Fehlerrechnung im physikalischen Praktikum - ein Überblick

Bei jeder physikalischen Messung sind systematische und statistische Fehler unvermeidbar. Es kann bei der Bestimmung einer Messgröße *x* nie mit Sicherheit gesagt werden, dass der wahre Wert tatsächlich ermittelt wurde. Das Ziel ist daher einen Bereich anzugeben, in welchem der wahre Wert *x* mit großer Wahrscheinlichkeit liegt.

Statistische Fehler

Wenn sich bei wiederholter Messung einer Größe (z.B. einer Länge, einer Zeit, einer Temperatur, …) unterschiedliche Messwerte $x_1, x_2, \dots, x_n$ ergeben, so wird der Mittelwert $\bar{x}$ durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

definiert und gibt mit steigender Anzahl an Durchführungen n eine gute Schätzung für den wahren Wert der Messgröße *x* an. Da dieser wahre Wert x nicht bekannt ist, wird ein Bereich angegeben, in welchem der wahre Wert *x* mit großer Wahrscheinlichkeit liegt. Das heißt es wird ein Abweichungsmaß $\sigma_{\bar{x}}$ gesucht, für welches der wahre Wert *x* mit großer Wahrscheinlichkeit im Intervall $I = [\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}\,,\ \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}]$ liegt.

Die *empirische Standardabweichung einer Einzelmessung* σ_x lässt sich durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

berechnen und bezieht sich auf die Streuung der einzelnen Messwerte um ihren Mittelwert. Es ist jedoch wichtiger eine Aussage darüber machen zu können, wie nah der Mittelwert $\bar{x}$ voraussichtlich am unbekannten wahren Wert *x* liegt. Ermittelt man in vielen Messreihen jeweils den Mittelwert, so ergibt sich wiederum eine Häufigkeitsverteilung mit einer Standardabweichung. Diese Standardabweichung wird als *Standardabweichung des Mittelwertes* $\sigma_{\bar{x}}$ bezeichnet und lässt sich mit

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

berechnen. In der Praxis dient diese Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ als gängiges Maß zur Berechnung der Abweichung des Mittelwertes $\bar{x}$ vom wahren Wert *x.*

Das Ergebnis wird dann folgendermaßen notiert.

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}.$$

Für sehr große n geben die Sigma-Regeln die Wahrscheinlichkeit an, dass der wahre Wert *x* in einem bestimmten Intervall liegt.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert *x* im Intervall $I = [\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}]$ liegt, beträgt ca. 68%.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass *x* im Intervall $I = [\bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}}]$ liegt, beträgt ca. 95%.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass *x* im Intervall $I = [\bar{x} - 3\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x} + 3\sigma_{\bar{x}}]$ liegt, beträgt ca. 99,7%.

Systematische Fehler

Systematische Fehler beeinflussen das Messergebnis stets im gleichen Sinn und ändern sich mit einem Wechsel der Versuchseinrichtung. Dazu gerechnet werden:

- Ungenauigkeit beim Ablesen von Skalen
- Fehlanzeigen wegen fehlerbehafteter Eichung (Kalibrierung)
- Alterung der Messgeräte
- Ungenauigkeit infolge vorangegangener Überlastung u.ä.
- Unvollkommenheit des Messgegenstandes (Inhomogenität, Mangel an Reinheit)
- Veränderung durch die Messung (Deformation durch Messgerät o.ä.)
- äußere Einflüsse (z.B. Luftauftrieb, äußere Störfelder)
- Verlassen des Gültigkeitsbereichs physikalischer Gesetze (z.B. Elastizitätsgrenze)

Fehlerfortpflanzung

Häufig muss ein Endergebnis durch eine Rechnung ermittelt werden, in die fehlerbehaftete Größen eingehen. Im Folgenden sei daher $f(x_1, x_2, x_3)$ eine physikalische Größe, die von dem Messgrößen x_1, x_2, x_3 abhängt. $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ seien die systematischen Fehler, während $\sigma_{\bar{x}_1}, \sigma_{\bar{x}_2}, \sigma_{\bar{x}_3}$ die statistischen Fehler dieser Größen darstellen. Falls sowohl systematische als auch statistische Fehler existieren, so werden diese für die Fehlerfortpflanzung getrennt betrachtet und am Ende aufsummiert. Das Ziel ist nun den systematischen Fehler Δf, sowie den statistischen Fehler $\sigma_{\bar{f}}$ der Größe f zu bestimmen.

