4.5 Gekoppelte LC-Schwingkreise

4.5.1 Versuchsbeschreibung

Ein elektrischer Schwingkreis 1 kann induktiv mit einem zweiten erregten Schwingkreis 2 koppeln. Der Kreis 1 wird dadurch zu erzwungenen Schwingungen erregt. Die Resonanz tritt auf, wenn $\omega_1 = \omega_2$ ist. Dann wird die Erscheinung der Schwebung beobachtet: Die Schwingungsenergie pendelt zwischen den Kreisen hin und her (gekoppelte Schwingungen).
Bei diesem Versuch werden die Fundamentalschwingungen und die Schwebung der gekoppelten Schwingkreise aufgezeichnet. Dazu wird das Frequenzspektrum der gekoppelten Schwingkreise mit dem Spektrum eines ungekoppelten Schwingkreises verglichen. Das fouriertransformierte Signal der gekoppelten Schwingkreise zeigt die Aufspaltung in zwei symmetrisch um das ungekoppelte Signal liegende Verteilungen, deren Abstand von der Kopplung der Schwingkreise abhängt.
Ausgehend von den Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingkreise:

$$\ddot{I}_1 + k \cdot \ddot{I}_2 + \frac{I_1}{L \cdot C} = 0 \tag{4.1}$$

$$\ddot{I}_2 + k \cdot \ddot{I}_1 + \frac{I_2}{L \cdot C} = 0 \tag{4.2}$$

mit Kopplung k $(0 < k < 1)$ folgen die beiden Eigenfrequenzen ω_+ und ω_- zu

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} = \omega_+ < \omega_0 < \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}.$$

Insbesondere ist die Schwingungsfrequenz des gekoppelten Systems gleich (für kleine k).

$$\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k^2}} \approx \omega_0$$

$$\rightarrow k_1 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_+}\right)^2 - 1, \qquad k_2 = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_-}\right)^2, \qquad \sigma_{k_{1/2}} = \left(\frac{2\omega_0}{\omega_{+/-}}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_{+/-}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_{+/-}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\omega_{+/-}}}{\omega_{+/-}}\right)^2}$$

Hinweis:
Die Aufspaltung in zwei exakt gleich große Signale gelingt nur bei genau gleichen Schwingkreisen. Durch Toleranzen der Induktivitäten L und der Kapazitäten C ist das nicht immer genau gegeben. Es sollen die Kondensatoren und Spulen verwendet werden, die bei den Voruntersuchungen und den freien gedämpften Schwingungen charakterisiert worden sind.

Die Kopplungen k_1 und k_2 werden aus den beiden Frequenzen der Fundamentalschwingungen (Moden) f_1 und f_2 berechnet und sollten innerhalb der Fehler den gleichen Zahlenwert für die Kopplung ergeben. Für die im weiteren Verlauf gezeigten Messungen trifft das zu, wenn $\sigma_{\omega_0} \approx \sigma_{\omega_{+/-}} \approx 10$ Hz beträgt. Dann findet man $k_1 = 0{,}109$, $k_2 = 0{,}133$ und $\sigma_k = 0{,}029$.

4.5.2 Analogie zu gekoppelten Pendeln in der Mechanik

Die Situation der induktiv gekoppelten elektrischen Schwingkreise entspricht der von gekoppelten Pendeln (Teil I, Mechanik), mit dem Unterschied, dass die Kopplung bei den Schwingkreisen durch Spannungen hervorgerufen wird, die in den Spulen induziert werden. In den Differentialgleichungen treten daher Terme der Form $kL \cdot \dot{I}$ auf. Die Konstante k gibt den Kopplungsgrad an. Das führt im Gegensatz zu gekoppelten Pendeln dazu, dass die Kopplungsstärke für **beide** Fundamentalschwingungen eine Rolle spielt.

