dos números, el primero 'a' y el segundo 'b', se pide:

a) La suma de los dos números:
b) La diferencia de los dos números:
c) El producto de los dos números:
d) El cociente del primero entre el segundo:
e) El cociente del segundo entre el primero:
f) El doble del primero:
g) El doble del primero por el segundo:
h) El triple del segundo por el primero:
i) El doble de la suma de los dos números:
j) El triple de la diferencia de los dos números:

4. La granja del tío Paco está en una parcela rectangular de 'l' metros de largo y 'a' de ancho. En ella conviven 'c' cerdos, 'v' vacas y 'g' gallinas. Se pide:
a) El área de la parcela:
b) La longitud de la valla que rodea la parcela:
c) El número de animales que hay en la granja:
d) El número de patas de todos los cerdos:
e) El número de patas de todas la vacas:
f) El número de patas de todas las gallinas:
g) El número de patas de todos los animales:

Referencias bibliográficas.

1. Historia del álgebra en la época de los babilonios, Recuperado Octubre 28, 2011, a partir de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/historia/indhistoria.html#El+%E1lgebra+en+la+antigua+babilonia:
2. Olfos, R., (2001), *Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra*, Universidad de La Serena, INTEGRA Nº 5
3. Paralea, M., (1999), Las adquisiciones del lenguaje algebraico, Números revista de didáctica de las matemáticas volumen 40.
4. Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común, Recuperado Octubre 28, 2011, a partir de
5. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/lenguajealgebraico/lengalgebraico01.htm
6. Viquez, H., (2009), *20 juegos matemáticos para hacer más creativa la labor del aula*, GIEM-PT

Lección 9	7° grado	Unidad 7	Tiempo: 6 horas clase

Exponentes, propiedades y notación científica

Figura 1. Los exponentes son de gran utilidad para expresar las cantidades grandes, por ejemplo, las masas de los planetas. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg

Descripción del tema.

Arquímedes, famoso matemático y filósofo del siglo III a.C., fue el primero en utilizar la notación científica al tratar de contar cuántos granos de arena existían en el universo. El resultado que calculó fue de 10^{63} granos. Se distinguen entonces los intentos de los matemáticos por sintetizar las expresiones, números enormes, desde la Grecia Clásica. Esta forma de expresar cantidades es muy útil principalmente en aquellos resultados que se expresan con números muy grandes. Por ejemplo, cuando se trata el tema del radio de la Tierra se indica con $6.37x10^6$ metros; si hacemos los cálculos resulta: 6.37x1.000.000 metros = 6,370.000 metros.

Cuando hablamos de tamaño y de distancias en Astronomía, nos referimos a magnitudes de tal dimensión que las unidades de medida que utilizamos habitualmente no nos sirven y debemos emplear otras que sólo tienen sentido en el ámbito del Universo. La unidad básica de distancia (longitud) usada en Astronomía es el AÑO LUZ (a.l.), que es la distancia recorrida por la luz en un año. Teniendo en cuenta que la luz en el vacío se mueve a 300.000 km/s, deducimos que un año luz equivale a:

1 año = 365 días * 24 horas * 3600 s = 31.536.000
1 año luz (a.l.) = 31.536.000 s * 300.000 km/s = 9.460.000.000.000 km $\approx 9.5x10^{12}km \approx 10^{13}$ km $\approx 10^{16}m$ (unos 10 billones de km)

Competencias a desarrollar

Sabe explicar e interpretar los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Objetivos

- ✓ Propiciar en el estudiantado la comprensión de los términos exponente y potencia.
- ✓ Desarrollar habilidades y favorecer actitudes que le permitan adquirir conocimientos de manera significativa y aplicar estos para la generalización de situaciones reales.

Presaberes

- ✓ Los números enteros.
- ✓ Las fracciones y los decimales.
- ✓ Operaciones básicas.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Exponente. Es el número utilizado para indicar el número de veces que se utiliza un término como factor para multiplicarse por sí mismo. Normalmente, el exponente se coloca como superíndice después del término.

Base. Es el factor que se repite

Potencia. Es un producto de factores iguales. Está formada por la base y el exponente.

notación científica. Es un recurso matemático empleado para simplificar cálculos y representar en forma concisa números muy grandes o muy pequeños. Para hacerlo se usan potencias de diez.

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Los exponentes se usan para escribir productos de factores

Por ejemplo:

$$2^{5} = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 = 32.$$

El exponente es 5, lo cual significa que la base, el 2, se debe multiplicar por sí misma cinco veces.

$$3^{2} = 3 \bullet 3 = 9\,.$$

El exponente es 2, esto significa que la base (3) se debe multiplicar por sí misma dos veces.

$$5^{4} = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 625$$

El exponente es 4, y significa que la base (5) se debe multiplicar por sí misma cuatro veces.

Una potencia puede representarse en forma general como:

$$\boxed{a^{n} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}$$

Donde: $a = base \quad n = exponente$ “n” factores iguales.

Si la base **a** pertenece al conjunto de los Números Enteros ($\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$) (léase **a** pertenece a zeta), significa que puede tomar valores positivos y negativos. Si el exponente pertenece ($n \in \mathbf{N}$) al conjunto de los Números Naturales , significa que puede tomar valores del uno en adelante (1, 2, 3, ...).

Potencia de base entera positiva

Si la base a es positiva, la potencia siempre será un entero positivo, independiente de los valores que tome el exponente, es decir, de que sea par o impar.

$$\boxed{(+a)^{n} = +a^{n}}$$

Ejemplos:

$(+4)^3 = 4^3 = 4 \bullet 4 \bullet 4 = 64 = +64$
Exponente impar

$(+3)\ 4 = 34 = 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 81 = +81$

Exponente par

Potencia de base entera negativa

Si la base a es negativa el signo de la potencia dependerá de si el exponente es par o impar.

a) Si el exponente es par, la potencia es positiva.

$$\boxed{(-a)^{n(par)} = +a^n}$$

Ejemplos:

$(-5)^2 = -5 \bullet -5 = ^{+}25 = - \cdot - = +$

$(-2)^8 = -2 \bullet -2 \bullet -2 \bullet -2 \bullet -2 \bullet -2 \bullet -2 \bullet -2 = ^{+}256 = 256$

b) Si el exponente es impar, la potencia es negativa.

$$\boxed{(-a)^{n(impar)} = -a^n}$$

Ejemplos:

$(-2)^3 = -2 \bullet -2 \bullet -2 = -8$

$(-3)^3 = -3 \bullet -3 \bullet -3 = -27$

En resumen[14]

Base	Exponente	Potencia
Positiva	Par	Positiva
Positiva	Impar	Positiva
Negativa	Par	Positiva
Negativa	Impar	Negativa

Leyes de los exponetes[15]

1. La ley que dice que $x^m x^n = x^{m+n}$

En $x^m x^n$, ¿cuántas veces multiplicas "x"? Respuesta: primero "m" veces, después otras "n" veces, en total "m+n" veces.

