

Physikalisches Grundpraktikum I

Versuchsprotokoll: (Elektrizitätslehre)

10. März 2023

Mike Zingler, (432032)
Pascal Schröder, (434191)

Gruppe (B05)

Versuchsliste

1E1 Ladekurven eines Kondensators

1

Versuchsziele

Das Ziel des Versuches ist die korrekte Bestimmung der Kapazität eines Plattenkondensators mithilfe der Lade- bzw Entladekurven, die entstehen, wenn der Kondensator über einen Widerstand aufgeladen oder entladen wird. Dabei ist die Größe des Widerstandes und deren Unsicherheit möglichst genau zu bestimmen.

1E1 Ladekurven eines Kondensators

Aufgabe 1 Grundlagen

Knappe Beschreibung der theoretischen Grundlagen, Angabe der benötigten Formel(n), ohne Herleitung. Definition der verwendeten Formelzeichen.

Theoretische Grundlage des Experiments bietet die klassische Elektrodynamik. Hierbei ist der elektrische Strom I die Ladung ΔQ die in einem Zeitintervall Δt durch eine vorgegebene Fläche A fließt. Für zeitlich veränderliche Ströme erhält man also $I = \frac{dQ}{dt}$. Die Bezugsfläche A ist im Folgenden nicht weiter von Relevanz, da es für die Anwendung dieses Experiments völlig ausreicht die Ströme als linienförmig anzunehmen.

Für sog. 'Ohmsche Widerstände' ist der fließende Strom proportional zu der über dem Widerstand abfallenden Spannung $U = RI$, wobei die Proportionalitätskonstante R der Widerstand des Ohmschen Widerstandes ist. Die am Widerstand umgesetzte Leistung ist $P = UI = \frac{U^2}{R}$. Bei einem Kondensator ist die

Ladung Q mit der dieser geladen ist proportional zu der am Kondensator angelegten Spannung. Die Kondensatorspezifische Kenngröße der Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ gibt dabei an, wie stark der Kondensator bei einer vorgegebenen Spannung aufgeladen wird.

Ziel des Versuches ist es nun die Kapazität eines Kondensators mithilfe der (Ent-)Ladung über einem ohmschen Widerstand möglichst genau zu bestimmen. Für den Aufladungsprozess ergeben sich durch Anwendung der Maschenregel in der Theorie folgende Spannungsverläufe für die Spannung am Kondensator

$$U_C = U_0(1 - e^{-t/RC})$$

und für die Spannung am Widerstand

$$U_R = U_0e^{-t/RC}$$

wobei U_0 die Spannung der Spannungsquelle ist, mit der der Kondensator aufgeladen wird. Für die Entladung ergeben sich in der Theorie die Spannungsverläufe

$$U_C = U_0e^{-t/RC}$$

$$U_R = -U_0e^{-t/RC}$$

Mithilfe der Zeitkonstanten $\tau = RC$ lässt sich nun, nach Aufnahme des Auf- und Entladevorgangs, die Kapazität des Kondensators bestimmen.

In den Messreihen wurden Bauteile mit folgenden Herstellerangaben verwendet:

$$C = 10\mu F \quad R = 1000\Omega.$$

Somit ergäbe sich eine Zeitkonstante von $\tau = 10ms$ laut Herstellerangabe. Dies wird in den folgenden Messungen überprüft.

Aufgabe 2 Vorversuch: Charakterisierung der verwendeten Bauteile

Charakterisieren Sie die verwendeten Bauteile mit Digitalvoltmeter und Messbrücke.

Für das Charakterisieren der Bauteile haben wir ein Digitalvoltmeter verwendet. Hierfür haben wir das Digitalvoltmeter mit dem Widerstand bzw. dem Kondensator in Reihe geschaltet. Für die Widerstandsmessung muss der COM- und der Spannungsanschluss verwendet werden, für die Kapazität der COM- und Stromstärkeanschluss.

Ein exemplarischer Aufbau für die Messung des Widerstands im Labor ist in Abbildung 1 ersichtlich.

Für die Messung des Widerstands wurde der Messbereich auf $1k\Omega$ gestellt, für den Kondensator auf $20\mu F$.

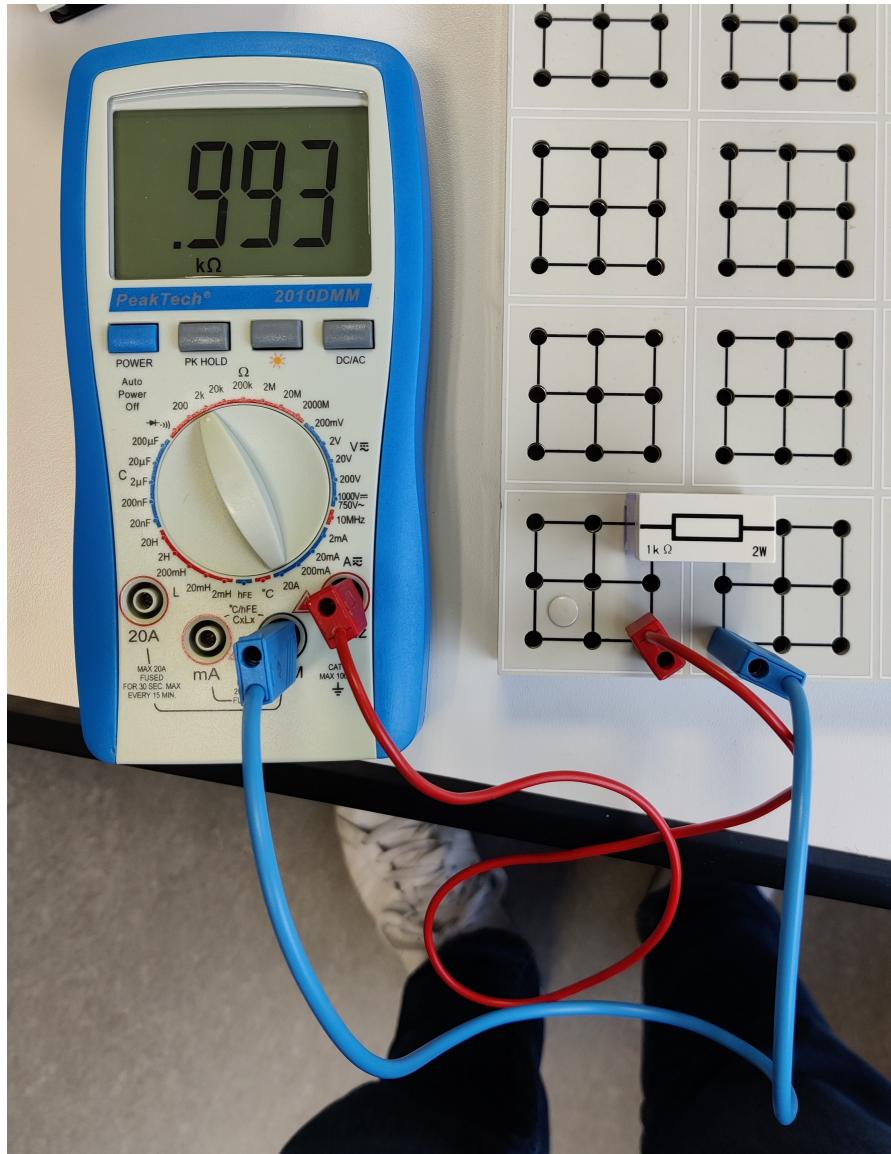


Abbildung 1: Verwendung des Digitalvoltmeters im Labor

Es ergibt sich gemeinsam mit der vom Hersteller angegebenen Genauigkeit:

$$R = 0.993 \pm 0.011 \text{ k}\Omega$$

$$C = 10.44 \pm 0.28 \mu\text{F}.$$

Aufgabe 3 Vorversuch: Bestimmung des Ohmschen Widerstands

Beschreiben Sie den Versuchsaufbau unter Verwendung eines Schaltbildes. Beschreiben Sie die Versuchsdurchführung unter Angabe der relevanten Messwerterfassungseinstellungen. Zeigen Sie exemplarisch die Häufigkeitsverteilungen für Spannung U und Strom I an einem Messpunkt und beschreiben Sie, wie Sie die statistischen Fehler für U und I bestimmen. Tragen Sie die Spannung U gegen den Strom I auf und bestimmen Sie aus der Steigung den Widerstand R und seine statistische Messunsicherheit.

Ermitteln Sie den systematischen Fehler mit der Verschiebemethode.

Für die Bestimmung des verwendeten Ohmschen Widerstandes verwenden wir die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung.