Bei Schwingkreisen, die mit identischen Komponenten aufgebaut werden, gelten die Differentialgleichungen (Summen der Spannungen verschwinden):

$$\begin{aligned} \int \frac{I_1}{C} \cdot dt + L \cdot \dot{I}_1 + kL \cdot \dot{I}_2 &= 0 \qquad \text{(Schwingkreis 1)} \\ \int \frac{I_2}{C} \cdot dt + L \cdot \dot{I}_2 + kL \cdot \dot{I}_1 &= 0 \qquad \text{(Schwingkreis 2)} \end{aligned}$$

Hier wurden Dämpfungsterme zunächst vernachlässigt. Differentiation nach der Zeit führt zu der Standardform der gekoppelten Differentialgleichungen (Gleichungen 4.1, 4.2). Addition der Gleichungen 4.1 und 4.2 ergibt:

$$(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{LC} \cdot (I_1 + I_2) + k \cdot (\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) = 0$$

Durch Umformung findet man:

$$\ddot{I}_+ + \frac{1}{LC \cdot (1+k)} \cdot I_+ = 0$$

wobei $I_+ = I_1 + I_2$ einer der beiden 'Fundamentalströme' ist. Daraus erhält man die Kreisfrequenz dieser Fundamentalschwingung:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1+k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \tag{4.3}$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ist dabei die Kreisfrequenz jedes der Schwingkreise ohne Kopplung. Diese Fundamentalschwingung kann angeregt werden, wenn man in der Schaltung beide Kondensatoren in der Art auflädt, dass die Ströme I_1 und I_2 parallel durch die Spulen fließen (Abbildung 4.1a). In gleicher Weise ergibt Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\ddot{I}_- + \frac{1}{LC \cdot (1-k)} \cdot I_- = 0$$

wobei $I_- = I_1 - I_2$ der zweite 'Fundamentalstrom' ist.
Diese Fundamentalschwingung hat die Kreisfrequenz:

$$\omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot (1-k)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \tag{4.4}$$

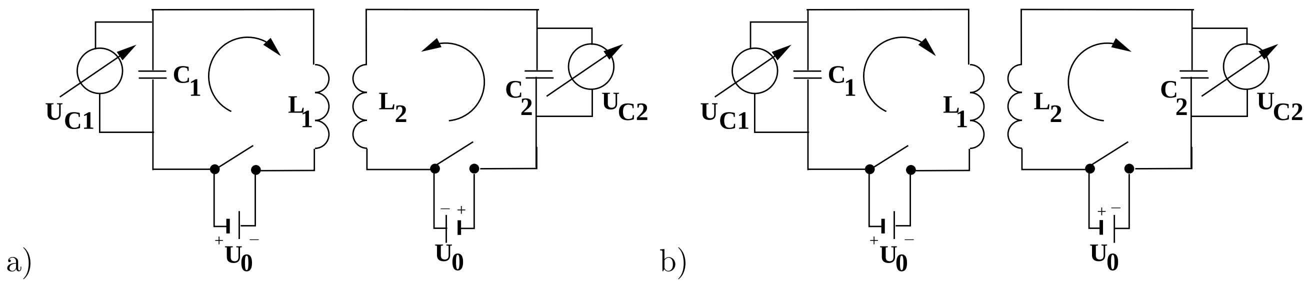


Abbildung 4.1: Fundamentalschwingungen zweier gekoppelter Schwingkreise a) gleichsinnige und b) gegensinnige Anregung

Diese Schwingung kann angeregt werden, wenn man in der Schaltung die Kondensatoren entgegengesetzt aufgeladen werden, so dass die Ströme in entgegengesetzter Richtung durch die Spulen fließen (Abbildung 4.1b).
Beide Fundamentalschwingungen zeigen, wie in der Mechanik, keine Schwebungserscheinungen sondern wegen der Dämpfung einen einfachen exponentiellen Abfall der maximalen Amplituden. Die Strom-Kombination I_+ entspricht dem Fall gleichsinnig ausgelenkter Pendel; dies führt zu einer kleinen Schwingungsfrequenz. I_- dagegen entspricht den gegensinnig ausgelenkten Pendeln (die Kopplung wirkt sich dann stärker aus) und führt zu einer größeren Schwingungsfrequenz.
Wenn man die Frequenzen der Fundamentalschwingungen und vielleicht der nicht-gekoppelten Schwingkreise gemessen hat, kann man mit Hilfe der Gleichungen 4.3 und 4.4 den Kopplungsgrad der Schwingkreise bestimmen:

$$k = \frac{f_-^2 \; - \; f_+^2}{f_-^2 \; + \; f_+^2} = \frac{\omega_-^2 + \omega_+^2 - 2 \cdot \omega_0^2}{\omega_-^2 - \omega_+^2}$$

