

1 Mechanik

1.1 Erdbeschleunigung mit dem Pendel

Aufgaben: In diesem Experiment werden die Schwingungen eines physikalischen Pendels untersucht. Aus der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels wird die Erdbeschleunigung ermittelt.

**Versuch
1M1**

Vorkenntnisse/Grundlagen: Beschreibung von Schwingungen, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Satz von Steiner.

Literatur:

- F. Kohlrausch: Praktische Physik 1, ISBN 3-519-23001-1, S.62 - S.64 (Orts- und Zeitabhängigkeit der Erdbeschleunigung)
- F. Kohlrausch : Praktische Physik 3, ISBN 3-519-23000-3, S.293 - S.295 (Tabellenwerte der Erdbeschleunigung)
- Abfrage der Erdbeschleunigung für beliebigen Ort, Bundesamt für Kartographie und Geodäsie: <http://gibs.bkg.bund.de/geoid/gscomp.php?p=s>

1.1.1 Das mathematische Pendel

Das einfache mathematische Pendel besteht aus einer punktförmigen, schweren Masse m_S , die an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt ist (Abb.1.1). In der Ruhelage bewirkt die Schwerkraft $F_g = m_S \cdot g$ mit g als Erdbeschleunigung, dass das Pendel senkrecht hängt. Nach Auslenkung aus der Ruhelage um einen kleinen Winkel φ_{\max} (klein bedeutet hier $\sin \varphi_{\max} \approx \varphi_{\max}$) entsteht ein rückstellendes Drehmoment $l \cdot F_r$, das das Pendel wegen seines Trägheitsmomentes in harmonische Schwingungen versetzt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -m_S \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi) \approx -m_S \cdot g \cdot l \cdot \varphi, \quad (1.1)$$

wobei $J = m_T \cdot l^2$ das Trägheitsmoment der trägen Masse m_T in der Entfernung l vom Aufhängepunkt ist und die rechte Seite das rücktreibende Drehmoment darstellt; φ ist der momentane Auslenkwinkel und $\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$ die momentane Winkelbeschleunigung. Mit $m_T = m_S$ (Einstein'sches Äquivalenzprinzip der Gleichheit von schwerer und träger Masse) wird die Bewegung unabhängig von den Massen:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi = -\omega^2 \cdot \varphi. \quad (1.2)$$

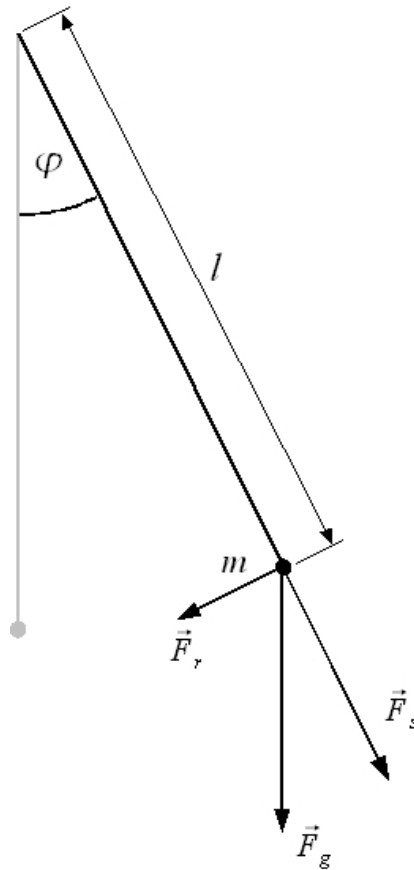


Abbildung 1.1: Das mathematische Pendel

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung eine harmonische Schwingung darstellt:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t). \quad (1.3)$$

$\omega = \sqrt{g/l}$ ist die Kreisfrequenz der Schwingung. Die Anfangsbedingungen legen die Integrationskonstanten A und B fest. Mit $\varphi(t=0) = \varphi_{\max}$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ (Start der Pendelbewegung vom Auslenkwinkel φ_{\max} ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit) ergibt sich

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cdot \cos(\omega t). \quad (1.4)$$

Die Schwingungsdauer beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.5)$$

bzw.

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{g} \cdot l. \quad (1.6)$$

Das Quadrat der Schwingungsdauer wächst also linear mit der Pendellänge l .

1.1.2 Das physikalische Pendel

Die Bewegungsgleichung für ein physikalisches Pendel, d.h. eines ausgedehnten, massebehafteten Systems, das um einen Aufhängepunkt bzw. um eine Achse schwingen kann, ist formal mit der des mathematischen Pendels identisch:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi. \quad (1.7)$$

Das rücktreibende Drehmoment wird wieder von der Schwerkraft erzeugt. Nach dem Schwerpunktssatz verhält sich das System so, als ob die Gesamtmasse m im Schwerpunkt konzentriert ist. Demgemäß ist l_s die Distanz von Aufhängepunkt bzw. Drehachse zum Schwerpunkt S . Die Trägheit ist gegeben durch das Gesamtträgheitsmoment J um die Drehachse. Man erhält als Lösung wieder eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot l_s}{J}. \quad (1.8)$$

Mit $\omega^2 = 4\pi^2/T^2$ wird die Schwingungsdauer T dann

$$T^2 = \frac{1}{g} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{J}{ml_s}. \quad (1.9)$$

1.1.3 Bestimmung der Erdbeschleunigung

Das vorliegende physikalische Pendel besteht aus dem Winkelaufnehmer-Profil, der Pendelstange und dem zylindrischen Pendelkörper (Abb. 1.2). Um die Erdbeschleunigung g aus der Pendelfrequenz zu bestimmen, müsste man also das gesamte Trägheitsmoment, Masse und Schwerpunkt des Pendels kennen. Im Prinzip kann man die Trägheitsmomente der einzelnen Bestandteile um die Pendelaufhängung bestimmen und zum Gesamtträgheitsmoment zusammenaddieren. Den Schwerpunkt erhält man aus den Schwerpunkten der einzelnen Bestandteile, die man mit den Einzelmassen gewichtet mittelt:

$$\vec{S}_{ges} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{S}_i}{\sum m_i}, \quad (1.10)$$

wobei \vec{S}_i die Schwerpunkte der Einzelteile und m_i ihre Massen sind. Dabei würde man die Bestandteile durch einfache geometrische Objekte annähern, deren Trägheitsmomente und Schwerpunkte sich mit vernünftigem Aufwand berechnen lassen (Pendelkörper durch homogenen Zylinder, Stange durch homogene Stange, Winkelaufnehmer durch Hohlzylinder).

Eine einfachere Möglichkeit, g zu bestimmen, besteht darin, den systematischen Fehler, der durch das Trägheitsmoment J_{St} und das Rückstellmoment D_{St} der Stange (mit Winkelaufnehmer) auftritt, zu minimieren. Man geht dabei so vor, dass zunächst die Schwingungsfrequenz der Stange allein bestimmt wird. Danach wird der Pendelkörper an der Stelle angebracht, an der die Stange/Pendel-Kombination dieselbe Schwingungsfrequenz hat wie die Stange allein. In diesem Fall

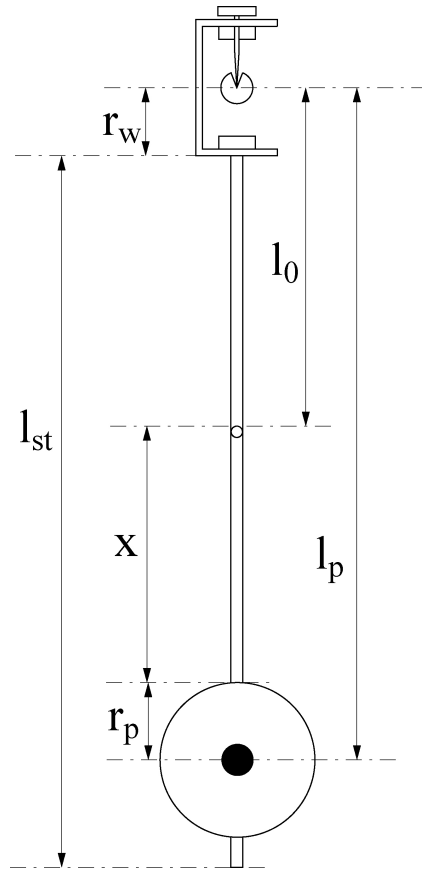


Abbildung 1.2: Pendel im Versuchsaufbau

beeinflussen sich Pendelkörper und Stange nicht. Für die Stange allein gilt:

$$\omega_{st}^2 = \frac{D_{st}}{J_{st}}.$$

Für den Pendelkörper allein gilt:

$$\omega_p^2 = \frac{D_p}{J_p}.$$

Das physikalische Pendel, bestehend aus Stange und Pendelkörper, hat die Eigenfrequenz:

$$\omega^2 = \frac{D_{st} + D_p}{J_{st} + J_p} = \omega_p^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_{st}}{D_p}}{1 + \frac{J_{st}}{J_p}} = \omega_{st}^2 \cdot \frac{1 + \frac{D_p}{D_{st}}}{1 + \frac{J_p}{J_{st}}}. \quad (1.11)$$

Hat man nun das Pendel so eingestellt, dass $\omega = \omega_{st}$ gilt, so sieht man aus Gl.1.11, dass dann auch gelten muss: $\frac{J_p}{J_{st}} = \frac{D_p}{D_{st}}$. Umgeformt ergibt sich

$$\frac{D_p}{J_p} = \frac{D_{st}}{J_{st}} \equiv \omega_{st}^2 = \omega^2 = \omega_p^2.$$

Das heißt, dass man das Pendel nun so behandeln kann, als bestünde es bloß aus dem Pendelkörper, der masselos aufgehängt ist. Die Ausdehnung des Pendelkörpers wird dabei nicht vernachlässigt. Man benutzt also das Trägheitsmoment eines

homogenen Zylinders mit Radius r_p , der im Abstand l_p um den Aufhängepunkt schwingt. Dieses ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Steiner zu:

$$J_p = \frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2. \quad (1.12)$$

Für das Quadrat der Kreisfrequenz erhält man dann

$$\omega^2 = \frac{D_p}{J_p} = \frac{m_p \cdot g \cdot l_p}{\frac{1}{2}m_p r_p^2 + m_p l_p^2}. \quad (1.13)$$

Daraus ergibt sich die Erdbeschleunigung g zu

$$g = \omega^2 l_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{l_p^2} \right). \quad (1.14)$$

In der Klammer beschreibt die 1 das mathematische Pendel, während der zweite Term die Korrektur ist, die die Ausdehnung des Pendelkörpers berücksichtigt. Kreisfrequenz ω , Frequenz f und Periodendauer T hängen dabei stets über

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.15)$$

zusammen.