Ejemplo: $x^2 x^3 = (xx) \times (xxx) = xxxxx = x^5$

Así que $x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$

2. La ley que dice que $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

Como en el ejemplo anterior, ¿cuántas veces multiplicas "x"? Respuesta: "m" veces, después reduce eso "n" veces (porque estás dividiendo), en total " $m - n$ " veces.

Ejemplo:

$x^{4-2} = x^4/x^2 = (xxxx) / (xx) = xx = x^2$

(Recuerda que x/x = 1, así que cada vez que hay una x "sobre la línea" y una "bajo la línea" puedes cancelarlas.)

Esta ley también te muestra por qué x =1 :

[14] Texto tomado de: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Potenciabaseentera.htm

[15] Texto tomado de: http://disfrutalas matemáticas.com/algebra/exponentes-leyes.html

Ejemplo: $x^2/x^2 = x^{2-2} = x^0 = 1$

3. La ley que dice que $(x^m)^n = x^{mn}$

Primero multiplicas x "m" veces. Después tienes que hacer eso "n" veces, en total m×n veces.

Ejemplo:
$(x^3)^4 = (xxx)^4 = (xxx)(xxx)(xxx)(xxx) = xxxxxxxxxxxx = x^{12}$

Así que $(x^3)^4 = x^{3\times 4} = x^{12}$

4. La ley que dice que $(xy)^n = x^n y^n$

Para ver cómo funciona, sólo piensa en ordenar las "x"s y las "y"s como en este ejemplo:

Ejemplo: $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = xyxyxy = xxxyyy = (xxx)(yyy) = x^3y^3$

La ley que dice que $(x/y)^n = x^n/y^n$

Parecido al ejemplo anterior, sólo ordena las "x"s y las "y"s

Ejemplo: $(x/y)^3 =$ (x/y)(x/y)(x/y) = (xxx)/(yyy) = x^3/y^3

La ley que dice que $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

Para entenderlo, sólo recuerda de las fracciones que n/m = n × (1/m).

Notación cientifica

Muchos de los números que se utilizan en la ciencia son muy grandes, por ejemplo, el número de organismos unicelulares que alimentan a una ballena: 400,000,000,000,000. Otros números son muy pequeños, como la longitud de una onda más corta de la luz visible, de aproximadamente 0.00000004 metros. La escritura de estos se simplifica si se emplea la notación cientifica[16].

La notación científica es un recurso matemático empleado para simplificar cálculos y representar en forma concisa números muy grandes o muy pequeños. Para hacerlo se usan potencias de diez. Básicamente, la notación científica consiste en representar un número entero o decimal como potencia de diez[17].

En el sistema decimal, cualquier número real puede expresarse mediante la denominada notación científica.

Para expresar un número en notación científica identificamos la coma decimal (si la hay) y la desplazamos hacia la izquierda si el número a convertir es mayor que 10; en cambio, si el número es menor que 1 (empieza con cero coma), la desplazamos hacia la derecha tantos lugares como sea necesario para que (en ambos casos) el único dígito que quede a la izquierda de la coma esté entre 1 y 9, y que todos los otros dígitos aparezcan a la derecha de la coma decimal.

Es más fácil entender con ejemplos:

732,5051 = 7,325051 • 10^2 (movimos la coma decimal 2 lugares hacia la izquierda)

−0,005612 = −5,612 • 10^{-3} (movimos la coma decimal 3 lugares hacia la derecha).

Nótese que la cantidad de lugares que movimos la coma (ya sea a la izquierda o derecha) nos indica el exponente que tendrá la base 10. Si la coma la movemos dos lugares, el exponente es 2; si lo hacemos por 3 lugares, el exponente es 3, y así sucesivamente.

Nota importante

Siempre que movemos la coma decimal hacia la izquierda, el exponente de la potencia de 10

[16] Texto tomado de http:books.google.com

[17] Texto tomado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Notacion_cientifica.html

será positivo. Siempre que movemos la coma decimal hacia la derecha, el exponente de la potencia de 10 será negativo.

Actividad 1

Ejercita conocimientos básicos relativos a los potencias

Objetivo

Abordar la definición exponentes mediante la definición inicial de la multiplicación e interpretación en su correspondiente notación

Materiales:

Cuaderno de trabajo

Indicaciones:

Seguro que más de una vez habrás hablado de megas o de gigas al referirte a un ordenador. Pero, ¿a qué nos referimos cuando nombramos estas unidades?

La unidad más pequeña para representar la información guardada en un ordenador es el bit. Un bit (de binary digit, dígito binario) equivale a escribir un 0 o un 1 en un ordenador.

Figura 2. Una computadora.

Para representar más información se san grupos de bits. Por ejemplo 1001110 es un Byte. A partir de aquí, las unidades se calculan usando potencias de 2

Kilobyte equivale a 1,024 Bytes

$1KB = 2^{10} bytes.$

Después del Kilobyte se utilizan dos medidas que seguro te sonarán más:

El Megabyte, que equivale a 1,024 KB

$1\ MB = 2^{10} KB.$

El Gigabyte, que equivale a 1,024 MB

$1\ GB = 2^{10} MB.$

Luego con la información proporcionada comenzar el tema de potencia, para conocer las partes que componen a una potencia que son la base y el exponente.

Como actividad pedir a los estudiantes que observen la siguiente adición y contesten la pregunta ¿Qué característica especial tiene la adición? Y que escriba una multiplicación que represente esa adición.

2+2+2+2+2+2+2

Posible solución

La característica es que se suman elementos de igual base. La representación de la adición en forma de multiplicación de 2•7, el 2 representan el valor numérico o la base de la suma y el 7 representa el número de veces que se ha sumado el valor numérico o la base.

Ahora que observen la multiplicación siguiente y conteste la siguiente pregunta ¿Qué caracteristica especial tiene la multiplicación? Escribe una potencia que represente a esa multiplicación.

2•2•2•2•2•2•2

Posible solución

La caracteristica es que se multiplica elementos de igual base; la representación de la multiplicación es 2^7, el 2 representan el valor numérico o la base de la multiplicación y el 7 representa el número de veces que se ha multiplicado el valor numérico o la base, es decir, es de base dos elevado al exponente 7.

