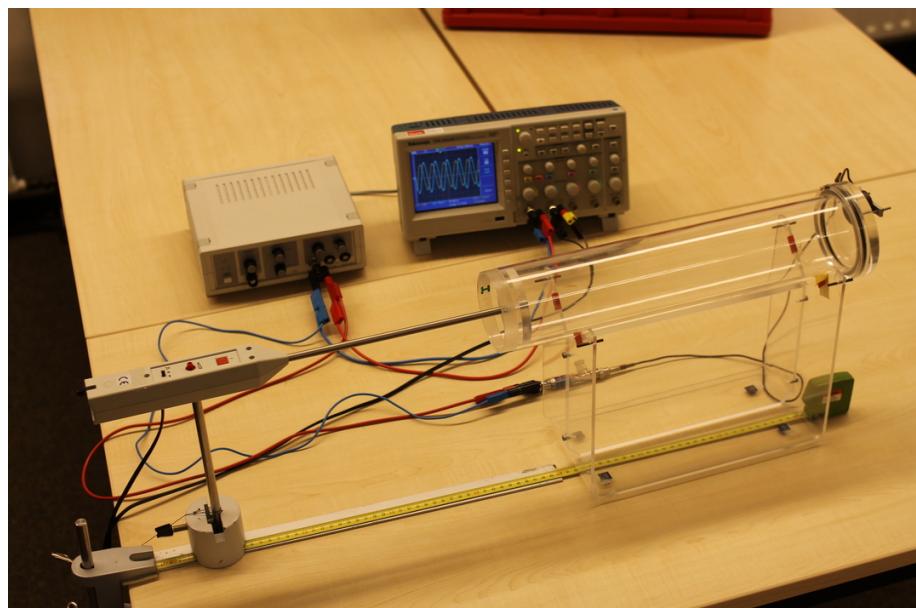


**Grundpraktikum Physik
Teil I**
RWTH Aachen
I. Physikalisches Institut B

Dr. Henning Gast
Dr. Thomas Kirn
Prof. Dr. Stefan Schael



<https://grundpraktikum.physik.rwth-aachen.de>
Version vom 26.10.2022

Gesetzt am 26. Oktober 2022 aus Commit 7cddb0291ff20cc3f97598bccd603ebda7e3b431 auf Branch master.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung	7
0.1 Zeitlicher Ablauf	8
0.1.1 Blockpraktikum in der vorlesungsfreien Zeit nach dem Semester	8
0.1.2 Semesterbegleitendes Praktikum	9
0.2 Benutzung der Notebooks	9
0.3 Versuchsvorbereitung	9
0.4 Bewertung	11
1 Mechanik	13
1.1 Erdbeschleunigung mit dem Pendel	13
1.1.1 Das mathematische Pendel	13
1.1.2 Das physikalische Pendel	15
1.1.3 Bestimmung der Erdbeschleunigung	15
1.1.4 Versuchsaufbau und Durchführung	17
1.2 Schwingungen von gekoppelten Pendeln	20
1.2.1 Die Bewegungsgleichung für das gekoppelte Pendel	21
1.2.2 Messgrößen	23
1.2.3 Versuchsaufbau und Durchführung	24
1.2.4 Auswertung	25
1.3 Trägheitsmomente	25
1.3.1 Einführung	25
1.3.2 Versuchsziele	26
1.3.3 Versuchsaufbau	27
1.3.4 Bestätigung von $J = f(r^2)$ und Bestimmung des Direktionsmomentes D	29
1.3.5 Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern gleicher Masse mit verschiedener Massenverteilung	30
1.3.6 Trägheitsmoment der Kugel	31
1.3.7 Bestätigung des Steinerschen Satzes	32
1.4 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment	32
1.4.1 Freier Fall	32
1.4.2 Versuchsaufbau	33
1.4.3 Versuchsdurchführung	35
2 Akustik	39
2.1 Schallgeschwindigkeit in Gasen	39
2.1.1 Versuchsziel	39

2.1.2	Grundlagen	40
2.1.3	Laufzeit	41
2.1.4	Resonanzfrequenz	44
2.1.5	Resonanzlängen	47
2.1.6	Druckknoten	48
2.2	Schallgeschwindigkeit in Festkörpern	50
2.2.1	Versuchsziel	50
2.2.2	Grundlagen	50
2.2.3	Versuchsdurchführung	51
2.2.4	Auswertung der Messdaten	53
2.3	Physik der Gitarre	54
2.3.1	Versuchsziele	54
2.3.2	Grundlagen	54
2.3.3	Versuchsaufbau	58
2.3.4	Messung der Schwebung	59
2.3.5	Bestimmung der Saitenspannung einer Gitarrensaite	60
2.3.6	Aufnahme eines Frequenzspektrums	61
3	Wärmelehre	63
3.1	Dampfdruckkurve	63
3.1.1	Theoretische Grundlagen	63
3.1.2	Versuchsaufbau und Durchführung	70
3.2	Adiabatenkoeffizient	76
3.2.1	Rüchardt-Methode	76
3.2.2	Versuchsaufbau und -durchführung	78
3.2.3	Tipps und Anmerkungen	79
3.3	Gasgesetze	81
3.3.1	Theoretische Grundlagen	81
3.3.2	Versuchsaufbau	81
3.3.3	Durchführung	84
4	Elektrizitätslehre	87
4.1	Charakterisierung eines Ohmschen Widerstands	87
4.1.1	Versuchsdurchführung	87
4.1.2	Versuchsauswertung	87
4.2	Auf- und Entladung eines Kondensators	90
4.2.1	Versuchsbeschreibung	90
4.2.2	Versuchsaufbau	92
4.2.3	Versuchsdurchführung	92
4.3	Gedämpfter LC-Schwingkreis	95
4.3.1	Versuchsbeschreibung	95
4.3.2	Versuchsdurchführung	101
4.3.3	Hinweise zur Versuchsauswertung	101
4.4	Gekoppelte LC-Schwingkreise	103
4.4.1	Versuchsbeschreibung	103
4.4.2	Versuchsaufbau	107

4.4.3	Versuchsdurchführung	107
4.5	Anhang: Verlustfaktoren	109
A	Statistik	113
A.1	Wahrscheinlichkeit	113
A.1.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	113
A.1.2	Wichtige Wahrscheinlichkeitsdichten	116
A.1.3	Mehrere Zufallsgrößen	118
A.2	Statistische Messunsicherheiten	119
A.2.1	Parameterschätzung	119
A.2.2	Definition der statistischen Messunsicherheit	121
A.2.3	Fehlerfortpflanzung	121
A.3	Modellanpassung	122
A.3.1	Methode der kleinsten Quadrate	122
A.3.2	Lineare Regression	124
A.4	Systematische Unsicherheiten	126
A.4.1	Definition und Abschätzung	126

0 Einleitung

In dem physikalischen Grundpraktikum I für Physiker und Mathematiker sollen die Studierenden moderne Arbeitsmethoden in der Physik kennen- und anwenden lernen. Dabei sollen folgende Kompetenzen erworben werden:

- Anwendung physikalischen Wissens aus den Vorlesungen,
- Aufbau eines Experimentes,
- Computerunterstützte Messung und Auswertung,
- Führen eines Laborbuchs (Messprotokoll),
- Anfertigung einer wissenschaftlichen Ausarbeitung (Protokoll).

Damit orientiert sich das Grundpraktikum eng an den typischen Arbeitsabläufen im Berufsleben eines Physikers.

Die Studierenden sollen sich intensiv mit dem Versuch, dem physikalischen Hintergrund, den Messmethoden und der Auswertung der Daten auseinandersetzen. Für jedes Versuchsgebiet stehen daher für die Durchführung und Auswertung jeweils drei Tage im Blockpraktikum, bzw. fünf Tage im semesterbegleitenden Praktikum zur Verfügung.

Das Praktikum wird wie folgt gegliedert:

- Die Studierenden erarbeiten insgesamt vier Versuche aus den Arbeitsgebieten Mechanik, Akustik, Wärmelehre und Elektrizitätslehre.
- Der Stoff orientiert sich an der Vorlesung Experimentalphysik I und II, in denen die physikalischen Grundlagen vermittelt worden sind. Die notwendigen Vorkenntnisse in statistischen Methoden und computergestützter Datenanalyse wurden in der Vorlesung zur Datenverarbeitung bzw. den Vorlesungen zur Stochastik vermittelt.

Zu Beginn des Praktikums gibt es eine einführende Veranstaltung, in der den Studierenden die Voraussetzungen, Gruppeneinteilungen, Praktikumsregeln und Labor- und Sicherheitshinweise vermittelt werden. Außerdem findet eine ausführliche Einweisung in die im Praktikum verwendeten Messgeräte statt.

0.1 Zeitlicher Ablauf

Das Praktikum beginnt mit der Einführungsveranstaltung und endet mit der Besprechung der Protokolle des vierten Versuchs. Da die Anzahl der vorhandenen Versuchsaufbauten begrenzt ist, werden die Studierenden in 2er-Gruppen eingeteilt. Der genaue zeitliche Ablauf des Praktikums, die Gruppeneinteilung sowie die Verteilung der Gruppen auf die vorhandenen Teilversuche und die Praktikumsräume werden in der Einführungsveranstaltung bekannt gegeben.

0.1.1 Blockpraktikum in der vorlesungsfreien Zeit nach dem Semester

Die Gruppen sind vormittags (von 08:30 Uhr bis 13:00 Uhr) im Wechsel jeweils drei Tage aktiv und bereiten einen Tag die Versuche vor.

- 1. Tag: **Anwesenheitspflicht vormittags von 08:30 bis 13:00 Uhr**
Der Versuchstag beginnt mit einer Vorbesprechung mit dem Tutor (Dauer: 60 Minuten), während der geeignete Versuchsaufbauten, -durchführungen und -auswertungen erarbeitet werden sollen. Danach erfolgt der Versuchsaufbau mit der Inbetriebnahme aller für die Messung erforderlicher Geräte sowie des Computers. Jeweils zwei Studierende arbeiten an einem eigenen Versuchsaufbau. Die Messdaten werden aufgezeichnet und die Auswertung soweit durchgeführt, dass erste, vorläufige Ergebnisse diskutiert werden können. Die Versuchsaufbauten, Einstellungen, die Namen der Dateien und die vorläufigen Ergebnisse werden in Form eines Messprotokolls dokumentiert. Für die Versuchsdurchführung stehen 3,5 Stunden zur Verfügung. Der Versuch endet mit der Rückgabe der Versuchsaufbauten und der Computer. Die Tutoren zeichnen die Messprotokolle ab. Das Messprotokoll wird später an das erstellte Protokoll angehängt.
- 2. und 3. Tag:
Die Auswertung der Versuche wird auf eigenen Computern zu Hause weitergeführt und abgeschlossen. Jeder Studierende erarbeitet **eigenständig** ein Protokoll über seine Ergebnisse. Zu jedem Versuch gibt es einen Satz von Aufgaben, die im Protokoll abgearbeitet werden sollen und somit die Struktur des Protokolls vorgeben. Eine L^AT_EX-Vorlagendatei für die Protokollerstellung steht im Moodle zur Verfügung. Außerdem existieren Checklisten, die nach Fertigstellung einer Rohfassung des Protokolls abgearbeitet werden sollten, um häufige Fehler zu erkennen und vor Abgabe des Protokolls auszubessern. Zur computergestützten Auswertung der Messdaten empfiehlt sich die Programmiersprache Python. Für das Einlesen der mit Cassy-Systemen aufgezeichneten Daten und im Praktikum häufig vorkommende Analyseschritte steht eine Praktikumsbibliothek samt umfangreicher Beispiele bereit.
- 4. Tag:
Das Protokoll muss bis zu der in der Einführungsveranstaltung genannten

Frist mit allen erforderlichen Anhängen (Rohdaten, lauffähige Auswerteprogramme, Messprotokoll) im Moodle zur Bewertung abgegeben werden.

0.1.2 Semesterbegleitendes Praktikum

Der Ablauf ist analog zum Blockpraktikum. Die Protokollabgabe muss hier ca. fünf Tage nach der Durchführung des Versuchs erfolgen. Der genaue zeitliche Ablauf des Praktikums wird in der Einführungsveranstaltung bekannt gegeben.

0.2 Benutzung der Notebooks

Für die Durchführung der Versuche erhält jede Arbeitsgruppe ein Notebook mit WLAN-Verbindung. **Die Praktikumsteilnehmer benötigen dazu den bei der Immatrikulation durch das Rechenzentrum zugewiesenen Zugang.** Die Notebooks stehen nur für die Arbeiten im Praktikum zur Verfügung und können nicht mit nach Hause genommen werden. Auf den Notebooks läuft das Betriebssystem Windows und die für die Versuchsdurchführung benötigten Messwerterfassungsprogramme sind installiert. Die Studierenden haben nur Schreibzugriff auf den User-Bereich. Als ersten Arbeitsschritt legt jeder Teilnehmer, sobald er ein Notebook erhält, im User-Bereich ein Verzeichnis an. In diesem Verzeichnis sollen alle Dateien, die zu dem Versuch gehören, abgespeichert werden und am Ende der Arbeitsphase auf Datenträger (USB-Stick) kopiert werden. Der User-Bereich wird bei jedem Wechsel zwischen den Gruppen gelöscht, sodass alle ungesicherten Daten unwiederbringlich verloren sind.

Private Notebooks sind erlaubt. Der Besitzer ist für den erfolgreichen Einsatz zur Messwerterfassung eigenverantwortlich.

0.3 Versuchsvorbereitung

Die Versuchsbeschreibungen sollen den Studierenden eine Vorbereitung auf den Versuch ermöglichen und eine Anleitung für die Versuchsdurchführung sein. Die physikalischen Grundlagen zu den Versuchsthemen werden in den Versuchsanleitungen nur bedingt hergeleitet. Es ist daher unerlässlich, entsprechende Physikbücher für die Vorbereitung zu verwenden. Besonders geeignet sind die folgenden Bücher:

- Demtröder, „Experimentalphysik“, Band 1 und 2.
- P.A. Tipler, „Physik“, Spektrum Verlag.
- Gerthsen, Kneser, Vogel, „Physik“, Springer Verlag

Zur Auffrischung der statistischen Methoden, die im Praktikum angewendet werden, findet sich ein kurzer Abriss in Anhang A, zur Vertiefung eignen sich die folgenden Lehrbücher:

0 Einleitung

- M. Erdmann, T. Hebbeker und A. Schmidt, Statistische Methoden in der Experimentalphysik, Pearson, ISBN 978-3-86894-391-7
- G. Cowan, Statistical Data Analysis, Oxford University Press, ISBN 0-19-850155-2
- R. Barlow, Statistics, Wiley, ISBN 0-471-92295-1
- V. Blobel und E. Lohrmann, Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse, <http://www-library.desy.de/preparch/books/BloLoBuch.pdf>

Vorbereitung:

Während der Vorbesprechung zu Beginn eines Versuchstages werden die physikalischen Grundlagen zu den Versuchsthemen, sowie die Versuchsdurchführung und Auswertung besprochen. In der Vorbesprechung werden typischerweise die folgenden Fragen im Mittelpunkt stehen:

- Was ist das Ziel des Versuchs? Welche physikalischen Größen sollen bestimmt werden?
- Was sind die physikalischen Grundlagen des Versuchs? Welche Formeln werden benötigt? Wie kann man sie ggfs. herleiten?
- Wie sieht der Versuchsaufbau aus? Welchen Zweck erfüllen die einzelnen Geräte bzw. Bauteile?
- Wie geht man bei der Messung vor?
- Welche einzelnen Observablen müssen gemessen werden? Wie werden sie gemessen?
- Wie werden die Messunsicherheiten statistischer und/oder systematischer Natur auf die Observablen bestimmt? Stellen Sie sicher, dass Sie mit den Grundbegriffen der Statistik vertraut sind!
- Wie geht man bei der Auswertung der Daten vor? Welche Auftragung ist geeignet? Welchen Verlauf der Datenpunkte erwarten Sie?
- Wie funktioniert eine Modellanpassung? Wie sieht das χ^2 aus? Wie ist der Wert am Minimum zu interpretieren?
- Wie pflanzen sich die einzelnen Fehlerbeiträge auf das Endergebnis fort?
- Welche Erwartung (Zahlenwerte) haben Sie für das Endergebnis?
- Wie sollten Sie sich die zur Verfügung stehende Zeit einteilen?

0.4 Bewertung

Die abgegebenen Protokolle werden anhand von (auch im Moodle zugänglichen) Bewertungsbögen bepunktet. Aus der Summe der für die vier Versuche erzielten Punktzahlen wird nach der in der Einführungsveranstaltung gezeigten Tabelle die Note errechnet.

Studierende, die während der Vorbesprechung oder der Versuchsdurchführung erkennen lassen, dass sie nicht ausreichend vorbereitet sind, werden von dem Versuchstag ausgeschlossen. Dieser wird dann mit 0 Punkten bewertet. Studierende, die bei einem Versuch die Versuchsergebnisse, die Versuchsauswertung oder das Protokoll nicht selbstständig erarbeiten, erhalten keine Punkte für diesen Versuch.

1 Mechanik

1.1 Erdbeschleunigung mit dem Pendel

Aufgaben: In diesem Experiment werden die Schwingungen eines physikalischen Pendels untersucht. Aus der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels wird die Erdbeschleunigung ermittelt.

**Versuch
1M1**

Vorkenntnisse/Grundlagen: Beschreibung von Schwingungen, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Satz von Steiner.

Literatur:

- F. Kohlrausch: Praktische Physik 1, ISBN 3-519-23001-1, S.62 - S.64 (Orts- und Zeitabhängigkeit der Erdbeschleunigung)
- F. Kohlrausch : Praktische Physik 3, ISBN 3-519-23000-3, S.293 - S.295 (Tabellenwerte der Erdbeschleunigung)
- Abfrage der Erdbeschleunigung für beliebigen Ort, Bundesamt für Kartographie und Geodäsie: <http://gibs.bkg.bund.de/geoid/gscomp.php?p=s>

1.1.1 Das mathematische Pendel

Das einfache mathematische Pendel besteht aus einer punktförmigen, schweren Masse m_S , die an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt ist (Abb.1.1). In der Ruhelage bewirkt die Schwerkraft $F_g = m_S \cdot g$ mit g als Erdbeschleunigung, dass das Pendel senkrecht hängt. Nach Auslenkung aus der Ruhelage um einen kleinen Winkel φ_{\max} (klein bedeutet hier $\sin \varphi_{\max} \approx \varphi_{\max}$) entsteht ein rückstellendes Drehmoment $l \cdot F_r$, das das Pendel wegen seines Trägheitsmomentes in harmonische Schwingungen versetzt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -m_S \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi) \approx -m_S \cdot g \cdot l \cdot \varphi, \quad (1.1)$$

wobei $J = m_T \cdot l^2$ das Trägheitsmoment der trügen Masse m_T in der Entfernung l vom Aufhängepunkt ist und die rechte Seite das rücktreibende Drehmoment darstellt; φ ist der momentane Auslenkwinkel und $\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$ die momentane Winkelbeschleunigung. Mit $m_T = m_S$ (Einstein'sches Äquivalenzprinzip der Gleichheit von schwerer und trüger Masse) wird die Bewegung unabhängig von den Massen:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi = -\omega^2 \cdot \varphi. \quad (1.2)$$

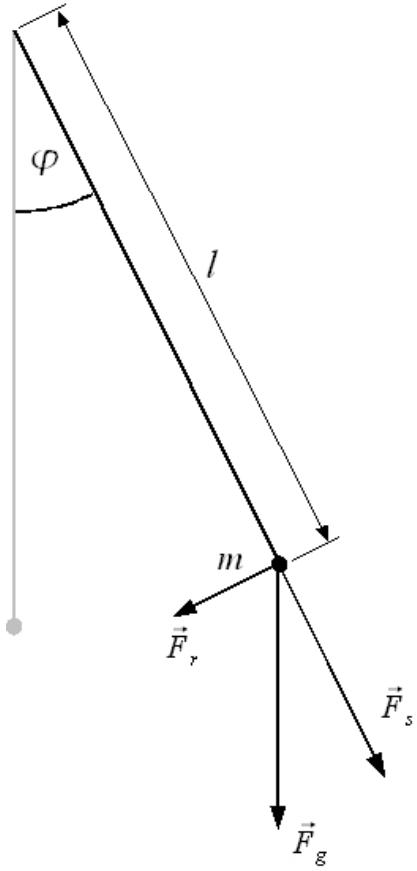


Abbildung 1.1: Das mathematische Pendel

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung eine harmonische Schwingung darstellt:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t). \quad (1.3)$$

$\omega = \sqrt{g/l}$ ist die Kreisfrequenz der Schwingung. Die Anfangsbedingungen legen die Integrationskonstanten A und B fest. Mit $\varphi(t = 0) = \varphi_{\max}$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ (Start der Pendelbewegung vom Auslenkwinkel φ_{\max} ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit) ergibt sich

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cdot \cos(\omega t). \quad (1.4)$$

Die Schwingungsdauer beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.5)$$

bzw.

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{g} \cdot l. \quad (1.6)$$

Das Quadrat der Schwingungsdauer wächst also linear mit der Pendellänge l .

1.1.2 Das physikalische Pendel

Die Bewegungsgleichung für ein physikalisches Pendel, d.h. eines ausgedehnten, massebehafteten Systems, das um einen Aufhängepunkt bzw. um eine Achse schwingen kann, ist formal mit der des mathematischen Pendels identisch:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi. \quad (1.7)$$

Das rücktreibende Drehmoment wird wieder von der Schwerkraft erzeugt. Nach dem Schwerpunktssatz verhält sich das System so, als ob die Gesamtmasse m im Schwerpunkt konzentriert ist. Demgemäß ist l_s die Distanz von Aufhängepunkt bzw. Drehachse zum Schwerpunkt S . Die Trägheit ist gegeben durch das Gesamtträgheitsmoment J um die Drehachse. Man erhält als Lösung wieder eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot l_s}{J}. \quad (1.8)$$

Mit $\omega^2 = 4\pi^2/T^2$ wird die Schwingungsdauer T dann

$$T^2 = \frac{1}{g} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{J}{ml_s}. \quad (1.9)$$

1.1.3 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Das vorliegende physikalische Pendel besteht aus dem Winkelaufnehmer-Profil, der Pendelstange und dem zylindrischen Pendelkörper (Abb. 1.2). Um die Erdbeschleunigung g aus der Pendelfrequenz zu bestimmen, müsste man also das gesamte Trägheitsmoment, Masse und Schwerpunkt des Pendels kennen. Im Prinzip kann man die Trägheitsmomente der einzelnen Bestandteile um die Pendelaufhängung bestimmen und zum Gesamtträgheitsmoment zusammenaddieren. Den Schwerpunkt erhält man aus den Schwerpunkten der einzelnen Bestandteile, die man mit den Einzelmassen gewichtet mittelt:

$$\vec{S}_{ges} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{S}_i}{\sum m_i}, \quad (1.10)$$

wobei \vec{S}_i die Schwerpunkte der Einzelteile und m_i ihre Massen sind. Dabei würde man die Bestandteile durch einfache geometrische Objekte annähern, deren Trägheitsmomente und Schwerpunkte sich mit vernünftigem Aufwand berechnen lassen (Pendelkörper durch homogenen Zylinder, Stange durch homogene Stange, Winkelaufnehmer durch Hohlzylinder).

Eine einfachere Möglichkeit, g zu bestimmen, besteht darin, den systematischen Fehler, der durch das Trägheitsmoment J_{St} und das Rückstellmoment D_{St} der Stange (mit Winkelaufnehmer) auftritt, zu minimieren. Man geht dabei so vor, dass zunächst die Schwingungsfrequenz der Stange allein bestimmt wird. Danach wird der Pendelkörper an der Stelle angebracht, an der die Stange/Pendel-Kombination dieselbe Schwingungsfrequenz hat wie die Stange allein. In diesem Fall

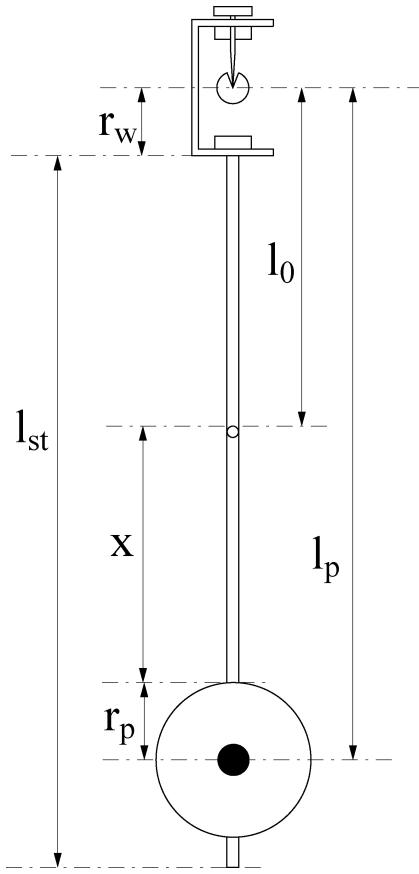


Abbildung 1.2: Pendel im Versuchsaufbau

beeinflussen sich Pendelkörper und Stange nicht. Für die Stange allein gilt:

$$\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}}.$$

Für den Pendelkörper allein gilt:

$$\omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}.$$

Das physikalische Pendel, bestehend aus Stange und Pendelkörper, hat die Eigenfrequenz:

$$\omega^2 = \frac{D_{st} + D_p}{J_{st} + J_p} = \omega_p^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_{st}}{D_p}}{1 + \frac{J_{st}}{J_p}} = \omega_{st}^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_p}{D_{st}}}{1 + \frac{J_p}{J_{st}}} \quad (1.11)$$

Hat man nun das Pendel so eingestellt, dass $\omega = \omega_{st}$ gilt, so sieht man aus Gl.1.11, dass dann auch gelten muss: $\frac{J_p}{J_{st}} = \frac{D_p}{D_{st}}$. Umgeformt ergibt sich

$$\frac{D_p}{J_p} = \frac{D_{st}}{J_{st}} \equiv \omega_{st}^2 = \omega^2 = \omega_p^2.$$

Das heißt, dass man das Pendel nun so behandeln kann, als bestünde es bloß aus dem Pendelkörper, der masselos aufgehängt ist. Die Ausdehnung des Pendelkörpers wird dabei nicht vernachlässigt. Man benutzt also das Trägheitsmoment eines

homogenen Zylinders mit Radius r_p , der im Abstand l_p um den Aufhängepunkt schwingt. Dieses ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Steiner zu:

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2. \quad (1.12)$$

Für das Quadrat der Kreisfrequenz erhält man dann

$$\omega^2 = \frac{D_p}{J_p} = \frac{m_p \cdot g \cdot l_p}{\frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2}. \quad (1.13)$$

Daraus ergibt sich die Erdbeschleunigung g zu

$$g = \omega^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right). \quad (1.14)$$

In der Klammer beschreibt die 1 das mathematische Pendel, während der zweite Term die Korrektur ist, die die Ausdehnung des Pendelkörpers berücksichtigt. Kreisfrequenz ω , Frequenz f und Periodendauer T hängen dabei stets über

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.15)$$

zusammen.

1.1.4 Versuchsaufbau und Durchführung

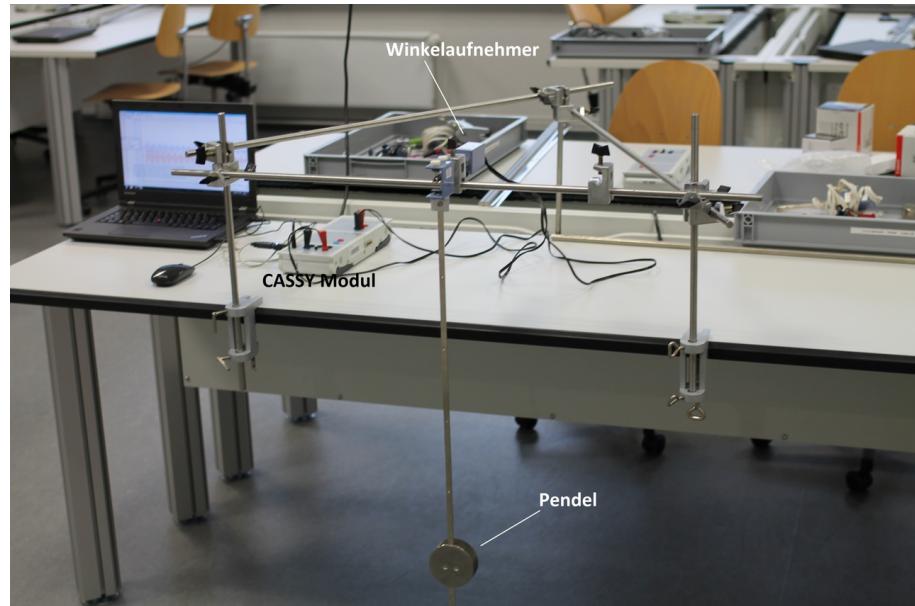


Abbildung 1.3: Versuchsaufbau

Das Pendel besteht aus einer Masse, die verschiebbar an einer Stange angebracht ist. Die Aufhängung des Pendels ist ein U-Profil mit zwei Spitzen und zwei Permanentmagneten (Abb. 1.4). Die Spitzen bilden das Lager und werden in die Nut

1 Mechanik

des Winkelaufnehmers gesetzt. Der Winkelaufnehmer enthält eine Hall-Sonde, die das Magnetfeld senkrecht zur Nut misst. Dreht sich nun die Aufhängung mit den Permanentmagneten um den Winkelaufnehmer, so liefert die Hallsonde eine Spannung, die proportional zum Sinus des Winkels ist. Für kleine Winkel ist diese Spannung näherungsweise proportional zum Winkel selbst.

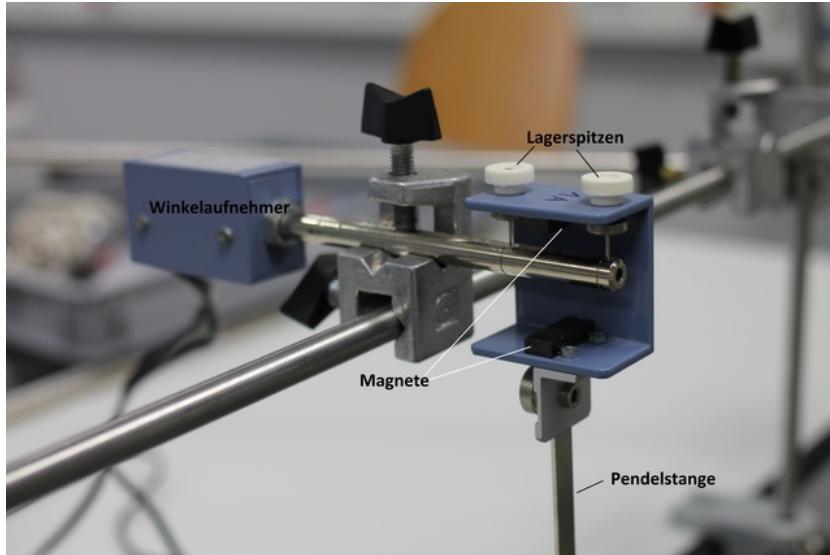


Abbildung 1.4: Aufhängung des Pendels

Mit Hilfe von Stativstangen, Tischklemmen und Verbindungsmuffen wird ein Gestell als Dreibein konstruiert, das den Winkelaufnehmer hält (Abb. 1.3). Der Aufbau sollte so stabil sein, dass bei der Pendelbewegung die Aufhängung nicht mitschwingt.

Der Winkelaufnehmer kann direkt an das CASSY-Modul über zwei Leitungspaare angeschlossen werden (Abb. 1.5). Das eine dient zur Spannungsversorgung und ist besonders gekennzeichnet, das zweite liefert die gemessene Hallspannung. Durch Regeln der Versorgungsspannung kann die Nulllage eingestellt werden.

Bei der Datenaufnahme wird zunächst der zeitliche Verlauf der Spannung aufgezeichnet, die die Schwingung des Pendels wiedergibt. Anschliessend wird die Periodendauer der Pendelschwingung bestimmt. Zunächst lässt man die Stange samt Aufnehmer alleine schwingen und bestimmt die Periodendauer. Dann bringt man den Pendelkörper an und verschiebt ihn solange, bis man wieder dieselbe Periodendauer wie bei der Stange allein erhält. Dann erfolgt eine Messung, aus der die Periodendauer für das gesamte Pendel bestimmt wird. Um die Erdbeschleunigung g zu bestimmen, müssen außerdem **sorgfältig** der Abstand von dem Aufhängepunkt des Pendels zum Mittelpunkt des Pendelkörpers und der Radius des Pendelkörpers gemessen werden. Um die Reproduzierbarkeit der Messung sicherzustellen und um grobe Messfehler auszuschließen, werden jeweils mindestens drei Schwingungsvorgänge aufgezeichnet und drei Messungen der Pendellänge durchgeführt.

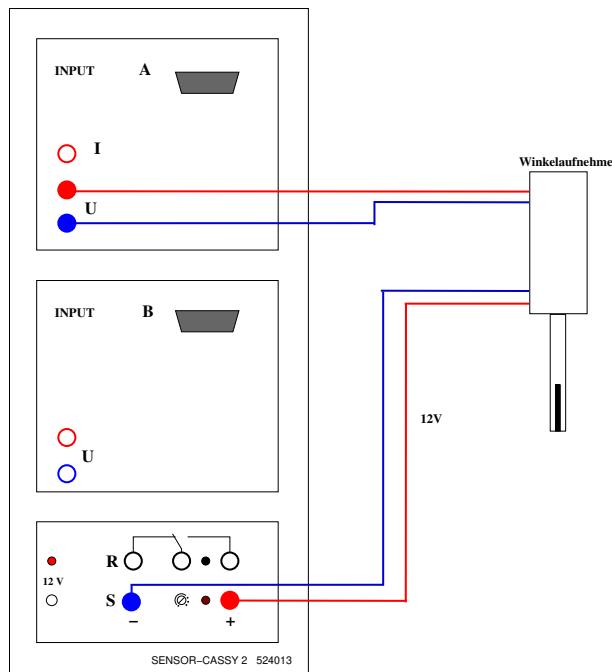


Abbildung 1.5: Anschluss des Winkelauaufnehmers

Bestimmung der Frequenzen

Um aus der aufgezeichneten Schwingung die Periodendauer zu ermitteln, zählt man eine bestimmte Anzahl n voller Perioden aus und teilt das entsprechende Zeitintervall durch n :

$$T = \frac{t_{\text{ende}} - t_{\text{start}}}{n}. \quad (1.16)$$

Um eine möglichst genaue Zeitableitung zu erreichen, verwendet man charakteristische Punkte im Verlauf der aufgezeichneten Schwingungen, z.B. die Spannungsmaxima. Um die Genauigkeit der Bestimmung der Periodendauer weiter zu verbessern und um Probleme bei der Messung zu erkennen, wie sie beispielsweise durch eine zu große Auslenkung des Pendels zu Beginn auftreten können, bestimmt man die Periodendauer mit Hilfe einer linearen Regression. Dazu bestimmt man zum Beispiel (algorithmisch oder einfach von Hand) die Zeitpunkte t_i der i -ten Maxima für $i = 0, 10, 20, \dots$ und trägt dann t_i gegen i auf. Dabei schätzt man die Genauigkeit der Ablesung der t_i zunächst und überprüft diese Schätzung anhand von Residuenplot und Güte der Anpassung.

Fehlerrechnung

In die Bestimmung von g gehen die Periodendauer T , die Pendellänge l_p und der Radius des Pendelkörpers r_p ein. Im Folgenden wird abgeschätzt, wie sich die Messfehler dieser Größen im Ergebnis von g niederschlagen.

- Der Fehler auf l_p ist durch das Messverfahren mit dem Maßband bestimmt und lässt sich nur schwer unter 1mm bringen, was bei einem l_p von ca. 70 cm zu einem relativen Fehler von 1-2 Promille führt.

- Der Fehler von r_p wird durch einen Faktor $r_p^2/l_p^2 \approx 1/300$ unterdrückt und fällt daher kaum ins Gewicht. Selbst wenn r_p lediglich auf 10 % genau bestimmt wird, schlägt sich dieser Fehler nur noch im sub-Promillebereich auf g nieder.
- Die Frequenz sollte sinnvollerweise mit einer Genauigkeit bestimmt werden, die deutlich besser ist als die von l_p , sodass auch dieser Fehler vernachlässigbar klein wird. Um einen relativen Fehler von 0,2 Promille in g zu erhalten, muss T auf 0,1 Promille bestimmt werden, da es quadratisch in g eingeht. Wenn σ_t die Genauigkeit ist, mit der man Start- und Endpunkt bestimmen kann, dann wird der Fehler σ_T auf die Periodendauer: $\sigma_T = \sqrt{2} \cdot \sigma_t/n$. Man sollte also möglichst viele Perioden auszählen, um ein genaues Ergebnis zu erhalten. Nimmt man konkret $\sigma_t = 10 \text{ ms}$ an, dann wird das gesamte Zeitintervall auf 14 ms genau gemessen. Man muss also 140 s lang messen, um eine relative Genauigkeit von 0,1 Promille zu erreichen, was bei einer Frequenz von 0,7 Hz 100 vollen Perioden entspricht. (Durch die Verwendung zusätzlicher Messpunkte im Rahmen einer linearen Regression verbessert sich die Genauigkeit von T noch entsprechend.)
- **Fehler durch Vernachlässigung der Stange:** Wie vorher gezeigt wurde, kann man das Pendel als masselos aufgehängten Zylinder beschreiben und die Stange samt Aufhängung vernachlässigen. Dies gilt allerdings nur, wenn ω_{St} genau gleich ω_P wird. Tatsächlich, erreicht man aber nie eine genaue Übereinstimmung dieser beiden Kreisfrequenzen, sondern beobachtet eine kleine Abweichung. Man kann abschätzen, wie diese Abweichung sich auf den ermittelten Wert der Erdbeschleunigung auswirkt. Wenn $\omega_{St}^2 = \frac{D_{St}}{J_{St}}$ und $\omega^2 = \frac{D_{St}+D_P}{J_{St}+J_P} = \omega_{St}^2 + \epsilon$, dann gilt $\omega_P^2 = \frac{D_P}{J_P} = \omega^2 + \epsilon \cdot \frac{J_{St}}{J_P}$. Da das Verhältnis der Trägheitsmomente von Stange und Pendelkörper ca. 0,1 ist, geht die relative Abweichung der Frequenzen mit dem Faktor 0,2 in die Bestimmung von g ein, da $g \sim \omega^2$. Um unter einem Promille Abweichung zu bleiben, müssen die beiden Frequenzen also besser als 0,5 % übereinstimmen. Dass dies der Fall war, muss im Rahmen der Versuchsauswertung demonstriert werden. Im Prinzip kann man aus der Abweichung der Frequenzen einen Korrektur-Faktor für g bestimmen und das Ergebnis damit korrigieren.

1.2 Schwingungen von gekoppelten Pendeln

Versuch 1M2 Aufgaben: In diesem Experiment werden die Schwingungen von zwei Pendeln untersucht, die durch eine Feder miteinander gekoppelt sind. Für verschiedene Kopplungsstärken werden die Schwingungsdauern der beiden Grundschwingungen sowie der Schwebung des Systems gemessen und die Schwingungsdauer mit der Erwartung verglichen.