1.1.4 Versuchsaufbau und Durchführung

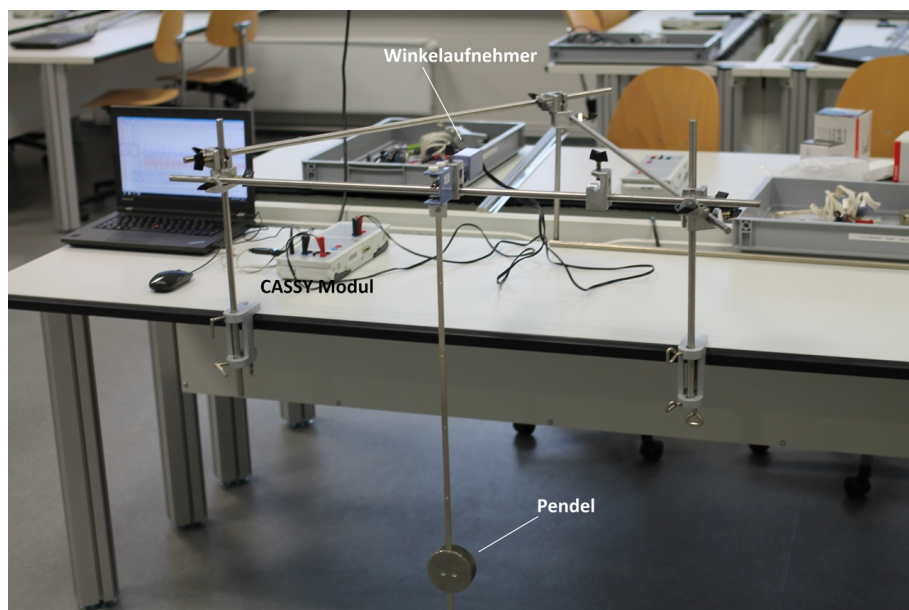


Abbildung 1.3: Versuchsaufbau

Das Pendel besteht aus einer Masse, die verschiebbar an einer Stange angebracht ist. Die Aufhängung des Pendels ist ein U-Profil mit zwei Spitzen und zwei Permanentmagneten (Abb. 1.4). Die Spitzen bilden das Lager und werden in die Nut

des Winkelaufnehmers gesetzt. Der Winkelaufnehmer enthält eine Hall-Sonde, die das Magnetfeld senkrecht zur Nut misst. Dreht sich nun die Aufhängung mit den Permanentmagneten um den Winkelaufnehmer, so liefert die Hallsonde eine Spannung, die proportional zum Sinus des Winkels ist. Für kleine Winkel ist diese Spannung näherungsweise proportional zum Winkel selbst.

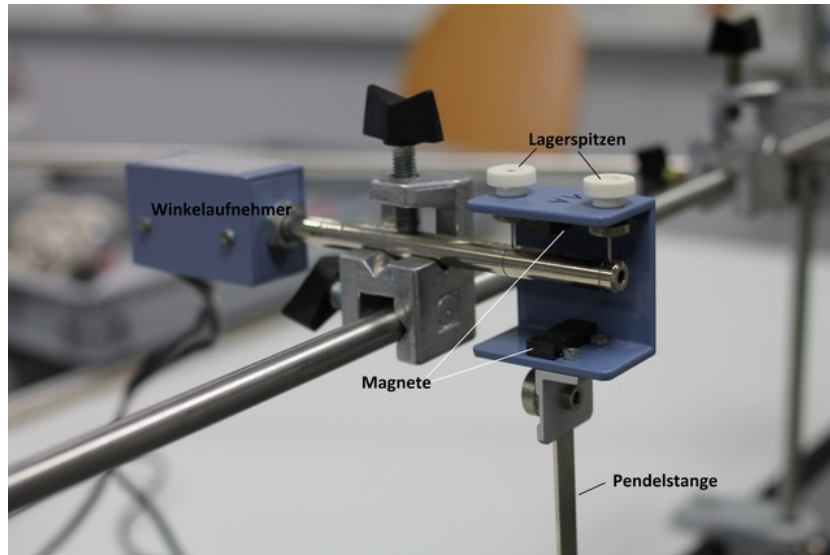


Abbildung 1.4: Aufhängung des Pendels

Mit Hilfe von Stativstangen, Tischklemmen und Verbindungsmuffen wird ein Gestell als Dreibein konstruiert, das den Winkelaufnehmer hält (Abb. 1.3). Der Aufbau sollte so stabil sein, dass bei der Pendelbewegung die Aufhängung nicht mitschwingt.

Der Winkelaufnehmer kann direkt an das CASSY-Modul über zwei Leitungspaare angeschlossen werden (Abb. 1.5). Das eine dient zur Spannungsversorgung und ist besonders gekennzeichnet, das zweite liefert die gemessene Hallspannung. Durch Regeln der Versorgungsspannung kann die Nulllage eingestellt werden.

Bei der Datenaufnahme wird zunächst der zeitliche Verlauf der Spannung aufgezeichnet, die die Schwingung des Pendels wiedergibt. Anschliessend wird die Periodendauer der Pendelschwingung bestimmt. Zunächst lässt man die Stange samt Aufnehmer alleine schwingen und bestimmt die Periodendauer. Dann bringt man den Pendelkörper an und verschiebt ihn solange, bis man wieder dieselbe Periodendauer wie bei der Stange allein erhält. Dann erfolgt eine Messung, aus der die Periodendauer für das gesamte Pendel bestimmt wird. Um die Erdbeschleunigung g zu bestimmen, müssen außerdem **sorgfältig** der Abstand von dem Aufhängepunkt des Pendels zum Mittelpunkt des Pendelkörpers und der Radius des Pendelkörpers gemessen werden. Um die Reproduzierbarkeit der Messung sicherzustellen und um grobe Messfehler auszuschließen, werden jeweils mindestens drei Schwingungsvorgänge aufgezeichnet und drei Messungen der Pendellänge durchgeführt.

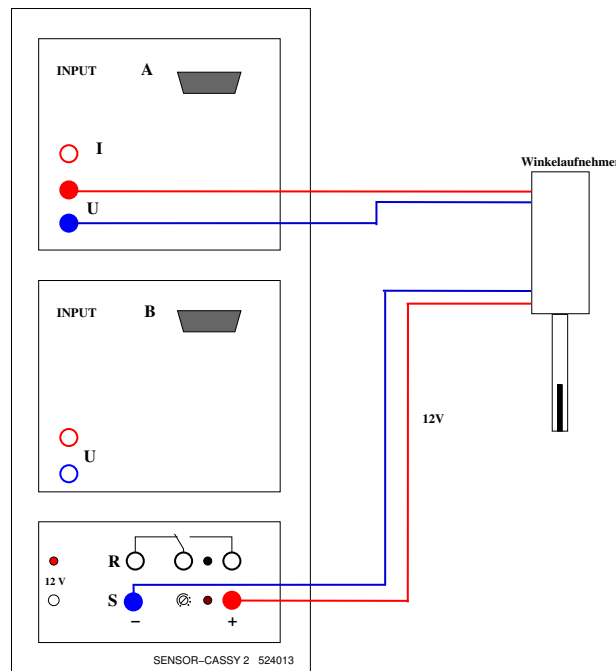


Abbildung 1.5: Anschluss des Winkelaufnehmers

Bestimmung der Frequenzen

Um aus der aufgezeichneten Schwingung die Periodendauer zu ermitteln, zählt man eine bestimmte Anzahl n voller Perioden aus und teilt das entsprechende Zeitintervall durch n :

$$T = \frac{t_{\text{ende}} - t_{\text{start}}}{n}. \quad (1.16)$$

Um eine möglichst genaue Zeitablesung zu erreichen, verwendet man charakteristische Punkte im Verlauf der aufgezeichneten Schwingungen, z.B. die Spannungsmaxima. Um die Genauigkeit der Bestimmung der Periodendauer weiter zu verbessern und um Probleme bei der Messung zu erkennen, wie sie beispielsweise durch eine zu große Auslenkung des Pendels zu Beginn auftreten können, bestimmt man die Periodendauer mit Hilfe einer linearen Regression. Dazu bestimmt man zum Beispiel (algorithmisch oder einfach von Hand) die Zeitpunkte t_i der i -ten Maxima für $i = 0, 10, 20, \dots$ und trägt dann t_i gegen i auf. Dabei schätzt man die Genauigkeit der Ablesung der t_i zunächst und überprüft diese Schätzung anhand von Residuenplot und Güte der Anpassung.

