

Physikalisches Grundpraktikum I

Versuchsprotokoll: Mechanik

21. März 2023

Mike Zingler, (432032)
Pascal Schröder, (434191)

Gruppe (B05)

Versuchsliste

1M1 Messung der Erdbeschleunigung mit dem Pendel

1

Versuchsziele

Kurze Beschreibung der Versuchsziele aller Teilversuche.

Im Versuch soll experimentell die Erdbeschleunigung samt Fehler bestimmt werden.

1M1 Messung der Erdbeschleunigung mit dem Pendel

Aufgabe 1 Grundlagen

Knappe Beschreibung der theoretischen Grundlagen, Angabe der benötigten Formel(n), ohne Herleitung. Definition der verwendeten Formelzeichen.

Im Versuch wird die Erdbeschleunigung mit einem Pendel experimentell bestimmt.

Die theoretische Grundlage dazu ist das mathematische Pendel. Hier wird die Annahme eines masselosen Fadens sowie einer punktförmigen Masse getroffen. Die Schwerkraft auf die Pendelmasse lautet:

$$F_g = m_S \cdot g$$

Wenn das Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt wird, wirkt eine ein rückstellendes Drehmoment. Dieses ergibt sich aus:

$$D_R = F_R \cdot l = F_g \cdot \sin(\varphi) \cdot l$$

wobei l die Länge des Fadens und φ den Auslenkwinkel zwischen Ruhelage und Faden beschreibt. Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) \approx \varphi$, welche für $\varphi < 5^\circ$ noch erfüllt ist, folgt die Bewegungsgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -F_g \cdot \sin(\varphi) \cdot l \approx -m_s \cdot g \cdot \varphi \cdot l$$

wobei $J = m_T \cdot l^2$ das Trägheitsmoment der Pendelmasse nach dem Steiner'schen Satz beschreibt und m_T die träge Masse des Pendelkörpers ist. Da die träge der schweren Masse gleich ist, folgt:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi$$

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Lösung ergibt sich aus einer harmonischen Oszillation:

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{mat} t)$$

mit $\omega_{mat} = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Als Schwingungsdauer für das Pendel ergibt sich:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{mat}} = 2\pi \cdot \frac{l}{g}$$

Im Versuchsaufbau handelt es sich jedoch um ein physikalisches Pendel. Hierbei wird die Näherung eines masselosen Fadens und einer Punktmasse aufgelöst. Die Fadenlänge bzw. Stangenlänge l_s bezieht sich dann auf den gemeinsamen Schwerpunkt der Pendelstange und -körper. J beschreibt dann das Gesamtträgheitsmoment des Systems, welches eine komplexe Form aufgrund der Pendelstange aufweist. Formal ergibt sich für die Bewegungsgleichung mit der Kleinwinkelnäherung:

$$J_{ges} \cdot \ddot{\varphi} = -m_{ges} \cdot g \cdot \varphi \cdot l_s$$

Wie zuvor ist die Lösung dieser Differential-Gleichung eine harmonische Oszillation. Die Kreisfrequenz ergibt sich demnach zu:

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot l_s}{J_{ges}}$$

und somit

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{J_{ges}}{m_{ges} l_s}$$

Um die komplexe Berechnung des gemeinsamen Schwerpunktes vom Winkelaufnehmer-Profil, Stange und Pendelkörper, siehe Abbildung 4, zu umgehen, wird die Schwingung des Pendels mit und ohne Pendelkörper betrachtet. Zunächst wird die Schwingfrequenz ohne Pendelkörper (ω_{st}) bestimmt. Anschließend wird der Pendelkörper angebracht und l_s variiert, bis für die Schwingfrequenz $\omega = \omega_{st}$ gilt.

Mit

$$\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}} \quad \omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}$$

und

$$\omega^2 = \frac{D_{st} + D_p}{J_{st} + J_p} = \omega_p^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_{st}}{D_p}}{1 + \frac{J_{st}}{J_p}} = \omega_{st}^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_p}{D_{st}}}{1 + \frac{J_p}{J_{st}}}$$

folgt mit $\omega = \omega_{st}$

$$\frac{J_p}{J_{st}} = \frac{D_p}{D_{st}} \Leftrightarrow \frac{D_p}{J_p} = \frac{D_{st}}{J_{st}} \Leftrightarrow \omega_p^2 = \omega_{st}^2$$

und somit

$$\omega_p^2 = \omega^2.$$

Wenn also die Schwingfrequenz ω des gesamten Pendels mit der Schwingfrequenz ω_{st} synchronisiert wird, kann die Masse der Stange aus der Betrachtung ausgelassen werden. Es muss lediglich die Schwingung des ausgedehnten Pendelkörpers betrachtet werden. Da dieser die Geometrie eines Zylinders mit Radius r_p aufweist welcher um l_p von der Rotationsachse verschoben ist, ergibt sich unter Beachtung der Rotationsachse und des Steiner'schen Satzes das Trägheitsmoment zu:

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r_p + m_p l_p^2$$

Für die Kreisfrequenz folgt:

$$\omega^2 = \frac{D_p}{J_p} = \frac{m_p \cdot g \cdot l}{\frac{1}{2}m_p r_p + m_p l_p^2}$$

Für g ergibt sich

$$g = \omega^2 l_p \left(1 + \frac{r_p^2}{2 \cdot l_p^2} \right) = \frac{4\pi^2}{T^2} l_p \left(1 + \frac{r_p^2}{2 \cdot l_p^2} \right). \quad (1)$$

Zudem wird für die statistische Auswertung das gewichtete und empirische Mittel, sowie die Fehler darauf benötigt.

Es gilt für das gewichtete Mittel:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{\bar{y}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2} \quad (2)$$

Für das empirische Mittel gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{und} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Der Fehler auf den Mittelwert des empirischen Mittels ergibt sich aus:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (4)$$

Aufgabe 2 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Beschreibung des Versuchsaufbaus einschließlich beschrifteter Skizze oder Foto. Be-

schreibung der Versuchsdurchführung: Handgriffe an der Apparatur, verwendete Messwerteinstellungen, Messbereiche, Triggerbedingungen, etc.

Zum Aufbau:

Für den Versuch wird zunächst ein stabiles Dreibein benötigt. Dieses besteht aus drei Metall-Stangen, welche wir vertikal an einem Tisch mit Tischklemmen eingespannt haben. An diesen drei Stangen haben wir wiederum drei Metall-Stangen mit Verbindungsmuffen horizontal eingespannt, sodass von oben betrachtet ein Dreieck entstand. Der Aufbau des Dreibeins ist in Abbildung 1 ersichtlich. Dabei haben wir mit einer Wasserwaage überprüft, ob die horizontale Stange an der die Pendel angebracht werden, tatsächlich waagerecht ist. Dieser Prozess ist in Abbildung 2 dargestellt. An dieser Stange haben wir dann zwei Winkelauflnehmer mit Verbindungsmuffen befestigt. Auch dabei haben wir auf eine waagerechte Ausrichtung geachtet. Im Winkelauflnehmer ist eine Hall-Sonde verbaut, um die magnetische Feldstärke orthogonal zur Ausrichtung des Pendels in Ruhelage zu messen. Dieses wird in eine Hall-Spannung translatiert, welche proportional zum Sinus des Auslenkwinkels bzw. für $\varphi < 5^\circ$ proportional zum Auslenkwinkel ist. Die Winkelauflnehmer werden von jeweils einem Kabel mit einer Spannung versorgt. Über ein weiteres, zweiadriges Kabel haben wir die Winkelauflnehmer mit dem Sensor-Cassy verbunden, um die ausgegebene Spannung messen zu können. Dabei ist der in Abbildung 1 links zu sehende Winkelauflnehmer mit dem Eingang A des Sensor-Cassys verbunden und der rechts zu sehende mit Eingang B. Der Sensor-Cassy ist mit dem Laptop verbunden. Der Aufbau des Dreibeins mitsamt der Winkelauflnehmer ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Verkabelung ist in Abbildung 3 dargestellt.

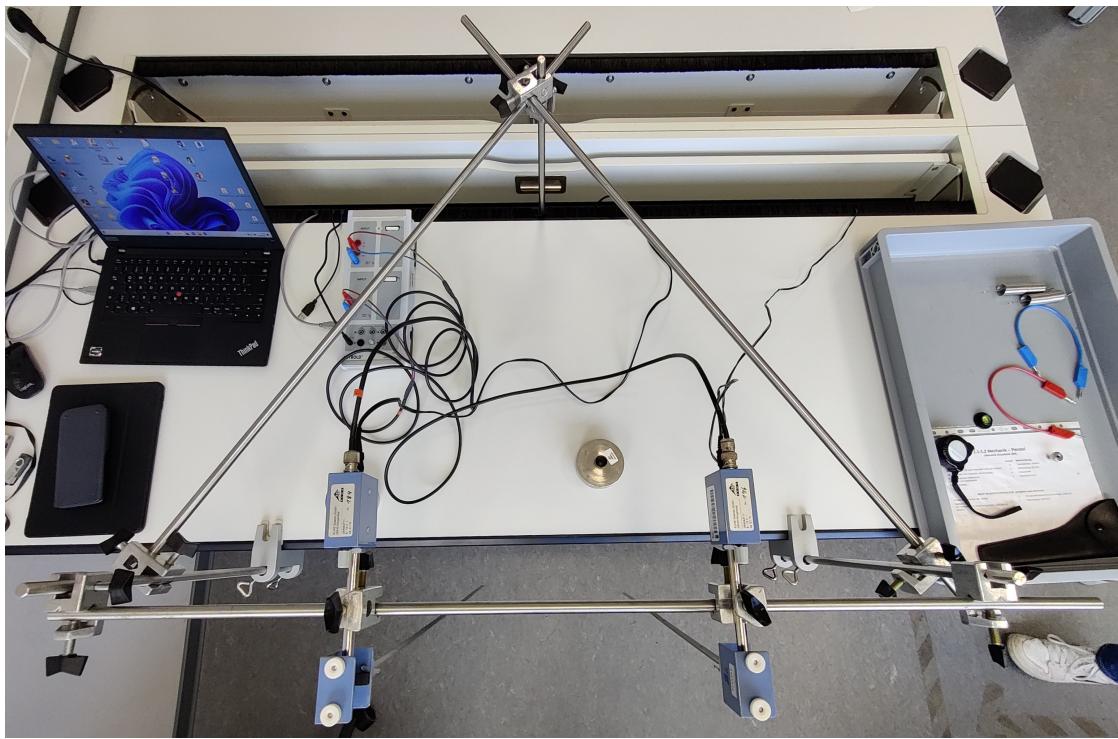


Abbildung 1: Aufbau des Dreibeins im Labor

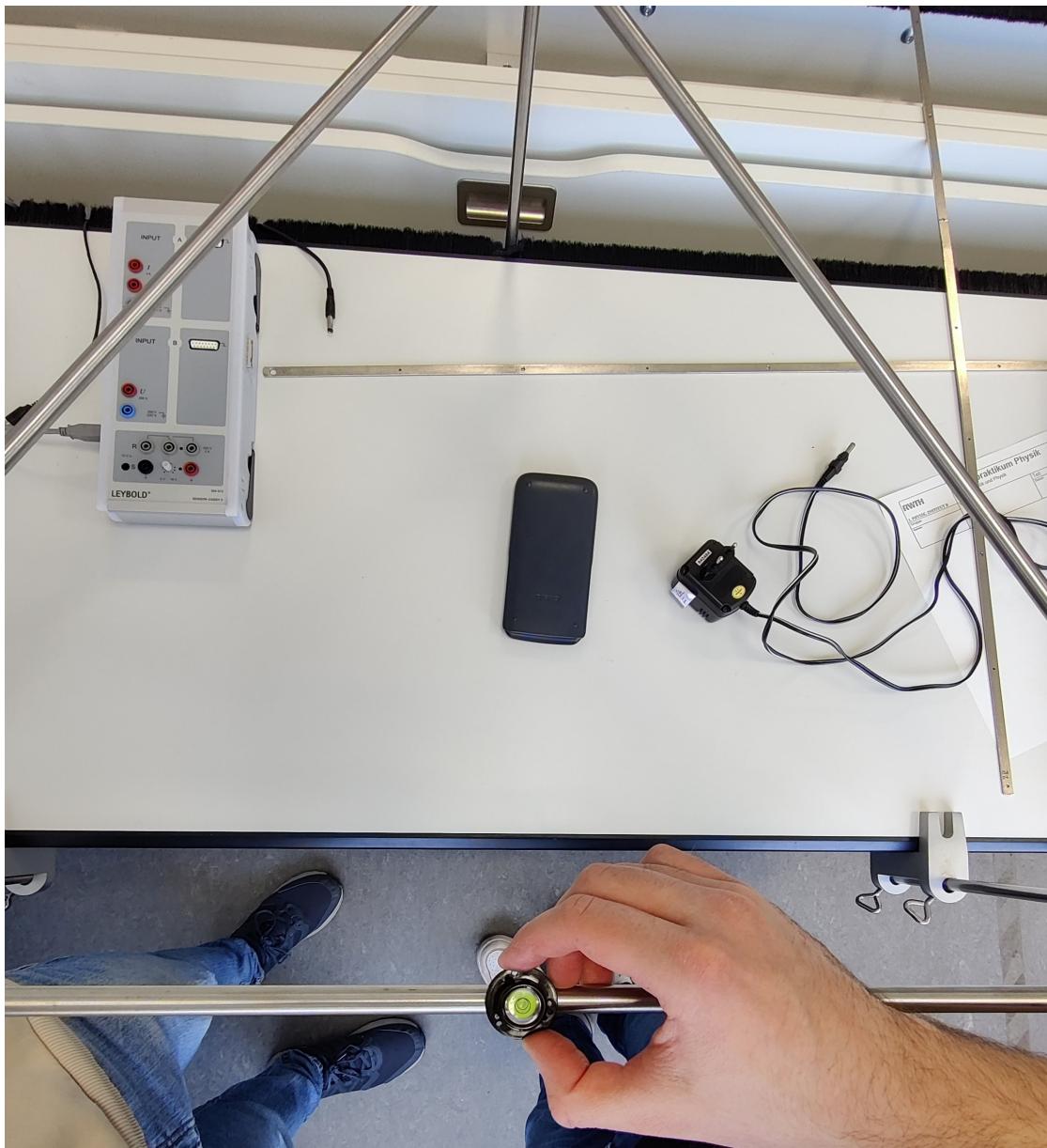


Abbildung 2: Prüfung der Neigung des Dreibeins

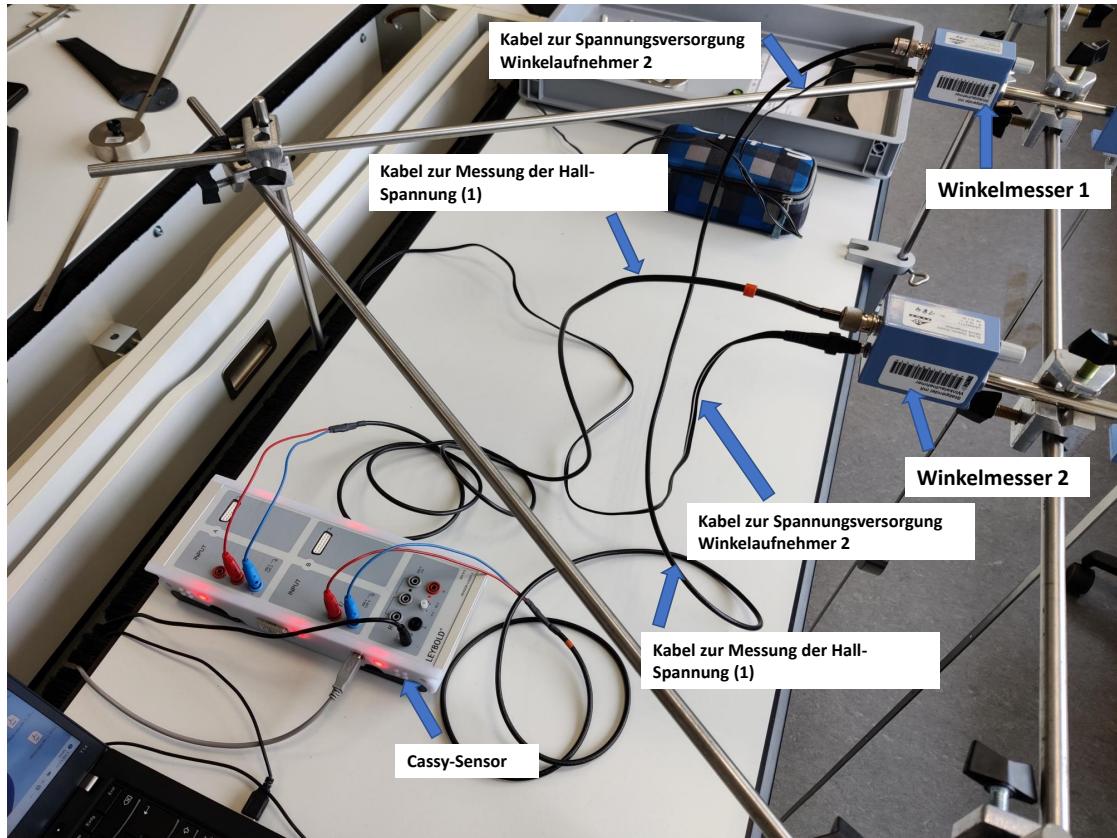


Abbildung 3: Verkabelung der Winkelaunehmer

Das Pendel besteht aus drei Elementen. Das Winkelaunehmerprofil ist C-förmig und weist zwei dünne Spitzen auf, welche in einer Kerbe des Winkelaunehmers aufliegen. In der Innenseite des Winkelaunehmerprofils ist oben und unten jeweils ein Permanentmagnet angebracht. An dem Profil ist die eigentliche Pendelstange angebracht. An dieser wird der zylindrische Pendelkörper angeschraubt. Die Länge a beschreibt die Distanz von dem Ende der Spitze bis zur Außenseite des Winkelaunehmerprofils. Die Länge b beschreibt die Distanz von der unteren Außenseite des Winkelaunehmerprofils bis zum Rand des Pendelkörpers. D beschreibt den Durchmesser des zylindrischen Pendelkörpers. l_p beschreibt die resultierende Pendellänge, das heißt die Distanz vom Pivot-Point bis zum Schwerpunkt des Pendelkörpers. Diese ist definiert als die Distanz vom Pivot-Point bis zum Schwerpunkt der Pendelmasse. Es gilt:

$$l_p = a + b + \frac{D}{2}$$

Ein schematischer Aufbau des gesamten Pendels ist in Abbildung 4 dargestellt.

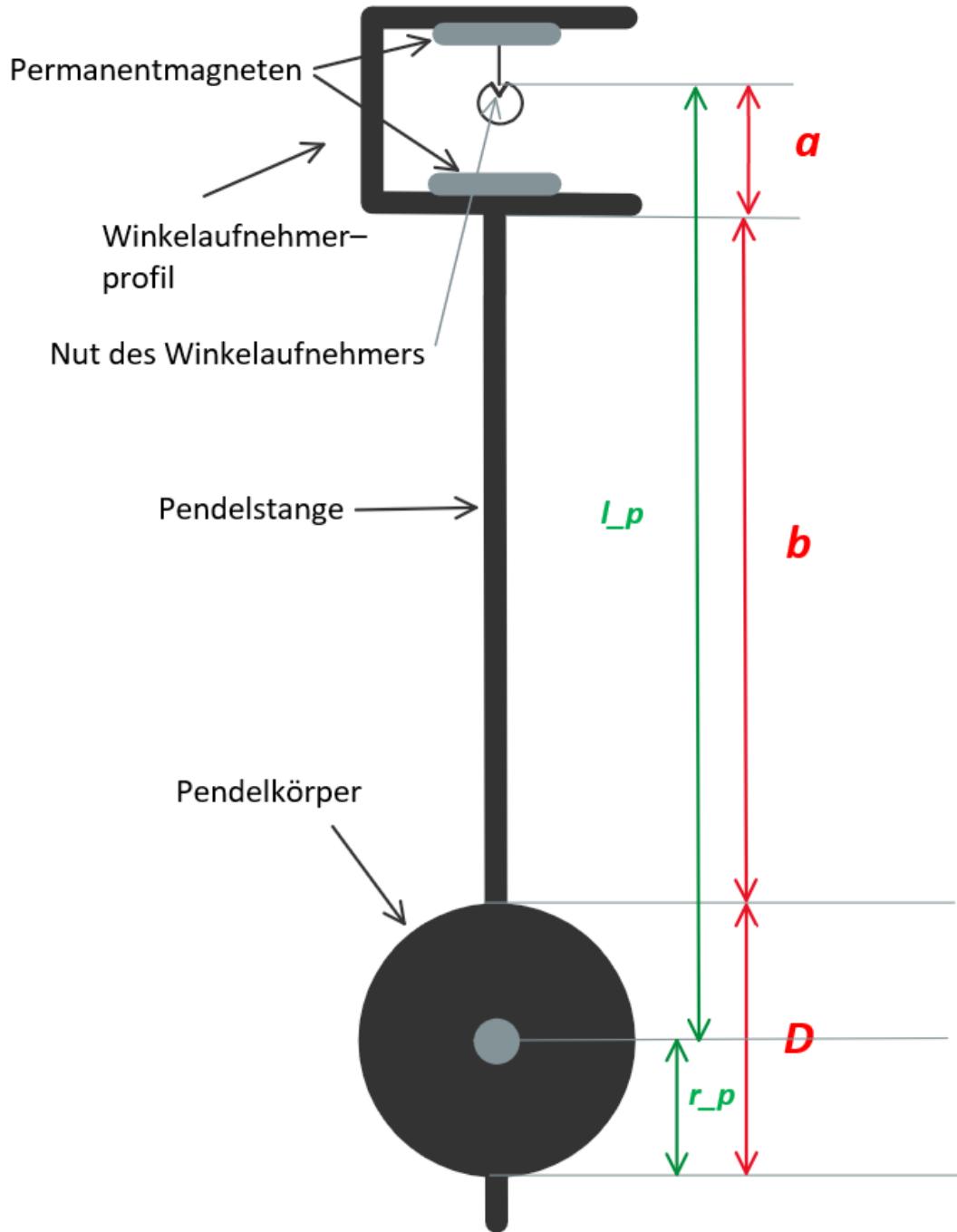


Abbildung 4: Schematischer Aufbau des Pendels

Das gesamte Pendel wird dann mit den Spitzen in die Nut des Winkelauflnehmers gehängt. Wenn das Pendel schwingt, dann rotieren die Spitzen innerhalb der Nut. Der Winkelauflnehmer rotiert nicht. Eine Nahaufnahme ist in Abbildung 5 ersichtlich. Insgesamt werden zwei Pendel an der Stange nach diesem Aufbau montiert. Das in Abbildung 6 links dargestellte Pendel wird im folgenden als Pendel 2 bezeichnet. Das rechts dargestellte als Pendel 1.

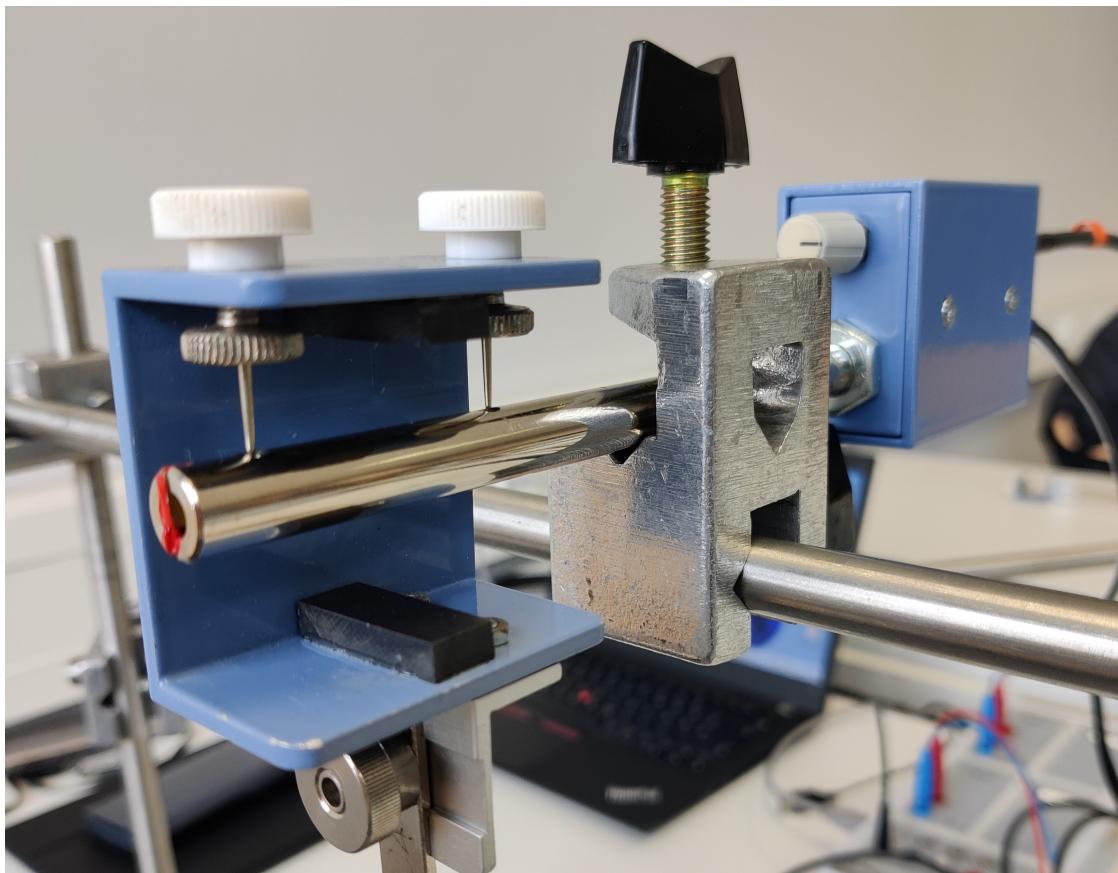


Abbildung 5: Nahaufnahme des Pivot-Points

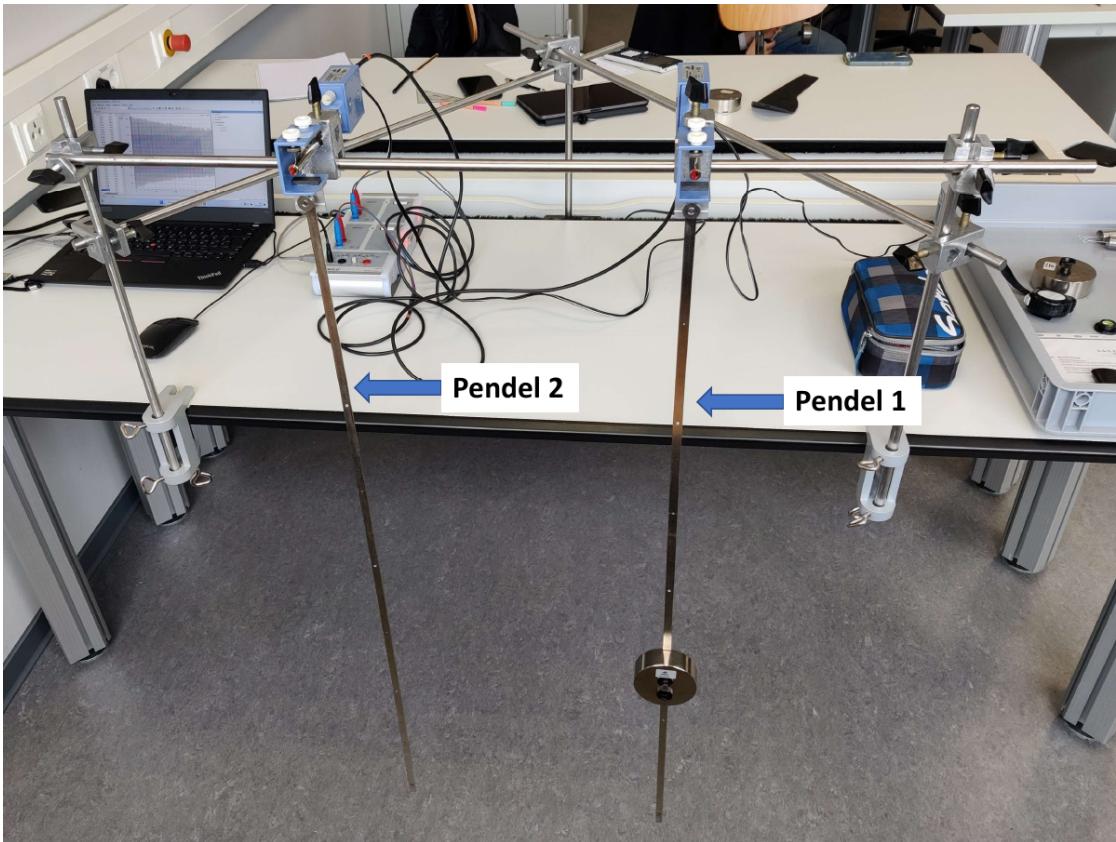


Abbildung 6: Aufbau der beiden Pendel 1 und 2

Zur Durchführung:

Bevor wir mit dem Versuch begonnen haben, haben wir zunächst Markierungen gesetzt, um das Pendel nicht weiter als $\varphi = 5^\circ$ auszulenken. Dazu haben wir grob den Abstand $h \approx 117\text{cm}$ vom Pivot-Point bis zum Boden gemessen. Nach der Kleinwinkelnäherung gilt $\tan(\varphi) \approx \varphi = \frac{x}{h}$ wobei x die Projektion der Auslenkung auf den Boden beschreibt. Für $\varphi < 5^\circ$ erhalten wir für die maximale Auslenkung circa $x < 10\text{cm}$. Wir haben anschließend Markierungen auf dem Boden gesetzt, welche im Abstand von circa $x = 9\text{cm}$ im Bezug zur jeweiligen Ruhelage der Pendel gesetzt wurden. Dies ist in Abbildung 7 dargestellt.

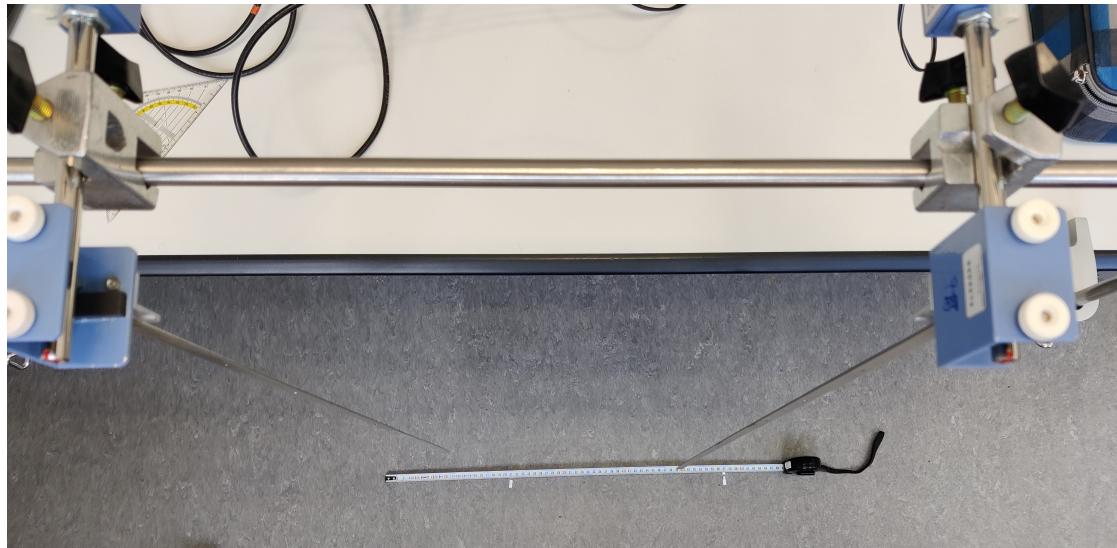


Abbildung 7: Markierungen für den maximalen Auslenkwinkel

Vor der ersten Messreihe haben wir beide Pendel ausgelenkt und schwingen lassen. Optisch haben wir das Pendel bestimmt, welches ruhiger schwingt. Dies war Pendel 1. Mit diesem Pendel haben wir im folgenden alle Messreihen aufgenommen.

Wir haben zunächst eine kurze Probemessung mit einer Messzeit von 20s und einem Messintervall von 20ms für beide Pendel durchgeführt. Über eine schnelle Peak-Analyse in Cassy-Lab haben wir jeweils zwei Peaks bestimmt, welche 10 Perioden auseinander lagen, und das daraus resultierende Δt bestimmt bzw. T für Pendel 1 und 2 bestimmt.

Mit

$$T = \frac{t_2 - t_1}{10}$$

und

Tabelle 1: Probemessung zur Bestimmung von T_1 und T_2

Pendel	t_1	t_2
1	1.97s	18.54s
2	1.97s	18.52s

ergibt sich $T_1 = 1.657$ und $T_2 = 1.655\text{s}$. Da diese Messung nur zu einer groben Orientierung dient, haben wir auf ein Bestimmen der Unsicherheiten verzichtet. Aus der Probemessung konnten wir schließen, dass beide Pendel in etwa die gleiche Schwingfrequenz aufweisen. Weiterhin konnten wir so die Gesamtzeit für die folgenden Messungen bestimmen. Da etwa 100-120 Perioden aufgezeichnet werden sollen, haben wir uns für eine Gesamtzeit von 200s entschieden. Das Messintervall haben wir als 20ms gewählt. Wir haben in keiner Messung einen Trigger verwendet. Für die Spannungsmessung haben wir einen Messbereich von $\pm 1\text{V}$ gewählt.

Im folgenden haben wir für Pendel 1 ohne eine Pendelmasse drei Messreihen aufgezeichnet. Dazu haben wir das Pendel ausgelenkt und beim Loslassen darauf geachtet, dass das Pendel möglichst wenig orthogonal zur Schwingrichtung oszilliert. Unmittelbar danach haben wir die Messung manuell gestartet.

Anschließend haben wir an Pendel 1 die Pendelmasse geschraubt. Um in den folgenden Messungen das Trägheitsmoment der Stange zu kompensieren, muss die Schwingfrequenz des Pendel 1 mit Pendelmasse so angepasst werden, sodass es gleich der Schwingfrequenz des Pendel 1 ohne Pendelmasse ist. Dafür haben wir zunächst mittels Augenmaß die Pendelmasse am Pendel 1 so lange verschoben, bis die Frequenz in etwa gleich der Frequenz von Pendel 2 ohne Pendelmasse war. Anschließend haben wir die dritte Messung von der Schwingung des Pendel 1 ohne Pendelmasse in Cassy-Lab geladen. Innerhalb der gleichen Datei haben wir eine weitere Messung aufgenommen, in der wir die Schwingung von Pendel 1 mit Pendelmasse aufgezeichnet haben. So konnten wir über 100 Perioden beobachten, inwiefern sich die Phasenverschiebung verhält. Dabei haben wir das Pendel so wie zuvor ausgelenkt. Nach mehrfachen Verschieben der Pendelmasse, hatten wir eine Schwingfrequenz erreicht, sodass die Phasenverschiebung zwischen der Messreihe mit und ohne Pendelmasse konstant blieb. In der Abbildung 8 ist ein Ausschnitt aus Cassy-Lab zu sehen. Der schwarze Spannungsverlauf repräsentiert die Schwingung ohne Pendelmasse und der blaue Verlauf mit Pendelmasse. Zu sehen sind die ersten 20s der Aufnahme. Die Peaks der blauen Kurve sind leicht nach rechts verschoben. Im Labor haben wir während der Messung überprüft, ob diese Phasenverschiebung gleich blieb. In Abbildung 9 ist die gleiche Messreihe zu sehen, jedoch die letzten 20s der Messung. In diesem Zeitbereich ist erkennbar, dass die Phasenbeziehung der beiden Kurven sich nicht signifikant verändert hat. Mit dieser Messreihe haben wir analog zu der ersten Probemessung eine Periodendauer T zur Konsistenzprüfung berechnet. Hier ergab sich $T_p = 1.658\text{s}$. Für die dritte Messreihe für das Pendel 1 ohne Pendelmasse ergab sich respektiv eine Periodendauer $T_{st} = 1.655\text{s}$. Auch hier verzichten wir auf die Angabe eines Fehlers, da es nur zur Einschätzung der aufgenommenen Messwerte dient. Es ergab sich ein relativer Fehler von $\sigma_{rel} = \frac{T_p - T_{st}}{T_p} \approx 1.9 \cdot 10^{-3}$. Da die Phasenverschiebung über die gesamte Messdauer optisch konstant blieb und $\sigma_{rel} < 5\%$, haben wir mit der eingestellten Position der Pendelmasse weiter gearbeitet. Wie zuvor haben wir mit diesem Aufbau insgesamt drei Messreihen aufgenommen. Dabei haben wir weiterhin überprüft, dass die Phasenverschiebung zwischen der Schwingung mit und ohne Pendelmasse konstant blieb. Während der gesamten Messdauer wurde darauf geachtet, dass Fenster geschlossen waren und die Vibrationen durch etwaiges Gehen minimiert wurde, um Messfehler vorzubeugen.

Nach Aufnahme der Schwingungsmessungen haben wir die Längen der Pendelteile a, b und D vermessen. Die Längen a und D haben wir mit dem Messschieber vermessen, die Länge b mit einem Maßband.

Dabei haben wir jede Länge jeweils drei Mal vermessen, um einen genaueren Wert zu erhalten.

Um letztlich einen groben Wert für g zur Konsistenzprüfung zu erhalten, haben wir die Mittelwerte der Längen berechnet und daraus die Länge l_p . Für die Peri-

odendauer haben wir den aus der Probemessung bestimmten Wert verwendet. Mit $r_p = D/2$, $a = 3.010\text{cm}$, $b = 61.27\text{cm}$, $D = 7.987\text{cm}$ und $T = 1.658\text{s}$ ergibt sich für $g \approx 9.82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Hierbei haben wir auf eine Fehlerrechnung verzichtet, da dies nur eine grobe Konsistenzprüfung sein sollte.

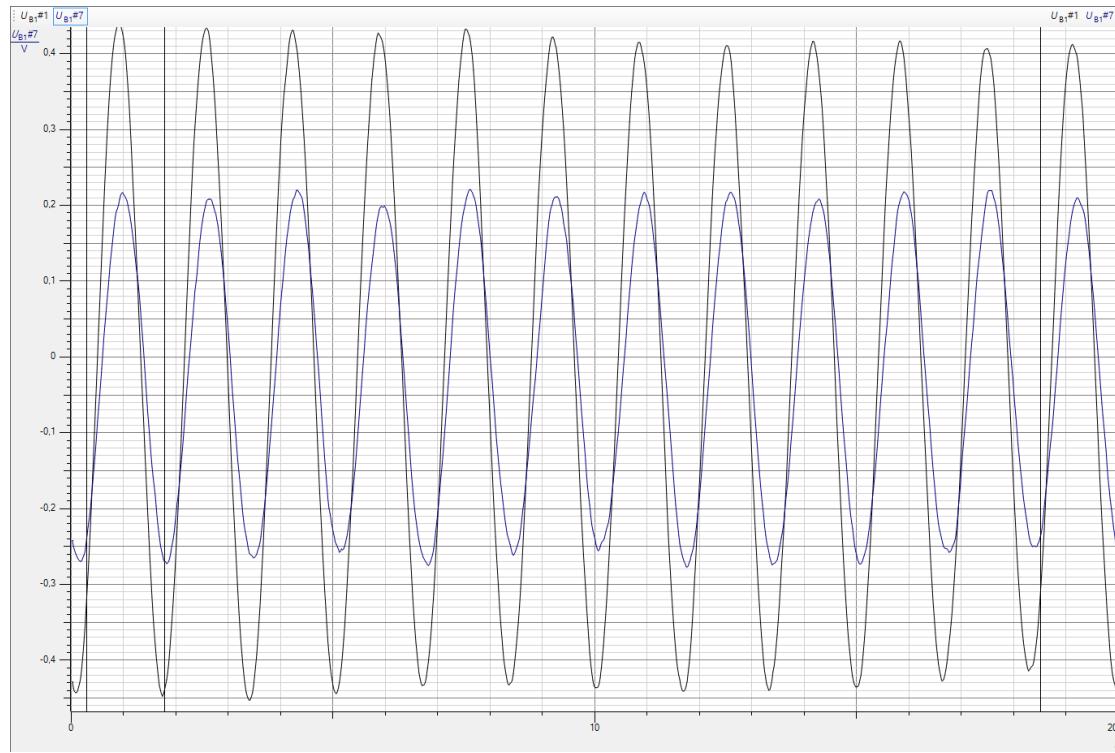


Abbildung 8: Analyse der Phasenverschiebung von Schwingung mit und ohne Pendelmasse im Labor mithilfe von Cassy-Lab, $t = [0\text{s}, 20\text{s}]$

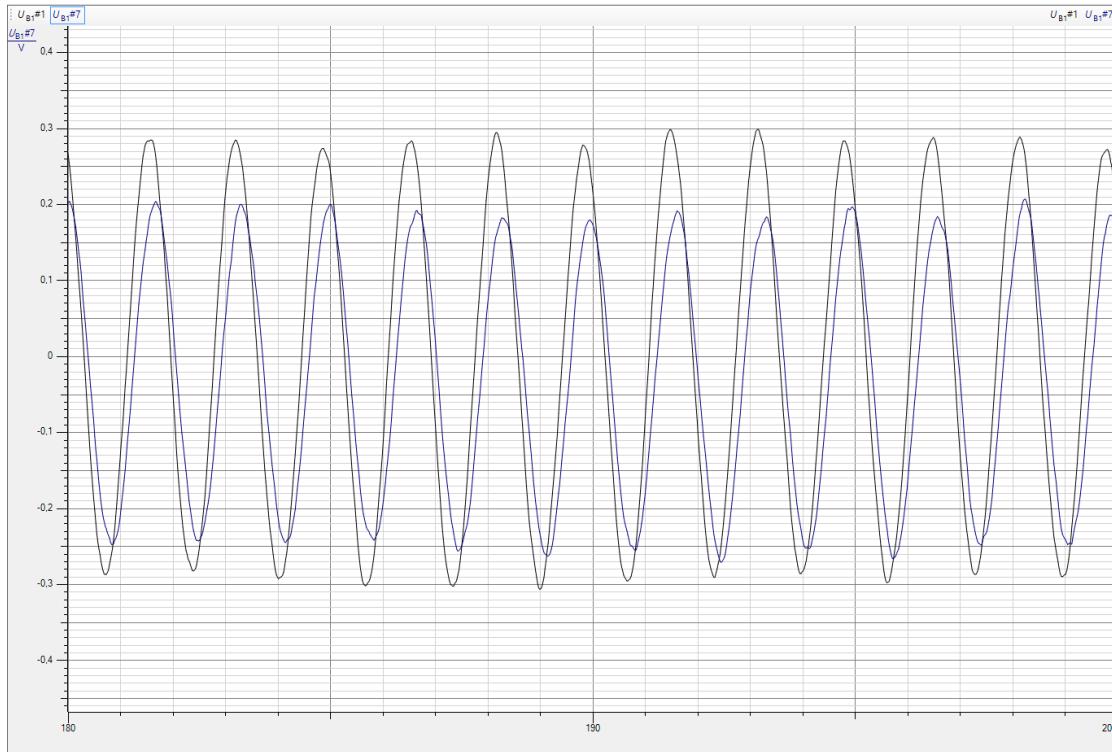


Abbildung 9: Analyse der Phasenverschiebung von Schwingung mit und ohne Pendelmasse im Labor mithilfe von Cassy-Lab, $t = [180s, 200s]$

Aufgabe 3 Rohdaten

Stellen Sie Ihre Rohdaten dar, tabellarisch für l_p und r_p , grafisch für den Verlauf der Schwingung der Stange ohne Pendelkörper sowie der Pendelschwingung (für mindestens drei Messreihen).

Die Längen l_p und r_p haben wir nicht direkt bestimmt, sondern durch Teilmessungen erreicht um eine höhere Genauigkeit zu erzielen. Die Längen a und D wurden mit einem Messschieber bestimmt. Der statistische Messfehler ergibt sich über die kleinste Skaleneinheit. Rein formal wäre $\sigma_{stat} = \frac{0.005cm}{\sqrt{12}}$. Eine solche Genauigkeit konnten wir jedoch nicht ablesen, weshalb wir für die folgenden Rechnungen einen statistischen Fehler von $\sigma_{stat} = 0.005cm$ annehmen. Einen systematischen Fehler konnten wir beim Messschieber ausschließen. Dazu haben wir den Messschieber maximal weit zusammengeschoben und eine Länge von exakt $0.000cm$ abgelesen. Die Länge b haben wir mit einem Maßband vermessen. Hier ergibt sich der statistische Fehler wieder über die kleinste Skaleneinheit. Hier haben wir wieder auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{12}}$ verzichtet, da wir während das Pendel in der Aufhängung war, nicht eine solche Genauigkeit erreichen konnten. Hier wird demnach für die statistische Ungenauigkeit $\sigma_{stat} = 0.1cm$ angenommen. Für die Messung wurde ein Maßband der Klasse II verwendet. Der Hersteller gibt hier einen systematischen Fehler von $\sigma_{syst} = 0.3 + 0.2 \cdot 2mm = 0.07cm$ an.

Mit diesem Angaben ergeben sich unsere gemessenen Werte für a , b und D samt

Unsicherheit zu:

Tabelle 2: Ergebnisse der Längenmessung für a

Messung	$a [cm]$	$\sigma_{stat} [cm]$	$\sigma_{syst} [cm]$
1	3.00	0.005	0
2	3.010	0.005	0
3	3.010	0.005	0

Tabelle 3: Ergebnisse der Längenmessung für b

Messung	$b [cm]$	$\sigma_{stat} [cm]$	$\sigma_{syst} [cm]$
1	61.3	0.1	0.07
2	61.3	0.1	0.07
3	61.2	0.1	0.07

Tabelle 4: Ergebnisse der Längenmessung für D

Messung	$D [cm]$	$\sigma_{stat} [cm]$	$\sigma_{syst} [cm]$
1	7.980	0.005	0
2	7.985	0.005	0
3	7.995	0.005	0

Die Abbildungen 11 bis 13 stellen die Rohdaten für die Pendelschwingung der Stange dar, Abbildungen 14 bis 16 für die Schwingung mit Pendelmasse. Die Rohdaten sollten formal in Form eines Scatterplots dargestellt werden. Um jedoch über den gesamten Messbereich eine gute Darstellung zu erreichen, haben wir lediglich die Verbindungslien der einzelnen Messpunkte dargestellt. In Abbildung 10 ist ein Zoom-In für die Schwingung der Stange (Messreihe 1) im Zeitintervall $\Delta t = 10\text{s}$ dargestellt. Hier sind exemplarisch die tatsächlichen Messpunkte erkennbar.

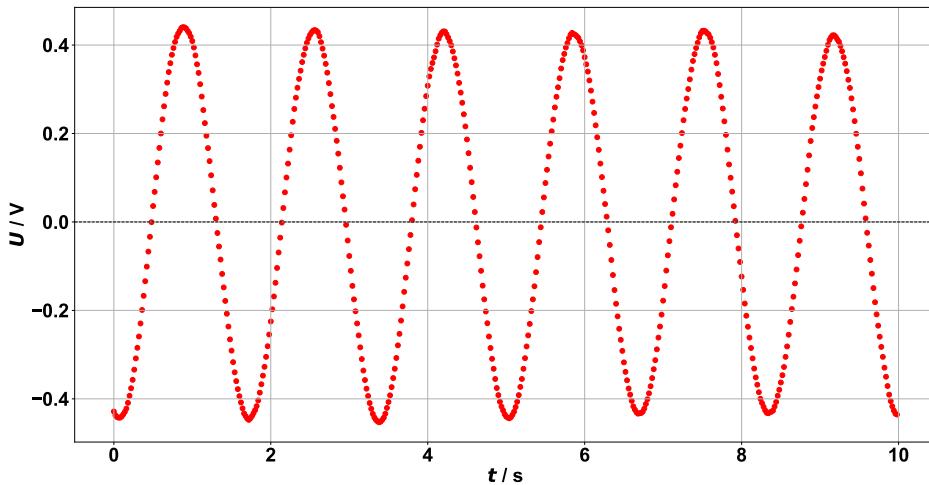


Abbildung 10: Zoom-In für die Schwingung ohne Pendelmasse, Messreihe 1

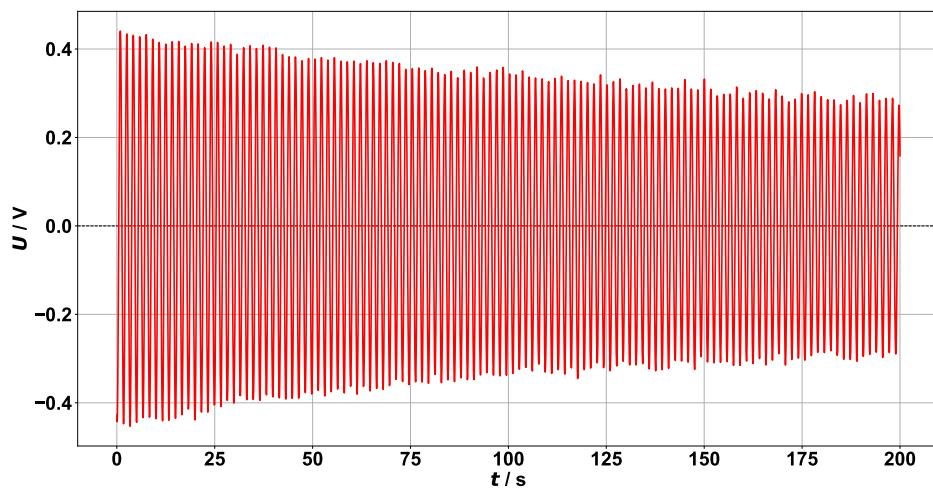


Abbildung 11: Schwingung ohne Pendelmasse, Messreihe 1

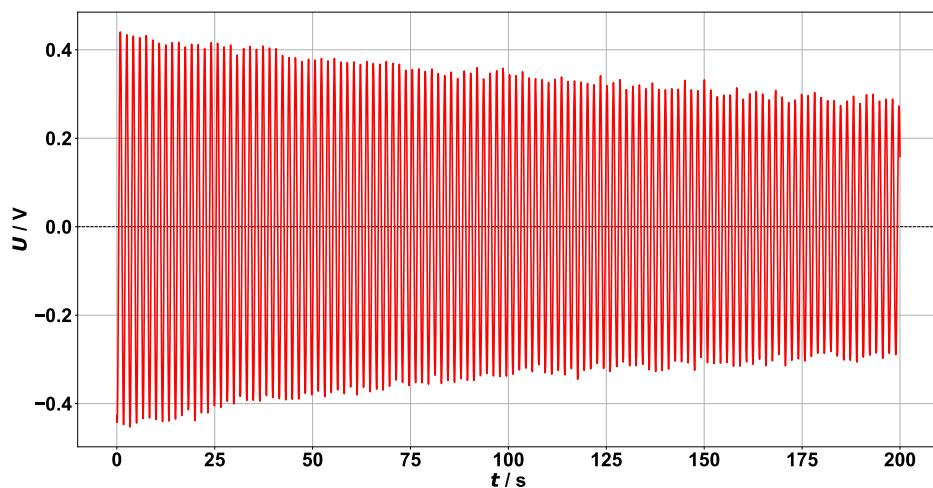


Abbildung 12: Schwingung ohne Pendelmasse, Messreihe 2

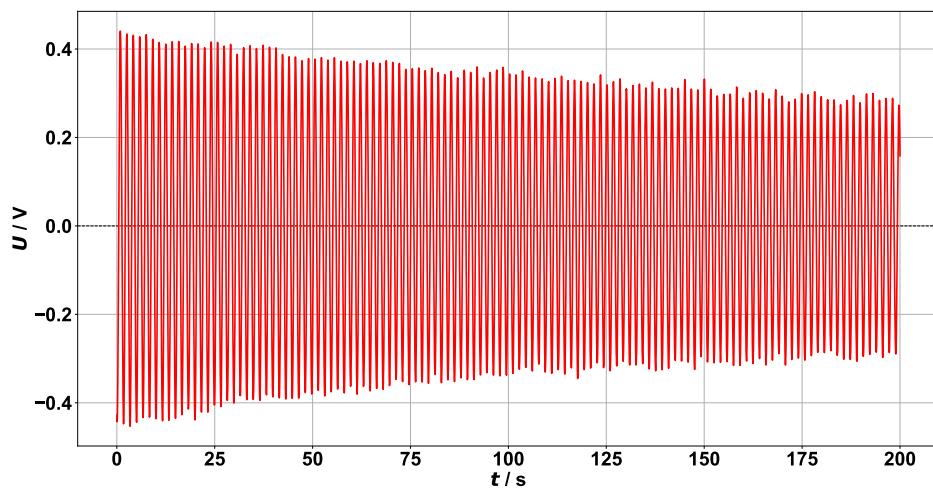


Abbildung 13: Schwingung ohne Pendelmasse, Messreihe 3

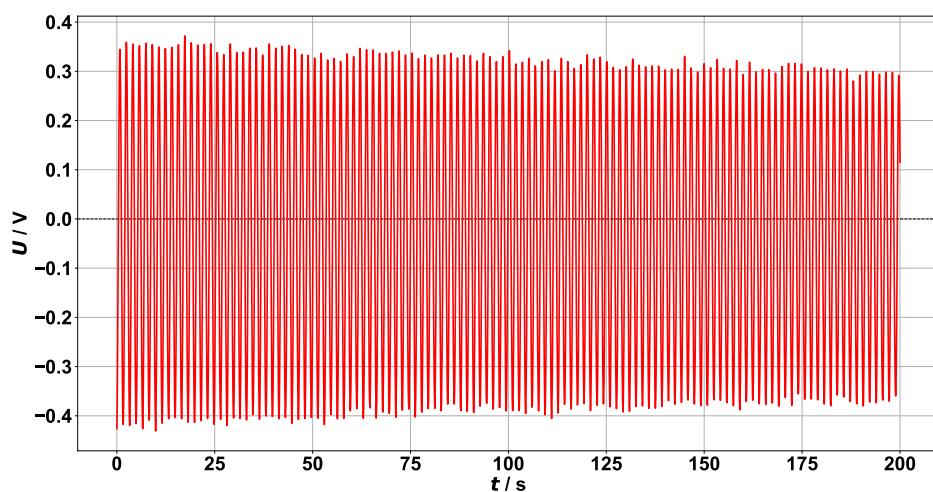


Abbildung 14: Schwingung mit Pendelmasse, Messreihe 1

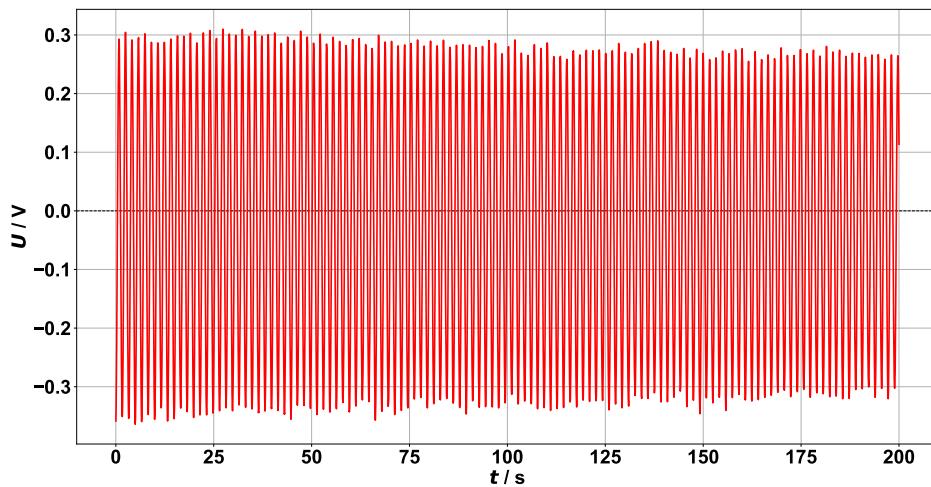


Abbildung 15: Schwingung mit Pendelmasse, Messreihe 2

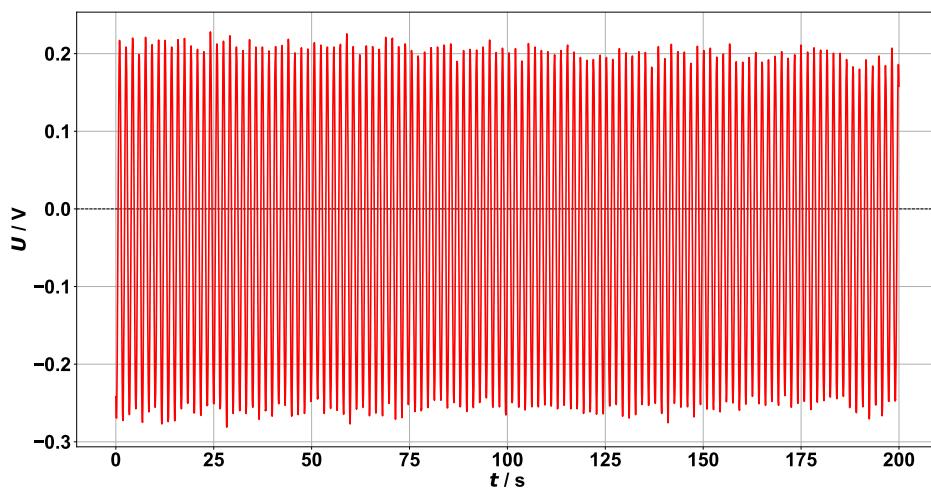


Abbildung 16: Schwingung mit Pendelmasse, Messreihe 3

Aufgabe 4 Auswertung

Bestimmen Sie für alle Messreihen die Periodendauer und ihre Messunsicherheit, indem Sie eine geeignete lineare Regression durchführen. Demonstrieren Sie, dass Sie das Trägheitsmoment der Stange kompensiert haben. Tabellieren Sie die Zwischenergebnisse der relevanten Größen samt ihrer Messunsicherheiten. Berechnen Sie die Erdbeschleunigung. Führen Sie eine Fehlerrechnung zur Bestimmung der Messunsicherheit durch. Geben Sie bei Ihrer Fehlerrechnung die Größe der Einzelbeiträge an, die zu dem Gesamtfehler führen. Diskutieren Sie, welcher Fehler den Gesamtfehler

dominiert. Vergleichen Sie Ihr Endergebnis mit dem relevanten Literaturwert.

Für die Bestimmung der Periodendauern T_i der einzelnen Messreihen untersuchen wir die Lage der Maxima in den aufgenommenen Daten. Dazu bestimmen wir zuerst grob die Zeitpunkte jedes Maximums durch einfaches ablesen der höchsten Spannungswerte. Danach selektieren wir ungefähr jedes zehnte Maximum, wobei wir das 'nullte' Maximum auslassen, um eventuelle grobe Störungen, die durch die Anregung des Pendels auftreten könnten, zu vermeiden. Da wir unsere globale Messzeit so gewählt haben, dass wir ungefähr 120 Perioden aufzeichnen, erhalten wir so pro Messung 12 Maxima mit denen wir eine lineare Regression durchführen.

Um die Zeitpunkte der Maxima und deren Fehler möglichst genau bestimmen zu können verwenden wir die Funktion zur Hochpunktbestimmung über die Schwerpunktsmethode, die bereits in der Praktikumsbibliothek implementiert ist. Wir wählen mit einer Amplitudenschwelle von $0,15V$ um jeden Hochpunkt ein symmetrisches Intervall von Messpunkten, und bestimmen mit diesen Werten den Maximumsschwerpunkt. Um den Fehler auf den ermittelten Zeitpunkt abschätzen zu können, führen wir die Schwerpunktsbestimmung weitere vier mal durch, wobei wir bei jeder Durchführung die verwendeten Messwerte nun leicht asymmetrisch um den Hochpunkt wählen, d.h wir berücksichtigen pro Seite jeweils einmal einen Messpunkt mehr bzw. einen Messpunkt weniger für die Hochpunktsbestimmung. In Abbildung 17 ist die Methode beispielhaft an einem Maximum gezeigt.

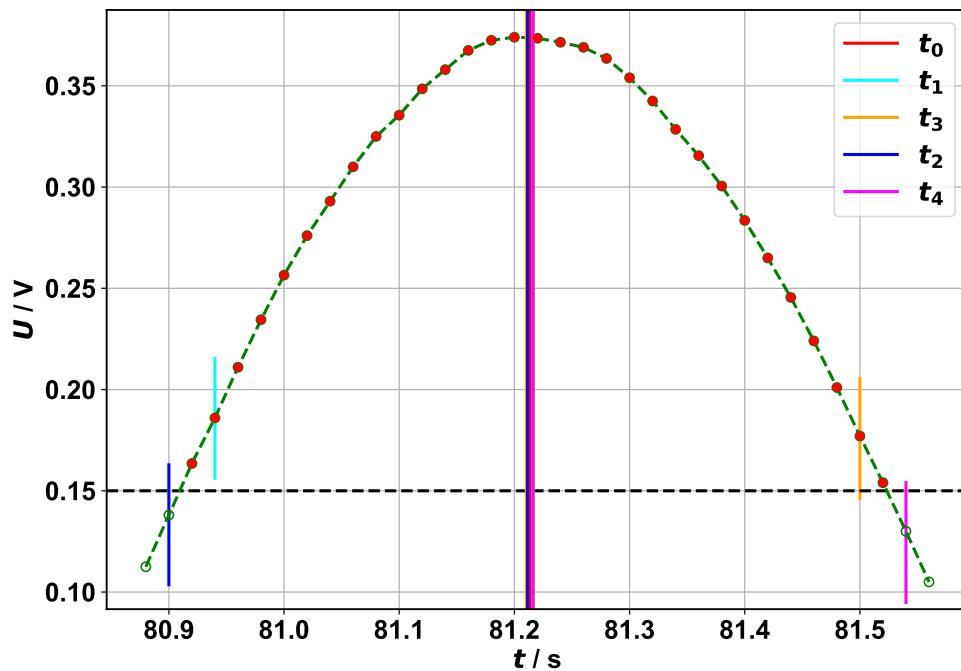


Abbildung 17: Bestimmung der Schwankungen des augerechneten Maximums mit der Verschiebemethode

Alle rot hinterlegten Datenpunkte liegen oberhalb der angesprochenen und in schwarz eingezeichneten Amplitudenschwelle von $0,15V$. Aus diesen Messpunkten wird der Zeitpunkt t_0 des Maximums bestimmt, der in der Graphik als rote, horizontale Markierung dargestellt ist. Die farbig eingezeichneten Schranken stellen nun die Variation der verwendeten Datenpunkte dar und sind wie Folgt zu verstehen: die gelbe Schranke befindet sich einen Messpunkt weiter links als der Rand der Messpunkte, die zur Bestimmung von t_0 verwendet wurden. Für diese Variation des Intervalls wurde also auf der rechten Seite vom Maximum ein Punkt weniger berücksichtigt, als für die Bestimmung von t_0 . Der sich aus dieser Hochpunktsbestimmung ergebende, leicht nach links verschobene, Zeitpunkt t'_0 , der in diesem Fall als t_3 indiziert ist, ist in dem selben gelb als horizontale Markierung in Abbildung 17 eingezeichnet. Die anderen Schranken sind analog zu interpretieren. Da die Abweichung der Zeitpunkte t'_0 gegenüber t_0 relativ klein ist und sich nur schwer erkennen lässt ist in Abbildung 18 die selbe Graphik gezeigt, nur dieses Mal vergrößert.

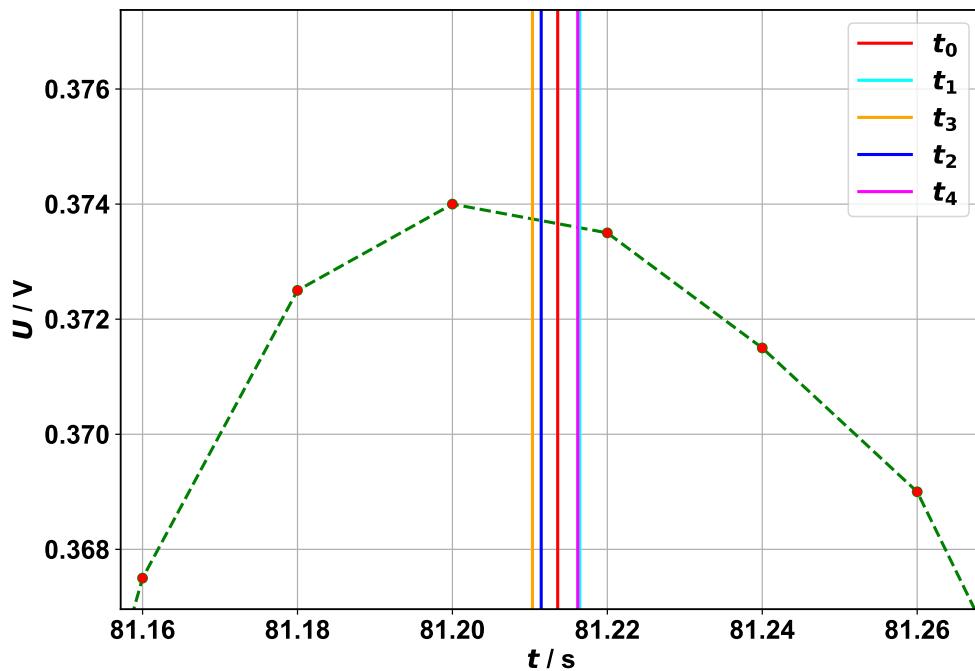


Abbildung 18: Bestimmung der Schwankungen des augerechneten Maximums mit der Verschiebemethode

Dieses Verfahren wenden wir an allen ausgesuchten Maxima in jeder Messreihe an. Um nun die Perioden T_i ermitteln zu können, tragen wir die bestimmten Zeitpunkte gegen ihre entsprechende Nummer in ein Diagramm auf und führen eine lineare Anpassung an diese Punkte durch. Da sich die Nummer des Maximums einfach durch abzählen ergibt, haben die Punkte in x -Richtung keine Unsicherheit und wir müssen nur die Unsicherheit bei der Bestimmung der Zeitpunkte berücksichtigen. In der Theorie liegt das n -te Maximum der i -ten Messreihe bei $t_n = T_i \cdot n + t_{0,i}$ wobei T_i die Periode der Schwingung und $t_{0,i}$ der Zeitpunkt des nullten Maximums der i -ten Messreihe ist. Für eine aussagekräftigere lineare Regression führen wir eine konstante Verschiebung in der Zeit der Messpunkte durch, s.d. wir für alle Messreihen in der Theorie $t_{0,i} = 0$ erwarten. Die Perioden T_i sind durch die Steigung der Regressionsgeraden gegeben. Die linearen Regressionen sind in Abbildung 20-25 dargestellt und liefern folgende Ergebnisse:

Tabelle 5: Ergebnisse der linearen Regression

Pendelkörper	Messreihe	Periode T_i/s	$t_{0,i}/s$
ohne	1	1.657173 ± 0.000032	0.0137 ± 0.0021
	2	1.657205 ± 0.000036	-0.0097 ± 0.0023
	3	1.657141 ± 0.000034	0.0013 ± 0.0022
mit	4	1.657702 ± 0.000037	-0.0009 ± 0.0025
	5	1.657476 ± 0.000041	0.0064 ± 0.0029
	6	1.657371 ± 0.000062	0.0079 ± 0.0044

Da die $t_{0,i}$ erwartungsgemäß nur im Millisekundenbereich von 0 verschieden sind können wir diese im Folgenden vernachlässigen. Auch die resultierenden Periodendauern folgen der Erwartung mit einem hinreichend kleinen Fehler, so dass wir die maximale Auslenkung von $\varphi \leq 5^\circ$ nicht überschritten haben und eine Kleinwinkel Näherung gerechtfertigt ist (wie wir schon beim Versuchsaufbau auf die maximale Auslenkung geachtet haben ist näher in Aufgabe 2 erläutert). Die lineare Anpassung minimiert die Summe des quadratischen Abstandes der einzelnen Messpunkte, geteilt durch den jeweiligen Fehler

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(t_j - (T \cdot n_j + t_0))^2}{\sigma_{t_j}^2}$$

wobei die Güte der Anpassung von der Anzahl der Freiheitsgrade

$$n_{dof} = \text{Anzahl Messpunkte} - \text{Anzahl Parameter der Anpassung}$$

abhängt. Da wir eine lineare Anpassung an die Daten vornehmen ist die Anzahl der Parameter in der Anpassung 2 und wir können das χ^2/n_{dof} für die einzelnen Regressionsgeraden angeben:

Pendelkörper	Messreihe	χ^2/n_{dof}
ohne	1	$9.59/10 = 0.959$
	2	$19.67/10 = 1.967$
	3	$8.94/10 = 0.894$
mit	4	$11.38/10 = 1.138$
	5	$18.35/10 = 1.835$
	6	$17.36/10 = 1.736$

Auffällig ist die Fluktuation der Güte der Anpassung. Das liegt daran, dass die Bestimmung der Zeitpunkte der Maxima, und insbesondere der Fehler, durch die Verschiebemethode, von dem Hintergrundrauschen der Spannungsmessung beeinflusst wird. Bei der Darstellung der Rohdaten in Abbildungen 11 bis 16 fällt bereits auf, dass die Höhe der Spannungsmaxima variiert. In der theoretischen Erwartung müsste die Amplitude der Schwingung durch die leichte Dämpfung exponentiell abfallen. Dieser globale Abfall lässt sich auch beobachten, jedoch schwankt die Amplitude lokal stark um diese exponentielle Einhüllende. In Abbildung 19 sind die Werte aller Spannungsmaxima exemplarisch für

die erste Messung ohne Pendelkörper dargestellt.