Vorkenntnisse/Grundlagen: Federverhalten (Hooke'sches Gesetz), Beschreibung von Schwingungen, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Direktionsmoment

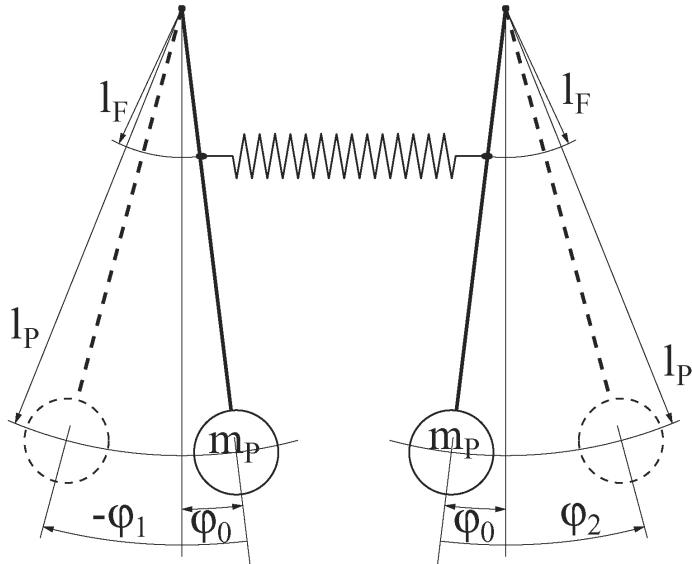


Abbildung 1.6: Gekoppelte Pendel

1.2.1 Die Bewegungsgleichung für das gekoppelte Pendel

Der Versuchsaufbau ist ähnlich wie beim einfachen Pendel. Die Anordnung ist schematisch dargestellt in Abb. 1.6. Die Kopplungsfeder ist befestigt in der Entfernung l_F von den Drehachsen. Die (identischen) physikalischen Pendel P_1 und P_2 werden so montiert, dass die Feder bei Ruhestellung der Pendel gespannt ist. Dadurch hängen die Pendel in der Ruhestellung (im Gleichgewicht) nicht in der Vertikalen, sondern um den Winkel φ_0 nach innen. Das durch die Feder erzeugte Drehmoment ist

$$M_{F,\circ} = -D_F \cdot x_\circ \cdot l_F,$$

wobei D_F die Federkonstante und x_\circ ihre Verlängerung gegenüber dem entspannten Zustand sind. In der Ruhestellung ist $M_{F,\circ}$ entgegengesetzt gleich dem durch die Schwerkraft erzeugten Drehmoment

$$M_{S,\circ} = m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_0,$$

wobei l_s die Entfernung des Schwerpunktes jedes der beiden Pendel von seiner Drehachse und m die Gesamtmasse jedes Pendels bedeuten. Wird P_2 um φ_2 aus der Nulllage ausgelenkt, so wirkt insgesamt das Drehmoment

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot (\varphi_2 - \varphi_0) - D_F \cdot (x_\circ + l_F \varphi_2) \cdot l_F$$

oder

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot \varphi_2.$$

Wird außerdem P_1 um $-\varphi_1$ verschoben, so kommt durch die Feder das Drehmoment $D_F l_F^2 \varphi_1$ hinzu, sodass sich insgesamt ergibt:

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

1 Mechanik

Analog wird für $P1$

$$M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Die Bewegungsgleichungen beider Pendel lauten somit

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1),$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\omega_s^2 = \frac{mgl_s}{J},$$

$$\Omega^2 = \frac{D_F l_F^2}{J} :$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_1 + \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.17)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_2 - \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.18)$$

Dies ist ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen. Die Lösung wird mit Hilfe der Substitutionen $\alpha = \varphi_2 + \varphi_1$, $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ erreicht: Summe und Differenz der beiden Gleichungen 1.17 und 1.18 führen auf die einfachen Differentialgleichungen

$$\ddot{\alpha} = -\omega_s^2 \cdot \alpha \quad (1.19)$$

$$\ddot{\beta} = -(\omega_s^2 + 2\Omega^2) \cdot \beta = -\omega_{sf}^2 \cdot \beta \quad (1.20)$$

mit den Lösungen

$$\alpha(t) = \varphi_2(t) + \varphi_1(t) = A \cdot \sin(\omega_s t) + B \cdot \cos(\omega_s t), \quad (1.21)$$

$$\beta(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = C \cdot \sin(\omega_{sf} t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t). \quad (1.22)$$

Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Liegen beim Start der Bewegung keine Anfangswinkelgeschwindigkeiten vor, d.h. $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$, so wird $A = C = 0$, und aus der Summe der Gleichungen 1.21 und 1.22 wird

$$2\varphi_2(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t),$$

$$2\varphi_1(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) - D \cdot \cos(\omega_{sf} t).$$

Werden die Pendel aus den Positionen $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und $\varphi_2(t=0) = \varphi_{max}$ gestartet, so wird $D = 0$ und $B = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen **gleichsinnig** gemäß

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \quad (1.23)$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \quad (1.24)$$

mit der Kreisfrequenz ω_s , d.h. der Kreisfrequenz jedes Pendels ohne Kopplung.

Werden die Pendel aus den entgegengesetzten Positionen $\varphi_1(t=0) = -\varphi_{max}$, $\varphi_2(t=0) = +\varphi_{max}$ gestartet, so wird $B = 0$ und $D = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen **gegensinnig**:

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \quad (1.25)$$

$$\varphi_1(t) = -\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t) \quad (1.26)$$

mit der Kreisfrequenz ω_{sf} :

$$\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2. \quad (1.27)$$

Wird die Schwingung mit Pendel $P1$ mit $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und Pendel $P2$ in Ruheposition, $\varphi_2(t=0) = 0$ gestartet, so wird $B = D = \varphi_{max}$ und

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t) \quad (1.28)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) - \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t). \quad (1.29)$$

Jedes Pendel schwingt mit einer Überlagerung von zwei verschiedenen Frequenzen. Mit Hilfe eines Additionstheorems für trigonometrische Funktionen lassen sich die Gleichungen umschreiben in

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos\left(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2}t\right), \quad (1.30)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin\left(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2}t\right). \quad (1.31)$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_k = \frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2} \quad (1.32)$$

$$\omega_{sch} = \frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2} \quad (1.33)$$

wird daraus

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sch}t) \cdot \cos(\omega_k t), \quad (1.34)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\omega_{sch}t) \cdot \sin(\omega_k t). \quad (1.35)$$

Die Bewegung jedes der beiden Pendel besteht also aus der Überlagerung zweier Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{sch} und ω_k . Sie kann als Schwingung der höheren Frequenz ω_k angesehen werden, die mit der niedrigeren Frequenz ω_{sch} moduliert ist. Diese Erscheinung wird Schwebung genannt.

1.2.2 Messgrößen

Der Messung zugänglich sind die Schwingungsdauern der **gleichsinnigen** Mode,

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}, \quad (1.36)$$

der **gegensinnigen** Mode,

$$T_{sf} = \frac{2\pi}{\omega_{sf}}, \quad (1.37)$$

sowie im Falle der **Schwebung**:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} + \omega_s} \quad \text{und} \quad T_{sch} = \frac{2\pi}{\omega_{sch}} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} - \omega_s}. \quad (1.38)$$

1 Mechanik

Durch Einsetzen von ω_s und ω_{sf} ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Schwingungsdauern:

$$T_k = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s + T_{sf}}, \quad (1.39)$$

$$T_{sch} = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s - T_{sf}}. \quad (1.40)$$

Als Kopplungsgrad κ des Pendelsystems wird das Verhältnis

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{\omega_s^2 + \Omega^2} = \frac{D_F l_F^2}{m g l_s + D_F l_F^2} \quad (1.41)$$

definiert. Mit $\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2$ folgt

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 - \omega_s^2)}{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 + \omega_s^2)} = \frac{T_s^2 - T_{sf}^2}{T_s^2 + T_{sf}^2}. \quad (1.42)$$

Der Kopplungsgrad ist umso kleiner (die Kopplung also umso schwächer), je näher die Befestigungspunkte der Feder an den Drehachsen der Pendel liegen.

1.2.3 Versuchsaufbau und Durchführung

Es werden zwei Pendel im Abstand von ca. 50 cm an dem Gestell befestigt und über ein Federpaar gekoppelt. Die Federn werden in verschiedenen Höhen an den Pendelstangen befestigt, wodurch unterschiedliche Kopplungskonstanten erzielt werden. Da die Federn nicht gestaucht werden können, müssen die Pendel so weit auseinander sein, dass die Federn in der Ruhelage schon gespannt sind. Es muss darauf geachtet werden, dass die Pendelausschläge so klein bleiben, dass die Federn nie völlig entspannt sind.

Beide Winkelauflnehmer können gleichzeitig mit einem CASSY-Modul ausgelesen werden und haben einen unabhängigen Nullabgleich. Um eine günstige Darstellung auf dem Bildschirm zu erzielen, kann die Nulllage eines Pendels entweder durch die Versorgungsspannung des Winkelauflnehmers oder durch Einstellung eines Offsets in der CASSY-Software verschoben werden.

Es werden die Pendelausschläge aufgenommen und die Fouriertransformierten bestimmt. Im allgemeinen Fall erhält man eine Schwebung, die eine Überlagerung aus zwei Schwingungen mit dicht benachbarten Frequenzen ist. Im Fourierspektrum erkennt man deshalb zwei Spitzen, die mit abnehmender Kopplungsstärke zusammenrücken. Lässt man die Pendel gleichsinnig (in Phase) schwingen, so taucht nur die kleinere der beiden Frequenzen auf. Schwingen die Pendel gegensinnig, so erhält man im Spektrum nur die Spitze der höheren Frequenz. Die Abstände l_F zwischen dem Aufhängepunkt des Pendels und der Befestigung der Feder werden gemessen.

Für eine gegebene Position der Kopplungsfedern sollen zunächst die beiden Schwingungsmoden sowie die Schwebung angeregt werden. Um den typischen Fehler der Frequenzmessung zu erhalten, wird die Messung der Schwebung mehrmals

wiederholt und empirisch die Standardabweichung bestimmt. Danach wird der Kopplungsgrad variiert und jeweils eine Schwebung aufgezeichnet. Um einen Vergleichswert für die Federkonstante zu erhalten, wird die Ausdehnung der Feder bei Belastung mit verschiedenen Massestücken gemessen.

1.2.4 Auswertung

Aus den gemessenen Frequenzen kann jeweils der Kopplungsgrad κ bestimmt werden (Gl. (1.42)). Trägt man $1/l_F^2$ als Funktion von $1/\kappa - 1$ auf, so ergibt sich nach Gl. (1.41) eine Ursprungsgerade, aus deren Steigung die Federkonstante ermittelt werden kann:

$$\frac{1}{l_F^2} = \frac{D_F}{ml_{sg}} \cdot \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right). \quad (1.43)$$

1.3 Trägheitsmomente

Physikalische Grundlagen: Definition des Trägheitsmomentes, Satz von Steiner, Direktionsmoment, Schwingungen

**Versuch
1M3**

1.3.1 Einführung

Das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers, dessen Massenelemente Δm_i den Abstand r_i zur Drehachse haben, ist gegeben durch

$$J = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 \quad \text{bzw.} \quad J = \int r^2 dm. \quad (1.44)$$

Für eine punktförmige Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gilt

$$J = m \cdot r^2.$$

Das Trägheitsmoment wird aus der Schwingungsdauer einer Drillachse bestimmt, auf die der Probekörper gesteckt wird und die über eine Schneckenfeder elastisch mit dem Stativ verbunden ist (Abb. 1.7):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (1.45)$$

Das System wird zu harmonischen Schwingungen angeregt. Aus der Schwingungsdauer T errechnet man bei bekanntem Direktionsmoment D das Trägheitsmoment des Probekörpers gemäß

$$J = D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2. \quad (1.46)$$

Die Messwerte werden mit den theoretischen Vorhersagen für einen Körper der gegebenen Form verglichen.

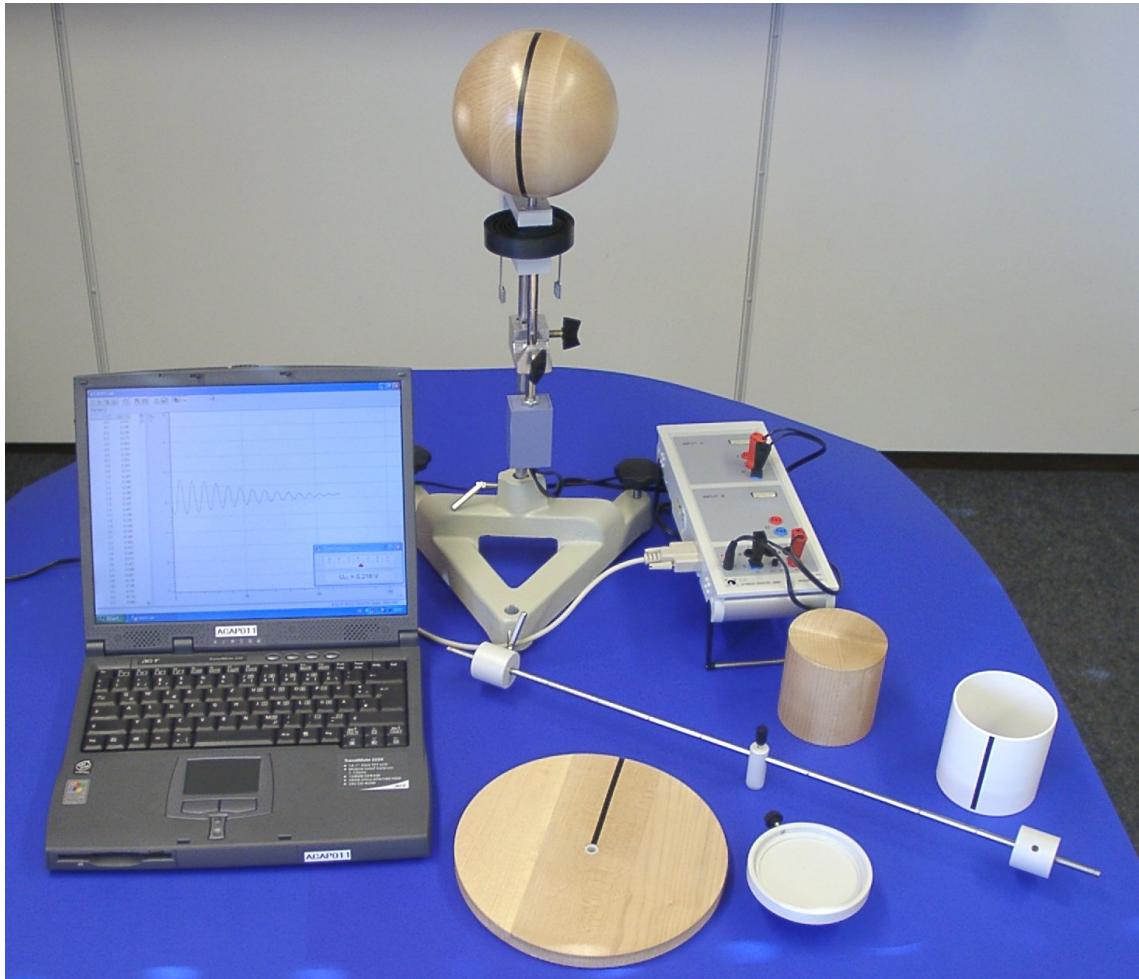


Abbildung 1.7: Versuchsaufbau für die Messung von Trägheitsmomenten.

1.3.2 Versuchsziele

Im ersten Teil des Versuches wird das Trägheitsmoment eines "Massenpunktes" in Abhängigkeit vom Abstand r zur Drehachse bestimmt. Dazu wird ein Stab mit zwei gleichen Massenstücken in Querrichtung auf die Drillachse gesteckt. Die Schwerpunkte der beiden Massenstücke haben den gleichen Abstand r zur Drehachse, so dass das System ohne Unwucht schwingt.

Im zweiten Teil des Versuches werden die Trägheitsmomente eines Hohlzylinders, eines Vollzylinders und einer Vollkugel miteinander verglichen. Dazu stehen zwei Vollzylinder mit gleicher Masse jedoch unterschiedlichen Radien zur Verfügung, weiterhin ein Hohlzylinder, der in Masse und Radius mit einem Vollzylinder in etwa übereinstimmt, und eine Vollkugel, deren Trägheitsmoment mit einem der Vollzylinder in etwa übereinstimmt.

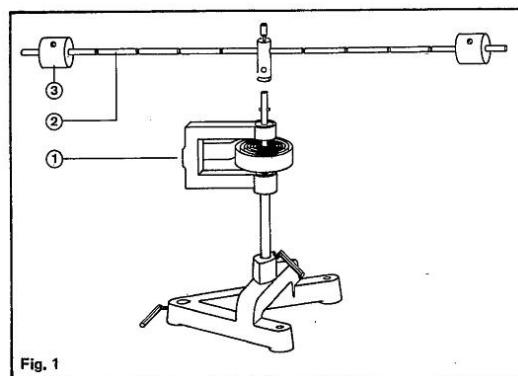
Im dritten Teil des Versuchs wird der Steinersche Satz am Beispiel einer flachen Kreisscheibe experimentell verifiziert. Dazu werden die Trägheitsmomente J_a ei-

ner Kreisscheibe für verschiedene Abstände a der Drehachse zum Schwerpunkt gemessen und mit dem Trägheitsmoment J_0 um die Schwerpunktsachse verglichen. Es soll der Steinersche Satz

$$J_a = J_0 + m \cdot a^2 \quad (1.47)$$

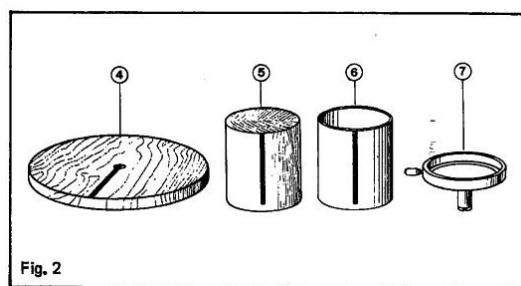
bestätigt werden.

1.3.3 Versuchsaufbau



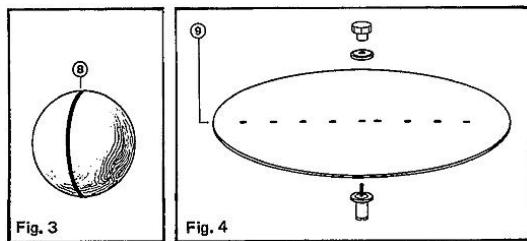
Zum Versuchsaufbau gehören

1. Drillachse mit zweifach kugelgelagerter Welle, durch eine Schneckenfeder an eine Gabel angekoppelt,
2. Stab mit Kupplungsstück zum Aufstecken auf die Drillachse; je 5 Kerben in ca. 0,05 m Abständen zu beiden Seiten der ebenfalls gekerbten Stabmitte,
3. zwei Massen (als Modell von Massenpunkten), längs des Stabes (2) verschiebbar, mit Kugelrasten, die in die Kerben des Stabes greifen, so dass die Massen in definierten Abständen von der Stabmitte gehalten werden,
4. Dünner Vollzylinder aus Holz (Holzscheibe) mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse,



5. Vollzylinder aus Holz,

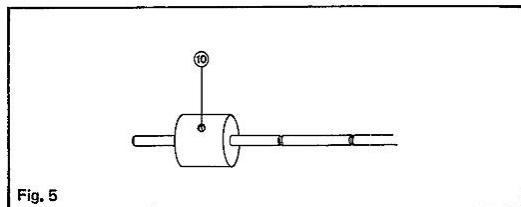
6. Hohlzylinder aus Metall,
7. Aufnahmeteller aus Metall für die Zylinder (5) und (6) mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse und mit Schraube zum Fixieren der Zylinder. Durchmesser und Höhe der Zylinder (5) und (6) stimmen überein (nachmessen!), die Massen der 3 Zylinder (4), (5) und (6) sind näherungsweise gleich (nachmessen!).
8. Kugel aus Holz, Durchmesser ca. 145 mm, mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse. Die Trägheitsmomente der Kugel und des Zylinders (4) sind etwa gleich.



9. Kreisscheibe mit Halterung zum Aufstecken auf die Drillachse mit 9 Löchern zum Aufspannen der Scheibe auf der Halterung in der Scheibenmitte, sowie im Abstand von 0,02; 0,04; ... 0,14; 0,16 m von der Scheibenmitte.
10. Winkelauflnehmer mit Befestigung; CASSY.

Hinweise zum Experimentieren:

Schrauben (10), welche die federnden Kugelrasten der Massen (3) gegen den Stab (2) drücken, nicht betätigen. Die Schrauben sind so eingestellt, dass man einerseits die Massen entsprechend den Versuchsbedingungen längs des Stabes verschieben



kann, und dass die Massen anderseits gegen die Zentrifugalkraft auf dem Stab gehalten werden.

Der Schwingungsvorgang wird mit Hilfe eines Winkelauflnehmers in elektrische Signale umgewandelt. Der Aufnehmer liefert für kleine Auslenkungen eine winkelproportionale Spannung. Er besteht aus einem vernickelten Messingrohr (10 mm Durchmesser) mit angeschaubtem Kleingeschäuse für die elektrischen Bauteile. In dem Messingrohr befindet sich eine Nut, an deren Ende in einem Langloch eine magnetfeldempfindliche Sonde (Hall-Sonde) eingeklebt ist. Die Sonde ist so orientiert, dass sie auf die zur Nut senkrecht stehende Komponente des Magnetfeldes

anspricht. Die zwei felderzeugenden Permanentmagnete sind so auf die Innenseiten einer U-förmigen Gabel geklebt, dass sich Nord- und Südpol gegenüberliegen. Im Ruhezustand verschwindet daher die vertikale Feldkomponente; die Ausgangsspannung des Winkelauflaufnehmers ist somit 0. Wird nun die Drillachse um den Winkel α aus der horizontalen Richtung ausgelenkt, tritt eine Feldkomponente in vertikaler Richtung auf. Die exakte Abhängigkeit wird durch die Gleichung

$$B_{\perp} = B \cdot \sin \alpha$$

beschrieben. Im Falle kleiner Winkel kann $\sin \alpha$ durch α approximiert werden, so dass die Ausgangsspannung proportional dem Auslenkwinkel α wird. Die Abweichung von diesem linearen Verhalten liegt bis zu einem Winkel von $\alpha = \pm 14$ Grad (entsprechend $\sin \alpha = 0,24$) unter 1%. Es ist darauf zu achten, dass sich die Hall-Sonde tatsächlich im Magnetfeld und nicht etwa zu weit unten befindet.

Die Versorgungsspannung wird aus der Spannungsquelle des Sensor-CASSYs über das entsprechend gekennzeichnete Leitungspaar zugeführt und soll im Bereich 12-16 V liegen. Es ist auf die Polarität gemäß den Farben der Anschlussstecker (rot-positiv, blau-negativ) zu achten. Bei Fehlbeschaltung tritt keine Ausgangsspannung auf. Die von dem Winkelauflaufnehmer gelieferten Spannungssignale werden mit Hilfe des Messwerterfassungssystems CASSY aufgezeichnet.

Die Schwingungsdauern sollten zweckmäßigerweise durch Mittelwertbildung aus mehreren Messungen für z.B. fünf Schwingungen bestimmt werden. Aus der Streuung der Messwerte ergibt sich auch der Fehler für die Schwingungsdauern.

Das Trägheitsmoment der Drillachse liegt in der Größenordnung von 10^{-5} kg m². Es ist in der Auswertung nicht berücksichtigt, so dass die experimentell ermittelten Trägheitsmomente stets etwas größer als die theoretisch erwarteten Werte sind.

1.3.4 Bestätigung von $J = f(r^2)$ und Bestimmung des Direktionsmomentes D

Zunächst werden das Gewicht der Massen m_{W1} , m_{W2} und das Gewicht des Stabes m_{Stab} mit einer Waage gemessen. Die Länge des Stabes l_{Stab} , sowie die Abstände der Rillen zum Mittelpunkt werden mit einem Maßband bestimmt.

Dann wird der Stab ohne Massen auf die Drillachse gesteckt und die Schwingungsdauer gemessen. Anschliessend werden die Massen (m_{W1} , m_{W2}) symmetrisch in geeigneten Abständen r von der Stabmitte angeordnet und ebenfalls die Schwingungsdauern gemessen.

Das Trägheitsmoment für den Stab alleine ist

$$J_{\text{Stab}} = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{Stab}} \cdot l_{\text{Stab}}^2$$

1 Mechanik

und für die "Massenpunkte" im Abstand r von der Drillachse:

$$J_{\text{Massen}} = (m_{W1} + m_{W2}) \cdot r^2 \equiv m_W \cdot r^2.$$

Es gilt also folgender funktionaler Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \frac{J_{\text{Massen}} + J_{\text{Stab}}}{D} \\ &= \frac{4\pi^2}{D} m_W \cdot r^2 + \frac{4\pi^2}{D} \cdot J_{\text{Stab}}. \end{aligned}$$

Die Messung mit dem Stab alleine entspricht also dem Messwert für $r = 0$.

Der linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Schwingsdauern T^2 und dem Quadrat des Abstandes r^2 erlaubt es, mit Hilfe einer linearen Regression gemäß

$$T^2 = a \cdot r^2 + b$$

aus der Steigung der Geraden a das Direktionsmoment D zu bestimmen:

$$D = \frac{4\pi^2}{a} \cdot m_W.$$

Mit bekanntem Direktionsmoment D kann anschließend aus dem Achsenabschnitt b das Trägheitsmoment des Stabes experimentell bestimmt werden,

$$J_{\text{Stab}}^{\text{exp.}} = \frac{bD}{4\pi^2},$$

und mit der theoretischen Vorhersage

$$J_{\text{Stab}}^{\text{theo.}} = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{Stab}} \cdot l_{\text{Stab}}^2$$

verglichen werden.

1.3.5 Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern gleicher Masse mit verschiedener Massenverteilung

Dünner Vollzylinder aus Holz (Holzscheibe)

Die Masse des dünnen Vollzylinders aus Holz (Holzscheibe - HS) m_{HS} wird durch Wiegen und sein Durchmesser d_{HS} mit dem Maßband bestimmt. Dann wird die Holzscheibe auf der Drillachse befestigt und die Schwingungsdauer gemessen.

$$J_{\text{HS}}^{\text{exp.}} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{\text{HS}}^2$$

Der theoretisch zu erwartende Wert ergibt sich zu:

$$J_{\text{HS}}^{\text{theo.}} = \frac{1}{2} m_{\text{HS}} \left(\frac{d_{\text{HS}}}{2} \right)^2$$

Vollzylinder (VZ) und Hohlzylinder (HZ)

Beide Zylinder werden auf einen Aufnahmeteller (T) gesetzt, so dass sich die Trägheitsmomente J_{VZ} und J_{HZ} nicht unmittelbar experimentell, sondern durch Differenzbildung ermitteln lassen:

$$\begin{aligned} J_{VZ} &= J_{VZ+T} - J_T \\ J_{HZ} &= J_{HZ+T} - J_T \end{aligned}$$

Aufnahmeteller:

$$J_T^{exp} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_T^2$$

Aufnahmeteller + Vollzylinder:

$$J_{VZ+T} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{VZ+T}^2$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Vollzylinders

$$J_{VZ}^{exp} = J_{VZ+T} - J_T$$

im Vergleich zu dem theoretisch zu erwartenden Wert von

$$J_{VZ}^{theo} = \frac{1}{2} m_{VZ} \left(\frac{d_{VZ}}{2} \right)^2.$$

Aufnahmeteller + Hohlzylinder:

$$J_{HZ+T} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{HZ+T}^2$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders

$$J_{HZ}^{exp} = J_{HZ+T} - J_T$$

im Vergleich zu dem theoretisch zu erwartenden Wert von

$$J_{HZ}^{theo} = m_{HZ} \left(\frac{d_{HZ}}{2} \right)^2.$$

1.3.6 Trägheitsmoment der Kugel

$$J_K^{exp} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_K^2$$

Um das experimentelle Ergebnis mit der theoretischen Vorhersage

$$J_K^{theo} = \frac{2}{5} m_K R_K^2$$

vergleichen zu können, benötigen wir den Radius der Kugel R_K . Dieser lässt sich mit dem Maßband nur sehr ungenau abschätzen. Wesentlich genauer ist es, die Dichte der Kugel ρ_K zu verwenden, um über die Beziehung

$$m_K = V_K \cdot \rho_K = \frac{4}{3} \pi R_K^3 \rho_K$$

den Radius zu bestimmen. Mit $\rho_K = (0,63 \pm 0,02) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ erhalten wir:

$$R_K = \left[\frac{m_K}{\frac{4}{3}\pi\rho_K} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Bestimmt man Massen und Radien der Versuchskörper, so lässt sich experimentell bestätigen, dass Kugel und Holzscheibe das gleiche Trägheitsmoment haben, wenn gilt:

$$m_{HS} \cdot R_{HS}^2 = \frac{4}{5} m_K \cdot R_K^2.$$

1.3.7 Bestätigung des Steinerschen Satzes

In diesem Versuchsteil soll die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J vom Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktachse untersucht werden. Der Steinersche Satz

$$J_a = J_0 + m \cdot a^2 \quad (1.48)$$

soll bestätigt werden. J_0 ist hierbei das Trägheitsmoment bei Rotation um die Schwerpunktsachse.

Die Kreisscheibe wird zunächst um ihre Schwerpunktsachse rotieren gelassen ($a = 0$). Zur besseren Genauigkeit und um die Schwankung der Messwerte abzuschätzen, wird die Messung mehrfach wiederholt. In gleicher Weise wird die Schwingungsdauer T als Funktion des Abstandes $a = 0,02; 0,04; \dots 0,16 \text{ m}$ zwischen Rotations- und Schwerpunktsachse bestimmt.

Wichtig:

Nach jeder Änderung von a den Stativfuß mit Hilfe der Dosenlibelle wieder so ausrichten, dass die Kreisscheibe in der Horizontalen rotiert.

Zur Auswertung trage man $J = f(a^2)$ auf, bestimme die Steigung und vergleiche mit der Erwartung.

1.4 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

Versuch 1M4 Aufgaben: In diesem Experiment wird die beschleunigte Bewegung einer fallenden Stahlkugel untersucht und die Erdbeschleunigung ermittelt.

Vorkenntnisse/Grundlagen: gleichförmige Bewegungen und gleichmäßig beschleunigte Bewegungen, Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung

1.4.1 Freier Fall

Für eine beschleunigte Bewegung gilt:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a. \quad (1.49)$$

Durch zweimaliges Integrieren dieser Differentialgleichung erhält man die allgemeine Bewegungsgleichung eines fallenden Körpers ohne den Einfluss von Reibung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2. \quad (1.50)$$

Beim freien Fall im luftleeren Raum ist die Beschleunigung a die Erdbeschleunigung g . Aus Gleichung (1.50) lässt sich g durch eine Weg-Zeit-Messung bestimmen.

1.4.2 Versuchsaufbau

Die bei dem verwendeten Versuchsaufbau möglichen Fallhöhen sind nicht groß. Daher werden keine großen Geschwindigkeiten erreicht, sodass die Luftreibung vernachlässigt werden kann. Andererseits sind die entsprechenden Fallzeiten so kurz, dass eine handbediente Stoppuhr zu unpräzise Ergebnisse liefern würde. Daher erfolgt die Zeitmessung mithilfe einer elektronischen Stoppuhr oder eines Oszilloskops (Abbildung 1.8).

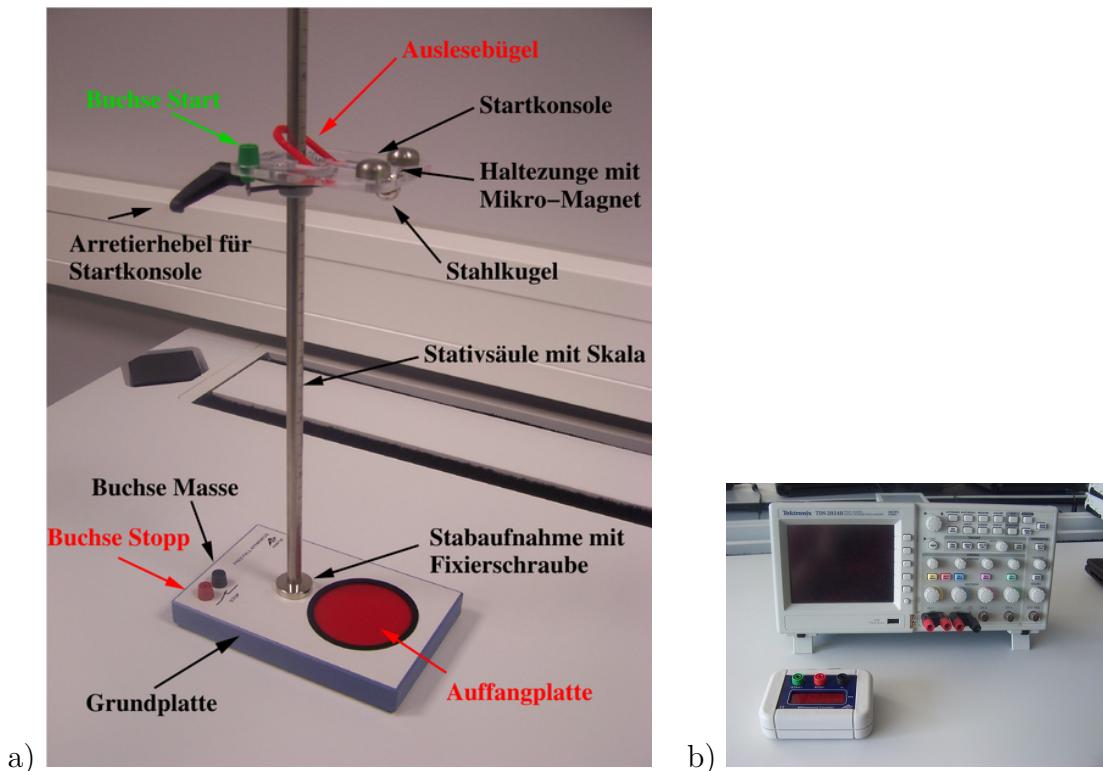


Abbildung 1.8: a) Versuchsaufbau Grundgerät Freier Fall, b) Optionale Auslesegeräte: Digital-Zähler oder Oszilloskop

Die Apparatur zum freien Fall dient zur Messung der Fallzeit einer Stahlkugel für verschiedene einstellbare Fallhöhen von 20 bis 960 mm (Abbildung 1.8). In die Grundplatte des Aufbaus ist eine Auffangplatte integriert. Eine Stativstange mit Skala wird auf der Grundplatte montiert (Abbildung 1.9 a). Die Stativstange wird dazu bis zum Anschlag in die Stabaufnahme der Grundplatte eingesetzt.

1 Mechanik

Die Ausrichtung der Stange sollte so sein, dass die Skala zur roten Auffangplatte weist. Die Fixierschraube wird mit dem Imbusschlüssel handfest angezogen. Die in der Höhe verstellbare Startkonsole mit Auslösevorrichtung für den Fallkörper befindet sich an der Stativstange (Abbildung 1.9 b). Mit Hilfe des Arretierhebels wird die Fallhöhe eingestellt und an der Säulen Skala mit Bezug zur oberen Bohrungskante der Startkonsole abgelesen (Abbildungen 1.9 b und d). Der Skalenwert entspricht in etwa der Fallstrecke, also der Distanz zwischen Kugel und Auffangplatte. Ein möglicher Offset s_0 in der Distanz kann später bei der Analyse der Weg-Zeit-Messung berücksichtigt und bestimmt werden.

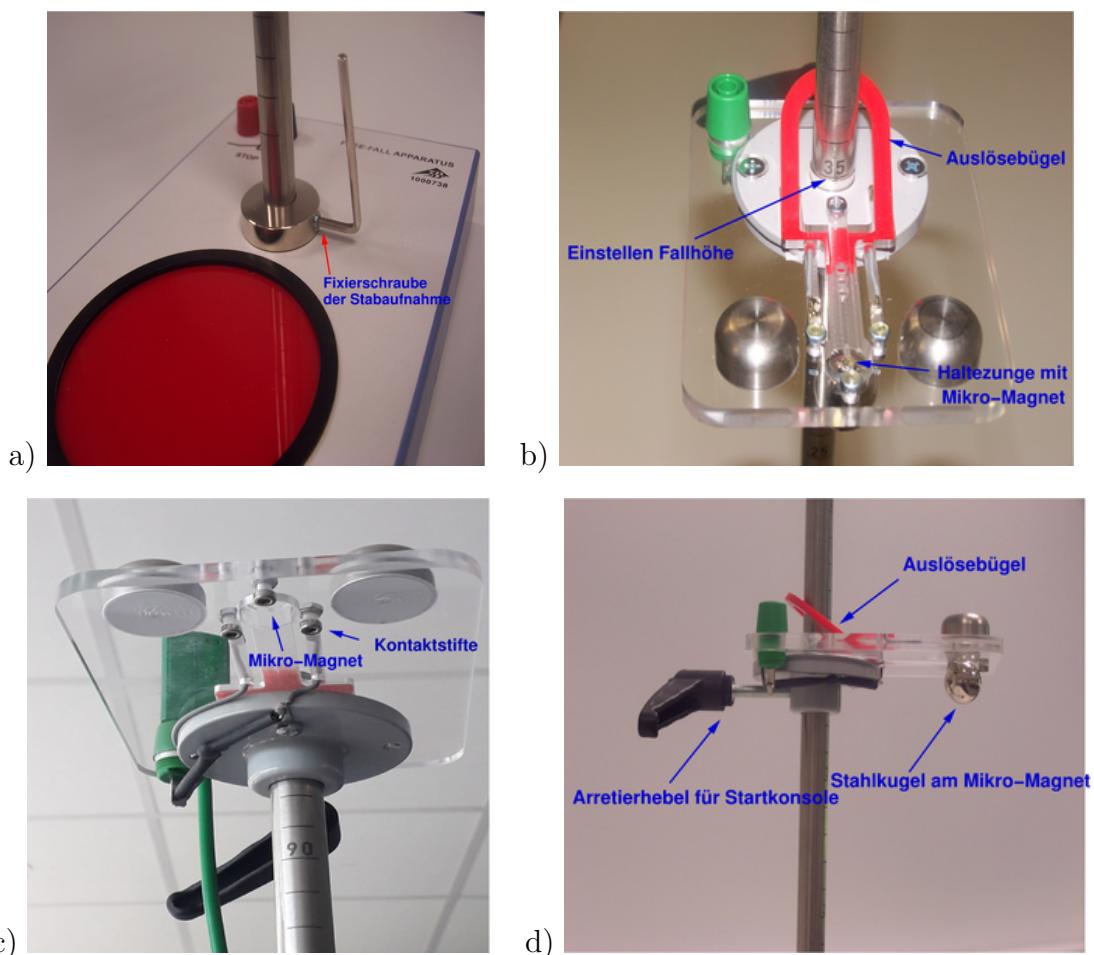


Abbildung 1.9: Versuchsaufbau, a) Aufbau der Stativstange, b) Auslösevorrichtung und Ablesung an oberer Bohrungskante der Startkonsole, c) Kontaktstifte und Mikro-Magnet für die Ausgangsposition des Fallkörpers, d) Einstellen der Fallhöhe mit Arretierhebel und an Kontaktstiften und Mikro-Magnet gehaltene Stahlkugel.

Unter der Auslösevorrichtung befinden sich drei Kontaktstifte (Abbildung 1.9 c), die eine exakte Ausgangsposition des Fallkörpers gewährleisten sollen. Mit der leitenden Oberfläche der Stahlkugel bilden diese Kontaktstifte einen Schalter, der

nach dem Start der Kugel öffnet. Die Haltezunge besitzt an ihrer Spitze einen Mikro-Magneten, der die Kugel in Startposition hält (Abbildung 1.9 c). Beim Aufprall der Kugel auf die Auffangplatte wird die Zeitmessung gestoppt. Die Auffangplatte ist so gestaltet, dass die aufprallende Kugel auf ihr liegen bleibt und nicht auf den Boden fällt.

1.4.3 Versuchsdurchführung

Zur Durchführung des Experimentes sind das Fallgerät, zwei Sätze Experimentskabel und ein Digital-Zähler und/oder ein Oszilloskop erforderlich.

Lösen Sie den Arretierhebel und stellen Sie die gewünschte Fallhöhe ein. Die Stahlkugel wird von unten an die Haltezunge zwischen den drei Auflagepunkten angelegt. Die Haltezunge ist dabei leicht nach unten zu drücken.

Der Fallvorgang wird mit leichtem Druck auf den Auslösebügel gestartet. Eine ruhige und feinfühlige Auslösung ist nötig für Messwerte mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit. Wird der Vorgang mit zuviel Druck auf den Auslösebügel gestartet, kann dies zur Folge haben, dass die Kugel bereits eine Anfangsgeschwindigkeit vor dem Start der Messung hat und/oder die Gesamtstrecke einen zusätzlichen Offset erhält. Der Mikro-Magnet löst sich bereits bei leichtem Druck auf den Auslösebügel von der Kugeloberfläche. Mit dem Beginn der Fallbewegung öffnet der Start-Kontakt. Das Auftreffen der Kugel auf die Auffangplatte bewirkt ein kurzzeitiges Öffnen des Stopp-Kontaktes und beendet so die Zeitmessung.

1.4.3.1 Messungen mit dem Digital-Zähler

Bei der Messung nur mit dem Digital-Zähler als Messgerät wird das Fallgerät mit dem Zähler verbunden. Dabei ist bei dem Fallgerät und dem Zähler auf die Farbkodierung der Buchsen zu achten (Abbildung 1.10).

Der Digital-Zähler misst die Fallzeit zwischen dem Startzeitpunkt des Fallvorgangs, verursacht durch die Betätigung des Auslösebügels, und dem Stopzeitpunkt, verursacht durch das Auftreffen der Stahlkugel auf der Auffangplatte. Die zeitliche Auflösung des Gerätes beträgt ± 0.5 ms. Notieren Sie den gemessenen Wert der Fallzeit für eine eingestellte Fallhöhe. Zwecks statistischer Analyse führen Sie für jede Fallhöhe die Messungen mehrmals durch, bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung der Verteilung der gemessenen Zeitwerte und den Fehler auf den Mittelwert der jeweiligen Fallzeit. Zur Auswertung trägt man die Fallhöhe als Funktion der jeweils gemittelten Fallzeit auf und passt ein Polynom 2. Ordnung gemäß Gleichung (1.50) an. Eine entsprechende Routine findet sich in der Praktikumsbibliothek. Dies ergibt die Fallbeschleunigung g , die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und den Offset s_0 auf die Fallhöhe des Fallkörpers.