Fehlerrechnung

In die Bestimmung von g gehen die Periodendauer T , die Pendellänge l_p und der Radius des Pendelkörpers r_p ein. Im Folgenden wird abgeschätzt, wie sich die Messfehler dieser Größen im Ergebnis von g niederschlagen.

- Der Fehler auf l_p ist durch das Messverfahren mit dem Maßband bestimmt und lässt sich nur schwer unter 1mm bringen, was bei einem l_p von ca. 70 cm zu einem relativen Fehler von 1-2 Promille führt.

- Der Fehler von r_p wird durch einen Faktor $r_p^2/l_p^2 \approx 1/300$ unterdrückt und fällt daher kaum ins Gewicht. Selbst wenn r_p lediglich auf 10 % genau bestimmt wird, schlägt sich dieser Fehler nur noch im sub-Promillebereich auf g nieder.
- Die Frequenz sollte sinnvollerweise mit einer Genauigkeit bestimmt werden, die deutlich besser ist als die von l_p , sodass auch dieser Fehler vernachlässigbar klein wird. Um einen relativen Fehler von 0,2 Promille in g zu erhalten, muss T auf 0,1 Promille bestimmt werden, da es quadratisch in g eingeht. Wenn σ_t die Genauigkeit ist, mit der man Start- und Endpunkt bestimmen kann, dann wird der Fehler σ_T auf die Periodendauer: $\sigma_T = \sqrt{2} \cdot \sigma_t / n$. Man sollte also möglichst viele Perioden auszählen, um ein genaues Ergebnis zu erhalten. Nimmt man konkret $\sigma_t = 10$ ms an, dann wird das gesamte Zeitintervall auf 14 ms genau gemessen. Man muss also 140 s lang messen, um eine relative Genauigkeit von 0,1 Promille zu erreichen, was bei einer Frequenz von 0,7 Hz 100 vollen Perioden entspricht. (Durch die Verwendung zusätzlicher Messpunkte im Rahmen einer linearen Regression verbessert sich die Genauigkeit von T noch entsprechend.)
- **Fehler durch Vernachlässigung der Stange:** Wie vorher gezeigt wurde, kann man das Pendel als masselos aufgehängten Zylinder beschreiben und die Stange samt Aufhängung vernachlässigen. Dies gilt allerdings nur, wenn ω_{St} genau gleich ω_P wird. Tatsächlich, erreicht man aber nie eine genaue Übereinstimmung dieser beiden Kreisfrequenzen, sondern beobachtet eine kleine Abweichung. Man kann abschätzen, wie diese Abweichung sich auf den ermittelten Wert der Erdbeschleunigung auswirkt. Wenn $\omega_{St}^2 = \frac{D_{St}}{J_{St}}$ und $\omega^2 = \frac{D_{St}+D_P}{J_{St}+J_P} = \omega_{St}^2 + \epsilon$, dann gilt $\omega_P^2 = \frac{D_P}{J_P} = \omega^2 + \epsilon \cdot \frac{J_{St}}{J_P}$. Da das Verhältnis der Trägheitsmomente von Stange und Pendelkörper ca. 0,1 ist, geht die relative Abweichung der Frequenzen mit dem Faktor 0,2 in die Bestimmung von g ein, da $g \sim \omega^2$. Um unter einem Promille Abweichung zu bleiben, müssen die beiden Frequenzen also besser als 0,5 % übereinstimmen. Dass dies der Fall war, muss im Rahmen der Versuchsauswertung demonstriert werden. Im Prinzip kann man aus der Abweichung der Frequenzen einen Korrektur-Faktor für g bestimmen und das Ergebnis damit korrigieren.

1.2 Schwingungen von gekoppelten Pendeln

Versuch 1M2 Aufgaben: In diesem Experiment werden die Schwingungen von zwei Pendeln untersucht, die durch eine Feder miteinander gekoppelt sind. Für verschiedene Kopplungsstärken werden die Schwingungsdauern der beiden Grundschrwingungen sowie der Schwebung des Systems gemessen und die Schwebungsdauer mit der Erwartung verglichen.

Vorkenntnisse/Grundlagen: Federverhalten (Hooke'sches Gesetz), Beschreibung von Schwingungen, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Direktionsmoment

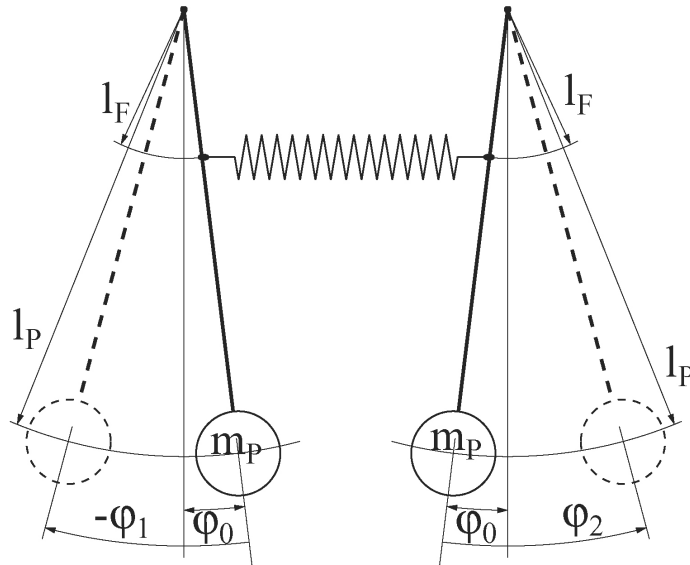


Abbildung 1.6: Gekoppelte Pendel

1.2.1 Die Bewegungsgleichung für das gekoppelte Pendel

Der Versuchsaufbau ist ähnlich wie beim einfachen Pendel. Die Anordnung ist schematisch dargestellt in Abb. 1.6. Die Kopplungsfeder ist befestigt in der Entfernung l_F von den Drehachsen. Die (identischen) physikalischen Pendel $P1$ und $P2$ werden so montiert, dass die Feder bei Ruhstellung der Pendel gespannt ist. Dadurch hängen die Pendel in der Ruhstellung (im Gleichgewicht) nicht in der Vertikalen, sondern um den Winkel φ_o nach innen. Das durch die Feder erzeugte Drehmoment ist

$$M_{F,o} = -D_F \cdot x_o \cdot l_F,$$

wobei D_F die Federkonstante und x_o ihre Verlängerung gegenüber dem entspannten Zustand sind. In der Ruhstellung ist $M_{F,o}$ entgegengesetzt gleich dem durch die Schwerkraft erzeugten Drehmoment

$$M_{S,o} = m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_o,$$

wobei l_s die Entfernung des Schwerpunktes jedes der beiden Pendel von seiner Drehachse und m die Gesamtmasse jedes Pendels bedeuten. Wird $P2$ um φ_2 aus der Nulllage ausgelenkt, so wirkt insgesamt das Drehmoment

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot (\varphi_2 - \varphi_o) - D_F \cdot (x_o + l_F \varphi_2) \cdot l_F$$

oder

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot \varphi_2.$$

Wird außerdem $P1$ um $-\varphi_1$ verschoben, so kommt durch die Feder das Drehmoment $D_F l_F^2 \varphi_1$ hinzu, sodass sich insgesamt ergibt:

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Analog wird für $P1$

$$M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Die Bewegungsgleichungen beider Pendel lauten somit

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1),$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\omega_s^2 = \frac{mgl_s}{J},$$

$$\Omega^2 = \frac{D_F l_F^2}{J} :$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_1 + \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.17)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_2 - \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.18)$$

Dies ist ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen. Die Lösung wird mit Hilfe der Substitutionen $\alpha = \varphi_2 + \varphi_1$, $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ erreicht: Summe und Differenz der beiden Gleichungen 1.17 und 1.18 führen auf die einfachen Differentialgleichungen

$$\ddot{\alpha} = -\omega_s^2 \cdot \alpha \quad (1.19)$$

$$\ddot{\beta} = -(\omega_s^2 + 2\Omega^2) \cdot \beta = -\omega_{sf}^2 \cdot \beta \quad (1.20)$$

mit den Lösungen

$$\alpha(t) = \varphi_2(t) + \varphi_1(t) = A \cdot \sin(\omega_s t) + B \cdot \cos(\omega_s t), \quad (1.21)$$

$$\beta(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = C \cdot \sin(\omega_{sf} t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t). \quad (1.22)$$

Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Liegen beim Start der Bewegung keine Anfangswinkelgeschwindigkeiten vor, d.h. $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$, so wird $A = C = 0$, und aus der Summe der Gleichungen 1.21 und 1.22 wird

$$2\varphi_2(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t),$$

$$2\varphi_1(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) - D \cdot \cos(\omega_{sf} t).$$

Werden die Pendel aus den Positionen $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und $\varphi_2(t=0) = \varphi_{max}$ gestartet, so wird $D = 0$ und $B = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen **gleichsinnig** gemäß

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \quad (1.23)$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \quad (1.24)$$

mit der Kreisfrequenz ω_s , d.h. der Kreisfrequenz jedes Pendels ohne Kopplung.

