

Physikalisches Grundpraktikum I

Versuchsprotokoll: (Akustik)

8. März 2023

Maximilian Carlos Menke, 434170

Andrea Roth, 428396

Gruppe A3

Versuchsliste

1A3 Bestimmung des E-Moduls von Metallen	1
Versuchsaufbau	3
Durchführung	4
Aufarbeitung Rohdaten	12
Auswertung der Schwingungsmessungen	15
Bestimmung der Fehler und Fehlerfortpflanzung	16
Systematische Fehler	16
statistische Fehler	18
Fehlerfortpflanzung	19
Berechnung der Dichte und Diskussion des Ergebniss	20
Diskussion des Fehlers auf die Dichte	20
Berechnung des Elastizitätsmoduls und Diskussion des Ergebnis	21
Diskussion des Fehlers auf das E-Modul	21
Vergleich mit der Literatur	22
Kupfer	22
Aluminium	23
Stahl	23
Messing	23
Fazit	23

1A3 Bestimmung des E-Moduls von Metallen

Versuchsziele

Ziel des Versuches ist, das Elastizitätsmodule verschiedener Metallstäbe zu bestimmen. Eine statische Messung liefert nur für dünne Drähte auswertbare Ergebnisse weswegen das Elastizitätsmodule in unserem Fall mit einer Dynamischen Messung bestimmt wird. Hierfür erzeugen wir stehende Wellen in den

Metallstäben. So können wir mit der Frequenz und der Wellenlänge die Phasengeschwindigkeit und somit auch das Elastizitätsmodul bestimmen.

Aufgabe 1 Grundlagen

Da wir keine Statische Messung des E-Moduls durchführen können, verwenden wir hier eine dynamische Messung. Für diese brauchen wir Grundlagen aus der Akustik, als auch aus der Elastomechanik.

Das E-Modul ist ein Maß für die Dehnbarkeit eines Materials. Es ist Definiert als:

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}} \quad (1)$$



Es beschreibt wie sehr sich ein Material ausdehnt bzw. komprimiert wenn ein Druck auf es ausgeübt wird. Es gilt allerdings nur im elastischen Bereich des Materials.

Wenn wir mit dem Hammer auf das Ende der Stange schlagen, so entsteht eine Druckwelle in ihr. Diese durchläuft die Stange. Am anderen Ende wird diese ein kleines Stück ausgelenkt. Dieses sorgt dafür, dass die Druckänderung an die Luft übertragen wird. Da die Stange aber ein Elastizitätsmodul besitzt, wirkt eine Rückstellkraft auf diese Auslenkung. Diese Druckschwankung durchläuft die Stange periodisch. Dadurch entsteht eine stehende Welle in der Stange, welche über die Enden der Stange Schallwellen an die Umgebung abgibt.

Wenn der Stange in Schwingung versetzt wird, bilden sich stehende Wellen in ihr aus. Wir wollen hierbei die Frequenz der Grundschiwingung bestimmen. Da die Stange an beiden Enden ein festes Ende für die Wellen hat, muss die Grundschiwingung die Wellenlänge $\lambda = 2L$ haben.

Daraus ergibt sich (mit f = Frequenz der Grundschiwingung und L = Länge der Stange):

$$v = f\lambda = f2L \quad (2)$$

In Luft breitet sich Schall immer als Longitudinale Welle aus. In Festkörpern muss die Rückstellkraft des Materials nicht zwangsweise entgegen der Ausbreitungsrichtung zeigen, weshalb hier allgemein auch eine Transversale Komponenten vorliegen kann. Die Metallstäbe können aber als homogen genug angenommen werden, weshalb wir hier von einer reinen longitudinalen Welle ausgehen können. Aus der Wellengleichung ergibt sich:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet ρ die Dichte des Materials v die Phasengeschwindigkeit der longitudinalen Welle, M die Masse, D der Durchmesser und E das E-Modul der Stange. Die Dichte ist gegeben als:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{mit} \quad V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 L \quad (4)$$

$$E = v^2 \rho \quad (5)$$

$$E = (f\lambda)^2 \rho = 4f^2 L^2 \rho \quad (6)$$

$$E = \frac{16f^2 LM}{\pi D^2} \quad (7)$$

Aufgabe 2 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Versuchsaufbau

Für die Bestimmung des E-Moduls messen wir die Schallwellen die mithilfe eines Gummihammers in der Stange erzeugt werden. Diese werden in ein Digitales Signal umgewandelt das wir mithilfe des Sensor CASSY darstellen und analysieren können. Hierzu benötigen wir folgende Geräte.

Benötigte Geräte:

- Sensor CASSY
- Universalmikrofon mit Stativstange
- Sockel
- Tischklemme
- Metallstange (Länge: 20cm) (Stativstange für Kreuzmuffe)
- Kreuzmuffe
- Metallstift (Querschnitt: 4mm, Länge: 30mm)
- Gummihammer
- Mikrometerschraube (Messbereich: 0-25mm, Genauigkeit: $\pm 0.01\text{mm}$)
- Stahl-Bandmaß (Länge: 2m, Toleranz: $\pm 0.7\text{mm}$)
- verschiedene Metallstangen (Kupfer, Messing, Stahl, Aluminium)
- Analysewaage Sartorius BL 1500 (Genauigkeit: $\pm 0,2\text{g}$)

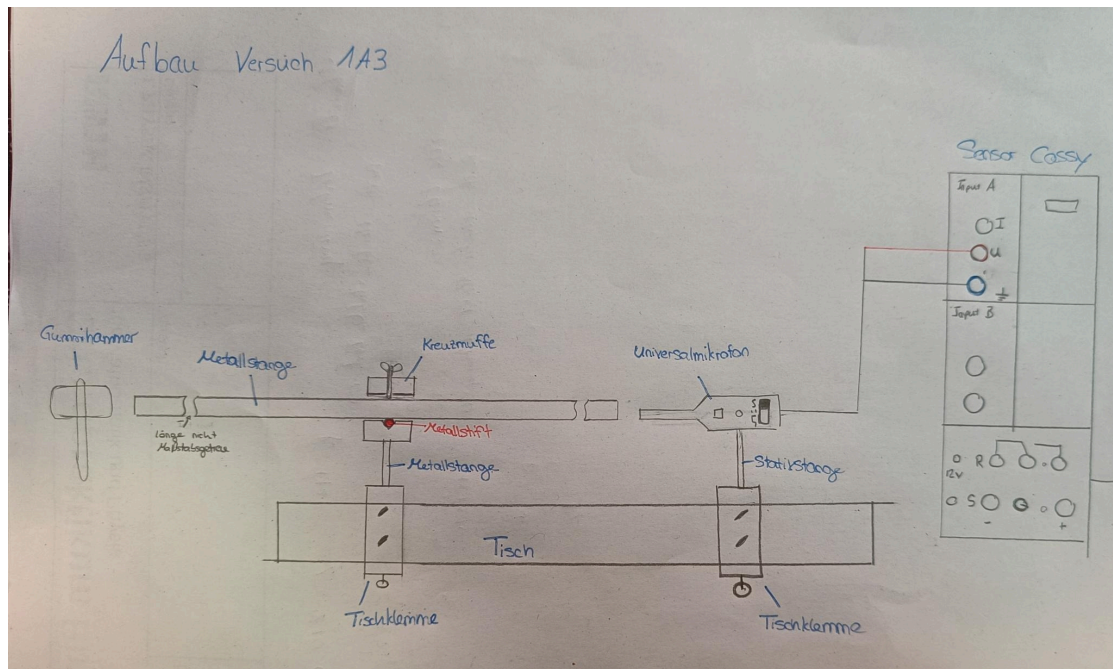


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus

Der Aufbau des Experiments kann der oben stehenden Skizze entnommen werden.

Zunächst werden mit zwei Tischklammen Mikrofon und Metallstange an dem Tisch befestigt. Wobei die Stange mithilfe der Kreuzmuffe befestigt wird. In die Kreuzmuffe wird der Metallstift orthogonal zu der Stange hineingelegt, sodass diese beim mittigen einspannen nur an einem Punkt unterstützt wird. Die Stange also frei schwingen kann. Das Universalmikrofon und die Metallstange werden auf eine Linie gebracht, mit 5mm Abstand. So kann das Mikrofon die Schallwellen gut aufzeichnen, wird aber nicht beschädigt, falls die Stange zu stark angeschlagen wird. Während der gesamten Durchführung muss darauf geachtet werden, dass die Position sich nicht gegeneinander verschiebt.