Ahora pedir a los estudiantes que contesten las siguientes interrogantes: ¿como expresas las potencias de los bits en forma de productos? ¿Es posible expresarlas de esa manera? De ser posible ¿como lo harian?

Despues de contestar las interrogantes es importante que los estudiantes discutan en plenaria la respuesta encontrada.

Luego puedes sugerir realizar los siguientes ejercios para que el estudiante continue su aprendizaje de potencias.

a) Escribe las potencias que representan a cada una de las siguientes multiplicaciones.

i. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
ii. $100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100$
iii. $9 \cdot 9$
iv. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
v. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

Posibles soluciones

i. 5^7
ii. 100^4
iii. 9^2
iv. 1^6
v. 4^5

b) Escribe las multiplicaciones representadas por cada una de las siguientes potencias.

i. 7^3
ii. 10^5
iii. 25^2

Posibles soluciones:

i) $7 \cdot 7 \cdot 7$
ii) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
iii) $25 \cdot 25$

Actividad 2:

Conocer situaciones problemáticas de los exponentes

Objetivo

Consolidar la interpretación de la notación de potencias y enfatizar algunas de sus propiedades básicas.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que formen equipos de 5 integrantes e interpreten el siguiente planteamiento:

El ajedrez es uno de los juegos más famosos de toda la historia[18]. No se sabe mucho acerca de su origen. Pero existe una leyenda muy popular en relación con su inventor. Según esta leyenda, el rey del país quedó tan impresionado con el juego de ajedrez que ofreció regarle a su inventor lo que pidiera como recompensa. El inventor pidió la siguiente: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta... y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última.

El rey quedó extrañado de lo poco que pedía. Pero mucho más extrañado quedó cuando sus ministros le informaron que no había trigo en el reino, ni siquiera en todo el planeta para juntar esa cantidad.

a) Para entender mejor lo que pidió el inventor del ajedrez, haz una tabla con 3 columnas. En la primera columna anota los números del 1 al 8, correspondientes a las 8 casillas de la primera fila del tablero de ajedrez. En la segunda columna anota los granos de trigo que corresponden a cada casilla. Y en la tercera columna anota la cantidad de granos de trigo que se va acumulando casilla a casilla.

[18] Texto y ejercicios tomados de http://www.educandochile.cl/userfile/P0032/File/pdf_esencial/7mobasico/matematica/7_ano_hojas_de_trabajo02.pdf

b) Isabel afirma que los valores de la segunda columna (excepto el 1) corresponden a potencias de 2. ¿Tiene razón? Explica tu respuesta.

c) Fernando dice que si a cada valor de la tercera columna se le suma 1, también se obtienen potencias de 2. ¿Tiene razón? Explica tu respuesta.

d) Los valores en la segunda y tercera columna van aumentando cada vez más rápido. La 4ª casilla tiene menos de 10 granos de trigo. Pero la 8ª casilla ya tiene más de 100. Continúa la tabla hasta llegar a una casilla que tenga más de 1,000 granos de trigo.
Continúa la tabla hasta llegar a una casilla que tenga más de 10,000 granos de trigo.

e) Un kilogramo de trigo contiene unos 20,000 granos. ¿En qué casilla la cantidad de trigo que habría que entregarle el inventor del ajedrez es más de un kilogramo?

f) Al llegar a la casilla 25, la cantidad de trigo acumulada es de 33.554.431 granos. ¿Esto corresponde a más o a menos de una tonelada de trigo?

g) Si se continúa la tabla (puedes hacerlo con una planilla de cálculo), en la casilla 32, que corresponde a la mitad del tablero habrá 2.147.483.648 granos de trigo y se habrá acumulado un total de 4.294.967.295 granos. ¿Cómo se leen estos números? ¿Aproximadamente a cuántas toneladas de trigo corresponden estos valores?

h) Y si continuamos la tabla, al llegar a la última casilla, vemos que habrá que entregar al inventor del ajedrez nada menos que 18.446.744.073.709.551.615 de granos de trigo. ¿Cómo se lee este número?

SABÍAS QUE…

Figura 3. Concepción de un artista del recién descubierto objeto similar a un planeta, apodado "Sedna".

Nota: El Sol aparece como una estrella extremadamente brillante en vez del enorme disco caliente observado desde la Tierra. A la distancia hay una hipotética luna pequeña, que los científicos creen que debe estar orbitando este distante cuerpo. Titular de la imagen: Estos tres paneles muestran la primera detección del tenue y distante objeto apodado "Sedna". Imagen captada el 14 de Noviembre entre las 6:32 y las 9:38 Hora Universal, Sedna fue identificada por el ligero cambio en la posición notada en estas tres fotografías tomadas en diferentes momentos. Crédito de la imagen: NASA/JPL-Caltech.

A una distancia de entre 30 y 50 unidades astronómicas del sol –esto es, de 2.8 a 4.7 mil millones de millas desde el sol – varios objetos del cinturón de Kuiper más grandes que 600 millas de diámetro son conocidos por orbitar el

Sol. Sedna, descubierto en 2003, es similar a aquellos mundos fríos, de roca y hielo, pero orbita entre 70 y 1,000 unidades astronómicas del Sol. Tiene una órbita de alta inclinación, lo que significa que no viaja alrededor del sol en el mismo plano que los planetas mayores. La órbita de Sedna también es altamente elíptica o alargada.

Actividad 3:

Ejercitar la interpretación de datos.

Objetivo

Interpretar datos cuantitativos para hacer cambios a notación científica.

Materiales

Cuaderno de trabajo:

Indicaciones

Pedir al grupo de estudiantes que en parejas lean la información sobre el Sedna proporcionada previamente.

Deben sacar datos importantes de dicha información.

Después, que transformen en notación científica los números que se expresan en la información.

Posible solución

2.8 millones se expresa como 2.8×10^5 o bien 28,000,000; y 4.7 millones se expresa como

4.7×10^5 o bien 47,000,000.

Actividad 4

Uso de exponentes y notación científica

Objetivo:

Enriquecer el significado de los números y sus operaciones a través de la solución de problemas.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Calculadora

Indicaciones.

Explique brevemente lo que significa elevar un número a una potencia, por ejemplo: $2^5, 2^{10}$ etc.

Después de organizar al estudiantado en equipos de tres o cuatro integrantes, proponga el siguiente problema:

Observen que al calcular 2^5el número que se obtiene es 32, que termina en 2. Al calcular 2^{10} el número que se obtiene es 1,024, y este número termina en 4.

a) ¿En qué cifra termina 2^{25}?

b) ¿En qué cifra termina 2^{60}?

c) ¿En qué cifra termina 2^{1999}?