Werden die Pendel aus den entgegengesetzten Positionen $\varphi_1(t=0) = -\varphi_{max}$, $\varphi_2(t=0) = +\varphi_{max}$ gestartet, so wird $B = 0$ und $D = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen **gegensinnig**:

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \quad (1.25)$$

1.2 Schwingungen von gekoppelten Pendeln

$$\varphi_1(t) = -\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t) \quad (1.26)$$

mit der Kreisfrequenz ω_{sf} :

$$\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2. \quad (1.27)$$

Wird die Schwingung mit Pendel $P1$ mit $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und Pendel $P2$ in Ruheposition, $\varphi_2(t=0) = 0$ gestartet, so wird $B = D = \varphi_{max}$ und

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t) \quad (1.28)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) - \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf}t). \quad (1.29)$$

Jedes Pendel schwingt mit einer Überlagerung von zwei verschiedenen Frequenzen. Mit Hilfe eines Additionstheorems für trigonometrische Funktionen lassen sich die Gleichungen umschreiben in

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos\left(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2}t\right), \quad (1.30)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin\left(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2}t\right). \quad (1.31)$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_k = \frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2} \quad (1.32)$$

$$\omega_{sch} = \frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2} \quad (1.33)$$

wird daraus

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sch}t) \cdot \cos(\omega_k t), \quad (1.34)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\omega_{sch}t) \cdot \sin(\omega_k t). \quad (1.35)$$

Die Bewegung jedes der beiden Pendel besteht also aus der Überlagerung zweier Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{sch} und ω_k . Sie kann als Schwingung der höheren Frequenz ω_k angesehen werden, die mit der niedrigeren Frequenz ω_{sch} moduliert ist. Diese Erscheinung wird Schwebung genannt.

1.2.2 Messgrößen

Der Messung zugänglich sind die Schwingungsdauern der **gleichsinnigen** Mode,

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}, \quad (1.36)$$

der **gegensinnigen** Mode,

$$T_{sf} = \frac{2\pi}{\omega_{sf}}, \quad (1.37)$$

sowie im Falle der **Schwebung**:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} + \omega_s} \quad \text{und} \quad T_{sch} = \frac{2\pi}{\omega_{sch}} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} - \omega_s}. \quad (1.38)$$

Durch Einsetzen von ω_s und ω_{sf} ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Schwingungsdauern:

$$T_k = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s + T_{sf}}, \quad (1.39)$$

$$T_{sch} = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s - T_{sf}}. \quad (1.40)$$

Als Kopplungsgrad κ des Pendelsystems wird das Verhältnis

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{\omega_s^2 + \Omega^2} = \frac{D_F l_F^2}{m g l_s + D_F l_F^2} \quad (1.41)$$

definiert. Mit $\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2$ folgt

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 - \omega_s^2)}{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 + \omega_s^2)} = \frac{T_s^2 - T_{sf}^2}{T_s^2 + T_{sf}^2}. \quad (1.42)$$

Der Kopplungsgrad ist umso kleiner (die Kopplung also umso schwächer), je näher die Befestigungspunkte der Feder an den Drehachsen der Pendel liegen.

1.2.3 Versuchsaufbau und Durchführung

Es werden zwei Pendel im Abstand von ca. 50 cm an dem Gestell befestigt und über ein Federpaar gekoppelt. Die Federn werden in verschiedenen Höhen an den Pendelstangen befestigt, wodurch unterschiedliche Kopplungskonstanten erzielt werden. Da die Federn nicht gestaucht werden können, müssen die Pendel so weit auseinander sein, dass die Federn in der Ruhelage schon gespannt sind. Es muss darauf geachtet werden, dass die Pendelausschläge so klein bleiben, dass die Federn nie völlig entspannt sind.

Beide Winkelaufnehmer können gleichzeitig mit einem CASSY-Modul ausgelesen werden und haben einen unabhängigen Nullabgleich. Um eine günstige Darstellung auf dem Bildschirm zu erzielen, kann die Nulllage eines Pendels entweder durch die Versorgungsspannung des Winkelaufnehmers oder durch Einstellung eines Offsets in der CASSY-Software verschoben werden.

Es werden die Pendelausschläge aufgenommen und die Fouriertransformierten bestimmt. Im allgemeinen Fall erhält man eine Schwebung, die eine Überlagerung aus zwei Schwingungen mit dicht benachbarten Frequenzen ist. Im Fourierspektrum erkennt man deshalb zwei Spitzen, die mit abnehmender Kopplungsstärke zusammenrücken. Lässt man die Pendel gleichsinnig (in Phase) schwingen, so taucht nur die kleinere der beiden Frequenzen auf. Schwingen die Pendel gegensinnig, so erhält man im Spektrum nur die Spitze der höheren Frequenz. Die Abstände l_F zwischen dem Aufhängepunkt des Pendels und der Befestigung der Feder werden gemessen.

Für eine gegebene Position der Kopplungsfedern sollen zunächst die beiden Schwingungsmoden sowie die Schwebung angeregt werden. Um den typischen Fehler der Frequenzmessung zu erhalten, wird die Messung der Schwebung mehrmals

wiederholt und empirisch die Standardabweichung bestimmt. Danach wird der Kopplungsgrad variiert und jeweils eine Schwebung aufgezeichnet.

Um einen Vergleichswert für die Federkonstante zu erhalten, wird die Ausdehnung der Feder bei Belastung mit verschiedenen Massestücken gemessen.

1.2.4 Auswertung

Aus den gemessenen Frequenzen kann jeweils der Kopplungsgrad κ bestimmt werden (Gl. (1.42)). Trägt man $1/l_F^2$ als Funktion von $1/\kappa - 1$ auf, so ergibt sich nach Gl. (1.41) eine Ursprungsgerade, aus deren Steigung die Federkonstante ermittelt werden kann:

$$\frac{1}{l_F^2} = \frac{D_F}{m l_s g} \cdot \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right). \quad (1.43)$$

1.3 Trägheitsmomente

Physikalische Grundlagen: Definition des Trägheitsmomentes, Satz von Steiner, Direktionsmoment, Schwingungen

**Versuch
1M3**

1.3.1 Einführung

Das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers, dessen Massenelemente Δm_i den Abstand r_i zur Drehachse haben, ist gegeben durch

$$J = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 \quad \text{bzw.} \quad J = \int r^2 dm. \quad (1.44)$$

Für eine punktförmige Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gilt

$$J = m \cdot r^2.$$

Das Trägheitsmoment wird aus der Schwingungsdauer einer Drillachse bestimmt, auf die der Probekörper gesteckt wird und die über eine Schneckenfeder elastisch mit dem Stativ verbunden ist (Abb. 1.7):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (1.45)$$

Das System wird zu harmonischen Schwingungen angeregt. Aus der Schwingungsdauer T errechnet man bei bekanntem Direktionsmoment D das Trägheitsmoment des Probekörpers gemäß

$$J = D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2. \quad (1.46)$$

Die Messwerte werden mit den theoretischen Vorhersagen für einen Körper der gegebenen Form verglichen.

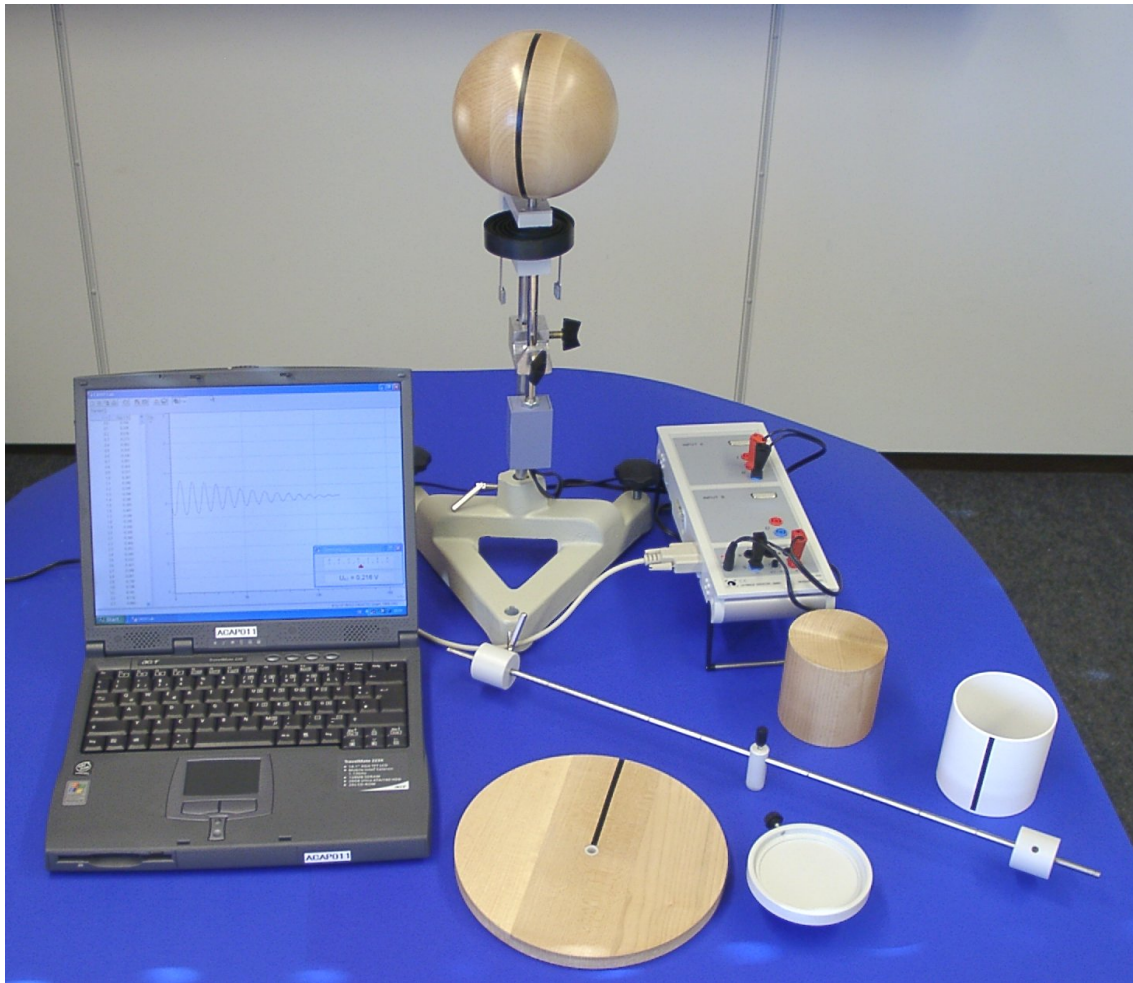


Abbildung 1.7: Versuchsaufbau für die Messung von Trägheitsmomenten.