Wenn durch die Wahl der Anfangsbedingungen 'Schwebung' eingestellt wird, ergibt sich wie in der Mechanik durch die Mittelung der Schwingungsfrequenzen f_+ unf f_- die Frequenz der gekoppelten Schwingung:

$$f_k \;\; = \;\; \frac{f_- \; + \; f_+}{2} \;\; \approx \;\; f_0 \, ,$$

und aus der halben Differenz erhält man die Frequenz der Schwebung:

$$f_{schw} \;\; = \;\; \frac{f_- \; - \; f_+}{2} .$$

Berücksichtigung der Dämpfung (einige wichtige Relationen):
Die Differentialgleichungen für die beiden Fundamentalschwingungen haben dann folgende Form:

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_+ \; + \; \frac{R}{L(1+k)} \cdot \dot{I}_+ \; + \; \frac{1}{LC \cdot (1+k)} \cdot I_+ \;\; &= \;\; 0 \\
\ddot{I}_- \; + \; \frac{R}{L(1-k)} \cdot \dot{I}_- \; + \; \frac{1}{LC \cdot (1-k)} \cdot I_- \;\; &= \;\; 0
\end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\beta_\pm = \frac{R}{2L(1 \, \pm \, k)}, \qquad \omega_{\pm 0}^2 = \frac{1}{LC(1 \, \pm \, k)}$$

folgt:

$$\ddot{I}_{\pm} + 2\beta_{\pm} \cdot \dot{I}_{\pm} + \omega_{\pm 0}^2 \cdot I_{\pm} \;=\; 0 \tag{4.5}$$

Die Lösungen der Gleichungen 4.5 sind:

$$I_{\pm} \;=\; e^{-\beta_{\pm} t} \cdot (a_{\pm} \,\sin\omega_{\pm} t + b_{\pm} \,\cos\omega_{\pm} t)$$

mit den Kreisfrequenzen $\omega_{\pm}^2 = \omega_{\pm 0}^2 - \beta_{\pm}^2$. Die Größen $a_{\pm}$ und $b_{\pm}$ sind vier Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden.
Die messbaren Größen sind nicht die Kombinationen $I_{\pm}$, sondern die Ströme und z. B. Kondensatorspannungen in den beiden Schwingkreisen. Die Kondensatorspannungen sollen jetzt andeutungsweise berechnet werden. Die Ströme in den Schwingkreisen berechnen sich durch $I_1 = (I_+ + I_-)/2$ bzw. $I_2 = (I_+ - I_-)/2$. Daraus lassen sich die gesuchten Spannungen (etwas aufwendig) berechnen:

$$\begin{aligned}
U_{1/2} \;&=\; \frac{1}{C} \cdot \int I_{1/2} dt \\
&=\; \frac{1}{C} \cdot \frac{e^{-\beta_+ t}}{\omega_{+0}^2} \cdot \{\frac{a_+}{2} \cdot (-\beta_+ \,\sin\omega_+ t - \omega_+ \,\cos\omega_+ t) \\
&\qquad\qquad + \frac{b_+}{2} \cdot (-\beta_+ \,\cos\omega_+ t + \omega_+ \,\sin\omega_+ t)\} \\
&\quad \pm \frac{1}{C} \cdot \frac{e^{-\beta_- t}}{\omega_{-0}^2} \cdot \{\frac{a_-}{2} \cdot (-\beta_- \,\sin\omega_- t - \omega_- \,\cos\omega_- t) \\
&\qquad\qquad + \frac{b_-}{2} \cdot (-\beta_- \,\cos\omega_- t + \omega_- \,\sin\omega_- t)\}
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen werden meist so gewählt, dass die Kondensatoren für $t = 0$ durch Spannungen U_{10} und U_{20} aufgeladen sind und zunächst kein Strom fließt. Aus $I_1(0) = I_2(0) = 0$ folgt immer $b_+ = b_- = 0$. Für die Kondensatorspannungen für $t = 0$ findet man dann

$$\begin{aligned}
\frac{a_+\omega_+}{2\omega_{+0}^2} + \frac{a_-\omega_-}{2\omega_{-0}^2} \;&=\; -U_{10}(0) \cdot C \\
\frac{a_+\omega_+}{2\omega_{+0}^2} - \frac{a_-\omega_-}{2\omega_{-0}^2} \;&=\; -U_{20}(0) \cdot C
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Lösungen für die Kondensatorspannungen:

- Gleichsinnige Aufladung: $U_{10} = U_{20} = U_0$:

  $$U_1 = U_2 \;=\; U_0 \cdot \frac{e^{-\beta_+ t}}{\omega_+} \cdot (\beta_+ \,\sin\omega_+ t + \omega_+ \cos\omega_+ t)$$

  Abbildung 4.2a zeigt oben die Spannung am Kondensator 1 und 2.

- Gegensinnige Aufladung: $U_{10} = -U_{20} = U_0$:

  $$U_1 = -U_2 \;=\; U_0 \cdot \frac{e^{-\beta_- t}}{\omega_-} \cdot (\beta_- \,\sin\omega_- t + \omega_- \cos\omega_- t)$$

  Abbildung 4.2a zeigt unten die Spannung am Kondensator 1. Am 2. Kondensator ist die Spannung entgegengesetzt. Die Frequenz ist höher, als bei gleichsinniger Aufladung!

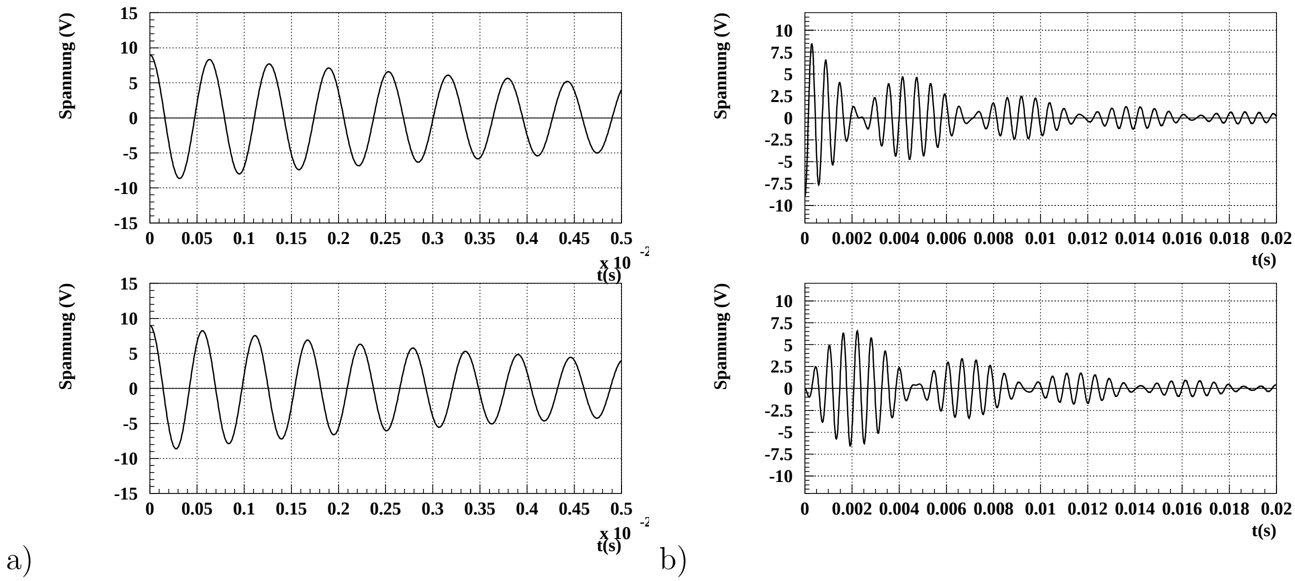


Abbildung 4.2: a) Fundamentalschwingungen und b) Schwebung zweier gekoppelter Schwingkreise mit $R = 2,5\ \Omega$, $L = 9$ mH und $C = 1,0\ \mu$F

