

Physikalisches Grundpraktikum I

Versuchsprotokoll: (Akustik)

14. März 2023

Maximilian Carlos Menke, 434170

Andrea Roth, 428396

Gruppe A3

Versuchsliste

1E1 Ladekurven eines Kondensators	2
Messung mit Multimeter	3
Aufbau Widerstandsbestimmung mit CASSY	5
Durchführung des Versuchs zur Bestimmung des Widerstands	6
Diskussion der Ergebnisse	8
statistischer Fehler auf die Messungen	9
Lineare Regression	10
Systematische Fehler	13
Aufbau der Messung mit Oszilloskop	14
Durchführung der Messung mit Oszilloskop	15
Entladen des Kondensator	16
Bestimmung des Offset	18
Aufladen des Kondensators	19
Bestimmung von τ	20
Messdaten des Oszilloskop und Diskussion dieser	22
Aufbau und Durchführung der Messung mit CASSY	24
Rohdaten	26
Bestimmung des Offsets auf Strom und Spannung	27
Linearisierung der Messergebnisse	28
Auswertung mittels Linearer Regression	30
Diskussion der Ergebnisse	33
Vergleich und Diskussion aller Ergebnisse für die Kapazität	35

Versuchsziele

1E1 Ladekurven eines Kondensators

Versuchsziele

Ziel des Versuchs ist die Kapazität eines Kondensators durch Lade und Entladevorgang zu bestimmen. Dies wird durch eine Schaltung mit Widerstand und Schalter ermöglicht. Hierfür werden verschiedene Methoden verwendet. Mit dem Multimeter werden Kapazität und Widerstand bestimmt. Mit dem Oszilloskop wird über die Zeitkonstante die Kapazität bestimmt. Mit Sensor CASSY 2 zunächst der Widerstand und dann die Kapazität. Diese Ergebnisse sollen dann untereinander verglichen werden.

Aufgabe 1 Grundlagen

Knappe Beschreibung der theoretischen Grundlagen, Angabe der benötigten Formel(n), ohne Herleitung. Definition der verwendeten Formelzeichen.

Ziel des Versuchs ist es, die Kapazität eines Kondensators zu bestimmen.

Dies können wir messen, da die Spannungsverläufe am Kondensator und Widerstand mit der Kapazität und dem Widerstand zusammenhängen. Allgemein gilt für einen Kondensator, der aufgeladen wird und mit einem Widerstand in Reihe geschaltet wurde:

$$U_0 - U_C = U_R = I(t)R = C \frac{dQ}{dt} R \quad (1)$$

Dabei ist U_0 die an den Stromkreis angelegte Spannung. Der besteht in diesem Falle nur aus einem in Reihe geschalteten Kondensator und einem Widerstand. U_C ist die Spannung am Kondensator und U_R die Spannung am Widerstand. $I(t)$ ist der Strom durch den Widerstand fließt und R der Widerstandswert. $\frac{dQ}{dt}$ ist die Ladung, die pro Zeiteinheit durch den Widerstand fließt. Diese DGL lässt sich mit Hilfe der Separation der Variablen lösen.

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_0(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2)$$

τ ist hierbei die Zeitkonstante. Für den Strom am Widerstand ergibt sich damit:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_0}{dt} = \frac{U_0}{R} * e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 * e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

Für den Entladevorgang ergibt sich eine ähnliche DGL:

$$U_C(t) = -RI(t) = -RC \frac{dU_C}{dt} \quad (4)$$

Wenn man diese löst, erhält man:

$$\Rightarrow U_C(t) = U_0(e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (5)$$

Für den Strom am Widerstand kann man jetzt auch leicht mithilfe der Spannung am Kondensator berechnen:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_0}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

Das bedeutet, dass man die Konstante τ bestimmen kann wenn man Lade und Entlade Kurven betrachtet. Dabei kann sowohl die Stromstärke gemessen werden welche durch den Widerstand fließt, wie auch die Spannung die über ihm abfällt, da diese proportional zur Spannung ist. Auch fällt auf, dass immer $I(t) \propto e^{-t/\tau}$ gilt, und für den Entladevorgang auch $U_C(t) \propto e^{-t/\tau}$. Beim Entladevorgang gilt: $U_C(t) - U_0 \propto e^{-t/\tau}$. Wenn man noch einen Offset, also ein Rauschen bei der Nullline, berücksichtigen möchte, kann man die Gleichungen verallgemeinern:

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + U_{off} \quad \text{Aufladevorgang} \quad (7)$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + U_{off} \quad \text{Entladevorgang} \quad (8)$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} + I_{off} \quad \text{Auf/Entladevorgang} \quad (9)$$

Aufgabe 2 Vorversuch: Charakterisierung der verwendeten Bauteile

Charakterisieren Sie die verwendeten Bauteile mit Digitalvoltmeter und Messbrücke.

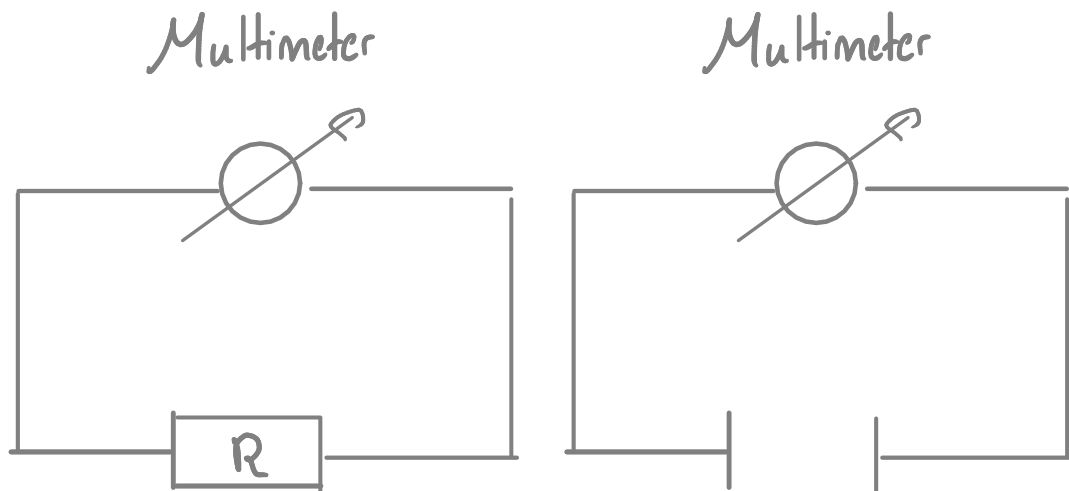
Messung mit Multimeter

Bevor wir mit dem Versuch angefangen haben, haben wir mit dem Multimeter zunächst die Bauteile charakterisiert, also Widerstand und Kondensator vermessen.

Verwendete Geräte

- Multimeter
- Rastersteckplatte DIN A4
- $10 \mu F$ Kondensator
- $1 k\Omega$ Widerstand
- Kabel rot/blau

Hierfür haben wir den Widerstand in Reihe mit dem Multimeter gesteckt. Den selben Aufbau haben wir für den Kondensator verwendet. Der Skizze unten können Sie den Schaltplan für die Messungen entnehmen.



(a) Schaltplan messen von R

(b) Schaltplan messen von C

Abbildung 1: Schaltplan für Messungen mit dem Multimeter

Dabei haben wir zur Messung des Widerstands eines der Kabel an die Masse des Multimeters angeschlossen, und das andere Kabel an die Spannungsbuxe des Multimeters. Da wir wussten, dass wir ein Widerstand im Bereich $1\text{ k}\Omega$ erwarten, haben wir den Drehregler auf $2\text{ k}\Omega$ gestellt.

Das selbe Vorgehen haben wir beim Messen des Kondensators gewählt, wobei wir hier das zweite Kabel in die Buxe für mA gesteckt, und den Drehregler auf $20\text{ }\mu\text{F}$ geregelt haben.

Die Daten für die Unsicherheiten stammen aus der Bedienungsanleitung des Multimeters.

Bauteil	Messung	Fehler
Widerstand	$0.991\text{ k}\Omega$	$\pm 0.008\text{ k}\Omega\%$
Kondensator	$10.36\text{ }\mu\text{F}$	$\pm 0.259\text{ }\mu\text{F}$

Tabelle 1: Ergebnisse der Messung mit dem Multimeter

Aufgabe 3 Vorversuch: Bestimmung des Ohmschen Widerstands

Beschreiben Sie den Versuchsaufbau unter Verwendung eines Schaltbildes. Beschrei-

ben Sie die Versuchsdurchführung unter Angabe der relevanten Messwerterfassungseinstellungen. Zeigen Sie exemplarisch die Häufigkeitsverteilungen für Spannung U und Strom I an einem Messpunkt und beschreiben Sie, wie Sie die statistischen Fehler für U und I bestimmen. Tragen Sie die Spannung U gegen den Strom I auf und bestimmen Sie aus der Steigung den Widerstand R und seine statistische Messunsicherheit. Ermitteln Sie den systematischen Fehler mit der Verschiebemethode.

Aufbau Widerstandsbestimmung mit CASSY

Für die Bestimmung des Widerstands mit dem Sensor CASSY haben wir folgende Geräte verwendet:

Verwendete Geräte

- Sensor CASSY 2
- $1\text{ k}\Omega$ Widerstand
- Rastersteckplatte DIN A4
- Brückenstecker
- Kabel rot/blau

Zum Aufbau des Experiments wird der zu messende Widerstand auf die Steckplatte gesteckt. In diesem Versuch soll sowohl Spannung als auch Strom am Widerstand gemessen werden. Das Schaltbild für diese Messung können sie in der folgenden Skizze sehen.

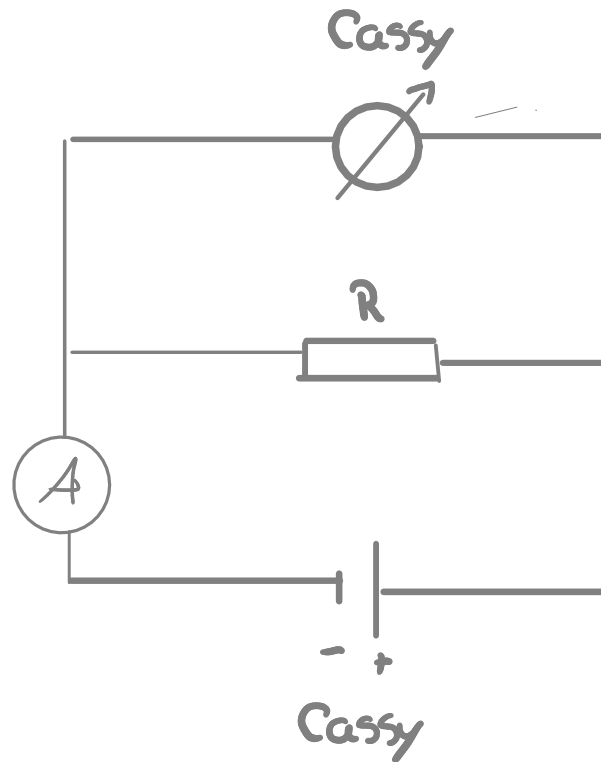


Abbildung 2: Schaltbild Widerstandsbestimmung mit CASSY

Die Spannungsquelle ist hierbei das Sensor CASSY das Parallel zu dem Widerstand angeschlossen wird. In Reihe dazu wird der Strom gemessen. Ebenfalls parallel zum Widerstand wird die Spannung gemessen. Diese Schaltung kann mit dem Steckbrett und den Kabeln aufgebaut werden. Die Spannung wird beim CASSY über Input B gemessen, und die Stromstärke über Input A. Abhängig von der Wahl der Position der Masse der beiden Eingänge erhält man unterschiedliche Polungen. Dies hat jedoch nur Einfluss auf das Vorzeichen der gemessenen Größen.

Durchführung des Versuchs zur Bestimmung des Widerstands

Bei der Versuchsdurchführung haben wir wie bereits oben beschrieben die Schaltung aufgebaut.