Das Universalmikrofon wird an den Sensor CASSY angeschlossen, wobei das Gelbe Kabel (in der Skizze rot) in die Buchse für die Spannung, und das schwarze in die für die Erdung gesteckt wird. Das Mikrofon wird auf den Amplitudenmodus \sim gestellt. Der Gummihammer wird verwendet um auf das, dem Mikrofon abgewandte, Ende der Metallstange zu schlagen. Damit werden die Metallstangen zum schwingen angeregt.

Durchführung

Zunächst haben wir die Metallstangen kategorisiert nach dem Material aus welchem sie bestehen.

Kategorisierung der Metallstangen:

- Aluminium: matt silberne Stange
- Messing: goldene Stange
- Kupfer: kupferfarbene Stange
- Stahl 15: Silber glänzende Stange

Von diesen haben wir dann jeweils, Länge, Masse und Durchmesser bestimmt. Die Länge haben wir mit dem Bandmaß gemessen, wobei hier darauf geachtet wurde, dass das Bandmaß straff ist. Die Masse haben wir mit der Analysewaage bestimmt, indem wir die Stange mittig auf der Waage platziert haben.

Da wir bei der Stange annehmen, dass diese einen kreisförmigen Querschnitt hat, führen wir die Messung des Durchmessers mehrfach durch. Hierfür verwenden wir die Mikrometerschraube. Wir messen an verschiedenen Stellen, dabei rotieren wir die Stange beliebig bei jeder Messung um die Längsachse. Dies wiederholen wir zehn mal. Sodass wir für jede Stange 10 Messwerte für den Durchmesser haben.



Abbildung 2: Bild der Messgerät und Metallstangen

Als nächstes bauen wir den Versuch auf. Hier gehen wir genau so vor wie in der vorherigen Beschreibung des Versuchsaufbaus. Als erstes haben wir die Kupferstange verwendet. Wobei wir zunächst die Tischklemme platziert haben und die Stange mittig eingespannt. Hierfür haben wir von einem Ende der Stange aus, mit dem Maß-band die Mitte bestimmt. Dann haben wir das Mikrofon passend zu der Stange positioniert, und an den Tisch montiert. Zu beachten war, dass die Stange nicht zu fest eingespannt wird, da dies Auswirkung auf die Frequenz hat. Außerdem haben wir überprüft, dass sie nur an einem Punkt aufliegt, sodass sie frei schwingen kann. Die Spitze des Mikrofons haben wir nach Augenmaß 5mm vom Ende der Stange entfernt positioniert.



Abbildung 3: Bild der fertig aufgebauten Versuchsanordnung

Dann haben wir das Mikrofon wie im Aufbau beschrieben an das Sensor CASSY angeschlossen und in betrieb genommen. Zunächst haben wir uns überlegt, was sinnvolle Messparameter sind. Da die Schallgeschwindigkeit in Metallen im Bereich von mehrere 1000m/s liegt, muss das Messintervall im Bereich von 10-100 μ s sein. Damit haben wir erste Testmessung durchgeführt. Wobei wir diese mehrfach wiederholt haben, bis wir die Empfindlichkeit des Mikrofons so eingestellt hatten, dass wir den gesamten dynamischen Bereich des Mikrofons ausnutzen, und nicht in die Sättigung kommen. Dann konnten wir eine erste FFT mit CASSY durchführen, und mit peakfinder die Frequenz des schwingenden Kupferstanges ungefähr bestimmen. Mit diesen Informationen haben wir dann unsere Messparameter eingestellt.

Messparameter:

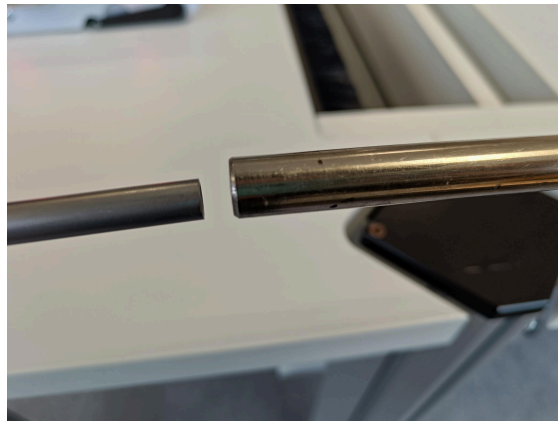
- Messzeit: 3s
- Intervall: 100 μ s
- Anzahl Messungen: 30001
- Spannungsbereich: -3V bis 3V (Da der dynamisch Bereich des Mikrofons 2.5V ist)

Wir haben für die Messung keinen Trigger verwendet, sondern die Messung manuell gestartet.

Bei einer Messung hat einer aus unserer Gruppe mit dem Gummihammer die Kupferstange angeschlagen, die andere Person hat kurz nach Anschlag die Messung gestartet, so dass, der Einschwingvorgang möglichst nicht mit aufgezeichnet wurde. Wir haben versucht die Stange immer möglichst gleich an zu schlagen, also gleiche Position und Kraft, damit die Messungen möglichst vergleichbar sind. Außerdem haben wir darauf geachtet, dass wir die Stange nur dann anschlagen, wenn niemand anders eine Stange des gleichen Materials anschlug.



(a) Anschlagen der Stange



(b) Position von Stange und Mikrofon

Abbildung 4: Anordnung zur Durchführung einer Messung

Mit unseren eingestellten Messparametern haben wir dann eine erste vollständige Testmessung durchgeführt um zu überprüfen, ob alle Einstellungen passen. Aus dieser Messung haben wir erneut mit der FFT die Frequenz der Grundschiwingung bestimmt. Mit dieser konnten wir eine erste Überschlagsrechnung für das E-Modul von Kupfer anstellen. Diese ist im Messprotokoll zu finden. Da der Wert in der erwarteten Größenordnung lag, haben wir die Messreihe mit diesem Aufbau gestartet.

Insgesamt haben wir die Messung gleich wie bei der Testmessung 10 mal durchgeführt, und die Ergebnisse mithilfe der FFT des CASSY Lab 2 grob auf Konsistenz überprüft. Diese Messungen haben wir als unsere Messreihe abgespeichert.

Die Frequenz ist auch abhängig von der Einspannung der Stange, also von der Kraft und der Position und der Orientierung der Einspannung. Weswegen der Fehler aufgrund dieser Effekte auch beachtet werden muss. Dazu haben wir mit der Kupferstange Messungen durchgeführt bei denen wir die Einspannung um 1cm-2cm um den Mittelpunkt variiert haben, sowie die Kraft mit der sie eingespannt ist, als auch die Rotation um die Längsachse. Diese haben wir als Messreihe für spätere Bestimmung des Fehlers gespeichert.