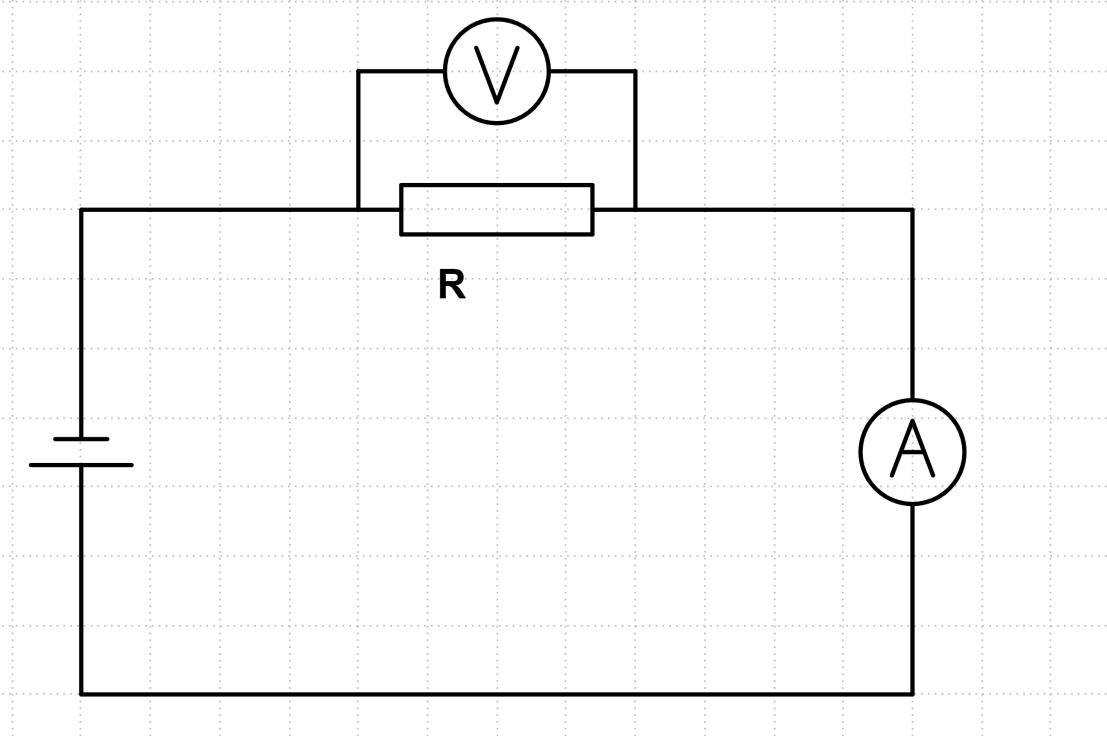


Abbildung 2: Schaltkreis zur Bestimmung des verwendeten Widerstandes.

Dabei wurde als Gleichspannungsquelle das Sensor Cassy 2 benutzt und über den Eingang U_{B1} die Spannung gemessen, die über dem Widerstand abfällt. Mithilfe des Eingangs I_{A1} haben wir weiterhin den im Stromkreis fließenden Strom gemessen. Die Realisierung des Experiments im Labor ist in Abbildung 3 dargestellt.

Für die Bestimmung des Widerstandes haben wir über das Drehpotentiometers der Spannungsquelle am Cassy verschiedene Spannungen eingestellt und jeweils die gemessenen Werte der Strom- bzw. Spannungsmessung notiert. Als Messeinstellungen haben wir die gleichen Einstellungen wie für die Messung der Auf- und Entladungskurven am Kondensator gewählt, d.h einen Messbereich von $-30V, 30V$ für die Spannung und $-0.03A, 0.03A$ für den Strom. Die Messzeit pro Messung haben wir als $100ms$ gewählt, s.d. wir bei einem Messintervall von $1\mu s$ pro Messung 10^5 Strom- und Spannungswerte erhalten. Mit den diskutierten Messeinstellungen haben wir insgesamt 17 Messungen bei verschiedenen Spannungen durchgeführt, wobei bei der Auswertung der Daten aufgefallen ist, dass wir bei Messreihe 15 einen Fehler beim exportieren der Daten gemacht haben. Somit haben wir an 16 verschiedenen Spannungen den im Kreis fließenden Strom und die über dem Widerstand abfallende

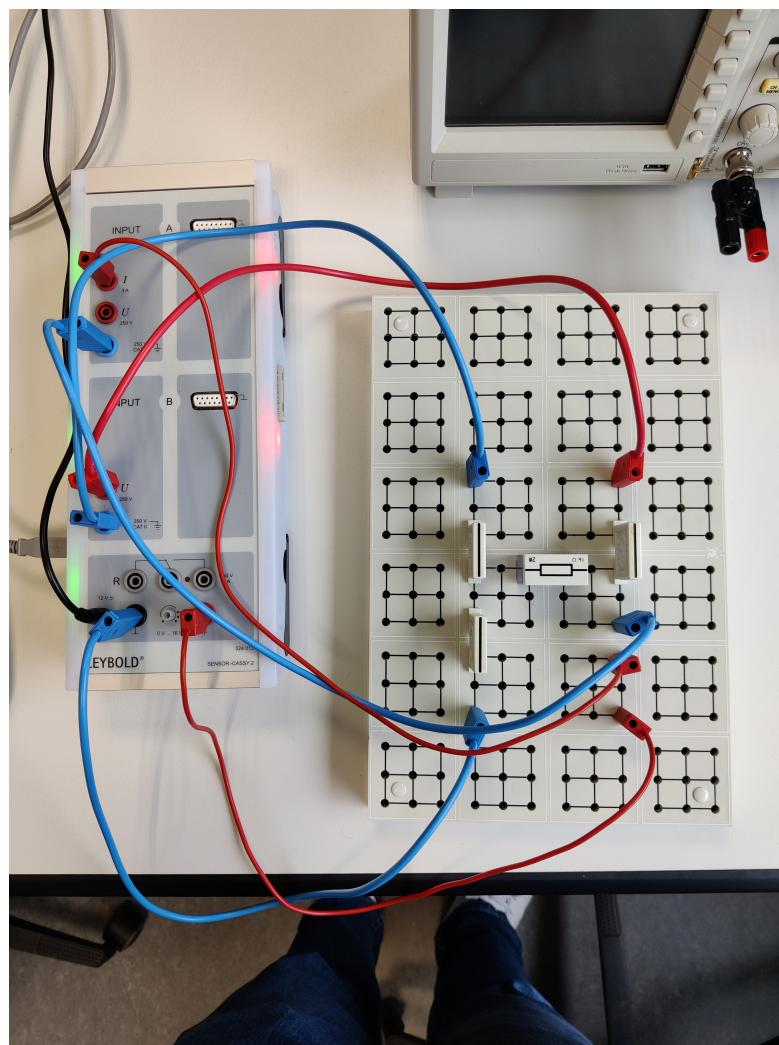


Abbildung 3: Realisierung des in Abbildung 2 gezeigten Schaltkreises.

Spannung gemessen. Die an einem Messpunkt gemessenen Spannungs- und Stromwerte sind dabei in Abbildung 4 exemplarisch für den achten aufgenommenen Messpunkt geplottet. Man kann die Fluktuation, sowie die Digitalisierung der Messung gut erkennen.

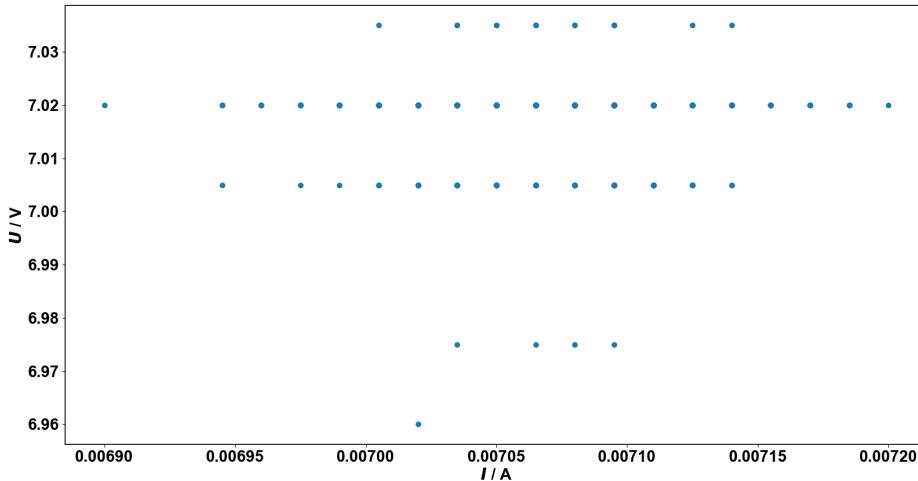


Abbildung 4: Aufgenommene Strom- und Spannungswerte am achten Messpunkt

Für jeden einzelnen Messpunkt bestimmen wir nun anhand der Stichproben-Theorie den Mittelwert, die Standardabweichung und den Fehler auf den Mittelwert, wobei die Größen wie folgt definiert sind:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \langle x \rangle)^2$$

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Bei der Analyse der Daten ist dabei aufgefallen, dass wir unser Messintervall für das vorgegebene Problem deutlich zu klein gewählt haben und unsere Messung somit eine Genauigkeit suggeriert, die nicht vorhanden ist. Um den Fehler nachträglich ausgleichen zu können, selektieren wir bei der Analyse unsere Daten direkt und verwenden zur Bearbeitung nur jeden 100. Messwert. Somit vergrößern wir künstlich unser Messintervall auf $100\mu\text{s}$ und effektiv pro Messpunkt 10^3 Messwerte. Diese Anpassung nehmen wir im folgenden bei jedem Auswertungsschritt vor um weiterhin gleiche Bedingungen für die verschiedenen Messungen zu gewähren. In Abbildung 5 sind die so für jeden Messpunkt errechneten Mittelwerte mitsamt des Fehlers auf den Mittelwert graphisch dargestellt.

Die Abbildung suggeriert, dass keine Ungenauigkeit vorhanden ist. Die Fehlerbalken sind jedoch lediglich zu klein, um sie in der Dimension dieser Abbildung erkennen zu können.

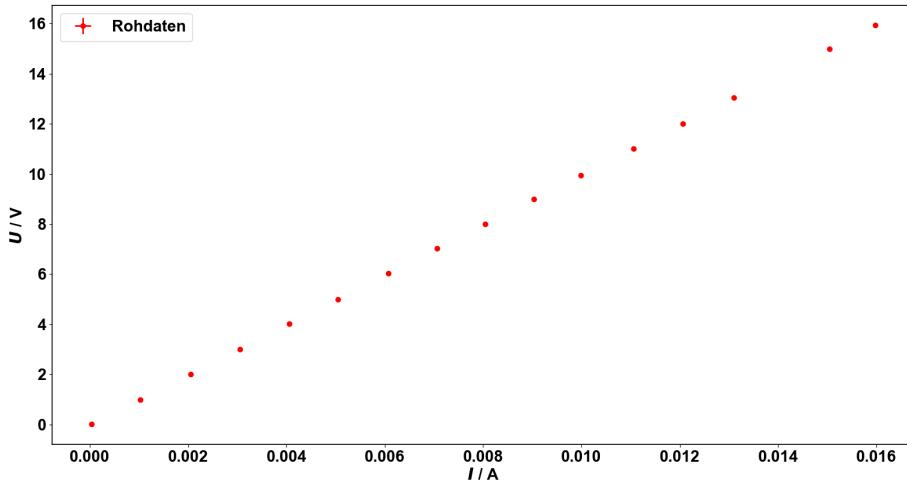


Abbildung 5: Graphische Darstellung der ermittelten Werte für alle Messpunkte.