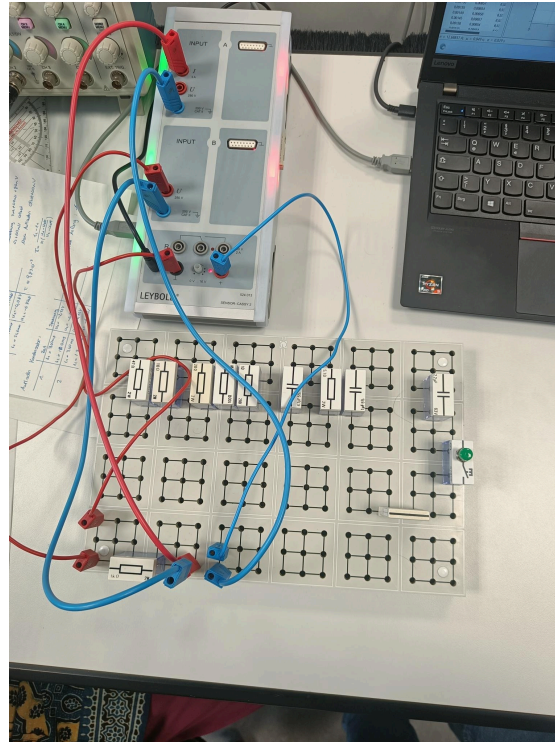


Abbildung 3: Bild der Schaltung zur Bestimmung des Widerstands mit CASSY

In dem Bild können Sie unsere Aufgebaute Schaltung sehen, und wie wir das CASSY angeschlossen haben.

Aus der Leistungsgrenze des Widerstands und der maximalen Stromstärke des CASSY konnten wir schließen, dass wir an diesem Maximal 10V anlegen dürfen. Deshalb haben wir das Cassy auf 9V geregelt. Als Intervall welches CASSY uns anzeigt haben wir -10V-10V verwendet. Aufgrund unseres großen Widerstands, fließen relativ geringe Ströme. Bei unserer Ersten Testmessung hatten wir ein zu großes Stromintervall gewählt, weshalb der Digitalisierungsfehler die Messung dominiert hat. Deshalb haben wir das kleinste Intervall für den Strom verwendet. Für die Messung haben wir keinen Trigger verwendet, sondern haben diese manuell gestartet. Hierfür haben wir nur das Messintervall und die Messzeit eingestellt.

Zunächst haben wir eine Testmessung durchgeführt die wir manuel gestartet und gestopt haben, um zu sehen ob wir ein Signal erhalten. Diese Messung konnten wir auch verwenden um unsere Messzeit sinnvoll ein zu stellen.

Wir wollen sicherstellen, dass der statistische Fehler auf die Strom und Spannungsmessung kleiner ist als der Fehler Aufgrund der Digitalisierung. Da dieser durch mehr Messpunkte verkleinert werden kann, während der Digitalisierungsfehler gleich bleibt. Dafür haben wir erst kurz überschlagen, wie groß der Digitalisierungsfehler ist. Daraus konnten wir bestimmen wieviele Messpunkte wir Mindestens brauchen um darunter zu liegen.

$$\sigma_D = \frac{\text{Intervall}}{2^{12} * \sqrt{12}} \quad (10)$$

Die 2^{12} kommt aus der Digitalisierungsrate des CASSY und die $\sqrt{12}$ aus der Annahme, dass dieser Fehler gleichverteilt ist.

Desweiteren wissen wir, dass der Statistischen Fehler auf den Mittelwert mit $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

bestimmt wird. Dabei ist σ die Standardabweichung zu der Verteilung unserer Messdaten. Diese können wir in CASSY Lab 2 mit einem Gauß fit grob bestimmen, und verwenden um ein Mindestwert für unsere Messwertanzahl N zu berechnen. Dabei fordern wir $\sigma_D > \bar{\sigma}$. Daraus konnten wir die Mindestanzahl von Messpunkten die wir benötigen auf ca. 500 bestimmen.

Intervall	Messzeit	Trigger	Messbereich
$50\mu\text{s}$	0.1s	–	-10V - 10V
Messwerte:	$\Rightarrow N = 2001$		-0.03A - 0.03A

Tabelle 2: Messwertserfassungseinstellungen des CASSY

Wir haben uns entschieden Einstellungen zu verwenden, die wir Problemlos auch für die Messung der Auf/Entladung des Kondensators verwenden können. Weswegen wir die Messzeit auf ca. zehn τ gewählt haben.

Nachdem wir alle Einstellungen im CASSY vorgenommen hatten, starteten wir eine Testmessung. Bei dieser konnten wir erkennen, dass die Spannung und der Strom um einen Wert (ungefähr der eingestellte) fluktuiert. Da dies unseren Erwartungen entsprochen hat, haben wir unsere tatsächliche Messung gestartet.

Hierfür haben wir eine Spannung mit dem CASSY Eingestellt. Eine Messung durchgeführt, und die Daten gespeichert. Dies haben wir insgesamt für 10 verschiedene Spannungswerte gemacht.

Im folgenden haben wir sämtliche Graphen, und Zahlenwerte mit Hilfe des Programms "Cassy_Widerstand.py" ermittelt und aus diesem übernommen.

Diskussion der Ergebnisse

Hier kann man die Häufigkeitsverteilung der einzelnen gemessenen Spannungen und Stromstärken sehen. Dabei hatten wir in dieser Messung eine Spannung von 3.97V angelegt. Dabei fällt auf, dass das Cassy nicht nur einen Spannungswert misst, sondern eine leichte Schwankung um diesen. Gleiches gilt für die Stromstärke.

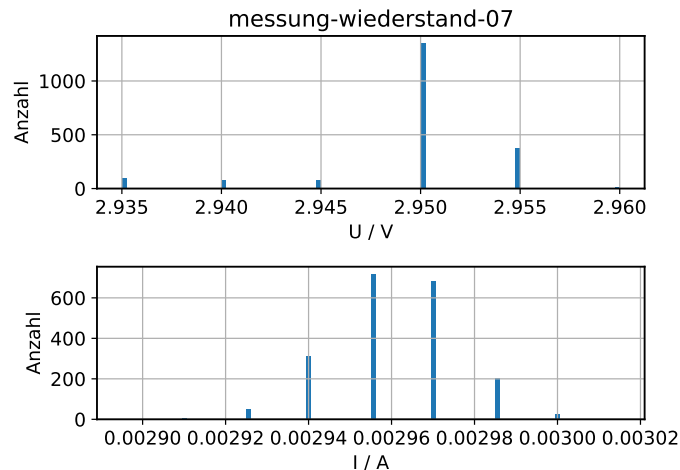


Abbildung 4: Verteilung der gemessenen Spannung und Stromstärke bei einer angelegten Spannung von 3.97V

statistischer Fehler auf die Messungen

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass sowohl Spannung wie auch Stromstärke einer Gaußverteilung folgen. Für die weitere Auswertung haben wir für jede Messung immer den Mittelwert und die Unsicherheit auf den Mittelwert berechnet.

Für die Berechnung des Mittelwerts können wir folgenden Zusammenhang benutzen.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (11)$$

Wobei N die Anzahl unserer Messpunkte ist, in unserem Fall 2001 und x_i der Wert der einzelnen Messpunkte. Diesen Mittelwert müssen wir für alle unsere Strom und Spannungsmessungen bestimmen. Mit diesem können wir den Fehler auf den Mittelwert bestimmen.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (12)$$

Hier ist σ die Standardabweichung auf den Einzelwert, und $\bar{\sigma}$ der Fehler auf den Mittelwert.

Desweiteren müssen wir den Digitalisierungsfehler in unserem Fall als statistischen Fehler betrachten, und auch bei der Linearen Regression berücksichtigen. Somit ergeben sich für den Statistischen Fehler auf die Mittelwerte folgende Werte.

Messung	Mittelwert	$\bar{\sigma}_{U_i}$	Gesamtfehler stat.
1	9.0V	0.1mV	1.4mV
2	8.07V	0.4mV	1.5mV
3	7.07V	0.1mV	1.4mV
4	5.99V	0.1mV	1.4mV
5	4.97V	0.0mV	1.4mV
6	3.97V	0.1mV	1.4mV
7	2.95V	0.1mV	1.4mV
8	8.52V	0.1mV	1.4mV
9	7.53V	0.0mV	1.4mV
10	6.53V	0.1mV	1.4mV

Tabelle 3: Spannungen mit Fehlern

Messung	Mittelwert	$\bar{\sigma}_{I_i}$	Gesamtfehler stat.
1	9.0mA	341.0nA	4.2uA
2	8.1mA	493.0nA	4.3uA
3	7.1mA	339.0nA	4.2uA
4	6.0mA	329.0nA	4.2uA
5	5.0mA	332.0nA	4.2uA
6	4.0mA	339.0nA	4.2uA
7	3.0mA	341.0nA	4.2uA
8	8.6mA	337.0nA	4.2uA
9	7.6mA	331.0nA	4.2uA
10	6.6mA	331.0nA	4.2uA

Tabelle 4: Stromstärken mit Fehlern

Der Gesamtfehler berechnet sich dabei aus der quadratischen Addition von statistischem Fehler auf den Mittelwert und dem Digitalisierungsfehler. Wie zu sehen ist, ist der Fehler auf den Mittelwert bei der Spannung sowie bei der Stromstärke deutlich kleiner als der Digitalisierungsfehler.

Was man hier auch erkennen kann ist, dass die Amplitude der Stromstärke zwischen 1/3 und 1/10 des Messbereichs liegt. Dies kommt daher, dass wir ein relativ großen Widerstand gewählt haben, und deshalb kleine Ströme fließen. Das CASSY Lab 2 hat jedoch als kleinsten Messbereich für die Stromstärke -0.03A bis 0.03A. Weshalb hier der Digitalisierungsfehler sehr stark ins Gewicht fallen wird.

Lineare Regression

Mit der Methode der kleinsten Quadrate, kann aus den berechneten Mittelwerten und deren Fehler nun eine Lineare Regression auf unsere Daten angepasst werden. Im oberen Graphen sind die Mittelwerte von Spannung und Strom gegeneinander aufgetragen. Die grüne Gerade ist die Anpassung einer Geraden an die Wertepaare.

Der untere Plot stellt da, wie weit die Mittelwerte von der Linearen Regression abweichen.

Den Fehler auf die Spannung im unteren Residualplot haben wir wie folgt berechnet:

$$\sigma_{U-Resultierend} = \sqrt{(R\sigma_I)^2 + (\sigma_U)^2} \quad (13)$$

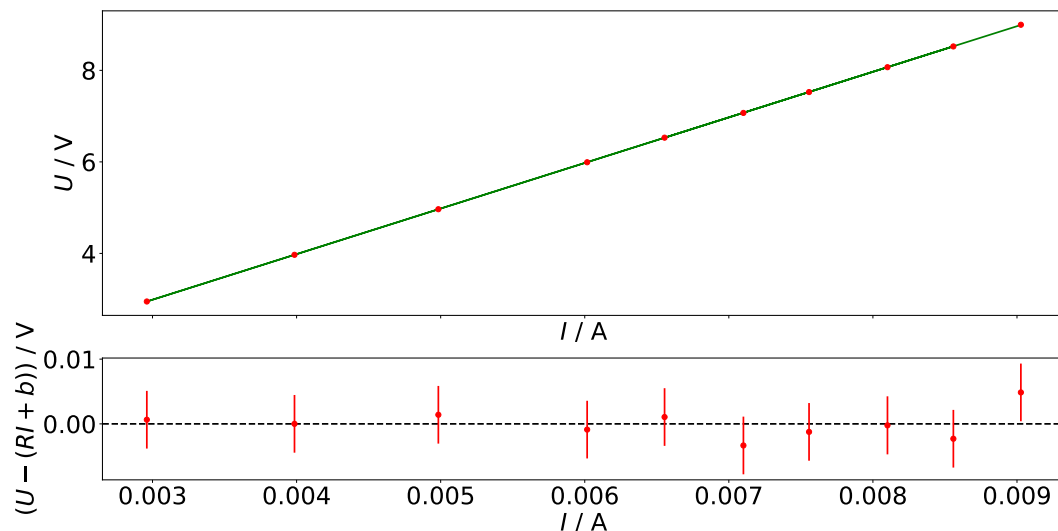


Abbildung 5: Lineare Regression mit allen Messungen

Im Residualplot ist zu sehen, dass unsere Messwerte um die lineare Regression streuen, die Fehler jedoch signifikant zu groß sind. Dies kommt wie bereits oben erwähnt von dem Digitalisierungsfehler auf die Stromstärke. Da der Digitalisierungsfehler jedoch ein fester Wert ist, kann dieser nicht verkleinert werden. Die Qualität der Anpassung kann also nicht verbessert werden durch Selektierung der Daten.

Dem unteren Graphen kann man ebenfalls entnehmen, dass hier keine Systematiken vorliegen. Zu bemerken ist, dass der im unteren Residuen Plot letzte Messwert, ausbricht (Die Anpassung liegt nicht mehr im Rahmen dessen Fehlers). Weshalb wir diesen im folgenden exkludieren werden, um die Genauigkeit unseres Ergebnis zu erhöhen.