Sugerencia y posibles soluciones.

En esta situación no se busca que el grupo muestre su habilidad para operar con lápiz y papel, sino su habilidad para encontrar cierto tipo de patrones y, por esta razón, la calculadora es un instrumento que permitirá agilizar los cálculos.

Dado el tipo de calculadora que normalmente se utiliza, sus estudiantes podrán responder sin mucha dificultad el litera *a),* ya que el número que se obtiene está formado por ocho dígitos y en consecuencia cabe en la pantalla de la calculadora. En cambio, no podrán responder a los incisos *b) y c).*

Una estrategia consiste en hacer una lista de las potencias de 2 hasta donde la calculadora dé el resultado, y después seguir con lápiz y papel hasta obtener el número correspondiente a 2^{60}.

Ahora bien, tal procedimiento ya no es adecuado para conocer en qué cifra termina 2^{1999}, pero a partir de la lista que hagan, usted puede formular algunas sugerencias, por ejemplo: que en una tabla anoten algunas de las potencias del número 2.

Sugiera a sus estudiantes que observen la relación entre el exponente y la cifra en que termina la potencia de 2. Así, podrán observar que si el exponente es par, entonces el número termina en 4 o en 6; y si es impar el número termina en 8 o en 2.

En consecuencia, encontrarán que la última cifra al elevar 2^{1999} es 2 u 8, pero aún faltará encontrar un procedimiento que ayude a saber cuál de las dos es la cifra correcta. Así mismo, se darán cuenta de la sucesión de números 2, 4, 8 y 6, en que terminan las potencias de 2, se repite en el mismo orden y que, por ejemplo, los números 2^2, 2^6, 2^{10}, etcétera, terminan en 4, por lo que comprenderán de que no es necesario realizar las operaciones para saber en qué cifra terminan 2^{14}, 2^{18}, 2^{22}, ya que podrán contar los exponentes de 4 en 4 a partir de 2^2 para determinar que terminan en 4.

Después que los equipos expongan las distintas formas que utilizaron para determinar en qué cifra terminan 2^{60} y 2^{1999}, usted puede mostrar otro procedimiento.

Cuando los exponentes de 2^n son múltiplos de 4 (4, 8, 12...), el número que se obtiene termina en 6. Si el exponente es múltiplo de 4 más 1 (5, 9, 13...), los números terminan en 2. Si el exponente es múltiplo de 4 más 2 (6, 10, 14, 18...), entonces los números terminan en 4. Y si es múltiplo de 4 más 3 (7, 11, 15, 19...) el número termina en 8.

A partir de lo anterior, para saber en qué cifra termina 2^{1999} hay que determinar si 1,999 es de la forma: $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ o $4n + 3$. Para ello se puede proceder de varias maneras, por ejemplo, dar valores a n hasta encontrar que:

$4 \text{ x } 499 + 3 = 1{,}999$.

O bien, si los alumnos están en posibilidades, pueden resolver las siguientes cuatro ecuaciones y ver en cuál se obtiene un valor entero de n:

$4n = 1\,999$

$4n + 1 = 1\,999$

$4n + 2 = 1\,999$

$4n + 3 = 1\,999$

Así, encontrarán que la última ecuación proporciona el resultado deseado y, por tanto, concluirán que $n = 499$.

Guía de problemas y ejercicios

1. Podemos construir cubos de diferentes tamaños utilizando pequeños cubitos.
   Por ejemplo, si juntamos 2 cubitos tendremos una hilera de 2 cubos.
   Para acercarnos a la forma del cubo debemos poner dos de estas hileras una al lado de la otra. Formamos así una capa. Como se ha duplicado el número de cubitos tendremos que en la capa hay 22 cubitos. Esta capa todavía no es un cubo. Para tener un cubo debemos juntar 2 capas una encima de la otra. Como se ha duplicado el número de cubos que había en una capa, en el cubo tendremos en total 23 cubitos.

   a) ¿Cuántos cubitos se necesitaron en total para formar el cubo grande?
   b) ¿Cuántos cubitos se necesitarían si se quisiera formar un cubo a partir de una hilera de 3 cubitos? ¿Y si se quisiera formar un cubo a partir de una hilera de 4 cubitos?

2. En todos los campeonatos por eliminatoria hay involucradas potencias de 2. Para mayor claridad, analicemos un campeonato de tenis partiendo del final y avanzando hacia atrás.
   Si el campeonato tiene una sola ronda, habrá un solo partido con 2 competidores (será la final).
   Para que el campeonato tenga 2 rondas (semifinales y final), por cada jugador que llega a la final tiene que haber 2 jugadores que disputan las semifinales. Es decir, se necesitan 22 jugadores en las semifinales.
   Si el campeonato tiene 3 rondas (cuartos de final, semifinales y final), por cada jugador que pasa a las semifinales debe haber 2 jugadores en los cuartos de final. Es decir, se necesitan 23 jugadores en los cuartos de final.
   a) ¿Cuántos jugadores se necesitan al iniciar un campeonato de 4 rondas?
   b) ¿Y al iniciar un campeonato de 5 rondas?
   c) Los mayores campeonatos de tenis tienen 7 rondas. ¿Cuántos tenistas se necesitan al iniciar el campeonato?
   ¿Cuántos partidos se disputan en la primera rondas?
      d) Haz un estudio completo de un campeonato de 7 rondas, determinando cuántos jugadores hay en cada ronda, cuántos partidos se juegan en cada ronda y cuántos partidos juegan en total.

3. Resuelve y responde en tu cuaderno lo siguiente:

(a) Escribe el valor numérico de cada una de las siguientes potencias de 10:

10^1, 10^3, 10^5, 10^8, 10^{10}

(b) Escribe como potencias de 10 cada uno de estos números:

10,000; 100,000,000; 1,000; 10,000,000, 000

Diez; mil millones; cien mil millones; diez mil.

4. Una gota de sangre de un milímetro cúbico contiene aproximadamente cinco millones de glóbulos rojos. Una persona que pesa 70 Kg. tiene aproximadamente 4,5 litros de sangre. ¿Cuál sería el número de glóbulos rojos que tiene esta persona? Expresa el resultado como un número de una cifra entera y una potencia de 10.

5. Una finca tiene un depósito en forma de cubo con 90 metros cúbicos de agua. Halla las aproximaciones del lado si se sabe que es un cubo. ¿Cuál es el exponente de las potencias que estás utilizando? Si conoces la relación entre el cuadrado y la raíz cuadrada, ¿podrías establecer la relación entre el cubo y la raíz cúbica? Investiga si en tu calculadora existen teclas que te permiten calcular cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas.