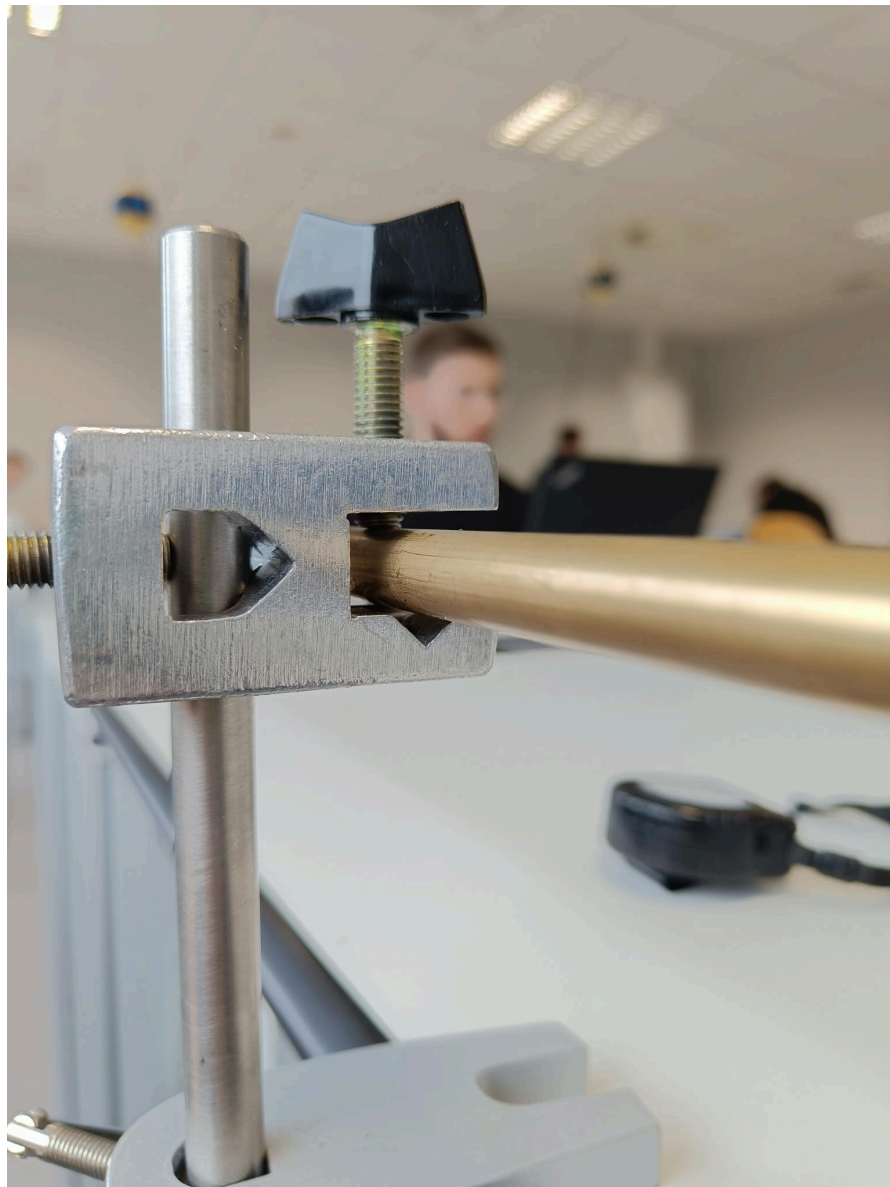


Abbildung 5: Einspannungspunkt der Stange

Das selbe Vorgehen wie bei der Kupferstange haben wir auch bei den anderen Stangen durchgeführt. Wobei wir jedes mal zunächst eine Testmessung aufgenommen habe, um die Empfindlichkeit des Mikrofons für das Material spezifisch ein zu stellen, und zu sehen ob die gemessene Frequenz, und damit auch das E-Modul den Erwartungen entspricht.

Sämtliche gemessenen Daten haben wir gespeichert, sodass wir diese zur Auswertung verwenden können. Einige Messungen mussten wir wiederholen, da wir die Stange nicht richtig angeschlagen hatten, oder sie sich beim Anschlag vom Mikrophon weg gedreht hat. Auch durch Störgeräusche anderer Stangen, oder lautes Reden wurden einige Messungen gestört weswegen wir sie erneut durchführten.

Nach Beendigung aller Messungen haben wir alles wieder abgebaut und an die dafür vorgesehenen Orte zurückgelegt.



Aufgabe 3 Rohdaten

Der unten stehenden Tabelle können die Masse und die Länge der vermessenen Metallstangen entnommen.

Metall Stange	Masse	Länge
Aluminium	460.9g	150cm
Messing	1427.5g	150cm
Kupfer	1505.4g	150cm
Stahl 15	1327.4g	150cm



Tabelle 1: Masse und Länge der Stäbe

In dieser Tabelle finden sie die Messung des Durchmessers. Diese haben wir pro Stange 10 mal durchgeführt. Gemessen wurde mit der Mikrometerschraube an verschiedenen Positionen.

Messung	Aluminium	Messing	Kupfer	Stahl 15
1.	12.05mm	11.98mm	11.98mm	12.00mm
2.	12.05mm	12.01mm	11.98mm	12.00mm
3.	12.06mm	11.98mm	11.98mm	11.99mm
4.	12.05mm	11.99mm	11.98mm	12.00mm
5.	12.06mm	11.98mm	11.98mm	12.00mm
6.	12.06mm	11.98mm	11.98mm	12.00mm
7.	12.06mm	11.99mm	11.98mm	12.00mm
8.	12.05mm	11.99mm	11.98mm	12.00mm
9.	12.06mm	11.98mm	11.98mm	12.00mm
10.	12.07mm	11.98mm	11.98mm	12.01mm

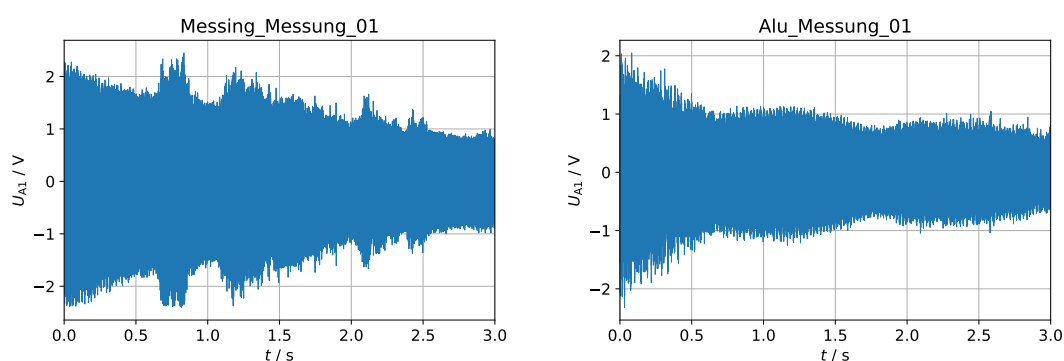
Tabelle 2: Messung der Durchmesser der Stangen

Im Verlauf der Durchführung des Versuches haben wir verschiedene Messreihen aufgenommen. Wobei wir für jede Stange eine Reihe von 10 Messungen durchgeführt haben. Bei dem Kupferstange haben wir noch eine Messreihe aufgenommen, die wir später verwenden werden um den Systematischen Fehler aufgrund der Einspannung zu bestimmen. Zur Übersichtlichkeit und damit im Späteren Verlauf klar ist welche Messreihe welche ist, hier noch eine Auflistung von diesen:

Messreihe	Name	Beschreibung
1.	Kupfer_Messung	10mal Messung der Schwingung der Kupferstange
2.	Alu_Messung	10mal Messung der Schwingung der Aluminiumstange
3.	Stahl_Messung	10mal Messung der Schwingung der Stahlstange
4.	Messing_Messung	10mal Messung der Schwingung der Messingstange
5.	Kupfer_Einsp_Fehler	6mal Messung der Schwingung bei verschiedenen Einspannpositionen Orientierungen und Kraft.
6.	Material_Test	Pro Material einmalige Testmessung, zur Überprüfung das alle Parameter stimmen

Tabelle 3: Übersicht der Messreihen

Alle folgenden Plots wurden mit dem Programm `programme/show_all_plots.py` erstellt. Die FFT haben wir in den Plots bis 5000Hz dargestellt, da wir mit einer Auflösung von $100\mu s$ gemessen haben und nach dem **Nequist Theorem** theoretisch in der Fourieranalyse Frequenzen bis 5000Hz auflöst werden können.