Der Außreißer ist die Messung bei 9V. Beim analysieren unserer Rohdaten fällt auf, dass auch unsere Testmessungen, welche wir bei 9V durchgeführt hatten, ebenfalls alle nach oben ausgerissen sind, wenn wir diese in der Linearen Regression mitbeachtet haben.

Dies könnte daran liegen, dass der Widerstand sich bei dieser Spannung aufheizt, und somit größer wird, als sein eigentlicher Wert. Da der Messvorgang jedoch nicht lange dauerte, und die 9V unsere erste Messung waren, also sich zu dem Zeitpunkt der Widerstand am wenigsten aufgeheizt haben sollte ist es eher unwahrscheinlich, dass die starke Abweichung daher kommt.

Ein weiterer Maß für die Qualität der Anpassung liefert das $\frac{\chi^2}{ndof}$ wobei hier "ndof" für die Anzahl der Freiheitsgrade steht.

$$ndof = N_{Werte} - N_{Parameter} \quad (14)$$

in unserem Fall haben wir 9 Werte und 2 Parameter in der Linearen Regression.

Das χ^2 ist dabei gegeben als:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(U_i - (RI_i + b))^2}{\sigma_{U_i}^2 + (R\sigma_{I_i})^2} \quad (15)$$

Hier steht U_i, I_i für die Mittelwerte der einzelnen Messungen und R für den aus der Linearen Regression bestimmten Widerstand. Das b stammt ebenfalls aus der Linearen Regression, und bezeichnet den U-Achsen Abschnitt unserer Anpassung. Dieses ist jedoch sehr klein, was zu erwarten war.

Für $\frac{\chi^2}{ndof}$ ergibt sich dann:

Freiheitsgrade	$\frac{\chi^2}{ndof}$	b
7	0.094	0.0026V

Tabelle 5: Qualität der Anpassung

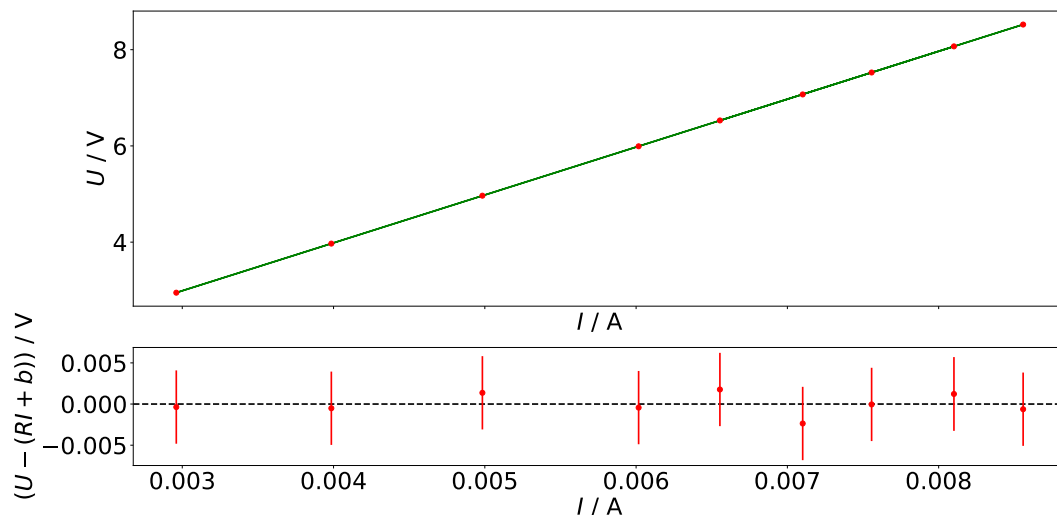


Abbildung 6: Lineare Regression ohne Messung bei 9V

Hier können wir sehen, dass die Lineare Regression nun im Rahmen aller Messfehler liegt und keine Systematik vorliegt. In dem oberen Plot sind ebenfalls Fehlerbalken, diese sind jedoch nicht zu sehen, da sie im Vergleich zu der Skalierung sehr klein sind.

Bei einer guten Anpassung erwarten wir ein $\frac{\chi^2}{ndof}$ von ungefähr 1. Unser Wert von 0.094 ist deutlich kleiner, was darauf schließen lässt, dass wir unsere Fehler überschätzt haben. Dies liegt wie bereits oben erwähnt, an dem Digitalisierungsfehler auf I . Das lässt darauf schließen, dass unsere Annahme, dass es eine gute Wahl ist einen großen Widerstand zu wählen falsch ist. Zwar hat uns diese Wahl ein größeres τ geliefert, was wie beim Oszilloskop diskutiert ebenfalls positive Einflüsse auf die Messgenauigkeit hat. Da der kleinste Messbereich des CASSY jedoch $-0.03A - 0.03A$ ist, überwiegt die daher stammende Ungenauigkeit jedoch.

Aus der Steigung der Geraden, der Linearen Regression können wir nun den Widerstand bestimmen. Aus der linearen Regression erhalten wir ebenfalls den statistischen

Fehler auf R . Dieser ergibt sich zu:

$$R = (995.5 \pm 0.829_{stat}) \Omega$$

Systematische Fehler

Bei der Berechnung der Systematischen Fehlern haben wir die Verschiebemethode gewählt. Dafür haben wir Stromstärken und Spannungswerte um den Systematischen Fehler verschoben, d.h:

$$\sigma_{U_i, Systematisch} = \frac{(0.01U_i + 0.005 * U_{Bereichswert})}{\sqrt{3}} \quad (16)$$

$$U_{i, verschoben} = U_i \pm \sigma_{U_i, Systematisch} \quad (17)$$

$$\sigma_{I_i, Systematisch} = \frac{(0.02I_i + 0.005 * I_{Bereichswert})}{\sqrt{3}} \quad (18)$$

$$I_{i, verschoben} = I_i \pm \sigma_{I_i, Systematisch} \quad (19)$$

Mit diesen verschobenen Werten haben wir erneut die Lineare Regression durchgeführt. Den Systematischen Fehler von U auf R haben wir mit folgender Formel berechnet:

$$\Delta R_{U+} = \frac{1}{2}(|R_{U+} - R| + |R_{U-} - R|) \quad (20)$$

Unten sehen wir die angepassten Gerade, wobei die Messpunkte einmal um die Verschiebung der Spannung um $+\sigma_{U_i-syst}$ und einmal für die Verschiebung der Spannung um $-\sigma_{U_i-syst}$.

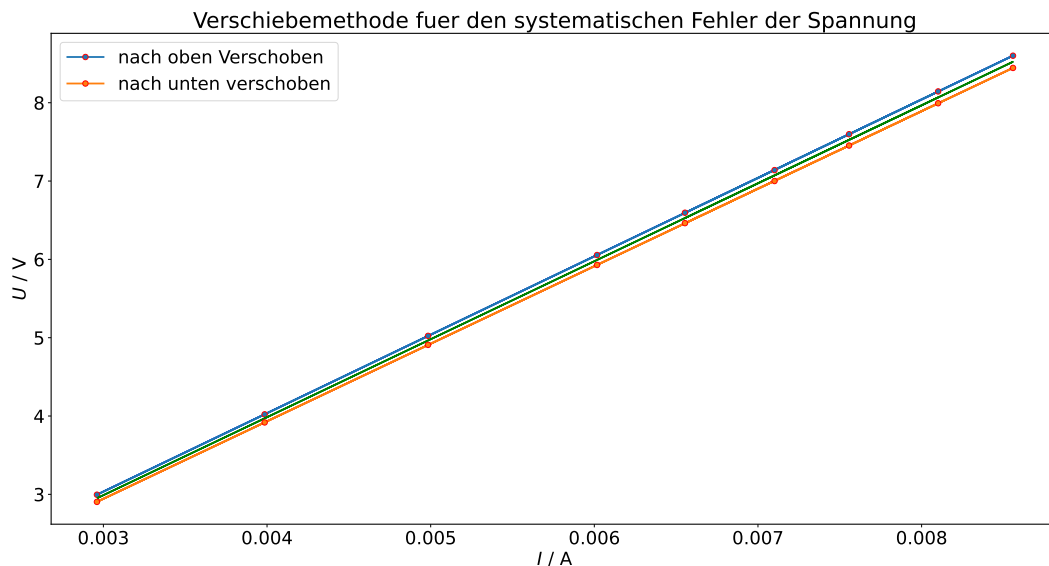


Abbildung 7: Verschiebung der Spannung um $\pm\sigma_{U_i-syst}$

Das gleiche haben wir für den Systematischen Fehler von I auf R gemacht. Anschließend haben wir die systematischen Fehler quadratisch addiert, um den Gesamtsystematischen Fehler auf R zu erhalten. Dieser war $R_{Systematisch} = 12.9\Omega$.

$$\text{Damit ergibt sich: } R = (995.6 \pm 0.8_{\text{stat}} \pm 12.9_{\text{syst}}) \Omega$$

Aufgabe 4 Lade- und Entladekurven des Kondensators mit dem Oszilloskop

Beschreiben Sie den Versuchsaufbau unter Verwendung eines Schaltbildes. Beschreiben Sie die Versuchsdurchführung unter Angabe der relevanten Messwerterfassungseinstellungen. Zeigen Sie für den Lade- und den Entladevorgang jeweils ein Bild der gemessenen Spannungsverläufe auf dem Oszilloskopschirm. Lesen Sie mithilfe der Cursor jeweils die Zeitkonstante ab. Berechnen Sie den gewichteten Mittelwert der Zeitkonstanten. Berechnen Sie daraus die Kapazität und geben Sie sie mit statistischer und systematischer Messunsicherheit an.

Aufbau der Messung mit Oszilloskop

Für diesen Teil des Gesamtversuchs benötigen wir folgende Geräte:

Verwendete Geräte:

- TDS 200 4B Oszilloskop
- Sensor CASSY 2
- Rastersteckplatte DIN A4
- $10 \mu\text{F}$ Kondensator
- $1 \text{ k}\Omega$ Widerstand
- Brückenstecker
- 3 Kabel rot / blau
- Taster

Wir haben uns entschieden den gesamten Versuch mit einem $10 \mu\text{F}$ Kondensator und einem $1 \text{ k}\Omega$ Widerstand durch zu führen. Hierfür haben wir uns entschieden, da wir so eine größere Zeitkonstante erhalten. Dies ist erwünschenswert, da der Lade/Entlade Vorgang so langsamer verläuft. Somit haben wir eine Höhere Auflösung der Messungen dies verringert den Messfehler. Allerdings führt dies auch dazu, dass nur wenig Strom durch den Widerstand fließt. Ein großer Widerstand erhöht also auch den Fehler auf den Strom den wir später mit dem Sensor CASSY messen, da dieses nicht beliebig kleine Ströme messen kann. Unsere Annahme ist hier, das ein größeres τ (Zeitkonstante) über eine größere Genauigkeit des Stroms zu wählen ist, da wir somit eine höhere Zeitauflösung haben. Hier ist ein größeres τ (Zeitkonstante) jedoch über eine größere Genauigkeit des Stroms zu wählen. Noch größere Widerstände hätten jedoch keinen Sinn ergeben, da so der Strom nicht mehr gut messbar gewesen wäre.

Durchführung der Messung mit Oszilloskop

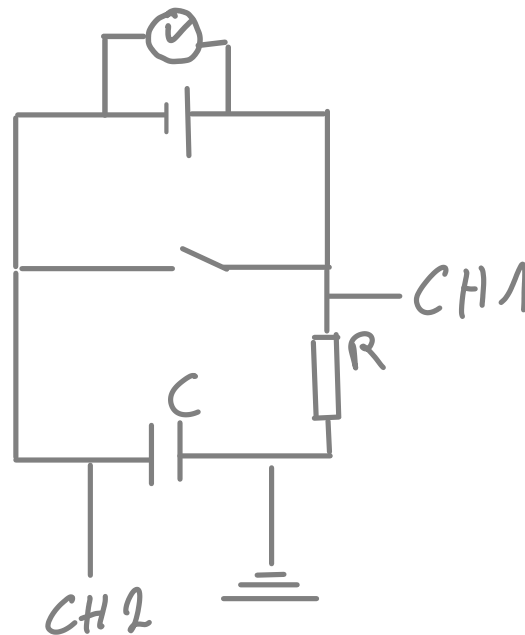


Abbildung 8: Schaltplan Oszilloskop

In der obigen Skizze können Sie das Schaltbild zu dem Versuch sehen. Auf dem Steckbrett werden hierfür Kondensator und Widerstand in Reihe gesteckt. Parallel zu dem Kondensator wird ein Schalter eingebaut, der bei Bedarf den Stromkreis schließen bzw. öffnen kann. Ebenfalls parallel wird eine Spannungsquelle angeschlossen. Hier wird das Sensor CASSY als Spannungsquelle verwendet. Wir haben außerdem noch mit dem Sensor CASSY die angelegte Spannung gemessen. An diese Schaltung wird das Oszilloskop angeschlossen. Für beide Channel wurde die gleiche Masse verwendet, welche zwischen Kondensator und Widerstand angeschlossen war. Channel 1 & 2 werden wie im Schaltbild angeschlossen. So wird auf CH2 die Spannung die über den Kondensator abfällt gemessen, und auf CH1 die Spannung die über den Widerstand abfällt.