6. Un tipo de bacteria se reproduce de tal forma que cada hora hay diez veces más bacterias que la hora anterior. Si partimos de una sola bacteria:
   a) ¿Cuántas habrá dentro de una hora?, ¿y dentro de diez?
   b) Si en un momento determinado tenemos diez millones de bacterias, ¿cuántas había la hora anterior?, ¿y tres horas antes?
   c) ¿Cuántas horas son necesarias para que haya un millón de bacterias?, ¿y un billón?

7. Una año luz es la distancia que viaja la luz en un año, es decir, aproximadamente 5,869,713,600 millas. Se estima que la Vía Láctea tiene un diámetro de aproximadamente 200,000 años luz. ¿Cuántas millas tiene la Vía Láctea de diámetro?

8. La edad del Sol es de aproximadamente 5×10^9años. Sin embargo, hay cuerpos que pueden tener 4 veces la edad del Sol. ¿Cuál es la edad de estos cuerpos?

9. Se calcula que en la Vía Láctea hay aproximadamente 1.2×10^{11}estrellas. ¿Cuántos años le tomaría a una persona contar las estrellas si cuenta una por segundo?

Aplicaciones e investigación

a. Calcula cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra si están separadas 150 millones de km. ¿A cuánto equivale la distancia Tierra-Sol en tiempo luz?

b. Calcula a qué distancia de la Tierra está la galaxia más próxima a la Vía Láctea (Andrómeda), si su luz tarda en llegarnos unos 2 millones de años.

c. Una nave espacial que viajara a una velocidad de 150.000 km/seg, ¿cuánto tardaría en llegar a la estrella Sirio que se encuentra a 6 años luz de distancia?

d. Para ir desde la Tierra hasta el extremo del universo observable, se deberían recorrer 46.500 millones de años luz. i) ¿A cuántos metros y km equivalen? ii) ¿Cuántos años se tardaría en llegar viajando a la velocidad de la luz?

e. Si una estrella que está a 5 años luz de la Tierra se apaga. ¿Cuánto tiempo tardaremos en enterarnos?

Referencias bibliográficas

1. Espinoza, H. y otros, (2005), *fichero de actividades didácticas matemáticas*, D.R.© Secretaría de Educación Pública, Argentina.
2. Intercambiando planetas. Recuperado Octubre 28, 2011, a partir de
3. http://astroseti.org/articulo/1766/intercambiando-planetas
4. Muñoz, H.,(2002) *Hojas de trabajo introducción a las potencias*, fundación Chile, educación-mejor escuela.
5. Nuñez, R., (2007), potencias y raíces, Edición cortesía de www.publicatuslibros.com. Andalucía España.
6. Potencias. Recuperado a partir de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/potenciasbaseentera.htm
7. Potencias y raíces de números enteros. Recuperado a partir de
8. http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena1/2esoquincena1.pdf
9. Viquez, H., (2009),*20 juegos matemáticos para hacer más creativa la labor del aula GIEM-PT.*

Lección 10 **7° grado** **Unidad 8** **Tiempo: 8 horas clase**

Operaciones básicas con monomios

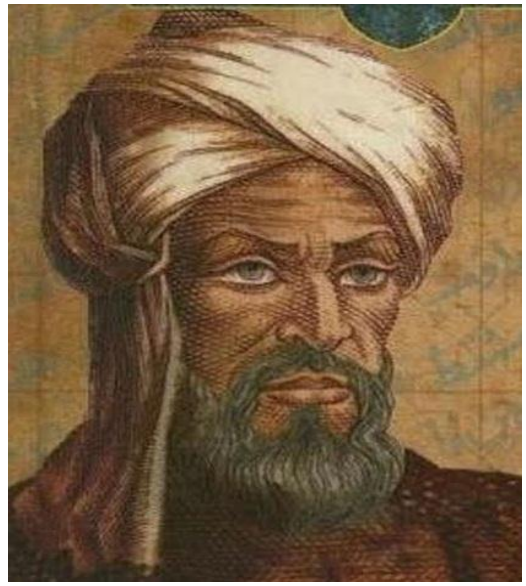


Figura 1. Al-Khwarizmi fue de los sabios que trabajaron en la Casa de la Sabiduría. Su interés radicaba en los campos del álgebra, geometría, astronomía y geografía. Su obra más famosa recibió el nombre de álgebra : *Hisab al-jabr w'al-muqabala.*

Descripción del tema

La matemática es y será el lenguaje de la ciencia. El lenguaje simbólico matemático ha resultado ser en extremo valioso para expresar las ideas científicas sin ambigüedad.

La ley de la física F = MA, no es sólo una forma algebraica de expresar que la fuerza de un objeto depende de la aceleración que se le aplique a una masa; sino que es un enunciado preciso de la relación cuantitativa entre esas variables.

En algebra, el conjunto de símbolos expresan ideas o proposiciones, por ejemplo: el símbolo A para el área de cualquier cuadrado se puede combinar con la letra L que representa la longitud del lado del cuadrado, para formar la expresión $A = L^2$. Esta ecuación especifica de qué manera se relaciona el área con el lado y también implica que no depende de nada más.

De aquí que esta lección entra en los fundamentos iniciales del lenguaje matemático, mediante el tratamiento de los monomios como elementos esenciales del lenguaje algebraico.

Competencias a desarrollar

Sabe explicar e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos.

Objetivos

- Identificar los elementos que forman un monomio.
- Resolver y operar de forma natural, aplicando las reglas de signos y exponentes.

Presaberes

- Operaciones básicas
- Fracciones
- Leyes de los exponentes
- Leyes de los signos.
- Áreas y perímetros.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Monomio. Es el "Producto indicado de un número (coeficiente) por una o varias letras (parte literal) o bien un número solo".

El coeficiente del monomio. Es el número que aparece multiplicando a las variables.

La parte literal. Está constituida por las letras y sus exponentes.

Grado de un monomio. Número de factores que forman su parte literal.

Monomios semejantes: Cuando tienen la misma parte literal. Por tanto, dos monomios semejantes sólo se diferencian en el coeficiente.

LO QUE COMO DOCENTE DEBE CONOCER

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama parte literal de un monomio a las letras con sus exponentes.

Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si es un 1 no se escribe y nunca es 0 ya que la expresión completa sería 0.

Los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros (por ejemplo 0.6; 1/2; -5/6… etc.), aunque normalmente serán enteros y así lo vamos a suponer en este tema.

Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras.

En el ejemplo: $3ax, -2xy^2, 8ab^3x$, observamos:

los coeficientes son: 3; -2; y 8, respectivamente

Tienen grado 2, grado 3 y grado 5, respectivamente (como ya sabemos, cuando el exponente es 1 no se escribe).