Da wir zwischen der gemessenen Spannung U und Strom I nach dem Ohmschen Gesetz $U = RI$ einen linearen Zusammenhang erwarten, führen wir eine χ^2 -Anpassung, mit dem allgemeinen Ansatz $f(I_i) = mI_i + b$, an unseren Messdaten durch. Aus der Bedingung, dass das χ^2 mit

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^N \left(\frac{U_i - mI_i + b}{\sigma_i} \right)^2$$

für $m = \hat{m}$ und $b = \hat{b}$ minimal wird, können wir somit den Widerstand $R = \hat{m} = R_0$ durch Lösen dieses Extremwertproblems bestimmen. Hierbei ist $\sigma_i^2 = \sigma_{U_i}^2 + m^2 \sigma_{I_i}^2$ der Fehler auf den i -ten Messpunkt, wobei der Fehler auf den Strom noch mit der Steigung m gewichtet werden muss. Das Resultat der linearen Regression liefert

$$R_0 = 998.48 \pm 0.07 \Omega \quad (1)$$

und

$$\chi^2/dof \approx 15.92 \quad (2)$$

bzw.

$$\chi^2 \approx 222.94. \quad (3)$$

Die Anpassung an die Rohdaten mit Residuenplot ist in Abbildung 6 dargestellt.

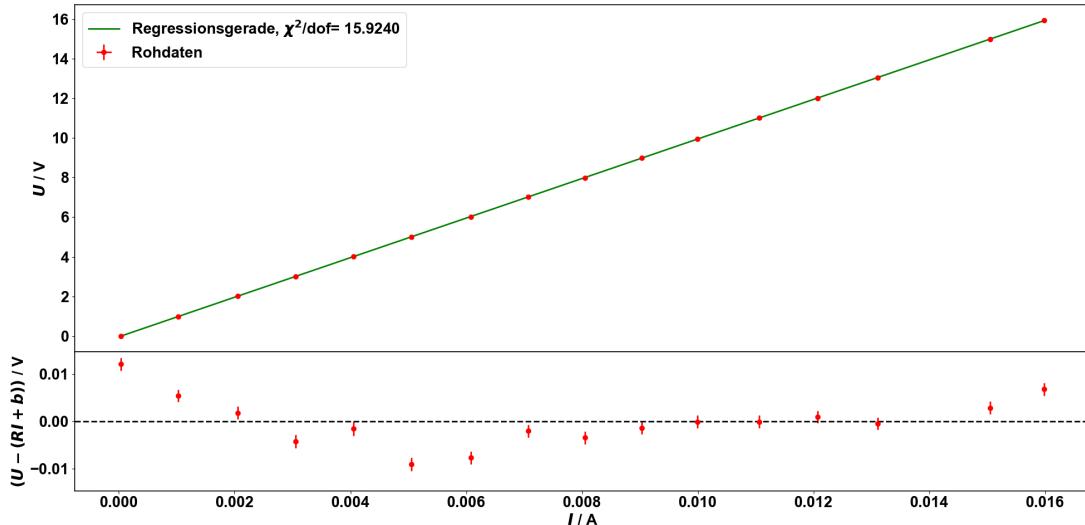


Abbildung 6: Lineare Regression mit Fehler in $x-,y$ -Richtung und Residuenplot .

Um den vollständigen Fehler auf R angeben zu können müssen wir noch den systematischen Fehler des Sensor Cassy 2 berücksichtigen, für diesen der Hersteller angibt:

$$\sigma_{U_i,syst} = (0.01U_i + 0.005U_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} = (0.01U_i + 0.005 * 30V)/\sqrt{3}$$

$$\sigma_{I_i,syst} = (0.02I_i + 0.005I_{Bereichsendwert})/\sqrt{3} = (0.02I_i + 0.005 * 0.03A)/\sqrt{3}$$

Nach der Verschiebemethode verschieben wir unsere Messpunkte jeweils einmal um $\pm\sigma_{U_i,syst}$ und $\pm\sigma_{I_i,syst}$, sodass wir insgesamt 4 neue Sätze an Datenpunkten erhalten, für diese wir jeweils eine weitere lineare Anpassung vornehmen. Die Ergebnisse der Verschiebung sind:

$$\hat{m}_{U_+} = R_{U_+} = 1004.25 \Omega \text{ und } \hat{m}_{U_-} = R_{U_-} = 992.72 \Omega$$

$$\hat{m}_{I_+} = R_{I_+} = 987.08 \Omega \text{ und } \hat{m}_{I_-} = R_{I_-} = 1010.15 \Omega$$

Wir bestimmen die absolute Abweichung für U und I mit

$$\Delta R_U = (|R_0 - R_{U_+}| + |R_0 - R_{U_-}|)/2 = 5.76 \Omega$$

und

$$\Delta R_I = (|R_0 - R_{I_+}| + |R_0 - R_{I_-}|)/2 = 11.53 \Omega.$$

Der systematische Fehler auf R ergibt sich durch quadratische Addition der Abweichungen in U und R :

$$\sigma_{R,syst} = \sqrt{\Delta R_U^2 + \Delta R_I^2} = 12.89 \Omega.$$

Somit ergibt sich insgesamt als Messwert für den Widerstand mit statistischer

und systematischer Unsicherheit

$$R = 998.48 \pm 0.07 \text{ (stat.)} \pm 12.89 \text{ (syst.) } \Omega \quad (4)$$

In Abbildung 7 ist die Verschiebung mit resultierender Regressionsgerade exemplarisch für die Verschiebung der Daten in U dargestellt.

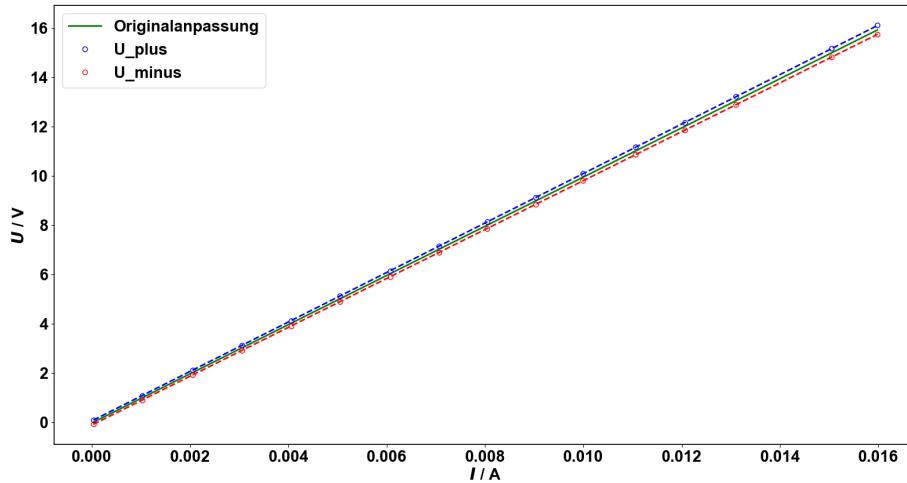


Abbildung 7: Verschiebung der Spannungen um $\pm\sigma_{U_i,syst}$ mit resultierender Anpassung.

Aufgabe 4 Lade- und Entladekurven des Kondensators mit dem Oszilloskop

Beschreiben Sie den Versuchsaufbau unter Verwendung eines Schaltbildes. Beschreiben Sie die Versuchsdurchführung unter Angabe der relevanten Messwerterfassungseinstellungen. Zeigen Sie für den Lade- und den Entladevorgang jeweils ein Bild der gemessenen Spannungsverläufe auf dem Oszilloskopschirm. Lesen Sie mithilfe der Cursor jeweils die Zeitkonstante ab. Berechnen Sie den gewichteten Mittelwert der Zeitkonstanten. Berechnen Sie daraus die Kapazität und geben Sie sie mit statistischer und systematischer Messunsicherheit an.

Als Spannungsquelle haben wir das Sensor Cassy 2 verwendet. Parallel dazu haben wir einen Schalter eingegliedert. Der Schalter, ein Widerstand und ein Kondensator wurden in einer gemeinsamen Masche in Reihe geschaltet. Bei offener Schalterstellung wird der Kondensator also geladen, bei geschlossener Stellung wird die Spannungsquelle überbrückt und der Kondensator entlädt sich über den Widerstand. Jeweils parallel zum Kondensator sowie Widerstand wurde die abfallende Spannung gemessen. Channel 1 haben wir dem Kondensator und Channel 2 dem Widerstand zugeordnet. Dabei ist die gemeinsame Erde von Channel 1 und 2 vom Oszilloskop zu beachten. Die Erde liegt demnach zwischen Widerstand und Oszilloskop, wie in Abbildung 8 dargestellt.