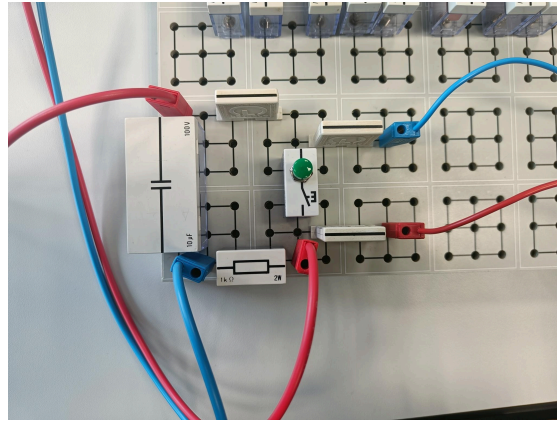


Abbildung 9: Bild der Schaltung

Bei der Versuchsdurchführung haben wir wie im Aufbau bereits beschrieben den Versuch aufgebaut. Um die Spannung ein zu stellen und die Auflösung des Oszilloskop richtig zu wählen, haben wir das Sensor CASSY verwendet um die Eingangsspannung zu bestimmen.

Da unser Widerstand eine Leistungsgrenze von 2W hat, und das CASSY maximal 0.1A liefert, muss die Spannung unter 10V liegen. Um die maximale Auflösung des Oszilloskops auszunutzen, sollte das Signal den gesamten Werteberich auf dem Bildschirm ausfüllen. Die Einstellung der y-Achse mit Darstellung bis 8V lag am dichtesten unter 10V. Um auch kleine schwankungen nach oben noch aufzeichnen zu können, haben wir 7.1V gewählt.

Zur Einstellung des Oszilloskops haben wir zunächst die Entladung des Kondensators betrachtet.

Entladen des Kondensator

Hierfür haben wir den Trigger auf CH2 auf 7.00V steigende Flanke gestellt. Steigende Flanke ist hier sinnvoll, da auf Grund der Polung die Spannung am Kondensator negativ ist. Somit steigt die Spannung asytmotisch zu null. Zum starten der Messung haben wir den in der Schaltung verbauten Taster betätigt. So konnten wir eine erste Entladung aufzeichnen. Hierraus konnten wir dann die Restlichen Einstellungen schließen. Ziel war es, möglichst viel vom Entladevorgang auf zu zeichnen, und einen kurzen Zeitraum vor dem Entladen. wir haben die Zeiteinstellungen so gewählt, dass 5τ auf unserem Bildschirm angezeigt werden. So sind wir sicher gegangen, dass wir nur den relevanten Teil der Entladung aufzeichnen, und nicht die Zeitspanne in welchem die Spannungen asytmotisch gegen null streben.

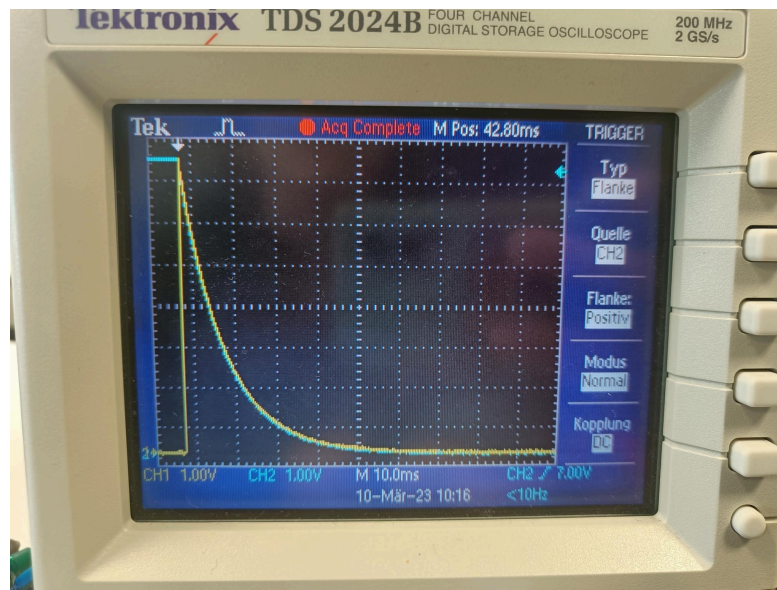


Abbildung 10: Triggermenü des Oszilloskops

Oben sehen sie ein Bild des Triggermenüs des Oszilloskops. Hier haben wir sämtliche Triggereinstellungen für das Messen des Entladens eingestellt. Hier sieht man auch, dass wir das Signal von CH2 invertiert haben, um dieses angenehmer auf dem Bildschirm darstellen zu können. So konnten wir außerdem den Nullpunkt der beiden Spannungsverläufe optisch an die ungefähr gleiche Stelle legen. Der folgenden Tabelle können sie die Einstellungen entnehmen die wir am Oszilloskop vorgenommen haben. Diese Einstellungen sind spezifisch für den Entladevorgang.

Chanel	Kästchen	M	Trigger	Flanke
CH1	1.00V	5.00ms	—	—
CH2	1.00V	5.00ms	7.00V	positiv

Tabelle 6: Übersicht der Einstellungen am Oszilloskop

Wir haben die Messung der Entladung mit unseren neuen Einstellungen wiederholt, um zu überprüfen ob diese passen und reproduzierbar sind.

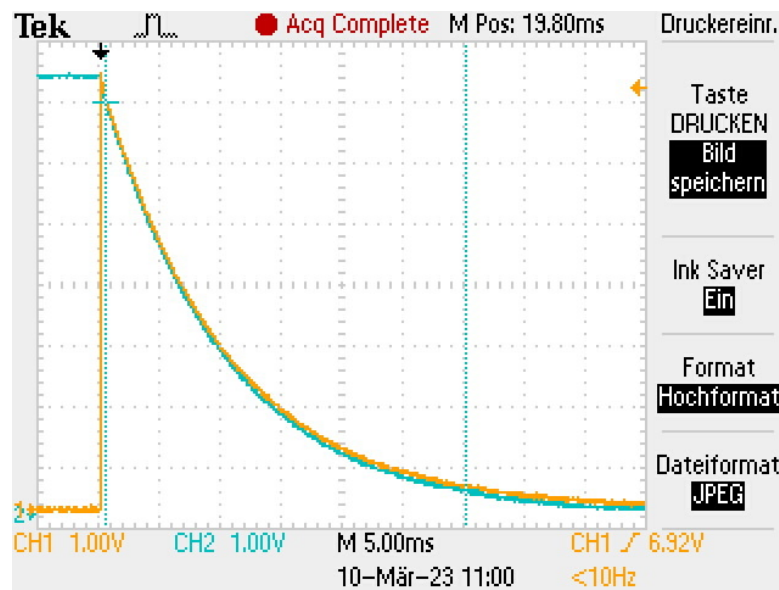


Abbildung 11: Entlade Vorgang vom Widerstand und dem Kondensator

Oben Abgebildet ist der Spannungsverlauf am Kondensator (blau) und am Widerstand (orange) während des Entladens. Hier ist zu beachten, das Channel 2 (der Kondensator) invertiert ist in der Darstellung. Dies haben wir gemacht, damit wir die Nulllinien angenehm aufeinander legen können. Diese Entladekurven entsprechen dabei unserer Erwartung, da die Spannung am Kondensator abnimmt und die Spannung am Widerstand anfangs groß ist, und dann gegen 0 läuft. Nach Augenmaß verlaufen diese auch beide Exponentiell, was den in den Grundlagen beschriebenen Entladevorgang entspricht.

Zur bestimmung von τ haben wir bei der Entladung insgesamt 4 Messungen durchgeführt. Jeweils 2 für Kondensator und Widerstand. Dies haben wir getan um zu überprüfen ob unsere Messungen reproduzierbar waren. Und um sicher zu gehen, dass unsere Messung kein Ausreißer sind.

Bei unseren Bildern vom Oszilloskop haben wir diese mit der Oszilloskop eigenen Funktion gemacht. Deshalb ist der Wert der Cursor auf den Bilder nicht mehr zu sehen, was uns erst im nachhinein aufgefallen ist. Wir haben aber alle Messwerte in unsrem Messprotokoll notiert.

Bestimmung des Offset

Zum bestimmen des Offsets für die Entladung des Kondensator haben wir sowohl den Wert der Asymptote bestimmt, wie auch die Rauschspannung am Widerstand. Um den Wert der Asymptote zu bestimmen, haben wir die dargestellte Zeit auf 10τ vergrößert, da man mit dieser Einstellung schon in einen Bereich kam, wo die Spannungswerte am Kondensator nicht mehr abgenommen haben, sondern geschwankt sind. Wir haben dann den Mittelwert der beiden Spannungswerte genommen, um die es geschwankt ist, da sie näherungsweise gleichverteilt sind.

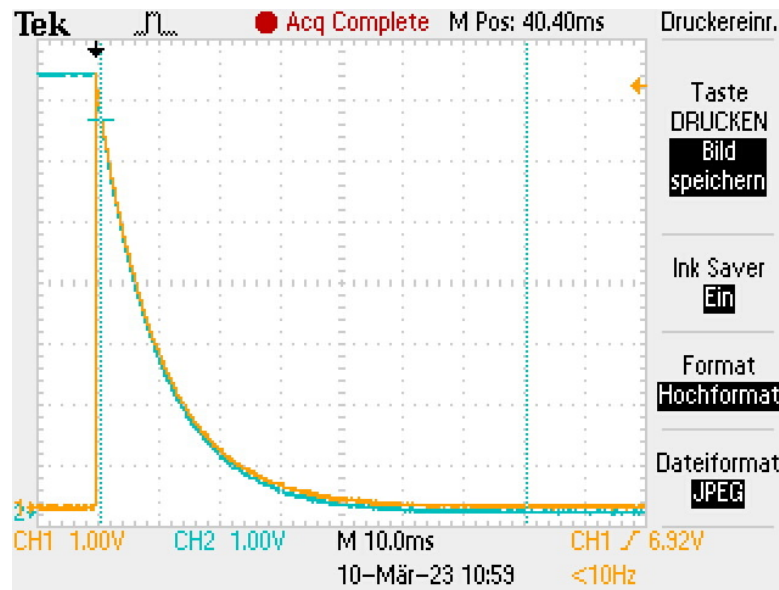


Abbildung 12: Bestimmung des Offsets für die Entladung des Kondensators mit Rauschen

Hier haben wir auch U_0 bestimmt indem wir mit dem Cursor das Signal von CH2 vor dem Begin des Eintladevorgangs abgetastet haben. Daraus ergab sich $U_0 = |7.22V|$ Hier hängt das Vorzeichen von der Polung ab. in unserem Fall war der Kondensator negativ geladen. (Im bild ist CH2 invertiert) Die Offsetspannung am Widerstand beim Aufladen des Kondensators haben wir wie für die vorherigen Offsetspannungen die Asymptote bestimmt.

Bauteil	Offset
Endladen Widerstand	$U_{off} = 0.04V$
Endladen Kondensator	$U_{off} = 0.02V$
Aufladen Widerstand	$U_{off} = -0.06V$
Aufladen Kondensator	$U_0 = -7.22V$

Tabelle 7: Übersicht der Einstellungen am Oszilloskop

Aufladen des Kondensators

Für die Messung des Aufladevorgangs mussten wir nur die Trigger Einstellungen ändern sonst konnten wir unsere Einstellungen übernehmen. In diesem Fall haben wir auch keins der Signale invertiert.