En la mayor parte de los casos los monomios que se utilizarán serán más simples, ya que sólo estarán formados por una letra, normalmente la x.

Por tanto, su exponente será el grado del monomio.

Ejemplos:

$-2x^2$, tiene coeficiente -2 y grado 2.

3x tiene coeficiente 3 y grado 1.

$-5y^3$, tiene coeficiente -5 y grado 3.

x^5, tiene coeficiente 1 y grado 5.

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal. $2x^2y^3z$ es semejante a $5x^2y^3z$. Por tanto, dos monomios semejantes sólo se diferencian en el coeficiente.

Ejemplos:

Son monomios semejantes:

$2ax^4y^4; -3ax^4y^4;\ ax^4y^4; 5ax^4y^4$

No son semejantes a los anteriores: $axy^3;\ a^2x^4y^3; 2xy^4$

Operaciones con monomios

Suma de Monomios

Sólo podemos sumar monomios semejantes. La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

Cuando los **monomios no son semejantes,** la suma queda indicada y el resultado se llama **polinomio,** como se verá en octavo grado.

En formal general se expresa:

$$\boldsymbol{ax^n + bx^n = (a + b)bx^n}$$

Ejemplo:

$$2x^2\,y^3\,z + 3x^2\,y^3\,z = 5x^2\,y^3\,z$$

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro **monomio semejante** cuyo **coeficiente** es el **producto del coeficiente** de monomio **por el número.**

$$5 \cdot 2x^2\,y^3\,z = 10x^2\,y^3\,z$$

Producto de monomios

El producto de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando entre sí las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de las potencias.

$$\boldsymbol{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}}$$

Ejemplo:

$$5x^2\,y^3\,z \cdot 2\,y^2\,z^2 = 10\,x^2\,y^5\,z^3$$

Cociente de monomios

El cociente de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes, cuya parte literal se obtiene dividiendo entre sí las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de las potencias

$$\boldsymbol{ax^n \div bx^m = (a \div b)x^{n-m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{6x^3\,y^4\,z^2}{3x^2\,y^2\,z^2} = 2xy^2$$

Potencia de un monomio

Para realizar la potencia de un monomio se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia:

$$\boldsymbol{(abx^n)^m = a^m \cdot b^m x^{n.m}}$$

Ejemplos:

$$(2x^3)^3 = 2^3(x^3)^3 = 8x^9$$

$$\left(-3x^2\right)^3 = (-3)^3\left(x^2\right)^3 = -27x^6$$

Historia

Hace unos 4,000 años, los babilonios conocían la manera de encontrar la solución positiva de ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Tenían una "receta" muy precisa para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - \mathrm{bx} = \mathrm{c}$, con b>0, c>0, aunque estos símbolos (b, c, x, +,=) no se usaban entonces.

Después de un siglo de expansión en el que la religión musulmana se difundió desde sus orígenes, en la península arábiga, hasta dominar un territorio que se extendía desde la península Ibérica hasta los límites de la actual China, los árabes empezaron a incorporar a su propia ciencia los resultados de "ciencias extranjeras". Los traductores de instituciones como la Casa de la Sabiduría de Bagdad, mantenida por los califas gobernantes y por donaciones de particulares, escribieron versiones árabes de los trabajos de matemáticos griegos e indios

Hacia el año 900, el periodo de incorporación se había completado y los estudiosos musulmanes comenzaron a construir sobre los conocimientos adquiridos. Entre otros avances, los matemáticos árabes ampliaron el sistema indio de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales.

En el siglo XII, el matemático persa Omar Khayyam generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior.

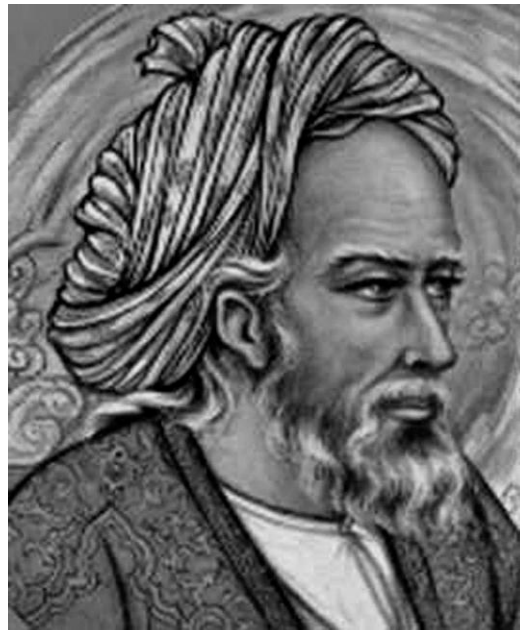


Figura 2. Omar Khayyam era un erudito islámico, poeta y matemático.

El matemático árabe Al-Jwârizmî (de su nombre procede la palabra algoritmo, y del título de uno de sus libros procede la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios; al-Karayi la completó para polinomios incluso con infinito número de términos.[19]

Más adelante, matemáticos griegos, hindúes, árabes y europeos se dedicaron al estudio de estas ecuaciones y lograron avanzar a través del tiempo hasta encontrar la fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado, es decir, una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c pueden ser números cualquiera[20].

---

[19] Texto tomado http://carlosbrunio.tripod.com/matematicasmedia.html

[20] Texto, al igual que el primer párrafo, tomado de http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/premioUAM/premiados1/factorizacion_real.pdf

Actividad 1

Estudio de monomios

Objetivo

Conocer e identificar las partes de un monomio.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Indique a sus estudiantes que se reúnan en parejas de trabajo y que resuelvan la siguiente tabla:

Tabla1. Identificación de las partes de un monomio

Monomio	coeficiente	Parte literal	grado
$8x^2$			
$5\ ab^4c^2$			
$x^2\ y$			
$\frac{3}{4}p^2\ q\ r$			
$\frac{5}{7}$			

Se explicará brevemente el significado de un monomio, así como de las partes que lo componen. Debe dar ejemplos. Luego dará un tiempo prudencial para que desarrollen la actividad.

Además, seleccionará estudiantes para que muestren en la pizarra las partes que componen al monomio y se discutirá si todo el estudiantado ha escrito lo mismo o si alguien lo ha expresado de manera diferente.

De ser erróneo el resultado, se preguntará si el resultado es el mismo, y se pedirá que revisen bien la definición de un monomio y qué es la parte literal, el coeficiente y el grado.

Puedes colocar otros ejemplos de monomios para que cada estudiante practique y comprenda qué es un monomio y sus elementos.