1.3.2 Versuchsziele

Im ersten Teil des Versuches wird das Trägheitsmoment eines "Massenpunktes" in Abhängigkeit vom Abstand r zur Drehachse bestimmt. Dazu wird ein Stab mit zwei gleichen Massenstücken in Querrichtung auf die Drillachse gesteckt. Die Schwerpunkte der beiden Massstücke haben den gleichen Abstand r zur Drehachse, so dass das System ohne Unwucht schwingt.

Im zweiten Teil des Versuches werden die Trägheitsmomente eines Hohlzylinders, eines Vollzylinders und einer Vollkugel miteinander verglichen. Dazu stehen zwei Vollzylinder mit gleicher Masse jedoch unterschiedlichen Radien zur Verfügung, weiterhin ein Hohlzylinder, der in Masse und Radius mit einem Vollzylinder in etwa übereinstimmt, und eine Vollkugel, deren Trägheitsmoment mit einem der Vollzylinder in etwa übereinstimmt.

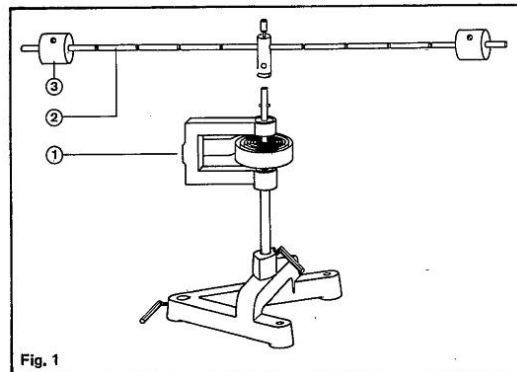
Im dritten Teil des Versuches wird der Steinersche Satz am Beispiel einer flachen Kreisscheibe experimentell verifiziert. Dazu werden die Trägheitsmomente J_a ei-

ner Kreisscheibe für verschiedene Abstände a der Drehachse zum Schwerpunkt gemessen und mit dem Trägheitsmoment J_0 um die Schwerpunktsachse verglichen. Es soll der Steinersche Satz

$$J_a = J_0 + m \cdot a^2 \quad (1.47)$$

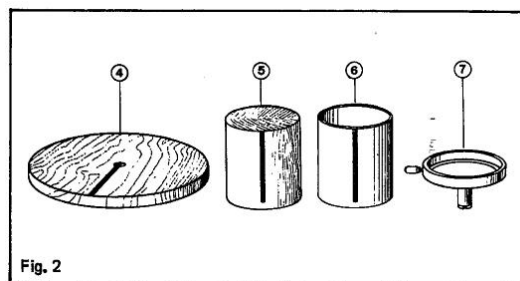
bestätigt werden.

1.3.3 Versuchsaufbau



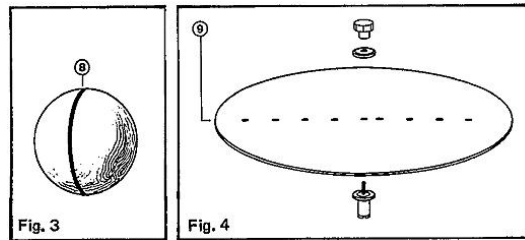
Zum Versuchsaufbau gehören

1. Drillachse mit zweifach kugellagerter Welle, durch eine Schneckenfeder an eine Gabel angekoppelt,
2. Stab mit Kupplungsstück zum Aufstecken auf die Drillachse; je 5 Kerben in ca. 0,05 m Abständen zu beiden Seiten der ebenfalls gekerbten Stabmitte,
3. zwei Massen (als Modell von Massenpunkten), längs des Stabes (2) verschiebbar, mit Kugelrasten, die in die Kerben des Stabes greifen, so dass die Massen in definierten Abständen von der Stabmitte gehalten werden,
4. Dünner Vollzylinder aus Holz (Holzscheibe) mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse,



5. Vollzylinder aus Holz,

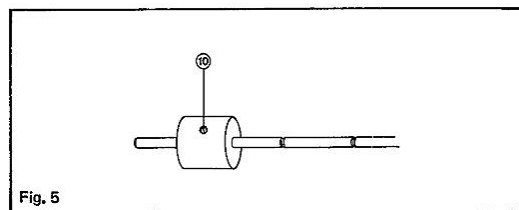
6. Hohlzylinder aus Metall,
7. Aufnahmeteller aus Metall für die Zylinder (5) und (6) mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse und mit Schraube zum Fixieren der Zylinder. Durchmesser und Höhe der Zylinder (5) und (6) stimmen überein (nachmessen!), die Massen der 3 Zylinder (4), (5) und (6) sind näherungsweise gleich (nachmessen!).
8. Kugel aus Holz, Durchmesser ca. 145 mm, mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse. Die Trägheitsmomente der Kugel und des Zylinders (4) sind etwa gleich.



9. Kreisscheibe mit Halterung zum Aufstecken auf die Drillachse mit 9 Löchern zum Aufspannen der Scheibe auf der Halterung in der Scheibenmitte, sowie im Abstand von 0,02; 0,04; ... 0,14; 0,16 m von der Scheibenmitte.
10. Winkelaufnehmer mit Befestigung; CASSY.

Hinweise zum Experimentieren:

Schrauben (10), welche die federnden Kugelrasten der Massen (3) gegen den Stab (2) drücken, nicht betätigen. Die Schrauben sind so eingestellt, dass man einerseits die Massen entsprechend den Versuchsbedingungen längs des Stabes verschieben



kann, und dass die Massen andererseits gegen die Zentrifugalkraft auf dem Stab gehalten werden.

Der Schwingungsvorgang wird mit Hilfe eines Winkelaufnehmers in elektrische Signale umgewandelt. Der Aufnehmer liefert für kleine Auslenkungen eine winkelproportionale Spannung. Er besteht aus einem vernickelten Messingrohr (10 mm Durchmesser) mit angeschraubtem Klingehäuse für die elektrischen Bauteile. In dem Messingrohr befindet sich eine Nut, an deren Ende in einem Langloch eine magnetfeldempfindliche Sonde (Hall-Sonde) eingeklebt ist. Die Sonde ist so orientiert, dass sie auf die zur Nut senkrecht stehende Komponente des Magnetfeldes

anspricht. Die zwei felderzeugenden Permanentmagnete sind so auf die Innenseiten einer U-förmigen Gabel geklebt, dass sich Nord- und Südpol gegenüberliegen. Im Ruhezustand verschwindet daher die vertikale Feldkomponente; die Ausgangsspannung des Winkelaufnehmers ist somit 0. Wird nun die Drillachse um den Winkel α aus der horizontalen Richtung ausgelenkt, tritt eine Feldkomponente in vertikaler Richtung auf. Die exakte Abhängigkeit wird durch die Gleichung

$$B_{\perp} = B \cdot \sin \alpha$$

beschrieben. Im Falle kleiner Winkel kann $\sin \alpha$ durch α approximiert werden, so dass die Ausgangsspannung proportional dem Auslenkwinkel α wird. Die Abweichung von diesem linearen Verhalten liegt bis zu einem Winkel von $\alpha = \pm 14$ Grad (entsprechend $\sin \alpha = 0,24$) unter 1%. Es ist darauf zu achten, dass sich die Hall-Sonde tatsächlich im Magnetfeld und nicht etwa zu weit unten befindet.

Die Versorgungsspannung wird aus der Spannungsquelle des Sensor-CASSYs über das entsprechend gekennzeichnete Leitungspaar zugeführt und soll im Bereich 12-16 V liegen. Es ist auf die Polarität gemäß den Farben der Anschlussstecker (rot-positiv, blau-negativ) zu achten. Bei Fehlbeschaltung tritt keine Ausgangsspannung auf. Die von dem Winkelaufnehmer gelieferten Spannungssignale werden mit Hilfe des Messwerterfassungssystems CASSY aufgezeichnet.

Die Schwingungsdauern sollten zweckmäßigerweise durch Mittelwertbildung aus mehreren Messungen für z.B. fünf Schwingungen bestimmt werden. Aus der Streuung der Messwerte ergibt sich auch der Fehler für die Schwingungsdauern.

Das Trägheitsmoment der Drillachse liegt in der Größenordnung von 10^{-5} kg m^2 . Es ist in der Auswertung nicht berücksichtigt, so dass die experimentell ermittelten Trägheitsmomente stets etwas größer als die theoretisch erwarteten Werte sind.

1.3.4 Bestätigung von $J = f(r^2)$ und Bestimmung des Direktionsmomentes D

Zunächst werden das Gewicht der Massen m_{W1} , m_{W2} und das Gewicht des Stabes m_{Stab} mit einer Waage gemessen. Die Länge des Stabes l_{Stab} , sowie die Abstände der Rillen zum Mittelpunkt werden mit einem Maßband bestimmt.