Chanel	Kästchen	M	Trigger	Flanke
CH1	1.00V	5.00ms	—	—
CH2	1.00V	5.00ms	-80.0mV	positiv

Tabelle 8: Übersicht der Einstellungen am Oszilloskop

Beim messen der Aufladung haben wir zunächst denn Schalter gedrückt und einige Sekunden gewartet, um sicher zu gehen, dass der Kondensator entladen war. Dann

haben wir den Schalter losgelassen und die Messung ist durch den Trigger automatisch gestartet. Hier haben wir ebenfalls erst eine Testmessung durchgeführt, und dann wie beim entladen für Kondensator und Widerstand 2 Messungen zur Bestimmung von τ gemacht.

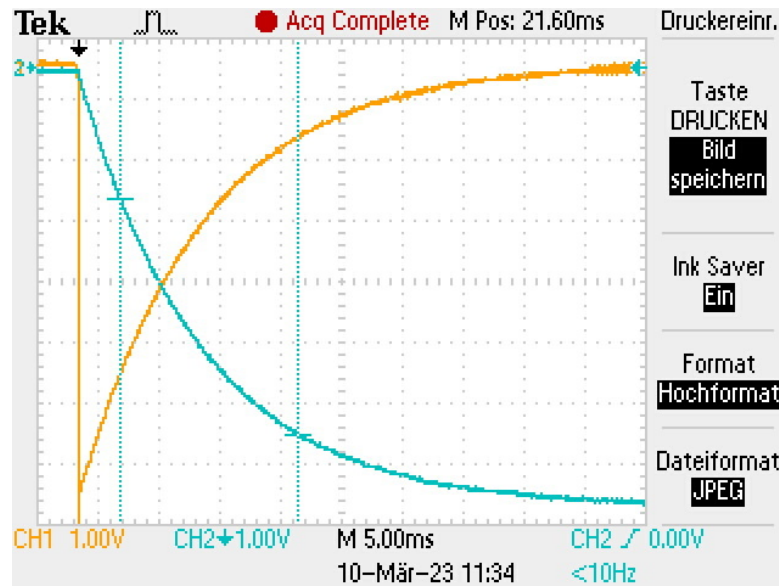


Abbildung 13: Aufladen Vorgang vom Widerstand und dem Kondensator

Die Abbildung zeigt den Spannungsverlauf von einem typischem Aufladevorgang. Hier haben wir nichts invertiert, da wir auch so die gleiche Nulllinie setzen konnten, und trotzdem das gesamte Display zum ablesen nutzen konnten. Dabei ist allerdings zu beachten, dass wir die Null an das obere Ende gesetzt haben, da aufgrund unserer Verkabelung die Spannung am Widerstand sowie am Kondensator negativ waren, was für die Auswertung allerdings irrelevant ist. Die Kondensatorspannung entfernt sich dabei immer weiter von der Nulllinie, und die Spannung am Widerstand macht anfangs einen Sprung und fällt dann gegen Null ab. Nach Augenmaß verlaufen beide Kurven exponentiell, was auch den exponentiellen Gleichungen für den Aufladevorgang entspricht.

Bestimmung von τ

Zur Bestimmung von τ haben wir mit den Cursors je zwei Messwerte abgelesen. Mithilfe der Formeln, die wir bereits in den Grundlagen eingeführt haben, konnten wir dann die Zeitkonstante bestimmen. Diese erhalten wir, indem wir den Quotienten von unserem Wertepaar nehmen und dann nach τ umformen. Daraus ergibt sich:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln \left(\frac{U_1 - U_{off}}{U_2 - U_{off}} \right)} \quad (21)$$

Wobei wir hier noch den möglichen Offset beachten müssen.

Die obige Formel können wir jedoch nicht für den Aufladevorgang des Kondensators verwenden, da die Funktion, die diesen beschreibt, von der Form $y = 1 - e^x$ ist. In diesem Fall erhalten wir für die Zeitkonstante:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln \left(\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} \right)} \quad (22)$$

Somit können wir die Zeitkonstante für unsere Messungen bestimmen. Auf Grund der Ablesegenauigkeit kommt jedoch auf diesen noch ein Fehler.

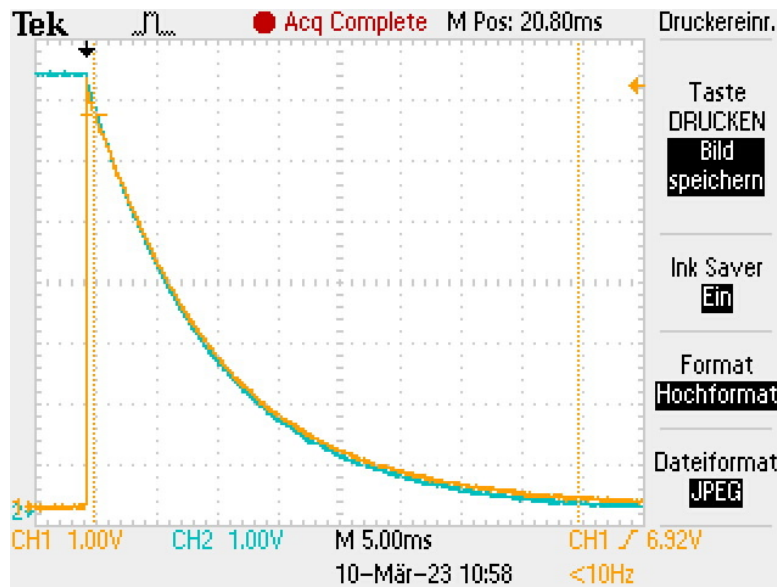


Abbildung 14: Bestimmung der Genauigkeit des Cursors

Beim variieren des Cursors um einen Schritt in der Zeit haben wir festgestellt, dass die Genauigkeit des Cursors bei $20 \mu s$ liegt. Beim Variieren der Spannung haben wir eine Schrittweite des Ablesens von $0.04V$ festgestellt. Diese Ablesegenauigkeit muss durch $\sqrt{12}$ geteilt werden, um daraus unseren Fehler auf t und U zu erhalten. Dieses lässt sich auch auf alle Auf und Endlademessungen übertragen, da wir immer die gleichen Zoomeinstellungen im Fenster hatten, außer für die Offsetbestimmung.

Den untenstehenden Rechnungen können sie somit unsere Fehler auf U und t entnehmen.

$$\frac{20 \cdot 10^{-6} s}{\sqrt{12}} = 5.774 \cdot 10^{-6} s \quad \frac{0.04V}{\sqrt{12}} = 0.0115V \quad (23)$$

Für die Bestimmung des Fehlers auf τ haben wir den Fehler auf Grund der Ablesegenauigkeit statistisch angenommen. Wobei wir eine Ungenauigkeit auf das ablesen der Zeit als auch auf die Amplitude haben. Die Fehlerfortpflanzung lautet somit:

$$\sigma_{\tau}^2 = \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right]_{x=\mu} V_{ij}^2 \quad (24)$$

Wobei dies die Form für eine Größe mit zwei Variablen ist, diese kann jedoch problemlos auf n Variablen erweitert werden. Wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte zu unserem Fehler eine Gaußverteilung ist. Des weiteren gehen wir davon aus, dass diese unkorreliert sind und sich somit der Fehler auf τ vereinfacht zu.

$$\sigma_{\tau}^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right]_{x=\mu}^2 \sigma_i^2 \quad (25)$$

Wobei hier darauf geachtet werden muss, τ von 4 Variablen abhängig ist $\tau(t_1, t_2, U_1, U_2)$. Weshalb hier nach insgesamt vier Variablen abgeleitet werden muss. Jedoch ist der Fehler auf t_1 , t_2 und auf U_1 , U_2 jeweils gleich. Somit ergibt sich für unser spezifisches Problem folgende Form für die Fehlerfortpflanzung.

$$\sigma_{\tau}^2 = \left[\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right]^2 \sigma_{t_1}^2 + \left[\frac{\partial \tau}{\partial t_2} \right]^2 \sigma_{t_2}^2 + \left[\frac{\partial \tau}{\partial U_1} \right]^2 \sigma_{U_1}^2 + \left[\frac{\partial \tau}{\partial U_2} \right]^2 \sigma_{U_2}^2. \quad (26)$$

Dieser Fehler muss für jede unserer Messungen neu berechnet werden, da die Formel von den jeweiligen t_1, t_2, U_1, U_2 Abhängt. Diese und alle folgenden Rechnungen, so wie Graphen, haben wir mit dem Programm tau-oszilloskop.py erstellt

Messdaten des Oszilloskop und Diskussion dieser

Hier eine Übersicht von unsern finalen Messdaten. Dabei haben wir die Offsets immer vor der entsprechenden Messung bestimmt. Bei jeder Messreihe haben wir während der Messung τ überschlagen (ohne Fehler) um zu sehen, ob die Messung sinnvoll ist. Hier haben wir beim ausrechnen vom Tau den Offset berücksichtigt. U_0 ist hierbei die Spannung, welche wir am Kondensator im Aufgeladenen Zustand mit dem Oszilloskop gemessen haben.

Nr.	Messung	Zeit	Spannung	τ
1.	1. Endladen Widerstand	$t_1 = 600\mu s$ $t_2 = 40.4ms$	$U_1 = 6.64V$ $U_2 = 160mV$	$(9.93 \pm 0.24)ms$
2.	2. Endladen Widerstand	$t_1 = 600\mu s$ $t_2 = 40.4ms$	$U_1 = 6.44V$ $U_2 = 160mV$	$(9.93 \pm 0.24)ms$
3.	1. Endladen Kondensator	$t_1 = 400\mu s$ $t_2 = 31.2ms$	$U_1 = 6.76V$ $U_2 = 320mV$	$(9.90 \pm 0.13)ms$
4.	2. Endladen Kondensator	$t_1 = 400\mu s$ $t_2 = 31.2ms$	$U_1 = 6.76V$ $U_2 = 320mV$	$(10.30 \pm 0.13)ms$
5.	1. Aufladen Widerstand	$t_1 = 4.5ms$ $t_2 = 22.6ms$	$U_1 = -4.08V$ $U_2 = -720mV$	$(9.99 \pm 0.11)ms$
6.	2. Aufladen Widerstand	$t_1 = 4.5ms$ $t_2 = 22.6ms$	$U_1 = -4.08V$ $U_2 = -680mV$	$(9.69 \pm 0.11)ms$
7.	1. Aufladen Kondensator	$t_1 = 3.4ms$ $t_2 = 18.0ms$	$U_1 = -2.16V$ $U_2 = -6.04V$	$(10.03 \pm 0.09)ms$ $U_0 = -7.22V$
8.	2. Aufladen Kondensator	$t_1 = 3.4ms$ $t_2 = 18.0ms$	$U_1 = -2.16V$ $U_2 = -6.04V$	$(10.03 \pm 0.09)ms$ $U_0 = -7.22V$

Tabelle 9: Übersicht der Einstellungen am Oszilloskop

Am Anfang der Messung haben wir uns dafür entschieden, in einem möglichst großem Zeitintervall zu messen, da wir so weniger Unsicherheit auf die Zeit haben, und auch

kleine Schwankungen beim Entladen ausgleichen können. Dabei haben wir darauf geachtet, dass der erste Cursor mindestens $\frac{1}{20}\tau$ nach dem entlade beginn liegt. Da wir ein τ von 10ms haben, und unsere Analyse der Rohdaten auf dem Oszilloskop ergeben hat, dass wir dort keine Effekte des Schalters mehr haben, fanden wir dieses eine gute Annahme. Der Endpunkt der Messung haben wir dabei mindestens 120mV über der Grenzspannung gewählt, damit wir weit von Rauschen entfernt sind.

Während der Messung haben wir gemerkt, dass bei so kleinen Spannungen an der rechten Intervallsgrenze, die Ableseungenauigkeit der Spannung groß wird. Wir werden also wengier Messfehler haben, wenn wir in einem kleineren Intervall messen. Dieses haben wir ab Messung 3 umgesetzt, wobei ab Messung 5 wir beim Lade Vorgang (Messung 5-8) den Startpunkt etwas weiter weg gewählt haben vom Anfangszeitpunkt.