Lineare Fehlerfortpflanzung / Größtfehlerabschätzung

Wird eine Größe nur einmal gemessen, so wird die (häufig geschätzte) maximale Abweichung des Messwertes vom wahren Wert als Größtfehler Δx bezeichnet (→ s. Beispiel 1). Die lineare Fehlerfort-pflanzung wird benutzt, wenn die eingehenden Einzelfehler $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ durch eine solche Größtfehlerabschätzung ermittelt wurden. Als Fehleranteile gehen hier die einzelnen Messunsicherheiten der Einzelgrößen ein. Der systematische Fehler für die Größe *f* ergibt sich dann durch

$$\Delta f \;=\; \left|\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \Delta x_3\right| + \ldots \quad .$$

Dabei steht $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ für die partielle Ableitung der Größe f nach der Variablen x_1. Alle anderen Variablen werden für diese partielle Ableitung als Konstanten betrachtet.

Angabe des Ergebnisses

Die ermittelte Größe $\bar{f}$ wird nun gemeinsam mit ihrem Fehler Δf angegeben

$$f = \bar{f} \pm \Delta f.$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung basiert auf rein statistischen Überlegungen. Sie wird daher zur Verarbeitung statistisch ermittelter Fehler genutzt (→ s. Beispiel 3). Im Gegensatz zur Linearen Fehlerfortpflanzung wird davon ausgegangen, dass sich die statistisch festgestellten Messwertstreuungen bei ihrer Weiterverarbeitung in bestimmter Weise kompensieren können. Die eingehenden statistischen Fehler $\sigma_{\bar{x}_1}, \sigma_{\bar{x}_2}, \sigma_{\bar{x}_3}$ entsprechen gerade den empirischen Standardabweichungen der Mittelwerte. Der statistische Fehler für die Größe f ergibt sich dann zu:

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \sigma_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \sigma_{\bar{x}_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \sigma_{\bar{x}_3}\right)^2 + \ldots} \; .$$

Angabe des Ergebnisses

Die ermittelte Größe $\bar{f}$ wird nun gemeinsam mit ihrem Fehler $\sigma_{\bar{f}}$ angegeben

$$f = \bar{f} \pm \sigma_{\bar{f}}.$$

Relativer Fehler

Zusätzlich zur Angabe von absoluten Fehlern $\sigma_{\bar{f}}$ und Δf wird häufig der relative Fehler ω bezogen auf den ermittelten Wert einer Messung $\bar{f}$ angegeben. Der relative Fehler ω ergibt sich als Quotient aus den absoluten Fehlern und dem ermittelten Wert

$$\omega = \left|\frac{\sigma_{\bar{f}} + \Delta f}{\bar{f}}\right|$$

und wird in der Regel in % angegeben.

Verschiedene Messunsicherheiten der Messwerte einer Messreihe

Wie geht man mit Messreihen um, bei denen jeder einzelne Messwert unterschiedliche Messunsicherheiten/Abweichungen aufweist? Wenn also beispielsweise die Standardabweichung jedes Messwerts unterschiedlich ist (→ s. Beispiel 4)? Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten, wir wollen hier nur eine aufzeigen, die im Praktikum verwendet werden kann: Das Fitten mit Gewichtung.