1.4.3.2 Messungen mit dem Oszilloskop

Zur Verbesserung der Messung der Fallzeit wird ein Oszilloskop angeschlossen. Dazu wird das Startsignal mit dem Kanal 1 des Oszilloskops verbunden und das

1 Mechanik

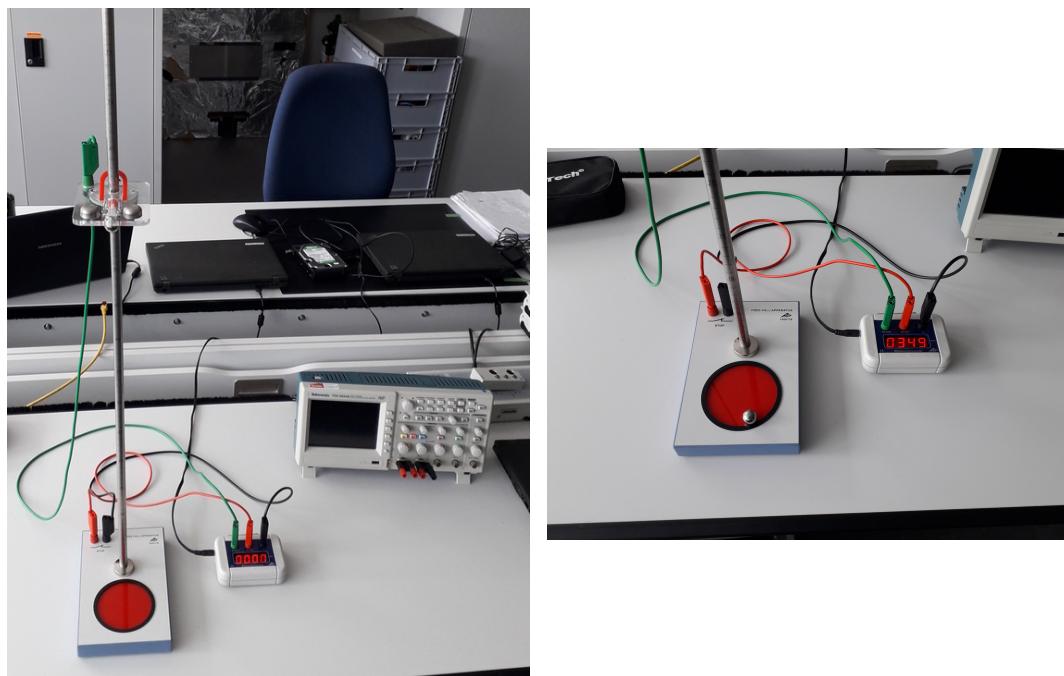


Abbildung 1.10: links: Versuchsaufbau mit Digital-Zähler, rechts: Messung mit Digital-Zähler

Stopsignal mit dem Kanal 2. Die Masse wird nur mit einem der beiden Kanäle verbunden (Abbildung 1.11).

Das Oszilloskop wird auf **Single Seq** eingestellt. Es sollte auf die steigende Flanke des Startsignals getriggert werden und der auslösende Triggerlevel der Messung sollte nicht zu hoch eingestellt werden. Auf dem Schirm des Oszilloskopes sollte dann das Startsignal sichtbar werden (Abbildung 1.12 a). Das Stoppsignal wird durch das erste Auftreffen der Stahlkugel auf der Auffangplatte ausgelöst und sollte als kurzes Signal sichtbar werden. Ein erneutes Auftreffen der Kugel wird durch weitere Stoppsignale im zeitlichen Verlauf des Kanals 2 sichtbar (Abbildung 1.12 a).

Mit dem Regler **Position** der horizontalen Einstellung der X-Achse werden die Start- und Stoppsignale soweit auf dem Bildschirm nach links verschoben, bis das Stoppsignal nahe am linken Rand ist (Abbildung 1.12 b). Mit dem Knopf **Horiz Menu** wird das Menü für die X-Achse aufgerufen und der Schalter **Dehnen** betätigt. Mit dem Regler **Sec/Div** kann dann die Einteilung der X-Achse entsprechend fein eingestellt werden (Abbildung 1.12 c). Das Stoppsignal kann nun mit dem Regler **Position** so lange auf der X-Achse verschoben werden, bis man mit dem **Cursor Zeit** sieht, dass der maximale Wert des Stoppsignals genau auf der Y-Achse des Bildschirms liegt (Abbildung 1.12 d). Das Oszilloskop zeigt dann am oberen rechten Bereich die zeitliche Position an. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich die Genauigkeit der Zeitmessung um einen Faktor 10 verbessern.

Führen Sie für jede Fallhöhe die Messungen wieder 5 bis 10 mal durch, bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung der Verteilung der gemessenen Zeitwerte und den Fehler auf den Mittelwert der jeweiligen Fallzeit. Die Auswertung

1.4 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

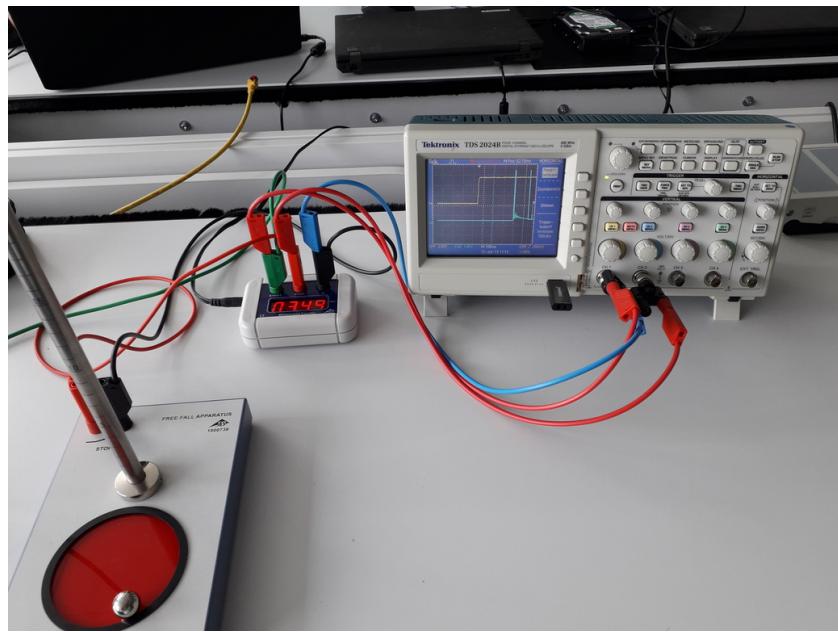


Abbildung 1.11: Versuchsaufbau mit Digital-Zähler und Oszilloskop.

geschieht analog zur Messung mit dem Digital-Zähler.

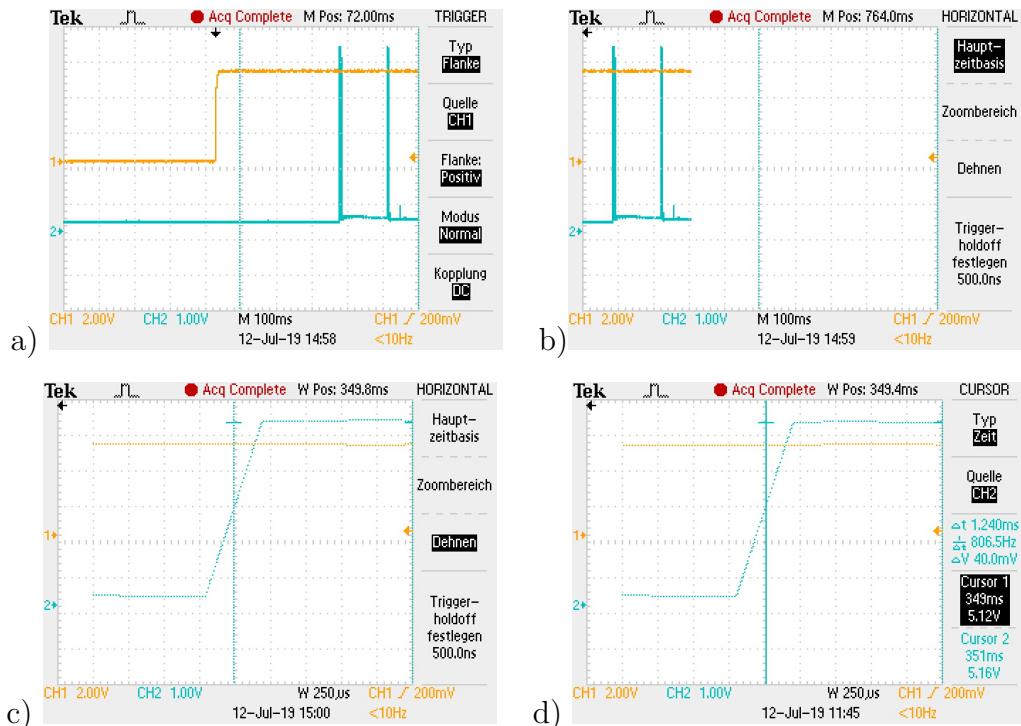


Abbildung 1.12: Messungen mit dem Oszilloskop: a) Start- und Stoppsignal, b) Signale so verschoben, dass der Anfang des Stoppsignals sehr nahe am linken Rand des Bildschirms ist, c) gedehnte Darstellung des zeitlichen Verlaufs des Stoppsignals, d) Verschieben des Stoppsignals, bis maximaler Wert des Stoppsignals auf Y-Achse liegt.

2 Akustik

In der Akustik steht ein reiches Versuchsprogramm zur Verfügung, bei dem wichtige Wellenphänomene studiert werden können.

- Schallwellen in Gasen / Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Teilversuche eignen sich neben der Messwerterfassung mit dem CASSY-System auch für die Durchführung mit dem Oszilloskop.
 - Laufende Welle – Laufzeit gegen Laufstrecke (2.1.3)
 - Stehende Welle – Schalldruck gegen Frequenz (2.1.4)
 - Stehende Welle – Schalldruck gegen Rohrlänge (2.1.5)
 - Stehende Welle – Schalldruck gegen Ort (2.1.6)
- Schallwellen in Festkörpern / Elastizitätsmodul (2.2)
- Physik der Gitarre
 - Erzeugung und Vermessung einer Schwebung (2.3.4)
 - Bestimmung der Saitenspannung einer Gitarrensaite (2.3.5)
 - Analyse und Variation des Obertonspektrums einer Gitarre (2.3.6)

2.1 Schallgeschwindigkeit in Gasen

2.1.1 Versuchsziel

Wir messen die Schallgeschwindigkeit in Luft aus Laufzeitmessungen (Kap. 2.1.3) und mithilfe von stehenden Wellen: durch Messung der Resonanzfrequenzen (Kap. 2.1.4) bzw. Resonanzlängen (Kap. 2.1.5) in einem Rohr sowie durch Messung des Schalldruckverlaufs (Kap. 2.1.6).

Vorkenntnisse:

Wellen, Schallausbreitung in Gasen, Überlagerung von Wellen, stehende Wellen, Schallwandler (Piezo/Lautsprecher/Mikrofon)

Benötigte Geräte:

Oszilloskop		1x
Sensor CASSY		1x
Timer-Box		1x
Stromquellen-Box		1x
Temperatursensor		1x
Plexiglas Rohr $\varnothing 10\text{cm}$ mit Ständer		1x
Endstück mit Lautsprecher		1x
Endstück mit Durchführung		1x
im Rohr verschiebbare Scheibe		1x
Universalmikrofon	mit Stativstange u. Sockel	1x
Piezo Hochtöner	mit Stativstange u. Sockel	1x
Wegaufnehmer	mit Stativstange	1x
Faden 1m mit Gummiring und Gewicht		1x
Tischklemme		1x
Führungsschiene Alu 30x3mm ²	L 50cm	1x
Funktionsgenerator	0-200 kHz	1x
BNC -> 4mm Übergangsstecker		2x
BNC -> Lemo Übergangsstecker		2x
4mm Laborkabel 25cm/1.0mm	Paar rot/blau	1x
4mm Laborkabel 100cm/1.0mm	Paar rot/blau	2x
4mm Laborkabel 200cm/1.0mm	Paar schwarz	1x

2.1.2 Grundlagen

2.1.2.1 Schallgeschwindigkeit in Gasen

Die Ausbreitung von Schallwellen in Gasen ist ein adiabatischer Prozess. Das Schallfeld ist durch die Angabe von Schallschnelle $u(x, t)$ (lokale Geschwindigkeit der Gasmoleküle) oder Schalldruck $p(x, t)$ (lokale Abweichung des Drucks vom Außendruck) beschrieben. Ist der Schalldruck p klein gegenüber dem Außendruck p_0 , so gelten die Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x, t) = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -\frac{1}{\kappa p_0} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) \quad \text{mit} \quad \kappa = c_P/c_V \quad (2.1)$$

Eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sind ebene Wellen: $u(x, t) = u_0 \sin(\omega t \pm kx - \phi)$ mit Kreiswellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$. Ohne Dispersion entsprechen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = \partial\omega/\partial k$ der Ausbreitungsgeschwindigkeit v , die für ein ideales Gas von der Temperatur T allein abhängig ist:

$$v = \sqrt{p_0 \cdot \kappa / \varrho} = v_0 \sqrt{T/T_0} \quad \text{mit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{R \cdot \kappa}{M_{mol}} T_0} \quad (2.2)$$

allg. Gaskonstante:

$$R = 8,3145 \text{ J/(mol K)}$$

Adiabatenexponent:

$$\kappa = 7/5 \text{ für ein zweiatomiges Gas (N}_2, \text{ O}_2)$$

Dichte:

Molmasse von Luft:

üblicherweise wählt man:

$$\begin{aligned} \varrho &= 28,984 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/mol} \\ M_{mol} &= 28,984 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/mol} \\ T_0 &= 273,15 \text{ K } (=0^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

2.1.2.2 Stehende Wellen

In einem geschlossenen Rohr bilden sich durch Überlagerung von einlaufenden mit reflektierten periodischen Schallwellen stehende Wellen aus. Im Gegensatz zu frei laufenden (z.B. ebenen) Wellen gibt es hier Orte, an denen zu jeder Zeit die Schallschnelle oder der Schalldruck verschwinden (Knoten) und Zeiten, zu denen an jedem Ort Schalldruck oder Schnelle verschwinden. Befindet sich bei $x = 0$ ein schallharter Abschluss, so ist dort die Schallschnelle zu jeder Zeit $u_{x=0} = 0$ (Schnelleknoten) und die Amplitude des Schalldrucks extremal (Druckbauch).

Allgemein gilt in einem Rohr der Länge L mit schallhartem Abschluss bei $x = 0$ und Schallquelle bei $x = L$ mit Schallschnelle $u(x = L, t) = u_L \cdot \sin \omega t$:

$$u(x, t) = \frac{u_L}{\sin kL} \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Damit ist der Effektivwert $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(x, t) dt}$ des Schalldrucks

$$\hat{p}(x) = \varrho \cdot v \cdot u_L / \sqrt{2} \cdot \cos kx / \sin kL.$$

Die Druckknoten haben somit einen Abstand $\Delta x = \lambda/2$ und liegen bei:

$$x_n = n \cdot \lambda/2 - \lambda/4 \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Am schallharten Abschluss bei $x = 0$ ist der Effektivwert des Schalldrucks:

$$\hat{p}_{x=0} = \frac{\varrho \cdot v \cdot u_L}{\sqrt{2}} / \sin \left(\frac{2\pi f}{v} L \right),$$

d.h. bei fester Rohrlänge L liegen Resonanzen bei

$$f_n = n \cdot v / 2L, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

und bei fester Frequenz f liegen Resonanzen bei

$$L_n = n \cdot v / 2f, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (2.5)$$

2.1.3 Laufzeit gegen Laufstrecke

Wird die Laufzeit t einer Störung $a(x - vt)$ für verschiedene Orte x gemessen, so ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit v als Steigungsfaktor der Auftragung x gegen t auch ohne absolute Ortskenntnis der Störquelle.

**Versuch
1A1**

Hierzu werden Stoßwellen mit dem Piezo-Hochtonlautsprecher erzeugt und mit Sensor-CASSY aufgezeichnet. Abb. 2.1 zeigt den Aufbau. Am Tischende fixiert die Tischklemme die 50cm lange Alu-Schiene. An ihrem anderen Ende schließt sich die Rohr-Halterung an. Das Schallrohr wird mittig darauf gelegt und auf der

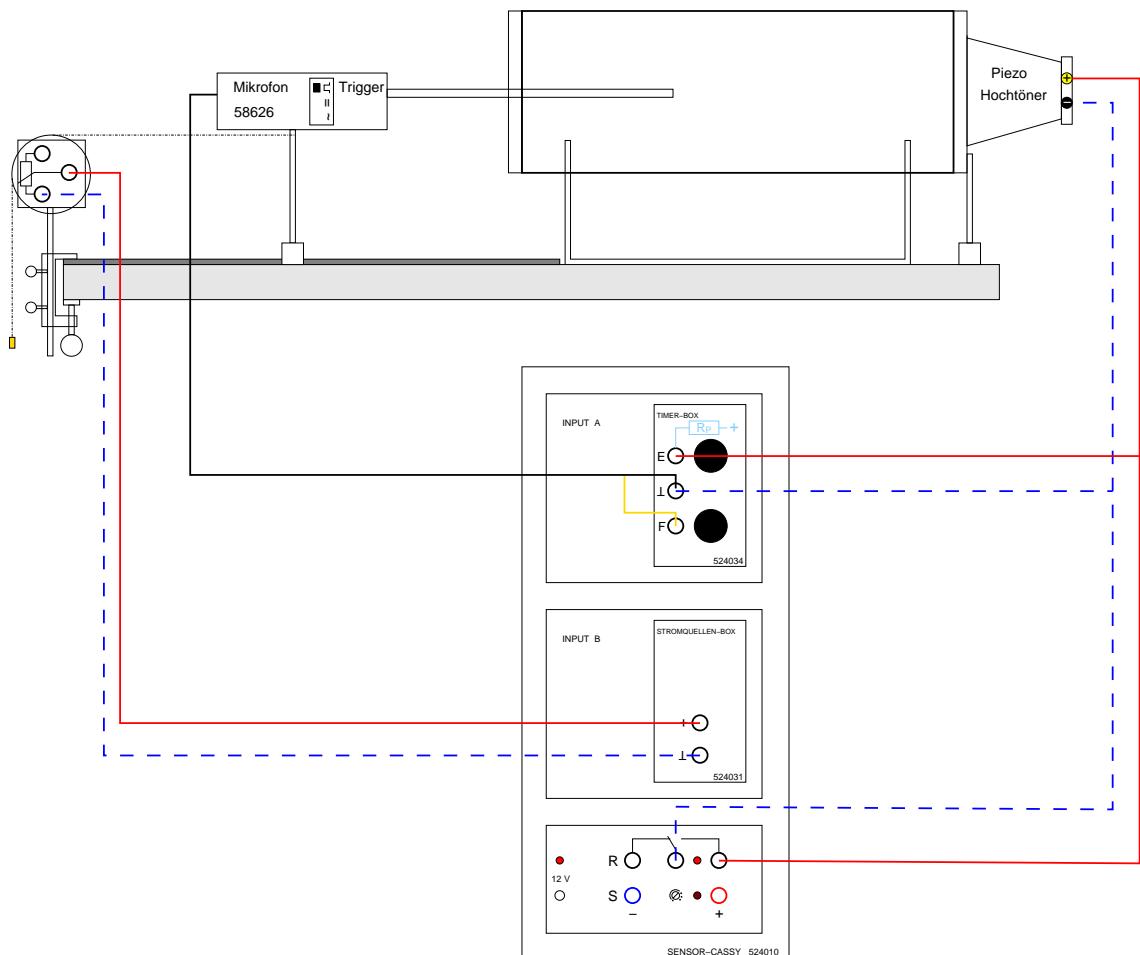


Abbildung 2.1: CASSY Messaufbau: Laufzeit gegen Laufstrecke. Der Wegaufnehmer und die zugehörige Stromquellenbox können gut durch ein unter dem Mikrofonsockel befestigtes Maßband ersetzt werden.

hinteren Seite mit dem Piezo-Hochtöner abgeschlossen.

Der Rohrabschluss mit Durchführung wird auf die vordere Rohrseite gesteckt. Das eingeschaltete¹ Mikrofon wird im Trigger-Modus $\sim = \square \sqcap$ auf mittlere Empfindlichkeit eingestellt und im Sockel auf der Alu-Schiene verschiebbar durch die mittige Durchführung in das Rohrinnere geführt.

An Kanal A wird die Timer-Box angeschlossen. Sie benötigt zur Laufzeitmessung ein Start-Signal am Eingang E und ein Stop-Signal am Eingang F. An den Eingang E wird der Piezolautsprecher richtig herum gepolt (E an +/gelb) angeschlossen. Parallel dazu wird das rechte Relais-Schalterpaar (R2/R3) geschaltet. Schließt das Relais, wird das Piezoelement entladen und sendet eine Stoßwelle aus. Gleichzeitig fällt die am Eingang E intern anliegende Spannung auf 0V, Startzeit ist somit die negative Flanke an E. Öffnet der Relais Schalter, so wird das Piezoelement – über den internen $15\text{ k}\Omega$ Widerstand R_P von Eingang E mit größerer Zeitkonstante

¹Das Mikrofon schaltet sich nach ca. 10 Min. selbstständig aus, um die Batterie zu schonen. Bei Verschwinden des Signals (“kein Trigger”) daher zuerst durch Wiedereinschalten dieses Problem ausschließen.

ohne messbare Schallaussendung – wieder auf +5V aufgeladen. Das Mikrofon im Triggermodus liefert bei Eintreffen der Stoßwelle das Stop-Signal und wird an Eingang F angeschlossen.

Zur Streckenmessung wird parallel zur Mikrofonachse ein Maßband unter dem Mikrofonsockel hindurch geführt und am Tisch oder an der Tischklemme befestigt. Die Mikrofonposition wird dann entweder direkt am Maßband abgelesen, oder es wird ein Wegaufnehmer (Mehrgangpotentiometer) verwendet, der über die Stromquellen-Box (liefert konstanten Strom) an Kanal B angeschlossen wird. Die Laufrichtung kann durch den Wechsel des Potentiometer-Endabgriffs umgekehrt werden. Vor der Messung sollte das Rad des Wegaufnehmers von Hand so eingestellt werden, dass zum einen der gesamte Verschiebereich des Mikrofons vermessen und zum anderen gleichzeitig ein möglichst kleiner Messbereich für den Widerstand verwendet werden kann.

Bei Verwendung des Wegaufnehmers muss dieser vor Beginn der Messungen gegen das Maßband kalibriert werden. Die Messunsicherheit auf die Kalibrationskonstante ist dann bei den folgenden Messungen als systematische Unsicherheit zu behandeln.

Zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit wird die Laufzeit an mehreren Orten in geeigneten Abständen gemessen. Mit Start/Stop [F9] wird für einen Ort eine Messreihe gestartet und nach Aufnahme einer geeigneten Zahl an Messwerten wieder beendet. Wenn der Wegaufnehmer nicht verwendet wird, wird die Position des Mikrofonsockels für jede Position im Messprotokoll vermerkt. Die aufgenommenen Messreihen werden zur weiteren Auswertung in einer Datei gespeichert. Um mögliche systematische Effekte zu studieren, wird die Messung einmal mit und einmal ohne das Plexiglasrohr durchgeführt.

CASSY-Lab Tipp zur Aufzeichnung der Messwerte, der Messbereich für die Laufzeitmessung ist dabei geeignet zu wählen:

```
CASSY      / Kanal A / Laufzeit Dta1 E->F, Flanken invertiert
           Relais / frac(time)<0.1 (periodisches Schalten)
Messparameter / automatisch Intervall 1s
               neue Messreihen anhängen
```

Es gilt: $S = S_0 + v \cdot t$. Eine Geradenanpassung an S gegen t liefert als Steigungsfaktor die Schallgeschwindigkeit v bei Raumtemperatur T , als y-Achsenabschnitt die Position S_0 der Schallquelle. Die Schallgeschwindigkeit wird mit der Erwartung nach Gl. 2.2 verglichen. Dazu ist eine Messung der Lufttemperatur nötig. Eine Funktion zur Berechnung der erwarteten Schallgeschwindigkeit findet sich in der Praktikumsbibliothek.

Messung mit dem Oszilloskop Der Messprozess lässt sich gut mithilfe des Oszilloskops veranschaulichen. Dazu wird das zwischen Eingang E und Erde \perp an der Timer-Box abgegriffene Signal auf CH1 des Oszilloskops gegeben, und analog das zwischen Eingang F und Erde \perp abgegriffene Signal auf CH2. Nach Einstellen eines geeigneten Triggers können Start- und Stoppsignal beobachtet werden und aus ihrer zeitlichen Differenz kann wiederum die Laufzeit in Abhängigkeit der Mikrofonposition gemessen werden.

Um die Darstellung auf dem Oszilloskopschirm zu speichern, wird ein USB-Stick benötigt. Wird beim Einsticken eine entsprechende Fehlermeldung angezeigt, muss dieser zunächst formatiert werden (Achtung: alle gespeicherten Daten gehen dabei verloren!). Dies geschieht, indem man das Menü Dienstpgm./Utility aufruft und den entsprechenden Unterpunkt auswählt. Um für das Protokoll möglichst brauchbare Bilder zu erzeugen, empfiehlt es sich, folgende Einstellungen vorzunehmen: Dienstpgm./Utility → Optionen → Drucker einrichten, dann das Bildformat auf Querformat und das Dateiformat auf EPSIMAGE stellen. Danach wird mit einem Druck auf den Print-Knopf die aktuelle Darstellung auf den USB-Stick gespeichert.

2.1.4 Resonanzfrequenzen einer stehenden Welle

2.1.4.1 Messung mit CASSY-System

Versuch 1A2

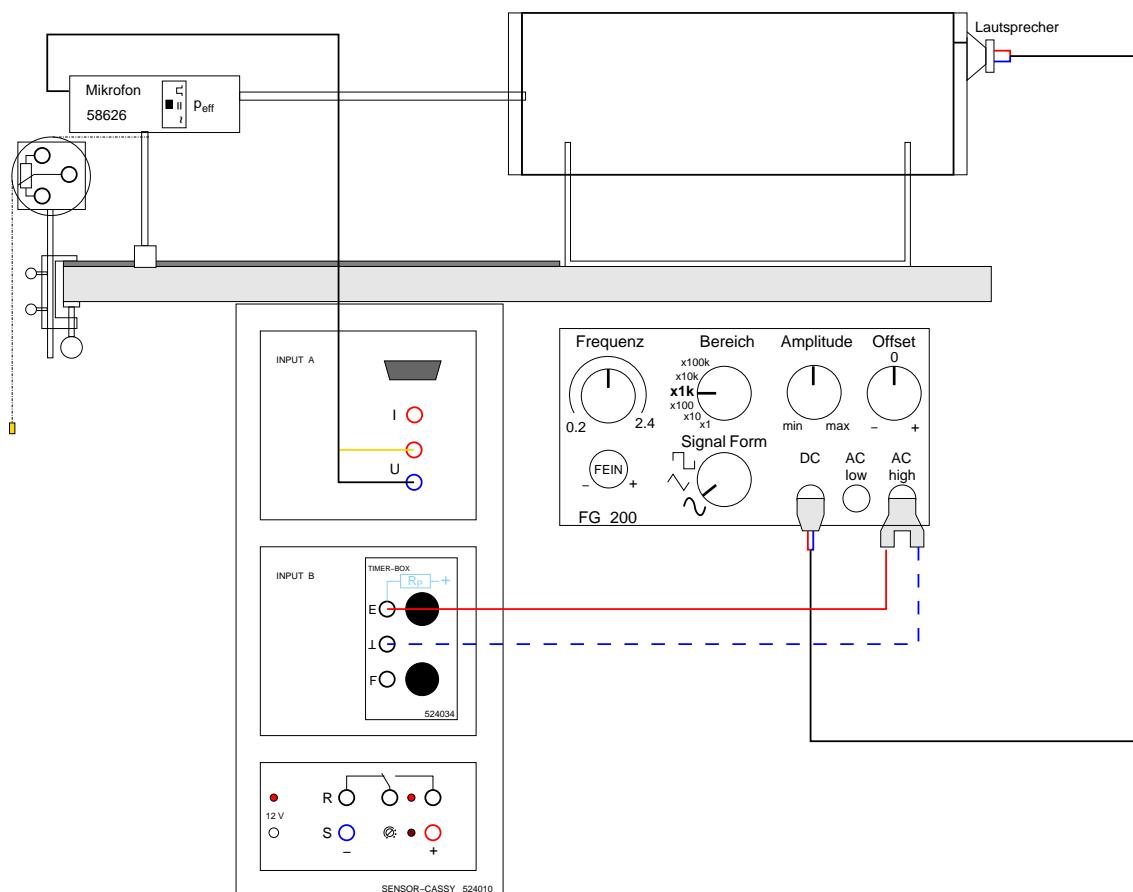


Abbildung 2.2: CASSY Messaufbau: Resonanzfrequenzen einer stehenden Welle.

Der Wegaufnehmer kann durch ein unter dem Mikrofonsockel befestigtes Maßband ersetzt werden.

Gemessen wird die Frequenz-Abhängigkeit der Schalldruckamplitude einer stehenden Welle am schallharten Abschluss bei fester Resonatorlänge. Abb. 2.2 zeigt den Aufbau. Das Mikrofon im Effektivwertmodus $\sim \boxed{=} \ \boxed{\sqcap}$ wird an das Rohrende

verschoben, um am schallharten Abschluss im Druckbauch die Schalldruckamplitude zu messen. Es wird direkt an Sensor-CASSY Kanal A angeschlossen.

Als Schallquelle dient der Lautsprecher in der Kappe, die das Rohr am hinteren Ende abschließt, um Sinusschwingungen zwischen 200 Hz und 2400 Hz zu erzeugen. Angeregt wird er vom Funktionsgenerator, der folgendermaßen eingestellt wird:

Signalform	\sim	(Sinusschwingung)
Bereich	x1k	(0.2 - 2.4 x 1 kHz)
Offset	0	(kein Konstantstrom durch den Lautsprecher)
Amplitude	mittig	(Minimum für sichere Frequenzmessung)

Um hohe Resonanzfrequenzen zu erreichen, muss der Bereich ggfs. später auf x10k umgestellt werden. Der Lautsprecher wird mit dem BNC-Lemo-Adapter an den niederohmigen DC-Ausgang angeschlossen. Zur Frequenzmessung wird der rechte Hochpegel AC-Ausgang an den Eingang E der CASSY Timer-Box in Sensor-CASSY Kanal B angeschlossen.

Vor der Aufnahme der Messwerte empfiehlt es sich, den dynamischen Bereich des Mikrofon-Kanals an die maximale Schalldruckamplitude bei Resonanz anzupassen, d.h. die Empfindlichkeit des Mikrofons möglichst niedrig einzustellen und ggfs. die Amplitude am Funktionsgenerator erhöhen, um den gewählten Messbereich von CASSY Kanal A optimal auszunutzen.

CASSY-Lab Tipp zur Aufzeichnung der Messwerte:

```
CASSY / Kanal A / Spannung Ua1 0-Umax Nullpunkt links, gemittelt 1s
      Kanal B / Timerbox / Frequenz fb1(E) 5000 Hz Torzeit 1s
      Messparameter / manuell
```

Nach Einstellen einer Frequenz und Stabilisierung des Frequenzwerts wird mit Start/Stop [F9] ein Messwert pro Frequenz aufgenommen. Die Wahl der weiteren Frequenzwerte sollte auf die optimale Bestimmung der Resonanzfrequenzen ausgerichtet sein. Abb. 2.3 zeigt eine solche Messung. Wie zu erkennen ist, sind diese Resonanzen recht schmal. Daher empfiehlt es sich, deren Lage vorher abzuschätzen. Mit der Frequenz-Feineinstellung kann ein Resonanzbereich dann komplett durchgestimmt werden. Zur quantitativen Auswertung werden die Messungen in einer Datei abgespeichert. Es werden die Resonanzfrequenzen f_n bestimmt und über n aufgetragen. Nach Gl. 2.4 liegen diese Werte auf einer Geraden mit Steigung $v/2L$. Bei bekannter Resonanzlänge L des Rohres (zwischen den Endkappen) wird mit dieser Messung die Schallgeschwindigkeit v bestimmt.

2.1.4.2 Messung mit dem Oszilloskop

Gemessen wird die Frequenz-Abhängigkeit der Schalldruckamplitude einer stehenden Welle am schallharten Abschluss bei fester Resonatorlänge. Der Aufbau ist wie in Abb. 2.4. Das Mikrofon im Amplitudenmodus $\sim = \square$ wird an das Rohrende verschoben, um am schallharten Abschluss im Druckbauch die Schalldruckamplitude zu messen. Es wird direkt an den Kanal CH2 des Oszilloskops

2 Akustik

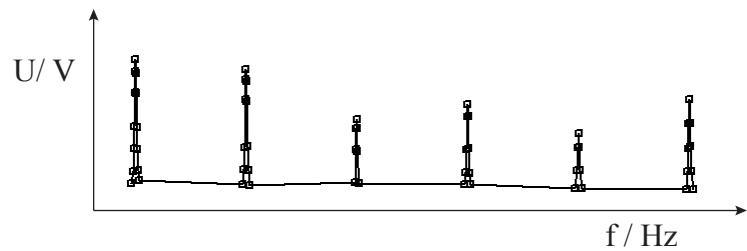


Abbildung 2.3: Messung der Schalldruckamplitude gegen die Frequenz (schematisch).

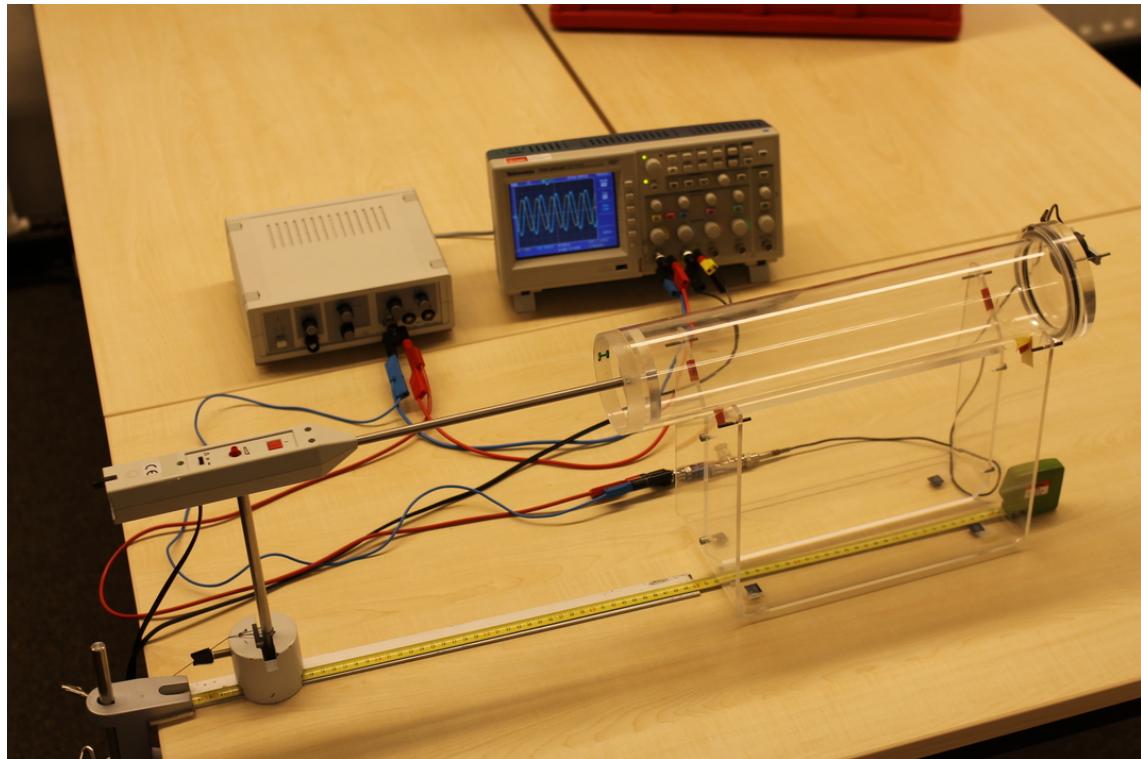


Abbildung 2.4: Messaufbau Schalldruck gegen Resonanzfrequenz mit dem Oszilloskop

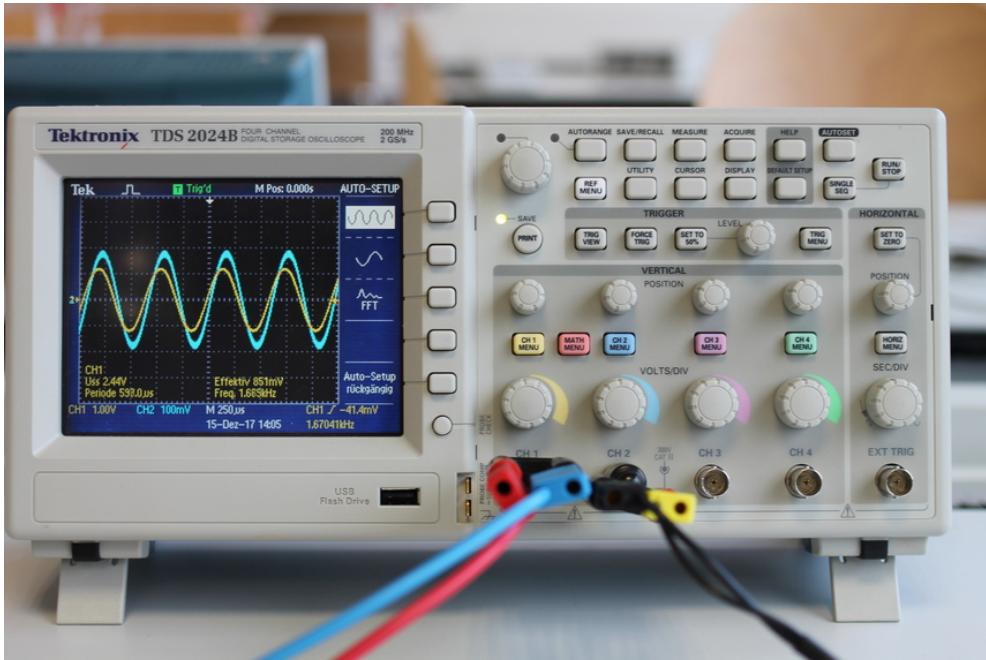


Abbildung 2.5: Signalansicht am Oszilloskop

angeschlossen.

Als Schallquelle dient der Lautsprecher in der Kappe, die das Rohr am hinteren Ende abschließt, um Sinusschwingungen bis zu einigen kHz zu erzeugen. Angelegt wird er vom Funktionsgenerator, der wie oben beschrieben eingestellt wird. Der Lautsprecher wird mit dem BNC-Lemo-Adapter an den niederohmigen DC-Ausgang des Generators angeschlossen, am besten mit einem dazwischen geschalteten Abschwächer von 6 dB. Parallel dazu wird das Generatorsignal auf den Kanal CH1 des Oszilloskops geführt. Auf seinem Schirm sind zwei phasenverschobene Sinusschwingungen wie in der Abb. 2.5 dargestellt.

Zur Messung wird nun die Frequenz f_i am Generator vorsichtig verändert, bis sich am Mikrofon wieder eine maximale Schallamplitude einstellt; die Frequenz wird notiert. Anschließend wird die Generatorfrequenz weiter variiert, bis n maximale Schalldruckamplituden gemessen wurden. Aus der grafischen Antragung f_i über n wird die Steigung Δ benutzt, um mit Hilfe der Gleichung $\Delta = v/(2L)$ die Schallgeschwindigkeit v zu bestimmen. Dabei ist L die gemessene, hier festgehaltene, Resonatorlänge.

2.1.5 Resonanzlängen einer stehenden Welle

Anstatt die Resonanzfrequenzen bei fester Rohrlänge zu bestimmen, kann auch bei einer festen Frequenz gemessen werden und durch Verschieben der Abschluss scheibe die Rohrlängen bestimmt werden, bei denen Resonanz auftritt. Der Versuchsaufbau ist weitgehend identisch mit dem in Abb. 2.2 gezeigten. Vor der eigentlichen Messung wird die höchste zuvor gemessene Resonanzfrequenz eingestellt und mit der Timer-Box am Kanal B des Sensor-CASSYs gemessen. Sodann

werden durch Verschieben der Abschlusscheibe die Resonanzlängen ausgemessen. Die Strecke kann entweder direkt am Maßband oder durch Verwendung des zuvor kalibrierten Wegaufnehmers gemessen werden.