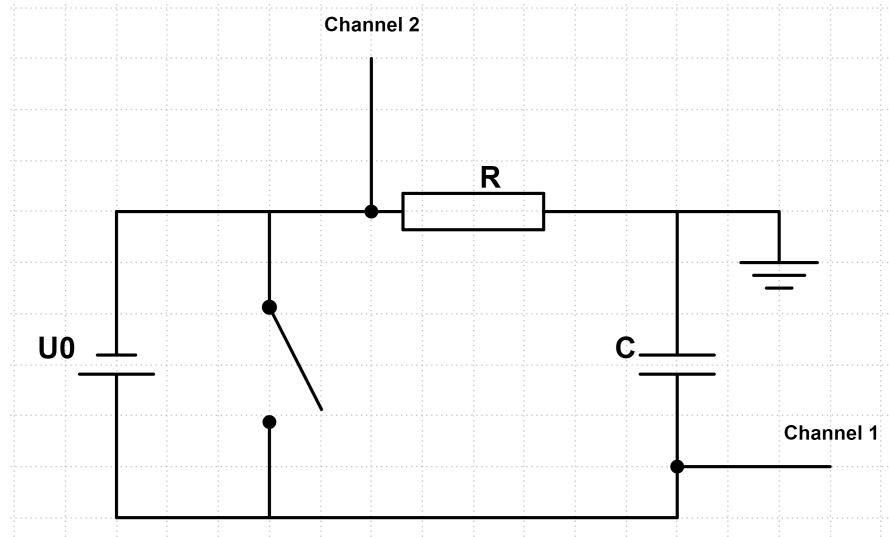


Abbildung 8: Schaltbild für Spannungsmessungen mit Oszilloskop

Die Realisierung des Experiments im Labor ist in Abbildung 8 dargestellt.

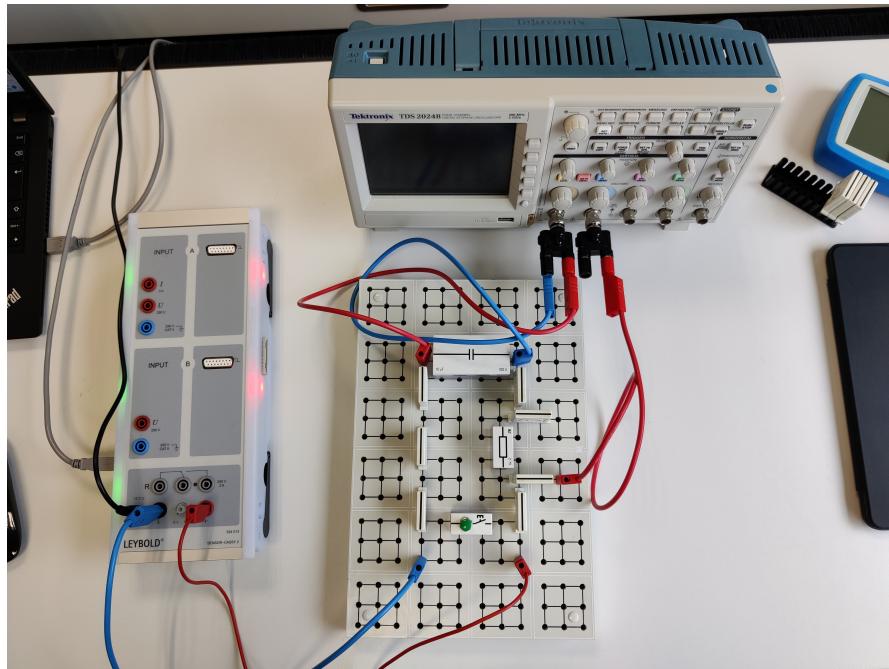


Abbildung 9: Aufbau des Experiments mit Oszilloskop im Labor

Zu Beginn haben wir die externe Spannungsquelle auf 10V gesetzt. Um adäquate Bilder zu generieren, wurden Channel 1 und 2 auf der y-Achse mit 2V/div skaliert und die x-Achse mit 10ms/div. Um die Auf- bzw. Entladung aufzunehmen, haben wir bei der Aufladung auf Channel 1 (Kondensator) mit einer fallenden Flanke bei -1V getriggert. Bei der Entladung wurde Channel 2 (Widerstand) und eine steigende Flanke bei -9.04V zum Triggern verwendet. Die Triggereinstellung für die Aufladung sowie div-Einstellungen sind exemplarisch in der folgenden Abbildung 10 dargelegt.



Abbildung 10: Exemplarische Trigger- und div-Einstellung für die Aufladung

Vor den eigentlichen Messreihen haben wir die Ablesegenauigkeit des Oszilloskops bestimmt. Diese ergibt sich durch den kleinsten Digitalisierungsschritt. Um diesen zu bestimmen, haben wir die Cursor verwendet. Die beiden Cursor des Oszilloskops wurden exakt gleich positioniert. Dann haben wir ein Cursor um den kleinst möglichen Skalenschritt verschoben. Am Oszilloskop haben wir die Differenz zwischen den beiden Cursorpositionen abgelesen, wie in der Abbildung 11 ersichtlich. Dies haben wir für die Amplitude sowie für die Zeit wiederholt.

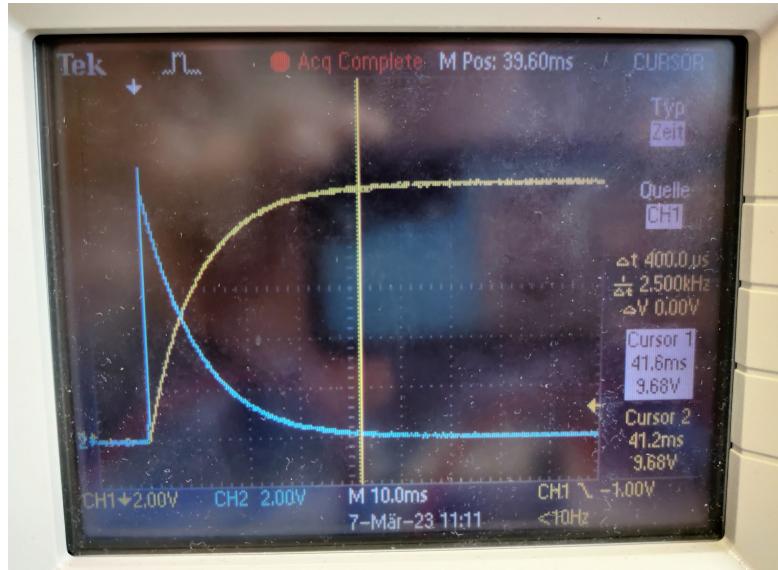


Abbildung 11: Ablesegenauigkeit Oszilloskop

Es haben sich folgende Ablesegenauigkeiten mit Berücksichtigung der Gleich-

verteilung durch die Digitalisierung ergeben:

$$\sigma_U = 80mV/\sqrt{12} \quad \sigma_t = 400\mu s/\sqrt{12}$$

Zur Aufnahme der Ladekurve:

Das Oszilloskop haben wir auf Einzelmessung gestellt und die Trigger-Einstellung wie zuvor gesetzt. Die Schalterstellung war geschlossen. Der Schalter wurde geöffnet und der Kondensator wurde geladen. Die Einzelmessung wurde am Oszilloskop im zuvor gewählten Zeitbereich angezeigt. Die Spannung am Kondensator steigt exponentiell an und konvergiert dann gegen U_0 . Die Spannung am Widerstand hingegen steigt erst instantan auf U_0 und fällt dann exponentiell auf 0V bzw. den Offset ab. Der Spannungsverlauf am Kondensator (in gelb) bzw. am Widerstand (in blau) für die Aufladung sind in Abbildung 12 dargestellt.

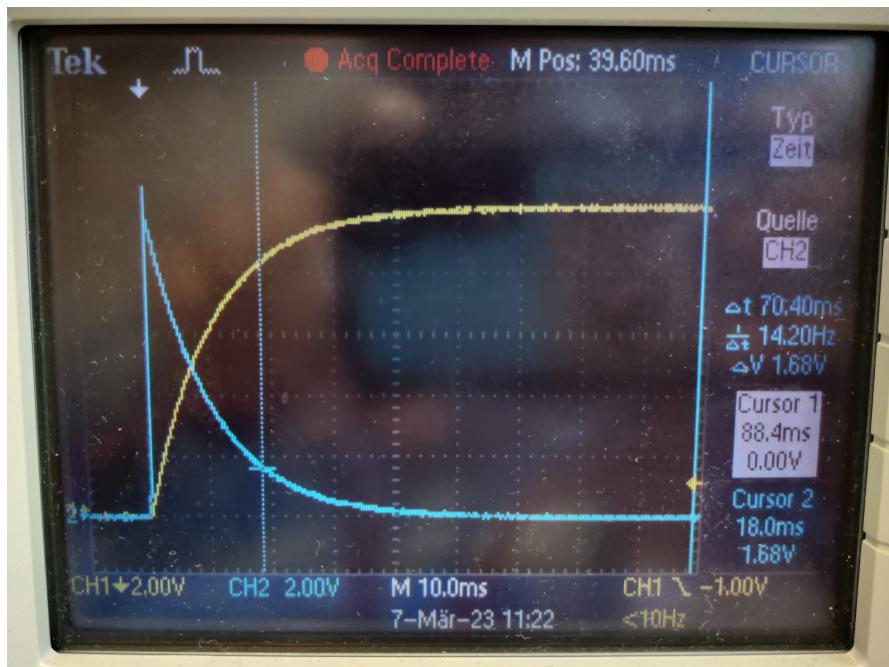
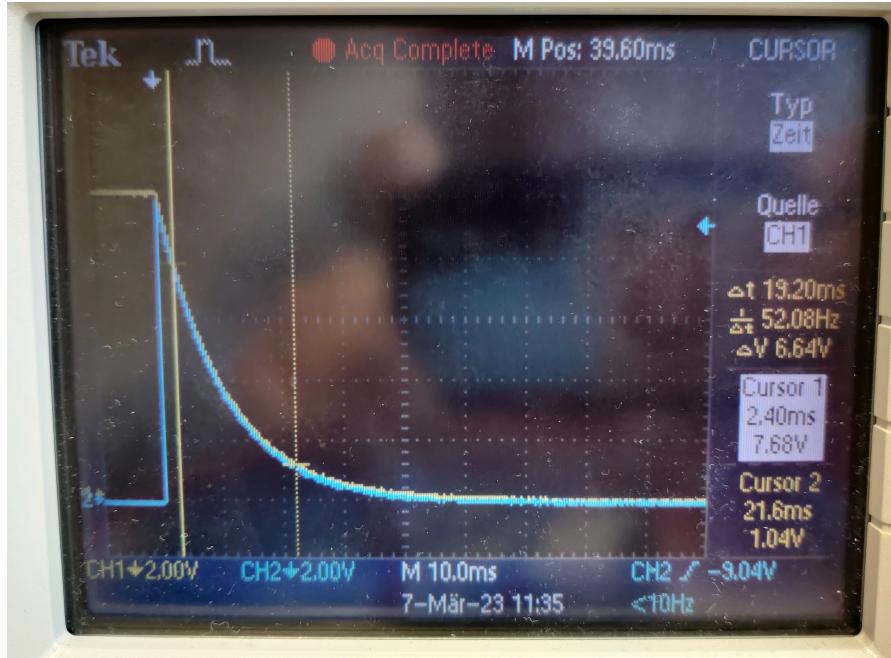