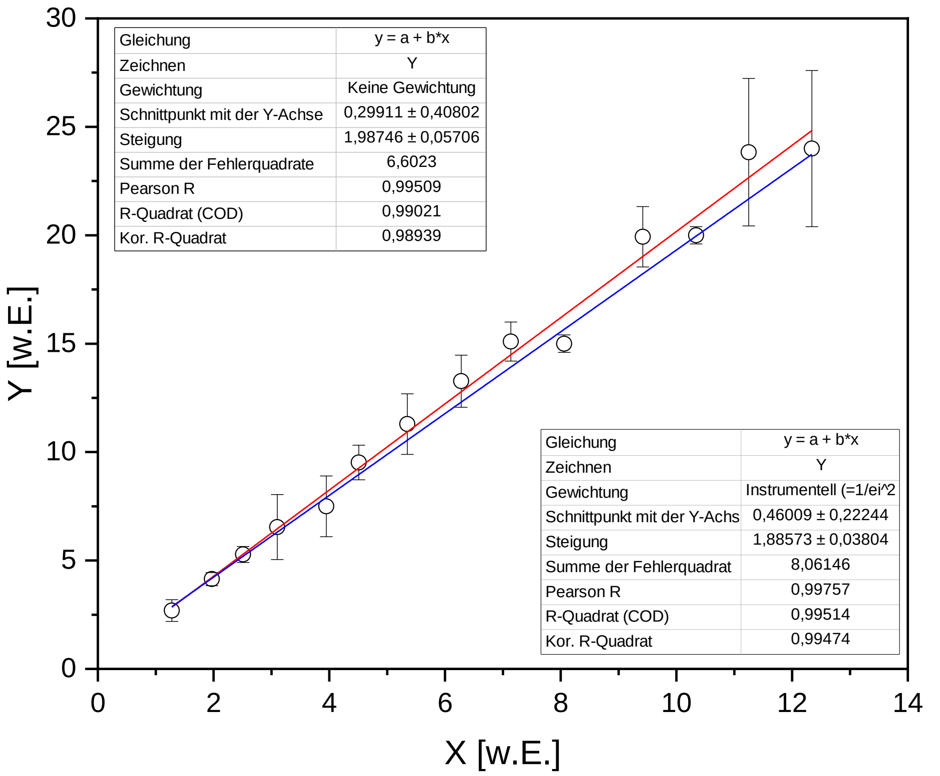
Zur Wiederholung: Führt man eine lineare Regression (ohne Gewichtung) einer Messreihe durch, so wendet man **die Methode der kleinsten Quadrate** an (oder eher: das Fitprogramm macht das). Hierbei erhält man die Parameter der Ausgleichsgerade $y = a \cdot x + b$ aus der Minimierung der Summe der Abweichungs-quadrate $\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a \cdot x_i + b))^2$ der Messpunkte (x_i/y_i) von der Ausgleichsgeraden (→ s. Beispiel 2).

Bei der gewichteten linearen Regression führt man einen zusätzlichen Gewichtungsfaktor ein, der für jeden Messwert unterschiedlich sein kann - dies ist die **Methode der kleinsten gewichteten Quadrate**. Der Ausdruck, der minimiert wird, ist bis auf den Gewichtungsfaktor ω_i gleich, die Summe der Abweichungs-quadrate ist jetzt:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

Optimal ist es, wenn die Gewichtungsfaktoren jeweils umgekehrt proportional zu den Varianzen ${\sigma_i}^2$ der einzelnen Messwerte sind, also $\omega_i \sim \frac{1}{{\sigma_i}^2}$.

Die Varianzen kann man abschätzen, indem man die Fehlerbalken der einzelnen Messpunkte verwendet. Beim Anpassen der Regressionsgeraden wird dann also jeder Messwert mit dem entsprechenden Gewicht berücksichtigt: Ein Messwert mit kleinerem Fehlerbalken (also ein zuverlässigerer Messwert) wird stärker gewichtet als ein unzuverlässigerer Messwert mit großem Fehlerbalken. Der Beispielgraph unten zeigt jeweils einen Fit derselben fiktiven Messreihe der Größe Y(X), einmal ohne Gewichtung (rote Gerade) und einmal mit Gewichtung der Fehlerbalken im Fit (blaue Gerade).