Zur Auswertung werden die Resonanzlängen L_n bestimmt und über n aufgetragen. Nach Gl. (2.5)) liegen diese Werte auf einer Geraden mit Steigung $v/2f$. Bei bekannter Frequenz f wird mit dieser Messung die Schallgeschwindigkeit v bestimmt.

2.1.6 Druckknoten einer stehenden Welle

2.1.6.1 Messung mit CASSY-System

Gemessen wird das Schalldruckprofil einer stehenden Welle, also die Ortsabhängigkeit der Schalldruckamplitude entlang des Rohrs. Abb. 2.2 zeigt den Aufbau. Das Mikrofon im Effektivwertmodus $\sim \square$ wird nun direkt an CASSY Kanal A angeschlossen und ansonsten wie in Versuch 2.1.3 durch die mittige Öffnung der Abschlusskappe ins Rohrinnere geführt.

Als Schallquelle dient der Klein-Lautsprecher in der Kappe, die das Rohr am hinteren Ende abschließt. Mit dem BNC-Lemo-Adapter wird er an den niederohmigen DC-Ausgang des Funktionsgenerators angeschlossen und dieser wie oben angegeben betrieben. Vor der eigentlichen Messung wird die Mikrofonspitze am Rohrende positioniert und eine möglichst hohe Resonanzfrequenz eingestellt. Diese wird mit der Timer-Box an CASSY Kanal B gemessen. Die Mikrofonposition wird wie bei Messung 2.1.3 entweder direkt mit einem unter dem Mikrofonsockel parallel zur Mikrofonachse geführten und am Tisch befestigten Maßband oder mit dem zuvor kalibrierten Wegaufnehmer gemessen. In letzterem Fall muss die Timer-Box vor Beginn der eigentlichen Messung durch die Stromquellen-Box ersetzt werden, an die der Wegaufnehmer angeschlossen wird. Vor Aufnahme einer Messreihe sollte der dynamische Bereich des Mikrofonkanals an den Maximalwert im Druckbauch angepasst werden.

CASSY-Lab Tipp zur Aufzeichnung der Messwerte:

```
CASSY / Kanal A / Spannung Ua1 0-Umax Nullpunkt links, gemittelt 1s  
Kanal B / Timerbox / Frequenz fb1(E) 5000 Hz Torzeit 1s  
Messparameter / manuell
```

Nach Einstellen einer Position wird mit Start/Stop [F9] ein Messwert aufgenommen. Die Wahl der weiteren Positionen sollte wie in Abb. 2.6 auf die optimale Bestimmung der Druckknoten und -Bäuche ausgerichtet sein. Es werden die Positionen x_n der Druckknoten bestimmt und über n aufgetragen. Nach Gl. (2.3) liegen diese Werte auf einer Geraden mit Steigung $\lambda/2$. Mit $v = \lambda f$ wird aus diesen Messungen die Schallgeschwindigkeit bestimmt.

2.1.6.2 Messung mit dem Oszilloskop

Zur Messung des Schalldruckprofils mit dem Oszilloskop ist der Aufbau analog zu Abb. 2.4, nur dass das Endstück mit Durchführung anstelle der im Rohr ver-

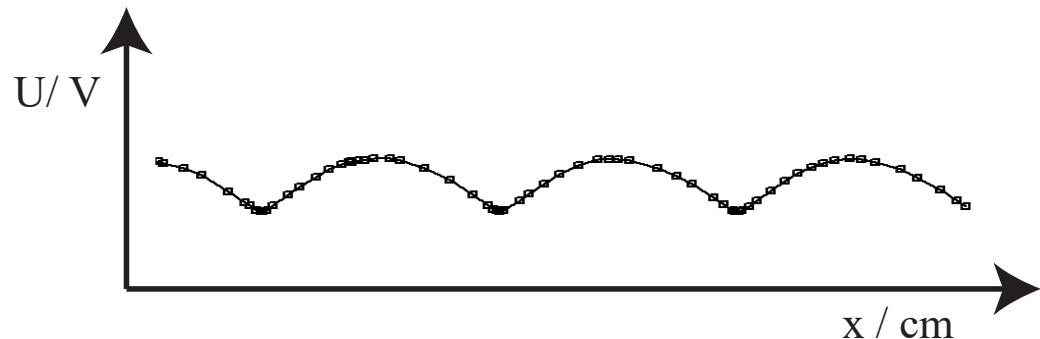


Abbildung 2.6: Messung der Schalldruckamplitude gegen den Ort (schematisch).

schiebbaren Scheibe verwendet wird. Der Lautsprecher wird mit dem BNC-Lemo-Adapter an den niederohmigen DC-Ausgang des Generators angeschlossen, am besten mit einem dazwischen geschalteten Abschwächer von 6 dB. Parallel dazu wird das Generatormodul auf den Kanal CH1 des Oszilloskops geführt. Das Mikrofon wird direkt an den Kanal CH2 des Oszilloskops angeschlossen und im Amplitudenmodus $\sim = \square$ betrieben. Zunächst platziert man die Spitze des Mikrofons am Rohrende und stellt eine möglichst hohe Resonanzfrequenz ein. Ihr Wert kann aus dem Schwingungsverlauf am Oszilloskop abgelesen und mit der Anzeige im Display des Oszilloskops verglichen werden. Dann verschiebt man langsam den Mikrofonsockel und beobachtet die Änderung der Amplitude. Die Druckknoten lassen sich besonders genau bestimmen, weil die Amplitude dort gerade verschwindet. Man notiert die jeweiligen Positionen x_n des Mikrofonsockels. Für eine Anleitung zum Abspeichern der Oszilloskopbilder sei auf Abschnitt 2.1.3 verwiesen.

2.2 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

2.2.1 Versuchsziel

Versuch 1A3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Metallen durch Messung der Schallgeschwindigkeit.

Vorkenntnisse:	Wellen Schallausbreitung in Festkörpern Überlagerung von Wellen Stehende Wellen Fourier-Analyse																								
Benötigte Geräte:	<table border="0"> <tr> <td>Sensor CASSY</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Universalmikrofon mit Stativstange</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Sockel</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Tischklemme</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Metallstange 20cm</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Kreuzmuffe</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Metallstift ø 4mm L 30mm</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Gummi-Hammer</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Mikrometerschraube 0-25mm</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>Stahl-Bandmaß 2m</td> <td>1x</td> </tr> <tr> <td>verschiedene Metallstangen</td> <td>4x</td> </tr> <tr> <td>Analysewaage Sartorius</td> <td>im Raum</td> </tr> </table>	Sensor CASSY	1x	Universalmikrofon mit Stativstange	1x	Sockel	1x	Tischklemme	1x	Metallstange 20cm	1x	Kreuzmuffe	1x	Metallstift ø 4mm L 30mm	1x	Gummi-Hammer	1x	Mikrometerschraube 0-25mm	1x	Stahl-Bandmaß 2m	1x	verschiedene Metallstangen	4x	Analysewaage Sartorius	im Raum
Sensor CASSY	1x																								
Universalmikrofon mit Stativstange	1x																								
Sockel	1x																								
Tischklemme	1x																								
Metallstange 20cm	1x																								
Kreuzmuffe	1x																								
Metallstift ø 4mm L 30mm	1x																								
Gummi-Hammer	1x																								
Mikrometerschraube 0-25mm	1x																								
Stahl-Bandmaß 2m	1x																								
verschiedene Metallstangen	4x																								
Analysewaage Sartorius	im Raum																								

2.2.2 Grundlagen

Der Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante und charakterisiert die relative Längenausdehnung eines Materials abhängig von der angreifenden Zugspannung,

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L}. \quad (2.6)$$

Für Metalle ist E in der Größenordnung von 10^{11} N/m^2 und damit nur für dünne Drähte statisch messbar. Mit Metallstäben ist jedoch eine dynamische Messung möglich, indem die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (2.7)$$

von longitudinalen Schallwellen bestimmt wird.

Ein mittig eingespannter Stab der Masse M , Länge L und mit Durchmesser D wird durch Anschlagen mit einem Gummihammer entlang der Längsachse zur

longitudinalen Grundschwingung der Wellenlänge $\lambda_0 = 2L$ angeregt. Die Frequenz f_0 wird gemessen. Mit der Schallgeschwindigkeit im Stab

$$v_l = f_0 \cdot \lambda_0 \quad (2.8)$$

und der Dichte

$$\varrho = M/\pi L(D/2)^2 \quad (2.9)$$

ergibt sich

$$E = \frac{16f_0^2 LM}{\pi D^2}. \quad (2.10)$$

2.2.3 Versuchsdurchführung

Zunächst wird der Stab zur Bestimmung der Dichte ausgemessen:

- a Länge L mit dem Bandmaß,
- b Durchmesser D mit der Mikrometerschraube, gemittelt über mehrere Positionen entlang des Stabs und in zwei um 90° versetzten Orientierungen, um einer möglichen Elliptizität Rechnung zu tragen, sowie
- c Masse M auf der Analysewaage der Marke Sartorius, Toleranzangabe laut Hersteller $\pm 0,2$ g.

Die Mikrometerschraube entspricht DIN 863-1, was eine (systematische) Genauigkeit von $\pm 4 \mu\text{m}$ in dem hier relevanten Dickenbereich bedeutet.

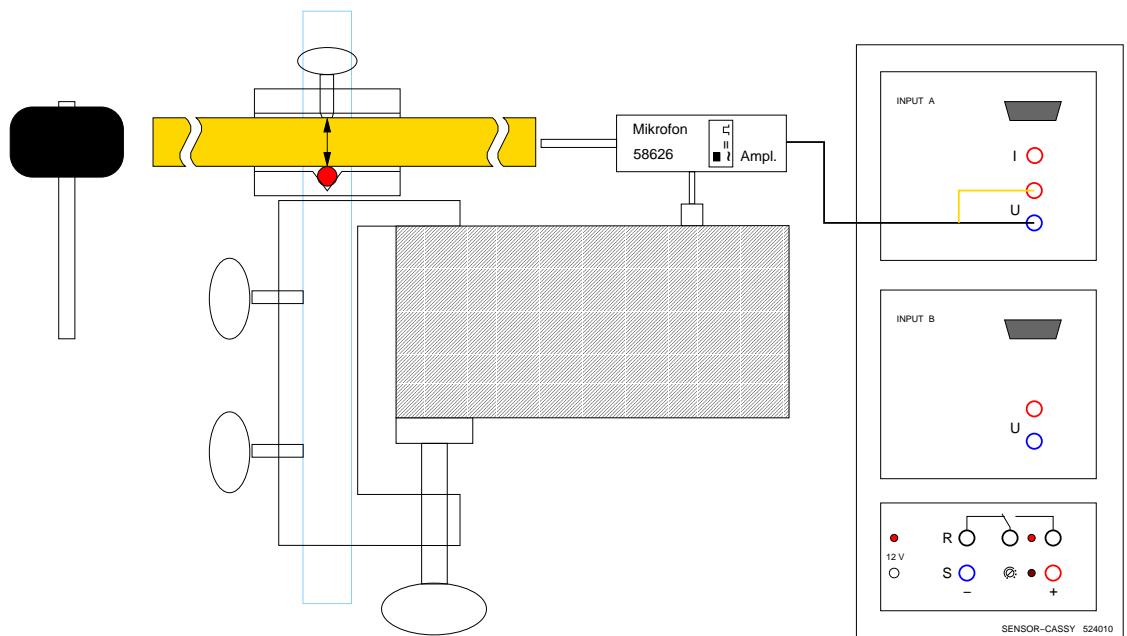


Abbildung 2.7: CASSY Messaufbau Schallgeschwindigkeit in Stäben

2 Akustik

Abb. 2.7 zeigt den mechanischen Aufbau zusammen mit der Sensor-CASSY Datenaufnahme. Die Kreuzmuffe wird an der kurzen Metallstange mit der Tischklemme am Tisch befestigt. Der Metallstab wird – von einem Metallstift unterstützt – parallel zur Tischfläche so in der Kreuzmuffe eingespannt, dass er nur an zwei Punkten (Pfeile) gehalten wird und damit frei schwingen kann.

Als Messaufnehmer dient das Mikrofon. Es wird im Amplitudenmodus $\sim = \square$ in ca. 5 mm Abstand vom Stabende aufgestellt und eingeschaltet². Die Empfindlichkeit muss über den Drehregler je nach zu vermessendem Material so angepasst werden, dass der dynamische Bereich des Mikrofons von ca. 2,5 V ausgenutzt wird, aber ohne dass das Mikrofon in Sättigung gebracht wird.

Aufgezeichnet werden die Messwerte mit dem Sensor CASSY. Bei geeigneter Einstellung der Zeitbasis können sowohl die Schwingungen als auch deren Fast-Fourier-Frequenzspektren (FFT) dargestellt werden.

Der Messbereich für die Mikrofon-Spannung ist geeignet zu wählen. CASSY-Lab Tipp zur Aufzeichnung der Messwerte:

```
CASSY      / Kanal A / Spannung Ua1
Messparameter / automatisch
Darstellung   / X-Achse t
                  Y-Achse Ua1
FFT         / Fast Fourier Transformation von Ua1
```

Angeregt wird die Schwingung durch einen leichten Schlag auf das Stabende mit dem Gummihammer. Der Anschlag wird solange variiert, bis der Höreindruck bzw. das Frequenzspektrum eine saubere Anregung der Grundschwingung zeigt. Bessere Ergebnisse werden erzielt, wenn die Messung mit F9 erst im Ausklingen der Schwingung gestartet wird, da so die Einschwingvorgänge direkt nach dem Anschlagen nicht mit aufgezeichnet werden. Mehrere Schwingungen mit etwa 1000 Perioden sowie deren FFT-Spektren einschließlich der Bestimmung des Peakschwerpunktes von f_0 werden zur weiteren Auswertung abgespeichert. Untersuchen Sie, inwieweit der gemessene Wert für f_0 von der genauen Lage (Verschiebung in Längs- oder Querrichtung bzw. Drehung um die Längsachse) des Stabs in der Kreuzmuffe oder von der Kraft, mit der der Stab in der Kreuzmuffe eingespannt wird, abhängt. Schätzen Sie daraus eine systematische Unsicherheit auf f_0 ab.

Der Versuch wird mit mehreren Stäben aus unterschiedlichen Materialien wiederholt. Die Messungen sollten mit den anderen Gruppen im Raum koordiniert werden, denn ein weiterer zur selben Zeit angeschlagener Metallstab gleichen Materials würde die Messung verfälschen. Ein zur selben Zeit angeschlagener Metallstab anderen Materials ist im Fourier-Spektrum problemlos bei seiner Frequenz zu erkennen und beeinträchtigt wegen der schmalen Linienbreite die Auswertung nicht.

²Das Mikrofon schaltet sich nach ca. 10 Minuten selbstständig aus, um die Batterielaufzeit zu verlängern. Bei Verschwinden des Signals daher zuerst durch Wiedereinschalten dieses Problem ausschließen.

2.2.4 Auswertung der Messdaten

Aus dem diskreten FFT-Frequenzspektrum wird f_0 aus der Peaklage der Grundschwingung bestimmt. Die Messunsicherheiten auf ϱ und E ergeben sich durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung an die Gleichungen (2.9) und (2.10). Dabei wird die statistische Messunsicherheit auf f empirisch durch Wiederholungsmessung bestimmt. Eine weitere systematische Unsicherheit auf f_0 , die durch die Methodik der Peakbestimmung herrührt, lässt sich abschätzen, indem der verwendete Algorithmus (Lage und Anzahl der verwendeten Punkte im Frequenzspektrum) innerhalb sinnvoller Grenzen verändert wird.

Die statistische Messunsicherheit auf den Mittelwert von D wird aus der empirischen Standardabweichung der Messwerte an verschiedenen Positionen und in zwei Orientierungen entlang der Stange berechnet. Bei sorgfältiger Vorgehensweise werden sich für L und M die jeweiligen Ablesefehler an Maßband bzw. Waage ergeben. Die relative Größe der einzelnen Fehlerbeiträge ist im Protokoll zu diskutieren.

Die gemessenen Werte für ϱ und E sollen mit bekannten Legierungen verglichen werden. Dafür kann man zum Beispiel die Datenbank unter www.matweb.com verwenden (“Physical Properties”, dann “Density” und “Modulus of Elasticity” auswählen und sinnvolle Bereiche um die gemessenen Werte herum eingeben).

2.3 Physik der Gitarre

2.3.1 Versuchsziele

Versuch An der Gitarre können viele physikalische Phänomene, die im Zusammenhang mit Schwingungen und Wellen auftreten, sehr anschaulich und unmittelbar studiert werden.

2.3.2 Grundlagen

Vorkenntnisse: Wellen
Überlagerung von Wellen, Schwebungen
Fourier-Analyse
Gitarre: Aufbau und Funktionsweise
Grundlagen der Musiktheorie (Notenskala und Intervalle)

Benötigte Geräte: Sensor CASSY 1x
Universalmikrofon mit Stativstange 1x
Sockel 1x
Akustik-Gitarre 1x

2.3.2.1 Aufbau der Gitarre

Die Bauweise einer Gitarre hat einen erheblichen Einfluss auf den Klang des Instruments. Für den Klang spielen sowohl die Form, als auch das Material der einzelnen Komponenten eine entscheidende Rolle. Der Aufbau einer Akustik-Gitarre ist in Abbildung 2.8 gezeigt.

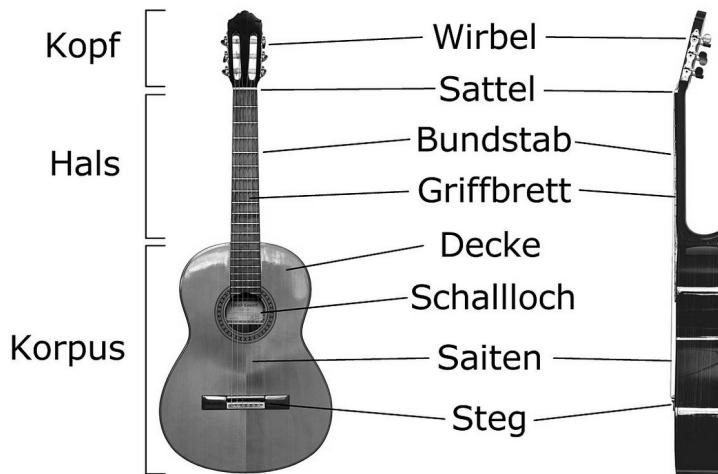


Abbildung 2.8: Aufbau einer Konzertgitarre. (Quelle: Martin Möller, März 2006, wikipedia.org)

Die Konzertgitarre wird mit insgesamt sechs Nylonsaiten bespannt, wovon die oberen drei Saiten komplett aus Kunststoff bestehen und die unteren drei zusätzlich mit feinen Metallfäden umwickelt sind. Die Saiten gehören zur Serie 'Pro Arté .EJ44' der Marke D'Addario. Der Hersteller gibt dabei Produktspezifikationen wie die Saitenspannung und den Massebelag der Saiten an. Standardmäßig wird die tiefste Saite, also die 6. Saite - leer angeschlagen - auf ein E (82,41Hz) gestimmt und die höchste auf ein e' (329,63Hz), was einem Intervall von zwei Oktaven entspricht. Die Frequenzen der einzelnen Saiten finden sich in Tab. 2.1 wieder. Abb. 2.9 zeigt das dazugehörige Notenbild. Die Gitarre gehört zu den oktavig transponierenden Musikinstrumenten. Sie klingt demnach eine Oktave tiefer, als im Notenbild mit Violinschlüssel notiert. Nur so können die Töne der Gitarre im 5-Linien-System sinnvoll dargestellt werden. Die Stimmung ist so gewählt, dass das Intervall zur nächsthöheren Saite in der Regel einer Quarte entspricht und zwischen g und b einer großen Terz. Die Frequenzen sind bezogen auf den Kammerton $a' = 440$ Hz. Das Griffbrett mit den Bundstäbchen erlaubt es dem

Saite	Note	Frequenz [Hz]
1	e'	329,63
2	b	246,94
3	g	196,00
4	d	146,83
5	A	110,00
6	E	82,41

Tabelle 2.1: Frequenzen der Leersaiten.

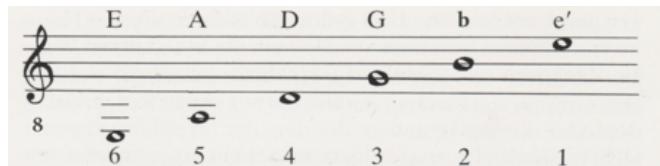


Abbildung 2.9: Notenbild der Gitarrenstimmung.

Gitarrenspieler, Töne abzugreifen. Dabei entspricht der Abstand zwischen zwei Bundstäbchen genau einem Halbtorschritt. Greift man beispielsweise die tiefste E-Saite im 1. Bund, so klingt die Saite als F. Greift man diese im 5. Bund, so klingt ein A mit der gleichen Frequenz wie die nächsthöhere Leersaite. Die klassische Gitarre hat in der Regel 20 Bünde. Dies bietet die Möglichkeit, identische Töne auf verschiedenen Saiten und damit in verschiedenen Lagen auf dem Griffbrett spielen zu können. Da die Saiten unterschiedlich beschaffen sind, lässt sich dadurch die Klangfarbe der Töne beeinflussen. Im Allgemeinen strahlt die Gitarre im Bereich zwischen 200 Hz und 400 Hz und um 1000 Hz am günstigsten ab. Die Abstrahlung wird ab 1200 Hz schwächer und ist ab 4000 Hz kaum noch präsent.

2.3.2.2 Grund- und Oberschwingungen einer Saite

Schlägt man eine Saite an, breiten sich Schwingungen als Transversalwelle in beide Richtungen entlang der Saite aus und werden jeweils an Steg und Sattel reflektiert. Dabei kommt es durch Reflexion der Wellen an den Enden zu stehenden Wellen auf der Saite. Abb 2.10 zeigt die Reflexion einer Welle am fixierten Ende. Entscheidend ist, dass am festen Ende ein Phasensprung von $\Delta\phi = 180^\circ$ auftritt. Durch die Überlagerung der beiden Teilwellen bildet sich daher eine stehende Welle auf der Saite aus.

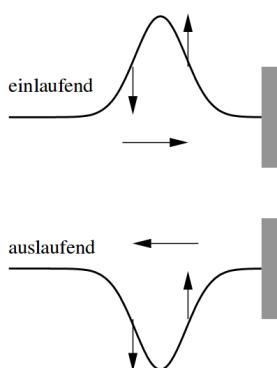


Abbildung 2.10: Reflexion einer Transversalwelle am fixierten Ende.

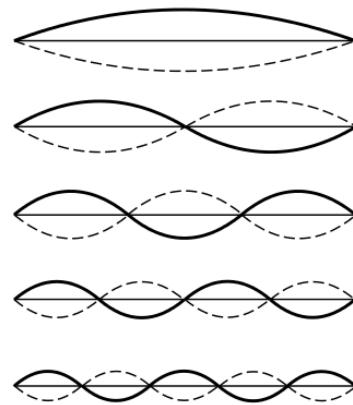


Abbildung 2.11: Stehende Welle und deren Harmonische bis $n = 5$.

Bei der Grundschatzung befinden sich die Knoten jeweils an den Saitenenden, wodurch die Wellenlänge $\lambda_1 = 2L$ gegeben ist. Neben der Grundschatzung bilden sich aufgrund der Eigenmoden weitere, sogenannte Oberschwingungen aus. Da die Oberschwingungen an den Enden ebenfalls Knoten ausbilden, folgen die Wellenlängen einer festen Beziehung:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots . \quad (2.11)$$

Für $n = 1$ erhält man die Grundschatzung und für $n \geq 2$ die Oberschwingungen. Bei einer angeschlagenen Gitarrensaite existieren diese gleichzeitig. Wahrgenommene Töne bestehen somit immer aus Grund- und Oberschwingungen, welche der Gleichung 2.11 genügen. Dieses Phänomen soll in den späteren Messungen gezeigt werden.

2.3.2.3 Das Frequenzspektrum einer Saite

Die Auslenkung der Saite bei Ausprägung einer stehenden Welle lässt sich als Summe ihrer Moden schreiben:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x)$$

Am einfachsten kann man sich dies bei einer Saite vorstellen, die in der Mitte angeschlagen wird. Abb. 2.12 zeigt die Bewegung einer im Mittelpunkt angeschlagenen Saite für eine halbe Periode. Die beiden Transversalwellen werden zeitgleich an den Enden reflektiert und überlagern sich nach einer halben Periode wieder im Mittelpunkt der Saite, so dass diese wieder maximal ausgelenkt ist. Für diesen Bewegungsverlauf dürfen nicht alle Schwingungsmoden auftreten, sondern nur diejenigen, in dessen Zentrum sich ein Schwingungsbauch mit maximaler Auslenkung befindet. Dies entspricht allen ungeraden Harmonischen, wie in Abb. 2.12 dargestellt. Zudem müssen diese abwechselnd eine Phasenverschiebung von $\Delta\phi = 180^\circ$ aufweisen, damit im Zentrum der Saite ausschließlich positive Interferenz auftritt und diese eine maximale Auslenkung erfährt. Das Frequenzspektrum des erzeugten Klangs enthält in diesem Fall nur alle ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz. Die n -te Harmonische hat bezüglich zur Grundschwingung die Amplitude $1/n$.

Das entstehende Frequenzspektrum ist demnach abhängig vom Anschlagspunkt der Saite und kann vielfältig ausgeprägt sein. Abb. 2.13 zeigt das Frequenz-

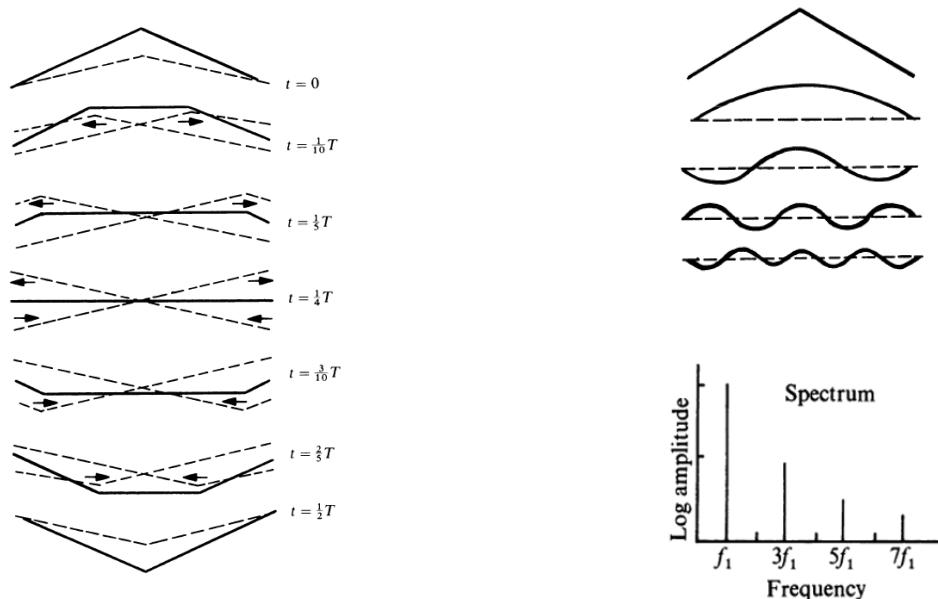


Abbildung 2.12: Bewegungsverlauf und erzeugtes Klangspektrum einer Saite, in der Mitte angeschlagen (aus [2]).

spektrum einer Saite, wenn man diese bei einem Fünftel ihrer Länge anschlägt. Hier fehlt jede fünfte Harmonische und deren Vielfache, da sich dort kein Schwingungsknoten ausbilden kann. Dieses Schema lässt sich für jeden Anschlagspunkt fortführen. Wird die Saite im Abstand $d = L/n$ angeschlagen, so fehlen die n -te Harmonische und ihre Vielfachen. Dieses Verhalten wird ebenfalls im Experiment untersucht. Dazu werden verschiedenen Anschlagspunkte der Saite gewählt, um die unterschiedlichen Klangspektren zu erzeugen.

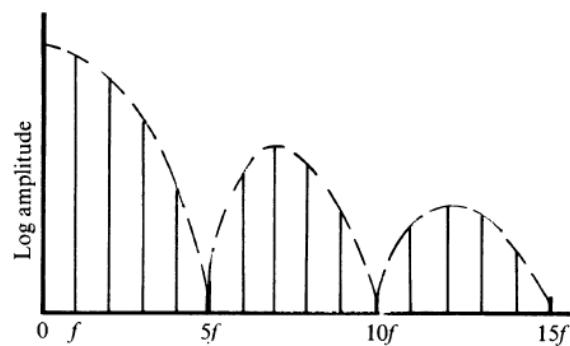


Abbildung 2.13: Erzeugtes Frequenzspektrum einer Saite, angeschlagen bei einem Fünftel ihrer Länge. (Vgl. 2, S.42)

2.3.3 Versuchsaufbau

Vor jeder Messung wird die Gitarre mit einem Stimmgerät gestimmt. Dieses liefert eine Stimmgenauigkeit von $\pm 1\text{Cent}$, was einem hundertstel eines Halbtonecks entspricht. Als Mikrofon wird ein Schalldruckempfänger der Firma LEYBOLD DIDACTIC GmbH verwendet, welcher in der Lage ist, über einen Tonfrequenzbereich von 30 Hz bis 20 kHz mit konstanter Empfindlichkeit aufzunehmen. Der durchschnittliche, hörbare Frequenzbereich eines Erwachsenen liegt bei etwa 20 Hz bis 15 kHz. Das Mikrofon ist damit für alle vorgenommenen Messungen geeignet. Für die Messdatenaufnahme wird dieses mit dem Sensor-CASSY Interface verbunden und im Amplitudenmodus $\sim = \square$ betrieben. Die Empfindlichkeit des Mikrofons muss so eingestellt werden, dass eine sinnvolle Datenaufzeichnung möglich ist.

Die Gitarre liegt auf einer Polsterung auf und das Mikrofon wird mittig oberhalb

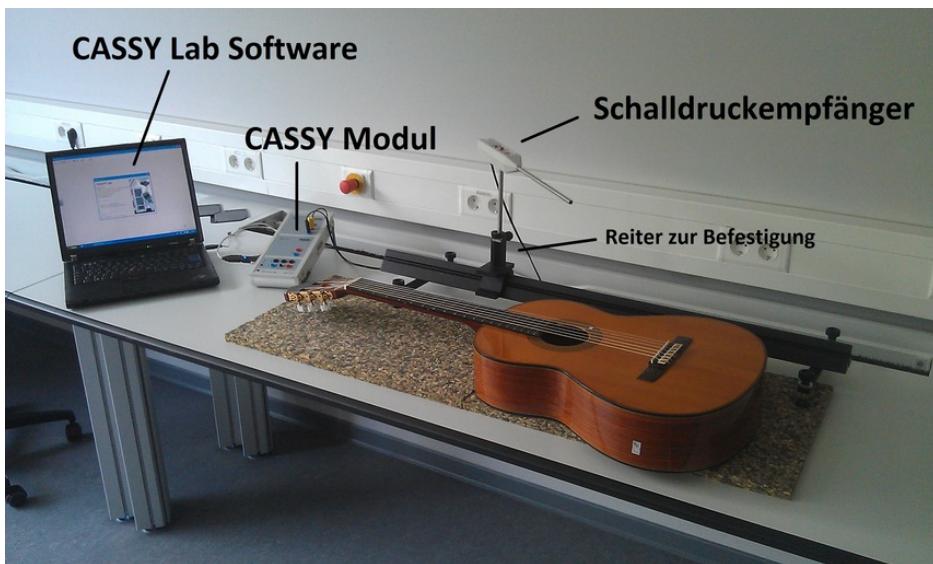


Abbildung 2.14: Messaufbau

des Schallochs plaziert. Der Einfluss des internen Rauschens der Spannung fällt dabei vernachlässigbar gering aus, allerdings liefern die Frequenzspektren einen deutlichen Peak bei 50Hz. Da dieser aber auch eine vernachlässigbare Ausprägung hat und nicht in den Bereich der später gemessenen Frequenzen fällt, bedarf dieser keiner weiteren Berücksichtigung.

2.3.4 Messung der Schwebung

Durch das Anschlagen von zwei Saiten, von denen eine leicht verstimmt ist, soll eine Schwebung erzeugt und aufgezeichnet werden. Aus dem Schwingungsverlauf soll dann die Schwebungsfrequenz bestimmt und mit den im Fourierspektrum ersichtlichen Eigenfrequenzen der beiden Saiten verglichen werden.

Dazu werden zunächst alle Saiten der Gitarre mit Hilfe des Stimmgerätes gestimmt. Das Stimmgerät erkennt automatisch, welche Saite gestimmt wird. Der Zeiger im Display muss bei allen Saiten im grünen Bereich bleiben. Um die Schwebung messen zu können, wird dann eine Saite leicht verstimmt. Hierfür eignet sich zum Beispiel die D-Saite. Dazu wird erst die Saite angeschlagen und anschließend vorsichtig an der Stimmmechanik gedreht, damit die Änderung der Tonhöhe gehört werden kann. Wird die Saite zu stark verstimmt, lassen sich keine Schwebungen erzeugen. Nun wird zum Beispiel die offene D-Saite zusammen mit der im 5. Bund gegriffenen A-Saite angeschlagen und dann die Messung gestartet. Dabei werden die beiden Saiten mit Daumen und Zeigefinger möglichst gleichzeitig angeschlagen. Die Schwebung ist sofort hörbar und umso deutlicher, je näher man sich am Schalloch befindet. Nach der Messung wird die Stimmmechanik leicht zurückgedreht und die Messung wiederholt. Die Schwebungsfrequenz sollte jetzt niedriger sein. Dies sollte sich mit dem Ohr und anhand der aufgenommenen Schwingungsbäuche bestätigen lassen. Hat man die ursprüngliche Frequenz der Saite erreicht, so sollte keine Schwebung mehr hörbar sein und die Schwingungsbäuche sollten im Spannungsbild verschwinden. Für die Messung müssen geeignete Werte für die Abtastrate und die Anzahl der Messpunkte in CASSY eingestellt werden, die sich nach dem zu vermessenden Frequenzbereich richten. Das Spannungsbild in Abb. 2.15 zeigt deutlich die Bäuche der Schwebung. Im Frequenzspektrum treten zwei Peaks auf. Es ergibt sich damit eine Schwebungsfrequenz ω_s und eine neue Frequenz ω_{res} der Schwingung. Diese ergeben sich über

$$\omega_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad \text{und} \quad \omega_{res} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad (2.12)$$

aus den ursprünglichen Frequenzen. Mit Gleichung 2.12 lassen sich daraus die Schwebungsfrequenz und die resultierende Frequenz der Gesamtbewegung berechnen.

Um die Schwebungsfrequenz f_s im Spannungsbild zu bestimmen, wird die Anzahl der Bäuche im Spannungsbild abgezählt und anschließend die gesamte Zeitdifferenz ΔT_s ermittelt. Die Zeitdifferenz kann dazu mittels CASSY Lab in den aufgenommenen Daten direkt bestimmt werden. Dabei müssen die Zeitpunkte an den Knotenpunkten abgelesen werden. Dort ist $A \approx 0$. Der exakte Knotenpunkt

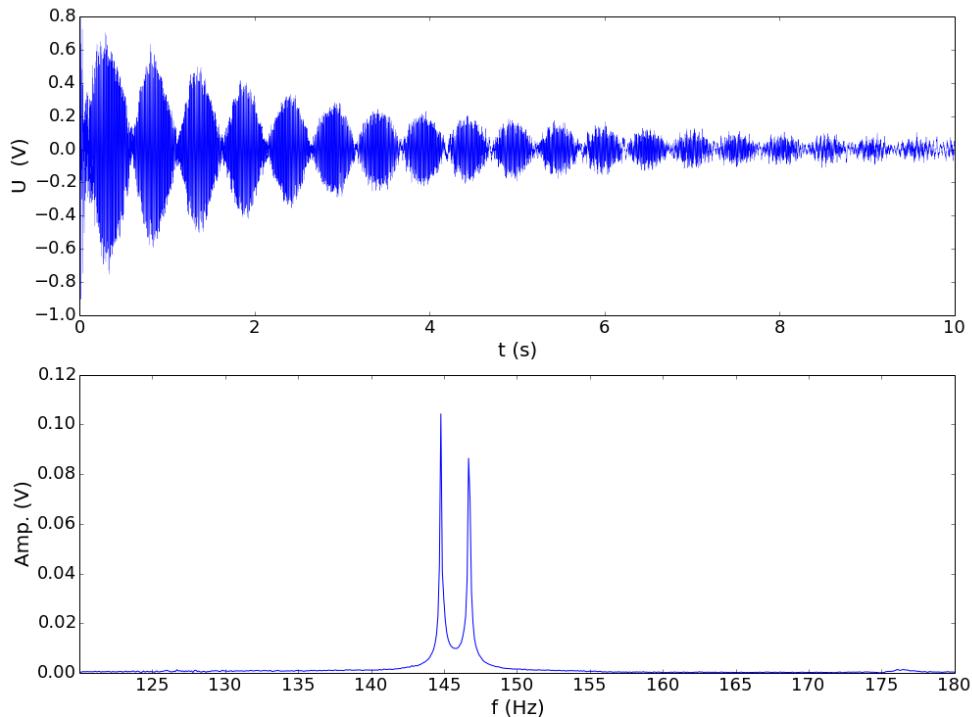


Abbildung 2.15: Messung einer Schwebung beim Stimmen der D-Saite.

liegt beim Ablesen innerhalb von zwei Schwingungsperioden der resultierenden Schwingung. Diese schwingt mit der Frequenz f_{res} .

2.3.5 Bestimmung der Saitenspannung einer Gitarrensaite

In diesem Versuch sollen die Materialeigenschaften zweier beliebiger Saiten, ausgedrückt durch das Verhältnis von Saitenspannung zu Massebelegung, ermittelt und mit den Angaben des Herstellers verglichen werden. Dazu werden zunächst die Längen der schwingenden Saiten für die entsprechenden Bünde ausgemessen. Die Messung soll mit der leer angeschlagenen Saite beginnen. Im Frequenzspektrum wird zunächst überprüft, ob die Frequenz der Leersaite mit der Erwartung übereinstimmt. Bei einer Abweichung muss die Saite zuerst nachgestimmt und die Messung wiederholt werden. Um das Auftreten von Schwebungen zu vermeiden, müssen auch die anderen Gitarrensaiten mithilfe des Stimmgeräts auf ihre Nominalfrequenz gestimmt werden. Anschließend wird für möglichst viele Bünde die Frequenz der Saite gemessen. Dieses Vorgehen wird mit einer zweiten Saite wiederholt. Für die Messung müssen geeignete Werte für die Abtastrate und die Anzahl der Messpunkte in CASSY eingestellt werden, die sich nach dem zu vermessenden Frequenzbereich richten.

Für die Frequenz gilt in völliger Analogie zu Gleichung (2.7):

$$f_n = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (2.13)$$

Dieser Ausdruck bestimmt die Schwingungsfrequenzen aller Grund- und Oberschwingungen in Abhängigkeit der Materialbeschaffenheit der Saite. Die Saite ist an beiden Enden der Saitenspannung T mit der Einheit $[T] = \text{N}$ ausgesetzt. Der Massebelag der Saite ist als μ mit der Einheit $[\mu] = \text{kg/m}$ definiert. In Gleichung (2.13) führt $n = 1$ zur Grundschwingung. Mit L ist die Länge der geöffneten, frei schwingenden Saite bezeichnet.

Der Grundton einer Saite lässt sich also über f_1 bestimmen. Da Frequenz und Länge der Saite gemessen werden können, lässt sich eine geeignete Auftragung der Messwerte finden, so dass sich ein linearer Zusammenhang ergibt und T/μ abgelesen werden kann. Zum Vergleich wird der Wert über die vom Hersteller angegebene Saitenspannung und den Massebelag berechnet. Der Herstellerangaben zu den Eigenschaften der Saiten finden sich in Tab. 2.2.

Saite	$\mu [10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}]$	T [N]
e'	0,3873	69,40
h	0,5234	52,62
g	0,8663	54,88
d	1,9910	70,76
A	3,4095	68,04
E	5,6712	63,50

Tabelle 2.2: Herstellerangaben der Materialeigenschaften.

2.3.6 Aufnahme eines Frequenzspektrums

In diesem Versuch soll untersucht werden, wie sich das Frequenzspektrum der Gitarre mit dem Anschlagspunkt auf der Saite verändert. Damit die Moden möglichst stark ausgeprägt sind, wird die Saite bei den folgenden Messungen senkrecht zum Steg in Schwingung versetzt. Außerdem wird die Saite mit dem Fingernagel angeschlagen, um die Auflagefläche zu minimieren. Für die Messung wird das Messintervall von $100\mu\text{s}$ ausgesucht, um Frequenzen bis 5000 Hz auflösen zu können.