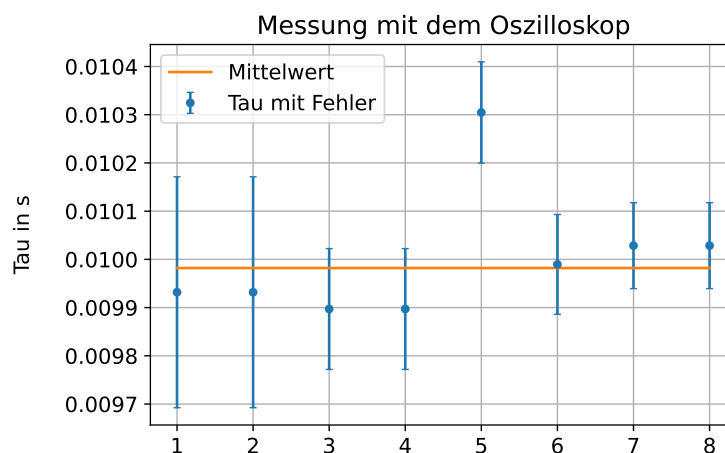


Abbildung 15: Tau von allen Messung mit Statistischem Fehler

Wie in dem Plot zu sehen ist, ist der Fehler auf τ durch unser kleiner gewähltes Messintervall ab Messung 3 deutlich geringer geworden. Unser erwartetes τ von 10ms liegt also für alle Messungen, abgesehen von Messung 5, im Rahmen des Messfehlers. Da dieser deutlich über dem von uns erwarteten Wert liegt, haben wir ihn in der folgenden Rechnung exkludiert. Der gewichtete Mittelwert ist dann: $\tau = (9.98 \pm 0.044)\text{ms}$.

Der von uns bestimmte Widerstand geht hier nur mit einer Statistischen Unsicherheit ein, da egal wie oft man das Experiment am Oszilloskop durchführt, sich die Unsicherheit auf ihn nicht ändert. Dieser ist die Addition von dem Statistischen und Systematischen Fehler aus dem Versuch der Bestimmung des Widerstandes. $R = (995.5 \pm 12.2)\Omega$

Um nun die Kapazität mit Unsicherheiten zu berechnen, müssen die Fehler von der Zeitkonstante und dem Widerstand fortgepflanzt werden. Dabei stammt der Statistische Fehler auf die Kapazität nur von τ und der Systematische von R . Für den Statistischen Fehler verwenden wir die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung und den Zusammen-

$$\text{hang } C = \frac{\tau}{R}$$

$$\sigma C_{\text{Statistisch}} = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_\tau^2} \quad (27)$$

$$\sigma C_{\text{Statistisch}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \sigma_\tau^2} = 0.045 \mu F \quad (28)$$

Für die Systematische Unsicherheit haben wir die ebenfalls die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung verwendet.

$$\sigma C_{\text{Systematisch}} = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial R} \sigma_R\right)^2} = 0.123 \mu F \quad (29)$$

Damit ergibt sich für die Kapazität mit Unsicherheiten:

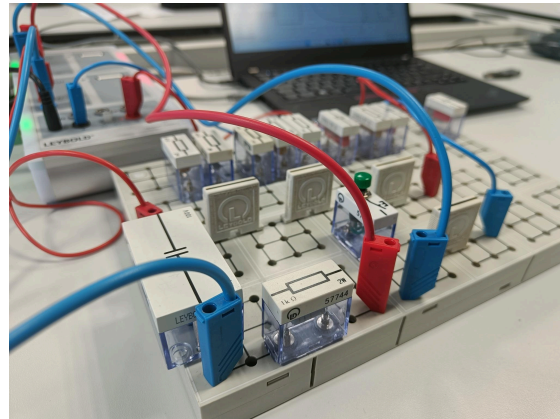
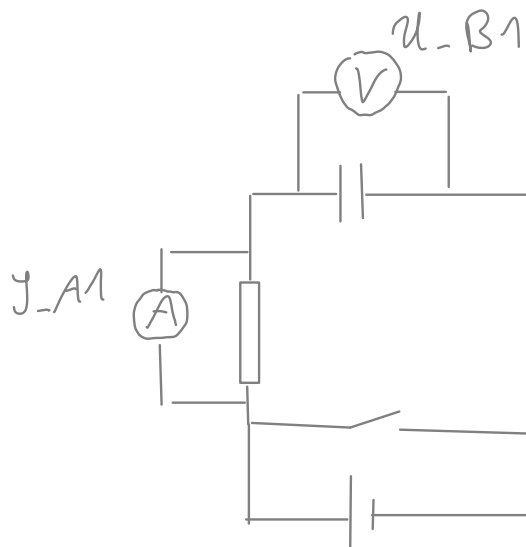
$$C = (10.027 \pm 0.045_{\text{statistisch}} \pm 0.123_{\text{systematisch}}) \mu F \quad (30)$$

Aufgabe 5 Lade- und Entladekurven des Kondensators mit Casy

Zeigen Sie für den Lade- und den Entladevorgang jeweils ein Bild des Spannungsverlaufs am Kondensator und des Lade- bzw. Entladestroms. Korrigieren Sie erforderlichenfalls den Spannungs- und/oder Strom-Offset. Transformieren Sie die Rohdaten geeignet in logarithmische Größen und bestimmen Sie mittels linearer Regression die Zeitkonstante. Beschreiben Sie, wie Sie die Messunsicherheiten behandeln. Berechnen Sie das gewichtete Mittel und geben Sie Ihr Endergebnis für die Kapazität mit statistischer und systematischer Messunsicherheit an.

Aufbau und Durchführung der Messung mit CASSY

Für die Bestimmung der Kapazität, betrachten wir mit CASSY wieder den Lade und Entladevorgang des Kondensators. Hier ist der Aufbau der Schaltung sehr ähnlich zu der beim Oszilloskop, jedoch muss das CASSY anders angeschlossen werden. Wir messen außerdem am Widerstand die Stromstärke, und nicht die Spannung.



(a) Schaltbild für die Messung mit CASSY

(b) Bilder der Schaltung

Abbildung 16: Schaltung zur Bestimmung der Kapazität mit Cassy

Der oben stehenden Skizze und Bild können Sie den Aufbau der Schaltung entnehmen. Hier ist zu beachten, dass die Spannung am Kondensator parallel gemessen wird, und der Strom am Widerstand in Reihe. Dabei muss der Widerstand sich in dem Schaltkreis befinden welcher geschlossen wird wenn man den Schalter betätigt. Die Spannung wird über Input B des CASSY gemessen, die Stromstärke über Input A. Für die Messung haben wir die Selben Messwertaufzeichnungseinstellungen wie für den Widerstand verwendet. In diesem Fall haben wir die Messung mit einem Trigger gestartet, diesem musste angepasst werden, abhängig davon ob wir den Lade oder Entladevorgang messen wollten.

Messung	Intervall	Messzeit	Trigger	Messbereich
Laden	$50\mu\text{s}$	0.1s	UB1: 0.10V steigende Flanke	-10V - 10V -0.03A - 0.03A
Entladen	$50\mu\text{s}$	0.1s	8.90V fallende Flanke	-10V - 10V -0.03A - 0.03A

Tabelle 10: Messwertaufzeichnungseinstellungen bei der Messung des Kondensators mit CASSY

Wir haben auch einen Pritrigger verwendet von 500 Messpunkten. Dies ist sinnvoll, um die möglichen Offsets auf Strom und Spannung zu bestimmen. Für das Entladen des Kondensators haben wir diesen zunächst aufgeladen, und dann durch Drücken des Schalters die Entladung gestartet. Die Messung ist durch die Triggereinstellungen

automatisch gestartet. Für den Aufladevorgang, haben wir den Schalter erst einige Sekunden gedrückt gehalten, um sicher zu gehen, dass der Kondensator entladen ist, durch loslassen des Schalters startete die Messung.

Rohdaten

Hier ist ein typischer Entladeverlauf des Kondensator zu sehen, welche wir mit dem Program `Cassy_Kondensator` generiert haben. Im folgenden Führen wir alle Rechnungen und Erstellungen von Graphen mit diesem Programm aus.

Dabei ist hierbei keiner der Graphen invertiert. Der Graph des Stroms ist anfangs sowie am Ende 0, und nach einem anfänglichen Sprung nach Augenmaß exponentiell fällt. Die Spannung fällt dabei ebenfalls ca. exponentiell von der Anfangsspannung auf 0 ab. Auch ist in den Graphen der Pretrigger gut zu sehen.

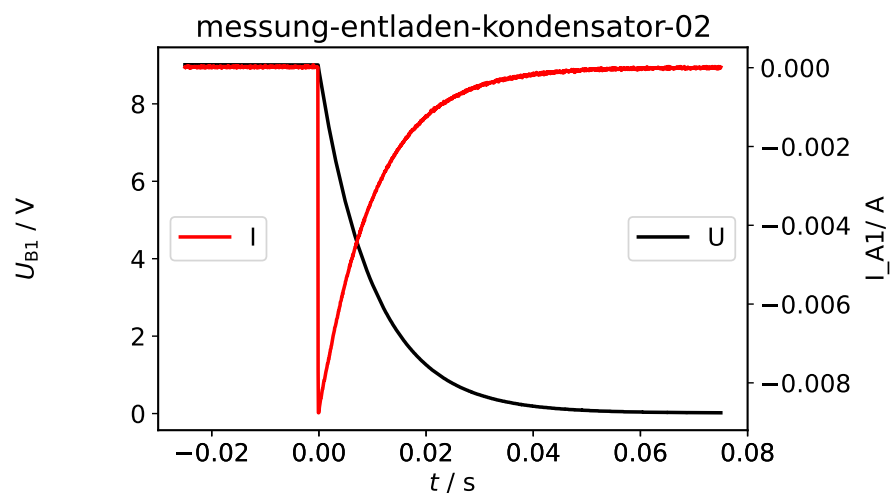


Abbildung 17: Beispielverlauf vom Entladevorgang

Unten ist ein Beispielhafter Spannungs und Stromverlauf vom Aufladen zu sehen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Achse für die Stromstärke hier anders skaliert ist als beim entladen. Die Stromstärke fällt auch hier nach einem Anfänglichem starken anstieg ca. exponentiell ab. Die Spannung steigt dabei auf die Grenzspannung an.

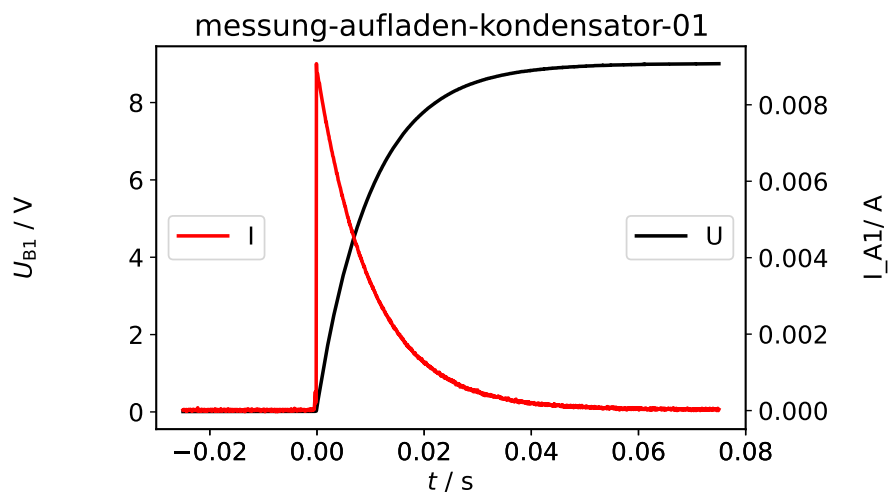


Abbildung 18: Beispielverlauf vom Ladevorgang

Bestimmung des Offsets auf Strom und Spannung

Zum bestimmen der Offsets des Stroms und der Spannung, am dem Kondensator, haben wir den Mittelwert der Datenpunkte genommen, welche wir vor dem Aufladevorgang aufgenommen haben. wir gehen davon aus, das alle Spannungswerte die angenommen werden gleich warscheinlich sind, somit ist das ein sinnvolles Vorgehen zur Bestimmung des Offsets. Da wir einen Pretrigger von 500 Messpunkten eingestellt hatten, haben wir dort genügend Datenpunkte um zu bestimmen wie weit der Strom bzw. die Spannung von der Nulllinie abweicht. Wir haben allerdings die letzten 10 Messpunkte nicht mit einbezogen, da dort der Aufladevorgang bereits startete. In der Graphik erkennt man gut, dass die 490 Messpunkte vor dem Aufladevorgang nur rauschen waren.