Actividad 2

Monomios semejantes

Objetivo

Conocer a que se le llama términos semejantes

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Pedir a sus estudiantes que ordenen en la pizarra la frase que se indica. Pero antes, deberá elaborar en hojas de papel bond la frase que se muestra en la siguiente figura y colocar en desorden cada una de las partes. De esta manera, se construirá la definición de cuando dos monomios son semejantes.

semejantes	Dos monomios	la parte literal	son	cuando tienen	idéntica

Solución

Dos monomios son semejantes cuando tienen la parte literal idéntica.

La actividad se puede realizar primero indicando a sus estudiantes, que construyan la frase en su cuaderno y luego hacer una discusión en plenaria, seleccionando estudiantes, para que intenten formar la definición en la pizarra.

Después se verifica si es correcto y se muestran ejemplos de dos monomios semejantes.

Se colocarán ejercicios que ayuden a relacionar términos semejantes, por ejemplo, los proporcionados a continuación.

Relacionar los monomios de la derecha con los monomios de la izquierda identificando cuales son los semejantes.

Figura2. Clases de monomios semejantes

$-17x^2yz^2$	$5x^2y^3$
$15x^3y^2z$	$87xy^3$
$3x^2y^3z$	$2x^2yz^2$
$7x^2y$	$2x^2y$
$12xy^3$	$-4x^2y^3z$
$-3x^3y^2$	$-9x^3y^2$
$-8x^2y^3$	$-12x^3y^2$

Actividad 3
Ejercitar operaciones con monomios.
Objetivo
Realizar operaciones de sumas y resta con monomios.
Materiales
Cuaderno de trabajo
Indicaciones
Pedir a sus estudiantes que se reúnan en equipos de trabajo de 4 integrantes y que resuelvan los siguientes ejercicios.

La suma/resta de dos monomios semejantes es otro monomio semejante que tiene por coeficiente la suma/resta de los coeficientes.
Ejemplo:

$$5x + 2x = 7x\,; \quad -3x^2 - 2x^2 = -5x^2$$
$$4a + 5a = 9a; \quad 8z^33 - 9z^3 = -z^3$$

La suma/resta de dos monomios no semejantes no es un monomio y la dejaremos indicada.

$$3x^3 + 5x; \quad 4z - 8t^2$$

Resolver:

1. $x + 2x$
   Posible solución
   El signo común a todos los términos es $+$. Los coeficientes de los términos son 1 y 2. La parte literal igual en todos es x.
   Así $1 + 2 = 3$; así la solución de $x + 2x = 3x$

2. $-b - 5b$
   Posible solución
   El signo común a todos los términos es $-$. Los coeficientes de los términos son 1 y 5. La parte literal igual en todos es b.
   Así $1 + 5 = 6$; así la solución de $-b - 5b = -6b$

3. $6a^{x+1} + 8a^{x+1}$

   Posible solución
   El signo común a todos los términos es $+$. Los coeficientes de los términos son 6 y 8. La parte literal igual en todos es a^{x+1}.
   Así $6 + 8 = 14$; así la solución de $6a^{x+1} + 8a^{x+1} = 14a^{x+1}$

4. $25x^2y^7z^3 - 15x^2y^7z^3$

   Posible solución

   El signo es diferente para ambos monomios; por tanto, a la hora de operar se tomará el signo del coeficiente de mayor cantidad, en este caso es el signo $+$. Los coeficientes de los términos son 25 y 15. La parte literal igual en todos es $x^2y^7z^3$.

   Así $25 - 15 = 10$; así la solución de $25x^2y^7z^3 - 15x^2y^7z^3 = 10x^2y^7z^3$

5. $\frac{1}{4}a^2b^3c - \frac{1}{2}a^2b^3c$

   Posible solución

   El signo es diferente para ambos monomios; por tanto, a la hora de operar se tomará el signo del coeficiente de mayor cantidad, en este caso es el signo $-$. Los coeficientes de los términos son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. La parte literal igual en todos es a^2b^3c.

   Así $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$; así la solución de $\frac{1}{4}a^2b^3c - \frac{1}{2}a^2b^3c = -\frac{1}{2}a^2b^3c$

Actividad 4

Ejercitar operaciones con monomios.

Objetivo

Realizar operación multiplicación y división de monomios.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Indicaciones

Solicite a sus estudiantes que se reúnan en equipos de 4 integrantes y que resuelvan los siguientes: ejercicios.

1. $(-2ab^3)(3a^3c^2)$

Posible solución

Seguiremos los siguientes pasos

Paso 1.

Aplicaremos las leyes de los signos como un producto, y se tomarán en cuenta de la siguiente manera:

Para el primer factor se tiene el signo $-$, y para el siguiente factor el signo $+$ entonces

$- \cdot + = -$; así el signo es $-$

Paso 2.

Aplicar las leyes de los exponentes; para este caso la ley de que a igual base se suman exponentes.

Así el resultado será:

$a^{1+3}b^3c = a^4b^3c$

Paso 3.

Multiplicar los coeficientes (2) (3)=6

Luego el resultado es $(-2ab^3)(3a^3c^2) = -6a^4b^3c$

2. $\frac{-2a^2b^3}{-ab}$

Posible solución

Seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1.

Usando la ley de signos, $- \cdot - = +$

Paso 2.

Usando la ley de los exponentes.

Cociente de potencia igual base se restan los exponentes, así se tiene: $a^{2-1}b^{3-1} = a^1b^2 = ab^2$

Paso 3.

Dividir los coeficientes $2 \div 1 = 2$

Así el resultado es: $\frac{-2a^2b^3}{-ab} = 2ab^2$

Actividad 5

Identifiquemos monomios en geometría.

Objetivos

Resolver problemas multiplicativos que empleen el uso de expresiones algebraicas, como los monomios. .

Materiales

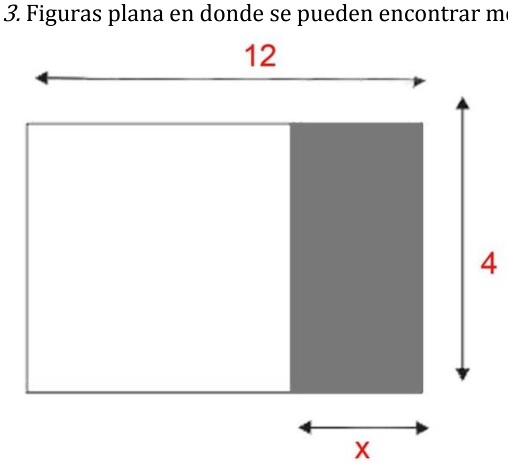
Regla graduada

Cuaderno de trabajo.