Dann wird der Stab ohne Massen auf die Drillachse gesteckt und die Schwingungsdauer gemessen. Anschliessend werden die Massen (m_{W1} , m_{W2}) symmetrisch in geeigneten Abständen r von der Stabmitte angeordnet und ebenfalls die Schwingungsdauern gemessen.

Das Trägheitsmoment für den Stab alleine ist

$$J_{\text{Stab}} = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{Stab}} \cdot l_{\text{Stab}}^2$$

und für die "Massenpunkte" im Abstand r von der Drillachse:

$$J_{\text{Massen}} = (m_{W1} + m_{W2}) \cdot r^2 \equiv m_W \cdot r^2.$$

Es gilt also folgender funktionaler Zusammenhang:

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \frac{J_{\text{Massen}} + J_{\text{Stab}}}{D} \\ &= \frac{4\pi^2}{D} m_W \cdot r^2 + \frac{4\pi^2}{D} \cdot J_{\text{Stab}}. \end{aligned}$$

Die Messung mit dem Stab alleine entspricht also dem Messwert für $r = 0$.

Der linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Schwingsdauern T^2 und dem Quadrat des Abstandes r^2 erlaubt es, mit Hilfe einer linearen Regression gemäß

$$T^2 = a \cdot r^2 + b$$

aus der Steigung der Geraden a das Direktionsmoment D zu bestimmen:

$$D = \frac{4\pi^2}{a} \cdot m_W.$$

Mit bekanntem Direktionsmoment D kann anschließend aus dem Achsenabschnitt b das Trägheitsmoment des Stabes experimentell bestimmt werden,

$$J_{\text{Stab}}^{\text{exp.}} = \frac{bD}{4\pi^2},$$

und mit der theoretischen Vorhersage

$$J_{\text{Stab}}^{\text{theo.}} = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{Stab}} \cdot l_{\text{Stab}}^2$$

verglichen werden.

1.3.5 Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern gleicher Masse mit verschiedener Massenverteilung

Dünnere Vollzylinder aus Holz (Holzscheibe)

Die Masse des dünnen Vollzylinders aus Holz (Holzscheibe - HS) m_{HS} wird durch Wiegen und sein Durchmesser d_{HS} mit dem Maßband bestimmt. Dann wird die Holzscheibe auf der Drillachse befestigt und die Schwingungsdauer gemessen.

$$J_{\text{HS}}^{\text{exp}} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{\text{HS}}^2$$

Der theoretisch zu erwartende Wert ergibt sich zu:

$$J_{\text{HS}}^{\text{theo}} = \frac{1}{2} m_{\text{HS}} \left(\frac{d_{\text{HS}}}{2} \right)^2$$

Vollzylinder (VZ) und Hohlzylinder (HZ)

Beide Zylinder werden auf einen Aufnahmeteller (T) gesetzt, so dass sich die Trägheitsmomente J_{VZ} und J_{HZ} nicht unmittelbar experimentell, sondern durch Differenzbildung ermitteln lassen:

$$\begin{aligned} J_{VZ} &= J_{VZ+T} - J_T \\ J_{HZ} &= J_{HZ+T} - J_T \end{aligned}$$

Aufnahmeteller:

$$J_T^{exp} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_T^2$$

Aufnahmeteller + Vollzylinder:

$$J_{VZ+T} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{VZ+T}^2$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Vollzylinders

$$J_{VZ}^{exp} = J_{VZ+T} - J_T$$

im Vergleich zu dem theoretisch zu erwartenden Wert von

$$J_{VZ}^{theo} = \frac{1}{2} m_{VZ} \left(\frac{d_{VZ}}{2} \right)^2.$$

Aufnahmeteller + Hohlzylinder:

$$J_{HZ+T} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_{HZ+T}^2$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders

$$J_{HZ}^{exp} = J_{HZ+T} - J_T$$

im Vergleich zu dem theoretisch zu erwartenden Wert von

$$J_{HZ}^{theo} = m_{HZ} \left(\frac{d_{HZ}}{2} \right)^2.$$

1.3.6 Trägheitsmoment der Kugel

$$J_K^{exp} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T_K^2$$

Um das experimentelle Ergebnis mit der theoretischen Vorhersage

$$J_K^{theo} = \frac{2}{5} m_K R_K^2$$

vergleichen zu können, benötigen wir den Radius der Kugel R_K . Dieser lässt sich mit dem Maßband nur sehr ungenau abschätzen. Wesentlich genauer ist es, die Dichte der Kugel ρ_K zu verwenden, um über die Beziehung

$$m_K = V_K \cdot \rho_K = \frac{4}{3} \pi R_K^3 \rho_K$$

den Radius zu bestimmen. Mit $\rho_K = (0,63 \pm 0,02) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ erhalten wir:

$$R_K = \left[\frac{m_K}{\frac{4}{3}\pi\rho_K} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Bestimmt man Massen und Radien der Versuchskörper, so lässt sich experimentell bestätigen, dass Kugel und Holzscheibe das gleiche Trägheitsmoment haben, wenn gilt:

$$m_{\text{HS}} \cdot R_{\text{HS}}^2 = \frac{4}{5} m_K \cdot R_K^2.$$

1.3.7 Bestätigung des Steinerschen Satzes

In diesem Versuchsteil soll die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J vom Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktsachse untersucht werden. Der Steinersche Satz

$$J_a = J_0 + m \cdot a^2 \quad (1.48)$$

soll bestätigt werden. J_0 ist hierbei das Trägheitsmoment bei Rotation um die Schwerpunktsachse.

Die Kreisscheibe wird zunächst um ihre Schwerpunktsachse rotieren gelassen ($a = 0$). Zur besseren Genauigkeit und um die Schwankung der Messwerte abzuschätzen, wird die Messung mehrfach wiederholt. In gleicher Weise wird die Schwingungsdauer T als Funktion des Abstandes $a = 0,02; 0,04; \dots 0,16 \text{ m}$ zwischen Rotations- und Schwerpunktsachse bestimmt.

Wichtig:

Nach jeder Änderung von a den Stativfuß mit Hilfe der Dosenlibelle wieder so ausrichten, dass die Kreisscheibe in der Horizontalen rotiert.

Zur Auswertung trage man $J = f(a^2)$ auf, bestimme die Steigung und vergleiche mit der Erwartung.

1.4 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

Versuch 1M4 Aufgaben: In diesem Experiment wird die beschleunigte Bewegung einer fallenden Stahlkugel untersucht und die Erdbeschleunigung ermittelt.

Vorkenntnisse/Grundlagen: gleichförmige Bewegungen und gleichmäßig beschleunigte Bewegungen, Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung

1.4.1 Freier Fall

Für eine beschleunigte Bewegung gilt:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a. \quad (1.49)$$

Durch zweimaliges Integrieren dieser Differentialgleichung erhält man die allgemeine Bewegungsgleichung eines fallenden Körpers ohne den Einfluss von Reibung:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2. \quad (1.50)$$

Beim freien Fall im luftleeren Raum ist die Beschleunigung a die Erdbeschleunigung g . Aus Gleichung (1.50) lässt sich g durch eine Weg-Zeit-Messung bestimmen.

1.4.2 Versuchsaufbau

Die bei dem verwendeten Versuchsaufbau möglichen Fallhöhen sind nicht groß. Daher werden keine großen Geschwindigkeiten erreicht, sodass die Luftreibung vernachlässigt werden kann. Andererseits sind die entsprechenden Fallzeiten so kurz, dass eine handbediente Stoppuhr zu unpräzise Ergebnisse liefern würde. Daher erfolgt die Zeitmessung mithilfe einer elektronischen Stoppuhr oder eines Oszilloskops (Abbildung 1.8).

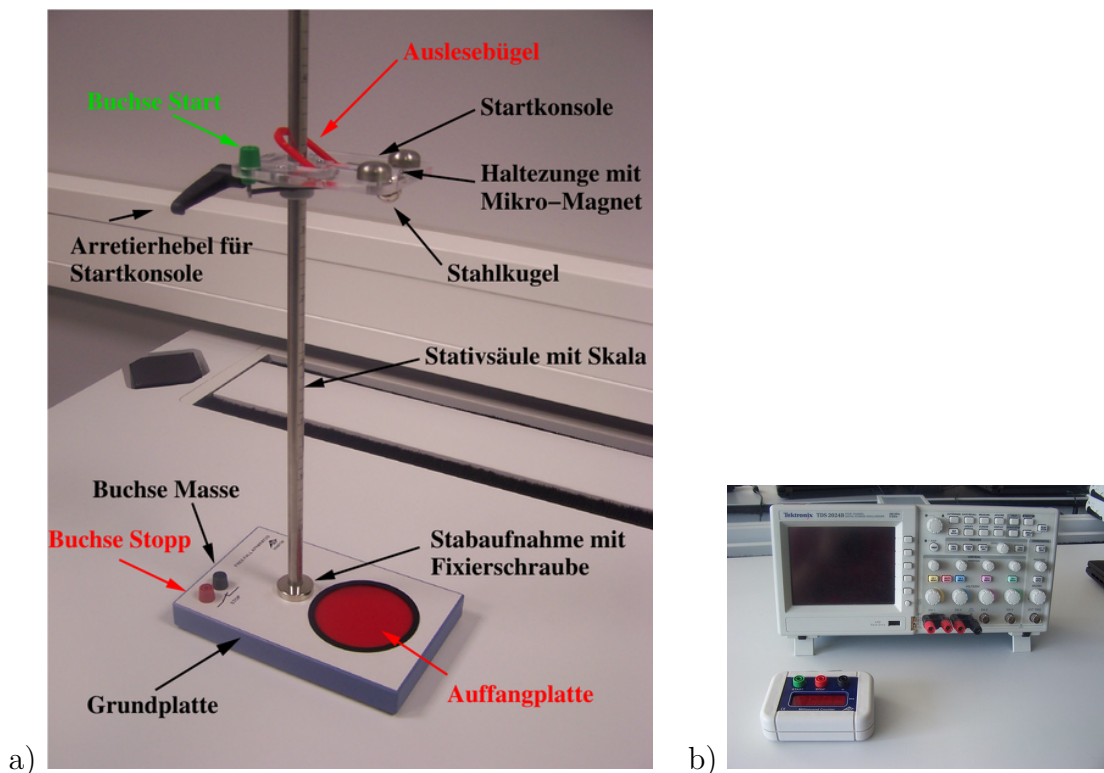


Abbildung 1.8: a) Versuchsaufbau Grundgerät Freier Fall, b) Optionale Auslesegeräte: Digital-Zähler oder Oszilloskop