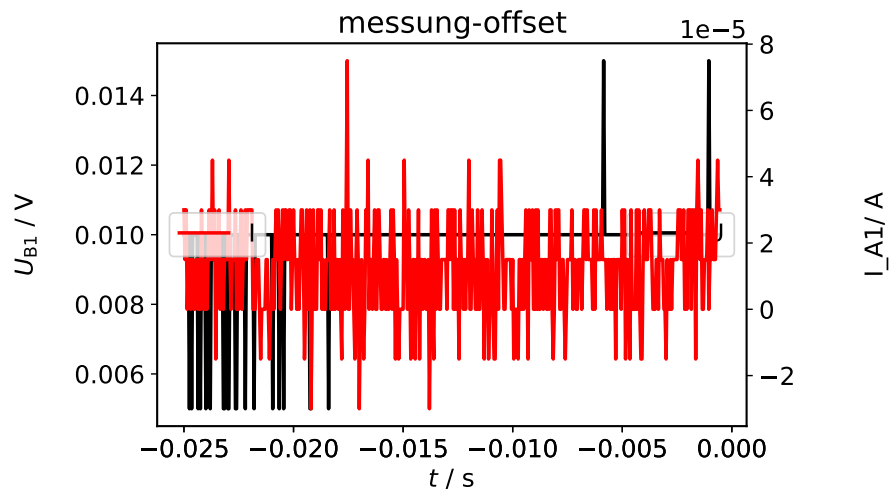


Abbildung 19: Messpunkte für die Offset bestimmung

Daraus kann der Offset auf den Strom und die Spannung bestimmt werden.

$$I_{Offset} = 1.22 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

$$U_{Offset} = 0.0098 \text{ V}$$

Für den Aufladevorgang des Kondensators ist ebenfalls U_0 von Relevanz. Also die Spannung welche der Kondensator hat wenn er komplett aufgeladen ist. Diese kann man den Daten bestimmen die wir vor dem Entladevorgang aufgezeichnet haben. Für die spätere Linearisierung der Daten, brauchen wir ebenfalls I_0 , der maximale Strom der fließt. Für diesen haben wir betragsmäßig das Maximum der Stromstärke genommen. Hier ist irrelevant ob man den Lade oder entladevorgang betrachtet.

$$I_0 = \text{Platzhalter A}$$

$$U_0 = 9.01 \text{ V}$$

Linearisierung der Messergebnisse

Ziel unserer Messung ist es aus den Lade und Entladekurven die Zeitkonstante τ zu bestimmen. Dies könnte man bestimmen, indem man eine Exponentialfunktion an die Datenpunkte anpasst. Da dies jedoch ein aufwändiges Verfahren ist, ist es hier einfacher die Daten zu linearisieren und dann an diese eine lineare Regression anzupassen. Da in unserem Fall die Spannungs und Stromwerte einer Exponentialfunktion folgen, müssen wir unsere Messwerte Logarithmieren, so wie die Fehler auf diese.

Da wir in unserer Messung der Ladevorgänge die gleichen Messwertserfassungseinstellungen verwendet haben wie bei der Bestimmung des Widerstands, können wir den statistischen Fehler den wir bei diesem auf Strom und Spannung bestimmt haben verwenden. In diesen fließen sowohl der Fehler Aufgrund der Digitalisierung ein, als auch Aufgrund der statistischen fluktuation der Spannungs und Stromwerte. Wie Sie in Tabelle 3 und 4 sehen können, sind die Fehler auf diese bei allen Werten für V ziemlich ähnlich. Also können wir für den Fehler auf die Spannungen und Ströme in den Ladevorgängen den Mittelwert dieser Fehler verwenden.

Wir transformieren unsere Messungen und Fehler nach folgender Vorschrift:

$$S = \ln(X) \quad \sigma_S = \frac{dS}{dX} \sigma_X \quad (31)$$

Dabei Transformieren wir Jeweils die Spannungs und Stromwerte. In den Grundlagen wurde bereits die funktionsvorschrift für diese eingeführt. Wobei wir hier noch ein möglichen Offset mitbeachten müssen. Daraus ergibt sich als Transformationsvorschrift für die Spannung und Stromwerte:

$$U_{lin} = \ln \left(\left| \frac{U_i - U_{off}}{U_0} \right| \right) \quad (32)$$

$$I_{lin} = \ln \left(\left| \frac{I_i - I_{off}}{I_0} \right| \right) \quad (33)$$

$$U_{linA} = \ln \left(\left| \frac{U_0 - U_i}{U_0} \right| \right) \quad (34)$$

Hier bezeichnet U_{lin} die linearisierten Werte. Die letzte Gleichung wird verwendet um die Spannungsdaten beim aufladen des Kondensators zu linearisieren. Der Aufladevorgang hat einen anderen funktionalen Zusammenhang.

Für die Lineare Regression verwenden wir die Fehler wie oben beschrieben, diese sind:

$$\sigma_U = 0.0014V$$

$$\sigma_I = 4.24 \cdot 10^{-6} A$$

Aus diesen Ergebnissen ergibt sich mit der Transformation folgende Vorschriften für die Fehler auf die Spannung und den Strom.

$$\sigma_{linU} = \frac{1}{U_i - U_{off}} \sigma_U \quad \sigma_{linI} = \frac{1}{I_i - I_{off}} \sigma_I \quad \sigma_{linU_A} = -\frac{1}{U_0 - U_i} \sigma_U \quad (35)$$

Für die Auswertung haben wir nicht das gesamte gemessene Intervall betrachtet, da man am Ende das Rauschen sehr deutlich sehen kann. Hier einmal eine Darstellung, für Spannung und Stromstärke wo das gesamte Intervall betrachtet wird.

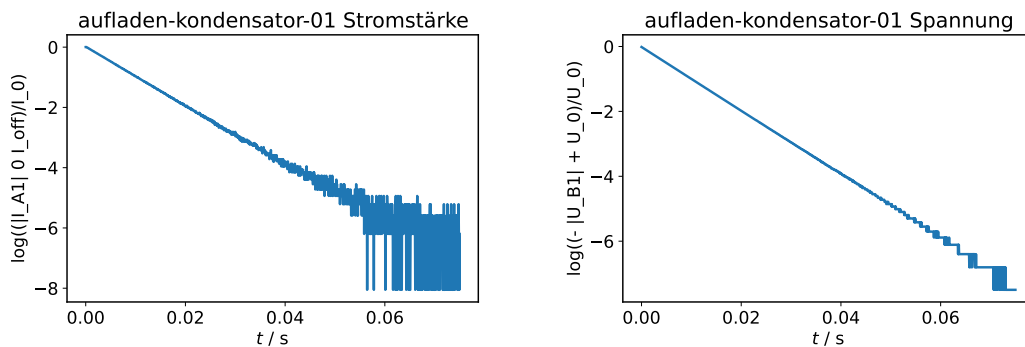


Abbildung 20: Darstellung der kompletten linearisierten Messwerte

Um die Randeffekte vom Schalter zu vernachlässigen haben wir die ersten 60 Messwerte nach dem Entlade/Aufladebeginn nicht berücksichtigt. Zudem sieht man, wie am Ende nur noch Rauschen ist. In der Linearen Regression haben wir die Messwerte 560

bis 610 betrachtet. In diesem Intervall sind 50 Messpunkte, und es ist $\frac{1}{4}\tau$ lang. Dies Intervall ist ausreichend groß für die Lineare Regression. Hier einmal Beispielhaft die linearisierten Daten von einer Messreihe in diesem Intervall. Hier kann man sehr gut sehen, dass in diesem Bereich die Werte einer Linearen Funktion folgen.

Bei dem Graphen der Stromstärke sehen wir, dass diese hier sehr stark fluktuiert. Dies kommt wie bereits mehrfach erwähnt von dem zu großen Messbereich.

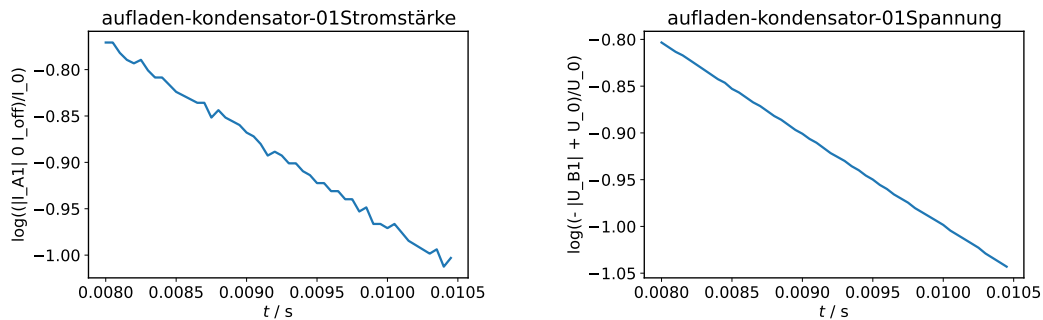


Abbildung 21: Darstellung der Messwerte mit ausgewählten Intervall

Auswertung mittels Linearer Regression

Wir haben insgesamt 8 Messungen durchgeführt, 4 Auflade Vorgänge und 4 Entlade Vorgänge. Hier haben wir auf unserem Messprotokoll und bei der Benennung der Dateien noch unterschieden ob die Messung zum bestimmen des Wertes am Widerstand oder am Kondensator gedacht war. Da wir aber in jeder Messreihe sowohl die Spannung am Kondensator als auch die Stromstärke am Widerstand aufgezeichnet haben, haben wir uns dazu entschieden für allen Messungen jeweils mit der Spannung am Kondensator ein τ zu bestimmen sowie ein weiteres aus der Stromstärke am Widerstand. Insgesamt werden wir dann 16 Werte für τ haben.

Die Statistischen Fehler auf τ können wir der Linearen Regression entnehmen. Die Steigung der Geraden a entspricht $a = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$. Damit können wir den Fehler auf τ quadratisch fort zu pflanzen. Somit ist der statistische Fehler auf τ :

$$\sigma_{\tau}^2 = \left(\frac{1}{a^2} \right)^2 \sigma_a^2 \quad (36)$$

In diesen Fehler fließen sowohl der Digitalisierungsfehler auf die Spannung und die Stromstärke ein als auch der Fehler auf die Zeit Aufgrund des gewählten Messintervalls. Auch der Fehler auf U und I Aufgrund der statistischen fluktuaton wird beachtet. Diese haben wir aus der Fehlerbestimmung die wir bei der Messung des Widerstands gemacht haben genommen und wie vorher erklärt fortgepflanzt und für die Linare Regression verwendet.

Zur Unterstützung unserer Annahme, dass die Qualität der Anpassung sich verbessert, wenn wir nur 50 Werte verwenden hier exemplarisch dargestellt die Lineare Regression mit 200 Messpunkten.

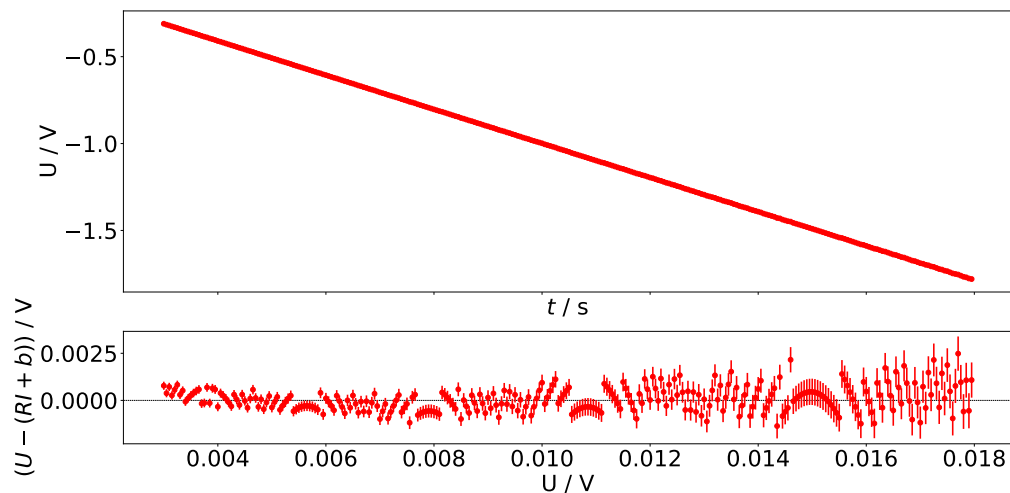


Abbildung 22: Darstellung der Messwerte mit ausgewählten Intervall

An der oberen Grafik kann man sehen, dass die Messwerte gegen Ende der betrachteten Zeitspanne deutlich mehr streuen als am Anfang. Die Qualität der Linearen Regression nimmt also ab wenn wir diese inkludieren. Im Folgenden verwenden wir für die Auswertung das oben diskutierte Intervall mit 50 Messpunkten.