Indicaciones

Indicar a sus estudiantes que se reúnan en parejas y discutan y resuelvan las siguientes preguntas:

Figura 3. Figuras plana en donde se pueden encontrar monomios



A partir de la Figura 3, resuelva:
¿Cuál es el área de la región sombreada?
¿Cuál es el área de la región no sombreada?
¿Cuál es la medida del lado más largo de la parte no sombreada?

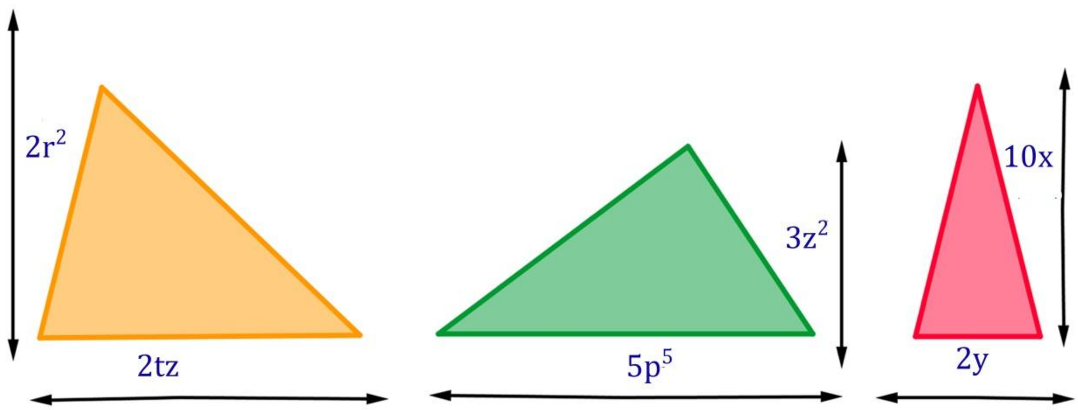
Por otra parte, un modelo geométrico como el anterior puede servir de apoyo para consolidar los algoritmos de la adición y sustracción, estudiados anteriormente. Por tanto, pueden plantearse problemas como los siguientes:

¿Cuál es el perímetro de la región sombreada de la figura anterior?
¿Cuál es el perímetro de la región no sombreada?
¿Cuál es la diferencia entre los dos perímetros?

Además, se le debe pedir al grupo de estudiante que encuentre los monomios que se forman al encontrar áreas y perímetros, e indicar las partes que componen a dichos monomios.

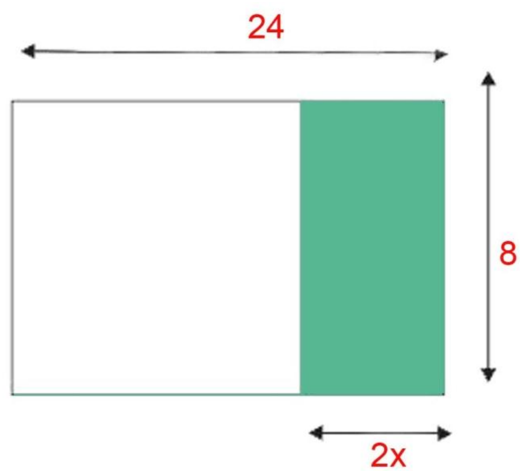
Guía de problemas y ejercicios

1. Encontrar el área de las siguientes figuras, identificar la operación de monomio realizada, y si el resultado es un monomio escribir la parte literal, el coeficiente y el grado de dicho monomio.



2. Dada la siguiente figura, resuelva las preguntas:

a) ¿Cuál es el área de la región sombreada?
b) ¿Cuál es el área de la región no sombreada?
c) ¿Cuál es la medida del lado más largo de la parte no sombreada?
d) ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada de la figura anterior?
e) ¿Cuál es el perímetro de la región no sombreada?
f) ¿Cuál es la diferencia entre los dos perímetros?
g) Encuentren los monomios en que se forman al encontrar áreas y perímetros e indicar las partes que componen ha dicho monomio.



3. Ordene o Completa la frase que se indicada:

____

____

de los sumandos	de	es	cuya parte literal	dos monomios son semejantes
es la misma	otro monomio	De los coeficientes	la suma	es
cuya coeficiente	y	la suma		

4. Resuelve lo siguiente: elabora una tabla y ubica el resultado de las siguientes operaciones, según el color que corresponda. Luego coloca la respuesta correcta a cada una de las operaciones y detalla si es un monomio. Después identifica las partes que lo componen.

$$x+\frac{1}{2}x=\left(1+\frac{1}{\color{green}\blacksquare}\right)x=\frac{\color{red}\blacksquare}{\color{yellow}\bullet}x$$

$$x+\frac{x}{5}=\left(1+\frac{1}{\color{green}\blacksquare}\right)x=\frac{\color{red}\blacksquare}{\color{yellow}\blacksquare}x$$

$$3x-\frac{2}{3}x=\left(3-\frac{\color{green}\blacksquare}{3}\right)x=\frac{\color{red}\blacksquare}{\color{yellow}\bullet}x$$

$$\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{x^2}{3}=\left(\frac{1}{2}+{\color{green}\blacksquare}+\frac{1}{3}\right)x^2=\frac{\color{red}\blacksquare}{\color{yellow}\bullet}x^2$$

$$x-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}x=\left({\color{green}\blacksquare}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)x=\frac{\color{red}\blacksquare}{\color{yellow}\bullet}x$$

Referencias bibliográficas

1. Factorización real. Recuperado a partir de http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/premioUAM/premiados1/factorizacion_real.pdf
2. Las matemáticas en la Edad Media, Recuperado a partir de http://carlosbruni.tripod.com/matematicasmedias.html
3. Khayyam biography. (s.f.). Recuperado Noviembre 4, 2011, a partir de http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Khayyam.html
4. Los polinomios tienen su historia, (s.f.). Recuperado Noviembre 4, 2011, a partir de http://aprenderencasa.educ.ar/aprender-en-casa/1-3S-los_polinomios_tienen_%20su%20historia.pdf
5. Monomio: Definición. (s.f.). Recuperado Noviembre 4, 2011, a partir de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/monomios/monomiodefinicion.htm

Viceministerio de Ciencia y Tecnología
Gerencia de Educación en Ciencia Tecnología e Innovación

Este material de Autoformación e Innovación Docente es un esfuerzo del Gobierno de El Salvador (Gestión 2009-2014) para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas, desde una visión que contempla la Ciencia y la Tecnología de una manera "viva" en el currículo nacional, la visión CTI (Ciencia, Tecnología e Innovación).