Abbildung 6: Exemplarische Messung für jedes Material und zugehörige Fou-
rierspektren

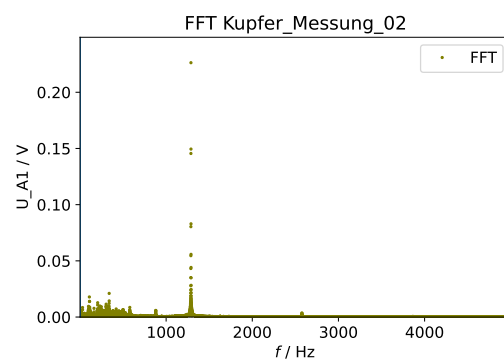
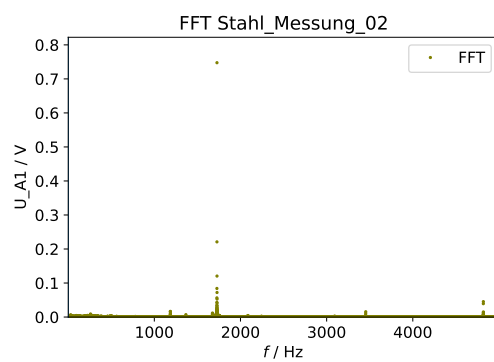
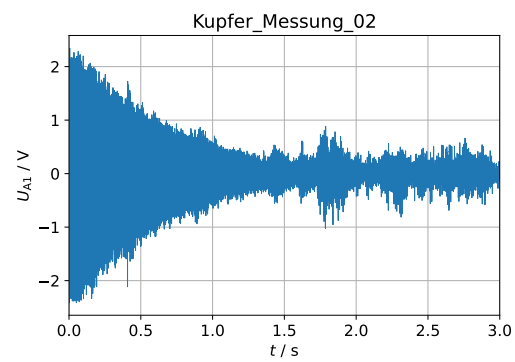
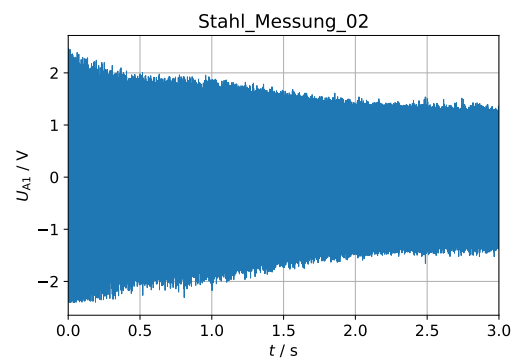
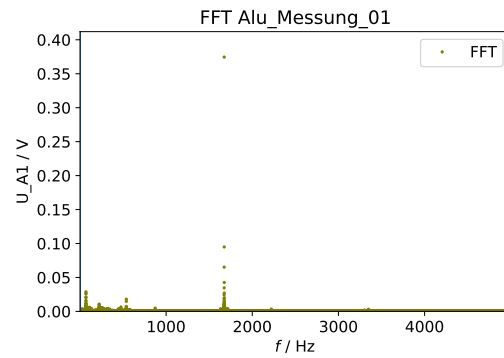
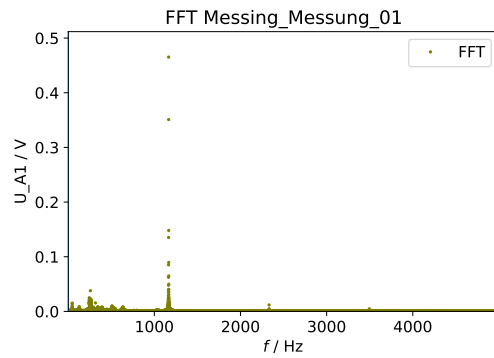
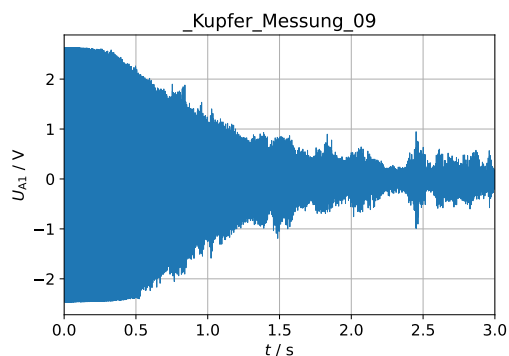
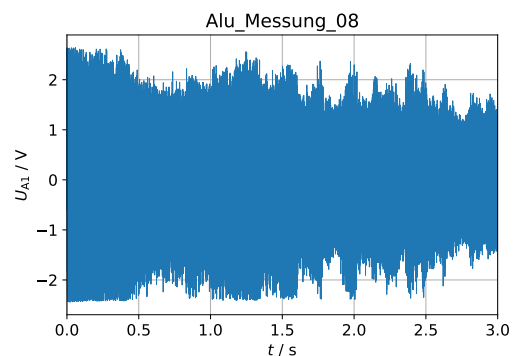


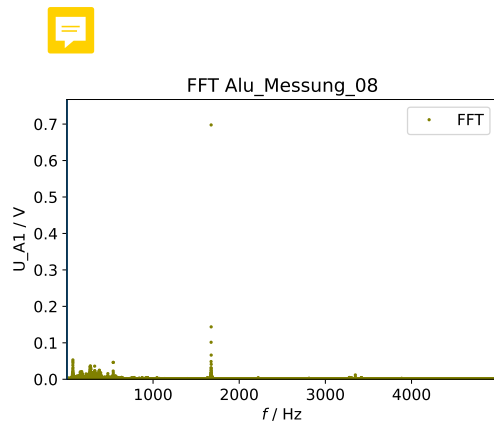
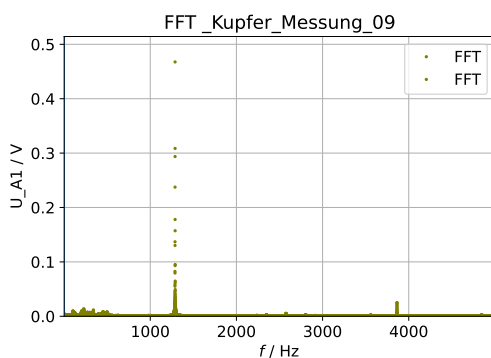
Abbildung 7: Exemplarische Messung mit Störungen und zugehörigen Fourier-spektr



(a) Sättigung vom Mikrophon am Anfang der Messung



(b) Viele Störgeräusche



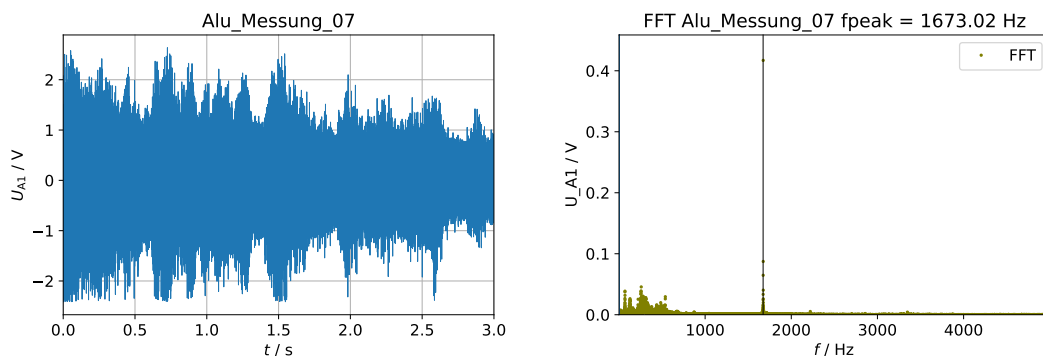
Sämtlichen Rohdaten befinden sich im Ordner Messungen. Die Namen der Datei haben die Struktur 434170_428396_Name_Messreihe. Die Bilder befinden sich im Ordner Bilder als PDF abgespeichert.

Aufgabe 4 Auswertung

Aufarbeitung Rohdaten

Zunächst haben wir unsere gemessenen Daten der Schwingung aufbereitet und selektiert. Dies ist sinnvoll, da es verschiedene Fehlerquellen gibt (Störgeräusche, unsaubere Messung, Übersteuerung, etc.) die das Ergebnisse verfälschen können. Diese Fehlerquellen können einen signifikanten Einfluss auf das Endgültige Ergebnis haben. Um diesen Einfluss möglichst gering zu halten, sollten deshalb die Rohdaten alle angeschaut und aufbereitet werden. Hierbei muss auf verschiedene Dinge geachtet werden. Diese werden im Folgenden an Beispielen Diskutiert.

Abbildung 8: Eine Messung mit vielen Störgeräusche, und trotzdem guter Fourieranalyse



Oben können sie Exemplarischen den Graphen der Messung Alu_Messung_07 sehen, bei der es viele Störgeräusche gab. Wenn wir uns nun jedoch das Frequenzspektrum anschauen, können wir diese Störgeräusche klar von der Frequenz der Stange unterscheiden. Im Frequenzbereich der Stange, sind keine störenden Geräusche, weswegen bei diesen Messdaten keine Datenpunkte entfernt werden müssen zur Erhöhung der Genauigkeit. Dies gilt auch für alle weiteren Messungen in welchen Störgeräusche vorhanden waren.