In der ersten Messung wird die A-Saite in ihrer Mitte, also am 12. Bund, angeschlagen. Abb. 2.16 zeigt deutlich, dass das Frequenzspektrum in diesem Fall nur bestimmte Frequenzen enthält. Die Grundfrequenz von 110 Hz ist am deutlichsten zu erkennen. Ihre Oktave fehlt und erst die 2. Oberschwingung ist wieder zu erkennen. Da die Amplituden der Frequenzen logarithmisch abfallen, sind die Frequenzen ab 1000 Hz bei linearer Auftragung kaum noch erkennbar. Trägt man diese hingegen logarithmisch auf, so lässt sich eindrucksvoll zeigen, dass sogar bis zu einer Frequenz von 4000 Hz jede zweite Frequenz ausgeprägt ist. Der Ton

2 Akustik

klingt demnach sehr weich und wenig lebendig.

Im Vergleich dazu wird das Frequenzspektrum der A-Saite aufgenommen, die bei einem Zehntel ihrer Länge angeschlagen wird. Auch hier ist zu erkennen, dass die Amplituden bis zur zehnten Harmonischen stetig abfallen. Die folgenden Frequenzen erscheinen allerdings ausgeprägter. Der Ton klingt hier wesentlich schärfer, dafür lebendiger. Im Protokoll sollen die Frequenzspektren für mehrere Anschlagspunkte präsentiert und qualitativ diskutiert werden.

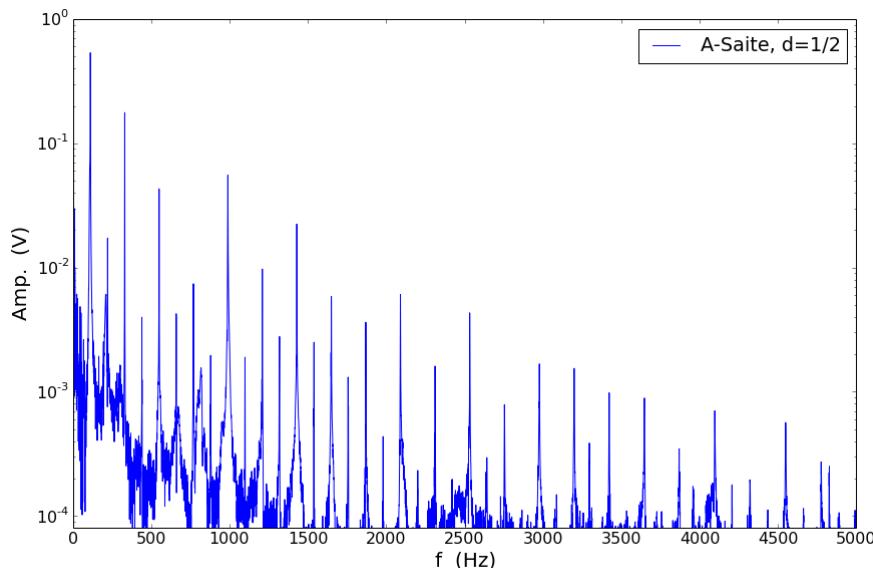


Abbildung 2.16: Frequenzspektrum der A-Saite, angeschlagen bei der Hälfte ihrer Länge.

Literaturverzeichnis

1. A. Schmitz, *Die Gitarre*, Ellert und Richter Verlag, 1998
2. Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, Second Edition, Springer-Verlag New York, 2008
3. L. Bergmann und C. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik: Mechanik - Akustik - Wärme, Bd 1, 12. Auflage, Walter de Gruyter, 2008

3 Wärmelehre

3.1 Dampfdruckkurve

Aufgaben: In diesem Versuch wird die Dampfdruckkurve von Wasser vermesssen und die Verdampfungsenthalpie bestimmt.

**Versuch
1T1**

Grundlagen: Wärme, Zustandsgrößen, Temperatur, Entropie, ideale und reale Gase, Phasenübergänge, Phasendiagramm, Verdampfungsenthalpie, Clausius-Clapeyron-Gleichung.

3.1.1 Theoretische Grundlagen

Ideale Gase

In einem **idealen Gas** werden die Moleküle als punktförmig angenommen (kein Eigenvolumen) und die Wechselwirkung zwischen den Molekülen wird vernachlässigt.

Der Zusammenhang zwischen den drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur wird durch die **Zustandsgleichung idealer Gase** (ideale Gasgleichung) beschrieben:

$$pV = \nu RT \quad (3.1)$$

Hierbei ist ν die Stoffmenge (Anzahl der Mole). R wird als allgemeine Gaskonstante bezeichnet. Mit dem Molvolumen $V_0 = 22,41/\text{mol}$, dem Normaldruck $p_0 = 1,013 \text{ hPa}$ und $T_0 = 273,15 \text{ K}$ gilt: $R = p_0 V_0 / T_0 = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

Mit der Avogadrozahl $N_A = \text{Teilchenzahl pro Mol} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ und $\nu = N/N_A$, wobei N die Anzahl der Moleküle ist, lässt sich Gleichung 3.1 auch schreiben als

$$pV = NkT$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Die Isothermen, d.h. p - V -Kurven für $T = \text{const}$, sind demnach für ein ideales Gas Hyperbeln, wie in Abb. 3.1 links exemplarisch für ein Gas, welches bei 0°C und Normaldruck ein Volumen von 1 l einnimmt, gezeigt ist.

Reale Gase

In realen Gasen haben die Moleküle ein endliches Eigenvolumen. Dies führt zum

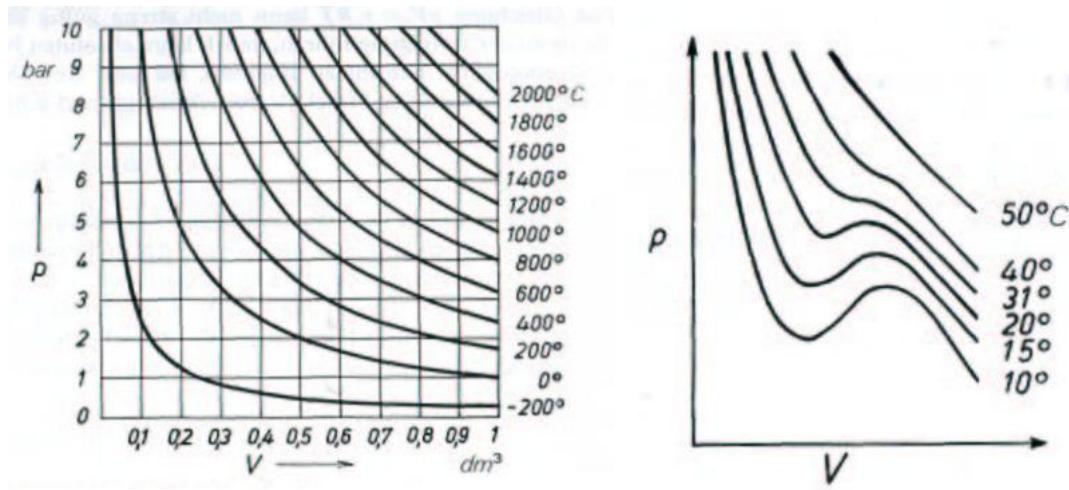


Abbildung 3.1: Links: Isothermen eines idealen Gases. Rechts: Van der Waals-Isothermen von CO_2 .

sogenannten Kovolumen b , welches wegen der Packungslücken ungefähr dem vierfachen Eigenvolumen der Moleküle entspricht. Des Weiteren wechselwirken die Teilchen untereinander durch van der Waals-Kräfte, wodurch zum äußeren Druck ein innerer Druck addiert werden muss. Die ideale Gasgleichung geht über in die Van der Waals-Gleichung:

$$(p + a/V^2)(V - b) = \nu RT$$

Die Isothermen sehen damit anders aus als für ein ideales Gas, wie man in Abb. 3.1 rechts am Beispiel von Kohlendioxid sieht. Außerdem ist zu beachten, dass für ein reales Gas die Wechselwirkung der Teilchen so stark werden kann, dass es seinen Aggregatzustand ändert und sich verflüssigt.

Änderung von Aggregatzuständen

Wenn man einem Festkörper Wärme mit einer konstanten Rate zuführt, ändert sich die Temperatur wie in Abb. 3.2 exemplarisch für 1 g Wasser gezeigt. Zuerst steigt die Temperatur wie erwartet an: $\Delta Q = c_{p,Eis} m(T - T_0)$ (T_0 ist die Ausgangstemperatur, in der Abbildung gilt z.B. $T_0 = 243\text{ K}$). Bei 0°C allerdings passiert etwas Neues: trotz Wärmezufuhr bleibt die Temperatur konstant. Beim Übergang vom festen zum flüssigen Aggregatzustand muss die kristalline Anordnung der Moleküle mit ihrer räumlich stabilen Struktur von Ionen und Elektronen aufgebrochen werden. Die zugeführte Wärmemenge von 335 J wird gebraucht, um 1 g Eis zu schmelzen. Die Schmelzwärme beträgt also

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{Schmelz}} &= 334,9\text{ J/g} \\ \Lambda_{\text{Schmelz}} &= 6,03\text{ kJ/mol},\end{aligned}$$

wobei die spezifische und molare Schmelzwärme über $\Lambda_{\text{Schmelz}} = M\lambda_{\text{Schmelz}} = \frac{m}{\nu}\lambda_{\text{Schmelz}}$ zusammenhängen. Zwischen 0°C und 100°C steigt die Temperatur nach

$\Delta Q = c_{p_{\text{Wasser}}} m(T - T_{\text{Schmelz}})$ weiter an. Bei der Siedetemperatur $T_s = 100^\circ\text{C}$ muss wieder eine Umwandlungswärme, die Verdampfungswärme, zugeführt werden:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{Verd}} &= 2256,7 \text{ J/g} \\ \Lambda_{\text{Verd}} &= 40,6 \text{ kJ/mol},\end{aligned}$$

denn beim Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Aggregatzustand wird die durch van der Waals-Kräfte vermittelte Nahordnung zerstört. Solche Umwandlungswärmen zwischen Aggregatzuständen oder Phasen (z.B. verschiedenen Kristallstrukturen) werden auch als latente Wärmen bezeichnet. Beim Umkehrvorgang, also Kondensation und Erstarrung, werden die gleichen Energiemengen frei. Anschaulich röhrt die Verdampfungswärme von der Entropieänderung beim Verdampfungsprozess her. Bei der Verdampfung geht das System vom flüssigen Zustand mit Entropie S_1 in den gasförmigen Zustand mit Entropie S_2 über. Durch die Volumenvergrößerung, die mit der Verdampfung einhergeht, ist die Entropie im gasförmigen System größer. Das liegt an der größeren Anzahl an Mikrozuständen, die dem System zur Verfügung stehen. Die Verdampfungswärme ist dann einfach durch die reversible Wärmezufuhr gegeben:

$$\Lambda_{\text{Verd}} = \Delta Q_{\text{rev}} = T_s(S_2 - S_1).$$

Für die meisten Substanzen gilt diese Überlegung weitgehend unabhängig von ihrer mikroskopischen Struktur und folglich hängt ihre Verdampfungswärme nur von der Siedetemperatur ab. Empirisch gilt die **Troutonsche Regel**:

$$\Lambda_{\text{Verd}} \approx 10RT_s.$$

Eine der wenigen Ausnahmen bildet das Wasser, da dort beim Verdampfen zusätzlich die recht starken Wasserstoffbrückenbindungen überwunden werden müssen.

Im Folgenden soll der Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Aggregatzustand genauer betrachtet werden. Hat man eine Flüssigkeit in einem evakuierten geschlossenen Gefäß, so verdampfen und kondensieren Moleküle, bis sich ein Gleichgewicht einstellt. Der Dampf hat dann einen von der Temperatur und Stoffart abhängigen Druck, den Dampfdruck oder Sättigungsdruck. Der Zusammenhang zwischen Sättigungsdampfdruck und Temperatur wird durch die **Dampfdruckkurve** beschrieben. Abb. 3.3 zeigt die Dampfdruckkurve von Wasser. Ist das Gefäß nicht evakuiert, müssen die Moleküle durch z.B. Luft diffundieren. Das Gleichgewicht stellt sich langsamer ein, aber der Dampfdruck ist der gleiche, denn nach Dalton ändert sich an den Partialdrücken der einzelnen Gase durch die Anwesenheit anderer Gase nichts. Ist zu wenig Flüssigkeit vorhanden, verdampft alles und es kann sich kein Gleichgewicht einstellen. Flüssigkeit in einem offenen Gefäß wird also unabhängig von Druck und Temperatur immer vollständig verdampfen (Verdunstung).

Die Isothermen des Flüssigkeit-Gas-Systems von CO₂ sind auf der linken Seite von Abb. 3.4 gezeigt. Sie folgen nicht mehr dem Gesetz für ideale Gase, sondern zeigen einen komplizierteren Verlauf. Wir betrachten die Isotherme bei $t_1 = 10^\circ\text{C}$.

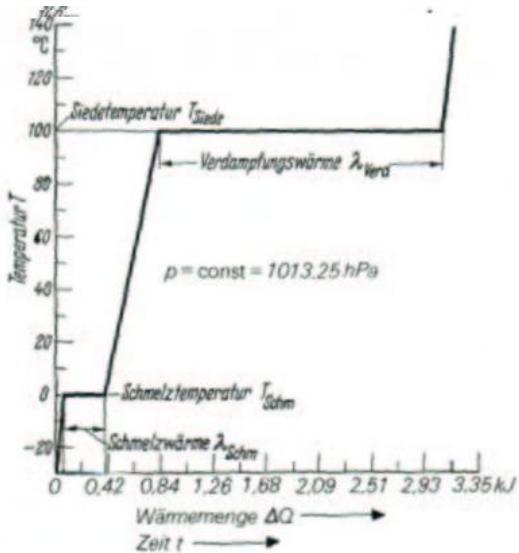


Abbildung 3.2: Temperaturverlauf bei konstanter Erwärmung von 1 g Wasser.

Rechts vom Punkt A ist das CO_2 gasförmig, Kompression führt also zu einem Druckanstieg. Am Punkt A setzt Sättigung ein, Kompression führt zu Kondensation bei konstantem Druck. Schließlich ist bei B nur noch Flüssigkeit vorhanden, weitere Kompression führt zu starkem Druckanstieg. Das durch die Punkte A und B der Isothermen definierte Gebiet wird als Sättigungsgebiet bezeichnet. Für $T_2 = 31^\circ\text{C}$ sind am Punkt C die Volumina von Gas und Flüssigkeit gleich, beide Aggregatzustände haben die gleiche Dichte. Dieser Punkt wird als kritischer Punkt bezeichnet, entsprechend den zugehörigen Zustandsgrößen als kritische Temperatur, kritische Dichte etc. Oberhalb der kritischen Temperatur kann ein Gas auch durch beliebig hohen Druck nicht verflüssigt werden. Nur für Zustände mit einer Temperatur weit oberhalb der kritischen Temperatur gilt die Thermodynamik eines idealen Gases.

Die aus der Van der Waals-Gleichung berechneten Isothermen (Van der Waals-Isothermen) sehen anders aus als die im Experiment gewonnenen Kurven (Abb. 3.4, rechte Seite). Man erhält die den Punkten A und B von oben entsprechenden Punkte A und C, wenn man eine Gerade so durch die Van der Waals-Isotherme legt, dass die schraffierten Flächen gleich groß sind.

Wird die Wärmezufuhr einer Flüssigkeit so groß, dass die Wärme nur durch inneres Verdampfen (Vergrößerung der Oberfläche) mittels Gasblasen, welche an die Oberfläche steigen, abgeführt werden kann, spricht man vom Sieden. Die Temperatur ist dann konstant (Siedetemperatur), d.h. ein stationärer Zustand erreicht, wenn der Druck in den Blasen dem äußeren Druck entspricht. Die Siedetemperatur hängt also vom Außendruck ab (Abb. 3.5). Die Blasen entstehen an "Keimen", z.B. gelösten Gasen, Spitzen, Ionen. In sehr sauberen Flüssigkeiten gibt es daher Siedeverzug.

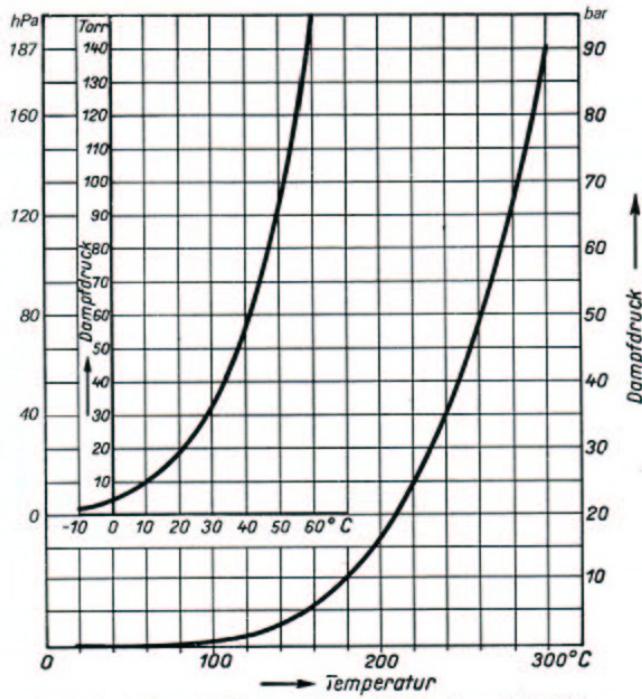


Abbildung 3.3: Dampfdruckkurve von Wasser.

Clausius-Clapeyronsche Gleichung Die quantitative Beschreibung des Sättigungsdruckes leistet die Clausius-Clapeyronsche Gleichung. Zur Herleitung betrachten wir den in Abb. 3.6 gezeigten Kreisprozess im p-V-Diagramm.

- Start bei A mit ν, V_2, T, c_2
- $A \rightarrow B$: $\Delta Q = \nu C_{m_2} dT$ wird zugeführt
- $B \rightarrow C$: Verdampfen, $\Delta Q = \nu \Lambda'$ wird zugeführt
- $C \rightarrow D$: $\Delta Q = \nu C_{m_1} dT$ wird entzogen
- $D \rightarrow A$: Kondensieren, $\Delta Q = \nu \Lambda$ wird frei

Es gilt also mit $\Lambda' = \Lambda + \frac{d\Lambda}{dT}dT$ und dem ersten Hauptsatz:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \nu(C_{m_2}dT + \Lambda' - C_{m_1}dT - \Lambda) \\ &= \nu \left((C_{m_2} - C_{m_1})dT + \frac{d\Lambda}{dT}dT \right) \\ &= -\Delta A \\ &= dp(V_1 - V_2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nu \left((C_{m_2} - C_{m_1})dT + \frac{d\Lambda}{dT}dT \right) = dp(V_1 - V_2) \quad (3.2)$$

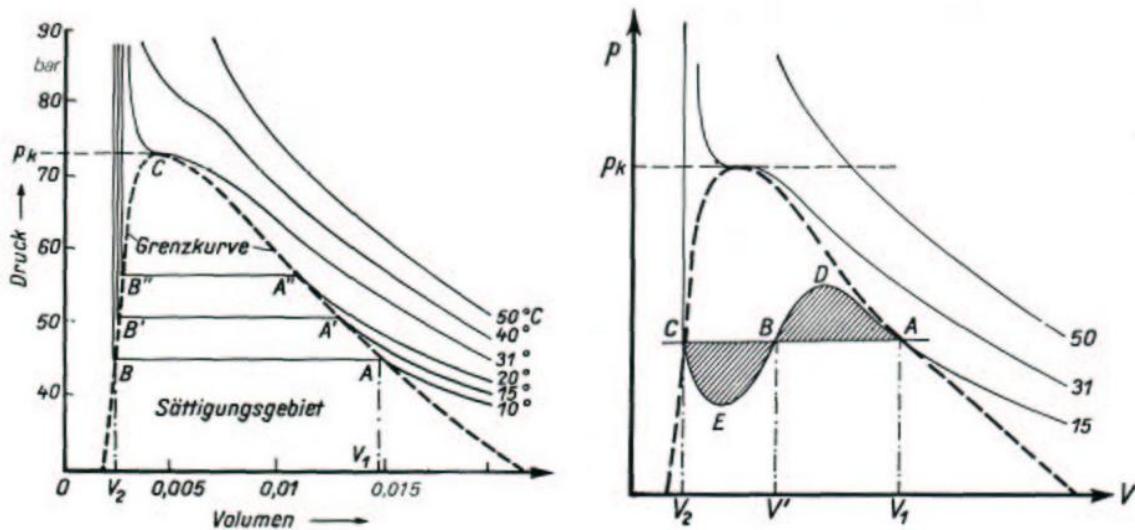


Abbildung 3.4: Links: Isothermen von CO₂ mit Sättigungsgebiet. Rechts: Van der Waals-Isothermen von CO₂ mit Sättigungsgebiet.

Der zweite Hauptsatz ($\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$) liefert die Gleichung:

$$\nu \left(\frac{C_{m_2}dT}{T} + \frac{\Lambda'}{T+dT} - \frac{C_{m_1}dT}{T} - \frac{\Lambda}{T} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{(C_{m_2} - C_{m_1})}{T}dT + \frac{\Lambda + \frac{d\Lambda}{dT}dT}{T(1+dT/T)} - \frac{\Lambda}{T} &= 0 \\ (C_{m_2} - C_{m_1})dT + \left(\Lambda + \frac{d\Lambda}{dT}dT \right) (1 - dT/T) - \Lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$(C_{m_2} - C_{m_1})dT + \frac{d\Lambda}{dT}dT - \Lambda dT/T = 0 \quad (3.3)$$

Hierbei wurde $\frac{1}{1+\frac{dT}{T}} = 1 - \frac{dT}{T}$ gesetzt und der quadratische Term in dT vernachlässigt. Aus Gleichungen 3.2 und 3.3 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\nu}(V_1 - V_2) &= \Lambda \frac{dT}{T} \\ \Rightarrow \Lambda(T) &= T \frac{dp}{dT}(V_1 - V_2)/\nu \\ \Rightarrow \frac{dp}{dT} &= \frac{\nu \Lambda}{T(V_1 - V_2)} \end{aligned}$$

Dies ist die **Clausius-Clapeyronsche Gleichung**. Sie gilt für beliebige Phasenübergänge. Eine Integration, wobei die Temperaturabhängigkeiten von Λ und dV

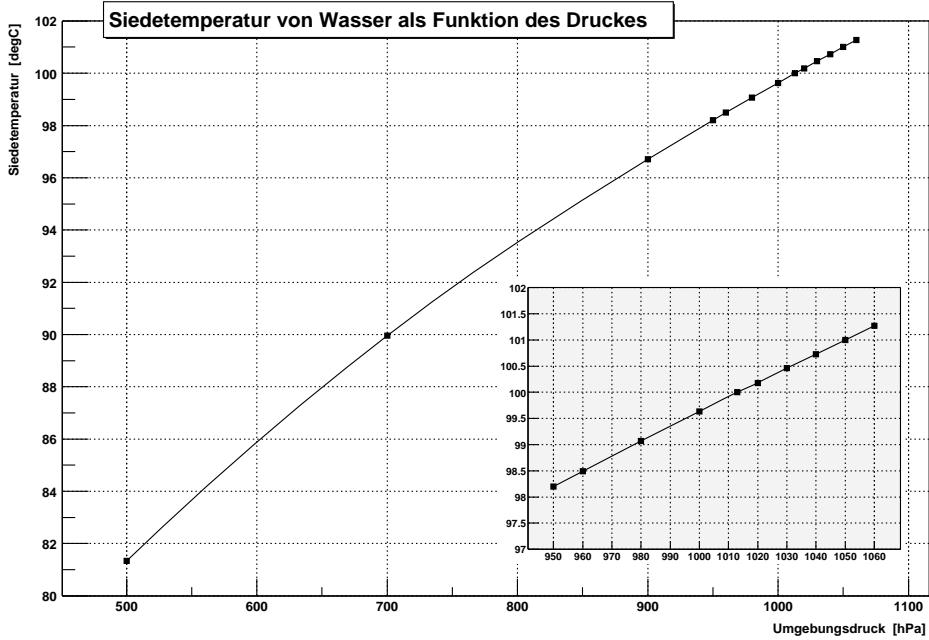


Abbildung 3.5: Temperaturabhängigkeit des Siedepunktes von Wasser.

bekannt sein müssen, ergibt $p(T)$.

Beim Verdampfen, wenn $V_{\text{gas}} \gg V_{\text{fl}}$, gilt:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{Verd}}(T) &= T \frac{dp}{dT} (V_{\text{gas}} - V_{\text{fl}})/\nu \\ \frac{dp}{dT} &= \frac{\nu \Lambda_{\text{Verd}}}{T(V_{\text{gas}} - V_{\text{fl}})} \\ &= \frac{\nu \Lambda}{TV_{\text{gas}}} = \frac{p \Lambda}{RT^2}\end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = \frac{\Lambda}{R} \int_{T_0}^T \frac{1}{T^2} dT$$

und damit schließlich:

$$\ln(p/p_0) = -\frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right). \quad (3.4)$$

Bei entsprechender Auftragungsweise kann die Verdampfungswärme also direkt aus der Steigung bestimmt werden, wobei wegen der Temperaturabhängigkeit von Λ streng genommen nur kleine Temperaturbereiche genommen werden dürfen.

Zustandsdiagramm

Für alle Phasenübergänge wird $p(T)$ im Zustandsdiagramm dargestellt. Abb. 3.7

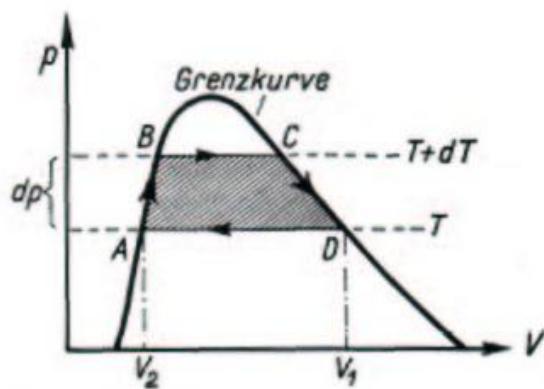


Abbildung 3.6: Kreisprozess zur Herleitung der Clausius-Clapeyron-Gleichung.

zeigt die Zustandsdiagramme für CO₂ (links) und Wasser (rechts) mit den Phasenübergängen Sublimation, Schmelzen und dem ausführlich behandelten Verdampfen. Die Steigung von dp/dT ist i.A. positiv. Eine Ausnahme bildet die Schmelzkurve von Wasser, deren Steigung negativ ist. Der Grund ist die Anomalie des Wassers, also $V_{\text{Eis}} > V_{\text{fl.}}$. Man kann also durch Druck Eis schmelzen. Der Punkt, an dem sich alle drei Kurven treffen, wird Tripelpunkt genannt. Hier herrscht Koexistenz aller drei Aggregatzustände.

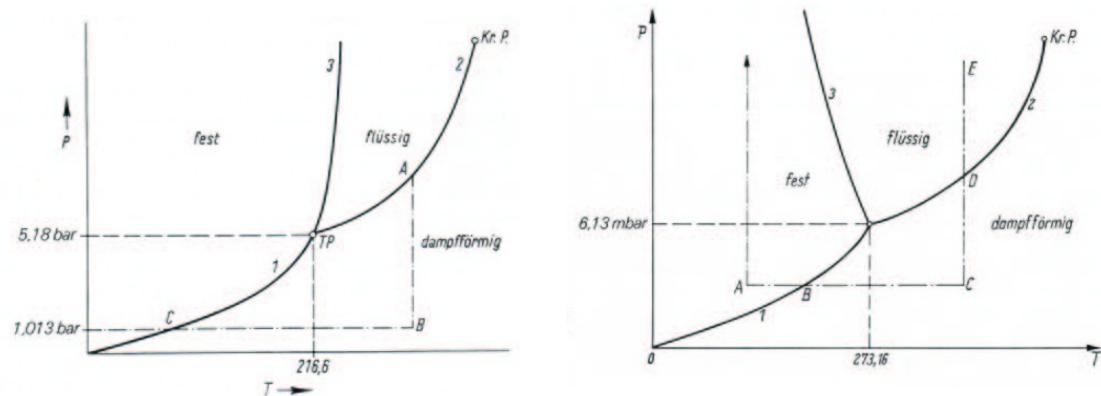


Abbildung 3.7: Links: Zustandsdiagramm von Kohlendioxid. Rechts: Zustandsdiagramm von Wasser.

3.1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Benötigte Geräte

Sensor-CASSY,

Heizhaube,

Absolutdrucksensor S 1500 hPa LD Didactic 524065 mit Verbindungskabel (15-poliger Sub-D Stecker) oder

Absolutdrucksensor mit Stativstange und 6-poligem Verbindungskabel und B-Box (Pegelkonverter),

Temperatursensor,
 Temperaturbox,
 Kolben,
 Messbecher,
 Glasventil (Dreiwegehahn),
 Handpumpe,
 Stativ mit Stange,
 Laborheber,
 Schläuche, Verbindungsstücke und Muffen.

Der Absolutdrucksensor S (524065) von LD Didactic ermöglicht Messungen des Absolutdruckes zwischen 0 und 1500 hPa. Um zu verhindern, dass Kondensat in den Sensor zurückfließt, ist der Sensor mit der Messöffnung abwärts zu montieren. Der Hersteller gibt eine Auflösung von 0,05 % des Messbereichs an.

Der Temperaturfühler (Betriebsbereich $-20^{\circ}\text{C} < T < 120^{\circ}\text{C}$, Fehler für $-20^{\circ}\text{C} < T < 70^{\circ}\text{C}$: $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$, für $70^{\circ}\text{C} < T < 120^{\circ}\text{C}$: $\pm 0,4^{\circ}\text{C}$) basiert auf einem Thermistor. Dieser Sensor ist an der Spitze eines hermetisch verschlossenen dünnen Edelstahlrohres montiert (Vorsicht beim Einführen in die mit einem durchbohrten Stopfen verschlossene Messöffnung). Die Ansprechzeit (99% des Temperaturendwertes) in Flüssigkeiten ist 7s.

Der Versuchsaufbau erfolgt in Anlehnung an Abb. 3.9. Glaskolben, Drucksensor und Temperaturfühler werden mit dem vorhandenen Stativmaterial befestigt. Der Heizpilz wird auf dem ausgefahrenen Laborheber unter den Glaskolben gestellt, so dass er durch Absenken des Laborhebers später schnell und einfach entfernt werden kann. Die Handpumpe wird über den Dreiwegehahn und das T-Stück mit Schläuchen mit dem Glaskolben verbunden.

Allgemeines

- Bei allen Messungen darf die Funktion “Messwerte mitteln” in der CASSY-Software nicht verwendet werden, da sie die Bestimmung der Messfehler stark verfälscht!
- Sorgfältig protokollieren! Wichtig sind insbesondere die Zeitpunkte und Dauer der Messungen, die Nummer der verwendeten Apparatur, Ergebnisse der Vorversuche und jeder Handgriff an der Apparatur.
- Immer die Rohdaten mit abspeichern. Z.B. gehören neben $\ln(p)$ und $1/T$ auch p und T selbst mit in den CASSY-Datensatz. Das spätere Zurückrechnen ist, wenn überhaupt möglich, eine ergiebige Fehlerquelle.
- Machen Sie sich vor Beginn der Messreihen mit der Funktionsweise der Apparate, insbesondere des Dreiwegehahns und der Handpumpe vertraut! Vergegenwärtigen Sie sich die durchzuführenden Handgriffe vor Beginn der Messung!

Messung des Rauschens der Sensoren

Um die statistische Messgenauigkeit abzuschätzen, kann man die Sensoren über ein kurzes Zeitintervall mit hoher Rate auslesen (Raumtemperatur bzw. Normaldruck). Unter der Annahme eines stabilen Messwertes in diesem Zeitintervall ergibt die Streuung der beobachteten Daten die statistische Messungenauigkeit. Die von Leybold angegebenen Fehler können als systematische Fehler betrachtet und behandelt werden. Die Messwerte sollen zusätzlich in ein Histogramm einge tragen werden, um einen Überblick über ihre Verteilung zu erhalten.

Kalibrierung des Temperatursensors

Der Temperatursensor wird mit Eiswasser und kochendem Wasser kalibriert. Eiswürfel erhalten Sie vom Betreuer. Fügen Sie nicht zu viel Wasser hinzu, sonst dauert es sehr lange, bis sich ein Gleichgewicht einstellt. Die Kalibration mit kochendem Wasser führen Sie später während des Hauptversuches durch. Die gemessenen Temperaturwerte müssen nachträglich in der Auswertung mit Hilfe der Kalibrationsmessung korrigiert werden, falls signifikante Abweichungen bestehen.

Messung der Gasdichtigkeit

In einer Vormessung soll die Gasdichtigkeit geprüft werden. Hierzu wird im Kolben mittels einer Handpumpe ein Unterdruck ($p < 200 \text{ hPa}$) erzeugt, welcher durch Undichtigkeiten mit der Zeit ausgeglichen wird. Der Druckverlauf sollte über ca. 10 Minuten in sinnvollen Intervallen gemessen werden.

Der prinzipielle Versuchsaufbau ist in Abb. 3.9 gezeigt. Verbinden Sie die Pumpe über das Ventil mit dem Kolben und montieren Sie den Drucksensor. Erzeugen Sie einen möglichst großen Unterdruck und messen Sie den Druckverlauf. (Falls der Drucksensor zusammen mit der B-Box verwendet wird, sollte die Kompen sation des Drucksensors in allen Messungen ausgeschaltet sein, die LED auf der B-Box also nicht leuchten). Falls nötig, kann zur Verbesserung der Dichtigkeit der Anordnung die Schlauchschelle vorsichtig weiter angezogen werden. Außer dem steht ein Dichtungsmittel zur Verfügung, das auf die Normschliffe der Glasbehälter/Ventile aufgetragen werden kann. Ausgeleerte Schlauchenden können abgeschnitten werden. Allgemein ist zu empfehlen, das Öffnen der einmal abgedichteten Glas- und Schlauchverbindungen möglichst zu vermeiden. Der Aufbau sollte nach dieser Messung nicht mehr geändert werden (Schraubverschlüsse nicht mehr auf und zu drehen, Temperatursensor nicht entfernen etc.). Bei einem sorg fältigen Aufbau sollte die Leckrate $0,2 \text{ mbar/min}$ nicht überschreiten.

Messung der Dampfdruckkurve

Dauer der Messung: ca. 1,5 Stunden

Im Hauptversuch wird die Dampfdruckkurve von Wasser aufgenommen. Gefüllt wird das Gefäß durch Ansaugen aus einem Messglas (Eintauchen des Schlauches in das Messglas bei geschlossenem Ventil und bestehendem Unterdruck, kurzzeitiges Öffnen des Ventils, eventuell erneutes Abpumpen). Der Dreiwegehahn muss dabei so eingestellt sein, dass kein Wasser in die Pumpe gesaugt wird! Der Kolben sollte ca. halb gefüllt werden.

Sodann wird das Wasser mit Hilfe der elektrischen Heizhaube zum Sieden ge

bracht, und dabei der Temperaturverlauf aufgezeichnet. Während der Aufwärmphase bleibt der Auslass geöffnet! Lassen Sie den erzeugten Dampf in einem Glas kondensieren. Vergleichen Sie die Temperatur in als auch oberhalb der Flüssigkeit. **Nutzen Sie die Aufwärmphase, um sich von der starken Druckabhängigkeit der Siedetemperatur zu überzeugen** (s. Abb. 3.5). Nach Einstellung des Gleichgewichtes sollte das Wasser noch einige Minuten sieden, damit die Luft weitgehend aus dem Gefäß entweichen kann. Ihr Partialdruck führt sonst zu einer Verfälschung der Druckmessung. Der Anteil der Luft im austretenden Gas lässt sich recht gut abschätzen, indem der Abgasschlauch einige Zentimeter unter den Flüssigkeitsspiegel – z.B. in einem Messglas – getaucht wird. Während der Dampfanteil sofort kondensiert, treten nur die Luftblasen bis an die Oberfläche. Der Dampfdruck wird beim Abkühlen bei verschlossenem Gefäß gemessen. Unbedingt den Hahn am Auslassschlauch schließen, kurz bevor die Heizhaube abgeschaltet und dann durch Absenken des Laborhebers entfernt wird. Der entstehende Druckabfall führt sonst sofort zum Ansaugen von Luft oder Wasser in das Gefäß. Nach dem Schließen des Hahns nicht zu lange mit dem Entfernen der Heizhaube warten, der Überdruck kann sonst den Glasstopfen aus dem Rundkolben herausdrücken. Wählen sie eine geeignete Auftragungsweise und berechnen Sie zu Ihrer Kontrolle sofort die Verdampfungswärme (Literaturwerte zum Vergleich in Abb. 3.8).

Zweite Dichtigkeitsmessung

Um eine eventuelle Änderung der Gasdichtigkeit während des Versuches auszuschließen, wiederholen Sie die Dichtigkeitsmessung nach der Aufnahme der Dampfdruckkurve. Hierfür muss das Wasser vollständig auf Raumtemperatur abgekühlt sein, da die Temperaturänderung sonst den Druck beeinflusst.

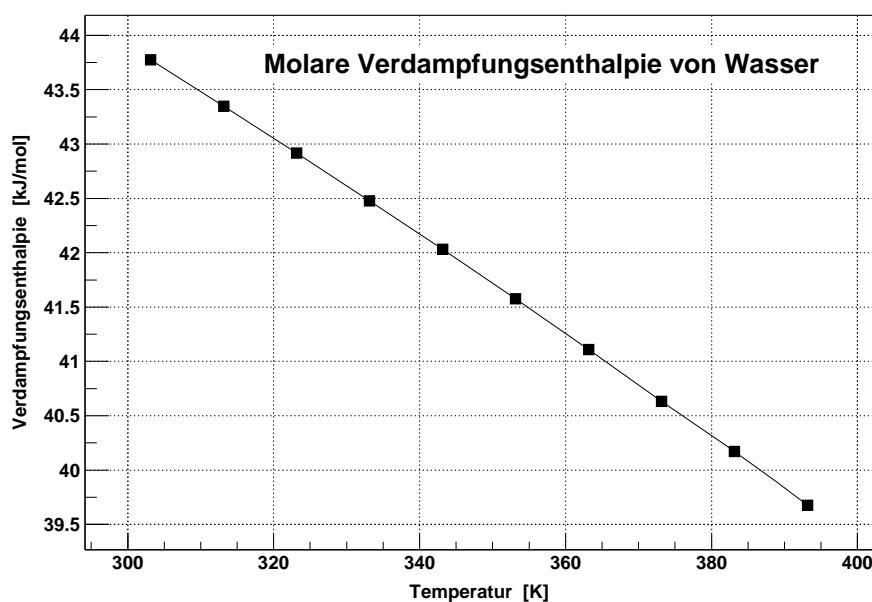


Abbildung 3.8: Temperaturabhängigkeit der molaren Verdampfungsenthalpie von Wasser.

