Taller I: Sistemas Lineales

Alejandro Morales Contreras
Carlos Miguel Sánchez Loreto
Santiago Vásquez Sánchez

Problema 3

Suponga que el siguiente modelo $f(t)$ describe la cantidad de personas que son infectadas por un virus, en donde t es el tiempo en días, $f(t) = k_1 t + k_2 t^2 + k_3 e^{0.15t}$. Se conocen los siguientes datos: $f(10) = 25$; $f(15) = 190$; $f(20) = 950$. Determine de forma aproximada, el día más cercano donde la cantidad de personas infectadas estará entre $[1500 - 1600]$.

1. Proceso de Solución

La ecuación $f(t)$ que modela la cantidad de personas infectadas tiene múltiples incógnitas. Debido a esto, no es posible hallar directamente la solución al problema. Se debe primero expresar la ecuación $f(t)$ en términos de una sola incógnita, t.

Para hacer esto, se hace uso de los tres datos que son proporcionados por el problema sobre la ecuación, generando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10k_1 + 100k_2 + e^{1.5}k_3 = 25 \\ 15k_1 + 225k_2 + e^{2.25}k_3 = 190 \\ 20k_1 + 400k_2 + e^{3.0}k_3 = 950 \end{cases}$$

Como se puede ver, se tiene un sistema de ecuaciones lineal de $3x3$. Este se puede expresar en forma matricial, como $Ax = b$. A continuación se presenta su representación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 10 & 100 & e^{1.5} & 25 \\ 15 & 225 & e^{2.0} & 190 \\ 20 & 400 & e^{3.0} & 950 \end{bmatrix}$$

Para poder resolver el sistema, y así obtener los valores de $k_1,\ k_2, k_3$ se procede a evaluar distintos métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Para propósitos de este problema, se evalúan los métodos de Jacobi, Richardson y Gauss-Seidel.

Finalmente, con los valores de las incógnitas, se tiene la función $f(t)$ expresada únicamente en términos de t. Con esta ecuación, ya es posible determinar el valor de t más cercano donde $f(t)$ se encuentra en el intervalo $[1500 - 1600]$.

2. Resultados Obtenidos del Sistema

La solución del problema se hace mediante el lenguaje de programación R. Se hace uso, además, de la librería *pracma*, con el fin de acceder a la función *itersolve*, que implementa los métodos anteriormente mencionados. El código fuente puede ser encontrado en el siguiente repositorio:

https://github.com/AlejandroMoralesContreras/analisis-numerico.git

Por cada método, se evalúan las tolerancias 10^{-8}, 10^{-16}. No hubo posibilidad de implementar alta precisión para los métodos, ya que la función *itersolve* pone una limitación sobre sus parámetros. La máxima tolerancia evaluable corresponde con el épsilon de la máquina ($\epsilon_{maq} \approx 2.22 \times 10^{-16}$). A continuación, se presentan los resultados obtenidos. Todos los resultados se comparan contra los obtenidos mediante la función base *solve*.

2.1. Método de Jacobi

Tol	Jacobi	solve
1.00E-8.00	-7.4208750e+206	-2.8293528e+01
	-6.3456422e+205	-2.8192539e+00
	-1.2458206e+207	1.3161571e+02
1.00E-16.00	-7.420875039008023e+206	-2.829352799454555e+01
	-6.345642166780750e+205	-2.819253949286443e+00
	-1.245820592664696e+207	1.316157068499188e+02

Analizando los resultados, se puede concluir que la utilización del método de Jacobi para el estudio de funciones exponenciales siendo el caso particular, diverge ampliamente en cuanto a las soluciones calculadas para k. Adicionalmente, llega al tope de iteraciones máximas establecido (1000 iteraciones).

2.2. Método de Richardson

Tol	Richardson	solve
1.00E-8.00	-2.7085492e+01	-2.8293528e+01
	-3.0721369e+00	-2.8192539e+00
	1.3495696e+02	1.3161571e+02
1.00E-16.00	-2.708549170147428e+01	-2.829352799454555e+01
	-3.072136946111764e+00	-2.819253949286443e+00
	1.349569647649539e+02	1.316157068499188e+02

Para el método de Richardson se concluye que las soluciones de k se aproximan a una solución deseada, teniendo en cuenta que la cantidad de iteraciones máxima fue ajustada manualmente, con el fin de conseguir el resultado más aproximado a la respuesta real, sin embargo, sin esta corrección es imposible obtener un valor aceptable para el estudio de la función y por tanto el método no es apto para el desarrollo del ejercicio. Adicionalmente, llega al tope de iteraciones máximas establecido (110 iteraciones).

2.3. Método Gauss-Seidel

Tol	Gauss-Seidel	solve
1.00E-8.00	-2.8293529e+01	-2.8293528e+01
	-2.8192536e+00	-2.8192539e+00
	1.3161570e+02	1.3161571e+02
1.00E-16.00	-2.829352799454556e+01	-2.829352799454555e+01
	-2.819253949286445e+00	-2.819253949286443e+00
	1.316157068499188e+02	1.316157068499188e+02

Analizando los resultados, el método de Gauss-Seidel cumple con todos los requisitos para evaluar una función exponencial que estudia el comportamiento del número de personas infectadas por un virus en t días, dando como resultado que el método converge a una solución exacta de los valores de k. Adicionalmente, le toma 130 y 256 iteraciones para las tolerancias de 10^{-8} y 10^{-16}, respectivamente, para obtener los resultados mostrados.

3. Método Escogido

Después de analizar los resultados, se encuentra que de los métodos estudiados, el que es más preciso y obtiene una respuesta más exacta es el método Gauss-Seidel. Es por esto que se escoge este método, con tolerancia 10^{-16}, para determinar las incógnitas de la ecuación $f(t)$ original, y pasar a la parte final del problema.

4. Solución del Problema

La función $f(t)$ que modela la cantidad de personas infectadas tras t días, se reexpresa como:

$$f(t) = -28.29352799454556\,t - 2.819253949286445\,t^2 + 1.316157068499188\,e^{0.15t}$$

Ya con la función expresada únicamente en términos de t, sólo falta hallar el valor que deja una imágen en el intervalo $[1500 - 1600]$. Para realizar esto, solo basta analizar todos los valores de t, desde 1 hasta n, esperando que el valor que arroje $f(t)$ se encuentre en el intervalo asignado.

Después de realizar este proceso, se determina que el día más cercano donde la cantidad de personas infectadas estará entre $[1500 - 1600]$, es:

Días para alcanzar el intervalo $t = 22$, con cantidad de personas infectadas $f(t) = 1581$.

5. Gráfica de Infección

Con el fin de poder visualizar la tendencia de infección, se genera la siguiente gráfica que modela la ecuación $f(t)$. Como análisis preliminar, se puede determinar que la función va a tender negativamente inicialmente, pero eventualmente va a crecer exponencialmente. A continuación se presenta la gráfica generada: