

Physikalisches Grundpraktikum I

Versuchsprotokoll: (E-Lehre)

20. März 2023

Maximilian Carlos Menke, 434170

Andrea Roth, 428396

Gruppe A3

Versuchsliste

1E3 Gekoppelte LC-Schwingkreise	2
Grundlagen	2
Kurze Zusammenfassung des Aufbaus und Durchführung	4
Ungekoppelter Schwingkreis	6
Materialien	6
Aufbau	6
Durchführung	8
Rohdaten	9
Auswertung	13
Gekoppelte Schwingung: Schwebung	20
Rohdaten	20
Bestimmen der Fundamentalfrequenzen	24
Bestimmen der Eigenfrequenz und Schwebungsfrequenz	27
Bestimmung des Kopplungsgrads	28
Zeitliche Verschiebung	28
Einfluss des Abstands auf die Kopplung	31
Kopplung mit Eisenkern	36
Gekoppelte Schwingung: gleich- und gegensinnige Anregung	40
Aufbau und Durchführung	40
Gleichsinnige Schwingung	41
Gegensinnige Schwingung	43
Kopplungsgrad	45

1E3 Gekoppelte LC-Schwingkreise

Aufgabe 1 Grundlagen

Knappe Beschreibung der theoretischen Grundlagen, Angabe der benötigten Formel(n), ohne Herleitung. Definition der verwendeten Formelzeichen.

Grundlagen

Ein einfacher Schwingkreis besteht aus einer in Reihe geschalteten Spule und einem Kondensator. Angenommen der Kondensator ist am Anfang aufgeladen, dann entlädt sich der Kondensator, der durch die Spule fließende Strom induziert ein Magnetfeld, und das Magnetfeld induziert einen Gegenstrom sodass der Kondensator entgegengesetzt aufgeladen wird. Anschließend passiert das ganze umgekehrt bis man wieder im Anfangszustand ist. Dies wiederholt sich unendlich oft. Dadurch entsteht eine Schwingung. Dieser Schaltplan ist allerdings idealisiert, da die elektrischen Widerstände der Bauteile nicht berücksichtigt wurden dies dämpft die Schwingung. Aufgrund der Kettenregel (die Summe aller Spannungen muss 0 sein), ergibt sich die DGL:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot U = 0 \quad (1)$$

Q steht für die Ladung, R für den Widerstand, L für die Induktivität, U für die Spannung und C für die Kapazität. Aus der DGL kann man folgende Beziehungen ableiten. ω_0 ist dabei die Eigenfrequenz ohne Dämpfung, ω die Eigenfrequenz mit Dämpfung. δ ist die Dämpfungskonstante.

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (2)$$

$$\Rightarrow R = 2L \cdot \delta \quad (3)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (5)$$

Dabei sieht die allgemeine Schwingungsgleichung wie folgt aus:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} + U_{off} \quad (6)$$

Man kann zwei Schwingkreise koppeln. Mit einer Spule wird eine Spannung in der Spule des anderen Schwingkreises induziert. Dafür müssen die Schwingkreise ungefähr die gleiche Eigenfrequenz haben. Wenn zwei Schwingkreise gekoppelt sind, und nur in einem Schwingkreis eine Schwingung erzwungen wird, kommt es anschließend zu Schwebung. Die Fundamentalschwingungen sind die Schwingungen welche entstehen, wenn die Spulen vom Strom gleich

oder gegensinnig durchlaufen werden. Dabei gilt für die Fundamentalschwingungen:

$$\omega_+ = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad (7)$$

$$\omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \quad (8)$$

Daraus folgt, dass $f_- > f_+$ ist.

$$\Rightarrow k = \frac{\omega_0^2}{\omega_+^2} - 1 = -\frac{\omega_0^2}{\omega_-^2} + 1 \quad (9)$$

$$\Rightarrow k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} \quad (10)$$

Eine Schwebung entsteht, wenn nur einer der beiden Kondensator aufgeladen wird. Im Falle der Schwebung kann man beim Verlauf der Spannung am Kondensator sehen, dass es eine Grundschiwingung und eine Einüllende Schwingung gibt.

Dabei gilt für die Grundfrequenzen f_k und die Schwebungsfrequenz f_{schw} :

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \quad (11)$$

$$f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2} \quad (12)$$

Wenn beide Schwingkreise angeregt werden, dann kann man zwischen gleichsinniger und gegensinniger Aufladung unterscheiden. Bei gleichsinniger Aufladung fließen die Ströme in die gleiche Richtung durch die Spulen. Hier kann man im Fourierspektrum f_+ als Maximum messen. Bei gegensinniger Aufladung kann man f_- als Maximum des Fourierspektrums messen.

So kann man sowohl mit der Schwebung, wie auch mit gleich und gegensinniger Anregung den Kopplungsgrad mithilfe der oben angegebenen Formel bestimmen.

Zudem kann man aufgrund der Dämpfung des internen Widerstandes unseres Schwingkreises eine leichte zeitliche Verschiebung zwischen Maximaler Spannung am einen Kondensator und Nulldurchgang der Spannung am anderen Kondensator. Diese ist für $k < 0.2$ (was bei uns der Fall sein wird):

$$\Delta t \approx \frac{1}{2\pi \cdot f_{schw}} \left[\frac{1}{\pi} - \arctan \left(\frac{k}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right] \quad (13)$$

Aufgabe 1 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Beschreibung des Versuchsaufbaus einschließlich Schaltbild. Beschreibung der Versuchsdurchführung: verwendete Messwerterfassungseinstellungen, Messbereiche, Triggerbedingungen, etc.

Kurze Zusammenfassung des Aufbaus und Durchführung

Detaillierter Aufbau und Durchführung zu den einzelnen Versuchsteilen, finden Sie am Anfang von den jeweiligen Abschnitten. Hier soll der Gesamtversuch kurz Dargestellt werden.
dem

Der Versuch besteht aus insgesamt 3 Teilen. Für den ersten Teilversuch haben wir zwei LC-Schwingkreise Aufgebaut mit gleichen Bauteilen und die Schwingung in diesen einzeln gemessen. Diese sind Schwingkreise mit je einem Kondensator und einer Spule. Als Widerstand in der Schaltung liegt nur der Innenwiderstand von Spule und Kondensator und den Kabeln vor. An den Schwingkreis wird eine Spannungsquelle angeschlossen, welche mithilfe eines Tasters kurzgeschlossen werden kann und den Schwingkreis schließt. Der Spannungsverlauf wird über dem Kondensator parallel gemessen. Dieser Teilversuch dient dazu den Einzelschwingkreis zu charakterisieren, dies wird Später benötigt zur Auswertung der gekoppelten Schwingkreise.

Zur Kopplung der Schwingkreise werden die Spulen nebeneinander gestellt und auch die Spannung am zweiten Kondensator gemessen. Durch drücken des Tasters wird eine Messung gestartet. Als Einflussfaktoren auf den Kopplungsgrad wird das Variieren des Abstands der Spulen untersucht und der Einfluss eines Eisenkerns

Im letzten Teilversuch werden nun beide Kondensatoren mit der gleichen Spannungsquelle geladen. So, dass der Strom ein mal gleich sinnig durch die Spulen läuft und ein mal gegen sinnig. Die Schwingungen haben wir wieder an beiden Kondensatoren gemessen, und daraus die Frequenzen f_+ und f_- bestimmt.

Aufgabe 2 Vorversuch: Charakterisierung der verwendeten Bauteile

Charakterisieren Sie die verwendeten Bauteile mit Digitalvoltmeter bzw. Messbrücke.

Vor der Durchführung der Versuche, und zum späteren Vergleich der Messungen mit unseren Erwartungen haben wir die Bauteile charakterisiert. Dies haben wir mit einer Messbrücke getan.

Abbildung 1: Charakterisierung des $10 \mu F$ Kondensator

In dem Bild zu sehen ist die Messbrücke, an die Stelle wo der Kondensator ist, wir das Bauteil angeschlossen. Das Bild ist noch mit unserem ersten Kondensator, diesen haben wir im Verlauf des Experiments gegen einen kleineren ausgetauscht, und alle Messungen mit dem kleineren wiederholt.

Die Messungen mit der Messbrücke haben einen statistischen Messfehler von 0.25%.

Für die Messung haben wir unseren Frequenzbereich von 1kHz eingestellt. (In dem Bild auf 100Hz weil wir da noch den $10 \mu F$ messen, und wir mit diesem geringere Frequenzen hatten.) Die Spule haben wir ebenfalls gemessen wenn diese einen Eisenkern hatten, um den Einfluss von diesem auf Widerstand und Induktivität zu bestimmen. So konnten wie sämtliche Bauteile Charakterisieren und sind für unseren zweiten Aufbau (mit kleinerem Kondensator) zu folgenden Ergebnissen gekommen:

Bauteil	Messung
Spule 1 mit Eisenkern	$R = (2.344 \pm 0.006) \Omega$ $L = (9.02 \pm 0.02)mH$ $R = (2.700 \pm 0.007) \Omega$ $L = (55.79 \pm 0.14)mH$
Spule 2 mit Eisenkern	$R = (2.423 \pm 0.006) \Omega$ $L = (8.98 \pm 0.02)mH$ $R = (2.650 \pm 0.007) \Omega$ $L = (56.10 \pm 0.14) mH$
Kondensator 1	$(2.301 \pm 0.006) \mu F$
Kondensator 2	$(2.262 \pm 0.006) \mu F$

Tabelle 1: Ergebnisse der Messung mit der Messbrücke

Aufgabe 3 Ungekoppelte Schwingung

Zeigen Sie den Verlauf der Kondensatorspannungen für den ungekoppelten Fall und bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz samt Messunsicherheit. Vergleichen Sie sie mit Ihrer Erwartung.

Ungekoppelter Schwingkreis

Materialien

Vor Beginn des Versuchs haben wir unsere Bauteile gewählt. Wir hatten uns erst für einen $10\mu F$ Kondensator entschieden und eine Spule mit 500 Windungen. Dies erachteten wir als Sinnvoll da wir wissen, dass $f \propto \frac{1}{LC}$ gilt.

So haben wir eine niedrigere Frequenz als bei kleineren Kondensatoren. Diese Spule haben wir gewählt, da eine Spule mit weniger Windungen zwar geringeren Widerstand hat aber auch eine geringere Kopplung. Eine Spule mit mehr Windungen würde zwar die Kopplung vergrößern, jedoch auch den Widerstand.

Bei den gekoppelten Schwingkreisen, stellten wir jedoch fest, dass bereits ab einem Abstand von 1cm keine Kopplung mehr vorlag. Aufgrund dessen haben wir dann unseren $10\mu F$ Kondensator durch einen $2.2\mu F$ ausgetauscht.

Zuerst haben zwei ungekoppelte Schwingkreise aufgebaut mit gleichen Bauteilen.

Aufbau

Der erste Schwingkreis wurde dabei wie unten skizziert aufgebaut. Darauf zu achten ist, dass die Spannung parallel am Kondensator zu messen ist, mit dem Sensor CASSY. Der Schalter Schließt die Spannungsquelle kurz, und schließt somit den Schwingkreis.

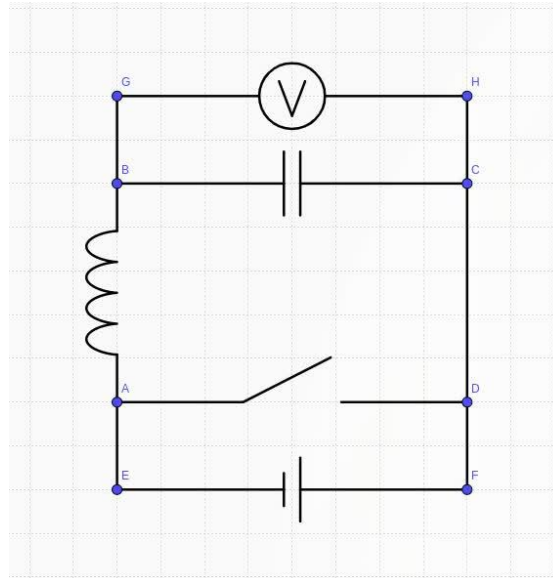


Abbildung 2: Aufbau der Schwingkreise

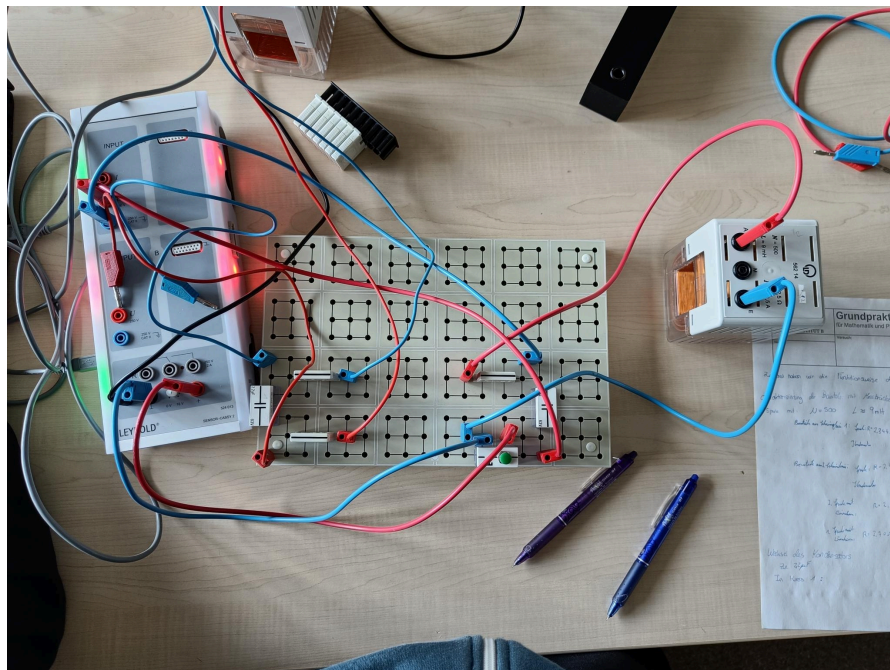


Abbildung 3: Aufbau der beiden Schwingkreise

Oben ist ein Bild von beiden Schwingkreisen zu sehen, wobei links der 1. ist und rechts der 2. Hier wird der 2. Schwingkreis vermessen, weshalb der 1. Schwingkreis auch nicht eingesteckt ist im CASSY.

Zudem haben wir mit Spule zwei und Kondensator zwei einen zweiten Schwingkreis aufgebaut. Der Aufbau und die Schaltskizze des zweiten Schwingkreises ist gleich zu dem des ersten. Insgesamt hatten wir 2 getrennte Schwingkreise, aber nur einen Schalter und eine Spannungsquelle (da wir die Schwingkreise später koppeln werden). Deshalb haben wir die Spannungsquelle und den

Schalter dann jeweils umgesteckt, um die zwei Schwingkreise getrennt zu messen.

Durchführung

Zuerst haben wir eine Spannung von $U_0 = 6.2V$ angelegt da bei dieser Spannung die Maximale Stromstärke der Spule ($2.5A$) nicht überschritten wird. Also haben wir als Spannungsbereich des CASSY-10V bis 10V eingestellt. Anschließend haben wir ein paar Testmessungen gemacht, um die optimalen Messeinstellungen zu finden. Diese Testmessungen haben wir jedoch noch mit unserer 'alten' Kapazität gemacht ($C = 10\mu F$). Beim einbauen der neuen haben wir die Messparameter angepasst.

Dafür haben wir die Periodendauer ohne Widerstand genähert (da dieser für eine grobe Abschätzung vernachlässigbar klein ist).

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{9mH \cdot 2.2\mu F} = 884\mu s \quad (14)$$

Nach dem Nequisst Theorem muss die Abtastrate mindestens doppelt so groß sein wie die Frequenz. Um eine ausreichende Auflösung des Fourier Peaks zu haben, und da diese Messung nur eine Abschätzung war, haben wir $50\mu s$ als Messintervall gewählt, da dieses mehr als das zehnfache ist.

Die Schwingung im Schwingkreis startet in dem Moment, in dem man den Taster drückt, und sich der Kondensator anfängt zu entladen, da soll auch die Messung starten. Damit der Schwingkreis ungestört schwingen kann, muss der Taster auch während der gesamten Messung gedrückt bleiben. Entsprechend haben wir den Trigger vom Cassy auf 6.1V fallende Flanke gestellt um die Messung zu starten. Dabei haben wir 6.1V gewählt, da so noch der Großteil der ersten Schwingungsperiode mit aufgezeichnet wird. 0.1V Abstand sind genug um Störeffekte vom schließen des Schalters nicht auf zu zeichnen. Den zweiten Schwingkreis haben wir dabei 10 mal vermessen, um die Statistische Unsicherheit auf die Frequenz zu bestimmen.

Den ersten Schwingkreis haben wir einmal vermessen, da wir davon ausgehen können, dass die Statistische Unsicherheit bei beiden Schwingkreisen gleich ist, da wir die gleichen Messwerterfassungseinstellungen haben da wir die gleichen Messwerterfassungseinstellungen haben.

Nachdem die Messung beendet ist, wird das Frequenz Spektrum mit Hilfe einer Fouriertransformation analysiert. Die Länge der Messung beeinflusst dabei die Auflösung der Fouriertransformation.

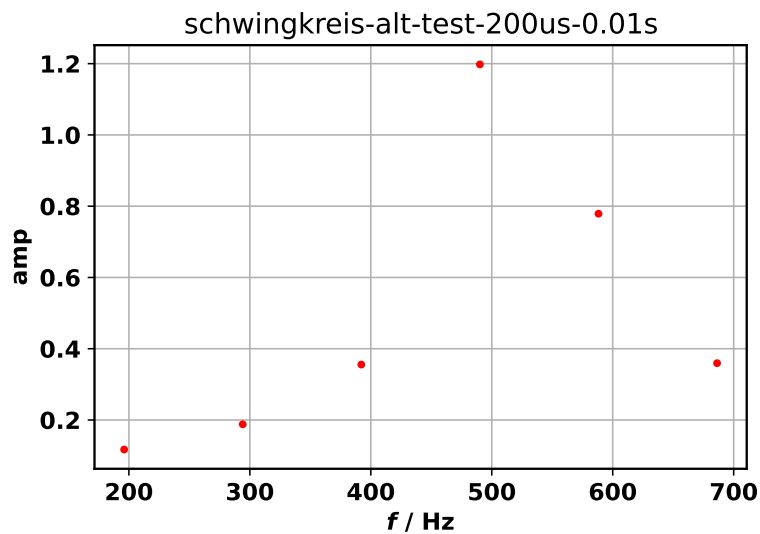


Abbildung 4: Zoomin Plot der FFT der Testmessung mit Messdauer = 0.01s

Wie zu sehen ist bei diese Testmessung, ist das Fourierspektrum nur auf $\pm 100\text{Hz}$ genau. Das bedeutet das die Messdauer von 0.01s zu kurz ist. Als Messdauer haben wir später 0.5s Sekunden gewählt, da wir dann einen zufriedenstellenden (weniger als 0.1%) ablese Fehler hatten.

Hier eine Übersicht der Messeinstellungen. Diese gelten für beide Kanäle. Dabei haben wir den Kanal auf den getriggert wird immer auf den gestellt, an welchem der zu messende Schwingkreis angeschlossen war.

Intervall	Messzeit	Trigger	Messbereich (für beide Eingänge)
200 μs	0.5s	6.1V fallend	-10V bis 10V

Tabelle 2: Messwertserfassungseinstellungen des CASSY

Anschließend haben wir noch zwei Rauschmessung gemacht: einmal mit geöffnetem und einmal mit geschlossenem Schalter nach dem Schwingvorgang. Diese haben wir gemacht, um daraus Offsets zu berechnen um unsere Messung des Widerstandes zu präzisieren.

Rohdaten

Insgesamt hatten wir also die Kondensatorsspannung beim Schwingungsvorgang in zweiten Schwingkreis 10x gemessen. Und im ersten Schwingkreis ein mal. So wie eine Rauschmessung bei 0V und bei ca. 6V.

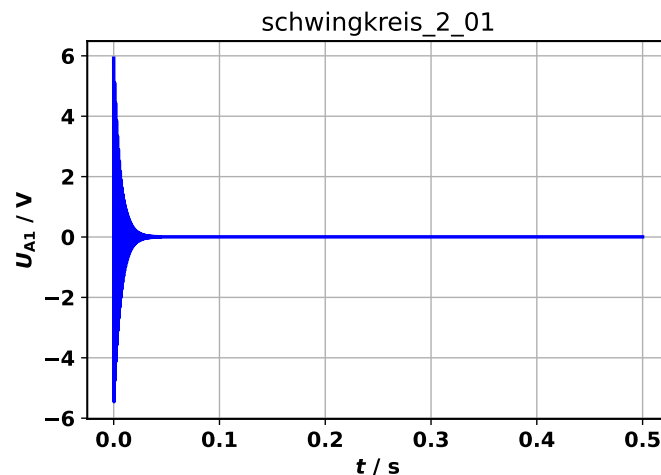


Abbildung 5: Schwingungsverlauf im zweiten Schwingkreis

Oben können sie Exemplarisch einen Schwingungsverlauf im zweiten Schwingkreis sehen. Das obere Bild zeigt die Messung über die gesamte Messdauer. Sehr gut kann hier der Exponentielle Abfall der Amplitude erkannt werden. Bereits nach ca. 0.03s ist die Amplitude auf null abgefallen. Das Messen des großen Zeitintervalls ergibt Sinn, dass dies die Auflösung bei der FFT erhöht.

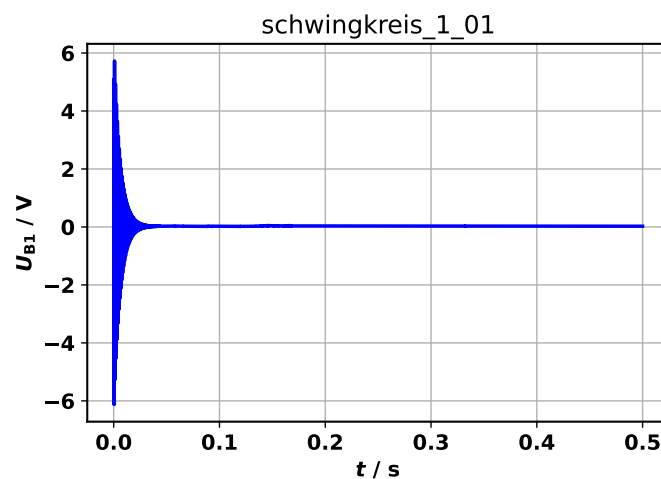


Abbildung 6: Schwingungsverlauf im ersten Schwingkreis

Hier noch der Schwingungsverläufe von unserem ersten Schwingkreis. Dieser sieht Augenscheinlich sehr ähnlich zu den des zweiten aus. Dies ist auch zu erwarten, da wir gleich Bauteil verwendet haben.

Das die zwei Schwingungen sehr ähnlich sind, kann man sehr gut erkennen, wenn man in den noch schwingenden Bereich der Messung zoomt.

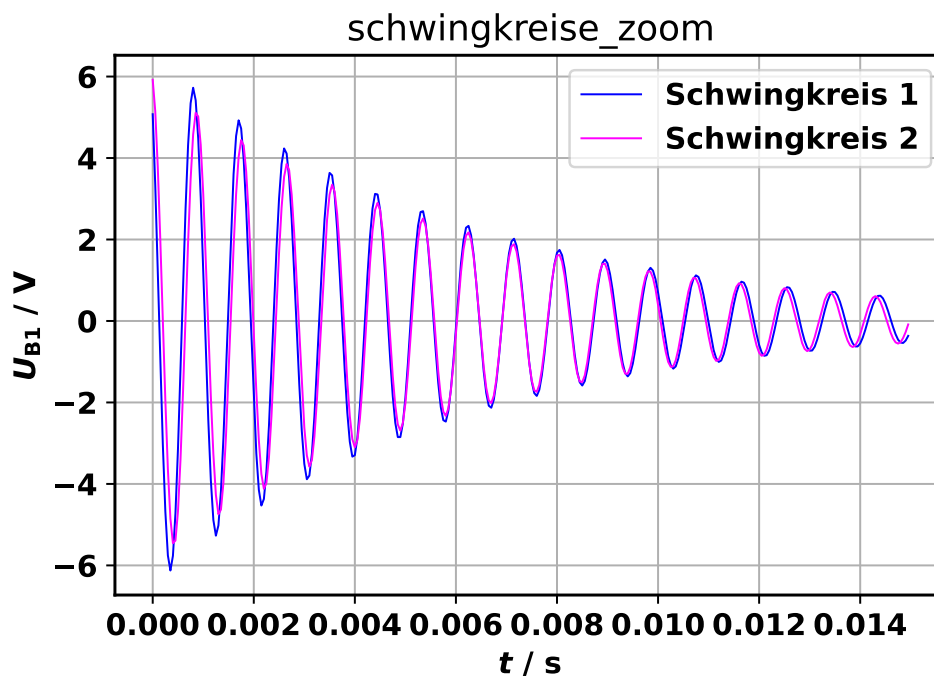


Abbildung 7: Schwingungsverlauf der beiden Schwingkreis zoom-in

Hier können wir sehen, dass die Schwingungen dem gleichen Kosinus Förmigen Verlauf folgen, Außerdem kann man hier bereits erkennen, dass Schwingkreis 2 eine höhere Frequenz hat. Da die Bauteile nicht vollkommen identisch sein werden, ist dies nicht überraschend.

Die Amplituden fallen nach Augenmaß Exponentiell ab.

Zu diesen Schwingungsverläufen haben wir, jeweils eine FFT gemacht, um zu überprüfen, ob die Frequenz des Schwingkreis aus der Messung gut bestimmbar ist. Oben ist der des zweiten Schwingkreis unten der des Ersten.

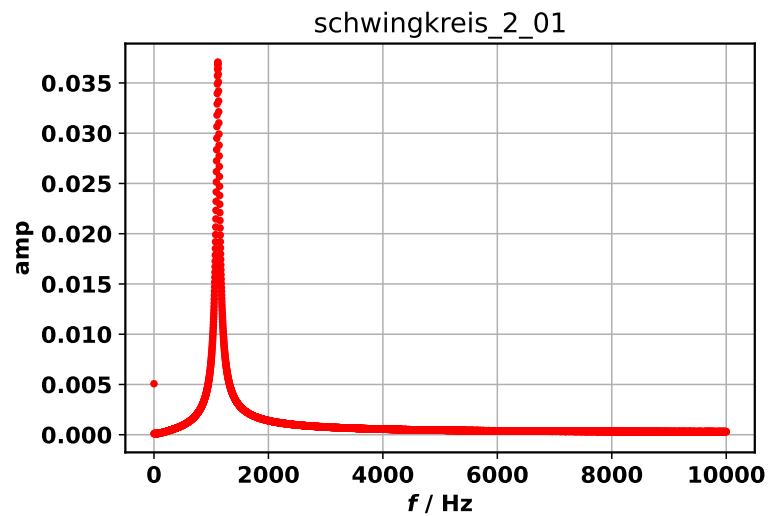


Abbildung 8: FFT des ersten Schwingkreis

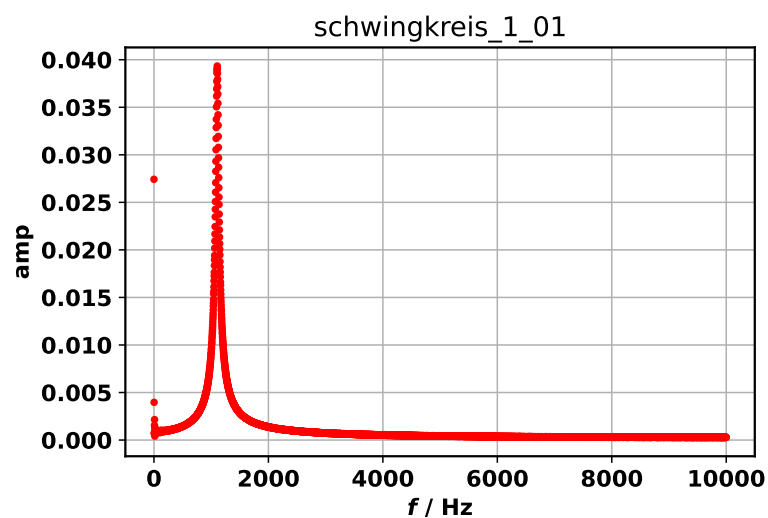


Abbildung 9: FFT des zweiten Schwingkreis

Zu sehen ist, dass wir einen klaren peak bei einer bestimmten Frequenz haben, es sind keine Frequenzen von anderen Schwingungen zu sehen. Dies war aus den Kosinus förmigen Verlauf der Messung zu erwarten. In diesem Zoom lässt sich jedoch noch keine Aussage über die genaue Frequenz der Schwingkreise treffen.

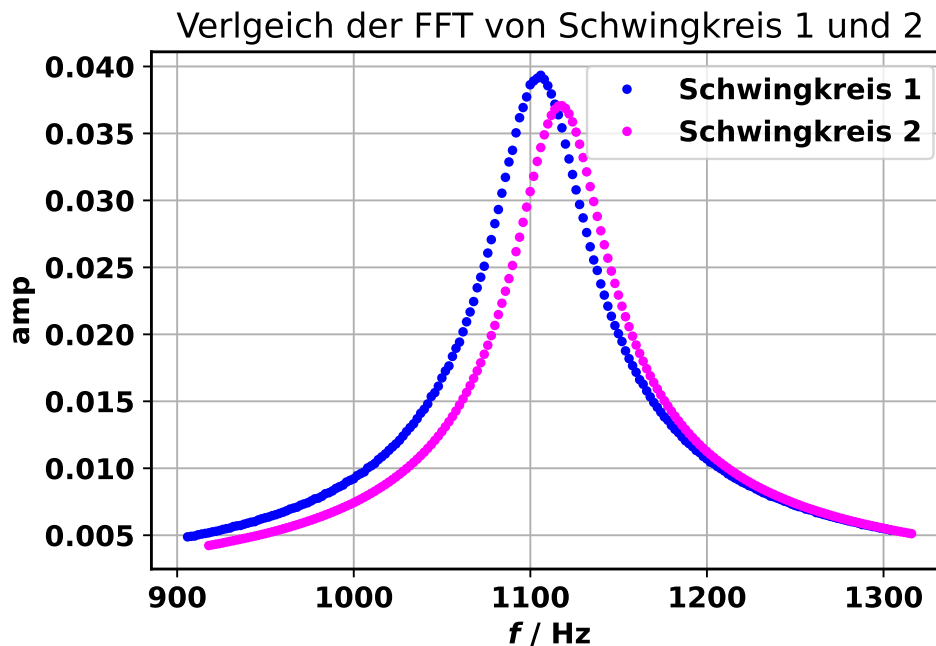


Abbildung 10: Schwingkreis 1 und 2 FFT Zoom-in

Im diesem Graphen ist ein Zoom-in der FFT beider Schwingungen zu sehen, hier kann man gut erkennen, dass wir eine klare Spitze haben. Der Peak der beiden Schwingkreise ist leicht gegeneinander verschoben. Die Frequenz des Schwingkreis kann später durch weiteres zoomen festgestellt werden.

Auswertung

Da wir die Frequenz der Schwingkreise bestimmen sollten, haben wir uns die FFT im Bereich des Peaks genauer angesehen. Dabei haben wir das Maximum aus den Graphen abgelesen. Wir haben nicht den Peaksschwerpunkt verwendet, da es eine unsymetrische Verteilung ist. Man kann anhand der umliegenden Werte sehen ob das Maximum etwas rechts oder links des höchsten Punktes liegt.

Diese Methode haben wir für alle Auswertungen verwendet, außer bei der 10maligen Messung des Schwingkreises 2. Hier haben wir immer die Frequenz mit der Maximalen Amplitude genommen, da wir sie später mitteln.

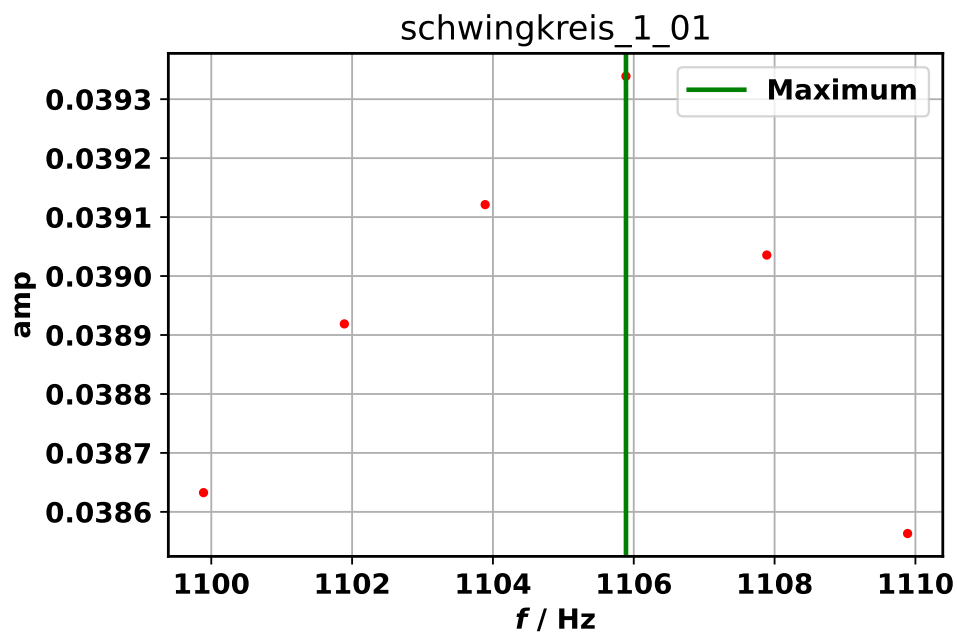


Abbildung 11: FFT Zoom vom ersten Schwingkreis mit eingezeichnetem Peak

Dem zoom-in plot kann entnommen werden, dass wir Messpunkte in 2 Hz Schritten haben. Daraus ergibt sich für den Fehler auf Grund der Ablesegenauigkeit $\frac{2Hz}{\sqrt{12}} = 0.6Hz$. Diesen Ablesefehler nehmen wir als statistisch an. Unten die Ergebnisse der einzelnen Messungen:

Messung	Schwingkreis	Frequenz
1	1	1106 Hz
1	2	1118 Hz
2	2	1116 Hz
3	2	1118 Hz
4	2	1118 Hz
5	2	1116 Hz
6	2	1118 Hz
7	2	1116 Hz
8	2	1118 Hz
9	2	1118 Hz
10	2	1118 Hz

Tabelle 3: Frequenzen von Schwingkreis 1 und 2

Der Erwartungswert des 2. Schwingkreises ist:

$$f_2 = 1117.3Hz \quad (15)$$

Dabei ist der Statistische Fehler auf den Einzelwert der Frequenz gegeben durch:

$$\sigma_{f_{2stat}} = 1.0 Hz \quad (16)$$

Somit ergibt sich der gesamt Fehler aus der quadratischen Addition der beiden Fehlerbeiträge. Für den Fehler auf f erhalten wir.

$$\sigma_f = 1.2 Hz \quad (17)$$

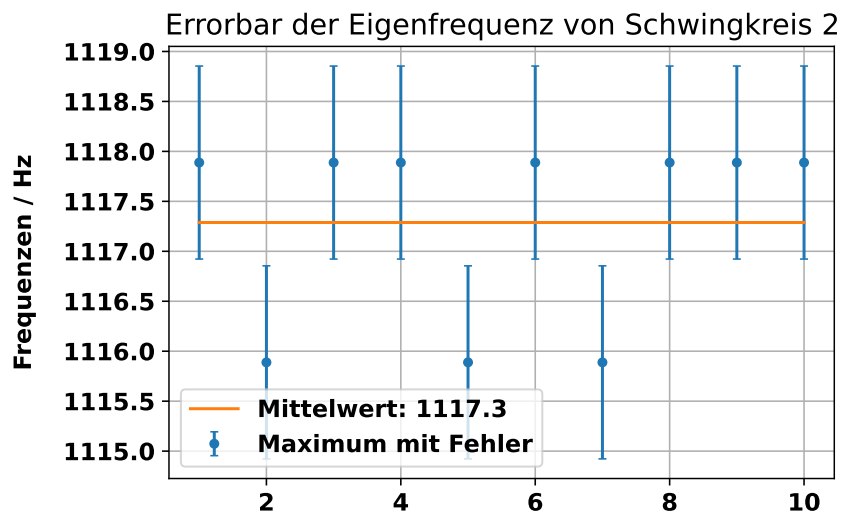


Abbildung 12: Residueplot der Maximalfrequenzen von Schwingkreis 2

Wie im Residueplot gut zu sehen ist, schwankt der Peak zwischen 2 Frequenzen.

Der Grund dafür ist in dem untenstehenden Plot gut zu erkennen.

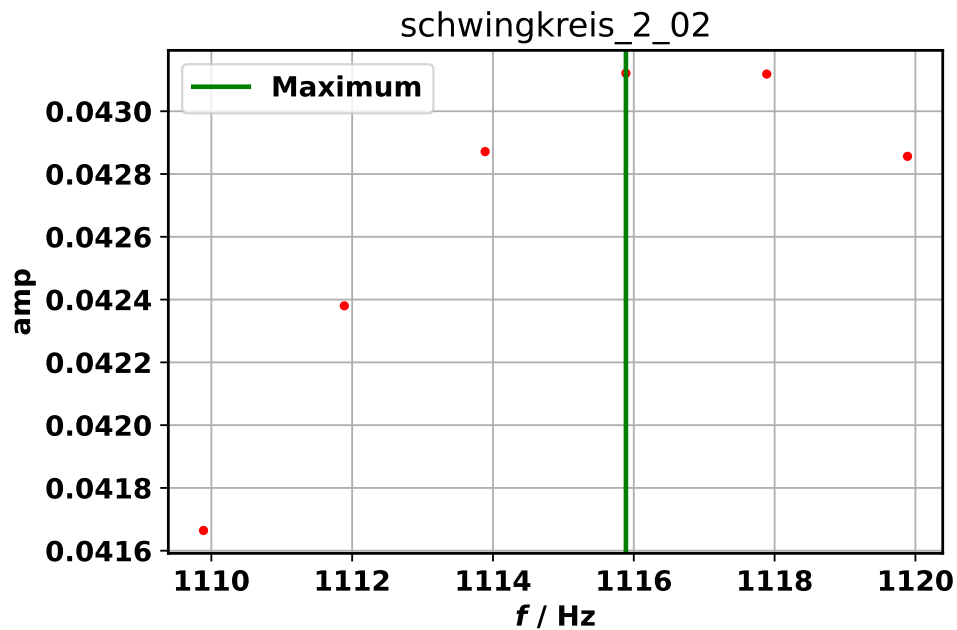


Abbildung 13: FFT Zoom von Schwingkreis 2 der 2. Messung

Hier sieht man, wie bei der 2. Messung die Amplituden der Frequenz 1116Hz und 1118Hz sehr ähnlich sind. Der Grund das die gefundene Amplitude um 2 Hz schwankt, liegt also in der Auflösung der FFT. Da wir eine Messreihe von 10 Messungen durchgeführt haben, ist es nicht schlimm, das wir immer die Frequenz mit der Maximalen Amplitude genommen haben und nicht das Maximum abgeschätzt haben, da wir den Mittelwert bilden.

Unsere theoretische Überlegung bezüglich der erwarteten Frequenz, haben wir mithilfe folgender Formel berechnet:

$$f_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (18)$$

Da die erste Spule laut Messbrücke einen Widerstand von 2.344Ω hat und die zweite von 2.423Ω , und wir den Widerstand des restlichen Stromkreises auf 0.3Ω geschätzt haben, schätzen wir einen Gesamtwiderstand von 2.644Ω für den ersten und 2.723Ω für den 2. Schwingkreis. Mit den in der Messbrücke gemessenen Werten für die Induktivität und Kapazität, haben wir folgende Frequenzen ausgerechnet:

$$f_1 = 1104.6\text{Hz} \quad (19)$$

$$f_2 = 1116.4\text{Hz} \quad (20)$$

Damit liegen unsere Erwartungen innerhalb des statistischen Messfehlers von 1.2 Hz.

Dabei haben wir die Fehler für unsere Erwartung nicht berechnet, da unsere schätzung schon in der Ungenauigkeit der gemessenen Frequenz liegt.

Als nächstes haben wir die Rauschmessung ausgewertet. Hier eine Darstellung der Rauschmessung bei gedrücktem Schalter als Histogramm:

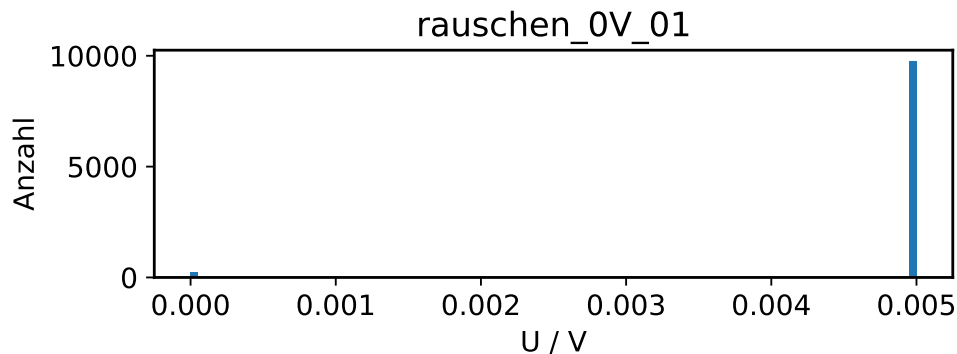


Abbildung 14: Rauschmessung bei 0V

Beim auswerten der Daten, haben wir den Mittelwert $U_{off} = 4.882mV$ als Offset erhalten, mit einer Standardabweichung von $\sigma_{off} = 0.761mV$. Dabei verwenden wir diese Größen hinterher bei der Berechnung des Widerstandes. Hierbei gehen wir davon aus, dass beide Schwingkreise den gleichen Offset haben.

Als letztes haben wir, um den Widerstand der beiden Schwingkreise zu bestimmen, die Einhüllende der beiden Schwingkreise bestimmt. Dafür haben wir von den Spannungswerten der Messdaten den Offset abgezogen. Die Anpassung wurde mithilfe der Praktikums Library durchgeführt.

Hier die Graphische Darstellung der Einhüllenden. Die untere Einhüllende ist dabei die obere Funktion an der x-Achse gespiegelt. Diese haben wir noch zusätzlich dargestellt, um die Genauigkeit der Anpassung besser zu beurteilen. Für den Fit wurde das gesamte Messintervall verwendet, in dem Plot haben wir lediglich den Anfang dargestellt, da man dort die Abweichung der Messwerte vom Fit besser beurteilen kann. Als statistische Unsicherheit auf die Spannungsmesswerte haben wir den Fehler von der Rauschmessung und den Digitalisierungsfehler des CASSYS genommen. Den Digitalisierungsfehler haben wir mit der Formel $\sigma_{digital} = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^{12} \sqrt{12}} = 1.4 \cdot 10^{-3}$ bestimmt. Diesen nehmen wir als statistischen Fehler an, da wir davon ausgehen können, dass die Messwerte gleichverteilt im Intervall sind.

$$\sigma_{UStat} = \sqrt{\sigma_{digital}^2 + \sigma_{off}^2} = 2mV \quad (21)$$

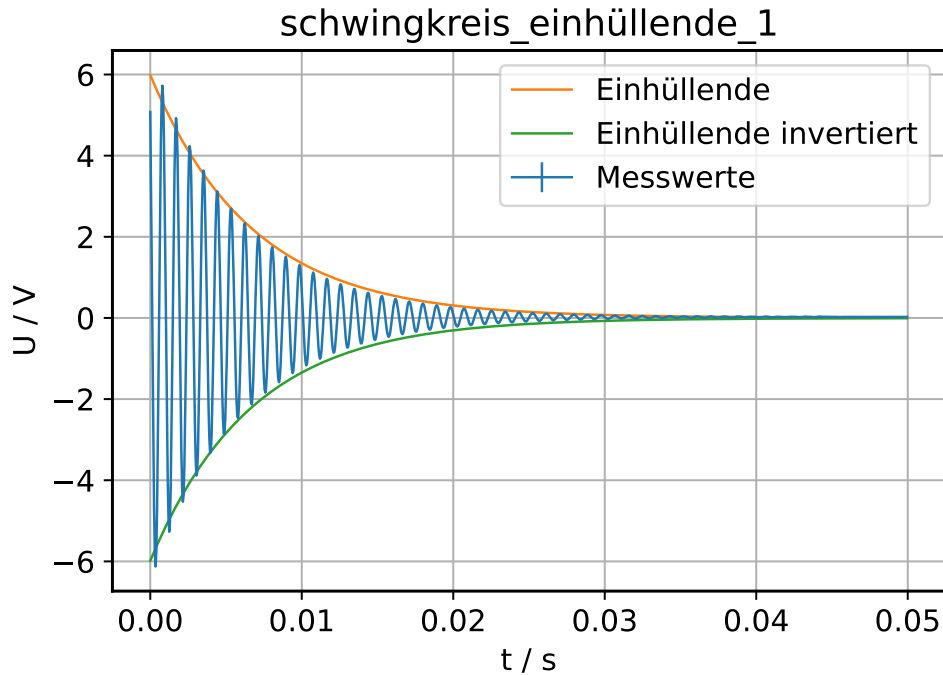


Abbildung 15: Einhüllende des ersten Schwingkreises

Gleiches haben wir beim 2. Schwingkreis gemacht. Der Widerstand konnte wie in den Grundlagen diskutiert, bestimmt werden mit $U(t) = A \cdot e^{-t \cdot B} - U_{off}$: Für den ersten Schwingkreis haben wir folgende Werte erhalten:

$$U_1(t) = (5.98 \pm 0.001)V \cdot e^{-t \cdot (149.43 \pm 0.05) \frac{1}{s}} - 0.0049V \quad (22)$$

$$U_2(t) = (5.8863 \pm 0.001)V \cdot e^{-t \cdot (160.03 \pm 0.05) \frac{1}{s}} - 0.0049V \quad (23)$$

Die in den Gleichungen angegeben Fehler sind dabei die statistischen Fehler. Da $R_2 = 2B \cdot L$ gilt, müssen für den statistischen Fehler auf den Widerstand die Statistische Fehler von B und L mithilfe Gauss'schen Fehlerfortpflanzung berechnet werden.

$$\sigma_{R_1 stat} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_1}{\partial B}\right)^2 \cdot \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial L}\right)^2 \cdot \sigma_L^2} = 0.007 \quad (24)$$

$$\sigma_{R_1 stat} = \sqrt{(2L)^2 \cdot \sigma_B^2 + (2B)^2 \cdot \sigma_L^2} = 0.007 \quad (25)$$

$$\sigma_{R_2 stat} = 0.007 \quad (26)$$

Dabei gibt es keinen Systematischen Fehler auf R . Es gibt zwar einen Systematischen Fehler auf die Spannung vom Cassy, aber dieser verschiebt alle Spannungen nur um ein Wert. Da wir bei der bestimmung der Einhüllenden immer nur Spannungsunterschiede betrachten, fällt der Fehler weg.

Wie wir den Gesamtwiderstand der Schaltung abgeschätzt haben, haben wir bereits bei unserer Erwartung für die Frequenz der beiden Schwingkreise erläutert.

Widerstand	Errechnet	Erwartet
R_1	$(2.690 \pm 0.007)\Omega$	2.644Ω
R_2	$(2.880 \pm 0.007)\Omega$	2.723Ω

Tabelle 4: Errechnete und erwartete Werte für die Widerstände

Damit übertreffen die gemessenen Werte unsere Erwartungen um ca. 0.05Ω . Allgemein sind damit die gemessenen Werte aber sehr realistisch.

Aufgabe 1 Gekoppelte Schwingung: Schwebung

Stellen Sie für einen festen Kopplungsgrad k eine Schwebung dar. Zeigen Sie jeweils die Fourierspektren, bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und daraus den Kopplungsgrad sowie dessen Messunsicherheit. Bestimmen Sie die zeitliche Verschiebung Δt zwischen den beiden Einhüllenden der Schwebungen der beiden Kondensatoren und vergleichen Sie sie mit Ihrer Erwartung. Stellen Sie dar, wie sich das Frequenzspektrum mit dem Abstand der Spulen ändert. Untersuchen Sie die Verstärkung der Kopplung durch Verwendung eines Eisenkerns in den beiden Spulen.

In diesem Versuchsteil wollen wir nun die gekoppelten Schwingkreise auf ihre Frequenz untersuchen. Wobei hier nur einer der beiden Kondensatoren aufgeladen wird. Hierfür haben wir zunächst die zwei Spulen ohne Abstand nebeneinander gestellt (jeweils mit dem Loch zueinander). Außerdem haben wir die Spannung am zweiten Kondensator gemessen, indem wir das Sensor CASSY parallel zu diesem geschaltet haben. Die Schaltung kann dem Schaltbild unten entnommen werden.

Gekoppelte Schwingung: Schwebung

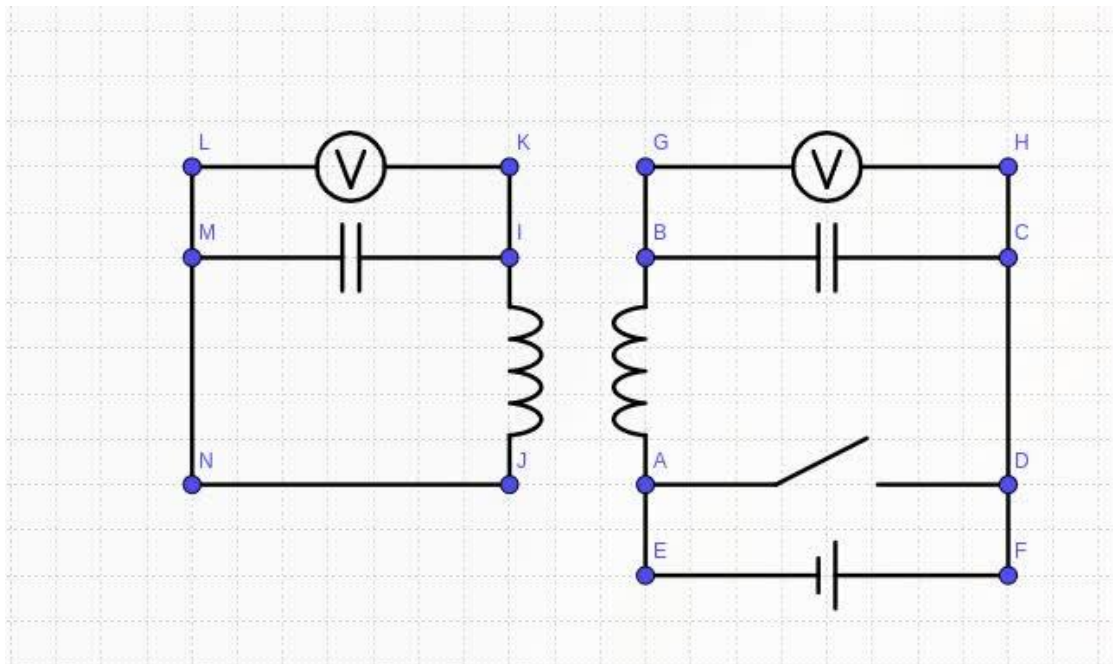


Abbildung 16: Schaltbild der Gekoppelten Schwingkreise

Wenn nun Spannung angelegt wird, wird der Kondensator in einem Schwingkreis aufgeladen. Durch drücken des Tasters wird dieser Schwingkreis geschlossen und die Schwingung startet. Für den eingekoppelten Schwingkreise haben wir die selben Messwerterfassungseinstellungen wie beim Messen der einzelnen Verwendet. So ist unsere Messung wieder durch einen Trigger 6.1V Fallende Flanke auf Schwingkreis 2 gestartet.

Um eine Messung auf zu nehmen wird der Kondensator in Schwingkreis 2 zunächst geladen. Durch drücken des Tasters wird die Spannungsquelle kurzgeschlossen, und der Schwingkreis 2 geschlossen. In diesem beginnt der Schwingungsvorgang. Über die Kopplung der Spulen wird der erste Schwingkreis ebenfalls zur Schwingung angeregt. An beiden Schwingkreisen messen wir den Spannungsverlauf am Kondensator. Bei beiden konnten wir gut den Schwingungsverlauf des gekoppelten Schwingkreises sehen, sowie die Schwebung. Von beiden haben wir eine FFT gemacht, um daraus die Fundamentalschwingungen des Schwingkreises zu bestimmen welche sich als zwei Peaks im Graph der FFT gezeigt haben.

Rohdaten

Insgesamt haben wir in diesem Versuchsteil also 9 Messungen durchgeführt, 8 Messungen mit verschiedenen Abständen und eine Messung mit dem Eisenkern. Im Folgenden werden zu erst sämtliche Daten zu 0cm Abstand angeführt. Die Diskussion der anderen Messungen wird später durchgeführt.

In den unteren Grafiken, können sie den Spannungsverlauf an beiden Kondensatoren in unserem gesamten Messintervall sehen und darunter ein Ausschnitt der Schwingung. Hier kann man sehen, dass in dem Schwingkreis in welchem der Kondensator nicht geladen war (Schwingkreis 1) die Schwingung mit einer kleineren Amplitude startet. In beiden Schwingkreisen fällt die Amplitude in ca. 0.03 Sekunden auf Null ab. Über den Genauen Verlauf der Schwingung kann diesem Graphen jedoch keine Informationen entnommen werden. In den Graphen in welchen wir die ersten 0.05s der Schwingung sehen, können wir sehr gut die Schwebung erkennen.

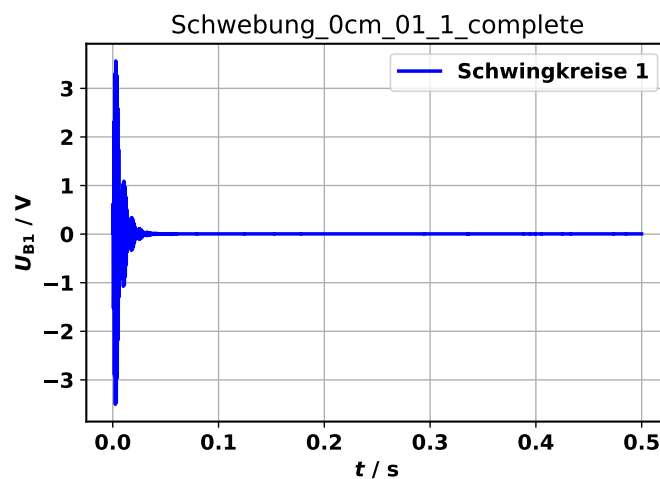


Abbildung 17: Spannungsverlauf an Kondensator 1

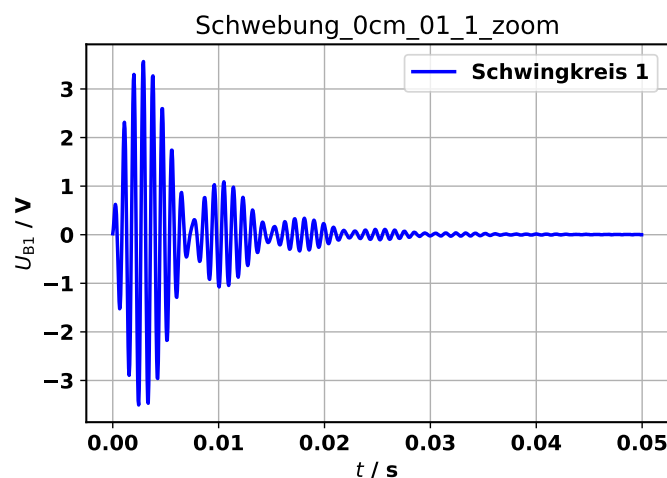


Abbildung 18: Spannungsverlauf an Kondensator 1 zoom

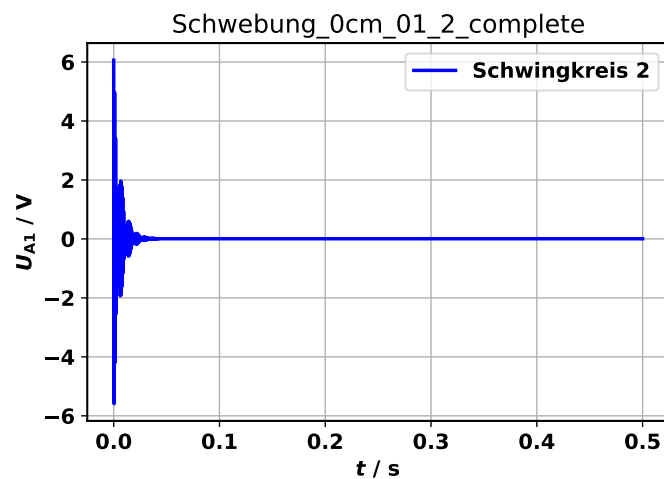


Abbildung 19: Spannungsverlauf an Kondensator 2

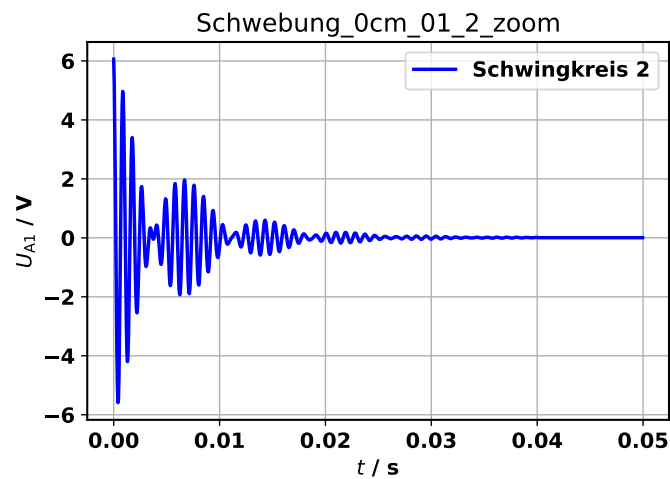


Abbildung 20: Spannungsverlauf an Kondensator 2 zoom

Der Folgende Graph zeigt ein Zoom in des Schwingungsverlaufs von beiden Kondensatoren. Diese sind hier in einem Gemeinsamen Graphen dargestellt, dass man so die Phasenverschiebung der beiden Schwingungen gut sehen kann.

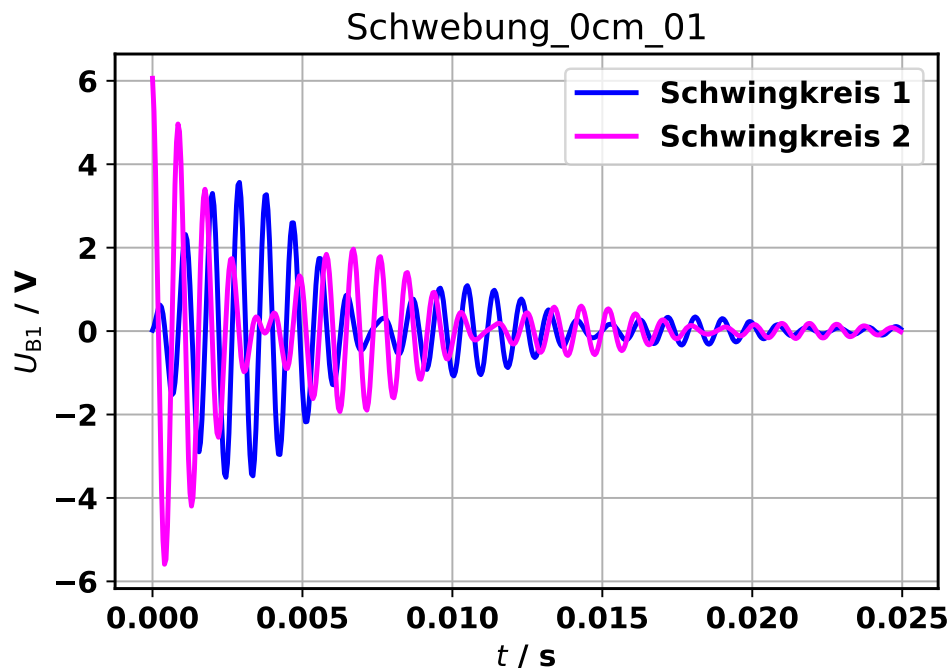


Abbildung 21: Spannungsverlauf an Kondensator 1

Hier kann man sehr gut die Phasenverschiebung zwischen den zwei Spannungen erkennen, die nach theoretischer vorhersage $\frac{\pi}{2}$ entsprechen sollte. Dies trifft jedoch nicht exakt zu, da wir noch einen Einfluss des Innenwiderstands der Schaltung haben. Des weiteren ist die Periodische Modellierung der Amplitude der beiden Signale, also die Einhüllende gut zu erkennen. Diese hat augenscheinlich für beide Schwingkreise eine ähnliche Frequenz. Am ersten Minimum der Schwebung des zweiten Schwingkreises können wir sehr gut den Phasensprung der Grundschiwingung erkennen. Wir können hier auch die Auswirkung des Widerstands sehen, da die Amplitude auch im Verlauf der Zeit kleiner wird. Dies folgt einer Exponentiellen Abnahme.

Aus der Fouriertransformation können wir die zwei Fundamentalfrequenzen des Schwingkreis bestimmen.

Hier ist die Komplette FFT für die Spannungsverläufe an den beiden Schwingkreisen zu sehen. Selbst ohne Zoom kann man erkennen, dass diese zwei peaks haben, hier sieht es noch so aus als würden die Peaks der zwei Schwingkreise übereinander liegen.

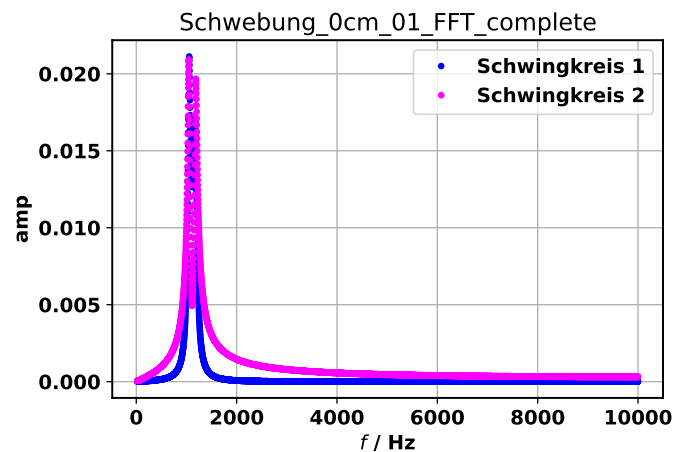


Abbildung 22: FFT der Schwingungen in Schwingkreis 1 und 2

Bestimmen der Fundamentalfrequenzen

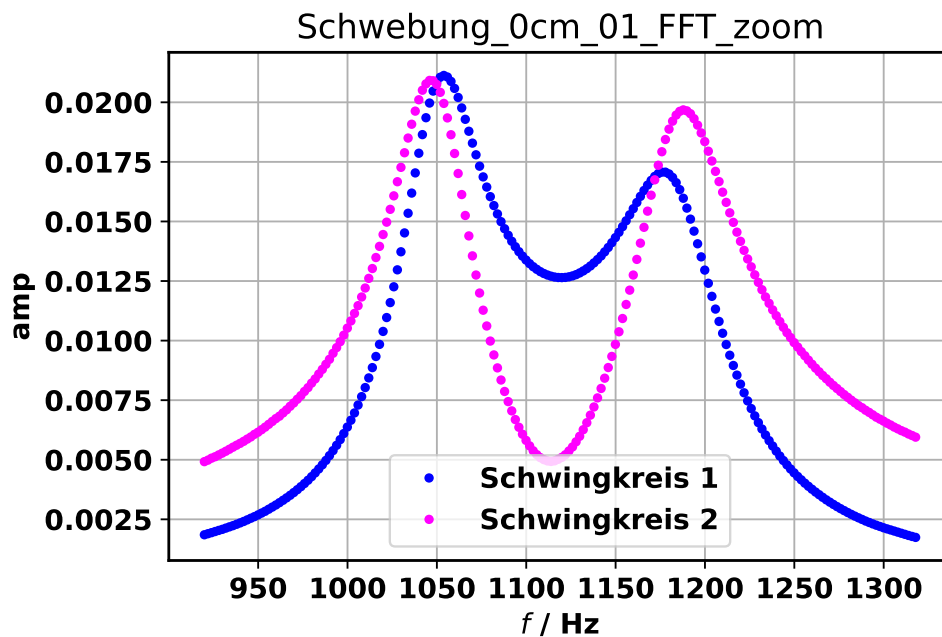


Abbildung 23: FFT-zoom der Schwingungen in Schwingkreis 1 und 2

Um die Peaks der zwei Fundamentalschwingungen zu sehen, haben wir auch einen Zoom-in der FFT betrachtet. Hier kann man sehr gut sehen, dass in beiden Schwingkreisen zwei Peaks vorliegen, wobei die Peaks in Schwingkreis

2 deutlich schärfer sind. Dies liegt daran, da hier die Spannungsquelle angeschlossen war.

Des weiteren kann man hier sehen, dass die Peaks leicht gegeneinander verschoben sind. Also die Fundamentalschwingungen der beiden Schwingkreise (SK) leicht voneinander abweichen werden. Der Tiefpunkt zwischen den beiden Peaks sollte ungefähr bei der Grundfrequenz des Schwingkreises liegen.

Die genaue Lage der Peaks haben wir wie beim Einzelschwingkreis bestimmt, indem wir die Maxima in den entsprechenden Intervallen gesucht haben. Hierfür haben wir aus dem oberen Graphen den Frequenzbereich entnommen in welchem das Maximum liegen muss. Mit einer Nahaufnahme des Peaks konnten wir die Maximalfrequenz ablesen. Unten dargestellt sind die Graphen die wir verwendet haben zum ablesen.

Im linken Plot fallen die umliegenden Punkte gleichstark ab, sodass wir hier $f_{1+} = 1054\text{Hz}$ genommen haben.

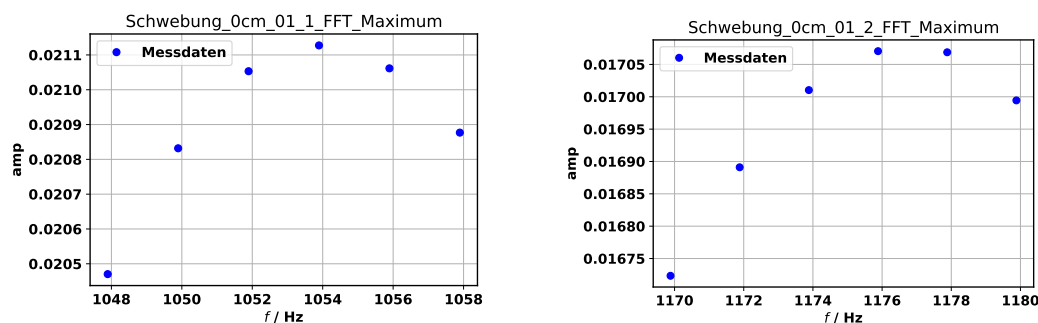


Abbildung 24: Bestimmung des Maximums von f_{1+} (links) und f_{1-} (rechts) in SK 1

Im rechten Fall haben wir nicht den Peak genommen, sonder den Punkt um 1Hz rechts davon, da es so aussieht als wäre das Maximum genau zwischen 1176 und 1178 Hz. $f_{1-} = 1177\text{Hz}$

Für f_{2+} haben wir wieder den Mittelpunkt genommen, da die Amplituden von 1046 nahezu genau so hoch ist wie bei 1048. $f_{2+} = 1047\text{Hz}$

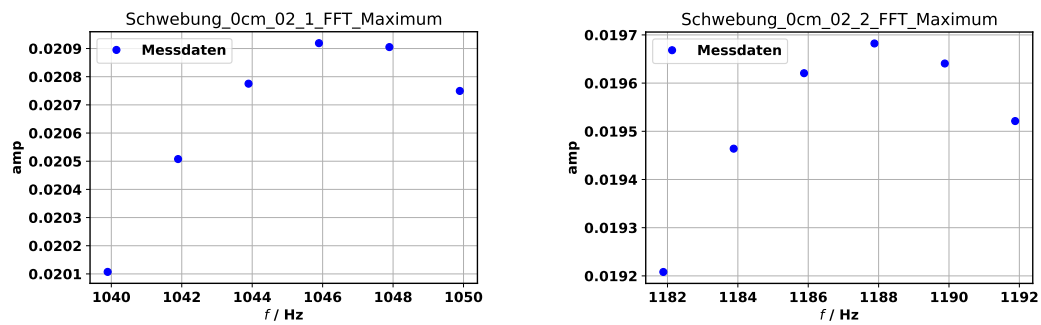


Abbildung 25: Bestimmung des Maximums von f_{2+} (links) und f_{2-} (rechts) in SK 1

Bei f_{2-} scheint die Verteilung symmetrisch, sodass wir hier $f_{2-} = 1188\text{Hz}$ genommen haben.

Hier ist so wie bei den Einzelschwingkreisen einer der Fehler auf die Fundamentalfrequenz die Ableseungenauigkeit. Diese kann Graphik 24 entnommen werden und ist gleich zu der im Einzelschwingkreis, da wir die gleichen Messwerterfassungseinstellungen verwendet haben. Des weiteren haben wir den statistischen Fehler welchen wir durch 10x Messung von SK 2 bestimmt hatten.

Beim Sensor CASSY können wir davon ausgehen, dass wir keinen Fehler auf die Zeit haben, weswegen dies kein Einfluss auf den Fehler auf die Fundamentalfrequenzen hat. Auf die Fundamentalfrequenzen haben wir keinen systematischen Fehler. Diese Fehler müssen quadratisch addiert werden, da wir davon ausgehen können, dass beide statistischer Natur sind. So erhalten wir als Ergebnisse auf f_+ und f_- in den beiden Schwingkreisen:

Schwingkreis	f_+	f_-	Fehler (σ)
1	1054Hz	1177Hz	1.2Hz
2	1047Hz	1188Hz	1.2Hz

Tabelle 5: Fundamentalschwingungen der zwei Schwingkreise

Die bestimmten Frequenzen unterscheiden sich leicht, obwohl nach theoretischer Erwartung diese gleich sein sollten, unabhängig davon welchen Schwingkreis man misst. Jedoch sind unsere Schwingkreise nicht komplett gleich, so variiert z.B. der Widerstand in diesen leicht. Dies führt dazu, dass wir bei den Messungen leicht unterschiedliche Ergebnisse haben. Dies wird natürlich auch Einfluss auf die Größen die aus f_+ und f_- bestimmt werden haben. So werden wir für die zwei Messungen unterschiedliche Kopplungsgrade erhalten.

Bestimmen der Eigenfrequenz und Schwebungsfrequenz

Als weitere interessante Frequenzen, haben wir in dem gekoppelten Schwingkreis, die Frequenz der Schwebung und die Grundfrequenz des gekoppelten Schwingkreises. In den Grundlagen wurde bereits eingeführt wie diese mit den Fundamentalfrequenzen zusammen hängen. Für diese ergibt sich:

$$f_k = \frac{f_- + f_+}{2} \quad (27)$$

$$f_{schw} = \frac{f_- - f_+}{2} \quad (28)$$

Für den Fehler auf diese Frequenzen müssen wir den Fehler auf f_+ und f_- quadratisch fortpflanzen. Aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{x=\mu}^2 \sigma_i^2 \quad (29)$$

Dies ist die Allgemeine Form für die Fehlerfortpflanzung mit n Variablen wenn die Größen unkorreliert sind was in unserem Fall zutrifft.

Daraus folgt für unser spezifisches Problem:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial f_+} \right)^2 \sigma_{f_+}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial f_-} \right)^2 \sigma_{f_-}^2} \quad (30)$$

Hier steht f stellvertretend für f_k und f_{schw} . σ_f bezeichnet die Standardabweichung auf diese Frequenzen. σ_{f_+} und σ_{f_-} für die Fehler auf diese Größen.

Da Jedoch der Fehler auf f_+ und f_- gleich ist, und für die beiden Funktionen durch das quadrieren der Ableitungen das Vorzeichen keinen einfluss auf den Fehler hat ergibt sich für beide:

$$\sigma_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{f_+} \quad (31)$$

Mit den Fundamentalfrequenzen aus beiden Schwingkreisen ergibt sich somit:

Schwingkreis	f_k	f_{schw}	σ_f
1	1115.5Hz	61.5Hz	0.85Hz
2	1117.5Hz	70.5Hz	0.85Hz

Tabelle 6: Fundamentalschwingungen der zwei Schwingkreise

Diese Schwebungsfrequenzen passen auch mit der Frequenz die wir in Graph 21 sehen können überein. Bei einer Frequenz von 61Hz haben wir eine Periodendauer von ca. 0.016s. In dem Graph können wir sehen, dass die Schwebung von Schwingkreis 1 nach ca. 0.016s eine gesamte Schwingungsperiode durchlaufen hat.

Bestimmung des Kopplungsgrads

Mit den Beiden Fundamentalfrequenzen können wir ebenfalls den Kopplungsgrad bestimmen wie in den Grundlagen eingeführt.

$$\Rightarrow k = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} \quad (32)$$

Hier müssen wir ebenfalls die Fehler auf f_+ und f_- quadratisch fortpflanzen. Wir gehen davon aus, dass diese unkorreliert sind.

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{4f_+f_-^2}{(f_+^2 + f_-^2)^2} \sigma_{f_+} \right)^2 + \left(\frac{4f_+^2f_-}{(f_+^2 + f_-^2)^2} \sigma_{f_-} \right)^2} \quad (33)$$

Daraus ergibt sich für die gemessenen Frequenzen aus Schwingkreis 1 eine Kopplung von:

$$k_1 = 0.110 \pm 0.002$$

und für den zweiten:

$$k_2 = 0.126 \pm 0.002$$

Hier kann man sehen, dass der Kopplungsgrad den wir für Schwingkreis 1 bestimmt haben deutlich kleiner ist als der von Schwingkreis 2. Dies war bereits zu erwarten, da in Schwingkreis 1 die bestimmten Frequenzen deutlich enger beieinander lagen. Ein Grund hierfür kann sein, dass unsere Schwingkreise nicht komplett identisch sind.

Zeitliche Verschiebung

Da unser Kopplungsgrad kleiner als 0.2 ist können wir als Näherung für die zeitliche Verschiebung die Formel 13 verwenden. Diese Zeitliche Verschiebung beschreibt, den unterschied zu unserer Erwartung von einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ (zwischen Nulldurchgang der Schwebung bei Kondensator 1 und Maximum bei Kondensator 2).

Δt berechnen wir sowohl mit den Ergebnissen aus SK1 als auch aus SK2 hier werden leicht unterschiedliche Ergebnisse heraus kommen. Für L und C verwenden wir die Größen welche wir mit der Messbrücke gemessen haben und für R den Widerstand den wir aus den Einzelschwingkreisen bestimmt haben. Dies dient dazu, den später Graphisch bestimmten Wert für ΔT mit dem Rechnerischen zu vergleichen.

Sämtliche Fehler die Hier eingehen sind statistischer Natur. Für den Vergleich interessieren wir uns maßgeblich an dem Berechneten Wert für ΔT .

$$\Delta t_1 = -2.277 \cdot 10^{-3} s \quad \Delta t_2 = -2.040 \cdot 10^{-3} s$$

Diese Verschiebung können wir auch aus dem Graphen in welchem wir die Schwebung beobachten können Ablesen. Hierzu muss die Position von dem

Minimum der Schwebung des einen Schwingkreises mit der Position des Maximums der Schwebung des anderen Schwingkreises verglichen werden.

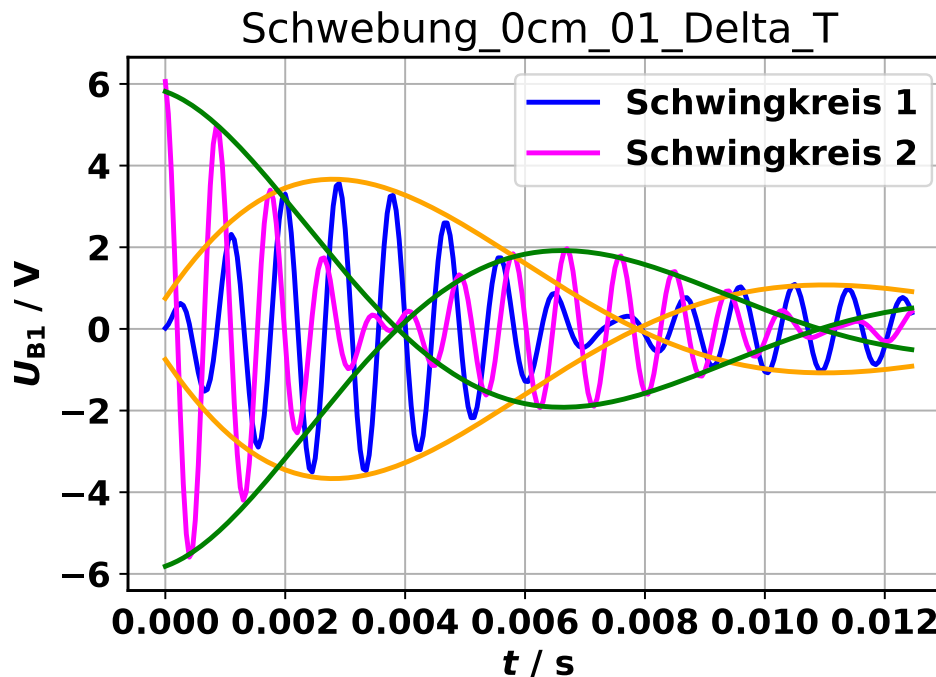


Abbildung 26: Schwingungen mit eingezeichneten Schwebungen

Hier kann man die Schwingung an den Beiden Kondensatoren erneut sehen. In orange und grün sind die Einhüllenden die auf Grund der Schwebung und der Dämpfung zustande kommen dargestellt. Da die Einhüllende einer Funktion der Form $f(x) = \sin(x2\pi f_s) A e^{-x\delta}$ folgt, kann mit unseren Ergebnissen für die Schwebungsfrequenzen und den Parametern aus der Anpassung der Exponentialfunktion (Gleichung 22 und 23) der genaue Verlauf dieser ermittelt werden. Wenn wir nun die Verschiebung bestimmen wollen, brauchen wir einen Ausschnitt, in welchem wir die Position des Minimum bzw. des Maximum der Schwebung sehen können.

Da die zwei Schwebungen unterschiedliche Frequenzen haben, laufen diese auseinander, weswegen möglichst ein Vergleich am Anfang der Messzeit betrachtet werden sollte. Hier sind die Amplituden auch noch größer und die Maxima schärfer.

Zur Bestimmung betrachte ich den ersten Nulldurchgang der in grün eingezeichneten Schwebung.

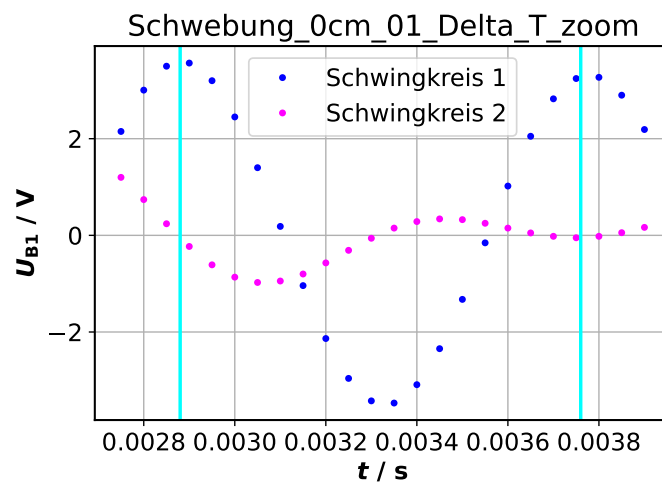


Abbildung 27: Zoom des ersten Nulldurchgangs der Schwebung des Schwingkreis 2

Hier zu sehen ist der Zoom in den Relevanten Bereich. Die linke Linie ist dort eingezeichnet, wo man durch Ablesen in etwa das Maximum bestimmen kann. Die rechte Linie ist an der Stelle des Minimums. Das erste Maximum der Schwebung des Ersten Schwingkreises liegt bei $t_1 = 287 \cdot 10^{-5} s$.

Das erste Minimum der Schwebung des zweiten Schwingkreises liegt bei $t_2 = 376 \cdot 10^{-5} s$

Diese Werte haben wir aus einem weiteren Zoom in bestimmt, hier exemplarisch für das Maximum dargestellt.

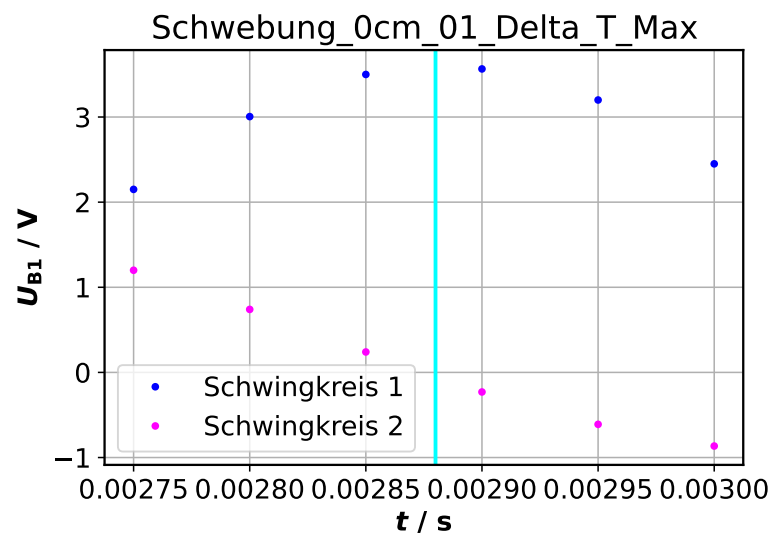


Abbildung 28: Zoom des Maximum der orangefarbenen Schwebung

Hierbei ist die Ablesegenauigkeit der relevante Fehler auf diese Größe, da wir bei CASSY davon ausgehen können, dass wir kein Digitalisierungsfehler auf die Zeit haben. Dieser ist: $\sigma_t = \frac{0.00005}{\sqrt{12}} = 1.4 \cdot 10^{-5} s$ und für t_1 und t_2 gleich groß. Somit ergibt sich für Δt

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (89 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-5}) s \quad (34)$$

Die Fehler wurden hier quadratisch addiert.

Was auffällt ist, dass dieser Graphisch bestimmte Wert in etwa der der Hälfte des rechnerisch bestimmten Wert entspricht.

Einfluss des Abstands auf die Kopplung

Zur Bestimmung des Einfluss des Abstands auf den Kopplungsgrad haben wir die Spulen in 0.5cm schritten auseinander bewegt von 0 bis 3.5cm. Bei jedem dieser schritte haben wir eine Messung wie oben durchgeführt. Dabei haben wir jedes mal uns die FFT der beiden Schwingkreise angeschaut, um zu schauen ab welchem Abstand die Peaks bei der FFT nicht mehr zu trennen sind. Durch Vergrößerung des Abstands sind die Peaks näher zusammen gerückt.

Dabei haben wir bei diesem Experiment alle Messeinstellungen (Intervall, Messlänge, Auflösung, Trigger) so gelassen, wie bei den vorherigen Messungen.

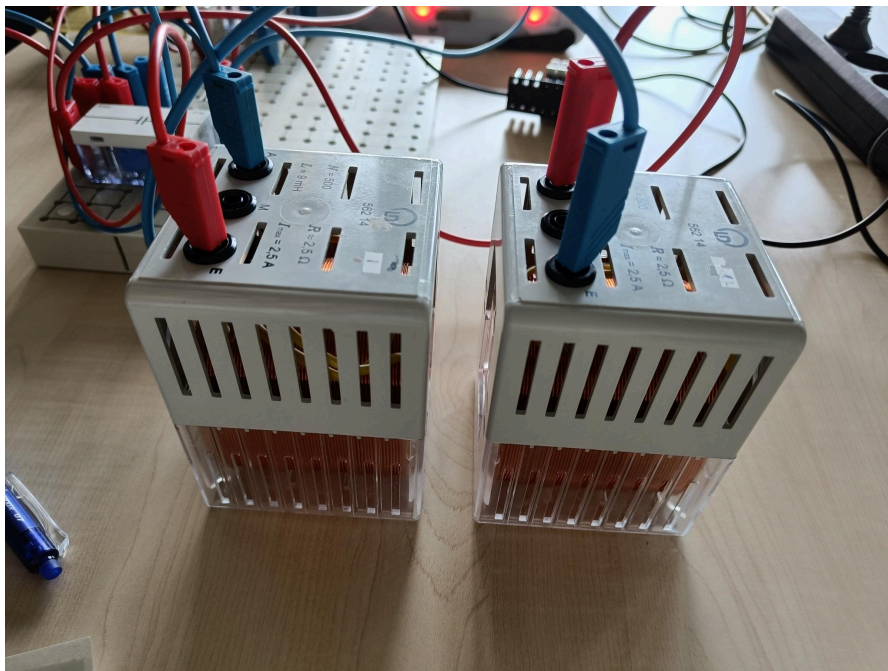


Abbildung 29: Spulen im Abstand von 1cm

Dabei ist uns aufgefallen, dass in Schwingkreis 2 die zwei Fundamentalfrequenzen länger trennbar sind als im ersten.

Hier einmal beispielhaft die Spannungsverläufe für 0.5cm und 3.5cm Abstand. Dabei sieht man schön, wie bei größerem Abstand die Dämpfung einen stärkeren Einfluss hat als die Schwebung. Dennoch kann man auch bei 3.5cm die

Schwebung und auch das 2. Maximum der Schwebung von Schwingkreis 2 erkennen.

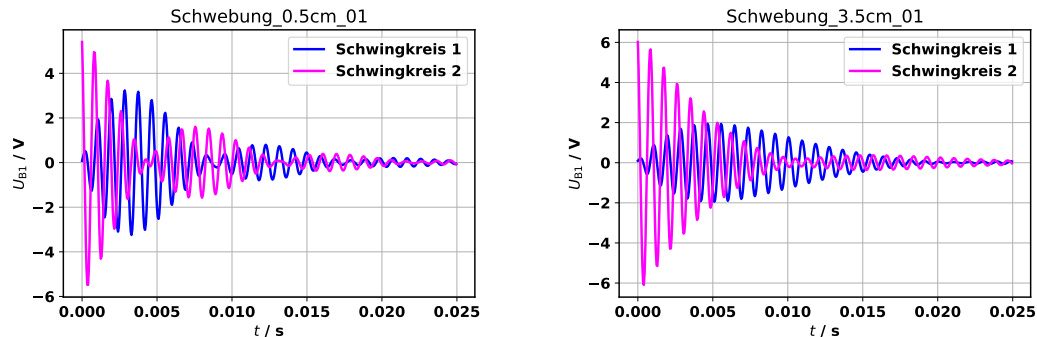


Abbildung 30: Spannungsverlauf bei 0.5cm (links) und 3.5cm (rechts) Abstand

Anschließend haben wir die Spannungsverläufe der beiden Schwingkreise in der FFT dargestellt, um die Maxima zu bestimmen. Hier einmal von 0.5cm und von 3.5cm Abstand die Fourierspektren.

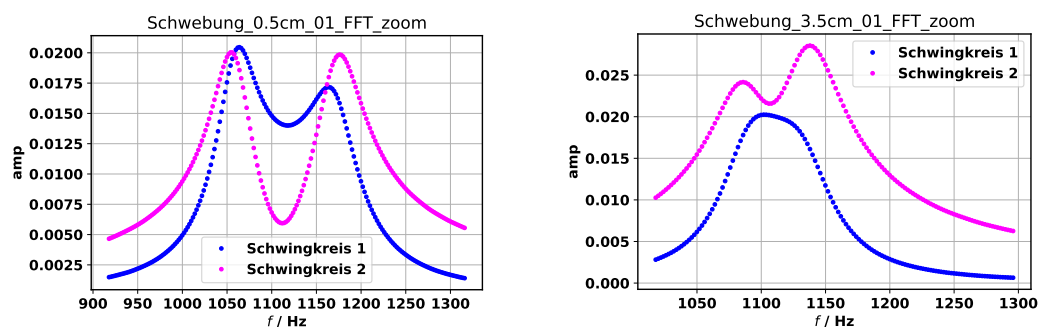


Abbildung 31: FFT bei 0.5cm (links) und 3.5cm (rechts) Abstand

Gut zu erkennen ist, dass die Peaks bei 3.5 vom 1. Schwingkreis nicht mehr klar zu trennen sind. Dies liegt daran, dass hier die Kopplung schon zu gering ist und die Dämpfung zu hoch.

Bei 3.0cm Abstand ist dies auch immer noch der Fall, bei 2.5cm Abstand aber nicht mehr, wie unten dargestellt.

Deshalb haben wir zur weiteren Auswertung nur die Messungen bis 2.5cm Abstand genommen. Dies 5 Messpunkte sind ausreichend um den funktionalen Zusammenhang zu bestimmen.

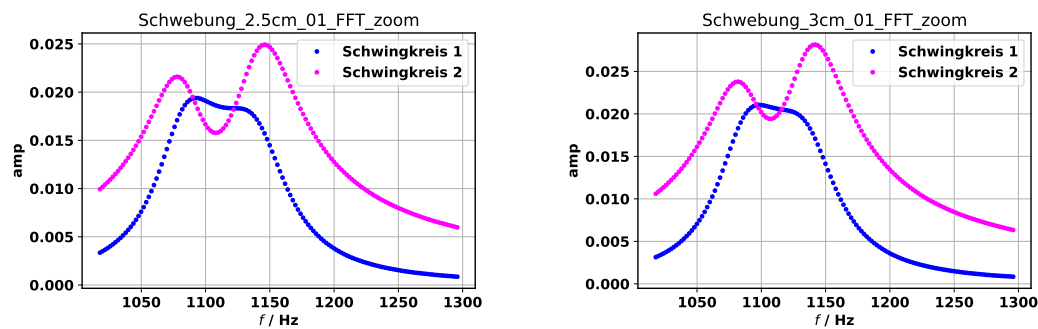
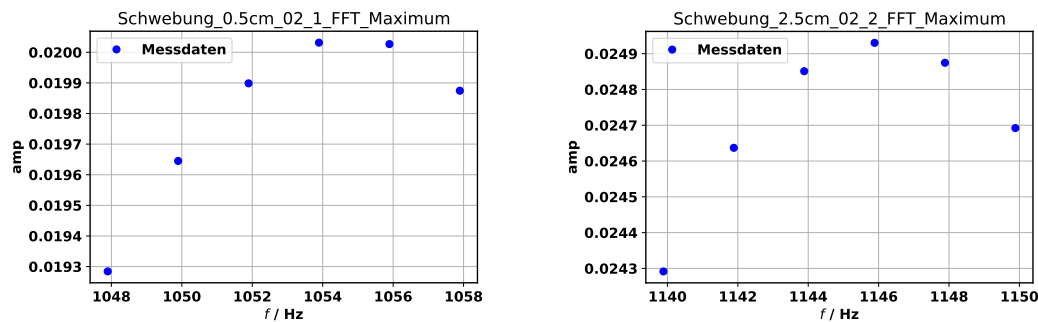


Abbildung 32: FFT bei 2.5cm (links) und 3cm (rechts) Abstand

Hier 2 Beispiele, wie wir die Maxima bestimmt haben.

Abbildung 33: f_+ bei 0.5cm (links) und f_- bei 2.5cm Abstand (rechts) beides für SK2

Im linken fall haben wir $f_+ = 1055$ gewählt, da die Verteilung Asymmetrisch wirkt. Hier scheint die Verteilung symmetrisch, also können wir $f_- = 1146$ wählen. Wir sind dabei genauso vorgegangen, wie bei der vorherigen Auswertung auch. Hier die Tabelle mit allen Maxima:

Tabelle 7: Abgelesene Maximal Frequenzen

Abstand	f_+	f_-	stat. Fehler
0cm SK1	1054 Hz	1177 Hz	1.2Hz
0cm SK2	1047 Hz	1188 Hz	1.2 Hz
0.5cm SK1	1063.5 Hz	1163.5 Hz	1.2Hz
0.5cm SK2	1055 Hz	1176.5 Hz	1.2Hz
1cm SK1	1071.5 Hz	1153.5 Hz	1.2Hz
1cm SK2	1061.5 Hz	1167.5 Hz	1.2Hz
1.5cm SK1	1079.5 Hz	1143 Hz	1.2Hz
1.5cm SK2	1068 Hz	1158.5 Hz	1.2Hz
2.0cm SK1	1086.8 Hz	1133.5 Hz	1.2Hz
2.0cm SK2	1073 Hz	1152.5 Hz	1.2Hz
2.5cm SK1	1092.8 Hz	1121 Hz	1.2Hz
2.5cm SK2	1078.5 Hz	1146.5 Hz	1.2Hz

Dabei haben wir die Frequenz für 0cm Abstand aus der Vorherigen Messung übernommen.

Anschließend haben wir die Kopplung und den Fehler auf die Kopplung berechnet. Zur berechnung des Kopplungsgrads aus den Fundamentalschwingungen können wir wieder folgende Formeln nehmen. (32). Da wir die Frequenzen gleich bestimmt haben, ändert sich auch an der Fehlerrechnung nichts zu vorher wir können Gleichung(33) Verwenden.

Die errechneten Kopplungsgrade mit Fehlern sind dann:

Tabelle 8: Kopplungsgrade

Abstand	Kopplungsfaktor	stat. Fehler
0.0cm SK1	0.11	0.002
0.0cm SK2	0.126	0.002
0.5cm SK1	0.09	0.002
0.5cm SK2	0.109	0.002
1.0cm SK1	0.074	0.002
1.0cm SK2	0.095	0.002
1.5cm SK1	0.057	0.002
1.5cm SK2	0.081	0.002
2.0cm SK1	0.042	0.002
2.0cm SK2	0.071	0.002
2.5cm SK1	0.025	0.002
2.5cm SK2	0.061	0.002

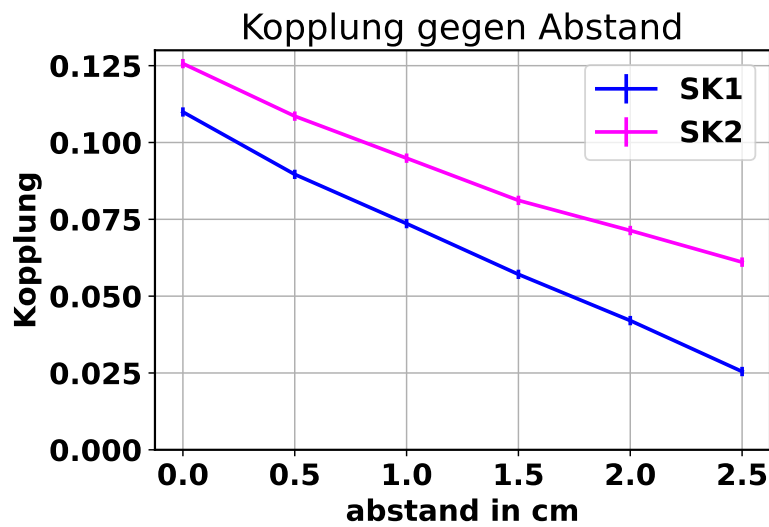


Abbildung 34: Kopplung gegen den Abstand geplottet

Wie zu sehen ist, nimmt die Kopplung mit zunehmendem Abstand linear ab.

Dabei haben wir die Lineare Regression für jeden Schwingkreis einzeln durchgeführt, da wie zu sehen ist, die Schwingkreise schon bei gleichem Abstand sehr unterschiedliche Kopplungen haben.

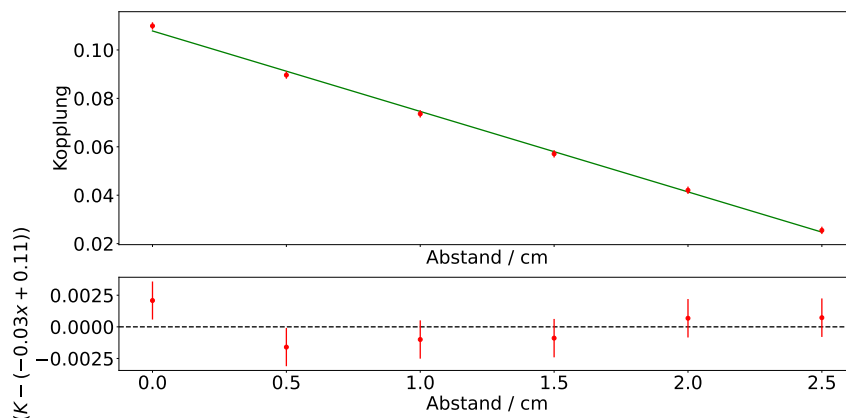


Abbildung 35: Lineare Regression der Kopplung gemessen aus SK 1

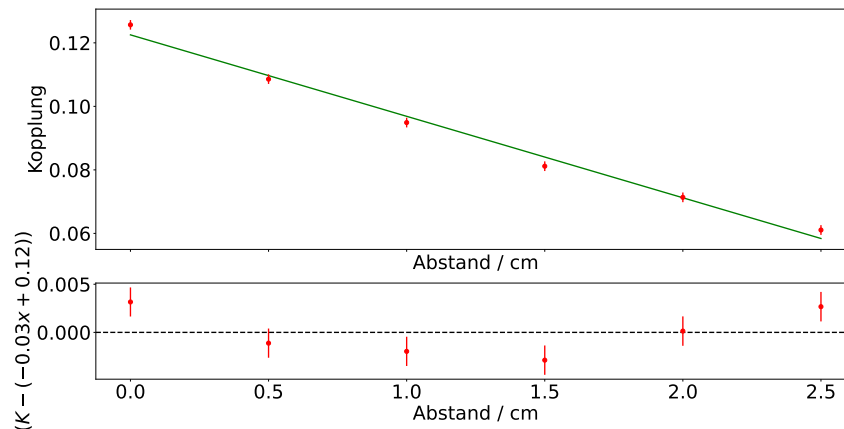


Abbildung 36: Linare Regression der Kopplung gemessen aus SK 2

Wie zu sehen ist, ist der Fit für den 1. Schwingkreis besser als für den 2. Schwingkreis. Dies spiegelt sich auch in den Chi-Quadrat/ndof Werten wider, die für den 1. Schwingkreis 1.05 und für den 2. Schwingkreis 3.3 betragen.

Die Ergebnisse sind dabei (mit x in cm):

$$k_2 = (-0.026 \pm 0.001) \cdot \frac{x}{cm} + (0.123 \pm 0.001) \quad (35)$$

$$k_1 = (-0.033 \pm 0.001) \cdot \frac{x}{cm} + (0.108 \pm 0.001) \quad (36)$$

Hier haben wir erwartet, dass die Steigung für beide Schwingkreise gleich ist. Die Schwingkreise haben zwar etwas andere Eigenfrequenzen, aber die Kopplung sollte trotzdem um den gleichen Wert pro cm Abstand abnehmen.

Dies ist aber nicht der Fall, wobei der Fehler gerade nicht im Rahmen von 3 Standardabweichungen liegt.

Kopplung mit Eisenkern

Zuletzt haben wir die zwei Spulen auf einen gemeinsamen Eisenkern geschoben, um die Kopplung so zu erhöhen. Mit dieser Konfiguration haben wir die Messung noch mal durchgeführt. Diese haben wir 3x durchgeführt, um zu sehen, ob die Ergebnisse sich reproduzieren, dies war der Fall. Im folgenden werden wir die erste Messung aus (Schwebung_Eisenkern_01.labx).

Der Eisenkern hat einen Einfluss auf die Kopplung da diese über die Induktivität mit der magnetischen Permeabilität zusammen hängt. Die Induktivität einer Spule ist gegeben als:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{L} \quad (37)$$

Hier bezeichnet N die Windungszahl, A den Querschnitt der Spule und L die Länge. Wenn wir nun ein Eisenkern in die Spule stecken, verändert sich also nur das μ_r das in Luft vorher 1 war. Aus unseren Messungen der Induktivität der Spule mit und ohne Eisenkern können wir also die magnetische Permeabilität bestimmen, da gilt: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{\mu_r}$ (L_1 Messung ohne Eisenkern L_2 Messung mit

Eisenkern).

$$\mu_{r1} = (6.19 \pm 0.22) \frac{H}{m} \quad \mu_{r2} = (6.25 \pm 0.22) \frac{H}{m}$$

Da wir jedoch den gleichen Eisenkern für beide Spulen verwendet haben, und der Unterschied der beiden Werte im Rahmen der Messunsicherheit auf diese liegt, verwenden wir im weiteren den Mittelwert der zwei Werte ($\mu_r = (6.22 \pm 0.16) \frac{H}{m}$).

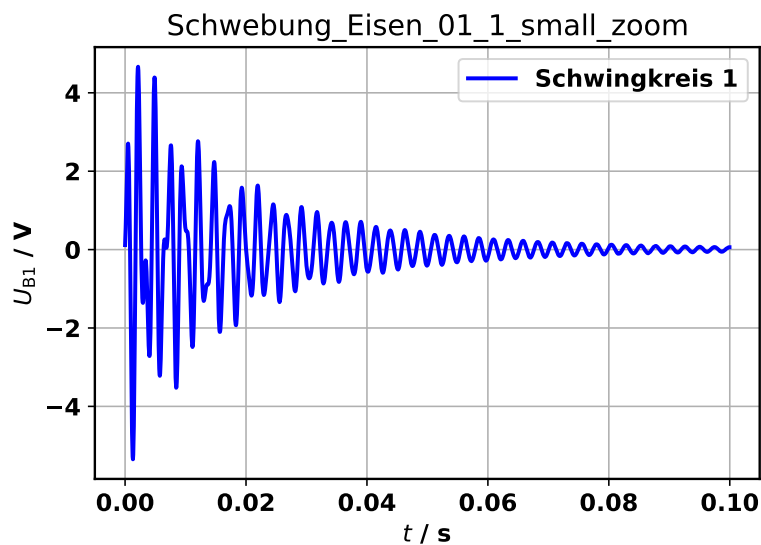


Abbildung 37: Schwingungsverlauf im ersten Schwingkreis mit Eisenkern

Hier können Sie den Schwingungsverlauf in Schwingkreis 1 sehen, wenn dieser mit dem Eisenkern mit Schwingkreis 2 gekoppelt ist. Die Letzten 0.4s wurden in diesem Graphen weg geschnitten, da hier die Amplitude auf null abgefallen war, und sonst die Schwingung nicht sichtbar wäre.

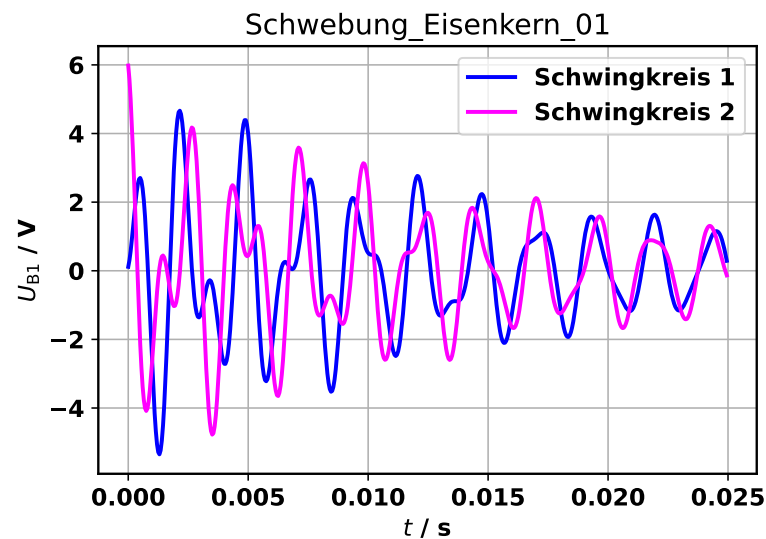


Abbildung 38: Schwingungsverlauf im ersten Schwingkreis mit Eisenkern

Hier kann eine Nahaufnahme der Schwingungen in beiden Schwingkreisen gesehen werden. Was hier auffällt ist, dass das Signal nicht mehr Sinus bzw. Kosinus förmig ist. Es ist jedoch trotzdem ein Periodisches Signal.

Da der Eisenkern die Induktivität der Spule erhöht hat, erwarten wir jetzt auch kleinere Frequenzen als ohne. Dies kann man auch direkt sehen wenn man diesen Graphen mit Graph 21 vergleicht.

Das dazugehörigen Fourierspektrum ist:

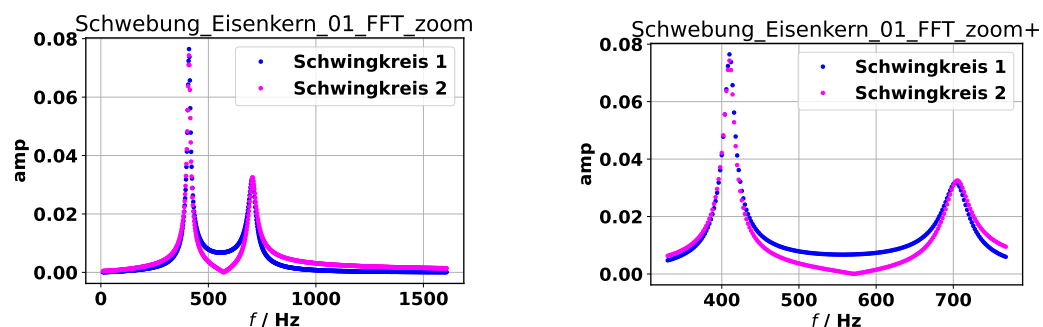


Abbildung 39: FFT der Schwebungsmessung mit Eisenkern

Hier reicht es den Bereich bis zu 1600Hz zu betrachten, da wir in Graph 38 bereits sehen können, dass wir keine höheren Frequenzen haben werden. Hier kann man bereits sehen, dass die Peaks weiter auseinander liegen als in der Kopplung ohne Eisenkern. Dargestellt sind zwei verschiedene zoom Ausschnitte der FFT, so kann Position und Form der Maxima gesehen werden. Zur Be-

stimmung der genauen Position der Maxima haben wir jeweils nur den Ausschnitt am Peak betrachtet, und dieses wie zuvor auch Graphisch bestimmt.

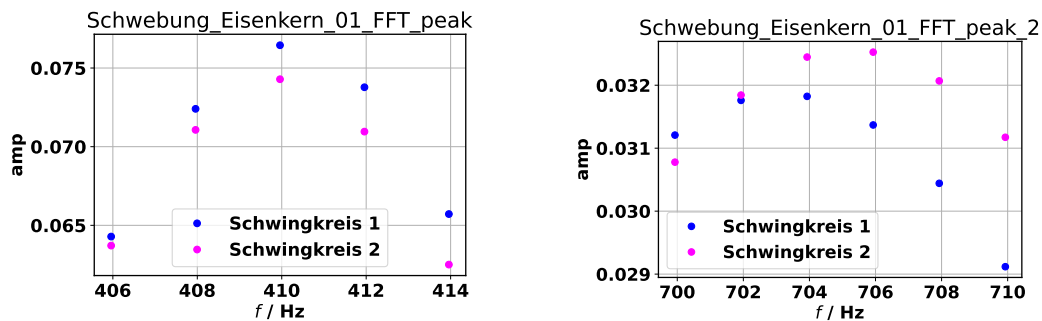


Abbildung 40: Graphen zur bestimmung der Fundamentalfrequenzen

durch Ablesen ergibt sich für die Frequenzen.

Schwingkreis	f_+	f_-	Fehler (σ)
1	411Hz	703Hz	1.2Hz
2	410Hz	705Hz	1.2Hz

Tabelle 9: Fundamentalschwingungen der zwei Schwingkreise mit Eisenkern

Da wir die gleiche Auflösung verwenden wie bei der Bestimmung der Maxima ohne Eisenkern bleibt der Ablesefehler gleich. Sowie die gleiche statistische Unsicherheit die wir aus dem Einzelschwingkreis haben. Diese dürfen wir verwenden, da wir die gleichen Messwerterfassungseinstellungen verwendet haben. Hier kann man sehen, dass die Werte für die Fundamentalschwingungen maximal um 2Hz abweichen in den beiden Schwingkreisen.

Für die Berechnung der Schwebungsfrequenz und der Grundfrequenz können wir Gleichung 27 und 28 verwenden. Für den Fehler auf diese verwenden wir Gleichung 31. Daraus ergibt sich:

Schwingkreis	f_k	f_{schw}	σ_f
1	557Hz	146Hz	0.85Hz
2	557.5Hz	147.5Hz	0.85Hz

Tabelle 10: Schwebungsfrequenz und Grundfrequenz der Schwingkreise mit Eisenkern

Da die Grundfrequenz und Schwebungsfrequenz hier um einiges näher zusammen liegen führt das auch dazu, dass in Graph 38 das Signal aperiodisch scheint.

Mit Gleichung 32 können wir nun auch den Kopplungsgrad berechnen. Zur Berechnung des Fehlers auf diesen verwenden wir Gleichung 33

$$k_1 = 0.491 \pm 0.003 \quad k_2 = 0.495 \pm 0.003$$

Im Fall der Kopplung mit den Eisenkernen erhalten wir für beide Schwingkreise den nahezu gleichen Wert für die Kopplung. Die Abweichung ist in der dritten Nachkommastelle und liegt innerhalb der Messunsicherheit.

Aufgabe 1 Gekoppelte Schwingung: gleich- und gegensinnige Anregung

Stellen Sie für einen festen Kopplungsgrad k nacheinander die beiden Fundamentalschwingungen dar. Zeigen Sie jeweils die Fourierspektren und bestimmen Sie die zugängliche Eigenfrequenz. Berechnen Sie den Kopplungsgrad sowie dessen Messunsicherheit. Vergleichen Sie mit den Werten aus der Schwebung.

Gekoppelte Schwingung: gleich- und gegensinnige Anregung

Aufbau und Durchführung

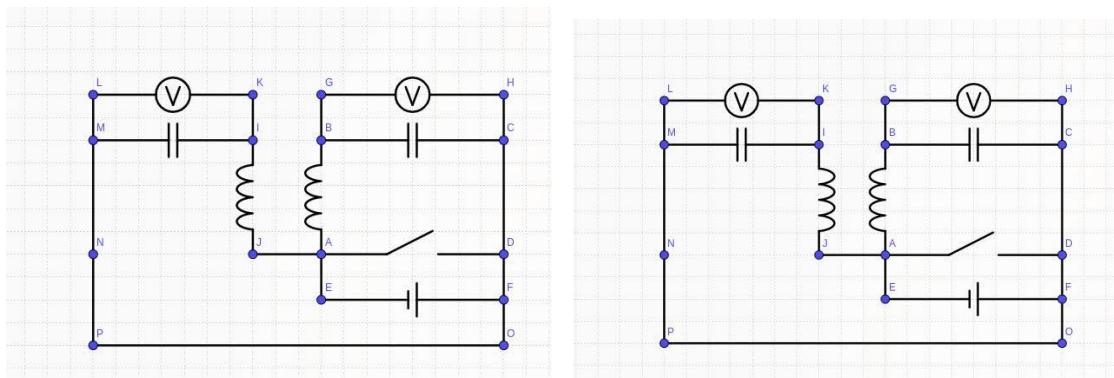


Abbildung 41: links gleichsinnig rechts gegensinnig gekoppelt

Dabei ist in beiden Schaltbildern links der zweite Schwingkreis und rechts der erster. Vor der Messung haben wir erst beide Kondensatoren mit offenem Schalter aufgeladen. Gestartet hat die Messung, wenn wir den Schalter geschlossen haben, da dann der entlade Vorgang der Kondensatoren und somit auch die Schwingung beginnt. Den Trigger haben wir so eingestellt wie vorher da sich hierfür nichts relevantes verändert hat, also bei 6.1V fallende Flanke von der Spannung am Kondensator vom 2. Schwingkreis. Dabei haben wir die Spulen der beiden Schwingkreise direkt nebeneinander gestellt, um die Kopplung zu maximieren. Die Kopplung haben wir während der gesamten Messung konstant gehalten.

Alle Messeinstellungen haben wir so gelassen wie in den vorherigen Versuchen, da sich hier nichts wesentliches verändert hat. Zum umwechseln von gleichsinnig zu gegensinnig haben wir die Spule im 1. Stromkreis umgedreht, da dann

der Strom andersherum durch sie hindurch fließt. Sowohl die gleich wie die gegensinnige Schwingung haben wir einmal vermessen. Wir haben auch ein mal die Spannungsquelle umgepolt, um gleichsinnige schwingung zu erhalten, dies führt jedoch nur dazu, dass wir ein Phasensprung zwischen den zwei Schwingkreisen haben. Zur Auswertung verwenden wir die Messungen die wir mit Drehung der Spule aufgenommen haben.

Gleichsinnige Schwingung

Bei der Gleichsinnigen Schwingung ist die Maximale Frequenz wie in den Grundlagen diskutiert f_+ .

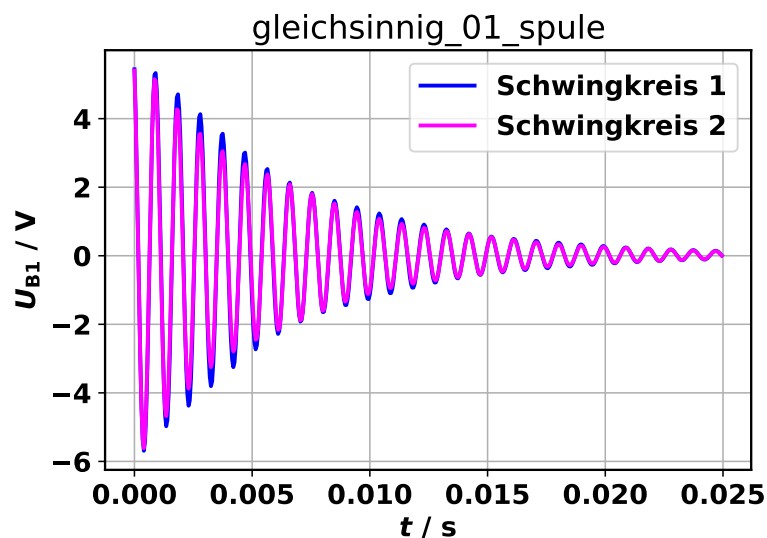


Abbildung 42: Gleichsinnige Schwingung beider Schwingkreise

Hier kann man sehr gut sehen, dass die Schwingungen in beiden SK nahezu deckungsgleich sind. Sie werden eine sehr ähnliche Frequenz haben, man kann auch keinen Phasensprung zwischen den beiden erkennen.

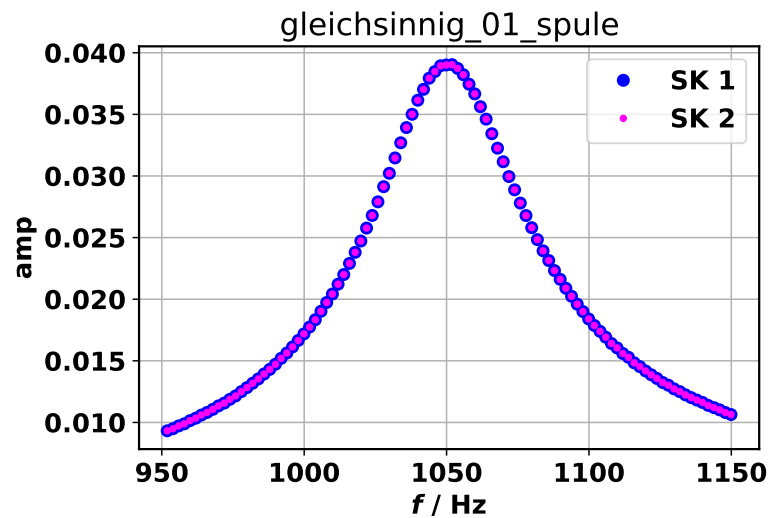


Abbildung 43: Gleichsinnige Schwingung FFT mit ausschnitt um den Peak

Zum Auswerten haben wir uns die Fouriertransformation angeschaut, und die Maxima graphisch abgelesen, da wir so das Maximum genauer bestimmen können als wenn wir einfach nur den Wert mit der Maximalen Amplitude aus der FFT wählen. Dies liegt daran, da die Verteilung nicht vollkommen symmetrisch ist. Oben können Sie den Ausschnitt der FFT sehen in welchem Die Maxima liegen. Hier ist gut zu sehen, dass für die Messwerte bei Schwingkreis 1 und 2 nahezu gleiche Frequenzen raus kommen.

Wie in Graph 42 zu sehen ist, haben wir ein Kosinus förmiges Signal. Wir erwarten also nur einen Peak in dem Fourierspektrum, also stimmt unser Fourierspektrum mit den Erwartungen überein.

Für die Gleichsinnige Schwingung haben wir das Maxima aus diesem Graphen bestimmt.

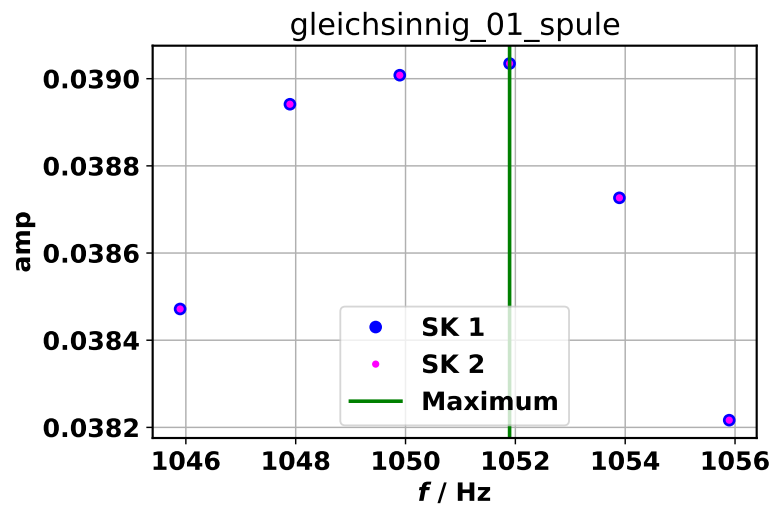


Abbildung 44: Gleichsinnige Schwingung FFT Zoom in

Der Grün eingezeichnete Strich, ist die Frequenz mit der Größten Amplitude. Aus der Form der Verteilung um das Maximum können wir schließen, dass die gesuchte Frequenz bei $f_+ = 1051\text{Hz}$ liegt. Dies gilt für die Messung an beiden Kondensatoren. Desweiteren können wir sehen, dass hier die Ablesegenauigkeit gleich wie bei der Schwebung bei 2Hz liegt. Somit können wir den gleichen Ablese Fehler verwenden.

Gegensinnige Schwingung

Mit der Gegensinnigen Schwingung kann man f_- bestimmen. Hier gehen wir gleich vor wie bei der gleichsinnigen Messung.

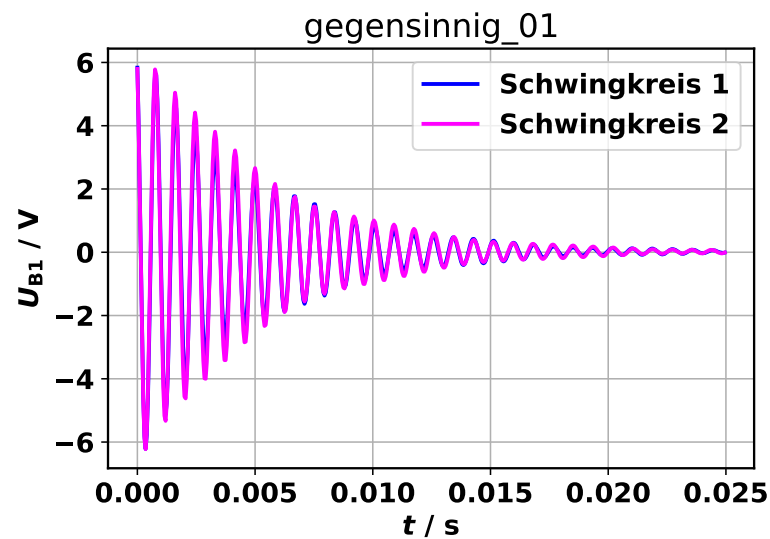


Abbildung 45: Gegensinnige Schwingung

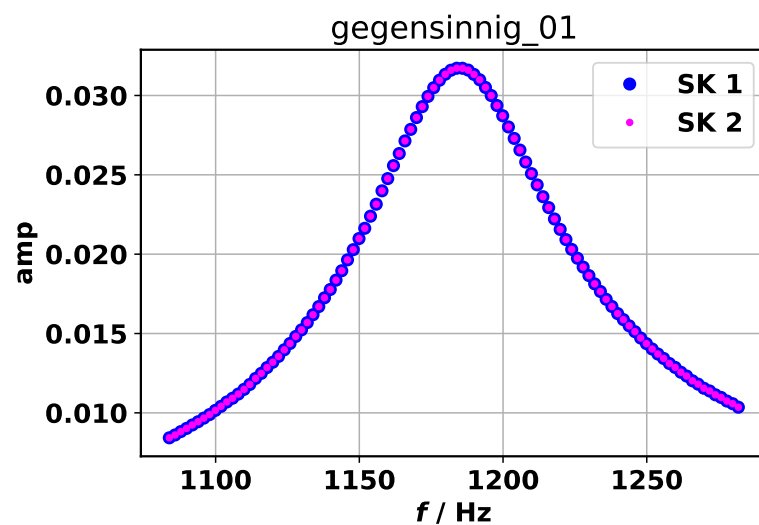


Abbildung 46: Gegensinnige Schwingung FFT mit ausschnitt um den Peak

Hier können Wir sehen, dass wir für gegensinnige Anregung ähnliche Ergebnisse erhalten wie für die gleichsinnige. Der Signifikante Unterschied ist, dass die Frequenz leicht erhöht ist. Das Maximum der FFt ist nun näher bei 1200Hz.

Für die Gegensinnige Schwingung haben wir das Maximum ebenfalls abgelesen.

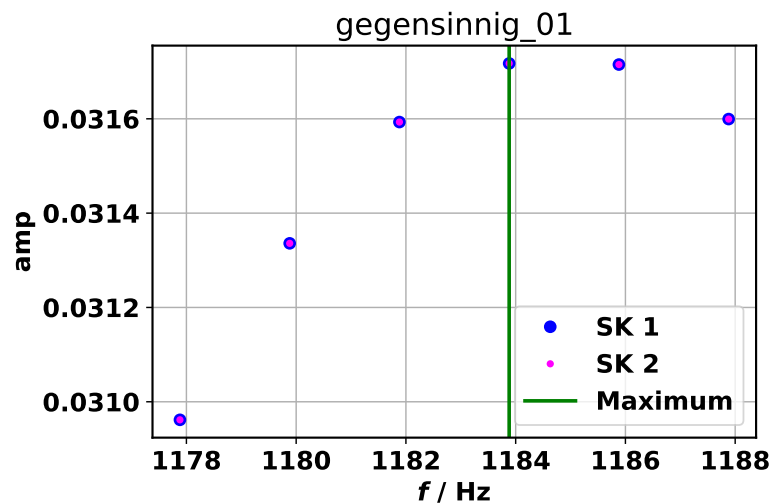


Abbildung 47: Gegensinnige Schwingung FFT Zoom in

Der grüne Strich markiert hier die Frequenz, welche die größte Amplitude in der FFT hat. Dabei haben wir die Maximale Frequenz auf $f_- = 1184.5 \text{ Hz}$ geschätzt. Wir haben sie leicht nach rechts verschoben, da 1186Hz etwas häufiger vorkommt als 1182Hz. Dieser Wert gilt für die Messungen an beiden Schwingkreisen, da die Werte Deckungsgleich sind. Für den Ablesefehler gilt das gleiche wie bei gleichsinniger Anregung.

Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad ist definiert als:

$$k_g = \frac{f_-^2 - f_+^2}{f_-^2 + f_+^2} = \frac{1184.5^2 - 1050^2}{1184.5^2 + 1050^2} = 0.120 \quad (38)$$

Hier ergibt es keinen Sinn ein k_1 und k_2 für die unterschiedlichen Messungen an den beiden Schwingkreisen zu bestimmen, da wir für diese die gleichen Werte erhalten haben.

Als Fehler auf k gehen dabei nur die statistischen Fehler von f_+ und f_- ein. Da diese wieder aus der FFT bestimmt wurden, gibt es hier einmal den statistischen Ablesefehler und den statistischen Messfehler (welchen wir im Versuch mit der 10 fachen Messung des gleichen Schwingkreises bestimmt haben). Diese beiden Fehler haben wir bei der Fehlerberechnung der Schwebung (33) schon auf die Formel des Kopplungsgrades fortgepflanzt. Dabei ist σ_{f_+} und σ_{f_-} ebenfalls unverändert geblieben, da diese nicht von dem Wert der Frequenz abhängen sind.

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{4f_+f_-^2}{(f_+^2 + f_-^2)^2}\sigma_{f_+}\right)^2 + \left(\frac{4f_+^2f_-}{(f_+^2 + f_-^2)^2}\sigma_{f_-}\right)^2} = 0.002 \quad (39)$$

$$k_g = 0.120 \pm 0.002 \quad (40)$$

Verglichen mit $k_1 = 0.110 \pm 0.002$ aus der Schwebung liegt k_g außerhalb der statistischen Abweichungen. Bei $k_2 = 0.127 \pm 0.002$ aus der Schwebung liegt k_g ebenfalls deutlich außerhalb der statistischen Abweichungen.

Bei der Schwebung haben wir unterschiedliche Werte für die Messungen an den beiden Schwingkreisen erhalten, so überrascht es nicht, dass diese sich von dem Ergebnis mit gleichsinniger und gegensinniger Anregung unterscheiden. Dies könnte daran liegen, dass im Fall der Schwebung ein größerer Energieverlust ist.

Wenn wir nun den Mittelwert von k_1 und k_2 betrachten, $k_r = \frac{k_1+k_2}{2} = 0.119 \pm 0.001$ (für den Fehler haben wir den Fehler auf den Mittelwert verwendet) liegt k_r innerhalb einer Standardabweichung Abweichungen von k_g . Das bedeutet, unsere Kopplungsgrade stimmen überein.