Die Apparatur zum freien Fall dient zur Messung der Fallzeit einer Stahlkugel für verschiedene einstellbare Fallhöhen von 20 bis 960 mm (Abbildung 1.8). In die Grundplatte des Aufbaus ist eine Auffangplatte integriert. Eine Stativstange mit Skala wird auf der Grundplatte montiert (Abbildung 1.9 a). Die Stativstange wird dazu bis zum Anschlag in die Stabaufnahme der Grundplatte eingesetzt.

Die Ausrichtung der Stange sollte so sein, dass die Skala zur roten Auffangplatte weist. Die Fixierschraube wird mit dem Imbusschlüssel handfest angezogen. Die in der Höhe verstellbare Startkonsole mit Auslösevorrichtung für den Fallkörper befindet sich an der Stativstange (Abbildung 1.9 b). Mit Hilfe des Arretierhebels wird die Fallhöhe eingestellt und an der Säulenskala mit Bezug zur oberen Bohrungskante der Startkonsole abgelesen (Abbildungen 1.9 b und d). Der Skalenwert entspricht in etwa der Fallstrecke, also der Distanz zwischen Kugel und Auffangplatte. Ein möglicher Offset s_0 in der Distanz kann später bei der Analyse der Weg-Zeit-Messung berücksichtigt und bestimmt werden.

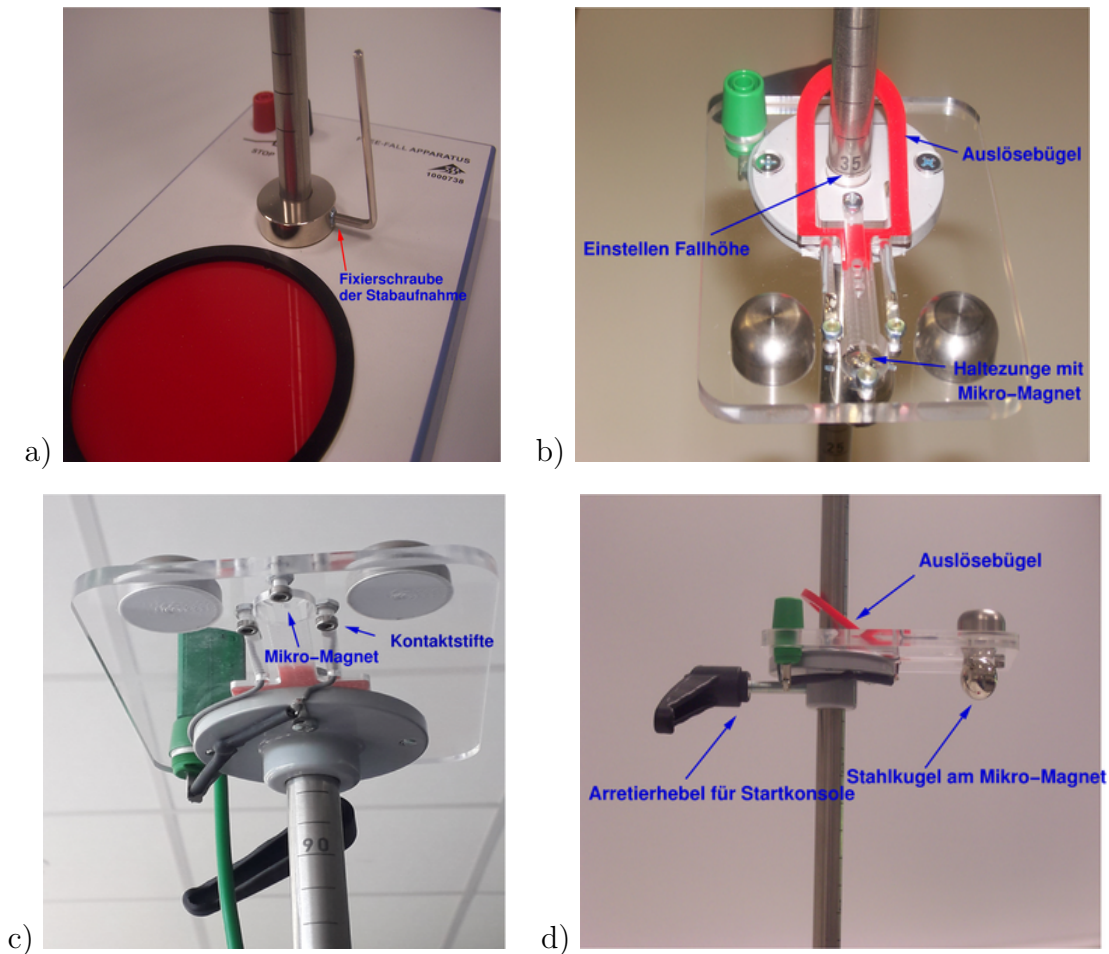


Abbildung 1.9: Versuchsaufbau, a) Aufbau der Stativstange, b) Auslösevorrichtung und Ablesung an oberer Bohrungskante der Startkonsole, c) Kontaktstifte und Mikro-Magnet für die Ausgangsposition des Fallkörpers, d) Einstellen der Fallhöhe mit Arretierhebel und an Kontaktstiften und Mikro-Magnet gehaltene Stahlkugel.

Unter der Auslösevorrichtung befinden sich drei Kontaktstifte (Abbildung 1.9 c), die eine exakte Ausgangsposition des Fallkörpers gewährleisten sollen. Mit der leitenden Oberfläche der Stahlkugel bilden diese Kontaktstifte einen Schalter, der

nach dem Start der Kugel öffnet. Die Haltezunge besitzt an ihrer Spitze einen Mikro-Magneten, der die Kugel in Startposition hält (Abbildung 1.9 c). Beim Aufprall der Kugel auf die Auffangplatte wird die Zeitmessung gestoppt. Die Auffangplatte ist so gestaltet, dass die aufprallende Kugel auf ihr liegen bleibt und nicht auf den Boden fällt.

1.4.3 Versuchsdurchführung

Zur Durchführung des Experimentes sind das Fallgerät, zwei Sätze Experimentierkabel und ein Digital-Zähler und/oder ein Oszilloskop erforderlich.

Lösen Sie den Arretierhebel und stellen Sie die gewünschte Fallhöhe ein. Die Stahlkugel wird von unten an die Haltezunge zwischen den drei Auflagepunkten angelegt. Die Haltezunge ist dabei leicht nach unten zu drücken.

Der Fallvorgang wird mit leichtem Druck auf den Auslösebügel gestartet. Eine ruhige und feinfühligte Auslösung ist nötig für Messwerte mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit. Wird der Vorgang mit zuviel Druck auf den Auslösebügel gestartet, kann dies zur Folge haben, dass die Kugel bereits eine Anfangsgeschwindigkeit vor dem Start der Messung hat und/oder die Gesamtstrecke einen zusätzlichen Offset erhält. Der Mikro-Magnet löst sich bereits bei leichtem Druck auf den Auslösebügel von der Kugeloberfläche. Mit dem Beginn der Fallbewegung öffnet der Start-Kontakt. Das Auftreffen der Kugel auf die Auffangplatte bewirkt ein kurzzeitiges Öffnen des Stopp-Kontaktes und beendet so die Zeitmessung.

1.4.3.1 Messungen mit dem Digital-Zähler

Bei der Messung nur mit dem Digital-Zähler als Messgerät wird das Fallgerät mit dem Zähler verbunden. Dabei ist bei dem Fallgerät und dem Zähler auf die Farbkodierung der Buchsen zu achten (Abbildung 1.10).

Der Digital-Zähler misst die Fallzeit zwischen dem Startzeitpunkt des Fallvorgangs, verursacht durch die Betätigung des Auslösebügels, und dem Stopzeitpunkt, verursacht durch das Auftreffen der Stahlkugel auf der Auffangplatte. Die zeitliche Auflösung des Gerätes beträgt ± 0.5 ms. Notieren Sie den gemessenen Wert der Fallzeit für eine eingestellte Fallhöhe. Zwecks statistischer Analyse führen Sie für jede Fallhöhe die Messungen mehrmals durch, bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung der Verteilung der gemessenen Zeitwerte und den Fehler auf den Mittelwert der jeweiligen Fallzeit. Zur Auswertung trägt man die Fallhöhe als Funktion der jeweils gemittelten Fallzeit auf und passt ein Polynom 2. Ordnung gemäß Gleichung (1.50) an. Eine entsprechende Routine findet sich in der Praktikumsbibliothek. Dies ergibt die Fallbeschleunigung g , die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und den Offset s_0 auf die Fallhöhe des Fallkörpers.