In blau eingezeichnet ist eine grob an die Daten angepasste Exponentialfunktion, um die Fluktuationen besser verdeutlichen zu können. Im unteren Teil der Grafik ist der Abstand der Maxima von dieser Exponentialfunktion zu sehen. Deutlich ist, dass die Schwankungen über die gesamte Messzeit von 200 Sekunden relativ konstant bleiben. Es handelt sich also nicht um Störungen durch die Anregung (diese müssten durch die Dämpfung mit der Zeit abklingen), sondern um ein nicht zu verhindern Hintergrundrauschen bei der Winkelmesung mit der Hallsonde.

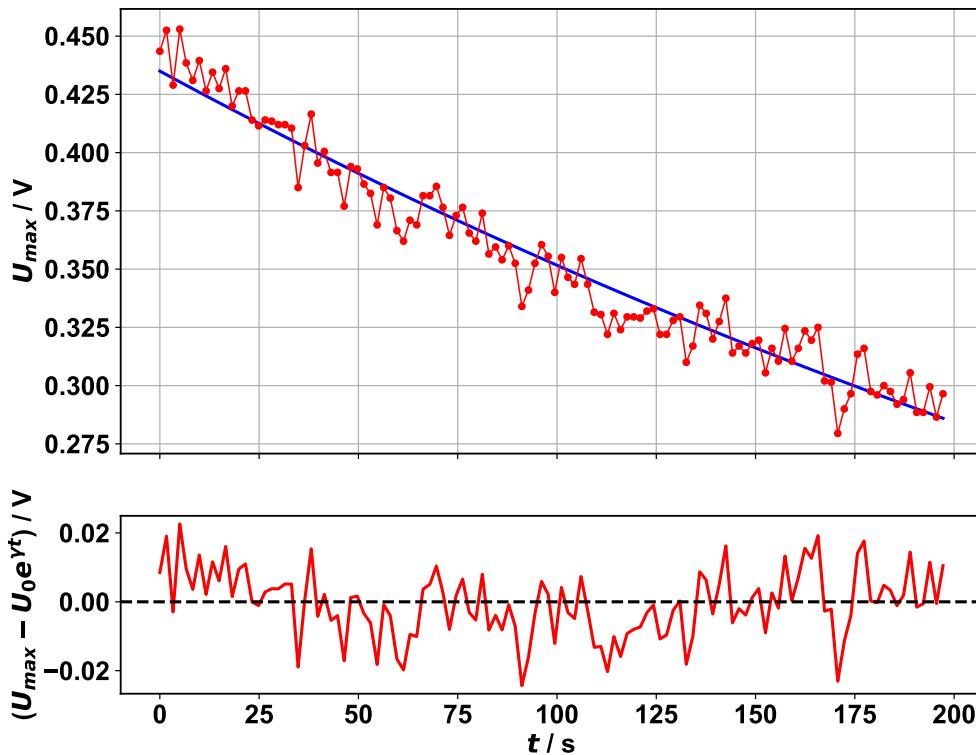


Abbildung 19: 'Rauschen' der Spannungsmaxima

Diese Schwankungen der Amplitude wirken sich nun auf die Fehlerbestimmung der Zeitpunkte der Maxima aus. Bei der Maximumsbestimmung mit der Schwerpunktsmethode wird jeder Datenpunkt mit seiner Amplitude quadratisch gewichtet, sodass der Zeitpunkt t_0 des Hochpunktes gegeben ist durch

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^N t_i \cdot A_i^2}{\sum_{i=1}^N A_i^2}$$

Durch die lokale Fluktuation der maximalen Amplitude in den Spannungspeaks der Messungen hängt der durch die Verschiebemethode bestimmte Fehler auf die Hochpunkte von dem gewählten Maximum ab. Da die Auswirkung von den Datenpunkten an den Rändern der Maxima größer wird, wenn die maximalen Amplitudenwerte des Spannungsverlaufes kleiner sind, wird der auf den Peak bestimmte Fehler mit kleinerer maximalen Amplitude größer. Dieser Effekt lässt sich auch daran beobachten, dass bei den Messungen, bei denen die Dämpfung stärker zum Vorschein kommt (z.B. Messreihe 1, Abbildung 11) der Fehler auf die bestimmten Maxima mit steigender Anzahl größer wird, siehe Residuenplot der linearen Regression in Abbildung 20. Die bestimmten Fehler auf die Maxima und somit direkt die Güte der linearen Anpassungen, hängen also teilweise von der lokalen Wahl der Maxima ab.

In den Residuenplots lassen sich weitere leichte Systematiken erkennen. So verfolgen die Datenpunkte teilweise mit dem Auge nachvollziehbare Trends. Jedoch sind diese von dem erwarteten statistischen Rauschen überlagert, sodass diese kleinen Abweichungen ignoriert werden können.

Trotzdem ist es nicht zu erwarten, dass sich durch das Rauschen verursachte systematische Verschiebungen der Maxima stark auf die bestimmten Perioden T_i auswirken. Die Verschiebungen sind klein gegenüber dem zeitlichen Abstand von zehn Maxima und mitteln sich zusätzlich über die Anzahl der verwendeten Maxima heraus. Dennoch liegen die für die Schwingung mit Pendelkörper bestimmten Perioden T_i in Tabelle 5 mehrere Standardabweichungen auseinander, sodass ein gewichtetes Mittel nicht sinnvoll ist. Für die Schwingung mit Pendelkörper bestimmen wir also das ungewichtete Mittel und geben den Fehler auf den Mittelwert an. Die Periodendauern der Schwingung ohne Pendelkörper liegen jedoch alle innerhalb von maximal zwei Standardabweichung, sodass es gerechtfertigt ist diese gewichtet zu mitteln. Für die final bestimmten Perioden mit und ohne Pendelkörper erhalten wir somit:

Pendelkörper	Periodendauer
ohne	$1.657172 \pm 0.000019 \text{ s}$
mit	$1.657516 \pm 0.000098 \text{ s}$

Wobei der Fehler auf die Periodendauer mit Pendelkörper um einen Faktor 5 größer ist, weil wir diese aufgrund der unverträglichen Messergebnisse der linearen Regression nicht genauer bestimmen können. Trotzdem ist die relative Abweichung der beiden Periodendauern mit

$$\frac{T_{\text{mit}} - T_{\text{ohne}}}{T_{\text{ohne}}} = 0.00021$$

kleiner als 1 Promille, sodass die Abweichung nicht mehr im signifikanten Bereich liegt. Somit haben wir das Trägheitsmoment der Stange ausreichend genau kompensiert und können im Folgenden das Pendel mit Pendelkörper als Zylinder mit masseloser Aufhängung betrachten.

Für das finale Resultat müssen wir noch die Längen Messungen aus Tabellen 2

- 4 auswerten. Um die Erdbeschleunigung bestimmen zu können brauchen wir den Radius r_p des Pendelkörpers und den Abstand l_p des Schwerpunktes des Pendelkörpers von dem Drehpunkt. Dafür bilden wir aus den Längenmessungen das gewichtete Mittel mit den statistischen Fehlern und erhalten als finale Längenwerte:

Tabelle 6: Ergebnisse der Längenmessungen samt Fehler

Größe	Länge [cm]	σ_{stat} [cm]	σ_{syst} [cm]	σ_{total} [cm]
a	3.007	0.003	—	0.003
b	61.267	0.058	0.07	0.091
D	7.987	0.003	—	0.003

Wobei der totale Fehler sich aus $\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{stat}^2 + \sigma_{syst}^2}$ ergibt. Somit erhalten wir die benötigten Größen r_p und l_p aus den Längenmessungen mit

$$r_p = D/2 \text{ und } l_p = a + b + D/2$$

mit durch Fehlerfortpflanzung bestimmten Unsicherheiten

$$\sigma_{r_p} = \frac{\sigma_D}{2} \text{ und } \sigma_{l_p} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma_D^2}$$

Wir können also unsere endgültigen Messwerte, die wir für die Bestimmung von g brauchen, angeben:

Periodendauer T	$1.657516 \pm 0.000098 \text{ s}$
Radius Pendelkörper r_p	$3.9933 \pm 0.0014 \text{ cm}$
Pendellänge l_p	$68.267 \pm 0.091 \text{ cm}$

Um den auf g fortgepflanzten Fehler zu bestimmen vernachlässigen wir den Term $\frac{r_p^2}{l_p^2} \approx 0.003$ in der Berechnung von g , s.d. $g \approx \frac{4\pi^2}{T^2} l_p$ und wir die relativen Fehler, mit den entsprechenden Vorfaktoren der Ableitung, quadratisch addieren können:

$$\frac{\sigma_g}{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{l_p}}{\langle l_p \rangle}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_T}{\langle T \rangle}\right)^2}$$

Für die ermittelte Erdbeschleunigung erhalten wir:

$$g = 9.826 \pm 0.013 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Genauigkeit auf den Wert von g ist maßgeblich durch die ungenaue Messung der Pendellänge mit dem Maßband begrenzt. Die einzelnen Beiträge der relativen Fehler betragen

$$\frac{\sigma_T}{\langle T \rangle} \approx 0.0006$$

$$\frac{\sigma_{l_p}}{\langle l_p \rangle} \approx 0.0013$$

Den Fehler auf r_p vernachlässigen wir, wie bereits diskutiert, komplett. Da der relative Fehler von T zusätzlich mit einem Faktor 2 gewichtet wird tragen die Unsicherheiten von der Periodendauer T und der Länge l_p etwa gleich viel zu dem Gesamtfehler auf g bei. Für eine genauere Messung sollte man sich also darauf konzentrieren die Periode des Pendels genauer zu bestimmen. Der Fehler auf die Pendellänge ist, wie man an Tabelle 6 ablesen kann, bereits völlig durch die Ungenauigkeit des Maßbandes dominiert und lässt sich nur schwer verkleinern, wenn diese Messmethode beibehalten wird.

Das Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG) liefert für die Koordinaten $50^{\circ}46'52''N$, $06^{\circ}02'58''S$ und einer Höhe von $220m$ über Normalnull einen Wert für g von $g = 9.811 \frac{m}{s^2}$. Die Koordinaten sowie die Höhenmeter Angabe lieferte Google Earth. Das BKG gibt für den Wert von g einen Fehler von $\sigma_g = 2 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2}$ an. Da der Fehler nicht mehr in den signifikanten Stellen liegt, kann dieser vernachlässigt werden.

Wir erhalten eine relative Abweichung von $(g_{exp} - g_{BKG})/g_{exp} = 0.0015$ bzw. eine Abweichung von $(g_{exp} - g_{BKG})/\sigma_{g_{exp}} = 1.15$ Standardabweichungen, was darauf schließen lässt, dass wir Systematiken in unserer Messung nicht erfasst haben.