Bei einigen Messungen wurde die Stange anfangs zu stark angeschlagen, weswegen die gemessene Amplitude anfangs im gesättigten Bereich lag. Da dies die gemessene Resonanzfrequenz beeinflussen kann haben wir bei diesen Messungen die Daten bis zu dem Punkt, an welchem die Amplitude unter 2.5V gefallen ist, weg geschnitten. Dies verfälscht das Ergebnis nicht, da es nur ein kleines Intervall ist, und wir somit trotzdem Datenpunkte von mehr als 2.5s Messung haben. Dies ist ein ausreichend großes Intervall.

In der Durchführung wurde bereits diskutiert, dass wir Messintervalle von $100\mu s$ verwenden können und damit eine ausreichende Abtastrate haben. Somit werden auch in einem Intervall von 2.5s genügend Messpunkte aufgenommen, um daraus die Frequenz ermitteln zu können.



Abbildung 9: Messung ohne weggeschnittenem Anfang

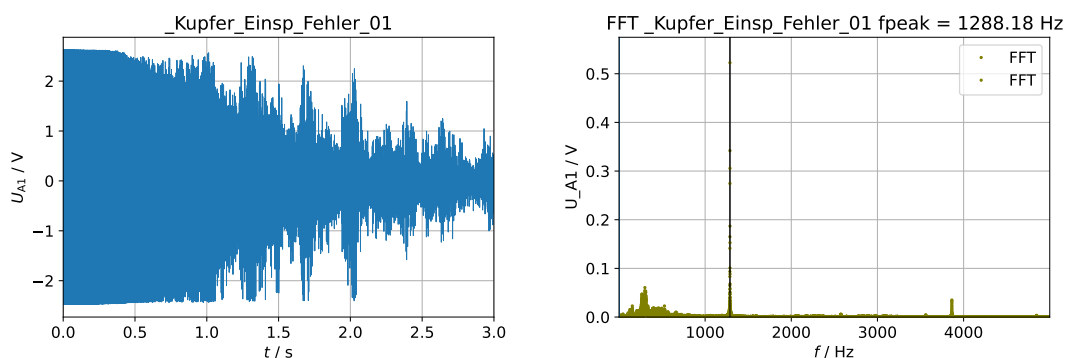
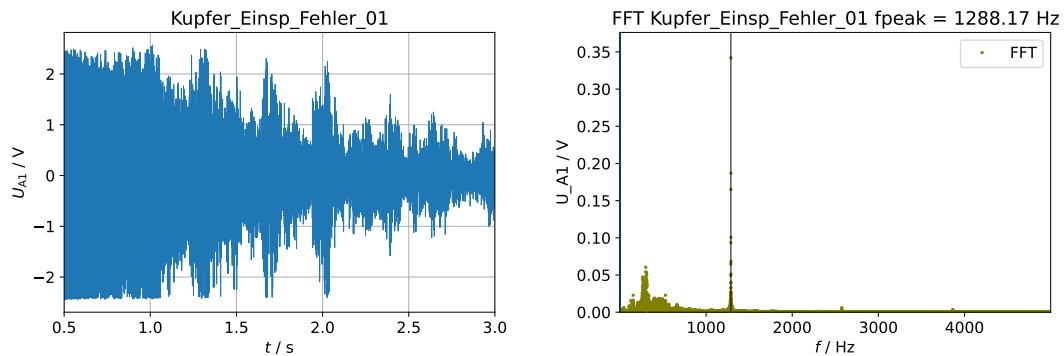


Abbildung 10: Messung mit weggeschnittenem Anfang

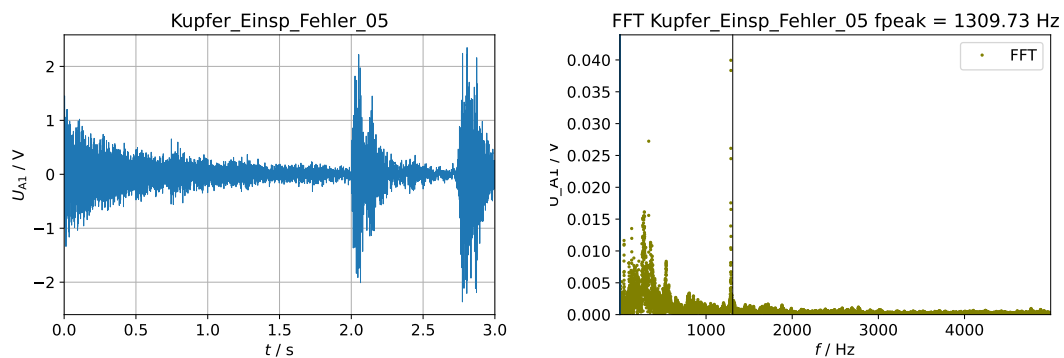


Oben können sie einen Exemplarischen Graphen von unserer Messung: *Kupfer_Einsp_Fehler_01* sehen, in welchem man sehr gut sehen kann, dass anfangs die Amplitude im gesättigten Bereich war, und somit auch nichts über 2.5V aufgezeichnet wurde. In dieser Messung haben wir also 0.5s weggeschnitten damit der mögliche Effekt davon keinen Einfluss auf unser Ergebnis hat. Sie können auch die FFT dieser Messung sehen, und den daraus berechneten Peak. Wobei wir bei der FFT nur dem Relevanten Bereich zwischen 0 und 2000 Hz dargestellt haben. An dem Wert des Peaks können Sie sehen, dass das Wegschneiden des Anfangs einen Einfluss hatte. Dieser tritt jedoch erst in der zweiten Nachkommastelle auf. Ist also ein geringer Einfluss. Wir wollen ihn jedoch der Genauigkeit halber nicht vernachlässigen. Und schneiden somit bei den Messdaten, bei denen anfangs überteuert wurde, einen Teil ab.

Eine genaue Auflistung von allen Daten bei denen wir den Anfang der Daten weggeschnitten haben, zur Bestimmung der Frequenz, wird unten angegeben. Dieses hier ist nur eine Exemplarische Diskussion warum dies sinnvoll ist.

Wir hatten bei unserer Messreihe 5. eine Messung (*Kupfer_einsp_Fehler_05*), bei welcher auf Grund von Störgeräusche und anderen Messeinflüssen, ein sehr unsauberes Frequenzspektrum nach der Fourieranalyse erhalten haben.

Abbildung 11: Messung mit sehr starken Störungen auch über 1000 Hz



In der FFT kann man sehr gut erkennen, dass wir auch eine vergleichsweise starke Streuung der Frequenzen im Bereich der zu Ermittelnden Grenzfrequenz haben. Aufgrund der ungenauen Messung haben wir sie nicht bei der Auswertung berücksichtigt.

Diese ist aber die einzige Messung, welche wir nicht berücksichtigt haben.

Liste der Messungen bei denen Teile weggeschnitten wurden:

- Alu_Messung_8 bis 0.45s
- Kupfer_Einsp_Fehler_1 bis 0.5s
- Kupfer_Einsp_Fehler_5 aus der Auswertung genommen
- Kupfer_Messung_3 bis 0.5s
- Kupfer_Messung_4 bis 0.5s
- Kupfer_Messung_6 bis 0.5s
- Kupfer_Messung_7 bis 0.5s
- Kupfer_Messung_9 bis 0.5s
- Messing_Messung_6 bis 0.5s
- Messing_Messung_7 bis 0.5s
- Stahl_Messung_1 bis 0.2s
- Stahl_Messung_9 bis 0.5s



Auswertung der Schwingungsmessungen

Aus unseren Messreihen 1 bis 4 konnten wir mithilfe einer FFT die wir mit Python durchgeführt haben die Grundfrequenz bestimmen. Hierfür haben wir das Lokale Maximum im Intervall 1000 bis 2000 Herz ermittelt, um Umgebungsrauschen nicht zu berücksichtigen. Da wir für Metalle erwarten, dass die Schwingungsfrequenz in diesem Bereich liegt, und eine Analyse der Rohdaten dieses auch für alle Messungen bestätigt hat, können wir dieses verlustfrei machen. So konnte auch sichergestellt werden, dass wir nicht die Peaks von Störgeräusche (Reden, Laufgeräusche, etc.) ermitteln. In der Folgenden Tabelle werden unsere Ergebnisse für die Frequenzen der einzelnen Messungen der Stangen dargestellt (mit dem Programm Statistik_Fehler).