Man erkennt die deutlich unterschiedlich ermittelte Steigung.[1] Interessant ist es daher, sich das Bestimmtheitsmaß R^2 anzusehen (im Plot bezeichnet als „R-Quadrat (COD)“, COD = coefficient of

[1] zur Durchführung des gewichteten Fits s.Origin-Kurzanleitung zum Praktikum

determination). Bei der linearen Regression zeigt es an, wie gut die Messwerte zum Modell passen[2]. Die Extremfälle sind: $R^2 = 0$ (kein linearer Zusammenhang) und $R^2 = 1$ (perfekter linearer Zusammenhang). Im Plot ist erkennbar, dass R^2 beim Fit-Modell mit Gewichtung etwas größer ist als beim ungewichteten Modell, was dafür spricht, dass die Anpassung mit Gewichtung das bessere Modell abgibt.

Beispiel 1: Dichtebestimmung

In dem folgenden Beispiel wird die Dichte eines Würfels aus Aluminium bestimmt. Hierzu wird der Aluminiumwürfel zunächst gewogen und anschließend eine Kante des Würfels mit einem Messschieber vermessen.

Messwerte

Die erhaltenen Messwerte betragen l = 2,03 cm und m = 21,5 g.

Die systematischen Fehler der Messwerte werden den Anleitungen der Messgeräte entnommen und betragen in dem vorliegenden Versuch Δl = 0,005 cm und Δm = 0,1 g. Da die Messung der Masse und der Länge nur einmal durchgeführt wurde, kann kein statistischer Fehler angegeben werden.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

Die Dichte des Aluminiumwürfels ergibt sich zu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l^3} = \frac{21{,}5\ \mathrm{g}}{(2{,}03\ \mathrm{cm})^3} = 2{,}57\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Zur Berechnung des Fehlers $\Delta\rho$ der Dichte wird eine lineare Fehlerfortpflanzung benutzt, da nur die eingehenden **systematischen** Fehler der Einzelmessungen abgeschätzt wurden und **keine statistischen** Fehler der Messgrößen vorliegen. Der Fehler $\Delta\rho$ ergibt sich demnach zu

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\,\Delta m\right| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial l}\,\Delta l\right| = \left|\frac{\Delta m}{l^3}\right| + \left|-\frac{3m}{l^4}\,\Delta l\right| = 0{,}03\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Angabe des Ergebnisses

Das Ergebnis der Dichtemessung des Aluminiumwürfels lautet

$$\rho = (2{,}57 \pm 0{,}03)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Bezogen auf den ermittelten Wert für die Dichte ρ ergibt sich der relative Fehler zu

$$\omega = \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| = \frac{0{,}03\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{2{,}57\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} = 1{,}17\ \%.$$

---

[2] Erklärung zum Bestimmtheitsmaß z.B. in der Origin-Hilfe („R-Square (COD)“): https://www.originlab.com/doc/Origin-Help/Details_of_R_square

Beispiel 2: Widerstandsbestimmung eines unbekannten Bauteils

In dem folgenden Beispiel wird der Widerstand eines Bauteils mithilfe des Ohmschen Gesetzes ermittelt. Dazu werden schrittweise unterschiedliche Spannungen mit einem Netzgerät an das Bauteil angelegt und gleichzeitig werden die Stromstärken mit einem Multimeter gemessen.

Messwerte

Die aufgenommenen Datenpunkte sind in Abbildung 1 dargestellt.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

Zur Bestimmung des Widerstands wird das Programm OriginPRO eingesetzt. Dazu werden die Messpunkte zunächst übertragen und anschließend eine lineare Regression durchgeführt. Die erhaltene Graphik ist in Abbildung 1 dargestellt.