1.4.3.2 Messungen mit dem Oszilloskop

Zur Verbesserung der Messung der Fallzeit wird ein Oszilloskop angeschlossen. Dazu wird das Startsignal mit dem Kanal 1 des Oszilloskops verbunden und das

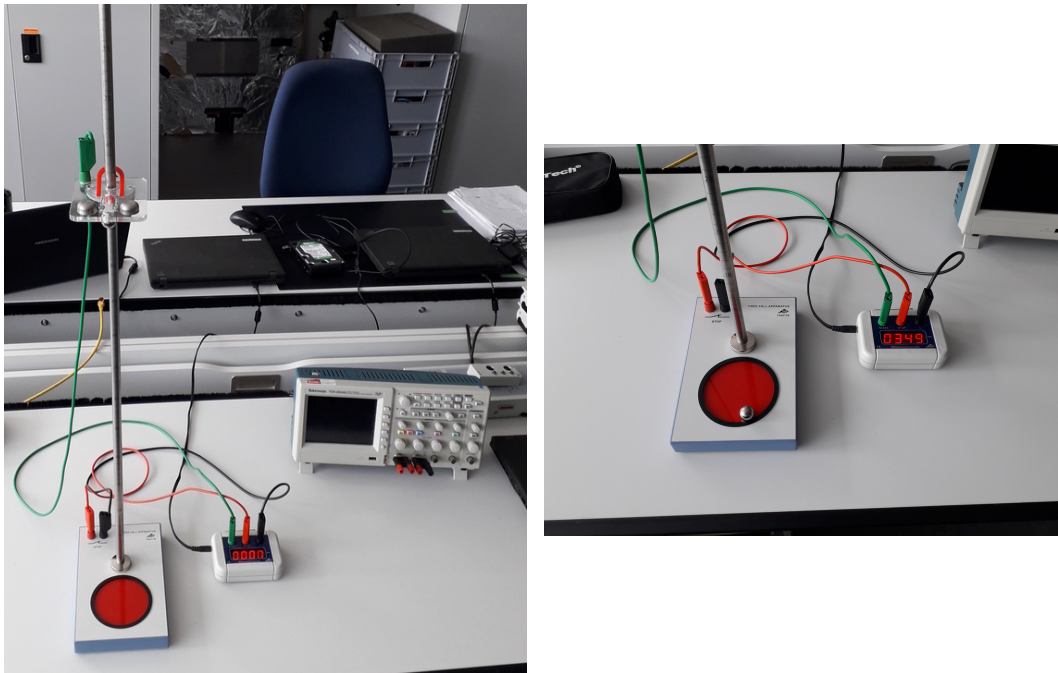


Abbildung 1.10: links: Versuchsaufbau mit Digital-Zähler, rechts: Messung mit Digital-Zähler

Stopsignal mit dem Kanal 2. Die Masse wird nur mit einem der beiden Kanäle verbunden (Abbildung 1.11).

Das Oszilloskop wird auf **Single Seq** eingestellt. Es sollte auf die steigende Flanke des Startsignals getriggert werden und der auslösende Triggerlevel der Messung sollte nicht zu hoch eingestellt werden. Auf dem Schirm des Oszilloskopes sollte dann das Startsignal sichtbar werden (Abbildung 1.12 a). Das Stoppsignal wird durch das erste Auftreffen der Stahlkugel auf der Auffangplatte ausgelöst und sollte als kurzes Signal sichtbar werden. Ein erneutes Auftreffen der Kugel wird durch weitere Stoppsignale im zeitlichen Verlauf des Kanals 2 sichtbar (Abbildung 1.12 a).

Mit dem Regler **Position** der horizontalen Einstellung der X-Achse werden die Start- und Stoppsignale soweit auf dem Bildschirm nach links verschoben, bis das Stoppsignal nahe am linken Rand ist (Abbildung 1.12 b). Mit dem Knopf **Horiz Menu** wird das Menü für die X-Achse aufgerufen und der Schalter **Dehnen** betätigt. Mit dem Regler **Sec/Div** kann dann die Einteilung der X-Achse entsprechend fein eingestellt werden (Abbildung 1.12 c). Das Stoppsignal kann nun mit dem Regler **Position** so lange auf der X-Achse verschoben werden, bis man mit dem **Cursor Zeit** sieht, dass der maximale Wert des Stoppsignals genau auf der Y-Achse des Bildschirms liegt (Abbildung 1.12 d). Das Oszilloskop zeigt dann am oberen rechten Bereich die zeitliche Position an. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich die Genauigkeit der Zeitmessung um einen Faktor 10 verbessern.

Führen Sie für jede Fallhöhe die Messungen wieder 5 bis 10 mal durch, bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung der Verteilung der gemessenen Zeitwerte und den Fehler auf den Mittelwert der jeweiligen Fallzeit. Die Auswertung

1.4 Erdbeschleunigung mit dem Fallexperiment

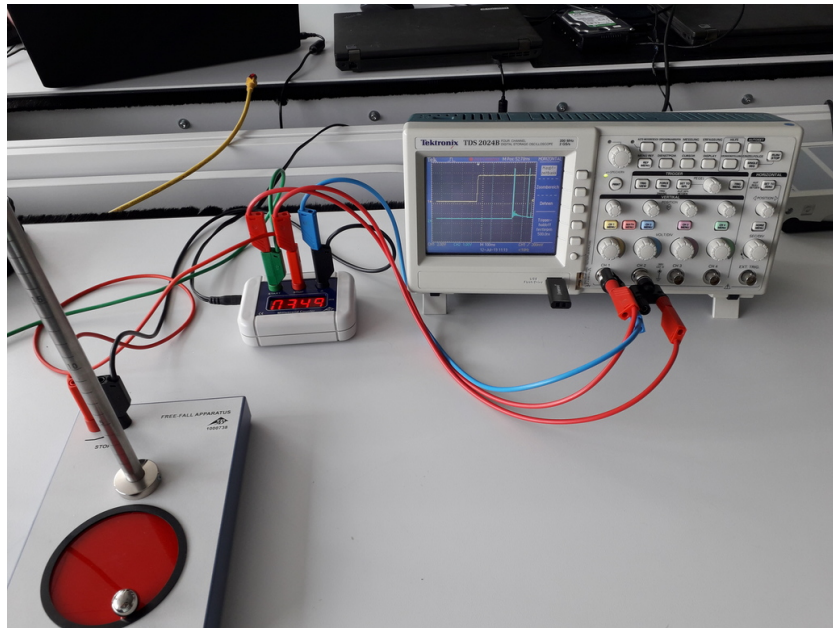


Abbildung 1.11: Versuchsaufbau mit Digital-Zähler und Oszilloskop.

geschieht analog zur Messung mit dem Digital-Zähler.

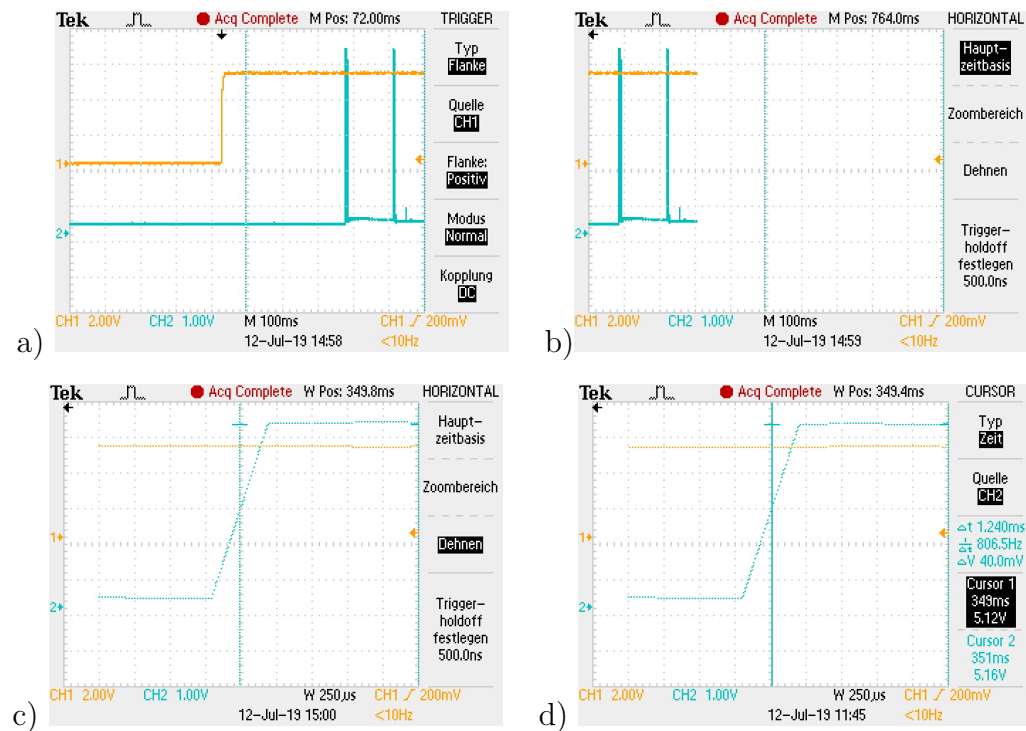


Abbildung 1.12: Messungen mit dem Oszilloskop: a) Start- und Stoppsignal, b) Signale so verschoben, dass der Anfang des Stoppsignals sehr nahe am linken Rand des Bildschirms ist, c) gedehnte Darstellung des zeitlichen Verlaufs des Stoppsignals, d) Verschieben des Stoppsignals, bis maximaler Wert des Stoppsignals auf Y-Achse liegt.