Messung Nr.	Stahl 15	Aluminium	Messing	Kupfer
Nr. 1	1726.73Hz	1673.88Hz	1166.31Hz	1288.93Hz
Nr. 2	1726.02Hz	1673.85Hz	1166.53Hz	1288.11Hz
Nr. 3	1726.21Hz	1673.61Hz	1166.28Hz	1288.03Hz
Nr. 4	1726.45Hz	1673.73Hz	1166.32Hz	1288.15Hz
Nr. 5	1726.29Hz	1673.67Hz	1166.27Hz	1287.99Hz
Nr. 6	1726.41Hz	1673.81Hz	1166.47Hz	1288.03Hz
Nr. 7	1726.64Hz	1673.02Hz	1166.29Hz	1288.02Hz
Nr. 8	1726.76Hz	1673.52Hz	1166.32Hz	1288.13Hz
Nr. 9	1726.90Hz	1673.90Hz	1166.41Hz	1288.13Hz
Nr. 10	1726.88Hz	1673.60Hz	1166.79Hz	1288.66Hz

Bestimmung der Fehler und Fehlerfortpflanzung

Für die Auswertung der Daten und der endgültigen Berechnung der Elastizitätsmodule, müssen wir die Fehler auf folgende Größen beachten. Hier sind sowohl die Statistischen Fehler als auch die Systematischen Fehler relevant.

Fehlerbehaftete Größen:

- Länge der Metallstangen (Systematischer Fehler)
- Masse der Metallstangen (Systematischer Fehler)
- Durchmesser der Metallstangen (Systematischer und Statistischer Fehler)
- Gemessene Schwingungsfrequenz (Systematischer und Statistischer Fehler)

Systematische Fehler

Die Systematischen Fehler müssen getrennt von den Statistischen Fehlern fortgepflanzt werden. Wir haben einen Systematischen Fehler auf alle unsere Messgrößen. Bei der Längenmessung rührt dies von der Genauigkeit des Bandmaßes her. In unserem Fall haben wir die Güteklasse II. Bei der Analysewaage hängt dieser auch von der Genauigkeit ab, so wie bei der Mikrometerschraube.

Diese Informationen werden vom Hersteller gegeben, und können im Datenblatt des Geräts nachgeschlagen werden.

Der Systematische Fehler der Frequenz kommt von der Digitalisierung des akustischen Signals. Hierfür ist die verwendete Spannungsintervallbreite und die Auflösung (12Bit) relevant. Daraus berechnet sich der Systematische Fehler.

Wobei Δ_{dig} der Systematische Fehler auf die Frequenz auf Grund der Digitalisierung ist, I die Spannungsintervallbreite (Wir haben einen Bereich von -3V bis 3V gewählt) und A die Auflösung. Im Folgenden bezeichnen ein Δ_i immer einen Systematischen Fehler auf eine Messgröße und σ_i einen statistischen Fehler.

$$a = \frac{I}{A} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \Delta_{dig} = \frac{a}{\sqrt{12}} \quad (9)$$

Zusätzlich zu diesem Systematischen Fehler, erhalten wir noch einen Systematischen Fehler durch den Einfluss der Einspannposition. Dabei gehen wir davon aus, dass der Systematische Fehler auf die Frequenz bei allen Stangen gleich ist. Deshalb haben wir zur Fehlerabschätzung nur eine Messreihe mit der Kupfer Stange durchgeführt. Dafür haben wir die Einspannposition um $\pm 2cm$ verändert. Dann haben wir die Rotation der Stange und den Druck der Schraube zufällig variiert.

Test Messung bei Kupfer	Frequenz
1	1288.18Hz
2	1288.26 Hz
3	1288.40Hz
4	1288.41 Hz
6	1288.00 Hz

Tabelle 4: Frequenzen der Testmessungen

Wir gehen davon aus, dass der systematische Fehler symmetrisch verteilt ist. Zum abschätzen betrachten wir die größte Abweichung einer Einzelnen Fehler Messung vom Erwartungswert und nehmen diese dann als Toleranz. Da der Erwartungswert bei 1288.22Hz liegt, hat die Messung 6 die Größte Abweichung von 0.22Hz . Somit kennen wir die Systematischen Fehler auf alle unsere Größen.

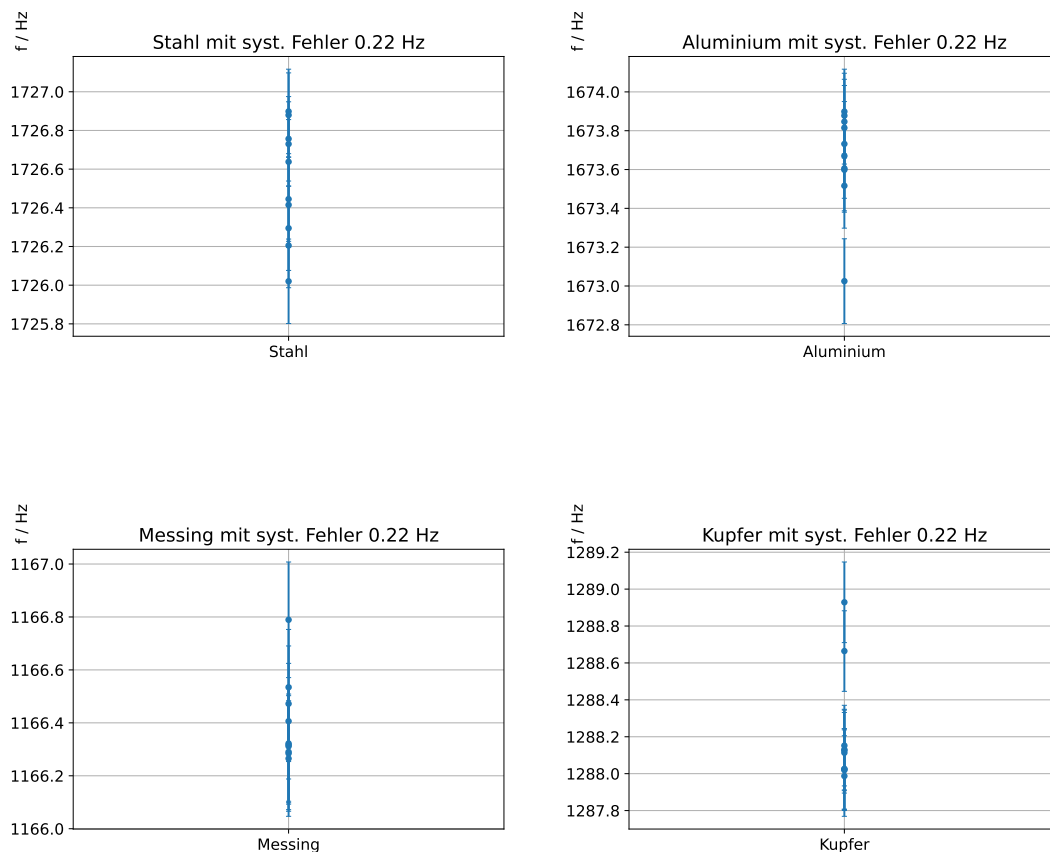
Messgröße	syst. Fehler
Masse	$\pm 0.2\text{g}$
Länge	$\pm 0.7\text{mm}$
Durchmesser	$\pm 0.01\text{mm}$
Frequenz	$\pm 0.423\text{mV}$ (Digitalisierung) $\pm 0.22\text{Hz}$ (Einspannung)

Tabelle 5: Tabelle mit Systematischen Fehlern auf einzelne Messgrößen

Da der Digitalisierungsfehler auf die Frequenz einen deutlich kleineren Einfluss hat als der Einspannungsfehler haben, werden wir den Digitalisierungsfehler in der folgenden Fehlerbetrachtung vernachlässigt.

Der Graph zeigt für jedes Material alle aus den Messdaten bestimmten Resonanzfrequenzen, mit unserem abgeschätzten systematischen Messfehler vom Einspannen.

Abbildung 12: Systematischer Fehler auf die Frequenz



statistische Fehler

Aus den oben angeführten Frequenz haben wir mit Hilfe des Python Programmes (Statistik_Fehler) das Arithmetische mittel und daraus den Resultierenden statistischen Fehler berechnet. Hierfür haben wir folgende Beziehungen für Statistische Messunsicherheiten verwendet. Wobei μ im allgemeinen der Mittelwert ist, s^2 die Varianz und σ_i der Fehler auf die Größe ist (x_i sind die Datenpunkte und n die Anzahl der Messungen).