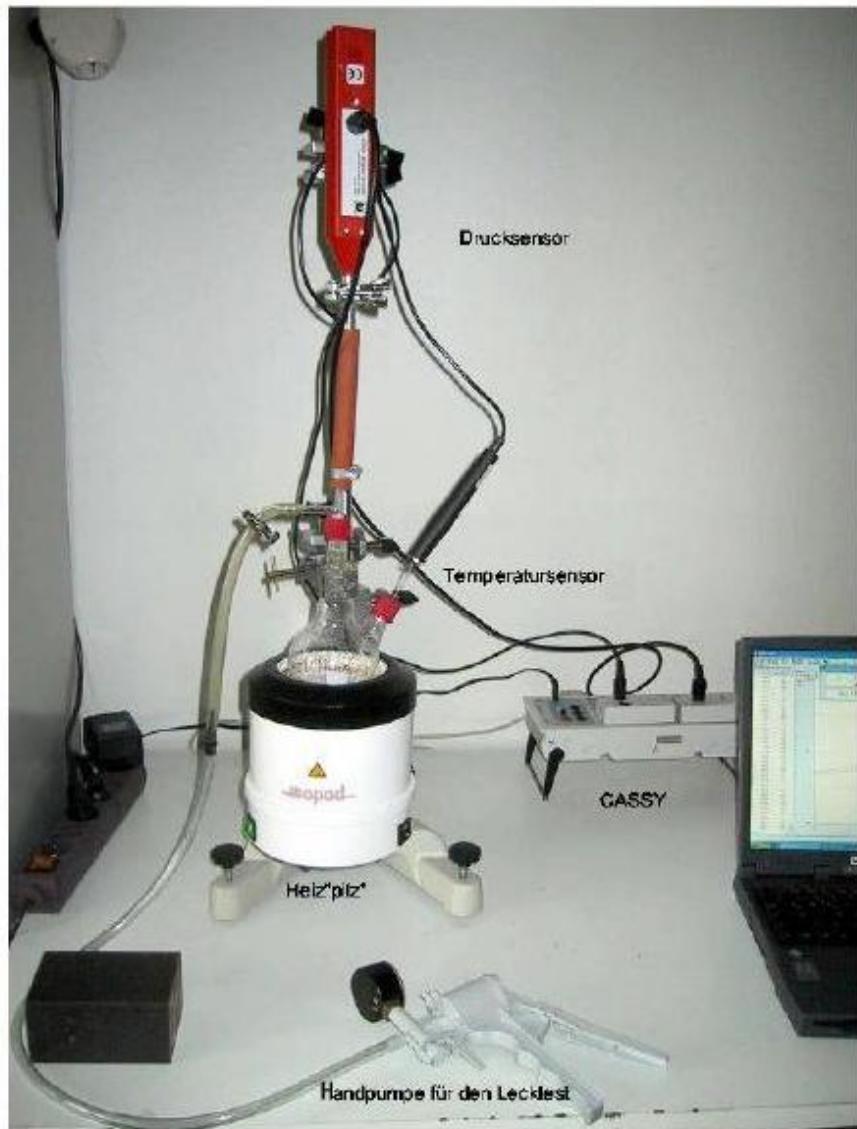


Abbildung 3.9: Versuchsaufbau zur Messung der Dampfdruckkurve (ohne Laborheber und Dreiegehahn).

3.2 Adiabatenkoeffizient

Versuch 1T2 Ziel: In diesem Experiment soll das Verhältnis c_p/c_v mit der Methode nach Rüchardt gemessen werden.

Vorkenntnisse: Spezifische Wärme, Zustandsgleichung, Zustandsänderungen (adiabatisch, isotherm, isobar).

3.2.1 Rüchardt-Methode

Die Rüchardt-Methode zur Messung des Verhältnisses c_p/c_v für ein Gas basiert auf der Messung von Schwingungen einer Stahlkugel, die von einer Gassäule in einem hochpräzisen Glaskolben getragen wird. Das Messprinzip ist in Abb. 3.10 gezeigt.

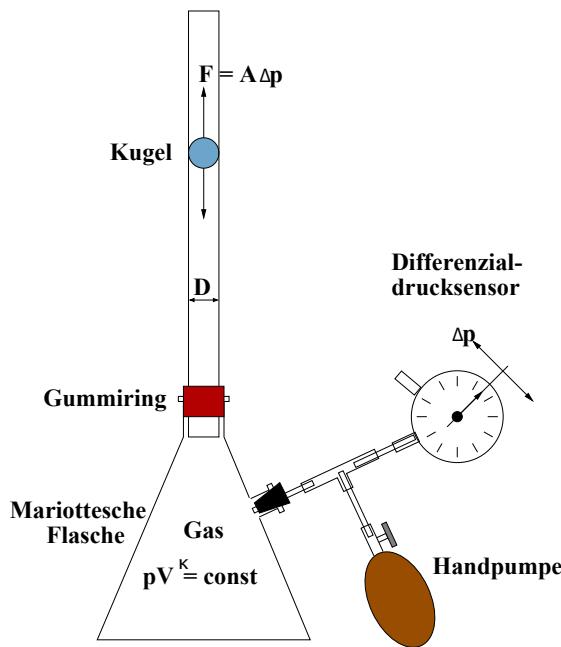


Abbildung 3.10: Prinzip der Messung von c_p/c_v nach Rüchardt.

Die Kugel passt genau in das Rohr mit einem Durchmesser von ca. 16 mm. Das präzise Glasrohr steckt vertikal in einem Erlenmeyerkolben (Mariottesche Flasche), der oben mit einem Gummiring abgedichtet ist, durch den das Glasrohr passt. Der Druck im Innern des Erlenmeyerkolbens wird mit einem differenziellen Manometer gemessen.

Mit einer Handpumpe kann ein langsamer Luftstrom in den Erlenmeyerkolben hinein erzeugt werden. Der erhöhte Luftdruck bringt die Kugel im Glasrohr zum Steigen. Wenn der Luftstrom aufhört, sinkt die Kugel langsam zurück. Die Kugel

sinkt nur sehr langsam, weil die Luft aus dem Erlenmeyerkolben nur durch den mikroskopischen Spalt zwischen Glasrohr und Kugel entweichen kann.

Wird die Kugel schnell mithilfe zweier kleiner Permanentmagnete in eine höhere Position gebracht, beginnt sie mit Schwingungen auf und ab, bevor sie langsam absinkt. Die Schwingungen werden durch unvermeidbare Reibungsverluste gedämpft. Die zeitliche Änderung des Luftdrucks in der Flasche wird aufgezeichnet. Aus den Messdaten kann dann der Adiabatenkoeffizient $\kappa = c_p/c_v$ bestimmt werden. Die relevanten Größen sind:

- m - Masse der Kugel,
- $A = \pi D^2/4$ - Querschnittsfläche des Glasrohrs,
- V - Volumen der eingeschlossenen Luft,
- p_0 - Außendruck,
- p - Druck innerhalb des Erlenmeyerkolbens,
- c_p - spezifische Wärme bei konstantem Druck,
- c_v - spezifische Wärme bei konstantem Volumen,
- $\kappa = c_p/c_v$ - Adiabatenkoeffizient.

Die Kugel ist im Gleichgewicht, wenn der Druck p im Erlenmeyerkolben gleich der Summe aus Außendruck p_0 und dem Druck aus der Gewichtskraft der Kugel ist:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}. \quad (3.5)$$

Wenn sich die Kugel um eine Strecke x aus der Gleichgewichtsposition bewegt, ändert sich der Druck um dp . Dadurch wirkt eine Kraft $A dp$ auf die Kugel. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit der Kugel, $F_{\text{fr}} = -\alpha_{\text{fr}} \frac{dx}{dt}$. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt dann:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Adp - \alpha_{\text{fr}} \frac{dx}{dt}. \quad (3.6)$$

Der Prozess kann als quasi adiabatisch betrachtet werden. Deshalb ist

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (3.7)$$

Ableiten ergibt

$$V^\kappa dp + p\kappa V^{\kappa-1} dV = 0, \quad (3.8)$$

$$dp = -\frac{p\kappa}{V} dV. \quad (3.9)$$

Die Bewegung der Kugel um eine Entfernung x im Glasrohr führt zu einer Volumenänderung von

$$dV = Ax. \quad (3.10)$$

3 Wärmelehre

Einsetzen von (3.10) in (3.9) ergibt

$$\frac{dp}{V} = -\frac{p\kappa Ax}{V}. \quad (3.11)$$

Die Bewegungsgleichung (3.6) nimmt damit die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha_{fr}}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{p\kappa A^2}{mV} x = 0 \quad (3.12)$$

an. Dies ist die Differentialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung, aus der die Schwingungsfrequenz der Kugelbewegung abgeleitet werden kann zu

$$\omega = \sqrt{\frac{p\kappa A^2}{mV}}. \quad (3.13)$$

Daraus folgt für $\kappa = c_p/c_v$:

$$\kappa = \omega^2 \frac{mV}{pA^2}. \quad (3.14)$$

Alle Größen auf der rechten Seite von Gleichung (3.14) sind der Messung zugänglich. Das Gesamtvolumen der eingeschlossenen Luft V setzt sich dabei zusammen aus dem Volumen des Erlenmeyerkolbens V_K und dem des Rohrs V_R , soweit es aus dem Erlenmeyerkolben herausragt:

$$V = V_K + V_R. \quad (3.15)$$

Hat man die Schwingungsdauern für mehrere Volumina gemessen, sei es durch Verwendung verschiedener Erlenmeyerkolben oder durch Variation des Nullpunkts der Kugel im Rohr, kann man κ durch eine lineare Regression bestimmen, indem man $1/V$ gegen ω^2 aufträgt:

$$\frac{1}{V} = \frac{m}{\kappa p A^2} \omega^2. \quad (3.16)$$

3.2.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Der Drucksensor erlaubt Messungen von Differenzdrücken $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen 0 und ± 70 hPa. Er wird direkt an das Sensor-CASSY angeschlossen. Technische Daten:

- Messbereiche: $\pm 0,7$ hPa, ± 7 hPa, ± 70 hPa,
- Auflösung: 0,05% des Messbereichs.

Aufbau Bauen Sie das Experiment wie in Abb. 3.11 gezeigt auf:

- Führen Sie das Glasrohr vertikal in den trockenen Erlenmeyerkolben ein. Das Rohr sollte an beiden Seiten abgeschlossen werden, um schnelle Bewegungen der Kugel im Rohr zu verhindern.

- Fixieren Sie die vertikale Position des Rohrs mit der Greifhalterung, die am Stativ befestigt ist.
- Verbinden Sie den Auslass des Erlenmeyerkolbens mit der Handpumpe und dem Differenzialdrucksensor mittels der PVC Schläuche und Verbindungsstücke.
- Schließen Sie den Drucksensor an den Eingang A des Sensor-CASSYs ein.
- Öffnen Sie das obere Ende des Glasrohrs.

Durchführung Die folgenden Größen müssen gemessen werden:

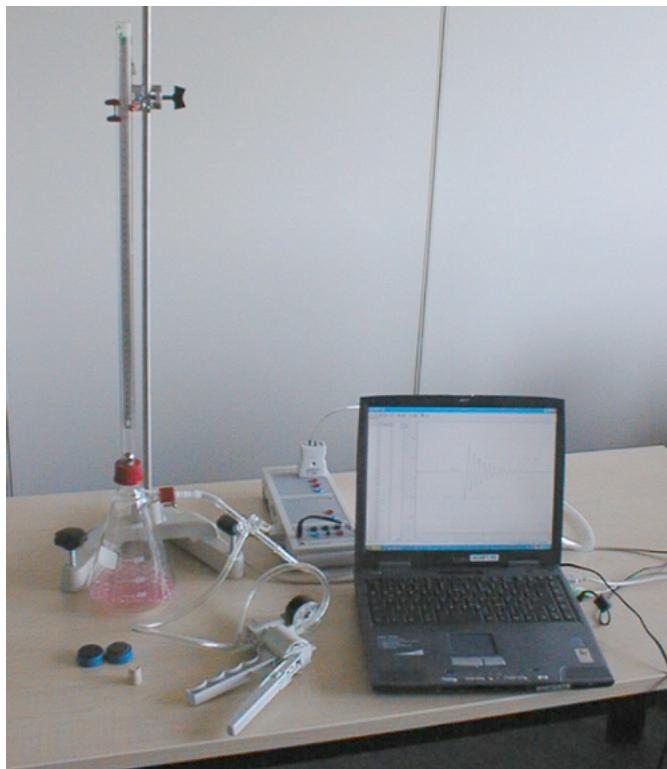
- ω - die Kreisfrequenz der Schwingung der Kugel,
- $A = \frac{\pi D^2}{4}$ - Querschnittsfläche des Glasrohrs,
- m - Masse der Kugel,
- V_K - Volumen des Erlenmeyerkolbens,
- V_R - zusätzliches Volumen im Rohr, zu bestimmen aus der Nullpunktslage der Kugel,
- p - Druck in der Gleichgewichtslage der Kugel.

Die Messung von V_F kann durch Wiegung des leeren Erlenmeyerkolbens sowie des mit Wasser gefüllten Erlenmeyerkolbens geschehen. Dies darf erst nach der Schwingungsmessung geschehen, weil die Luft im Innern des Erlenmeyerkolbens dann trocken sein muss.

Die Schwingungsfrequenzen der Kugel sollen für verschiedene Kugelpositionen (Höhe) für beide Erlenmeyerkolben gemessen werden. Die Messungen sind mehrfach zu wiederholen. Die beiden Erlenmeyerkolben können außerdem durch Schlauchverbindungsstücke zu einem größeren Gesamtvolumen zusammengeschlossen werden.

3.2.3 Tipps und Anmerkungen

- Beim Aufbau äußerste Vorsicht beim Umgang mit dem Glasrohr und dem Dreiegehahn walten lassen, es besteht Bruchgefahr!
- Führen Sie eine Dichtigkeitsmessung durch, bevor Sie die Kugel in das Rohr einführen. Kontrollieren Sie den Korkstöpsel und den Dreiegehahn.
- Ein Trigger ist hilfreich, weil man die Messung starten kann, bevor man die Kugel mit den Magneten auslenkt.
- Vorsichtig mit den Pumpen umgehen!
- Bauen Sie den Versuch so auf, dass man für die unterschiedliche Messungen nur den Erlenmeyerkolben tauschen muss.



Materialien:
Glasrohr
Stativfuß, V-förmig
Stativstange, 50 cm
Greifhalterung
Erlenmeyerkolben
verschiedenen Volumens
Handpumpe
Differenzialdrucksensor
Absolutdrucksensor
Sensor-CASSY
PVC Schläuche
Verbindungsstücke
Dreiwegehahn
Permanentmagnete zum
Anheben der Kugel
Maßstab aus Metall
Korkstöpsel
Digitalwaage
Mikrometerschraube

Abbildung 3.11: Aufbau zur Messung von c_p/c_v .

- Die Volumina müssen am Ende gemessen werden, die Messung muss mit trockenen Erlenmeyerkolben durchgeführt werden.
- Um die Kugel aus dem Rohr zu nehmen, schieben Sie sie mit der Pumpe nach oben und „fangen“ Sie sie mit dem Magneten, um zu vermeiden, dass sie rauspringt und auf das Rohr fällt.

3.3 Gasgesetze

In diesem Versuch wird die Gültigkeit der idealen Gasgleichung innerhalb des möglichen Messbereiches überprüft und die Boltzmann-Konstante wird gemessen.

Grundlagen: Zustandsgleichung, Zustandsänderungen (isotherm, isobar, isochor), ideale Gase.

3.3.1 Theoretische Grundlagen

In einem idealen Gas werden die Atome bzw. Moleküle als punktförmig angesehen, und die Wechselwirkung zwischen den Molekülen wird vernachlässigt. Der Zusammenhang zwischen den drei Zustandsgrößen Druck p , Volumen V und (absoluter) Temperatur T (in Kelvin) wird durch die Zustandsgleichung idealer Gase (ideale Gasgleichung) beschrieben:

$$pV = nRT. \quad (3.17)$$

Hierbei ist n die Stoffmenge (Anzahl der Mole) und R wird als allgemeine Gaskonstante bezeichnet. Mit der Avogadrozahl $N_A = 6,022\,14 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, die die Teilchenzahl pro Mol angibt, und $n = N/N_A$, wobei N die Anzahl der Atome bzw. Moleküle bezeichnet, lässt sich Gleichung (3.17) auch schreiben als

$$pV = Nk_B T, \quad (3.18)$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k_B = R/N_A = 1,380\,65 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

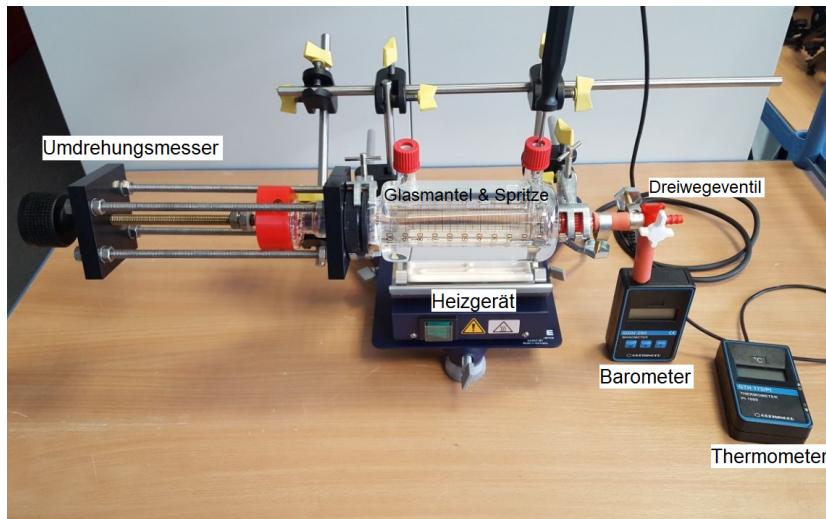
Setzt man nun P , V oder T konstant (N wird hier als konstant angenommen), erhält man drei spezielle Gasgesetze, die bekannt sind als

- Gesetz von Gay-Lussac: $V/T = \text{const.}$,
- Gesetz von Boyle-Mariotte: $P \cdot V = \text{const.}$,
- Gesetz von Amontons: $P/T = \text{const.}$

3.3.2 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung (3.12) gezeigt. Er besteht aus einem luftgefüllten Kolben mit Volumenskala, der über die außen befindliche Gewindestange verstellt werden kann. In das Handstück ist ein Umdrehungsmesser eingebaut. Am Kolbenende befindet sich eine Glasspritze, an die über Schlauchstücke ein Dreiegehahn angeschlossen ist. Zur Messung des Drucks im Kolbeninnern steht ein Druckmessgerät zur Verfügung, das über ein Schlauchstück mit dem Dreiegehahn verbunden werden kann. Damit kann der Druck im Kolben mit einer Genauigkeit von ca. 1 mbar gemessen werden. Beim Anschluss des Druckmessgeräts muss darauf geachtet werden, die Glasspritze nicht zu beschädigen. Der Kolben befindet sich in einem Glasmantel, der zwei Öffnungen besitzt, über die ein Temperaturfühler eingeführt werden kann. Das Thermometer misst die Temperatur

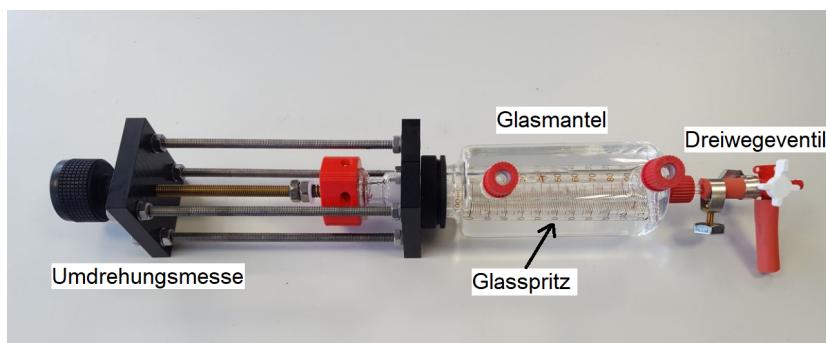
3 Wärmelehre



(a) Gesamter Aufbau mit Barometer, Thermometer, Umdrehungsmesser und Heizgerät.



(b) Halterung des Glasmantels mit Universalklemmen, Doppelmuffen und Stativfuß.



(c) Glasmantel mit Glasspritze, Umdrehungsmesser und Dreiwegeventil.

Abbildung 3.12: Versuchsaufbau mit allen benötigten Bauteilen außer dem Leistungssteller, Erlenmeyerkolben und Trichter.

Gerätename	Anzahl
Heizgerät für Glasmantelsystem	1
Trichter, d = 75 mm, Kunststoff	1
Universalklemme, Stellschraube an beweglicher Seite	2
Gummischlauch-Vakuum, Innen-d = 6 mm, lfd. m	1
Erlenmeyerkolben, Weithals, 250 ml	1
Stativfuß DEMO mit Auflegplatte	1
Stativstange Edelstahl 18/8, l = 250 mm, d = 10 mm	3
Stativstange Edelstahl 18/8, l = 500 mm, d = 10 mm	1
Einstellvorrichtung, Umdrehungsmesser	1
Doppelmuffe	6
Glasspritze, 100 ml	1
Glasmantel	1
Leistungssteller, 230 Volt, max. 2990 Watt	1
Schlauchsicherung für d = 10-17 mm	3
Greisinger GTH 175/PT Temperatur-Messgerät	1
Digital-Vakuum-/ Barometer GDH 200-14	1
Dreiwegeventil, PP/PE, d = 7-9mm, NW 6mm, rot/weiß	1

Tabelle 3.1: Bauteile für den Versuchsaufbau sowie Messinstrumente.

auf ca. 0,1 °C genau. Nachdem der Versuchsaufbau überprüft wurde, wird mit Hilfe des Trichters und des Erlenmeyerkolbens der Glasmantel mit Wasser soweit gefüllt, dass die Glasspritze im Innern gerade vollständig mit Wasser bedeckt ist. Das Wasser dient als Wärmebad und sorgt dafür, dass die Temperatur länger konstant gehalten werden kann. Unter dem Glasmantel befindet sich ein Heizgerät, mit dem die Temperatur im Glasmantel geregelt werden kann.

Heizgerät Das Heizgerät wird wie in Abbildung (3.12.a) gezeigt unterhalb des Glasmantels platziert und an den Leistungssteller angeschlossen. Der Leistungssteller hat keine Regelfunktion für die angeschlossene Heizung. Soll ein vorgegebener Temperaturbereich gehalten werden, muss die notwendige Einstellung empirisch ermittelt werden. Zum Erwärmen wird anfangs die Einstellung auf Stufe 5 empfohlen, damit der gesamte Aufbau und insbesondere die im Kolben befindliche Luft die gleiche Temperatur annehmen kann. Ab einer Temperatur von 60 °C muss man die Einstellung auf Stufe 6 erhöhen.

Achtung: Die Keramikteile und die Abstandhalter werden bei Inbetriebnahme und noch längere Zeit danach heiß und können bei Berührung zu Verbrennungen führen! Halten Sie ausreichenden Abstand und sorgen Sie dafür, dass keine brennbaren Materialien in die Nähe des Heizgerätes geraten. Wenden Sie sich bei einer Fehlfunktion an einen Betreuer und versuchen Sie nicht, die Geräte eigenständig zu reparieren.

3.3.3 Durchführung

Dichtigkeitsmessung Vergewissern Sie sich zunächst von der Dichtigkeit des Aufbaus. Hierbei stellen Sie das Volumen der Glasspritze auf ein Grundvolumen ein, z.B. $V_0 = 55 \text{ ml}$. Der Dreiegehahn wird so eingestellt, dass die Spritze mit dem Barometer verbunden ist. Anschließend wird der Kolben so verschoben, dass ein Überdruck entsteht und der gemessene Druck im Kolben beobachtet. Verändert sich der Druck über mehrere Minuten nicht, so ist das System ausreichend dicht. Der Dreiegehahn sollte im Folgenden nicht mehr bedient werden, damit die Teilchenzahl N im Kolben für alle Teilversuche identisch bleibt.

Isotherme Messreihe Zunächst wird bei (konstanter) Zimmertemperatur der Druck im Kolben in Abhängigkeit des Kolbenvolumens gemessen. Das Kolbenvolumen setzt sich zusammen aus dem an der Kolbenskala abgelesenen Volumen V_0 und dem Volumen V_s von Glasspritze und Schlauchanschlüssen:

$$V = V_0 + V_s.$$

Trägt man $1/p$ gegen V_0 auf, so ergibt sich gemäß Gleichung (3.18) ein linearer Zusammenhang:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{Nk_B T} V_0 + \frac{1}{Nk_B T} V_s. \quad (3.19)$$

Dann lässt sich aus Steigung a und Achsenabschnitt b der Gerade das zusätzliche Volumen V_s berechnen zu $V_s = b/a$. Für den relativen Fehler von V_s ergibt sich unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen Steigung a und Achsenabschnitt b , ausgedrückt durch den Korrelationskoeffizienten ρ :

$$\frac{\sigma_{V_s}^2}{V_s^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} - 2\rho \frac{\sigma_a \sigma_b}{ab} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}. \quad (3.20)$$

Die Anzahl N der Luftmoleküle innerhalb des Kolbens lässt sich über die Dichte ϱ_L der Luft und die molare Masse M_L der Luft berechnen. Beide Größen hängen von Druck, Temperatur und relativer Luftfeuchtigkeit ab und können mit der Praktikumsbibliothek berechnet werden. Mit dem zu Beginn vorhandenen Gesamtvolumen V_{start} ergibt sich:

$$N = \frac{N_A V_{\text{start}} \varrho_L}{M_L}. \quad (3.21)$$

Damit kann aus der Geradensteigung a die Boltzmann-Konstante berechnet werden:

$$k_B = \frac{1}{aN T}. \quad (3.22)$$

Isochore Messreihe Im Anschluss wird bei weiterhin geschlossenem Dreiegehahn eine isochore ($V = \text{const}$) Messung durchgeführt. Dazu wird bei konstanter Kolbenstellung der Glasmantel samt Kolben langsam und vorsichtig erwärmt, und es wird der Druckverlauf in Abhängigkeit der Temperatur gemessen. Das Erwärmen muss dabei so langsam geschehen, dass die Luft im Kolben Zeit hat, die

Temperatur des umgebenden Wassers anzunehmen, die mit dem Temperaturfühler gemessen wird. Dafür empfiehlt es sich, wie oben erwähnt, mit Stufe 5 auf dem Leistungssteller zu beginnen. Bei Erreichen einer Temperatur von 80 °C ist das Heizgerät auszuschalten!

Zur Auswertung tragen Sie den Druck p im Kolben gegen die Temperatur t (in °C) auf. Bestimmen Sie die Geradensteigung m durch eine Ausgleichsrechnung und vergleichen Sie sie mit dem nach Gleichung (3.18) erwarteten Wert $m = Nk_B/(V_0 + V_s)$. Schätzen Sie aus Ihrer Messung den Wert des absoluten Temperatur-Nullpunkts ab!

Weitere Messreihen Sie sollten nun bei einer Temperatur von ca. 80 °C eine weitere isotherme Messreihe durchführen. Dazu müssen Sie von Hand den Leistungssteller so regeln, dass die Temperatur annäherungsweise konstant bleibt. Die Auswertung erfolgt analog zu Ihrer ersten Messreihe.

Im Anschluss können Sie noch eine isobare Messreihe durchführen, bei der Sie (z.B. während der Abkühlung) das Volumen von Hand so nachregeln, dass der Druck im Kolben konstant bleibt.

4 Elektrizitätslehre

Physikalische Grundlagen: Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, Schaltungen von Widerständen, Kondensatoren, Spulen, Auf- bzw. Entladevorgänge, Schwingungen, gedämpfte Schwingungen, gekoppelte Schwingungen

4.1 Charakterisierung eines Ohmschen Widerstands

4.1.1 Versuchsdurchführung

Es soll der Betrag des Ohmschen Widerstandes bestimmt werden, der bei dem folgenden Versuchsteil zur Charakterisierung des Kondensators benutzt wird. Dazu stellt man eine Gleichspannung ein und misst den Spannungsabfall an dem Ohmschen Widerstand und den im Kreis fließenden Strom. Die anliegende Gleichspannung wird variiert. Mittels linearer Regression wird die Steigung und damit der Wert des Ohmschen Widerstandes gemäß dem Ohmschen Gesetz bestimmt:

$$U = I \cdot R. \quad (4.1)$$

**Versuch
1E1**

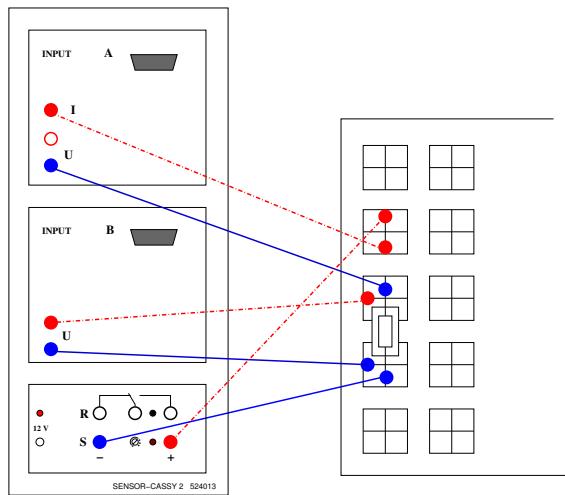
Die verschiedenen Ohmschen Widerstände werden gemäß Abbildung 4.1 auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an Spannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Gleichspannungsquelle S (0-16 V) des Sensor CASSY-2-Interface. Zur Strommessung wird das Ampermeter des Eingangs A und zur Spannungsmessung das Voltmeter des Eingangs B benutzt.

Die Spannungsquelle wird über das Menü **Einstellungen CASSY** eingeschaltet (Zustand 1). Das Messintervall (die Abtastung) wird identisch zu derjenigen gewählt, die auch bei den Auf- und Entladevorgängen der Kondensatoren gewählt wird. Zur Bestimmung der statistischen Messunsicherheiten auf Strom und Spannung werden für jede Einstellung der anliegenden Spannung mehrere Messwertpaare aufgezeichnet. Die anliegende Spannung wird manuell am Drehknopf variiert. **Achtung: Auf Grenzwerte und Messbereiche achten!**

Mit einem Digitalvoltmeter und/oder der Messbrücke wird der Wert des Ohmschen Widerstandes gemessen und später mit dem Ergebnis verglichen.

4.1.2 Versuchsauswertung

Bestimmen Sie aus den Häufigkeitsverteilungen der Strom- bzw. Spannungsmessungen zu jeder Einstellung der anliegenden Spannung den jeweiligen Mittelwert, die Standardabweichung (statistischer Fehler des Einzelwertes) und den Fehler des Mittelwertes. Die so erhaltenen Fehlerbalken auf die (U, I) -Wertepaare verwenden Sie in der linearen Regression für die Minimierung des χ^2 .



Benötigte Geräte:

- 1 Sensor-CASSY 2
- 1 Rastersteckplatte, DIN A4
- 1 STE Widerstand 100Ω !
- 1 STE Widerstand 47Ω
- 1 STE Widerstand 20Ω
- 1 STE Widerstand 10Ω
- 1 STE Widerstand $5,1 \Omega$
- 1 STE Widerstand 1Ω
- 3 Paar Kabel, 50 cm rot/blau

Abbildung 4.1: Versuchsaufbau zur Charakterisierung eines Ohmschen Widerstandes.

Der Hersteller gibt folgende systematische Fehler an:

$$\sigma_{U_i,\text{syst}} = (0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}})/\sqrt{3},$$

$$\sigma_{I_i,\text{syst}} = (0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}})/\sqrt{3}.$$

Diese Fehler können mit Hilfe der Verschiebemethode berücksichtigt werden (Abbildung 4.2). Um den Beitrag zum systematischen Fehler in R abzuschätzen, der vom systematischen Fehler auf die Spannungsmessung herröhrt, verschieben Sie die Messpunkte mit ihren statistischen Fehlern um die systematischen Fehler, einmal nach oben und einmal nach unten,

$$U_{i,\text{verschoben}} = U_i - \sigma_{U_i,\text{syst}} \quad (4.2)$$

bzw.

$$U_{i,\text{verschoben}} = U_i + \sigma_{U_i,\text{syst}}, \quad (4.3)$$

und wiederholen Sie jeweils die lineare Regression. Sie erhalten zwei neue Werte $R_{U,-}$ bzw. $R_{U,+}$ für den Widerstand. Der Beitrag zum systematischen Fehler, der von der Spannungsmessung herröhrt, ist dann der Mittelwert der Abweichungen,

$$\Delta R_{\text{syst},U} = (|R_{U,-} - R| + |R_{U,+} - R|)/2. \quad (4.4)$$

Analog erhalten Sie den Beitrag zum systematischen Fehler, der vom systematischen Fehler auf die Strommessung herröhrt, $\Delta R_{\text{syst},I}$. Der systematische Fehler auf R ergibt sich durch quadratische Addition:

$$\Delta R_{\text{syst}}^2 = \Delta R_{\text{syst},U}^2 + \Delta R_{\text{syst},I}^2. \quad (4.5)$$

Im Endergebnis werden die statistischen und systematischen Fehler getrennt ausgewiesen:

$$(R \pm \Delta R_{\text{stat}} \pm \Delta R_{\text{syst}}) \Omega.$$

Spezifikationen der verwendeten Widerstände finden Sie bei den Herstellerangaben in Tabelle 4.1.

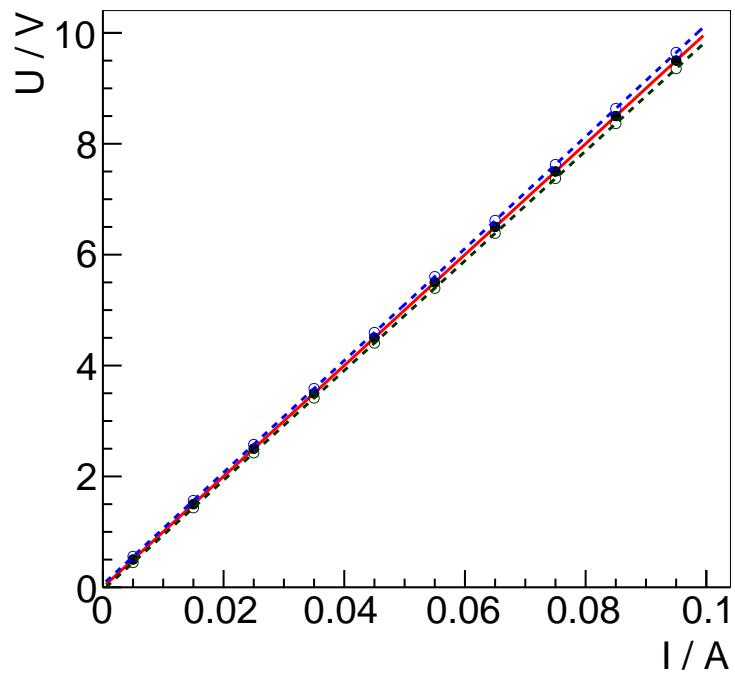


Abbildung 4.2: Bestimmung des Ohmschen Widerstandes mittels linearer Regression (rote, mittlere Kurve) und des systematischen Fehlers aus der Verschiebemethode (blaue und grüne Kurven: Verschiebung um $\sigma_{U,\text{syst}}$ nach oben bzw. unten).

Ohmscher Widerstand	Belastbarkeit	Toleranz
1 Ω	2 W	5 %
5,1 Ω	2 W	5 %
10 Ω	2 W	5 %
20 Ω	2 W	5 %
47 Ω	2 W	5 %
100 Ω	2 W	5 %
1 k Ω	2 W	5 %

Tabelle 4.1: Spezifikationen der Ohmschen Widerstände nach Herstellerangaben

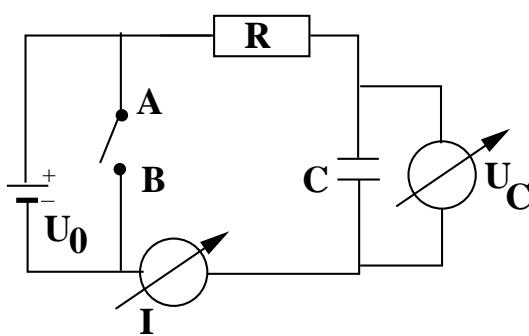
4.2 Auf- und Entladung eines Kondensators

4.2.1 Versuchsbeschreibung

Versuch 1E1

Wird ein Kondensator an eine Spannungsquelle angeschlossen (Abb. 4.3), so wird er geladen. Innerhalb einer gewissen Zeit fließen Ladungen auf die Platten (Ladestrom), bis der Kondensator die gleiche Spannung wie die Quelle hat. Wird dann die Spannungsquelle abgetrennt und werden die Kondensatorplatten leitend miteinander verbunden, so entlädt sich der Kondensator. Im Kreis fließt dann für eine gewisse Zeit ein Entladestrom.

Im Folgenden wird ein Kondensator über einen Widerstand aufgeladen oder entladen. Es wird der Spannungsabfall am Kondensator sowie der Lade- bzw. Entladestrom gemessen. Daraus kann die Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ bestimmt werden.



Benötigte Geräte:

- 1 Sensor-CASSY 2
- 1 TDS 2004B Oszilloskop
- 1 Rastersteckplatte, DIN A4
- 1 verschiedene STE Widerstände
- 1 Kondensator $10 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $4,7 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $2,2 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $1 \mu\text{F}$
- 1 Satz Brückenstecker
- 3 Paar Kabel, 50 cm rot/blau
- 3 Kabel, 50 cm rot/blau
- 1 Taster

Abbildung 4.3: Schaltbild zur Aufnahme von Strom- und Spannungskennlinien bei Lade- und Entladevorgängen eines Kondensators

Ladevorgang des Kondensators (Schalterstellung offen zwischen A und B): Der Ladevorgang beginnt beim Zeitpunkt $t = 0$, zu diesem Zeitpunkt fließt der maximale Strom $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Dann wird der Kondensator immer mehr geladen, die sich dabei aufbauende Spannung U_C wirkt als Gegenspannung zu U_0 , so dass der Ladestrom I immer kleiner wird. Wenn $U_C = U_0$ geworden ist, kommt der Strom zum Erliegen ($I = 0$).

Wird von einem beliebigen Punkt ausgehend der Kreis (Abb. 4.3) einmal vollständig umfahren, muss die Summe aller Spannungen Null ergeben gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel. Eine andere Formulierung der Maschenregel lautet, dass die Summe der anliegenden Spannungen gleich der Summe der abfallenden Spannungen ist. Es gilt also zu jedem Zeitpunkt:

$$U_0 - U_R(t) - U_C(t) = 0 \quad \rightarrow \quad U_0 - U_C(t) = I(t) \cdot R.$$

Wegen $C \cdot U_C = Q$ und $I = \frac{dQ}{dt}$ gilt dann:

$$U_0 - U_C(t) = R \cdot C \frac{dU_C}{dt}. \quad (4.6)$$

Die Differentialgleichung (4.6) wird integriert mit der Randbedingung, dass beim Zeitpunkt $t = 0$ keine Ladung auf dem Kondensator und daher $U_C(t = 0) = 0$ ist. Für den Spannungsabfall am Kondensator zu einer beliebigen Zeit t gilt dann:

$$\int_0^{U_C(t)} \frac{dU_C}{U_0 - U_C} = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt \rightarrow U_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right), \quad (4.7)$$

also steigt die Spannung am Kondensator exponentiell mit der Zeit auf U_0 an. Damit ergibt sich für den Ladestrom:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (4.8)$$

mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$.

Entladevorgang des Kondensators (Schalterstellung geschlossen zwischen A und B): Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Spannungsquelle durch einen Leiter überbrückt, sodass keine Spannung mehr am Kreis anliegt und der Kondensator gemäß U_0 aufgeladen ist. Dann liefert die Maschenregel:

$$R \cdot I(t) + U_C(t) = 0.$$

Mit $Q = C \cdot U_C$ und $I = \frac{dQ}{dt}$ folgt die homogene Differentialgleichung:

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0. \quad (4.9)$$

Die Lösung der Differentialgleichung 4.9 erfolgt durch Separation der Variablen unter Berücksichtigung der Randbedingung ($t = 0 \rightarrow U_C = U_0$):

$$\int_{U_0}^{U_C} \frac{dU_C}{U_C} = -\frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt \rightarrow \ln \left(\frac{U_C}{U_0} \right) = -\frac{t}{R \cdot C},$$

und damit ergibt sich für den zeitabhängigen Spannungsabfall am Kondensator:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.10)$$

Für den Stromverlauf ergibt sich bei der Entladung:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = -C \cdot U_0 \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \rightarrow I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (4.11)$$

4.2.2 Versuchsaufbau

Der Kondensator und ein Ohmscher Widerstand werden gemäß Schaltbild 4.3 auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Als Spannungsquelle dient die Gleichspannungsquelle S (0-16 V) des Sensor-CASSY-2-Interface. Der Ohmsche Widerstand muss unter Berücksichtigung der Leistungsgrenze der Spannungsquelle ausgewählt werden, d.h. der Ladestrom muss zu jeder Zeit kleiner als ca. 100 mA bleiben. Zur Strommessung wird das Amperemeter des Eingangs A und zur Spannungsmessung das Voltmeter des Eingangs B am Sensor-CASSY-2 benutzt. Parallel dazu werden der Spannungsabfall am Kondensator auf dem Kanal 1 und der Strom als Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand auf dem Kanal 2 des Oszilloskops gemessen. Dabei muss die Erde des Oszilloskops zwischen den Widerstand und den Kondensator gelegt werden. Ggf. muss dann ein Signal invertiert werden. Zur Überbrückung der Spannungsquelle (Entladevorgang) wird ein Taster parallel zu dem Ohmschen Widerstand und dem Kondensator geschaltet. Die Spannungsquelle im wird im Menü **Einstellungen CASSY** auf EIN (1) eingestellt. Für die Messung des Entladevorgangs wird die Spannungsquelle durch Drücken des Tasters überbrückt, sodass sich der Kondensator über den Widerstand entlädt. Die Messung wird dabei durch Verwendung eines geeigneten Triggers automatisch gestartet. Ein Aufladevorgang kann vermessen werden, indem der Taster zunächst gedrückt und nach kurzer Zeit wieder losgelassen wird. Dadurch wird der Kondensator wieder aus der Spannungsquelle aufgeladen und durch Verwendung eines (anderen) geeigneten Triggers wird die Messung automatisch gestartet.

4.2.3 Versuchsdurchführung

Die Messung soll zunächst mit dem Oszilloskop durchgeführt und sofort im Anschluss ausgewertet werden. Anschließend wird eine vollständige Messung von Auf- und Entladevorgängen mit dem CASSY durchgeführt.

4.2.3.1 Messung mit dem Oszilloskop

Für die Bestimmung der Kapazität C am Oszilloskop wird am einfachsten bei der Aufladung die Strommessung verwendet, bei der Entladung der Spannungsabfall am Kondensator. Aus der erwarteten Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ ergibt sich die zu verwendende Zeitauflösung am Oszilloskop. Wenn mögliche Offsets korrigiert worden sind, können zu zwei geeignet gewählten Zeitpunkten die dementsprechenden Spannungs- bzw. Stromwerte mit Hilfe der Cursor am Oszilloskop abgelesen und die Zeitkonstante τ wie folgt bestimmt werden: Mit $U_1 = U_0 \exp(-t_1/\tau)$ und $U_2 = U_0 \exp(-t_2/\tau)$ ergibt sich

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{-\frac{t_1-t_2}{\tau}} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \frac{t_2 - t_1}{\tau} \quad (4.12)$$

und damit ergibt sich für die Zeitkonstante:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)}. \quad (4.13)$$

Der statistische Fehler auf jeden Wert von τ ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung aus der Ablesegenauigkeit der Spannungs- und Zeitwerte. Durch geeignete Transformationen kann τ auch aus der Spannungsmessung am Kondensator bei der Aufladung sowie aus dem Strommessung bei der Entladung bestimmt werden. Zur Sicherstellung der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse werden mehrere Lade- und Entladevorgänge vermessen und ausgewertet.

Aus den einzelnen Messwerten für τ wird ein gewichtetes Mittel $\bar{\tau}$ berechnet. Daraus wird die Kapazität C berechnet als

$$C = \frac{\bar{\tau}}{R}. \quad (4.14)$$

Die (gesamte) Messunsicherheit auf den Ohmschen Widerstand R (aus der Messung zu dessen Charakterisierung) führt jetzt zu einem systematischen Fehler auf die Kapazität, der mittels Fehlerfortpflanzung berechnet wird.

Für eine Anleitung zum Abspeichern der Oszilloskopbilder sei auf Abschnitt 2.1.3 verwiesen.

4.2.3.2 Messung mit CASSY

- Ladespannung U_0 einstellen - dazu Drehknopf an Spannungsquelle S entsprechend einstellen und Ladespannung messen.
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** geeignete Werte für das Messintervall und die Anzahl an Messpunkten einstellen, ebenso einen geeigneten Trigger, je nachdem, ob der Auf- oder der Entladevorgang vermessen werden soll.
- Messung mit **F9** starten.
- Nach Meldung “Triggersignal fehlt“ den Taster zur Überbrückung der Spannungsquelle betätigen. Wenn der Trigger korrekt gewählt ist, startet die Messung für den Entladevorgang beim Drücken des Tasters und für den Aufladevorgang beim Loslassen des Tasters.

Achtung: Mögliche Nullpunktsschwankungen der Strom- oder Spannungsmessgeräte (Offsets) nachträglich korrigieren bei der Analyse der Daten! Am Oszilloskop müssen die Offsets ebenfalls berücksichtigt werden.

Für die Bestimmung der Kapazität C mit CASSY werden die Strom- bzw. Spannungsmessreihen logarithmisch dargestellt. Die statistischen Fehler der Einzelmesswerte der Strom- und Spannungsmessungen werden entweder aus der Rauschmessung bei der Charakterisierung des Ohmschen Widerstands (Messbereiche identisch?!) oder aus den Asymptoten der aufgezeichneten Lade- und Entladekurven bestimmt. Sie müssen in die logarithmierte Darstellung transformiert werden:

$$S = \ln X \quad \rightarrow \quad \sigma_S = \frac{dS}{dX} \cdot \sigma_X = \frac{\sigma_X}{X}.$$

4 Elektrizitätslehre

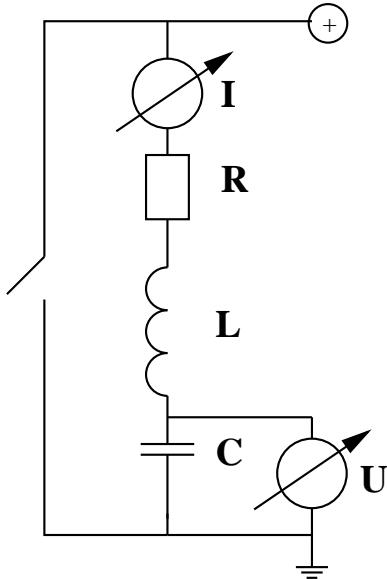
An die jeweilige logarithmierte Messreihe wird mittels linearer Regression eine Gerade $y = a \cdot t + b$ mit der Steigung $a = -1/\tau$ angepasst. Überprüfen sie anhand der Residuenverteilungen, ob die Offset-Korrektur ausreichend war. Der statistische Fehler auf τ ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler auf die Steigung a . Aus den einzelnen Werten von τ wird ein gewichteter Mittelwert berechnet und daraus die Kapazität. Die Messunsicherheit auf den Ohmschen Widerstand R führt wieder zu einem systematischen Fehler auf die Kapazität, der mittels Fehlerfortpflanzung berechnet wird.

Um das Endergebnis für die Kapazität zu erhalten, berechnet man aus den mit Cassy und Oszilloskop gewonnenen Kapazitäten und deren statistischen und systematischen Fehlern den gewichteten Mittelwert. Beachten Sie, dass in die Be- rechnung des gewichteten Mittelwerts und der zugehörigen Messunsicherheit nur die statistischen Fehler einfließen dürfen.

4.3 Gedämpfter LC-Schwingkreis

4.3.1 Versuchsbeschreibung

Versuch
1E2



Benötigte Geräte:

- 1 Sensor-CASSY 2
- 1 Rastersteckplatte, DIN A4
- 1 Kondensator $1 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $2,2 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $4,7 \mu\text{F}$
- 1 Kondensator $10 \mu\text{F}$
- 1 Spule 250 Windungen
- 1 Spule 500 Windungen
- 1 Spule 1000 Windungen
- 1 Satz Brückenstecker
- 3 Paar Kabel, 50 cm rot/blau
- 1 Taster
- 1 Potentiometer

Abbildung 4.4: Schaltbild zum LCR-Schwingkreis

Wird ein Kondensator C auf die Spannung U_0 aufgeladen und über eine parallel geschaltete Spule entladen, so müssen zu jeder Zeit die Spannungen am Kondensator und an der Spule gleich groß sein, bzw. die Gesamtenergie bei einer freien, ungedämpften Schwingung muss konstant bleiben. Die Gesamtenergie ist gleich der Summe der elektrischen und magnetischen Feldenergien. Ein tatsächlich aufgebauter Schwingkreis besitzt neben einer Kapazität C und einer Induktivität L immer auch einen unvermeidlichen Ohmschen Widerstand R . Kondensatoren und Spulen sind keine idealen Bauelemente, sondern weisen neben der Kapazität bzw. Induktivität auch Ohmschen Widerstände auf. Diese üben eine dämpfende Wirkung auf die Schwingung aus und am Gesamtwiderstand R wird in der Zeit dt die Stromenergie $dE = I^2 \cdot R \cdot dt$ in Wärme umgewandelt. Diese wird der Gesamtenergie des Kreises entzogen.

Die elektrischen Schwingungen lassen sich anregen, indem man entweder den Kondensator entlädt oder auflädt. Sowohl Auf- wie Entladung werden durch Schwingungsgleichungen mit einem Dämpfungsterm beschrieben. Es hängt entscheidend vom Dämpfungsterm ab, wie der Einschwingvorgang auf die angelegte Spannung (U_0 bzw. Null) verläuft. Bei kleiner Dämpfung wird sich die Spannung nach einem Einschwingvorgang am Kondensator einstellen. Bei sehr starker Dämpfung kommt es zu keiner Schwingung und der Kondensator erreicht sehr langsam die

angelegte Spannung. Zwischen diesen beiden Fällen gibt es einen Spezialfall, bei dem sich die Spannung ohne Schwingung nach kürzester Zeit auf den richtigen Wert einstellt.

Differentialgleichung für freie elektrische Schwingungen:

An eine Gleichspannung U_0 wird eine Serienschaltung von R , L und C angeschlossen. Nach der Kirchhoffsschen Maschenregel ist U_0 gleich der Summe aller Spannungsabfälle an den Komponenten R , L und C :

$$U_0 = U_R + U_L + U_C = R \cdot I + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Wegen $I = dQ/dt$ gilt dann für die elektrische Ladung:

$$L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U_0. \quad (4.15)$$

Weil eine so aufgebaute Differentialgleichung (DGL) für alle freien gedämpften Schwingungen gilt, bei denen die Schwingungsamplituden nicht so groß werden, dass nicht-lineare Terme berücksichtigt werden müssen, schreibt man:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L} \quad (4.16)$$

mit

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.17)$$

δ heißt **Dämpfungskonstante** und ist ein Maß für die Dämpfung. ω_0 ist die **Kreisfrequenz** der ungedämpften freien Schwingung. Das Verhältnis von Kreisfrequenz und dem Zweifachen des Abklingkoeffizienten ist dimensionslos und heißt **Güte**:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.18)$$

Der gesamte Ohmsche Widerstand R des Schwingkreises, in dem unter anderem auch der Ohmsche Widerstand der Spule enthalten ist, trägt zu Energieverlusten bei. Durch diese Dämpfung verringern sich die Kreisfrequenz und die Güte des Schwingkreises.

Gleichung 4.16 ist eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung: $Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t)$. $Q_p(t)$ nennt man **partikuläre Lösung**. Die Gesamtlösung enthält zwei Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen des Schwingungsproblems bestimmt werden müssen.

Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (4.19)$$

wird gelöst durch den Ansatz:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad \dot{Q}(t) = \lambda \cdot Q(t), \quad \ddot{Q}(t) = \lambda^2 \cdot Q(t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) \cdot Q(t) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \sqrt{-\omega^2} = -\delta \pm i\omega \quad (4.20)$$

mit

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (4.21)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL orientiert sich daran, ob die Dämpfungskonstante δ größer, gleich oder kleiner als ω_0 ist. Allgemein gilt:

$$Q_h(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}.$$

Die homogene DGL entspricht dem Fall, dass keine Spannung anliegt. Die Lösungen dieser Gleichung beschreiben folglich die Entladung eines bereits aufgeladenen Kondensators. Das muss bei den Randbedingungen berücksichtigt werden. Für die drei folgenden Situationen haben die Randbedingungen für die exakte Lösung immer die gleiche Form:

$$Q_h(0) = Q_0 = CU_0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{dQ_h}{dt} \right|_{(0)} = I(0) = 0. \quad (4.22)$$

Kriechfall ($\delta > \omega_0$)

Beim Kriechfall ist die Dämpfung so stark, dass der Kondensator sehr langsam entladen wird und nur asymptotisch seine Spannung verliert. Es findet keine Schwingung statt!

Mit den beiden Integrationskonstanten folgt:

$$Q_h(t) = A \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (4.23)$$

Mit den Randbedingungen ergibt sich für die Konstanten in Gleichung 4.23:

$$A = CU_0 \cdot \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}, \quad B = CU_0 \cdot \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

Abb. 4.5 zeigt für ein Beispiel den Spannungsabfall am Kondensator und den Strom I . Der Kondensator war zu Beginn geladen mit einer Spannung von 10

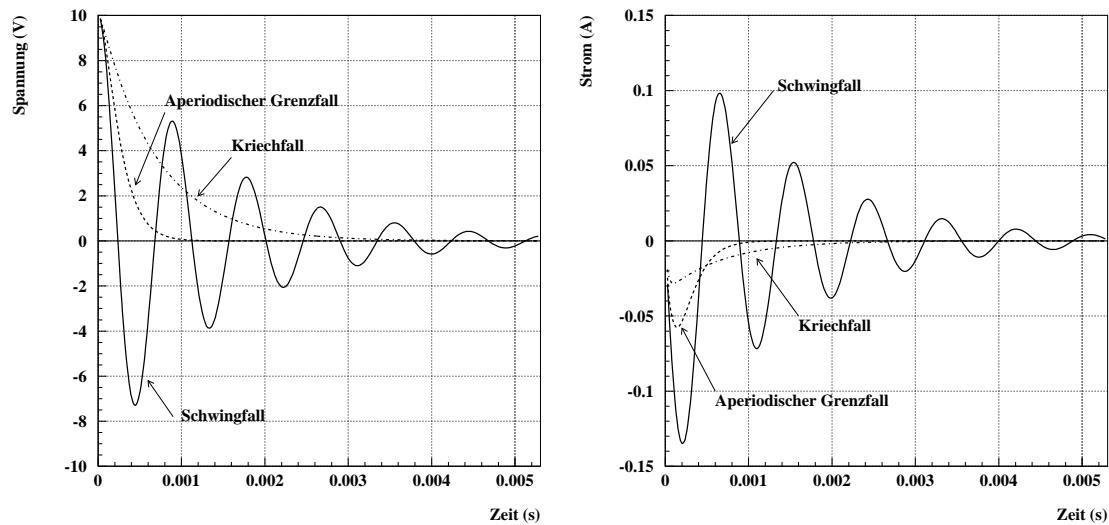


Abbildung 4.5: Kondensatorspannung und Strom beim Entladen für $L = 90 \text{ mH}$, $C = 22 \mu\text{F}$ und $R = 320 \Omega$ (Kriechfall), $R = 1279 \Omega$ (aperiodischer Grenzfall) bzw. $R = 128 \Omega$ (Schwingfall).

V. Beim Kriechfall stellt sich die Spannung nur sehr langsam und ohne überzuschwingen ein. Auch der Entladestrom schwingt nicht über und bleibt relativ klein.

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)

Beim aperiodischen Grenzfall wird die Dämpfung so gering, dass der Kondensator in der kürzesten Zeit entladen wird. Auch in diesem Fall kommt es zu keinen Schwingungen. Der Strom zeigt ebenfalls keine Schwingungen, ist aber wegen der kürzeren Entladungszeit größer als der im Kriechfall. Wegen $\delta = \omega_0$ verschwindet in Glg. 4.20 die Wurzel. Damit man für die einzustellenden Anfangsbedingungen wieder zwei Integrationskonstanten zur Verfügung hat, nimmt die Lösung folgende allgemeine Form an (mit den Anfangsbedingungen folgt: $A = CU_0$ und $B = \delta A$):

$$Q_h(t) = e^{-\delta t} \cdot (A + Bt) \quad \rightarrow \quad Q_h(t) = CU_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta \cdot t) \quad (4.24)$$

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta \cdot t) \quad \text{und} \quad I(t) = -\delta^2 e^{-\delta t} CU_0 \cdot t. \quad (4.25)$$

Abb. 4.5 zeigt für den gleichen Schwingkreis neben dem Kriechfall auch den aperiodischen Grenzfall.

Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

Wenn die Dämpfung noch kleiner wird, stellt sich die Spannung am Kondensator erst nach einem Einschwingvorgang auf den endgültigen Wert ein. Die Wurzel im Exponenten von Glg. 4.20 wird jetzt rein imaginär. Die allgemeine Lösung nimmt dann die folgende Form an:

$$Q_h(t) = e^{-\delta t} \cdot (A' e^{i\omega t} + B' e^{-i\omega t}).$$

In dieser Relation ist sowohl Real- wie auch Imaginärteil Lösung der DGL. Man kann daher mit anderen Integrationskonstanten schreiben:

$$Q_h(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Mit den bekannten Anfangsbedingungen (Glg. 4.22) findet man $A = CU_0$ und $B = A\delta/\omega$, also:

$$Q_h(t) = CU_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (4.26)$$

Abb. 4.5 zeigt für den gleichen Schwingkreis, jedoch mit einem kleineren Ohmschen Widerstand die Situation, bei der es deutlich zu einem Überschwingen kommt.

Bei kleiner Dämpfung verläuft $Q_h(t)$ und damit auch $U_C(t)$ annähernd wie ein Cosinus. Der Strom ergibt sich durch die Zeitableitung von Glg. 4.26 und hat die Form eines gedämpften Sinus:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (4.27)$$

$$I(t) = -CU_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \cdot \sin \omega t. \quad (4.28)$$

Zwischen beiden hat man also ungefähr eine Phasenverschiebung von $\pi/2$. Der Strom eilt der Spannung voraus.

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Wenn nicht die Entladung sondern die Aufladung des Kondensators in einem Schwingkreis untersucht wird, muss die inhomogene DGL 4.16 gelöst werden. Dies geschieht, indem man eine beliebige **partikuläre Lösung** dieser Glg. sucht. Da in diesem Fall der inhomogene Teil eine Konstante ist, erfüllt $Q_p = CU_0$ die DGL. Zu allen allgemeinen Lösungen der homogenen DGL tritt der partikuläre Teil additiv hinzu. Bei allen drei im folgenden aufgeführten Fällen sind die Anfangsbedingungen gegeben durch:

$$Q(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dQ(0)}{dt} = I(0) = 0.$$

Kriechfall ($\delta > \omega_0$)

Die allgemeine Lösung lautet:

$$Q(t) = CU_0 + A \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen findet man für die Integrationskonstanten:

$$A = -CU_0 \cdot \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}, \quad B = CU_0 \cdot \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)

Allgemeine Lösung:

$$Q(t) = CU_0 + e^{-\delta t} \cdot (A + Bt).$$

Mit den Integrationskonstanten $A = -CU_0$ und $B = \delta A$ folgt für die Lösung:

$$Q(t) = CU_0 \cdot [1 - e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta \cdot t)].$$

Schwingfall ($\delta < \omega_0$)

Allgemeine Lösung:

$$Q(t) = CU_0 + e^{-\delta t} \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt für die Lösung:

$$Q(t) = CU_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$$

und damit für Spannung U_C und Strom I :

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \\ I(t) &= CU_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\omega + \frac{\delta^2}{\omega} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Bei diesem Versuch wird ein elektrischer Schwingkreis angeregt und die freie gedämpfte Schwingung aufgezeichnet. In der Auswertung werden die ermittelten Parameter Frequenz ω und Dämpfungskonstante δ der Schwingung mit den Voraussagen aufgrund der Vorversuche verglichen. Die Dämpfung soll mit verschiedenen zusätzlichen Ohmschen Widerständen variiert werden, damit die Induktivität L und der Spulenwiderstand R_L bestimmt werden können. Außerdem sollen der aperiodische Grenzfall und ein Kriechfall eingestellt werden. Im gedämpften Schwingkreis gilt vereinfacht:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad \text{und} \quad U(t) = U_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4.29)$$

mit

$$\omega = 2\pi \cdot f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{R}{2 \cdot L}. \quad (4.30)$$

Die Spule muss mit Hilfe der Ergebnisse der Schwingungsversuche charakterisiert werden. Mit den Gleichungen 4.30 folgt:

$$L = \frac{1}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} \quad \text{und} \quad R_L = \frac{2\delta}{(\omega^2 + \delta^2) \cdot C} - R_{\text{gesteckt}}.$$

4.3.2 Versuchsdurchführung

Der Schwingkreis wird gemäß Schaltbild 4.4 auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Der Strom fließt durch Eingang A des Sensor-CASSYs und die Kondensatorspannung wird an Eingang B gemessen. Bei der Messung mit dem Oszilloskop werden die Kondensatorspannung und die am Widerstand abfallende Spannung, die dem Strom proportional ist, gemessen. Zu Beginn des Experiments wird der Kondensator aus der Spannungsquelle S aufgeladen. Zum Start der Schwingung wird der Taster gedrückt, welcher dabei die Spannungsquelle S kurzschließt.

- Ladespannung U_0 am Kondensator einstellen - dazu Spannungsquelle S entsprechend einstellen
- Spannungsquelle S auf EIN (**1**) bei Messung Entladevorgang, auf AUS (**0**) mit automatischer Umschaltung auf EIN (**1**) bei Beginn der Messung des Ladevorgangs.
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** das Messintervall auf $10 \mu\text{s}$ und die Anzahl auf 2000 einstellen, entsprechend einer Messzeit von 20 ms. Die Zeitbasis am Oszilloskop entsprechend einstellen.
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** weiterhin einen geeigneten Trigger für den Entladevorgang bzw. Ladevorgang einstellen! Diesen Trigger auch am Oszilloskop einstellen.
- Messung mit **F9** starten (wartet dann auf Triggersignal)
- Schwingkreis mit Taster schließen (erzeugt Triggersignal)
- Ohmschen Widerstand R variieren und Messungen wiederholen!
- Zur Bestimmung des aperiodischen Grenzfalls Potentiometer verwenden (Widerstand mit Digitalvoltmeter bei ausgeschalteter Spannungsquelle messen).

Für eine Anleitung zum Abspeichern der Oszilloskopbilder sei auf Abschnitt 2.1.3 verwiesen.

4.3.3 Hinweise zur Versuchsauswertung

Schwingfall, Frequenzbestimmung

Zur Bestimmung der Frequenz f bestimmen sie die mittlere Periodendauer \bar{T} der Schwingung aus dem zeitlichen Verhalten der gemessenen Kondensatorspannung U_{B1} oder des Stromes I_{A1} . Benutzen sie dazu entweder die Nulldurchgänge oder die Lage der Minima und Maxima der Amplituden. Schätzen sie die Ablesefehler sinnvoll ab. Für die Frequenz f gilt dann: $f = 1/\bar{T}$. Die Frequenz f der Schwingung lässt sich außerdem im Frequenzspektrum ermitteln, welches mittels einer Fouriertransformation der gemessenen Kondensatorspannung U_{B1} bzw. dem

gemessenen Strom I_{A1} bestimmt werden kann. Die Frequenz f wird bestimmt mittels Ablesen mit dem Auge oder der Peakschwerpunktsmethode und der Fehler muss empirisch aus einer Wiederholungsmessung bestimmt werden (ganze Messung wiederholen, nicht nur das Ablesen!).

Schwingfall, Bestimmung der Dämpfungskonstanten δ

Die Praktikumsbibliothek enthält eine Funktion zur Bestimmung der Dämpfungskonstante einer gedämpften Schwingung. Alternative können die folgenden Verfahren verwendet werden:

- Die Amplitude der Kondensatorspannung $U_C(t)$ oder des Stroms $I(t)$ nimmt exponentiell mit der Zeit ab (Gleichung 4.22). Für das Verhältnis der Amplituden A_n gilt:

$$A_{n+1} = A_n \cdot e^{-\delta \cdot (t_{n+1} - t_n)} \quad \rightarrow \quad \delta_n = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)}{(t_{n+1} - t_n)} \quad \rightarrow \quad \delta_n = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)}{T_n}.$$

Man bestimmt die mittlere Dämpfungskonstante $\bar{\delta}$.

- Die Dämpfungskonstante δ und deren Fehler σ_δ ergeben sich aus der Anpassung einer Einhüllenden an die Messung $U_C(t)$.

Durch geeignete Auftragungen können die Spulen (L und R_L) und die Kondensatoren (C) aus der Variation der Dämpfung charakterisiert werden. Die Dämpfungskonstante δ ist linear abhängig von dem Gesamtwiderstand R_{ges} der Schaltung. Bei der Auftragung des zusätzlich gesteckten Widerstandes R gegen die Dämpfungskonstante δ kann aus der Steigung der sich ergebenden Geraden die Induktivität L der Spule bestimmt werden und aus dem Achsenabschnitt der Restwiderstand der Schaltung (Innenwiderstand der Spule R_L , Innenwiderstand Amperemeter und Verlustwiderstände).

Trägt man das Quadrat der Kreisfrequenz ω gegen das Quadrat der Dämpfungskonstanten δ auf, kann aus dem Achsenabschnitt der sich ergebenden Geraden die Kapazität C bestimmt werden. (Die Steigung der Geraden muss dann bei einer linearen Regression auf -1 festgesetzt werden.)

Aufgrund der Umpolarisierung des Dielektrikums des Kondensators und der Ummagnetisierung des Spulenmaterials durch die Wechselspannung bzw. Wechselstrom der Schwingung treten zusätzliche Verlustwiderstände auf, die zum Gesamtwiderstand R_{ges} der Schaltung beitragen.

Aperiodischer Grenzfall, Bestimmung des Widerstands R_{ap}

Zur Darstellung des aperiodischen Grenzfalls wird der Ohmschen Widerstand R der Schaltung so eingestellt, dass sich der Kondensator in der kürzesten Zeit entlädt. In diesem Fall gilt:

$$\delta = \omega_0 \quad \rightarrow \quad R_{ap} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \rightarrow \quad (R + R_L + R_{\text{Rest}}) = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

4.4 Gekoppelte LC-Schwingkreise

4.4.1 Versuchsbeschreibung

Ein elektrischer Schwingkreis 1 kann induktiv mit einem zweiten erregten Schwingkreis 2 koppeln. Der Kreis 1 wird dadurch zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Die Resonanz tritt auf, wenn $\omega_1 = \omega_2$ ist. Dann wird die Erscheinung der Schwebung beobachtet: Die Schwingungsenergie pendelt zwischen den Kreisen hin und her (gekoppelte Schwingungen).

**Versuch
1E3**

Bei diesem Versuch werden die Fundamentalschwingungen und die Schwebung der gekoppelten Schwingkreise aufgezeichnet. Dazu wird das Frequenzspektrum der gekoppelten Schwingkreise mit dem Spektrum eines ungekoppelten Schwingkreises verglichen. Das fouriertransformierte Signal der gekoppelten Schwingkreise zeigt die Aufspaltung in zwei symmetrisch um das ungekoppelte Signal liegende Verteilungen, deren Abstand von der Kopplung der Schwingkreise abhängt.

Ausgehend von den Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingkreise:

$$\ddot{I}_1 + k \cdot \dot{I}_2 + \frac{I_1}{L \cdot C} = 0 \quad (4.31)$$

$$\ddot{I}_2 + k \cdot \dot{I}_1 + \frac{I_2}{L \cdot C} = 0 \quad (4.32)$$

mit Kopplung k ($0 < k < 1$) folgen die beiden Eigenfrequenzen ω_+ und ω_- zu

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} = \omega_+ < \omega_0 < \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}.$$

Insbesondere ist die Schwingungsfrequenz des gekoppelten Systems gleich (für kleine k).

$$\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k^2}} \approx \omega_0$$

$$\rightarrow k_1 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_+} \right)^2 - 1, \quad k_2 = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_-} \right)^2$$

Hinweis:

Die Aufspaltung in zwei exakt gleich große Signale gelingt nur bei genau gleichen Schwingkreisen. Durch Toleranzen der Induktivitäten L und der Kapazitäten C ist das nicht immer genau gegeben. Es sollen die Kondensatoren und Spulen verwendet werden, die bei den Voruntersuchungen und den freien gedämpften Schwingungen charakterisiert worden sind.

Die Kopplungen k_1 und k_2 werden aus den beiden Frequenzen der Fundamentalschwingungen (Moden) f_1 und f_2 berechnet und sollten innerhalb der Fehler den gleichen Zahlenwert für die Kopplung ergeben. Die Kopplung bei den Schwingkreisen wird durch Spannungen hervorgerufen, die in den Spulen induziert werden. In den Differentialgleichungen treten daher Terme der Form $kL \cdot \dot{I}$ auf. Die

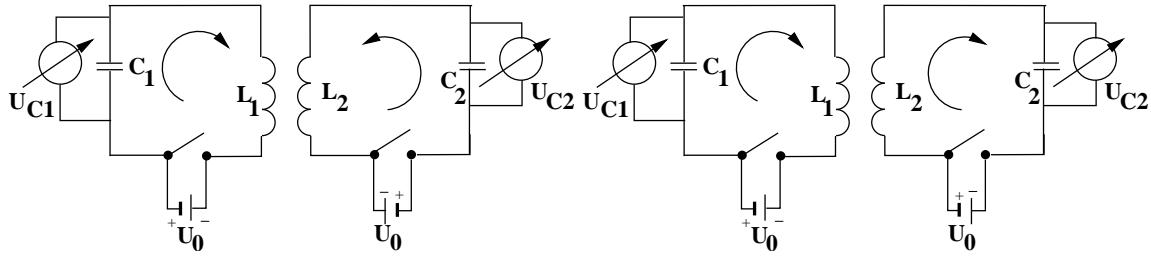


Abbildung 4.6: Fundamentalschwingungen zweier gekoppelter Schwingkreise.
Links gleichsinnige, rechts gegensinnige Anregung.

Konstante k gibt den Kopplungsgrad an. Bei Schwingkreisen, die mit identischen Komponenten aufgebaut werden, gelten die Differentialgleichungen (Summen der Spannungen verschwinden):

$$\int \frac{I_1}{C} \cdot dt + L \cdot \dot{I}_1 + kL \cdot \dot{I}_2 = 0 \quad (\text{Schwingkreis 1})$$

$$\int \frac{I_2}{C} \cdot dt + L \cdot \dot{I}_2 + kL \cdot \dot{I}_1 = 0 \quad (\text{Schwingkreis 2})$$

Hier wurden Dämpfungsterme der Einfachheit halber weggelassen. Differentiation nach der Zeit führt zu der Standardform der gekoppelten Differentialgleichungen (Gleichungen 4.31, 4.32). Die Addition der Gleichungen 4.31 und 4.32 ergibt:

$$(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{LC} \cdot (I_1 + I_2) + k \cdot (\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) = 0.$$

Durch Umformung findet man:

$$\ddot{I}_+ + \frac{1}{LC \cdot (1+k)} \cdot I_+ = 0,$$

wobei $I_+ = I_1 + I_2$ einer der beiden 'Fundamentalströme' ist. Daraus erhält man die Kreisfrequenz dieser Fundamentalschwingung:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}. \quad (4.33)$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ist dabei die Kreisfrequenz der einzelnen Schwingkreise ohne Koppelung. Diese Fundamentalschwingung kann angeregt werden, wenn man in der Schaltung beide Kondensatoren in der Art auflädt, dass die Ströme I_1 und I_2 parallel durch die Spulen fließen (Abbildung 4.6a).

In gleicher Weise ergibt die Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\ddot{I}_- + \frac{1}{LC \cdot (1-k)} \cdot I_- = 0,$$

wobei $I_- = I_1 - I_2$ der zweite 'Fundamentalstrom' ist.
Diese Fundamentalschwingung hat die Kreisfrequenz

$$\omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (4.34)$$

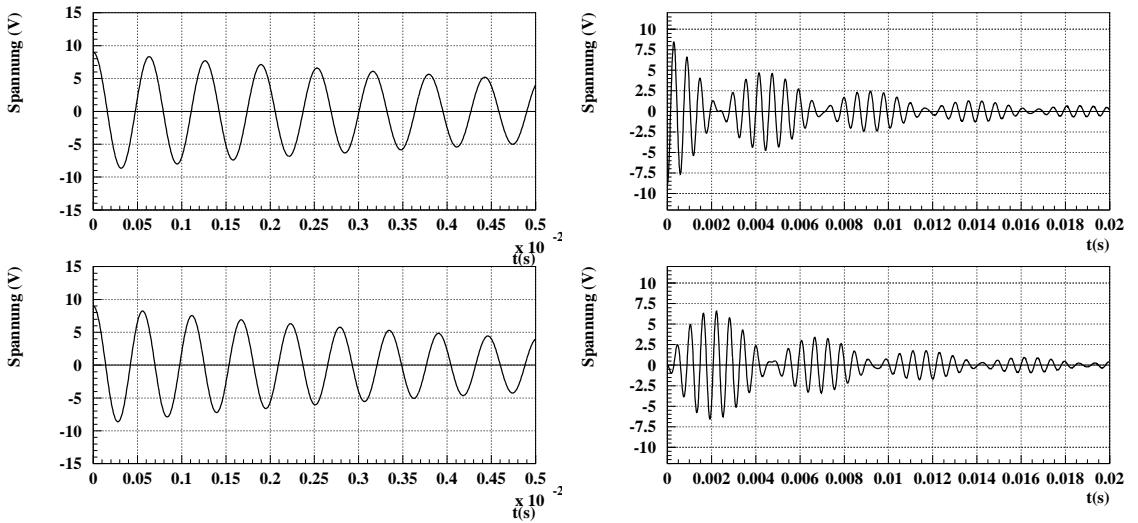


Abbildung 4.7: Fundamentalschwingungen (links) und Schwebung (rechts) zweier gekoppelter Schwingkreise mit $R = 2,5 \Omega$, $L = 9 \text{ mH}$ und $C = 1,0 \mu\text{F}$.

Diese Schwingung kann angeregt werden, wenn in der Schaltung die Kondensatoren entgegengesetzt aufgeladen werden, so dass die Ströme in entgegengesetzter Richtung durch die Spulen fließen (Abbildung 4.6b).

Wenn man die Frequenzen der Fundamentalschwingungen und vielleicht der nicht-gekoppelten Schwingkreise gemessen hat, kann man mit Hilfe der Gleichungen 4.33 und 4.34 den Kopplungsgrad der Schwingkreise bestimmen:

$$k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2}.$$

Wenn durch die Wahl der Anfangsbedingungen eine Schwebung eingestellt wird, ergibt sich durch die Mittelung der Schwingungsfrequenzen f_+ und f_- die Frequenz der gekoppelten Schwingung:

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \approx f_0,$$

und aus der halben Differenz erhält man die Frequenz der Schwebung:

$$f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2}.$$

Abbildung 4.7a zeigt oben die Spannung am Kondensator 1 und 2 für den Fall der gleichsinnigen Aufladung und unten für den Fall der gegensinnigen Aufladung. Die Frequenz ist höher als bei gleichsinniger Aufladung. Abbildung 4.7b zeigt oben die Spannung am Kondensator 1 und unten am Kondensator 2 für den Fall einer Schwebung.

Phasenbeziehungen bei gekoppelten Schwingungen

Um Schwebungsvorgänge aufzuzeichnen, wird der Kondensator des ersten Schwingkreises aufgeladen, während der des zweiten Schwingkreises ungeladen bleibt. Wenn beide Schwingkreise über die Spulen miteinander gekoppelt sind und der Schwingungsvorgang gestartet wird, erwartet man, dass immer dann, wenn z.B. die Kondensatorspannung des ersten Kreises einen Nulldurchgang hat, die des zweiten Schwingkreises ein Extremum zeigt und umgekehrt.

Beobachtet wird dagegen, dass die Extrema des einen gegen die Nulldurchgänge des anderen Schwingkreises verschoben sind. Das liegt an den Dämpfungen in den beiden Kreisen. Bei ungedämpften Schwebungen würde die soeben erwähnte Phasenbeziehung exakt gelten. Die zeitliche Verschiebung z.B. zwischen den Nullstellen und den Extrema lässt sich berechnen und beträgt für Kopplungen $k < 0,2$ ungefähr

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{schw}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right].$$

Für größere Kopplungsstärken wird die Relation komplizierter.

4.4.2 Versuchsaufbau

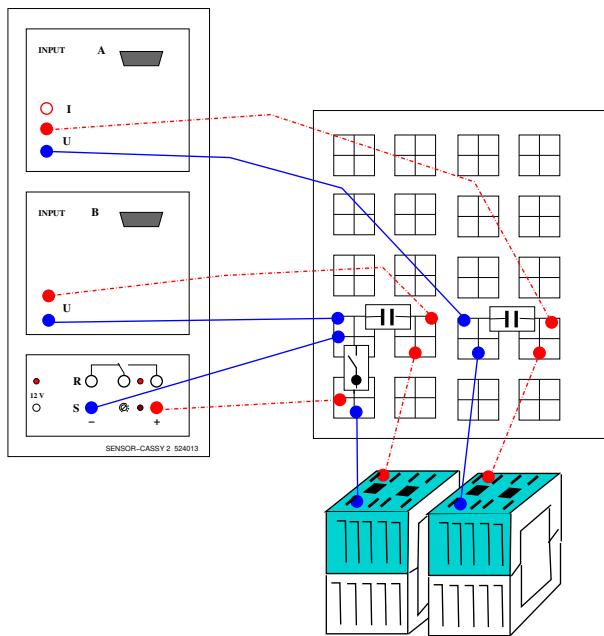


Abbildung 4.8: Aufbau zur Aufnahme der Schwebung von gekoppelten Schwingungen

Benötigte Geräte:

- 1 Sensor-CASSY 2
- 1 Rastersteckplatte, DIN A4
- 2 Kondensator 1, 2,2, 4,7, 10 μF
- 2 Spulen 250, 500, 1000 Windungen
- 5 Paar Kabel, 50 cm rot/blau
- 1 Taster

Der erste Schwingkreis wird gemäß der Abbildung 4.8 auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Die Kondensatorspannung wird an Eingang B des Sensor-CASSYs gemessen. Zu Beginn des Versuchs wird der Kondensator aus der Spannungsquelle S aufgeladen. Zum Start der Schwingung wird der Taster gedrückt, welcher dabei die Spannungsquelle S kurzschließt.

Der zweite Schwingkreis wird separat aufgebaut. Seine Spule wird für die Kopplung der Schwingkreise direkt neben die erste Spule gestellt. Die Spannung am zweiten Kondensator wird an Eingang A des Sensor-CASSYs gemessen. Bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Anregung (Drehung einer Spule um 180 Grad) wird ebenfalls der zweite Kondensator aus der Spannungsquelle S aufgeladen (Abbildung 4.9). Zum Start der Schwingung wird der Taster ebenfalls betätigt, welcher dabei die Spannungsquelle S kurzschließt.

4.4.3 Versuchsdurchführung

- Ladespannung U_0 einstellen - dazu Spannungsquelle S entsprechend einstellen, Spannungsquelle eingeschaltet lassen.
- Polung der an den Schwingkreisen anliegenden Spannungen bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Anregung einstellen.
- Zur Beobachtung der Schwebung nur an einen Schwingkreis Spannung anlegen

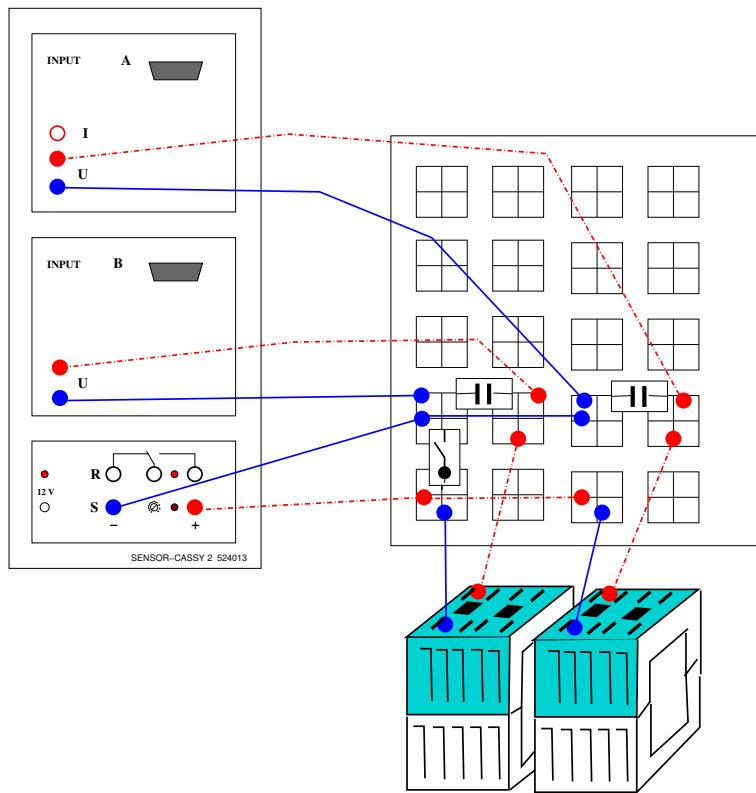


Abbildung 4.9: Schaltbild zur Aufnahme von gekoppelten Schwingungen bei gleichsinniger und gegensinniger Anregung

- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** das Messintervall auf $10 \mu\text{s}$ und die Anzahl auf 2000 einstellen, entsprechend einer Messzeit von 20 ms
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** weiterhin einen geeigneten Trigger (z.B. $U_{B1} = 5 \text{ V}$, fallende Tendenz) einstellen!
- Messung mit **F9** starten (wartet dann auf Triggersignal)
- Schwingkreis mit Taster schließen (erzeugt Triggersignal)
- Abstand der Spulen und damit die Kopplungsstärke variieren

Im ungekoppelten Fall ergibt sich eine gedämpfte harmonische Schwingung und das Frequenzspektrum zeigt nur ein Signal, dessen Frequenz sich durch die Berechnung des Signalschwerpunkts ermitteln lässt. Im gekoppelten Fall spaltet die Frequenz symmetrisch in zwei Frequenzen auf. Die Amplituden sind nur halb so groß wie im ungekoppelten Fall und der Abstand hängt von der Kopplung ab.

4.5 Anhang: Verlustfaktoren

Im Hauptteil des Versuches sollen freie, gedämpfte elektromagnetische Schwingungen untersucht werden. Solche Schwingungen in Spannungsabfällen und Strömen gehören streng genommen in das Gebiet der Wechselströme, die eingehender im Teil II des Praktikums behandelt werden. Um die einzelnen Komponenten besser verstehen zu können, werden Grundlagen der Theorie von Teil II bereits hier stark verkürzt zusammen gefasst.

Wenn eine Reihenschaltung einer idealen Spule (L) und eines idealen Kondensators (C) von einem Strom durchflossen wird, gibt es zwischen Strom und Spannungsabfall an L bzw. C immer eine Phasenverschiebung von exakt $\pm 90^\circ$. Phasenverschiebungen um beliebige Winkel können elegant in der komplexen Gaußschen Zahlenebene (Operatordiagramm) dargestellt werden. Reale Komponenten werden auf der Realteil-Achse (x-Achse), imaginäre Anteile auf der Imaginärteil-Achse (y-Achse) aufgetragen. Eine genauere Diskussion zeigt folgendes:

- Bei rein Ohmschen Widerständen sind, wegen der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes, Strom und Spannung in Phase. Der Ohmsche Widerstand ist rein reell. Im Operatordiagramm wird der Ohmsche Widerstand R auf der reellen Achse aufgetragen.
- Bei einem idealen Kondensator kann man mit den Relationen $U_C(t) = Q(t)/C$ bzw. $dU_C/dt = I/C$ zeigen, dass der Strom der Spannung um $\pi/2$ vorausseilt. Dies wird durch den rein imaginären kapazitiven Widerstand $X_C = -i/(\omega C)$ bewirkt. Im Operatordiagramm wird X_C auf der imaginären Achse in negativer Richtung aufgetragen.
- Bei einer idealen Spule eilt der Strom wegen $U_L = L \cdot dI/dt$ der Spannung um $\pi/2$ nach. Der ideale induktive Widerstand $X_L = i\omega L$ ist ebenfalls rein imaginär und wird in positiver Richtung aufgetragen.

Im Ohmschen Widerstand geht elektrische Energie verloren, da sie in Joulesche Wärme umgewandelt wird. Das ist nur möglich, weil hier U und I in Phase sind. Wenn dagegen U und I um 90° gegeneinander phasenverschoben sind, wird im zeitlichen Mittel keine elektrische Leistung verbraucht. Ideale Kondensatoren und Spulen haben diese Eigenschaft, sie sind **verlustfrei**. Diese Betrachtungen gelten nur, wenn es zu Schwingungen kommt.

Reale Kondensatoren und Spulen haben elektrische Verluste. Sie werden in realen oder fiktiven sog. Ohmschen **Verlustwiderständen** zusammen gefasst. Im folgenden wird eine stark vereinfachte Darstellung gezeigt, nach der solche Verlustwiderstände charakterisiert werden können.

Ohmsche Widerstände sollen hier nicht diskutiert werden. Sie haben zwar meist neben den rein Ohmschen Anteilen auch kapazitive und induktive Komponenten, diese sind aber bei diesem Versuch vernachlässigbar klein.

Spulen: Die Verluste bei Spulen nehmen im allgemeinen mit steigender Frequenz zu. **Ursachen für Verluste:**

4 Elektrizitätslehre

- Ohmscher Widerstand der Spulenwicklung (frequenzunabhängig)
- Skineffekt (frequenzabhängig), er muss beachtet werden bei
Drahtdurchmesser = 1 mm ab etwa 100 kHz,
Drahtdurchmesser = 0,1 mm ab etwa 10 MHz,
Drahtdurchmesser = 0,01 mm ab etwa 1 GHz,
spielt daher bei diesem Versuch keine Rolle.
- Hysteresis- und Wirbelstromverluste im Kernmaterial und Spulendrahtmaterial

Da der Spulenstrom für die Induktivität der Spule wesentlich ist, wird der Verlustwiderstand meist als Reihenwiderstand dargestellt. Kleine Verluste sind dann gleichbedeutend mit kleinen Verlustwiderständen. Den **Verlustwinkel** δ_L kann man im Zeigerdiagramm ablesen, in dem der rein imaginäre induktive Widerstand $X_L = i\omega L$ gegen den reellen Ohmschen Widerstand der Spule R_L aufgetragen wird (Abb. 4.10). Es gilt für den komplexen Widerstand $X_L = R_L + i\omega L$ und für den Verlustwinkel gilt:

$$\tan \delta_L = \frac{R_L}{\omega L} = d_L.$$

Dies ist auch gleichzeitig der **Verlustfaktor der Spule**, den man oft mit d_L kennzeichnet. Er wird für die meist kleinen Verlustwinkel durch den Winkel selbst angenähert ($d_L \approx \delta_L$).

Kondensatoren: Die Verluste bei Kondensatoren nehmen im allgemeinen mit steigender Frequenz ab.

Ursachen für Verluste:

- Geringe Leitfähigkeit des Dielektrikums und Widerstand der Zuleitungen und Folien bei Folienwiderständen,
- Geringe Wärmeentwicklung im Dielektrikum durch ständige Umpolarisation der Moleküle.

Da die Kondensatorspannung für die Kapazität des Kondensators wesentlich ist, wird der Verlustwiderstand meist als Serienwiderstand dargestellt. Kleine Verluste sind dann gleichbedeutend mit kleinen Verlustwiderständen. Den **Verlustwinkel** δ_C kann man im Zeigerdiagramm ablesen, indem der rein imaginäre kapazitive Widerstand $X_C = \frac{-i}{\omega C}$ gegen den reellen Ohmschen Widerstand des Kondensators R_C aufgetragen wird (Abb. 4.10). Es gilt dann für den Verlustwinkel:

$$\tan \delta_C = \omega \cdot C \cdot R_C = d_C.$$

Dies ist auch gleichzeitig der **Verlustfaktor des Kondensators**, den man oft mit d_C kennzeichnet. Er wird für die meist sehr kleinen Verlustwinkel durch den Winkel selbst angenähert ($d_C \approx \delta_C$).

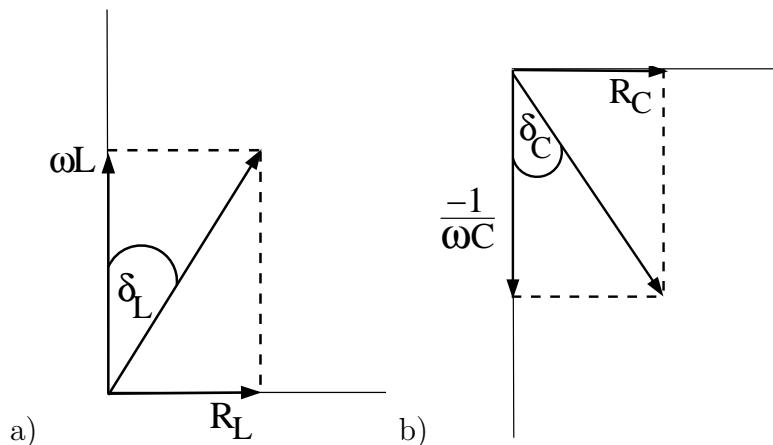


Abbildung 4.10: Operatordiagramm für Verlustwiderstand a) einer Spule, b) eines Kondensators

Bauteile	Verlustfaktor	
	100 Hz	1000 Hz
Kondensatoren	$\tan \delta_C$	$\tan \delta_C$
$1 \mu\text{F}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
$2,2 \mu\text{F}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$
$4,7 \mu\text{F}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$10 \mu\text{F}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
Spulen	$\tan \delta_L$	$\tan \delta_L$
$N=250$	0,41	0,047
$N=500$	0,40	0,049
$N=1000$	0,41	0,045

Tabelle 4.2: Experimentell bestimmte Verlustfaktoren der im Praktikum verwendeten Kondensatoren und Spulen

A Statistik

Einführung

Hier sollen in sehr knapper, aber in sich abgeschlossener Form die wichtigsten Konzepte der Statistik wiederholt werden, die im Praktikum benötigt werden. Ausführlicher ist der Stoff in der Vorlesung zur Datenverarbeitung behandelt worden.

Messunsicherheiten

Im Praktikum sollen alle Messergebnisse zusammen mit ihrer Unsicherheit angegeben werden, z.B.:

$$R = 99.82 \Omega \pm 0.10 \Omega.$$

Die Unsicherheit gibt dabei an, mit welcher Genauigkeit eine Größe im Praktikum mit den zur Verfügung stehenden Mitteln bestimmt werden konnte. Sie spiegelt die Qualität und die Präzision einer Messung wider, vorausgesetzt dass sie korrekt bestimmt wurde. Bei der Angabe des Messergebnisses sollen nur die im Rahmen der Genauigkeit signifikanten Stellen angegeben werden. (Am besten, 2 signifikante Stellen angeben, um Rundungsfehler klein zu halten.)

A.1 Wahrscheinlichkeit

A.1.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten eine Menge S und nennen sie den *Parameterraum*. Jeder Unterlage A von S weisen wir eine reelle Zahl $P(A)$ zu, die wir *Wahrscheinlichkeit* nennen.

Kolmogorov Axiome (1933)

1. Für jede Untermenge A in S : $P(A) \geq 0$.
2. Für alle disjunkten Untermengen A and B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(S) = 1$.

Wir möchten mit reellen Zahlen statt mit Elementen von Mengen rechnen, deshalb definieren wir:

Definition 1. Eine Abbildung $X : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Zufallsgröße*.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 2. Für zwei Untermengen A und B des Parameterraums ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|B)$ definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Die zwei Untermengen heißen *unabhängig*, wenn $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Wegen $A \cap B = B \cap A$, $P(B \cap A) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, und so kommen wir zu dem

Theorem 3 (Satz von Bayes).

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

Frequentistische Interpretation

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Anzahl der Vorkommnisse von Ausgang } A \text{ in } n \text{ Messungen}}{n}$$

- Zugrunde liegende Annahme: Das Zufallsexperiment kann prinzipiell beliebig oft wiederholt werden.
- Beispiel: Messung der Kapazität eines Kondensators.
- Problematischer: Aussagen über Zufallsexperimente, die nur ein einziges Mal durchgeführt werden können, z.B.: "Morgen wird es regnen."

Wahrscheinlichkeitsdichte

Betrachten wir einen Parameterraum S und eine Zufallsgröße $X : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 4. Die *Wahrscheinlichkeitsdichte* von X ist definiert als

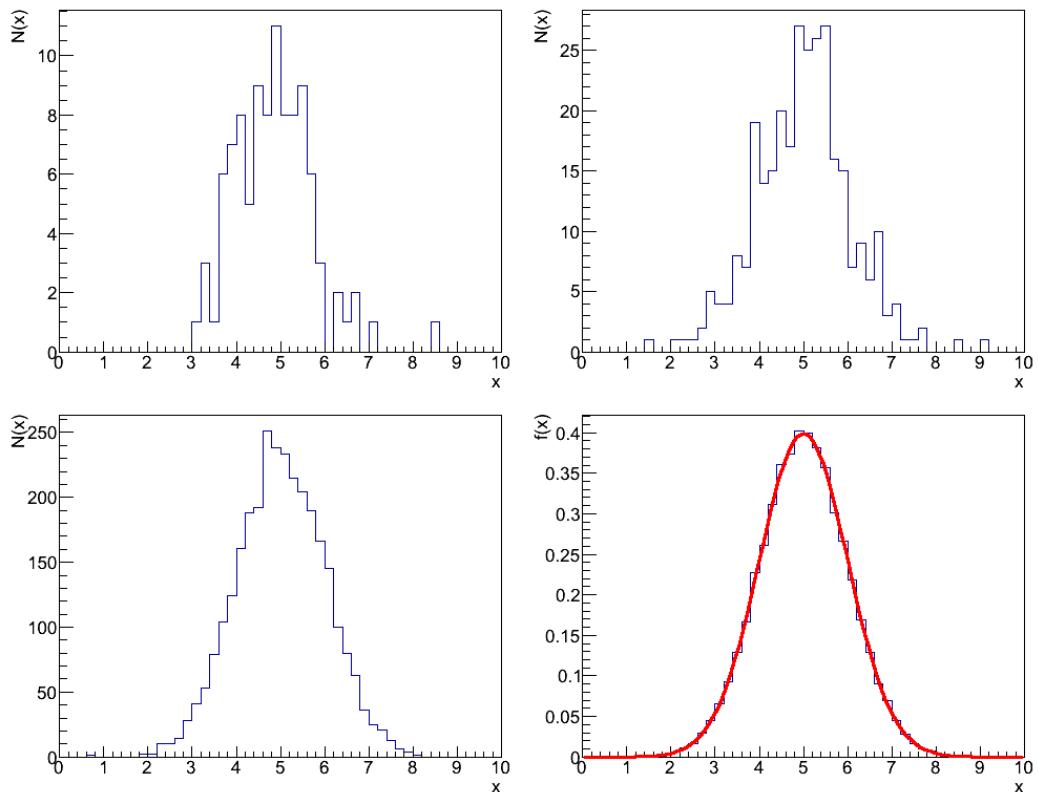
$$f(x) dx = P(X \text{ ergibt Wert in } [x, x+dx]).$$

$f(x)$ ist normiert, so dass

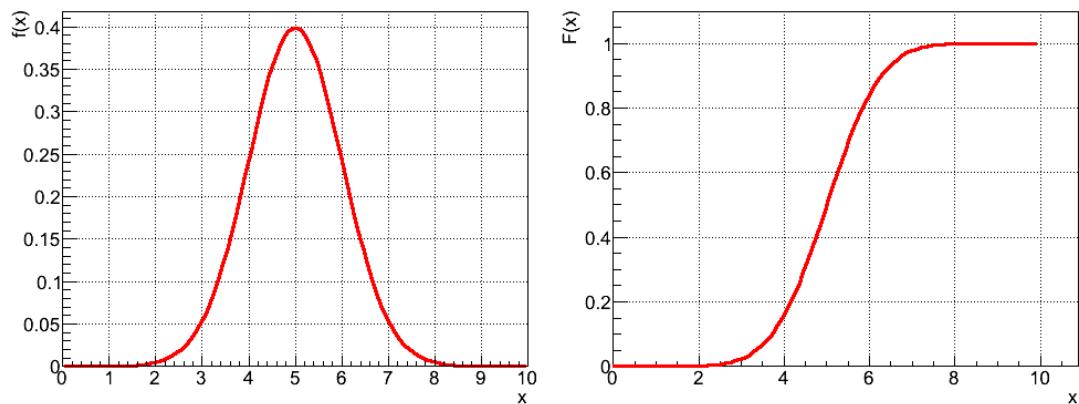
$$\int_S f(x) dx = 1.$$

Die Definition gilt genauso für *kontinuierliche* wie für *diskrete* Zufallsgrößen.

Histogramme



Kumulative Verteilung



Definition 5. Die *kumulative Verteilung* $F(x)$ zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ ist definiert durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'.$$

Erwartungswert und Varianz

Wir betrachten eine 1-D Zufallsgröße X . Um Mittelwert und Streuung von X zu charakterisieren, definieren wir:

Definition 6. Der *Erwartungswert* oder *Mittelwert* von X ist gegeben durch

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \mu.$$

Die *Varianz* von X ist gegeben durch

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2.$$

Die *Standardabweichung* von X ist gegeben durch $\sigma = \sqrt{V[X]}$. Diese Größe ist sinnvoll, weil sie dieselben Einheiten hat wie x . Beachte, dass $V[X] = (E[X^2]) - \mu^2$.

A.1.2 Wichtige Wahrscheinlichkeitsdichten

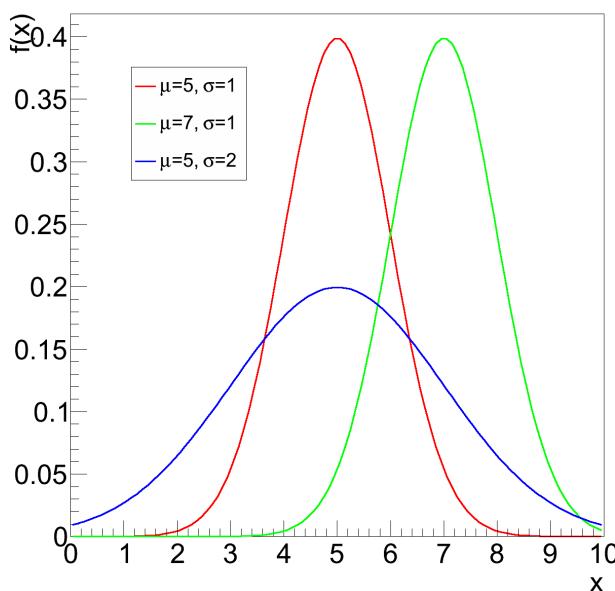
Gauß-Verteilung

Definition 7.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- $E[X] = \mu$
- $V[X] = \sigma^2$

Die Wichtigkeit der Gauß-Verteilung liegt im *zentralen Grenzwertsatz* begründet: Die Summe von n unabhängigen kontinuierlichen Zufallsgrößen mit Mittelwerten μ_i und *endlichen* Varianzen σ_i^2 nähert sich im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ einer Gauß-Verteilung mit Mittelwert $\mu = \sum_i \mu_i$ und Varianz $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$.



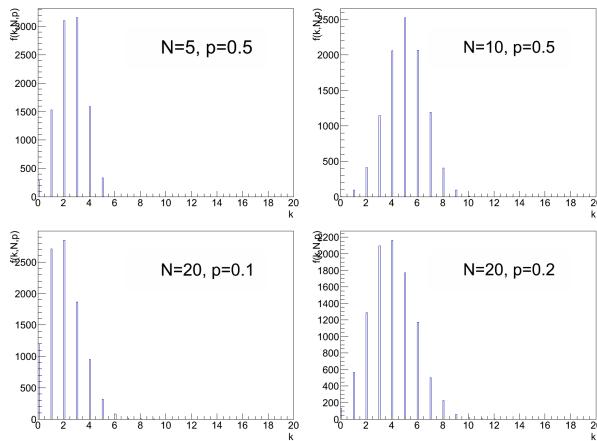
Binomial-Verteilung

Betrachte eine Serie von N unabhängigen Versuchen oder Beobachtungen, von denen jede zwei Mögliche Ausgänge hat ('1' oder '0'), mit fester Wahrscheinlichkeit p für '1' (*Bernoulli-Experiment*). Die Wahrscheinlichkeit, k -mal '1' in N Versuchen zu messen, ist:

Definition 8.

$$f(k; N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad \text{with} \quad \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

- $E[X] = Np$
- $V[X] = Np(1-p)$



Poisson-Verteilung

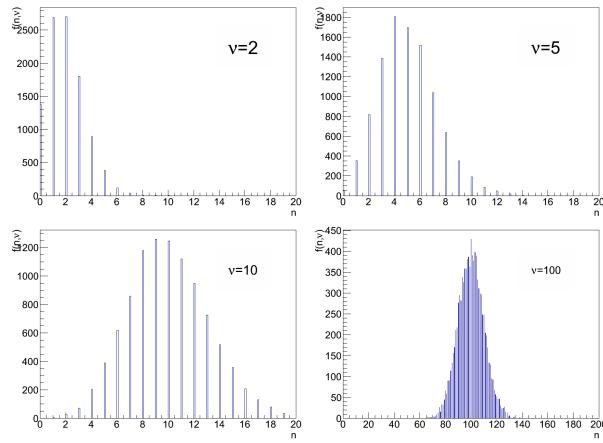
Betrachte die Binomial-Verteilung im Grenzfall, dass N sehr groß wird, p sehr klein wird, aber das Produkt np konstant gleich einem endlichen Wert ν bleibt. Dann nähert sich die Binomial-Verteilung einer *Poisson-Verteilung* an:

Definition 9.

$$f(k; \nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

- $E[X] = \nu$
- $V[X] = \nu$

Beispiel: Zählexperiment. Für große ν nähert sich die Poisson-Verteilung einer Gauß-Verteilung mit Mittelwert ν und Varianz ν an.



Gleichverteilung

Definition 10. Die *Gleichverteilung* ist gegeben durch

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $E[X] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
- $V[X] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$

Beispiele:

- Digitalisierung im Analog-Digital-Wandler (ADC)
- Maßband (Intervall zwischen zwei Skalenstrichen)

A.1.3 Mehrere Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte und Kovarianz

Definition 11. Seien X und Y zwei Zufallsgrößen. Die *gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte* $f(x,y)$ ist definiert als

$$P(X(\omega) \in [x, x+dx] \wedge Y(\omega) \in [y, y+dy]) = f(x,y) dx dy$$

für alle $\omega \in S$.

Definition 12. Die *Kovarianz* von zwei Zufallsgrößen X und Y ist definiert als

$$\begin{aligned} V_{xy} &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x \mu_y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy - \mu_x \mu_y. \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

Ein dimensionsloses Maß für die Korrelation zwischen zwei Zufallsgrößen ist gegeben durch den *Korrelationskoeffizienten*

$$\rho_{xy} = \frac{V_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Man kann zeigen, dass $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$. Per Konstruktion ist die Kovarianzmatrix V_{ab} symmetrisch in a und b , und die Diagonalelemente $V_{aa} = \sigma_a^2$ (d.h. die Varianzen) sind positiv.

Rechnen mit Erwartungswerten

Aus der Definition des Erwartungswert folgt:

- Für die Multiplikation einer Zufallsgröße mit einer Konstanten a :

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ V[aX] &= a^2V[X] \end{aligned}$$

- Für die Summe zweier Zufallsgrößen X und Y :

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= E[X] + E[Y] \\ V[X + Y] &= V[X] + V[Y] \end{aligned}$$

wobei die letzte Beziehung nur gilt, wenn X und Y *unabhängig* sind, d.h. die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte faktorisiert:

$$f(x,y) dx dy = f_x(x)f_y(y) dx dy.$$

A.2 Statistische Messunsicherheiten

A.2.1 Parameterschätzung

Einführung in die Parameterschätzung

Die Parameter einer Wahrscheinlichkeitsdichte sind Konstanten, die ihre Form beschreiben, z.B. θ in

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}.$$

Um den unbekannten Parameter θ zu bestimmen, benutzen wir eine *Stichprobe* von Beobachtungswerten $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, die entsprechend der Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt sind. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Funktion der Daten zu finden, um den gesuchten Parameter zu schätzen:

$$\hat{\theta}(\mathbf{x})$$

$\hat{\theta}(\mathbf{x})$ wird *Schätzgröße* für den unbekannten Parameter θ genannt. Im Allgemeinen heißt eine Funktion, die Beobachtungsdaten (x_1, \dots, x_n) eine Zahl zuordnet, eine *Testgröße*.

Beispiel: Schätzgrößen für Mittelwert und Varianz

Wir wollen eine Schätzgröße für den Mittelwert μ einer Wahrscheinlichkeitsdichte mit völlig unbekannter Form angeben, basierend auf der Stichprobe (x_1, \dots, x_n) . Wir benutzen das *arithmetische Mittel*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Der Erwartungswert von \bar{x} ergibt sich zu

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu,$$

was bedeutet, dass \bar{x} in der Tat eine erwartungstreue Schätzgröße für μ ist. Man kann zeigen, dass die *empirische Varianz*

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

eine erwartungstreue Schätzgröße für die unbekannte Varianz ist: $E[s^2] = \sigma^2$.

Schätzgröße für die Kovarianz

Ähnlich kann gezeigt werden, dass die Größe

$$\hat{V}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{n}{n-1} (\bar{xy} - \bar{x}\bar{y})$$

eine erwartungstreue Schätzgröße für die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsgrößen X und Y mit unbekanntem Mittelwert ist.

Varianz des arithmetischen Mittels

Für die Varianz des arithmetischen Mittels finden wir

$$\begin{aligned} V[\bar{x}] &= E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}])^2 = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right)\right] - \mu^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n E[x_i x_j] - \mu^2 \\ &= \frac{1}{n^2} [(n^2 - n)\mu^2 + n(\mu^2 + \sigma^2)] - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass $E[x_i x_j] = \mu^2$ für $i \neq j$ und $E[x_i x_j] = \mu^2 + \sigma^2$ für $i = j$.

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Unsicherheit des Mittelwerts bei n Messungen von x gleich der Standardabweichung von $f(x)$ ist, *geteilt durch \sqrt{n}* .

A.2.2 Definition der statistischen Messunsicherheit

Standardabweichung als statistischer Fehler

Ein bestimmter Parameter soll aus einer Menge von n wiederholten Messungen bestimmt werden. Wir sind daran interessiert, ein Intervall zu finden, das den wahren Wert der zu messenden Größe mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % enthält. Motivation: Bei der Gauß-Verteilung gilt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \approx 0.68.$$

Wenn wir die Messung eines (wahren aber unbekannten) Parameters θ_t mehrfach wiederholen und dabei Messwerte (t_1, \dots, t_n) erhalten, können wir das arithmetische Mittel $\theta = (1/n) \sum t_i$ und die empirische Standardabweichung σ_θ berechnen. Für n Wiederholungen wird die Unsicherheit auf das arithmetische Mittel, das aus allen Messungen berechnet wird, σ_θ/\sqrt{n} betragen. Wir können dann

$$\theta \pm \sigma_\theta/\sqrt{n}$$

als Ergebnis der Messung angeben. Aber: Welcher Anteil der Messungen wird im Mittel einen Wert im Intervall $[\theta - \sigma_\theta/\sqrt{n}, \theta + \sigma_\theta/\sqrt{n}]$ ergeben? Es stellt sich heraus, dass dieses simple Verfahren streng genommen nur für Gauß-verteilte Messgrößen gilt.

A.2.3 Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzung

Wir betrachten eine Menge von n Zufallsgrößen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, die gemäß einer gewissen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\mathbf{x})$ verteilt seien. Die Wahrscheinlichkeitsdichte selbst ist unbekannt, aber die Mittelwerte der x_i , $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sowie die Kovarianzmatrix V_{ij} seien bekannt oder abgeschätzt. Unser Ziel ist die Bestimmung der Varianz $V[y]$ einer Funktion $y(\mathbf{x})$ der n Variablen. (Beispiel: Bestimmung eines Ohmschen Widerstands aus Messung von Strom und Spannung über $R = U/I$.) Dazu entwickeln wir $y(\mathbf{x})$ bis zur ersten Ordnung um die Mittelwerte der x_i :

$$y(\mathbf{x}) \approx y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i).$$

Wegen $E[x_i - \mu_i] = 0$, ist der Erwartungswert von y

$$E[y(\mathbf{x})] \approx y(\boldsymbol{\mu}).$$

Der Erwartungswert von y^2 ist

$$\begin{aligned} E[y^2(\boldsymbol{x})] &\approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \cdot \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] \\ &\quad + E \left[\left(\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}} (x_j - \mu_j) \right) \right] \\ &= y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}} V_{ij}, \end{aligned}$$

so dass die Varianz $\sigma_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2$ gegeben ist durch

Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}} V_{ij}.$$

Häufige Spezialfälle

Für den Fall, dass die x_i nicht korreliert sind, d.h. $V_{ii} = \sigma_i^2$ und $V_{ij} = 0$ für $i \neq j$, erhalten wir die wohlbekannte Formel

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{x=\boldsymbol{\mu}}^2 \sigma_i^2.$$

Wir betrachten zwei Spezialfälle: Wenn $y = x_1 + x_2$, ergibt sich die Varianz von y zu

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2V_{12}.$$

Für das Produkt $y = x_1 x_2$ erhalten wir

$$\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_1^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{x_2^2} + 2 \frac{V_{12}}{x_1 x_2}.$$

A.3 Modellanpassung

A.3.1 Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate

Angenommen, wir haben eine Menge von N unabhängigen Gauß'schen Zufallsgrößen y_i , an verschiedenen Orten x_i . Jeder Wert y_i hat einen anderen Mittelwert λ_i , der durch eine Funktion $\lambda = \lambda(x; \boldsymbol{\theta})$ gegeben ist, aber eine bekannte Varianz σ_i^2 . λ hängt von m Parametern $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ ab, welche wir bestimmen wollen. Die Parameter, die die Größe

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \lambda(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}$$

minimieren, heißen χ^2 -Schätzgrößen (LS, least-squares) für die $\boldsymbol{\theta}$.

Varianz der χ^2 -Schätzgrößen

Man kann zeigen, dass für den Fall eines freien Parameters die Unsicherheit auf die best-fit Parameter θ_0 durch diejenigen Werte gegeben ist, bei denen

$$\chi^2(\theta) = \chi_{\min}^2 + 1$$

wird.

Güte der Anpassung (goodness of fit)

Der Wert von χ_{\min}^2 ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den Daten und der angepassten Modellkurve:

$$\chi_{\min}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \lambda(x_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}))^2}{\sigma_i^2}.$$

Er kann deshalb als so genannte goodness-of-fit Testgröße benutzt werden, um die Hypothese der funktionalen Form $\lambda(x; \boldsymbol{\theta})$ zu testen.

Man kann zeigen, dass *wenn die Hypothese korrekt ist*, die Testgröße $t = \chi_{\min}^2$ einer χ^2 -Verteilung folgt:

$$f(t; n_{df}) = \frac{1}{2^{n_{df}/2}\Gamma(n_{df}/2)} t^{n_{df}/2-1} e^{-t/2},$$

wobei n_{df} die Anzahl der Freiheitsgrade ist:

$$n_{df} = \text{Anzahl der Datenpunkte} - \text{Anzahl der freien Parameter}.$$

Man erwartet $\chi_{\min}^2/n_{df} \approx 1$. Für den Fall, dass...

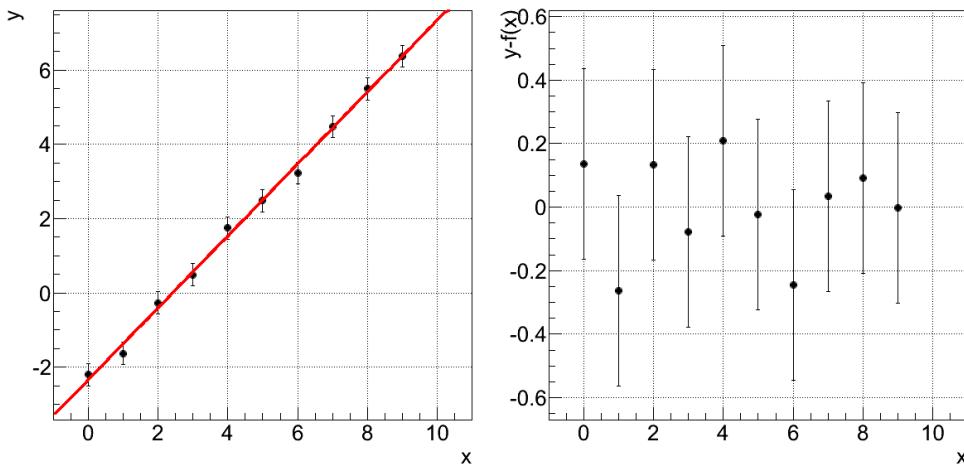
- $\chi^2/n_{df} \gg 1$: Sind die angenommenen Messunsicherheiten zu klein? Ist die funktionale Form der Hypothese $\lambda(x; \boldsymbol{\theta})$ korrekt? Den Mangel an Übereinstimmung kann man durch den *p-value* quantifizieren:

$$p = \int_{\chi_{\min}^2}^{\infty} f(t; n_{df}) dt,$$

also die Wahrscheinlichkeit für den Fall einer korrekten Hypothese, einen Wert von χ_{\min}^2 zu erhalten, der so groß wie oder größer ist als derjenige, den wir tatsächlich gefunden haben.

- $\chi^2/n_{df} \ll 1$: Sind die angenommenen Messunsicherheiten zu groß? Folgen die Datenpunkte wirklich unabhängigen Zufallsgrößen?
- $\chi^2/n_{df} \approx 1$: Sind die angenommenen Messunsicherheiten wirklich korrekt? Wie sieht der Residuenplot aus?

Residuenplots



Zusammenfassen von Messungen

Es sei eine unbekannte Größe λ in N verschiedenen Experimenten gemessen worden, die unabhängige Messwerte y_i mit abgeschätzten Unsicherheiten σ_i geliefert haben. Die χ^2 -Schätzgröße $\hat{\lambda}$ für λ kann dadurch abgeleitet werden, dass wir

$$\chi^2(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \lambda)^2}{\sigma_i^2}$$

minimieren. Gleichsetzen von $\partial\chi^2(\lambda)/\partial\lambda = 0$ liefert

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2},$$

also die wohlbekannte Formel für das *gewichtete Mittel*. Die zweite Ableitung von χ^2 liefert die Varianz von $\hat{\lambda}$ (hier ohne Beweis):

$$V[\hat{\lambda}] = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}.$$

(Eine analoge Methode wird im Praktikum zur numerischen Bestimmung der Maxima einer Kurve eingesetzt (Peakfinding).)

A.3.2 Lineare Regression

Lineare Regression

Eine häufige Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate besteht in der Bestimmung von Steigung m und Achsenabschnitt c einer Geraden

$$y = mx + c$$

an n Paaren von Messpunkten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit Messunsicherheiten σ_i auf die y_i , während die x_i als genau bekannt angenommen werden. Beispiel: Messung

der Schallgeschwindigkeit aus Resonanzlängen einer stehenden Welle gemäß $L_n = (v/2f) n$.

Zu minimieren ist

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - mx_i - c}{\sigma_i} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - mx_i - c}{\sigma_i} \right)^2 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial c} &= -2 \sum \frac{y_i - \hat{m}x_i - \hat{c}}{\sigma_i^2} = -2 \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} + 2\hat{m} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + 2\hat{c} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} - \hat{m} \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} - \hat{c} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\bar{y} - \hat{m}\bar{x} - \hat{c} = 0,$$

wo wir z.B. definieren:

$$\bar{x} = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} / \sum \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - mx_i - c}{\sigma_i} \right)^2 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial m} &= -2 \sum \frac{y_i - \hat{m}x_i - \hat{c}}{\sigma_i^2} x_i = -2 \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} + 2\hat{m} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + 2\hat{c} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{xy} - \hat{m}\bar{x}^2 - \hat{c}\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich schließlich:

$$\hat{m} = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad \text{und} \quad \hat{c} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x}.$$

Zur Bestimmung der Unsicherheit $\sigma_{\hat{m}}$ auf \hat{m} schreiben wir

$$\hat{m} = \sum \frac{x_i - \bar{x}}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} y_i, \quad \text{wobei} \quad N = \sum \frac{1}{\sigma_i^2},$$

und mit dem Gesetz über die Fehlerfortpflanzung folgt dann

$$\sigma_{\hat{m}} = \sqrt{\sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right)^2 \sigma_i^2}.$$

Analog ergibt sich

$$\sigma_{\hat{c}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right)^2 \sigma_i^2}.$$

Korrelation zwischen m und c

Vorsicht: Im Allgemeinen gibt es eine Korrelation zwischen Steigung m und Achsenabschnitt c bei der linearen Regression, die z.B. für den Fall $\sigma_i = \sigma$ gegeben ist durch

$$\rho_{\hat{m}, \hat{c}} = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}.$$

Dadurch erhöht sich die Unsicherheit auf m und c ! Die Korrelation verschwindet offenbar für den Fall $\bar{x} = 0$. Diesen Fall können wir erreichen, indem wir die Gleichung wie folgt modifizieren:

$$y = m(x - x_0) + c$$

mit $x_0 = \bar{x}$. Der Parameter x_0 muss im Fit festgehalten werden!

Lineare Regression mit Unsicherheiten in beiden Messgrößen

Im Allgemeinen sind die x -Koordinaten der Datenpunkte nicht beliebig genau bekannt, sondern weisen Messunsicherheiten σ_{xi} auf. In erster Näherung kann man diese Unsicherheiten berücksichtigen, indem man die folgende Größe minimiert:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_{yi}^2 + (f'(x_i)\sigma_{xi})^2}.$$

Diese Methode heißt *Methode der effektiven Varianz*. Um aussagekräftige Residuenplots zu erhalten, trägt man dann $\sqrt{\sigma_{yi}^2 + (f'(x_i)\sigma_{xi})^2}$ als Fehlerbalken in y -Richtung auf.

A.4 Systematische Unsicherheiten

A.4.1 Definition und Abschätzung

Definitionen

Betrachten wir die folgenden zwei Situationen:

- Mit einem Metall-Lineal werden Längenmessungen durchgeführt. Das Lineal wurde bei einer Temperatur von $15^\circ C$ kalibriert, aber die Messungen werden in einem wärmeren Labor durchgeführt und der Experimentator versäumt es, für die thermische Expansion zu korrigieren.
- Zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit wird die Wellenlänge einer stehenden Schallwelle ausgemessen. Dazu wird ein Wegaufnehmer verwendet, der zuvor nur mit einer endlichen Präzision kalibriert werden konnte.

Frei übersetzt nach R. Barlow

Es ist essentiell, *systematische Effekte* von *systematischen Fehlern* zu unterscheiden, die die Unsicherheiten in der Größe dieser Effekte sind, und von *handwerklichen Fehlern*, die aus dem Übersehen solcher Effekte herrühren.

In diesem Sinne ist der Ausdruck *systematische Unsicherheit* sprachlich präziser als der Ausdruck „systematischer Fehler“.

Abschätzung systematischer Messunsicherheiten

Es existieren viele Methoden, um systematische Messunsicherheiten abzuschätzen. Wir nehmen an, dass das Ergebnis von einer Menge von N unbekannten Parametern ϕ abhängt und dass wir zumindest grobe Kenntnis ihrer Wahrscheinlichkeitsdichten haben. Im Praktikum benutzen wir vor allem die *Verschiebemethode*: Für N unbekannte Parameter $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ mit unkorrelierten Gauß'schen Unsicherheiten σ_i , und einer Schätzgröße $f(\phi_1, \dots, \phi_n)$ für die uns interessierende physikalische Größe, liefert die lineare Näherung:

$$\sigma_f^2 \approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \right)^2 \sigma_i^2.$$

Die partiellen Ableitungen können als finite Differenzen angenähert werden:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \approx \frac{f(\phi_1, \dots, \phi_i + \sigma_i, \dots, \phi_N) - f(\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N)}{\sigma_i} = \frac{\Delta_i}{\sigma_i},$$

und so erhalten wir $\sigma_f^2 \approx \sum_{i=1}^N \Delta_i^2$.

Beispiel für die Verschiebemethode

Beispiel: Ein Ohmscher Widerstand R soll aus einer linearen Regression an Messpunkte (U_i, I_i) aus Spannungs- und Strommessungen bestimmt werden. Der Hersteller des Messgeräts gibt die folgenden systematischen Unsicherheiten auf Spannungsmessungen und Strommessungen an:

$$\begin{aligned}\sigma_{U,\text{sys}} &= (0.01U_i + 0.005U_{\text{Bereichsendwert}})/\sqrt{3}, \\ \sigma_{I,\text{sys}} &= (0.02I_i + 0.005I_{\text{Bereichsendwert}})/\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Man studiert dann die Verschiebungen, die man jeweils für R erhält, wenn man die Spannungsmessungen bzw. die Strommessungen um die systematischen Unsicherheiten verschiebt. Die systematische Unsicherheit auf R erhält man schließlich durch quadratische Addition der Verschiebungen.

Vergleich

Statistische Fehler

- geben eine nicht zu vermeidende, zufällige Fluktuation der Messwerte wieder,
- können aus der Wiederholung von Messungen unter identischen Bedingungen bestimmt werden und fallen dabei wie $\propto 1/\sqrt{n}$.

Systematische Fehler

- basieren auf Effekten, die stets zu derselben, unbekannten Abweichung von Messwerten führen,
- können durch Wiederholung der Messung weder abgeschätzt noch reduziert werden,

- dürfen daher auch nicht als Gewicht beim gewichteten Mittel eingesetzt werden.

Die statistischen und systematischen Unsicherheiten sollten getrennt und mit der korrekten Anzahl an signifikanten Stellen ausgewiesen werden, z.B.:

$$R = 99.82 \Omega \pm 0.12 \Omega \text{ (stat.)} \pm 0.52 \Omega \text{ (syst.)}.$$

Zusammenfassung

Zusammenfassung der wichtigsten Konzepte

- Empirisches Mittel, Standardabweichung, Fehler des Mittelwerts:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

- Gewichtetes Mittel:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1 / \sigma_i^2}$$

- Wichtige Wahrscheinlichkeitsdichten: Gauß-Verteilung, Binomial-Verteilung, Poisson-Verteilung, Gleichverteilung
- Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, z.B.:

$$y = A^m B^n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2 \approx \left(m \frac{\sigma_A}{A} \right)^2 + \left(n \frac{\sigma_B}{B} \right)^2$$

- Regressionsrechnung, χ^2 , Residuenplots
- Statistische und systematische Unsicherheiten