Unten können sie Exemplarisch eine der Linearen Regressionen sehen welche wir für alle Messungen durchgeführt haben. In der oberen Grafik sind die Messwerte für Strom oder Spannung gegen die Zeit aufgetragen. In der unteren Grafik ist die Abweichung der Messpunkte im Verlauf der Zeit von der Anpassung dargestellt. Hier ist der Fehlerbalken auf die Punkte gegeben als $\pm\sigma_{linU}$ bzw. $\pm\sigma_{linI}$.

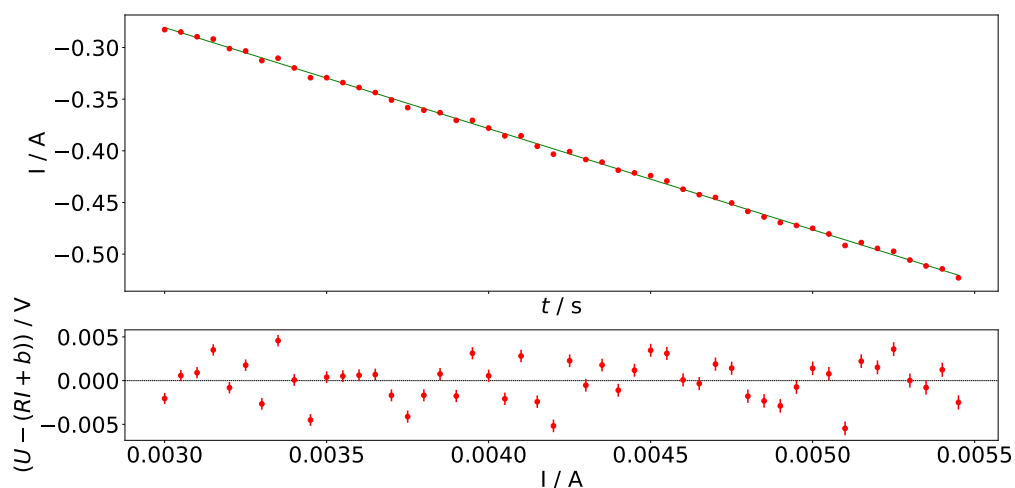


Abbildung 23: Lineare Regression mit Residuenplot für Stromstärke

Wie zu sehen ist für die Messung der Stromstärke, streuen die Messwerte gleichmäßig um die Anpassung und folgen keiner Systematik. Das bedeutet das wir die Offsets richtig bestimmt und verwenden haben. Allerdings ist der verwendete Fehler etwas zu klein abgeschätzt worden, weshalb die Linare Regression fast nirgendwo innerhalb des Fehlers liegt. Dies kann daran liegen, dass wir einen Fehler nicht betrachtet haben der noch mit Einfluss nimmt auf unsere Messung. Jedoch ist uns keiner eingefallen.

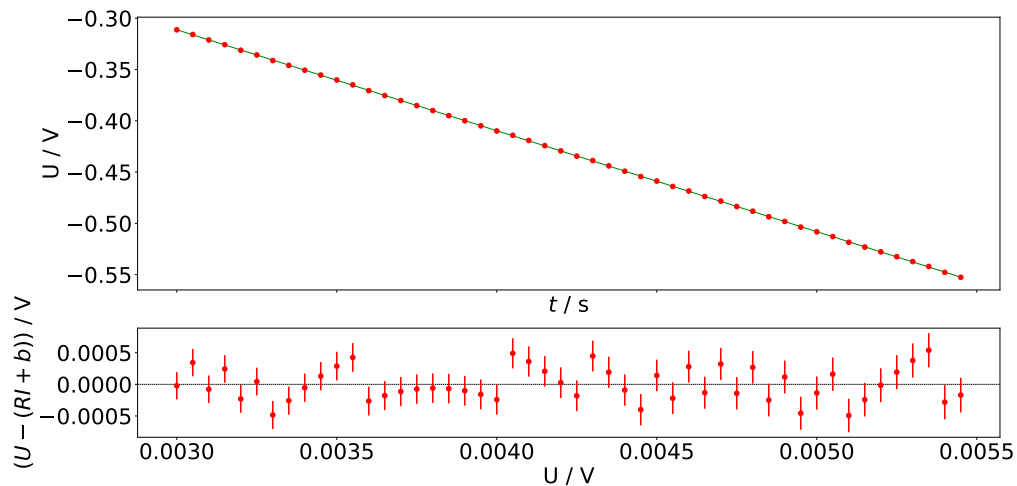


Abbildung 24: Darstellung der Messwerte mit ausgewählten Intervall

Dies ist die Anpassung an die gemessenen Spannungswerte an dem Kondensator. Diese streuen ebenfalls um die Lineare regression, und es ist keine Systematik fest zu stellen. Im Vergleich zu der Stromstärke passt hier jedoch der Fehler besser zu der Anpassung. Diese kann daran liegen, dass wir bei der Spannung das Messintervall besser ausgenutzt haben. Da wir für die Lineare Regression nur Datenpunkte vom Anfang des Lade/Entladevorgangs verwendet haben, liegen diese noch rellativ nahe an der Bereichsobergrenze.

Somit ist davon aus zu gehen, dass wir für beide Messungen gute Mittelwerte auf τ erhalten werden, jedoch die Ungenauigkeit bei der Strommessung größer sein wird.

Aus der Linearen Regression erhalten wir folgende Werte für die Zeitkonstante und deren Fehler. Wir geben hier auch für alle Lineare Regressionen deren $\frac{\chi^2}{ndof}$ an, zur prüfung der Qualität dieser Anpassungen.

Messung	τ in s	σ_τ in μs	$\frac{\chi^2}{ndof}$
Aufladen	0.0101	4.9	1.5
Aufladen	0.0102	4.9	1.2
Aufladen	0.0102	4.9	1.6
Aufladen	0.0101	4.9	1.7
Entladen	0.0102	4.9	1.4
Entladen	0.0102	4.9	1.4
Entladen	0.0102	4.9	1.3
Entladen	0.0102	4.9	1.3

Tabelle 11: τ aus der Linearen Regression der Spannungswerte

Messung	τ in s	σ_τ in μs	$\frac{\chi^2}{ndof}$
Aufladen	0.0101	14.6	7.9
Aufladen	0.0102	14.8	10.9
Aufladen	0.0101	14.4	10.5
Aufladen	0.0101	14.3	11.9
Entladen	0.0102	14.7	15.8
Entladen	0.0102	14.6	9.6
Entladen	0.0102	14.6	14.6
Entladen	0.0101	14.5	11.3

Tabelle 12: τ aus der Linearen Regression der Stromwerte

Diskussion der Ergebnisse

Wie man den Tabellen entnehmen kann, stimmen die Werte die wir für τ erhalten bei Spannungs und Strommessung ungefähr überein. Jedoch ist wie zu erwarten der Fehler auf des Ergebnis der Strommessung signifikant größer.

In der letzten Spalte der Tabelle sind jeweils die $\frac{\chi^2}{ndof}$ für die Anpassungen gegeben. Dabei sind die Werte für die Lineare Regression der Spannung relativ nahe an eins. Dies war aus dem Residuenplot bereits zu erwarten. Somit können wir schließen, dass unsere Messungen und auch Auswertung des Spannungsabfalls am Kondensator nahe an der Realität sind. Auch der Fehler auf τ liegt hier bei $5 \mu s$ was eine Abweichung von etwa 0.05% entspricht. Das Ergebnis auf τ ist also sehr genau wenn man nur den Statistischen Fehler betrachtet.

Im Fall der Linearen Regression der Stromstärke kann man der Tabelle entnehmen, dass das $\frac{\chi^2}{ndof}$ etwa 15 ist.

Die Anpassung also nicht gut ist. Dies konnten wir bereits dem Residuenplot der Linearen Regression entnehmen. Dort haben wir auch bereits diskutiert, was mögliche Ursachen sind. Die Wahrscheinlichste Fehlerquelle ist jedoch nach wie vor der Messbereich der Stromstärke.

Im Folgenden verwenden wir das gewichtete Mittel aller τ zur berechnen der Kapazität. Zwar ist der Fehler auf τ größer wenn wir das Ergebniss aus der Messung von Strom

und Spannung verwenden. Der Beitrag dieses Statistischen Fehlers ist jedoch im Vergleich zum Systematischen Fehler der aus der Bestimmung des Widerstands kommt vergleichsweise klein.

Daraus ergibt sich das Gewichtete Mittel zu:

$$\tau = (10.16 \pm 0.0016) \text{ms} \quad (37)$$

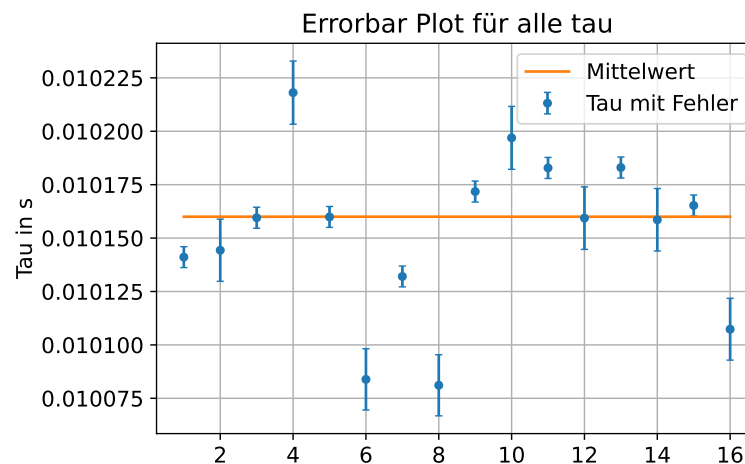


Abbildung 25: Darstellung der Tau in einem Residuenplot

In dem Residuenplot können Sie sehen, dass unsere τ um dem Mittelwert streuen (Orangene Linie). Nur in wenigen Fällen liegt jedoch die Abweichung innerhalb des Fehlers den wir auf τ bestimmt haben. Die Punkte mit den größeren Fehlerbalken sind aus der Strom Messung.

Zur Bestimmung der Kapazität müssen wir τ noch durch den Widerstand teilen. Hier geht der Fehler auf den Widerstand den wir bestimmt haben Systematisch ein. Dabei sind wir hier gleich vorgegangen, wie bei der Berechnung der Kapazität beim Oszilloskop, wobei auch für die Fehlerfortpflanzung die gleichen Formeln verwendet wurden.

$$C = (10.21 \pm 0.0017_{\text{statistisch}} \pm 0.125_{\text{systematisch}}) \mu\text{F} \quad (38)$$

Aufgabe 6 Zusammenfassung und Diskussion

Fassen Sie Ihre Ergebnisse zu den Kapazitäten zusammen und vergleichen Sie sie untereinander, mit den Messungen aus dem Vorversuch und mit den Herstellerangaben (Toleranz 5 %).

Vergleich und Diskussion aller Ergebnisse für die Kapazität

Methode	Kapazität	Fehler
Multimeter	$10.36 \mu F$	$\pm 0.259 \mu F$
Oszilloskop	$10.03 \mu F$	$(\pm 0.05_{\text{statistisch}} \pm 0.12_{\text{systematisch}}) \mu F$
Sensor CASSY	$10.21 \mu F$	$(\pm 0.002_{\text{statistisch}} \pm 0.13_{\text{systematisch}}) \mu F$
Hersteller Angabe	$10 \mu F$	$\pm 0.5 \mu F$

Tabelle 13: τ aus der Linearen Regression

Der Tabelle können sie entnehmen, dass alle Messergebnisse innerhalb der Tolleranz des Herstellers liegen. Wobei alle unsere Messergebnisse leicht über $10 \mu F$ liegen. Hier is zu bemerken, dass bei den Messungen mit dem Oszilloskop und dem Sensor CASSY die Systematischen Fehler überwiegen. Dies sind Fehler welche wir nicht verkleinern können, mit den gegebenen Messmöglichkeiten. Der Systematische Fehler stammt aus dem Widerstand. Hier hat der Systematische Fehler des CASSY den größten Einfluss auf den Fehler.

Wie zu erwarten, ist die Messung mit dem Digitalvoltmeter am ungenausten. Die größte Genauigkeit konnten wir mit dem Oszilloskop erzielen. Dies liegt daran, dass dieses einen kleineren systematischen Fehler hat. Wenn man die Fehler quadratisch addiert, fällt der Systematische Fehler stärker ins Gewicht, da dieser größer ist. Mit dem Sensor Cassy hatten wir dafür die größte Genauigkeit auf τ .