Die Resultate der linearen Regression sind in Abbildung 1 im Ergebnisfenster zu sehen. Darin zeigt die oberste Zeile die für die Regression verwendete Funktion an. Die Werte zu dem Schnittpunkt mit der Y-Achse und der Steigung $\bar{s}$ enthalten zusätzlich die Standardabweichung der jeweiligen Größe. Relevant für die Fehlerfortpflanzung ist die Standardabweichung der Steigung σ_s. Dabei handelt es sich um die Standardabweichung der Einzelmessung σ_s. Um daraus die Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_{\bar{s}}$ zu erhalten, muss dieser Wert mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ multipliziert werden:

$$\sigma_{\bar{s}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_s = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot\ 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{V}} \approx 3 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{V}}.$$

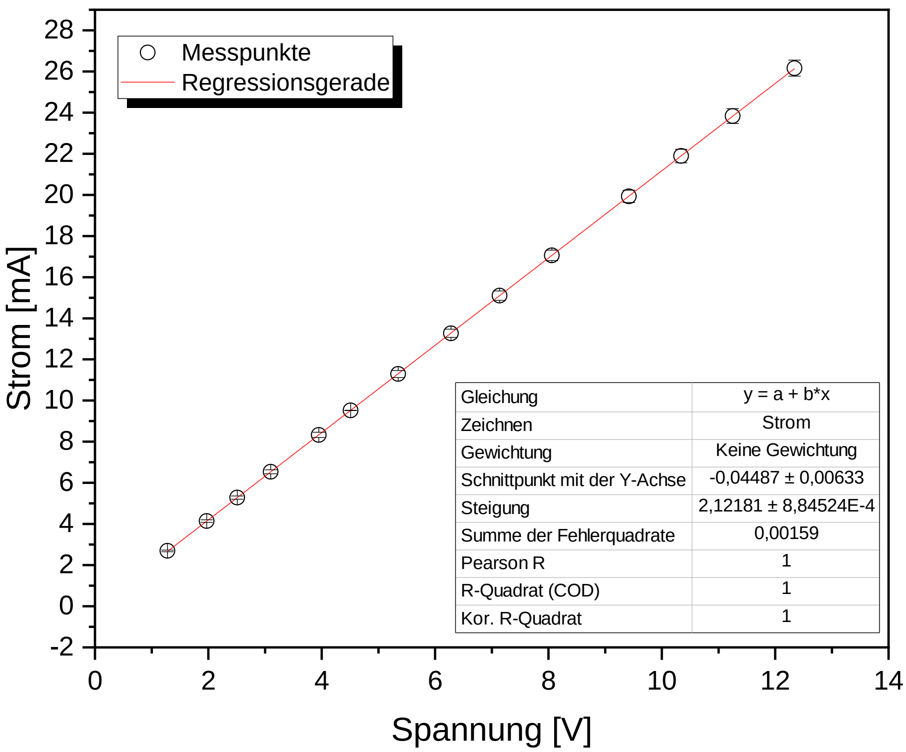


Abbildung 1: Lineare Regression zur Widerstandsbestimmung

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt für den Widerstand R folgender Zusammenhang mit der Steigung $\bar{s}$ der linearen Ausgleichskurve:

$$\bar{R} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\bar{s}} = \frac{1}{2{,}12}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mA}} = 472\ \Omega.$$

Der **statistische Fehler** des Widerstands $\sigma_{\bar{R}}$ wird unter Zuhilfenahme der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.
Da hier nur eine fehlerbehaftete Größe einfließt, ergibt sich rechnerisch kein Unterschied zur linearen Fehlerfortpflanzung. Die Standardabweichung des Widerstands $\sigma_{\bar{R}}$ ergibt sich demnach zu

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial s}\,\sigma_{\bar{s}}\right)^2} = \sqrt{\left|-\frac{\sigma_{\bar{s}}}{\bar{s}^2}\right|^2} = \frac{3\cdot 10^{-4}}{2{,}12^2}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mA}} = 67\ \mathrm{m\Omega}$$