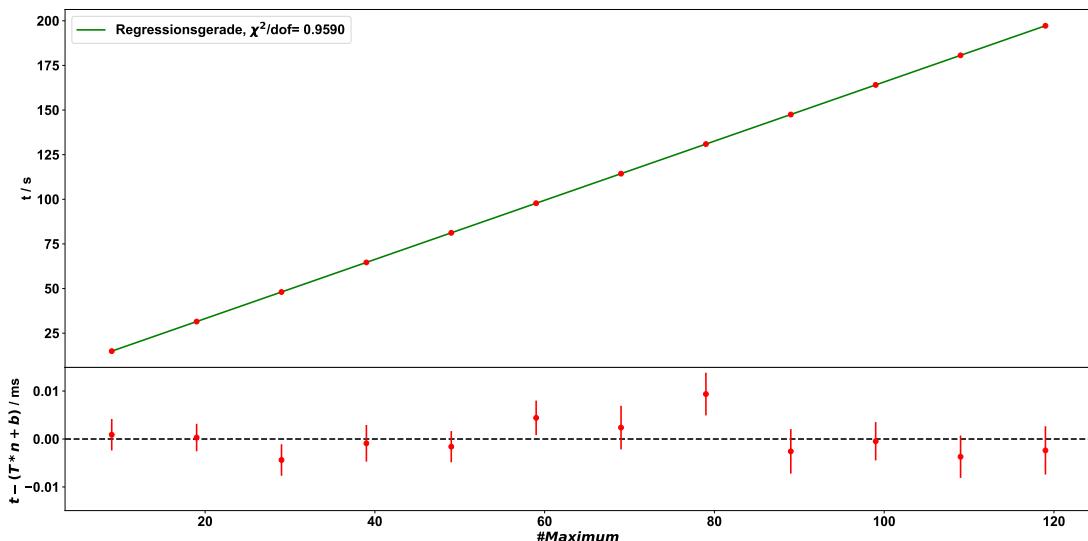


Abbildung 20: Plot der linearen Regression, Messreihe 1

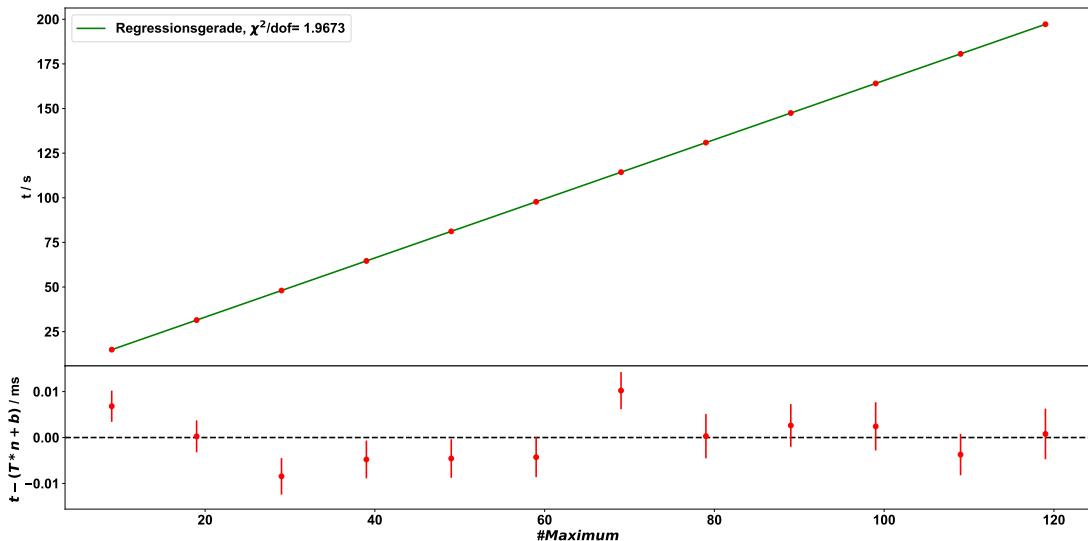


Abbildung 21: Plot der linearen Regression, Messreihe 2

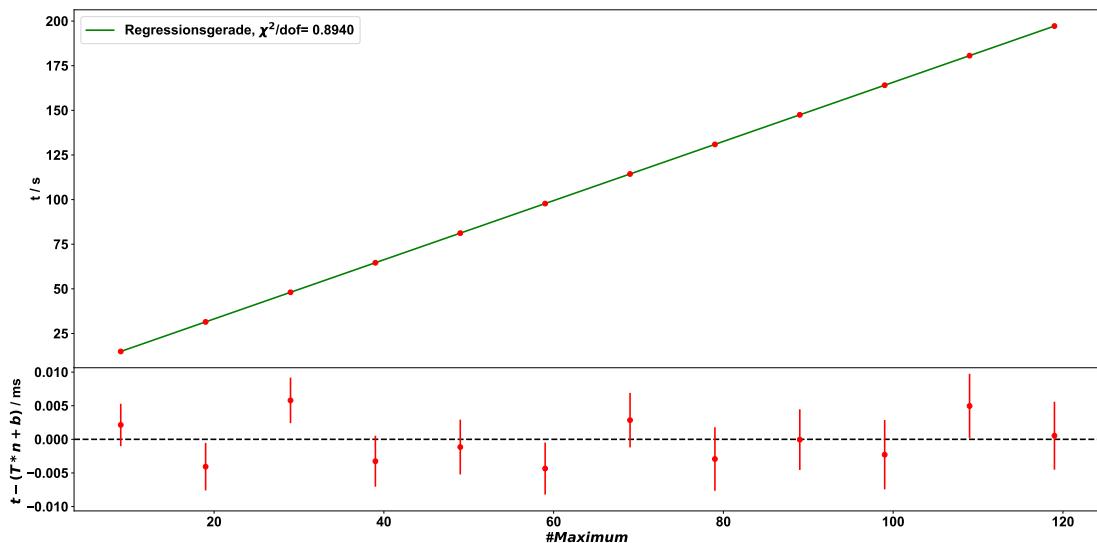


Abbildung 22: Plot der linearen Regression, Messreihe 3

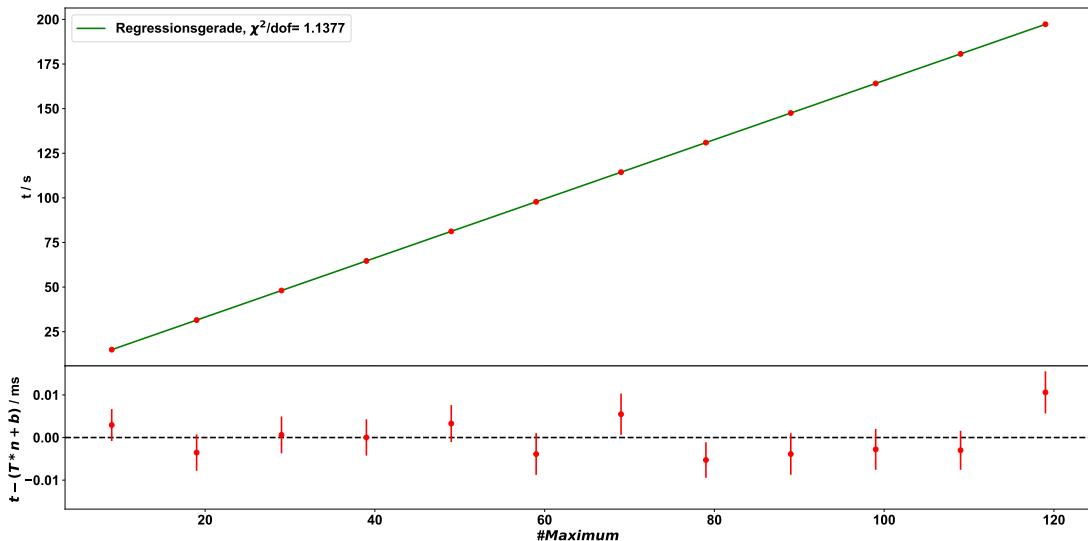


Abbildung 23: Plot der linearen Regression, Messreihe 4

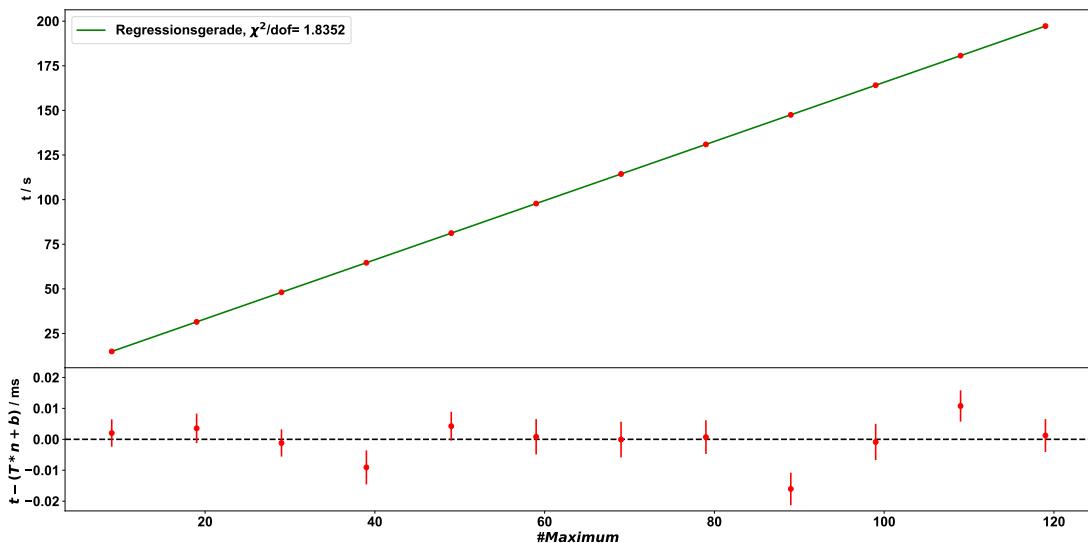


Abbildung 24: Plot der linearen Regression, Messreihe 5

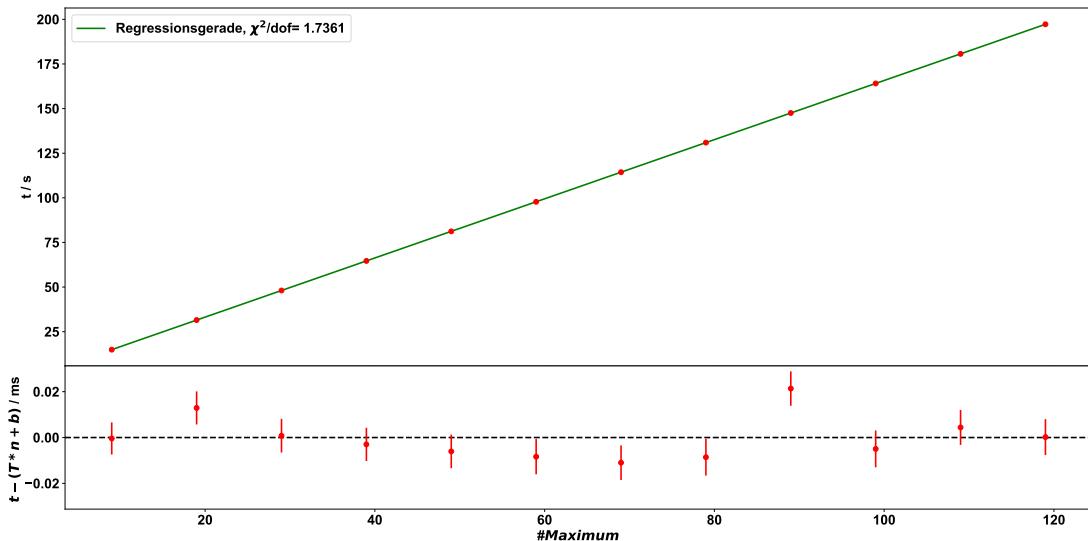


Abbildung 25: Plot der linearen Regression, Messreihe 6