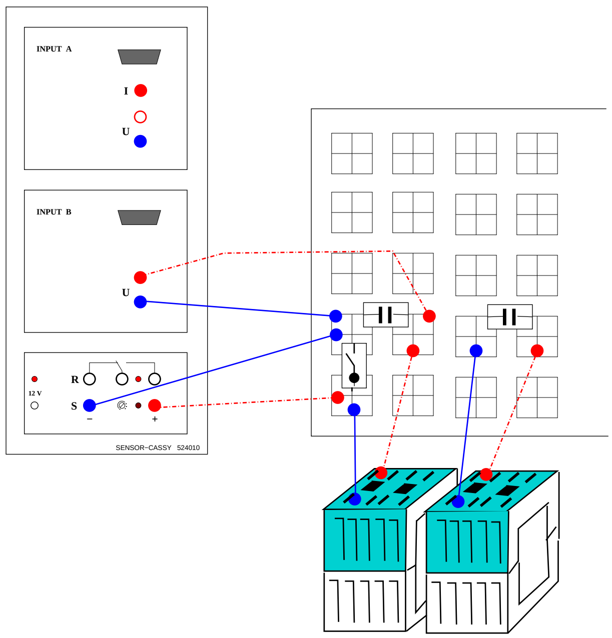
- Schwebung: $U_{10} = U_0$ und $U_{20} = 0$:

$$\begin{aligned} U_{1/2} &= U_0 \cdot [e^{-\beta_+ t} \cdot \{\frac{1}{2\omega_+} \cdot (-\beta_+ \sin\omega_+ t - \omega_+ \cos\omega_+ t)\} \\ &\pm e^{-\beta_- t} \cdot \{\frac{1}{2\omega_-} \cdot (-\beta_- \sin\omega_- t - \omega_- \cos\omega_- t)\}] \end{aligned}$$

Abbildung 4.2b zeigt oben die Spannung am Kondensator 1 und unten am Kondensator 2.

4.5.3 Versuchsaufbau

Der erste Schwingkreis wird gemäß den Abbildungen 4.3 und 4.4 auf der Rastersteckplatte aufgebaut. Die Kondensatorspannung wird an Eingang B des Sensor CASSYs gemessen. Zu Beginn des Versuchs wird der Kondensator aus der Spannungsquelle S aufgeladen. Zum Start der Schwingung wird der Taster gedrückt, welcher dabei die Spannungsquelle S kurzschließt.
Der zweite Schwingkreis wird separat aufgebaut. Seine Spule wird für die Kopplung der Schwingkreise direkt neben die erste Spule gestellt. Es kann die Spannung am zweiten Kondensator an Eingang A des Sensor-CASSYs gemessen werden. Bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Anregung wird ebenfalls der zweite Kondensator aus der Spannungsquelle S aufgeladen. Zum Start der Schwingung wird der zweite Taster ebenfalls betätigt, welcher dabei die Spannungsquelle S kurzschließt.