Ein **systematischer Fehler** kann sich aus Ungenauigkeiten des Messgerätes bei der Strommessung ergeben, hier sind das laut Hersteller $\Delta I/I = 0{,}5\%$ des Messwertes im verwendeten Messbereich. Aus der linearen Fehlerfortpflanzung ergibt sich letztlich

$$\Delta R = R\cdot\frac{\Delta I}{I} = R\cdot 0{,}5\% \approx 2\Omega$$

Angabe des Ergebnisses

Der statistische Fehler bei dieser Messung ist mit $67\ \mathrm{m\Omega}$ um Größenordnungen kleiner als der systematische Fehler. Wir können ersteren daher vernachlässigen und geben das Endergebnis an zu

$$R = (472 \pm 2)\ \Omega.$$

Beispiel 3: Stoffmengenbestimmung eines Gases

In diesem Versuch wird die Stoffmenge eines gasförmigen Stoffes in einem würfelförmigen Behältnis bestimmt, wobei die Temperatur *T*, das Volumen *V* und der Druck *p* des untersuchten Gases gemessen werden. Das Volumen wird durch Messung der Kantenlänge *l* des Behältnisses bestimmt. Unter den vorliegenden experimentellen Bedingungen kann der gasförmige Stoff als ideales Gas behandelt werden, sodass das ideale Gasgesetz ($nRT = pV$) zur Berechnung der Stoffmenge ausgenutzt werden kann.

Messwerte

In dem Experiment wurden die drei Messgrößen Temperatur, Volumen und Druck jeweils fünfmal gemessen. Die systematischen Fehler wurden den Anleitungen der Messgeräte entnommen und belaufen sich auf *ΔT* = 0,5 K, *Δl* = 0,1 cm, *Δp* = 0,2 kPa. Auf eine ausführliche Darstellung aller Messwerte wird an dieser Stelle verzichtet.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

Zunächst wurden die Mittelwerte der drei Messgrößen aus den Daten der Messreihen bestimmt. Die erhaltenen Mittelwerte betragen $\bar{T} = 301{,}4\ \mathrm{K}$, $\bar{l} = 23{,}8\ cm$ und $\bar{p} = 46{,}3\ kPa$. Im Anschluss wurden die empirischen Standardabweichungen der Messgrößen berechnet. Die ermittelten Standardabweichungen der

Mittelwerte lauten $\sigma_{\bar{T}} = 0{,}6\ \mathrm{K}$, $\sigma_{\bar{l}} = 0{,}2\ \mathrm{cm}$ und $\sigma_{\bar{p}} = 0{,}1\ \mathrm{kPa}$. Die gesuchte Stoffmenge $\bar{n}$ ergibt sich mithilfe des idealen Gasgesetzes zu

$$\bar{n} = \frac{\bar{p} \cdot \bar{V}}{R \cdot \bar{T}} = \frac{\bar{p} \cdot \bar{l}^3}{R \cdot \bar{T}} = \frac{46300\ \mathrm{Pa} \cdot (0{,}238\ \mathrm{m})^3}{8{,}314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}} \cdot 301{,}4\ \mathrm{K}} = 0{,}249\ \mathrm{mol} = 249\ \mathrm{mmol}.$$

Da in dem Experiment sowohl systematische Fehler der Einzelmessungen als auch statistische Fehler vorliegen, muss eine lineare Fehlerfortpflanzung für den systematischen Fehler **und** eine Gaußsche Fehlerfortpflanzung für den statistischen Fehler durchgeführt werden.

Die Messunsicherheit aufgrund der **systematischen Fehler** Δn lässt sich durch

$$\Delta n = \left|\frac{\partial n}{\partial T}\ \Delta T\right| + \left|\frac{\partial n}{\partial l}\ \Delta l\right| + \left|\frac{\partial n}{\partial p}\ \Delta p\right| = \left|-\frac{pl^3}{RT^2}\Delta T\right| + \left|\frac{3pl^2}{RT}\Delta l\right| + \left|\frac{l^3}{RT}\Delta p\right| = 0{,}008\ \mathrm{mol} = 8\ \mathrm{mmol}$$

berechnen.
Der **statistische Fehler** $\sigma_{\bar{n}}$ der Stoffmenge ergibt sich mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial T}\ \sigma_{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial l}\ \sigma_{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial p}\ \sigma_{\bar{p}}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{pl^3}{RT^2}\ \sigma_{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{3pl^2}{RT}\ \sigma_{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{l^3}{RT}\ \sigma_{\bar{p}}\right)^2} = 6\ \mathrm{mmol}.$$