Abbildung 12: Spannungsverlauf U_R und U_C bei der Aufladung

Zur Aufnahme der Entladekurve:

Bei der Entladekurve war die Schalterstellung zunächst geöffnet. Die Spannungsquelle wurde dann durch das Schließen des Schalters überbrückt und der Kondensator entladen. Die Spannung am Kondensator fällt von U_0 auf 0V bzw. den Offset exponentiell ab. Die Spannung am Widerstand sinkt zunächst instantan auf $-U_0$, steigt dann exponentiell und konvergiert anschließend gegen 0V bzw. den Offset. Der Spannungsverlauf am Kondensator (in gelb) bzw. am Widerstand (in blau) für die Aufladung sind in Abbildung 13 dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass wir die Spannung am Widerstand invertiert haben, um den Messbereich möglichst klein zu halten.

Abbildung 13: Spannungsverlauf U_R und U_C bei der Entladung**Zur Erfassung der Messwerte:**

Um die eigentlichen Messwerte zu erfassen, wurden die Cursor verwendet. Diese werden möglichst in den exponentiell steigenden Bereichen platziert, sprich in den Bereichen wo der Kondensator noch tatsächlich geladen bzw. entladen wird. Wir haben jeweils die beiden gemessenen Spannungen und die dazugehörigen Zeitpunkte notiert. Zusätzlich haben wir für jede Kurve das tatsächliche U_0 bzw. der Offset bestimmt. Hierfür wurde der Cursor in den asymptotischen Bereich der Messung geschoben und die entsprechende Spannung abgelesen.// Insgesamt haben wir jeweils zweimal den Aufladeprozess und den Entladeprozess am Kondensator sowie am Widerstand gemessen. Die Messdaten sind in Tabelle 1 dargelegt. A steht für Aufladung, E für Entladung, C für Messung am Kondensator, R für Messung am Widerstand und der Index für die Nummer der Messung:

Tabelle 1: Messwerte für Messung am Oszilloskop

Messung	U_{off}/U_0	U_1	U_2	t_1	t_2
A_{1C}	$U_0 = 9.92V$	1.76V	8.16V	2.00ms	18.00ms
A_{1R}	$U_{off} = 0.00V$	8.00V	1.68V	2.00ms	18.00ms
A_{2C}	$U_0 = 9.92V$	1.20V	8.64V	1.20ms	21.60ms
A_{2R}	$U_{off} = 0.00V$	8.72V	1.20V	1.20ms	21.60ms
E_{1C}	$U_{off} = -0.16V$	7.68V	1.04V	2.40ms	21.60ms
E_{1R}	$U_{off} = 0.08V$	-7.60V	-1.04V	2.40ms	21.60ms
E_{2C}	$U_{off} = -0.16V$	8.72V	1.28V	1.20ms	19.60ms
E_{2R}	$U_{off} = 0.08V$	-8.64V	-1.28V	1.20ms	19.60ms

Herleitung der Formeln für die Zeitkonstante:

In der Einleitung sind die theoretischen Spannungsverläufe für die Aufladung dargelegt:

$$U_C = U_0(1 - e^{-t/RC})$$

$$U_R = U_0e^{-t/RC}$$

Für die Entladung gilt:

$$U_C = U_0e^{-t/RC}$$

$$U_R = -U_0e^{-t/RC}$$

Bei der Aufladung mit Messung am Kondensator gilt für zwei Wertepaare:

$$U_{C1} = U_0(1 - e^{-t_1/RC})$$

$$U_{C2} = U_0(1 - e^{-t_2/RC})$$

$$\Rightarrow \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} = e^{\frac{t_2 - t_1}{RC}}$$

$$\Rightarrow \tau = RC = \frac{t_2 - t_1}{\ln(\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2})}$$

Sonst gilt:

$$U_1 = U_0e^{-t_1/RC}$$

$$U_2 = U_0e^{-t_2/RC}$$

Bzw.

$$U_1 = -U_0e^{-t_1/RC}$$

$$U_2 = -U_0e^{-t_2/RC}$$

Beides führt zu:

$$U_1 = -U_0e^{-t_1/RC}$$

$$U_2 = -U_0e^{-t_2/RC}$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = e^{\frac{t_2 - t_1}{RC}}$$

$$\Rightarrow \tau = RC = \frac{t_2 - t_1}{\ln(\frac{U_1}{U_2})}$$

Bevor die Werte für Spannung und Zeit eingesetzt werden, muss der Offset bereinigt werden, wenn dieser vorliegt. Die resultierende Spannung ergibt sich

also durch:

$$U_{res} = U - U_{off}$$

Nach diesen Formeln werden alle Werte für τ berechnet. Der statistische Fehler auf τ ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung von U_1 , U_2 , t_1 und t_2 auf τ . Die Fehler von U_1 , U_2 , t_1 und t_2 sind die Ablesegenauigkeiten:

$$\sigma_U = 80mV/\sqrt{12} \quad \sigma_t = 400\mu s/\sqrt{12}$$

Also gilt:

$$Var(\tau) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} * \sigma_t \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_2} * \sigma_t \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_1} * \sigma_U \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_2} * \sigma_U \right)^2$$

Und für die Standardabweichung von τ :

$$\sigma_\tau = \sqrt{Var(\tau)}$$

Bevor nun das gewichtete Mittel von τ berechnet wird, muss vorher überprüft werden ob Systematiken, Trends oder fehlerhafte Messungen vorliegen. Dazu betrachten wir einen Plot von τ mitsamt Fehlerbalken wie in Abbildung 14. Es ist ersichtlich, dass die Werte für τ adäquat nah beieinander liegen und mit ihren Standardabweichungen verträglich sind. Somit ist es sinnvoll ein gewichtetes Mittel zu bilden.

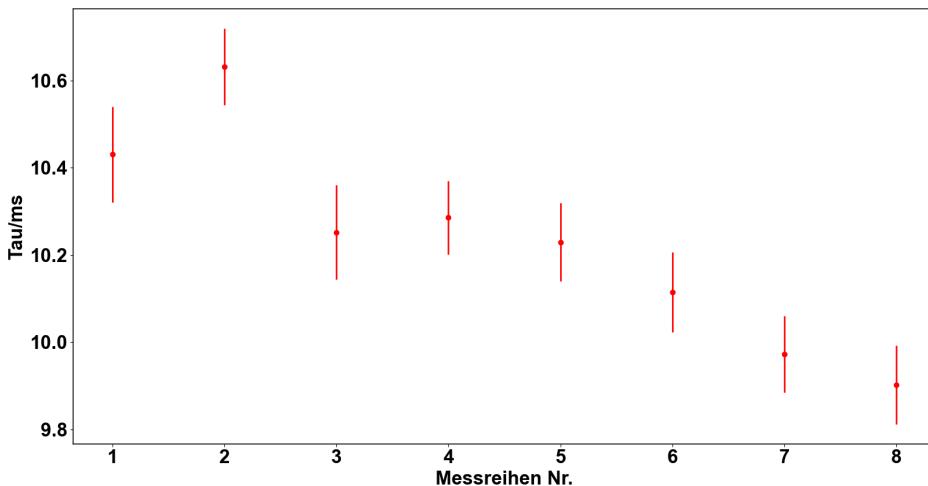


Abbildung 14: Verteilung von τ mit Fehlerbalken

Das gewichtete Mittel ergibt sich aus:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{\tau_i}{\sigma_{\tau i}^2}}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{\sigma_{\tau i}^2}}$$

Der Fehler auf den gewichteten Mittelwert ist:

$$\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{\sigma_{\tau_i}^2}}$$

Die ausgeführte Rechnung liefert:

$$\bar{\tau}_{res} = \bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}} = 10.22 \pm 0.03ms$$

Die Kapazität ergibt sich dann wie folgt:

$$C = \frac{\bar{\tau}}{R}$$

Hierbei wurde der Wert von R und seine gesamte Unsicherheit (statistisch sowie systematisch) im Vorversuch bestimmt:

$$R = 998.48 \pm 12.89\Omega.$$

Die gesamte Unsicherheit von R geht als systematischer Fehler in C ein, während die Unsicherheit von τ_{res} als statistische Unsicherheit eingeht. Aus Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\sigma_{C,stat} = \frac{\partial C}{\partial \tau} * \sigma_{\bar{\tau}}$$

sowie

$$\sigma_{C,syst} = \frac{\partial C}{\partial R} * \sigma_R.$$

Somit folgt:

$$C_{res} = C \pm \sigma_{C,stat} \pm \sigma_{C,syst} = 10.24 \pm 0.03 \pm 0.13\mu F.$$

Aufgabe 5 Lade- und Entladekurven des Kondensators mit Cas-Sy

Zeigen Sie für den Lade- und den Entladevorgang jeweils ein Bild des Spannungsverlaufs am Kondensator und des Lade- bzw. Entladestroms. Korrigieren Sie erforderlichenfalls den Spannungs- und/oder Strom-Offset. Transformieren Sie die Rohdaten geeignet in logarithmische Größen und bestimmen Sie mittels linearer Regression die Zeitkonstante. Beschreiben Sie, wie Sie die Messunsicherheiten behandeln. Berechnen Sie das gewichtete Mittel und geben Sie Ihr Endergebnis für die Kapazität mit statistischer und systematischer Messunsicherheit an.