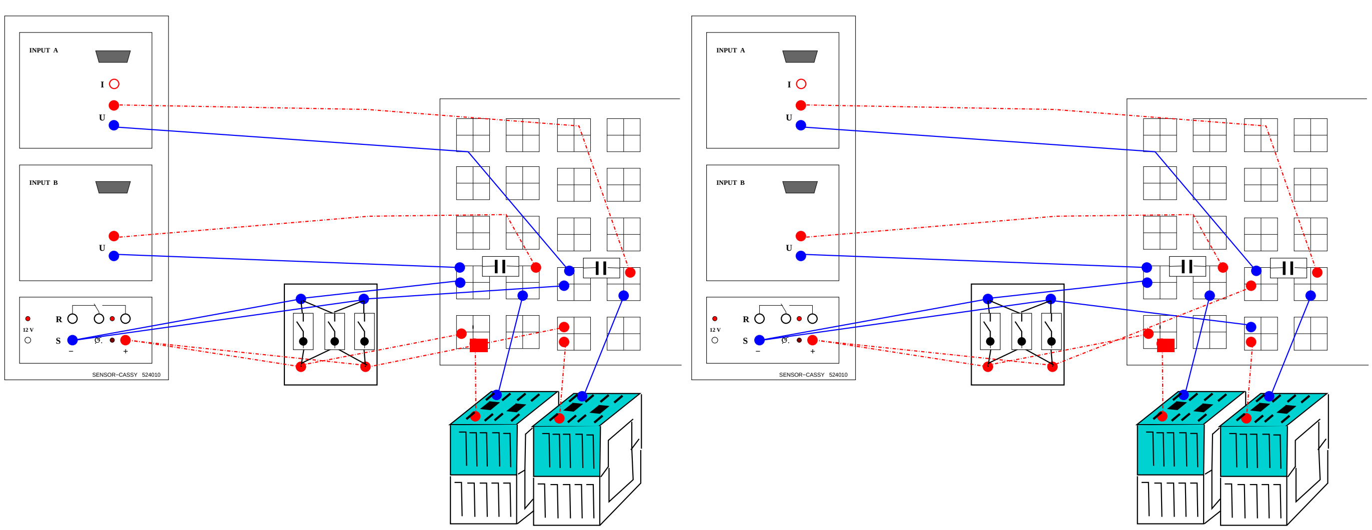


a)

Benötigte Geräte:

1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
2	Kondensator 1, 2,2, 4,7, 10 μF
2	Spulen 250, 500, 1000 Windungen
5	Paar Kabel, 50 cm rot/blau
1	Taster

Abbildung 4.3: Schaltbild zur Aufnahme der Schwebung von gekoppelten Schwingungen



a) b)

Abbildung 4.4: Schaltbild zur Aufnahme von gekoppelten Schwingungen bei a) gleichsinniger und b) gegensinniger Anregung

4.5.4 Versuchsdurchführung

- Ladespannung U_0 auf etwa 9 V einstellen - dazu Spannungsquelle S entsprechend einstellen, Spannungsquelle eingeschaltet lassen.
- Polung der an den Schwingkreisen anliegenden Spannungen bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Anregung einstellen.
- Zur Beobachtung der Schwebung nur an einen Schwingkreis Spannung anlegen
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** das Messintervall auf 10 μs und die Anzahl auf 2000 einstellen, entsprechend einer Messzeit von 20 ms
- Im Menü **Einstellungen, Messparameter anzeigen** weiterhin einen Trigger auf z.B. $U_{B1} = 5$ V, fallende Tendenz einstellen!
- Messung mit **F9** starten (wartet dann auf Triggersignal)
- Schwingkreis mit Taster schließen (erzeugt Triggersignal)
- Abstand der Spulen und damit die Kopplungsstärke variieren

4.5.5 Versuchsauswertung

Fall der Schwebung:
Im ungekoppelten Fall ergibt sich eine gedämpfte harmonische Schwingung (Abbildung 4.5a). Die gekoppelte Schwingung besitzt die gleiche Einhüllende (Abbildung 4.5a).
Im ungekoppelten Fall zeigt das Frequenzspektrum nur ein Signal, dessen Frequenz sich durch die Berechnung des Signalschwerpunkts ermitteln lässt (Abbildung 4.5b).
Im gekoppelten Fall spaltet die Frequenz symmetrisch in zwei Frequenzen auf. Die Amplituden sind nur halb so groß wie im ungekoppelten Fall und der Abstand hängt von der Kopplung ab (Abbildung 4.5b).
Die Abbildung 4.5c zeigt die gemessenen Spannungsabfälle an den beiden Kondensatoren für den Fall der Schwebung bei den gekoppelten Schwingungen. Die Abbildung 4.5d zeigt die ungekoppelte und die Fundamentalschwingungen der gekoppelten Schwingungen bei gleich- bzw. gegensinniger Anregung.
Bestimmen Sie den Kopplungsgrad k aus diesen verschiedenen Messungen und geben Sie die Ergebnisse mit Fehlern an.