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (10)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2 \quad (11)$$

$$\sigma_f = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (12)$$

Für die verschiedenen Stangen ergeben sich folgende Mittelwerte und statistische Fehler.

Metall Stange	Erwartungswert der Frequenz	stat. Fehler auf Frequenz	syst. Fehler auf Frequenz
Stahl 15	1726.53Hz	$\pm 0.094\text{Hz}$	$\pm 0.2\text{Hz}$
Aluminium	1673.66Hz	$\pm 0.08\text{Hz}$	$\pm 0.2\text{Hz}$
Messing	1166.40Hz	$\pm 0.052\text{Hz}$	$\pm 0.2\text{Hz}$
Kupfer	1288.22Hz	$\pm 0.10\text{Hz}$	$\pm 0.2\text{Hz}$

Tabelle 6: Fehler auf die Frequenz der Stangen

Beim mehrfachen messen des Durchmessers der Stäbe, tritt ein weiterer statistischer Messfehler auf. Wir haben diesen mehrfach gemessen, um zu überprüfen ob unsere Annahme, dass die Stange einen kreisförmigen Querschnitt hat, gerechtfertigt ist. Zur Bestimmung des Mittelwerts und Fehlers auf den Durchmesser haben wir ebenfalls das Pythonprogramm `programme/Statistik_Fehler.py` benutzt. Daraus ergibt sich:

Metall Stange	Erwartungswert auf den Durchmesser	stat. Fehler auf Durchmesser
Stahl 15	12.000mm	$\pm 0.001\text{mm}$
Aluminium	12.057mm	$\pm 0.002\text{mm}$
Messing	11.986mm	$\pm 0.003\text{mm}$
Kupfer	11.981mm	$\pm 0.001\text{mm}$

Tabelle 7: Fehler auf den Durchmesser der Stangen

Somit haben wir den Messfehler auf alle Größen bestimmt und können damit das Elastizitätsmodule berechnen. Hierbei müssen die Statistischen und die Systematischen Fehler getrennt fortgepflanzt werden.



Fehlerfortpflanzung

Für die Fehlerfortpflanzung der Statistischen Fehler gilt: (hier wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung verwendet)

$$\sigma_y^2 = \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{x=\mu} V_{ij}^2 \quad (13)$$

V_{ij} ist die Varianz zwischen den Variablen. In unserem Fall sind die Variablen die Masse, Länge, Resonanzfrequenz und Durchmesser. Bei diesen können wir davon ausgehen, dass sie unkorreliert sind. Also unsere Längenmessung keinen Einfluss auf die Messung des Durchmessers und der Masse hatte. Das selbe gilt für die anderen Messgrößen. Somit müssen wir den Mischterm auf Grund der Kovarianz nicht beachten da diese null ist. Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung vereinfacht sich zu:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{x=\mu}^2 \sigma_i^2 \quad (14)$$

Bei den Systematischen Fehlern verwenden wir die Methode der Größtfehlerabschätzung. Dies ist zwar eine sehr konservative Schätzung des Fehlers, in diesem Fall jedoch sinnvoll, da Masse und Länge je nur einmal gemessen wurden. wenn nun Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 die eingehenden Einzelfehler sind, ist die lineare Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3 \right| \quad (15)$$

Hier gehen wir ebenfalls davon aus, dass die verschiedenen Größen unkorreliert sind.

Als Zwischenergebnis berechnen wir die Dichte. Hierfür berechnen wir den Erwartungswert der Dichte indem wir die Mittelwerte der Benötigten Größen Verwenden. Wir verwenden die Formel die in dem Abschnitt Grundlagen eingeführt werden. Die Rechnung haben wir mit Python durchgeführt (Statistik_Fehler):

$$\text{Formel für die Dichte:} \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 L} \quad (16)$$

Zusätzlich dazu haben wir noch systematische Fehler. Für unser spezifisches Problem lautet die Rechnung die wir machen:

$$\Delta_\rho = \left| \frac{-8M}{\pi D^3 L} \Delta_D \right| + \left| \frac{4}{\pi D^2 L} \Delta_M \right| + \left| \frac{-4M}{\pi D^2 L^2} \Delta_L \right| \quad (17)$$

Wobei hier für M , L , D der Mittelwert bzw. der beste schätzwert für die Größen eingesetzt wird, abhängig vom Material. Und Δ_i für die Systematischen Fehler auf die einzelnen Größen steht. Diese Fehler können sie der Tabelle 5 entnehmen.

Berechnung der Dichte und Diskussion des Ergebniss

Hieraus ergeben sich folgende Erwartungswert und Fehler auf die Dichte.

Metall Stange	Erwartungs Wert Dichte [$\frac{kg}{m^3}$]	stat. Fehler auf die Dichte [$\frac{kg}{m^3}$]	syst. Fehler auf die Dichte [$\frac{kg}{m^3}$]
Stahl 15	7824.53	± 1.94	± 4.23
Aluminium	2691.21	± 0.95	± 2.62
Messing	8434.25	± 4.30	± 4.38
Kupfer	8901.94	± 1.49	± 4.49

Tabelle 8: Ergebnis für die Dichte mit Fehler

Diskussion des Fehlers auf die Dichte

Dieser Tabelle können Sie entnehmen, dass der statistische und der Systematischen Fehler auf die Dichte in der gleichen Größenordnung liegen.

Um zu veranschaulichen welche Größen, den Größten Einfluss auf dieses Zwischenergebnis haben, hier eine Tabelle mit den Systematischen und Statistischen Fehlern auf die Einzelgrößen.

Stange	Aluminium	Messing	Kupfer	Stahl
Syst. Fehler auf M	$\pm 0.0002kg$	$\pm 0.0002kg$	$\pm 0.0002kg$	$\pm 0.0002kg$
Syst. Fehler auf L	$\pm 0.0007m$	$\pm 0.0007m$	$\pm 0.0007m$	$\pm 0.0007m$
Syst. Fehler auf D	$\pm 0.00001m$	$\pm 0.00001m$	$\pm 0.00001m$	$\pm 0.00001m$
Stat. Fehler auf M	0	0	0	0
Stat. Fehler auf L	0	0	0	0
Stat. Fehler auf D	$\pm 0.000002m$	$\pm 0.000003m$	$\pm 0.000001m$	$\pm 0.000001m$

Tabelle 9: Sämtlich Fehler die in die Dichte eingeflossen sind

In dieser Tabelle sind auch sämtliche eingegangenen Fehler bereits in SI Einheiten dargestellt. Somit kann auf den ersten Blick gesehen werden, welche Fehler den größten Einfluss haben. Hier können wir sehen, dass der gesamte systematische Fehler um 2 Größenordnungen größer ist als jener des statistischen Fehlers. Wenn wir nun exemplarisch den Fehler auf den Durchmesser von Aluminium anschauen. $D = (12.057 \pm 0.002 \text{ (stat)}, \pm 0.01 \text{ (syst)})mm$ erkennen wir, dass die relative Abweichung aufgrund des statistischen Fehlers nur 0.017% entspricht, während die auf Grund des Systematischen Fehlers 0.083% entspricht. Somit hat der systematische Fehler des Durchmessers einen größeren Einfluss auf das Endergebnis. Wobei der Systematische Fehler auf Masse und Länge jeweils größer ist als jener auf den Durchmesser. Hier darf aber nicht vergessen werden, dass wir den Systematischen Fehler linear fortgepflanzt haben was zu einer sehr konservativen Schätzung führt. Dies erhöht natürlich den Einfluss der systematischen Fehler auf das Endergebnis.

Des Weiteren kann man an der Tatsache, dass der statistische Fehler auf den Durchmesser signifikant kleiner ist als der Systematische erkennen, dass unser Annahme, dass die Stangen zylinderförmig sind eine gerechtfertigte Annahme war.

Im gesamten können wir also sagen, dass die Systematischen Fehler auf M , L und D , den Fehler auf die Dichte in Endeffekt dominiert haben. Wobei der Systematische Fehler auf die Länge den größten Einfluss hatte.

Berechnung des Elastizitätsmoduls und Diskussion des Ergebnis

Mit der Dichte können wir nun auch das Elastizitätsmodule bestimmen. Dies wird mit der folgenden Formel berechnet.

$$E = (2fL)^2 \rho \quad (18)$$

Hier müssen die Systematischen und die Statistischen Fehler ebenfalls getrennt fortgepflanzt werden. Wobei hier ebenfalls gilt, dass die einzelnen Messgrößen unkorreliert sind. Hierfür haben wir das selbe vorgehen wie bei der Dichte gewählt. Wir können also die selben Formeln (14) (15) verwenden. Wobei dieses mal für die Funktion y die Formel des Elastizitätsmodules verwendet wurde. Die Berechnung haben wir ebenfalls mit dem Pythonprogramm durchgeführt. Die Rechnung haben wir mit ungerundeten Werten durchgeführt, damit Rundungsfehler nur einen kleinen Einfluss auf das Ergebnis haben. Die daraus folgenden Ergebnisse können sie der unten stehenden Tabelle entnehmen mit dem relativen Fehler in Klammern.

Metall Stange	Erwartungswert E-Modul [GPa]	stat. Fehler auf E-Modul [GPa]	syst. Fehler auf E-Modul [GPa]
Stahl 15	209.92	± 0.29 (0.1%)	± 6.11 (2.9%)
Aluminium	67.85	± 0.104 (0.2%)	± 2.28 (3%)
Messing	103.27	± 0.198 (0.2%)	± 3.24 (3%)
Kupfer	132.96	± 0.22 (0.2%)	± 4.05 (3%)

Tabelle 10: Ergebnisse für das E-Modul mit Fehler

Diskussion des Fehlers auf das E-Modul

Zur übersichtlichen Diskussion der Fehler und deren Beitrag zu dem Endgültigen Ergebnis stellen wir Systematische und Statistische Fehler tabellarisch gegenüber.

Metall Stange	Aluminium	Messing	Kupfer	Stahl 15
Erwartungswert von f	1673.66Hz	1166.40Hz	1288.22Hz	1726.53Hz
stat. Fehler von f	± 0.08 Hz	± 0.052 Hz	± 0.10 Hz	± 0.094 Hz
syst. Fehler von f	± 0.2 Hz	± 0.2 Hz	± 0.2 Hz	± 0.2 Hz
stat. Fehler von ρ	± 0.95 kg/m ³	± 4.30 kg/m ³	± 1.49 kg/m ³	± 1.94 kg/m ³
syst. Fehler von ρ	± 2.62 kg/m ³	± 4.38 kg/m ³	± 4.49 kg/m ³	± 4.23 kg/m ³
syst. Fehler von L	± 0.00007 m	± 0.00007 m	± 0.00007 m	± 0.00007 m
stat. Fehler von L	± 0 m	± 0 m	± 0 m	± 0 m

Tabelle 11: Sämtliche Fehler die einfluss auf das E-Modul haben

Wie zu sehen ist, ist der systematische Fehler auf die Frequenz deutlich größer als der statistische. Eine Mögliche Ursache dafür ist, dass wir bei der Fehlerabschätzung für den statistischen Fehler bezüglich der Einspannposition eine sehr konservative Abschätzung gemacht haben, da wir den Wert mit der größten Abweichung vom Erwartungswert genommen haben.

Dies bedeutet, dass der größte Einfluss auf den Fehler, der von der Frequenz stammt, aufgrund der Einspannung ist. Da wir bei der Durchführung der Messreihe die Einspannposition nicht verändert haben, ist der statistische Messfehler davon unbeeinflusst.

Bezüglich der Dichte sind statistischer und systematischer Fehler ca. gleich groß.

Zur Veranschaulichung, ob der systematische Fehler der Dichte oder der Frequenz den größten Einfluss auf das Elastizitätsmodul hat, haben wir von beiden Fehlerquellen getrennt die relative Abweichung berechnet. Beispielhaft für Aluminium: $\rho_{\text{Aluminium}} = 9.8 \cdot 10^{-4}$ und $f_{\text{Aluminium}} = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Die relative Abweichung der Dichte ist größer als die der Frequenz. Dies ist auch bei allen anderen Stäben der Fall.

Die systematischen Fehler der Längenmessung sind sehr klein gegenüber den anderen Fehlern.

Da in der Tabelle alle Werte in SI Einheiten dargestellt sind, kann man direkt ablesen, dass bei der Fehlerfortpflanzung auf das E-Modul die Dichte den größten Einfluss hat. Das bedeutet, dass sowohl der systematische als auch der statistische Fehler am stärksten von der Dichte beeinflusst wurden. Das heißt, dass für den statistischen Messfehler der größte Einfluss auf das E-Modul von dem Messen des Durchmessers der Stäbe mit der Mikrometerschraube kommt.

Das E-Modul hat eine relative Abweichung von ca. 3% beim systematischen Fehler bzw. ca. 0.15% für den statistischen Messfehler. Das bedeutet, dass die systematischen Messfehler deutlich überwiegen.

Der systematische Messfehler auf das E-Modul wurde am stärksten von der Längenmessung beeinflusst, da diese den größten Einfluss auf den systematischen Fehler der Dichte hat.



Vergleich mit der Literatur

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse mit den Werten in der Datenbank matweb.com verglichen.

Kupfer

Für die Kupferstange fanden wir, dass es 4 Kupfer Legierungen gibt (z.B. Copper Alloy, UNS C64760, H06 Temper, Flat Products), welche ein in etwa passendes E-Modul haben. Das E-Modul der Legierung ist 132 GPa, welches innerhalb der Messgenauigkeit unseres Ergebnisses liegt. Jedoch stimmt hier die Dichte von 8800 kg/m^3 nicht mit unserem gemessenen Wert überein.

Für das Material (Oxygen-free high conductivity Copper, Hard, UNS C10200) passen sowohl die Dichte (8900 kg/m^3) als auch das E-Modul (117-132 GPa) mit unseren gemessenen Werten im Rahmen der Unsicherheit überein.

Aluminium

Bei Aluminium gab es sehr viele Materialmöglichkeiten, die in unserm Ergebnisbereich liegen (z.B Aluminium 6463-T6). Diese haben alle ein E-Modul von 68.9 - 69.0 GPa, welches etwas über dem von uns bestimmten Wert liegt, aber innerhalb der Unsicherheiten. Die Dichte aus der Datenbank von Aluminium ist ca 2690 kg/m^3 entspricht exakt unserem Wert.

Stahl

Im Fall von Stahl ist der Vergleich mit Literatur Werten etwas schwieriger. Die Datenbank listet viele Stahl Legierungen auf welche auf unsere Messungen zutreffen. Diese sind meist mit einem großen Intervall angegeben, in welchem das Elastizitätsmodul liegt. Somit könnte unsere Stahl Stange aus der Gruppe (Overview of materials for AISI 5000 Series Steel) von Stahl stammen. Diese haben einen Bereich des E-Moduls von 200-210 GPa und eine Dichte von $7.80\text{-}7.85 \text{ kg/m}^3$. Hier liegt unser Stahl am oberen Ende des Intervalls des E-Moduls. Die Unterschiede liegen jedoch noch **im Rahmen der Messgenauigkeit**. Am besten zutreffen auf unsere Werte würde das Material (Bohler-Uddeholm BÖHLER M261 Extra Plastic Lens Mold Steel). Dieses hat ein E-Modul von 210 GPa und eine Dichte von 7.82 kg/m^3 . Hier stimmt vor allem die Dichte sehr gut mit unserer Berechnung überein.

Messing

Für Messing sind die passenden Legierungen alle Copper-Beryllium Legierungen (z.B Materion Beryllium Copper Alloy 165 Forgings & Extrusions). Diese haben exakt die passende Dichte und ein E-Modul von 131 GPa, welches **innerhalb des systematischen Messfehlers liegt**.



Fazit

Im gesamten können wir sagen, dass man mithilfe der Eigenschaften die wir von den Materialien bestimmt haben das genaue Material auf eine kleine Menge von Möglichkeiten einschränken kann. Es reicht jedoch nicht aus, um das genaue Material zu bestimmen. Hierfür müssten wir eine weitere Eigenschaft bestimmen. Die Verringerung der Messfehler würde nicht reichen um das Material weiter ein zu schränken, da die Werte in der Datenbank nicht so genau angegeben sind.