Für die Diskussion der Auf- und Entladung des Kondensators verwenden wir den in Abbildung 15 gezeigten Schaltkreis.

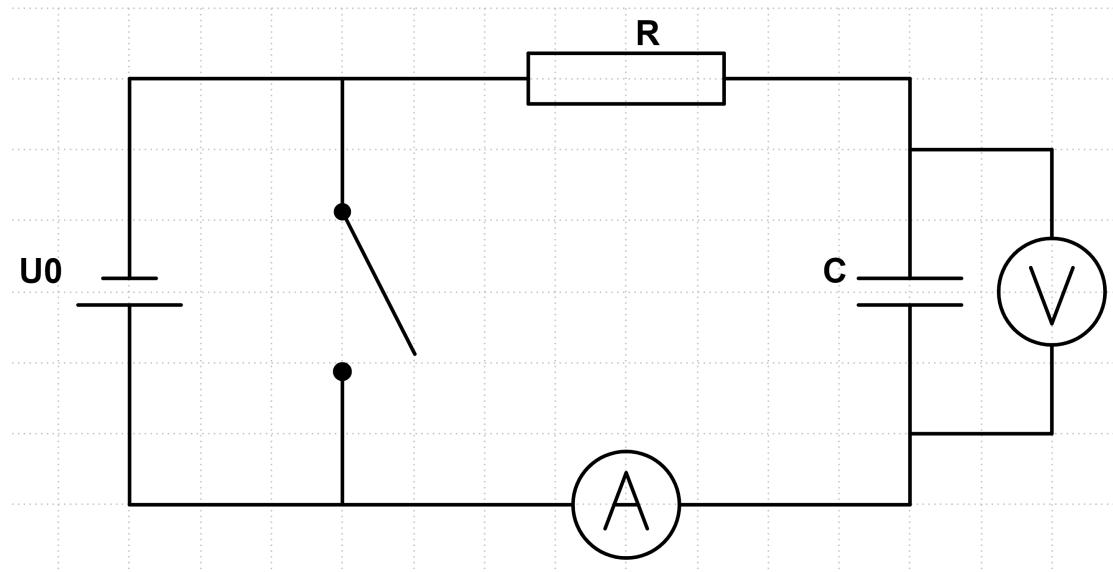


Abbildung 15: Verwendeter Schaltkreis für die Auf- und Entladung am Kondensator.

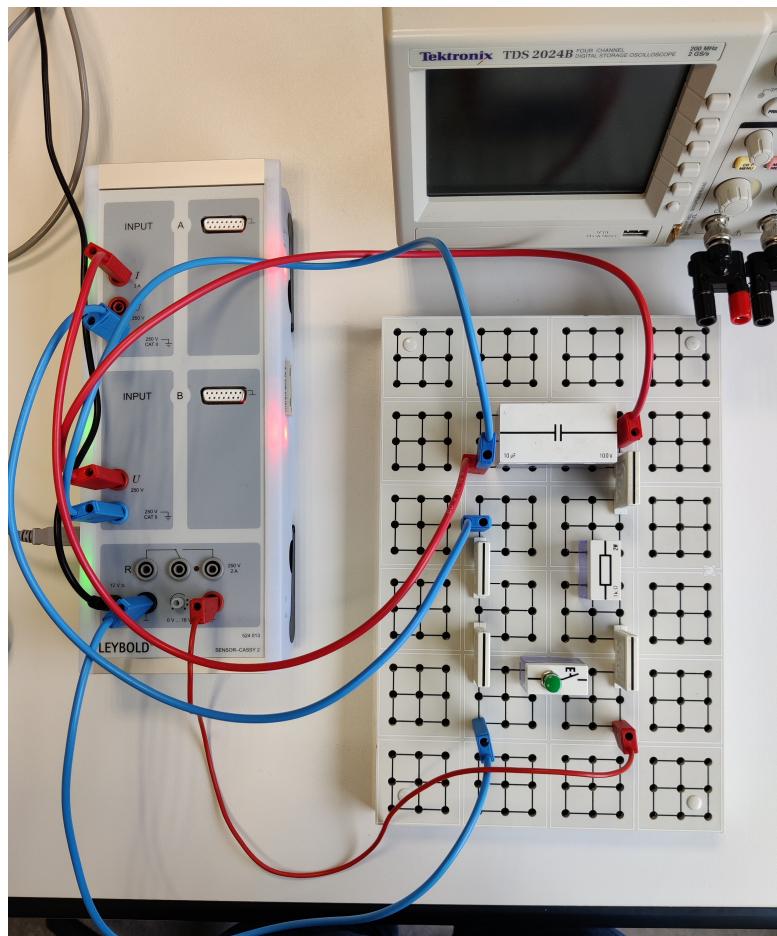


Abbildung 16: Verwendeter Schaltkreis für die Auf- und Entladung am Kondensator.

Die Messeinstellungen haben wir identisch zu der Messung am Widerstand gewählt, s.d. das Messintervall $1 \mu s$ und die globale Messzeit $100 ms$ beträgt. Für die Diskussion der Daten haben wir auch hier das Messintervall im Nachhinein künstlich auf $100 \mu s$ erweitert, s.d. wir pro Messkurve effektiv 10^3 Messwerte für die Auswertung erhalten. Die Messbereiche sind ebenfalls analog zu der Widerstandsmessung auf $-30V, 30V$ und $-0.03A, 0.03A$ festgelegt.

Um die statistische Unsicherheit auf die einzelnen Messwerte angeben zu können, verwenden wir die bereits erfassten Rauschmessungen bei der Bestimmung des Widerstandes und bestimmen jeweils die Standardabweichung der Einzelmessung nach

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \langle x \rangle)^2.$$

In Abbildung 17 sind die Ergebnisse der 16 Messungen für Strom und Spannung dargestellt. Es ist deutlich, dass diese statistisch fluktuieren, ohne dass sich ein Abhängigkeit von Strom und Spannung erkennen lässt.

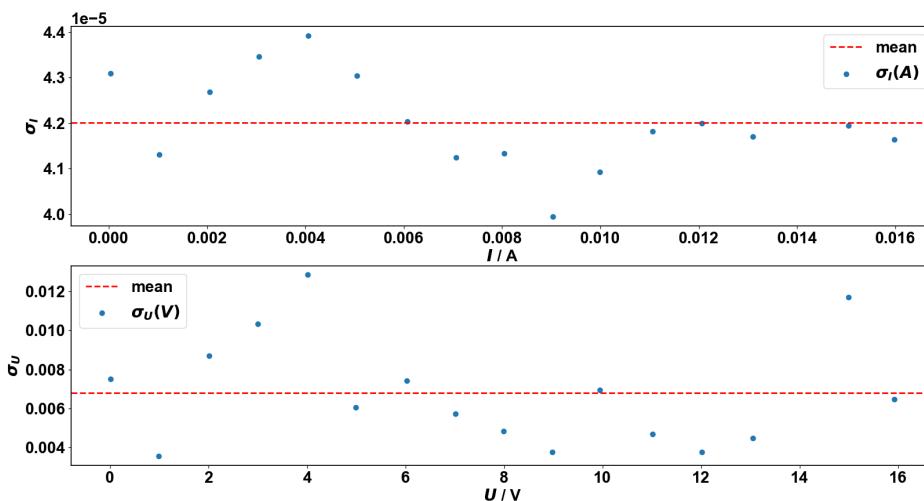


Abbildung 17: Fluktuation der Standardabweichungen von U und I bei Auswertung der Rauschmessungen am Widerstand

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$\langle \sigma_U \rangle = 0.0068 V$$

$$\langle \sigma_I \rangle = 0.042 mA$$

Sodass sich die statistischen Fehler auf die Einzelmessung ergeben:

$$\sigma_U = \sqrt{\langle \sigma_U \rangle^2 + \sigma_{U,digitalisierung}^2} = 0.0080 V \quad (5)$$

$$\sigma_I = \sqrt{\langle \sigma_I \rangle^2 + \sigma_{I,digitalisierung}^2} = 0.042 mA \quad (6)$$

wobei die Digitalisierungsunsicherheit durch die 12–Bit Auflösung des Sensor Cassy 2 gegeben ist.

Für die Messungen haben wir mit dem Sensor Cassy 2 eine an dem Stromkreis anliegende Gleichspannung von $U = 16V$ generiert. Um im Nachhinein einen eventuellen Offset von Strom- und Spannungsmessungen angeben zu können haben wir zusätzlich eine Rauschmessung für Strom und Spannung im geladenen, sowie im ungeladenen Zustand durchgeführt. Somit ergibt sich weiterhin die benötigte Spannung $U_0 = 15.904 \pm 0.008 V$ des vollständig aufgeladenen Kondensators.

Im Gegensatz zu den Rauschmessungen an verschiedenen angelegten Spannungen am Widerstand haben wir für die Erfassung der Messdaten für Auf- und Entladung einen Trigger verwendet. Um die Aufladung zu erfassen ist der, dem Widerstand und Kondensator parallel geschaltete, Taster geschlossen, s.d. dieser den Stromkreis kurzschließt und effektiv keine Spannung am Kreis anliegt. Mit einem Trigger, der auf eine Spannung von $U_C = 1.00V$ mit steigender Tendenz eingestellt wurde, haben wir so nach Start der Messung und öffnen des Tasters die Spannung am Kondensator und den fließenden Strom während des Aufladens aufgezeichnet. Insgesamt haben wir so zwei Aufladungsprozesse gemessen, die Strom- und Spannungsverläufe sind beispielhaft für die erste Messung in Abbildung 18 gezeigt.

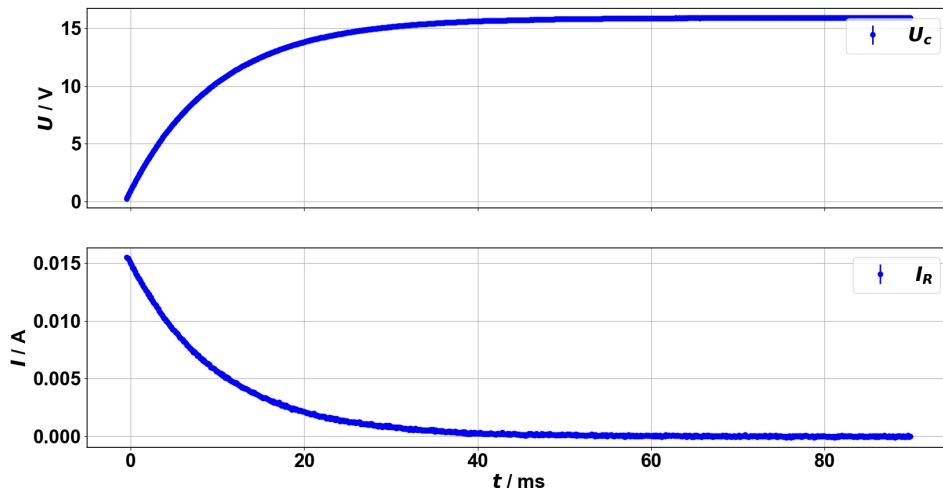


Abbildung 18: Gemessene Strom- und Spannungskurven bei der ersten Messung zur Aufladung

Für die Erfassung der Entladung haben wir einen Trigger auf $U_C = 15.00V$ mit fallender Tendenz verwendet und somit nach Start der Messung und schließen des Tasters die Spannung am Kondensator und den Entladestrom aufgenommen. Exemplarisch für die Entladung sind in Abbildung 19 die Strom- und Span-

nungskurven, die wir bei der zweiten Entladung gemessen haben dargestellt.

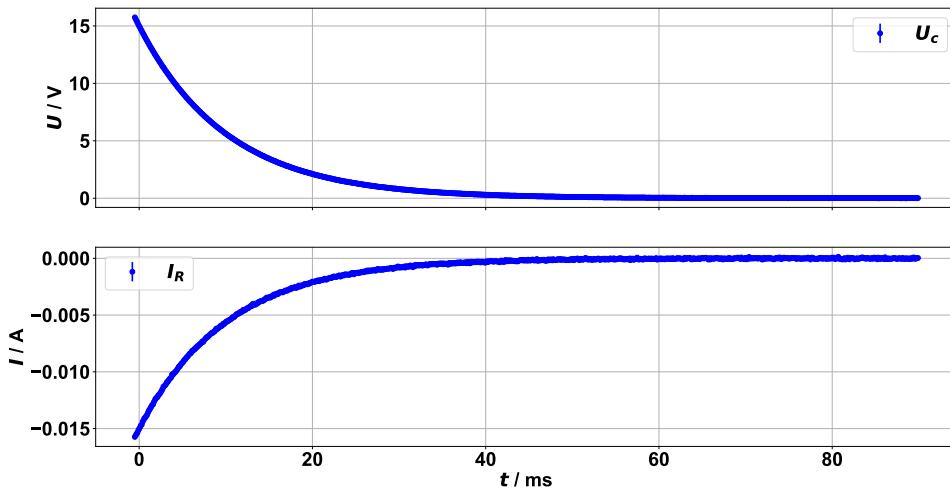


Abbildung 19: Gemessene Strom- und Spannungskurven bei der zweiten Messung zur Entladung

Für die weitere Analyse der Daten ziehen wir nun die aus den Rauschmessungen bestimmten Offsets von $U_{\text{off}} = 0.6\text{mV}$ und $I_{\text{off}} = 0.027\text{mA}$ von unseren Messdaten ab. Da wir weiterhin für den Spannungsverlauf am Kondensator bei der Aufladung eine Funktionsvorschrift von

$$U_C = U_0(1 - e^{-t/RC})$$

erwarten, führen wir an den Spannungswerten des Kondensators die lineare Transformation

$$U_C \rightarrow U_0 - U_C$$

durch, s.d. wir für diese Werte ebenfalls eine Funktionalität $\propto e^{-t/\tau}$ erhalten. An den Stromwerten der Entladung führen wir ebenso eine Transformation derart

$$I \rightarrow -I$$

durch. Da es sich bei diesen Transformationen nur um Verschiebungen/Spiegelungen handelt sind die Unsicherheiten von den Transformationen nicht betroffen. So mit haben wir alle Messreihen in eine Form transformiert, von der wir erwarten, dass die Daten mit $e^{-t/\tau}$ abfallen und können die Daten nun logarithmieren um die Zeitkonstante τ zu bestimmen. Um die Daten logarithmieren zu können müssen wir zunächst alle Daten < 0 herausfiltern, s.d. wir undefinierte Größen vermeiden. Die Fehler auf die linearisierten Werte bestimmen wir durch Fehlerfortpflanzung der Fehler auf die Messwerte z.B.

$$\sigma_{\ln U} = \frac{\partial \ln U}{\partial U} \sigma_U = \frac{\sigma_U}{|U|}$$

In Abbildung 20 sind die linearisierten Werte der Strom- und Spannungsmessung der zweiten Entladung dargestellt. Wie erwartet ergibt sich eine Gerade mit negativer Steigung (theoretische Steigung $\frac{-1}{\tau_{\text{au}}}$), wobei die Unsicherheit auf die Größen für größere Zeitwerte stark ansteigt, wie man aus der Funktionalität von $\sigma_{\ln U}$ direkt nachvollziehen kann.

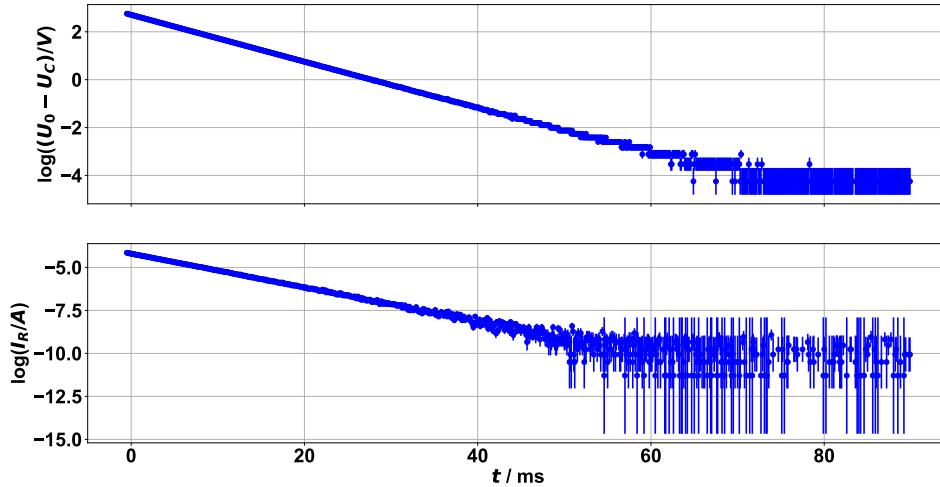


Abbildung 20: Logarithmierte Werte der zweiten Entladungsmessung

An diese Daten können wir nun in einer χ^2 -Optimierung eine Regressionsgerade anpassen. Um die Steigung möglichst genau bestimmen zu können, verwenden wir für die Anpassung nur die Datenpunkte bis zur Zeitschwelle von 40ms , da die Werte danach anfangen zu stark zu streuen. Die Ergebnisse der linearen Regression sind für die in Abbildung 20 gezeigten Werte in Abbildung 21 und Abbildung 22 gezeigt.

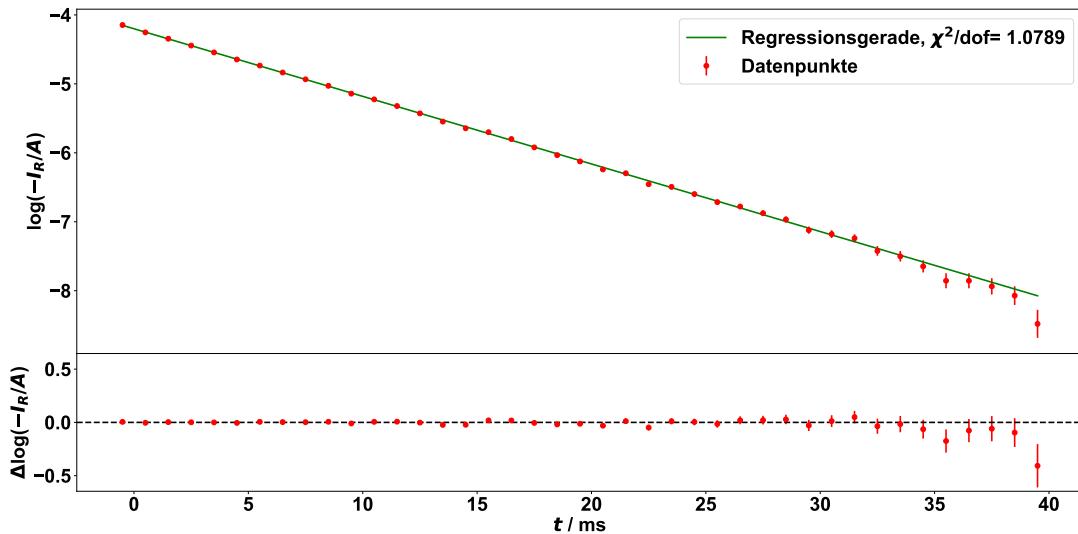


Abbildung 21: lineare Regression an die Datenpunkte der in Abbildung 20 dargestellten linearisierten Stromdaten