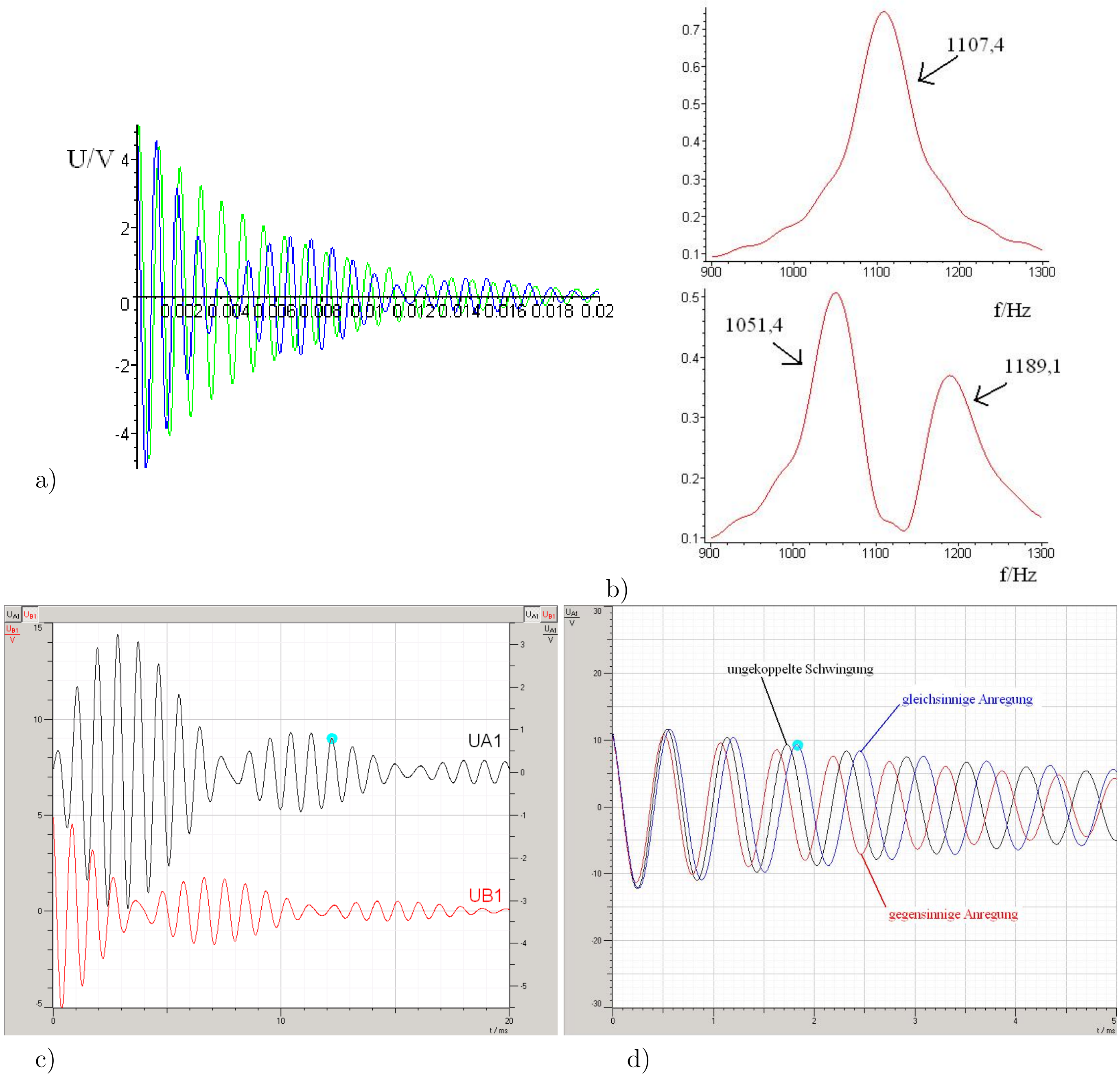


Abbildung 4.5: a) Ungekoppelter (grüner Verlauf) und gekoppelter Schwingkreis (Schwebung, blaue Linie), b) Frequenzspektren der ungekoppelten und der gekoppelten Schwingungen c) Spannungsabfälle an den beiden Kondensatoren im Fall der Schwebung, d) Fundamentalschwingungen bei gleich- bzw. gegensinniger Anregung