Angabe des Ergebnisses

Bei der Angabe des Endergebnisses werden statistischer und systematischer Fehler aufsummiert. Die Stoffmenge des untersuchten Gases in dem würfelförmigen Behälter beträgt

$$n = (249 \pm 14)\ \mathrm{mmol}.$$

Bezogen auf den ermittelten Wert $\bar{n}$ ergibt sich der relative Fehler zu

$$\omega = \frac{14\ mmol}{249\ mmol} = 5{,}62\ \%.$$

Beispiel 4: Hookesches Gesetz

In diesem Versuch soll die Federkonstante *k* einer Feder aus dem proportionalen Zusammenhang zwischen der Kraftbelastung *F* der Feder und ihrer Dehnung Δs (elastische Verformung) ermittelt werden. Dies wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben, wir betrachten hier nur die skalaren Größen:

$$F = k \cdot \Delta s$$

Im Experiment wird also eine Messreihe aufgenommen, bei der die Feder mit verschiedenen Massen belastet wird, die Federkraft mit einem Kraftmessgerät sowie die Dehnung der Feder mit einem Maßstab gemessen wird.

Messwerte

Im Folgenden ist eine Messreihe gezeigt:

Δs [mm]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
F [N]	0,045	0,104	0,146	0,207	0,247	0,302	0,345	0,418	0,457	0,541

Für das Kraftmessgerät nehmen wir eine Genauigkeit von 5% bezogen auf die Anzeige an. Das ist sehr ungenau, doch das Gerät müsste aufgrund seines Alters neu kalibriert werden, weshalb wir den Fehler so groß abschätzen.

Auswertung und Fehlerbetrachtung

In Abb. 2 wurde nun die gemessene Kraft gegenüber der Dehnung aufgetragen, der eben erwähnte 5%-Fehler ist als Fehlerbalken aufgetragen. Hier wird klar, dass sich dieser Fehler stärker auswirkt, je größer die gemessene Kraft ist, da die Messunsicherheit hier stärker ins Gewicht fällt. Wir haben also eine vom Messwert abhängige und für jeden Messwert andere Messunsicherheit. Um nun aus der Steigung des Graphen die Federkonstante *k* zu bestimmen, führen wir eine **gewichtete lineare Regression** durch. Werte mit kleineren Fehlerbalken werden also stärker gewichtet als Werte mit größeren Fehlerbalken. Als Ergebnis erhalten wir $k = (5{,}22 \pm 0{,}08)\, N/m$ (s. Origin-Ergebnisfenster im Diagramm).

Außerdem nehmen wir einen Fehler von $\Delta s_M = 4mm$ auf den Maßstab an, da er an der Aufhängung der Feder nur ungenau angesetzt werden kann und sich dadurch ein systematischer Fehler ergeben kann. Die Länge, auf der gemessen wird, beträgt insgesamt 100mm. Wir verwenden dazu wieder die lineare Fehlerfortpflanzung (wir haben keinen systematischen Fehler mehr auf *F*, daher betrachten wir nur den Fehler auf Δs):

$$\Delta k = \left|\frac{\partial k}{\partial \Delta s}\, \Delta s_M\right| = \left|-\frac{F}{\Delta s^2}\, \Delta s_M\right| = k \cdot \frac{\Delta s_M}{\Delta s} = 5{,}22\,\frac{N}{m} \cdot \frac{4mm}{100mm} \approx 0{,}21\,\frac{N}{m}$$