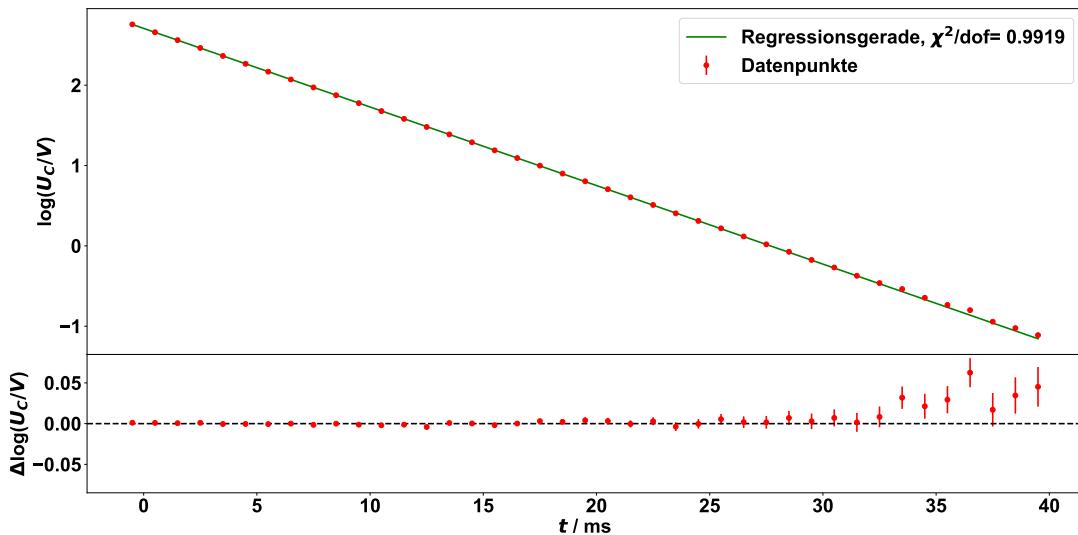


Abbildung 22: lineare Regression an die Datenpunkte der in Abbildung 20 dargestellten linearisierten Spannungsdaten

Bei der linearen Regression ergibt sich

$$\chi_U^2/dof \approx 1.0789 \text{ bzw. } \chi_U^2 \approx 400.73 \quad (7)$$

$$\chi_I^2/dof \approx 0.9919 \text{ bzw. } \chi_I^2 \approx 435.86 \quad (8)$$

Die Ergebnisse der Anpassung an alle 8 Messreihen sind in folgender Tabelle dargestellt:

Aus den ermittelten Steigungen können wir nun die sich resultierenden τ_i be-

rechnen, wobei der Fehler sich wie folgt fortpflanzt:

$$\sigma_\tau = \frac{\partial m}{\partial \tau} \sigma_m = \frac{1}{m_0^2} \sigma_m$$

Die sich so errechneten τ_i mit Fehler sind in Abbildung 23 dargestellt. Man sieht zwar, dass die τ_i um einen Mittelwert schwanken, jedoch ist auch klar erkennbar, dass die Messung nicht frei von Systematiken ist. So liegen immer jeweils die beiden τ_i , die aus der 1. und 2. Messung aus den gleichen Datenkurven erhalten worden sind nah beieinander, jedoch sind die Werte für die τ_i i.A nicht mit ihren Unsicherheiten verträglich.

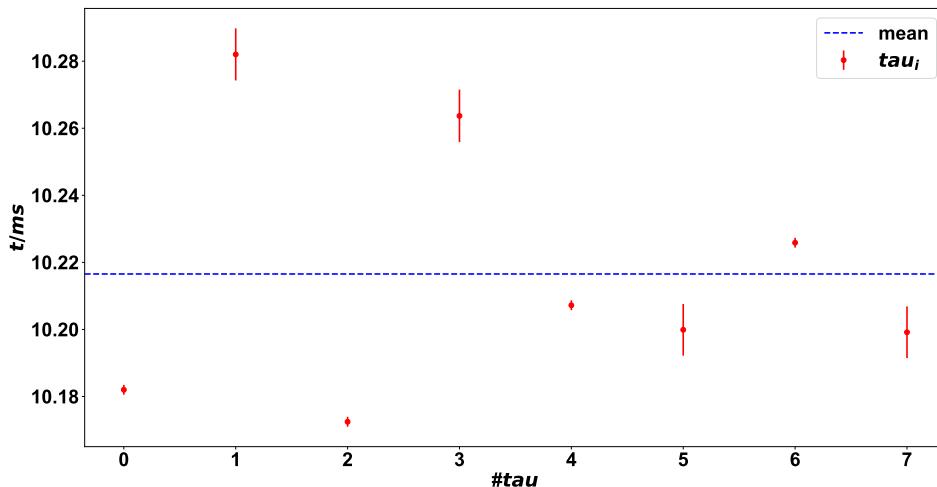


Abbildung 23: Ermittelte τ_i mit Unsicherheit

Da wir diese Systematik nicht bereinigen konnten und es anhand der anscheinend viel zu kleinen Messunsicherheiten unsinnig ist das gewichtete Mittel zu bilden, verwenden wir die τ_i um einen ungewichteten Mittelwert zu bilden und bestimmen den Fehler auf diesen Mittelwert anhand der empirischen Standard-

Tabelle 2: Ergebnis der linearen Regression

Messreihe	$\frac{-1}{\tau} \text{ms}$	$\sigma_{\frac{-1}{\tau}} \mu\text{s}$
$U_{\text{Aufladung}1}$	-0.0982	0.014
$I_{\text{Aufladung}1}$	-0.0983	0.073
$U_{\text{Aufladung}2}$	-0.0983	0.014
$I_{\text{Aufladung}2}$	-0.0974	0.074
$U_{\text{Entladung}1}$	-0.0979	0.014
$I_{\text{Entladung}1}$	-0.0980	0.074
$U_{\text{Entladung}2}$	-0.0978	0.014
$I_{\text{Entladung}2}$	-0.0980	0.074

abweichung auf den Mittelwert. Somit lautet das Ergebnis unserer Messung:

$$\tau = 10.22 \pm 0.04 \text{ ms} \quad (9)$$

somit bestimmen wir die Kapazität des Kondensators zu:

$$C = \frac{\tau}{R} = 10.23 \pm 0.04 \text{ (stat.)} \pm 0.13 \text{ (sys.) } \mu\text{F} \quad (10)$$

Wobei der statistische Fehler aus Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler auf τ bestimmt wurde

$$\sigma_{C,\text{stat}} = \frac{1}{R_0} \sigma_\tau$$

und sich der systematische Fehler aus dem kompletten Fehler auf den Widerstand ergibt

$$\sigma_{C,\text{sys}} = \frac{\tau_0}{R_0^2} \sigma_R$$

Aufgabe 6 Zusammenfassung und Diskussion

Fassen Sie Ihre Ergebnisse zu den Kapazitäten zusammen und vergleichen Sie sie untereinander, mit den Messungen aus dem Vorversuch und mit den Herstellerangaben (Toleranz 5 %).

Für die Kapazität des Kondensators liegen nun 4 verschiedene Werte sowie die ggf. vorhandenen systematischen bzw. statistischen Unsicherheiten vor. Beim Digitalvoltmeter ist aus den Angaben des Herstellers nicht ersichtlich, ob es sich um eine statistische oder systematische Unsicherheit handelt (oder kombinierte Unsicherheit). Sie ist in der Tabelle als statistische Unsicherheit aufgeführt. Diese sind in folgender Tabelle dargelegt: Es ist erkenntlich, dass die von uns

Tabelle 3: Kapazitäten für verschiedene Messmethoden

Messmethode	$C [\mu\text{F}]$	$\sigma_{C,\text{stat}} [\mu\text{F}]$	$\sigma_{C,\text{syst}} [\mu\text{F}]$
Herstellerangabe	10	-	-
Digitalvoltmeter	10.44	0.28	-
Oszilloskop	10.24	0.03	0.13
Cassy	10.23	0.04	0.13

bestimmten Kapazitäten sich gut mit den Herstellerangaben bzw. mit der Messung vom Digitalvoltmeter decken. Auch ist ersichtlich, dass die Messgenauigkeit vom Cassy und vom Oszilloskop sich nicht signifikant unterscheiden. Um die relative Abweichung von der Herstellerangabe zu bestimmen, wird zunächst der gewichtete Mittelwert aus C_{Cassy} und $C_{\text{Oszilloskop}}$ sowie die dazugehörige Unsicherheit bestimmt. Hierbei ist zu beachten, dass in diese Berechnung nach Aufgabenstellung lediglich die statistischen Ungenauigkeiten einfließen.

Für den gewichteten Mittelwert und die dazugehörige Abweichung ergibt sich:

$$\bar{C} = 10.24 \mu\text{F}$$

$$\sigma_{\bar{C}} = 0.02 \mu\text{F}$$

Das Endergebnis der Messung lautet demnach:

$$C = 10.24 \pm 0.02 \mu F.$$

Die experimentell bestimmte Kapazität weicht 2.4% von der Herstellerangabe ab. Die Messung liegt demnach innerhalb der geforderten 5%. Auch liegt die experimentell bestimmte Kapazität näher an der Herstellerangabe als die mit dem Digitalvoltmeter bestimmte Kapazität. Das Experiment liefert also gute Daten.