Angabe des Ergebnisses

In unserem Endergebnisgeht werden nun der statistische Fehler aus der linearen Regression ($\pm 0{,}08\frac{N}{m}$) und der systematische Fehler aufgrund der Ungenauigkeit des Anbringens des Maßstabs ($\pm 0{,}21\frac{N}{m}$) aufsummiert. Für die gesuchte Federkonstante erhalten wir den Wert

$$k = (5{,}22 \pm 0{,}29)\ \frac{N}{m}\,.$$

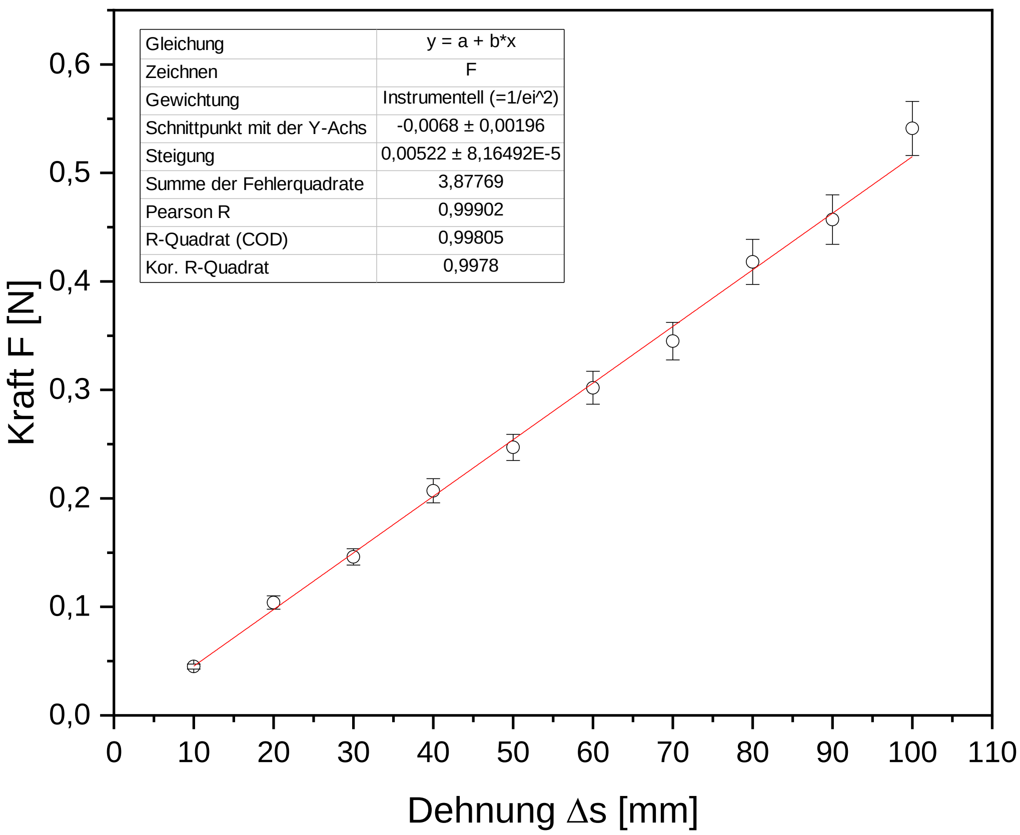


Abbildung 2: Kraft-Dehnungsdiagramm zum Ermitteln der Federkonstante k aus der Steigung.

Hierzu zwei Anmerkungen:

1. Sie können feststellen, dass der statistische Fehler aus dem Ermitteln der Steigung nur 1,9% beträgt, auch wenn wir die Genauigkeit des Kraftmessers zu 5% angenommen haben. Hier erkennt man die Stärken der linearen Regression: Durch Statistik mitteln sich Ungenauigkeiten heraus. Wir könnten versuchen, die Zuverlässigkeit durch weitere Messpunkte noch weiter zu verbessern und z.B. die gesamte Messreihe mehrfach zu wiederholen.

2. Sie können die Werte auch mal selbst ungewichtet fitten – Sie werden feststellen, dass das Ergebnis sich unterscheidet, weil die größeren Fehlerbalken der hohen Werte im ungewichteten Fall nicht berücksichtigt werden.