Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Análisis numéricos: Ejercicios
Eddy Herrera Daza
Marzo, 2021

Recomendaciones

- Debe utilizar herramientas R o Python
- Cada grupo debe realizar el ejercicio asignado y debe presentar al menos 2 sub numerales hoy (7am a 9am).
- La solución completa debe estar completa en su repositorio (20 marzo del 2021).
- Si un estudiante no esta presente hoy 11 de Marzo la nota taller=0

Taller de Sistemas Lineales

1. Dado el sistema (utilice 9 cifras significativas):
   $x + 3y - 2z = 18.666$
   $4x - 1y + z = 27.3$
   $x + y + 7z = \pi$

   a) Es la matriz A de coefcientes diagonal dominante? se puede reorganizar con operaciones entre filas para que sea diagonalmente dominante?

   b) Encuentre la matriz de transición por el método de Jacobi y determine si el método converge.

   c) Compare la solución entre la solución de Jacobi y Gauss Seidel genere varias iteraciones y determine el error en cada iteración

   d) Evalue la matriz de transición del métdo **SOR** y determine varias soluciones aproximadas, para $k = 100$ valores aleatorios de ω.Calcule el error en cada una de las iteraciones

   e) Construya una función $f(\omega)$ que determine el valor óptimo de ω para que el método**SOR** converja

   f) Use el teorema de convergencia, para determinar cual método iterativo es mas favorable, justifique su respuesta (tenga en cuenta diferentes cantidades de cifras significativas).

2. Dado el sistema lineal de la forma $AX = b$ donde la matriz de coeficientes inicialmente esta dado por: Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, es diagonalmente dominante

   a) Calcule el radio espectral $\rho(\lambda)$ de la matriz de transición por el método de Gauss-Seidel.

   b) Utilice el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución (utilice 16 cifras significativas), determine el número de máximo de iteraciones. Tenga en cuenta que $b = \begin{bmatrix} 0.254 \\ -1.425 \\ 2.978 \end{bmatrix}$

   c) Que pasa con la solución anterior si $a_{13} = -2$, explique su respuesta

   d) Evalue la matriz de transición del métdo **SOR** y determine varias soluciones aproximadas, para 15 valores de ω. Utilice 10 cifras significativas

   e) Genere una tabla que tenga 30 iteraciones del método de Jacobi con vector inicial de $x_0 = [1, 2, 3]$ y calcular el error en cada iteración

3. Suponga que en el siguiente modelo $f(x)$ describe la cantidad de personas que son infectadas por un virus, en donde t es el tiempo en días
   $f(t) = k_1 t + k_2 t^2 + k_3 e^{0.15t}$ Se conocen los siguientes datos:
   $f(10) = 25; f(15) = 190; f(20) = 950$ Determine de forma aproximada, el día más cercano donde la cantidad de personas infectadas estará entre $[1500 - 1600]$

4. Dado el sistema (utilice 16 cifras significativas):
   $2x - z = 1.5$
   $\alpha x + 2y - z = 2$
   $-x + y + \delta z = 1.6666...$

   a) Determine los valores de α, δ, para que asegura la convergencia por el metodo de Jacobi y para Gauss-Seidel. Sugerencia: utilice el teorema convergencia.

   b) Genere una tabla que tenga 20 iteraciones, del metodo de Jacobi con vector inicial $x_0 = [1, 2, 3]$

   c) Genere una tabla que tenga 20 iteraciones, del metodo Gauss-Seidel con vector inicial $x_0 = [1, 2, 3]$

5. Dado el sistema $AX = B$, utilice los metodos **SOR** y Gauss-Seidel, supongase que tiene una maquina que maneja entre 6 y 10 cifras significativas, donde $\mathbf{b} = b_i = \pi, \forall i = 1, ..., 80$ y las entradas de la matriz A estan dadas por

6. Dado el sistema lineal de la forma $AX = b$ donde la matriz de coeficientes inicialmente esta dado por: Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, es diagonalmente dominante?

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{when } j = i \text{ and } i = 1,2,\ldots,80, \\ 0.5i, & \text{when } \begin{cases} j = i+2 \text{ and } i = 1,2,\ldots,78, \\ j = i-2 \text{ and } i = 3,4,\ldots,80, \end{cases} \\ 0.25i, & \text{when } \begin{cases} j = i+4 \text{ and } i = 1,2,\ldots,76, \\ j = i-4 \text{ and } i = 5,6,\ldots,80, \end{cases} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Figura 1: *Matriz A*

a) Calcule el radio espectral $\rho(\lambda)$ de la matriz de transición por el método de Gauss-Seidel.

b) Utilice el método de Cholesky para aproximar la solución (utilice entre 5 y 9 cifras significativas), determine el número de máximo de iteraciones. Tenga en cuenta que $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$

c) Que pasa con la solución anterior si $a_{13} = -2$, explique su respuesta(utilice entre 5 cifras significativas)

d) Evalue la matriz de transición del métdo **SOR** y determine varias soluciones aproximadas, para 15 valores de ω. Utilice 10 cifras significativas

e) Genere una tabla que tenga 20 iteraciones del método de Jacobi con vector inicial de $x_0 = [1, 5, 14, 15]$ y calcular el error en cada iteración, (utilice entre 5 y 9 cifras significativas).

7. **TAREA**Sea I una imagen en blanco y negro, digamos con valores en una gama de 0 a 1 de 800 $\times$ 600 píxeles. Se considera la transformación de desenfoque que consiste en que el valor de gris de cada píxel se cambia por una combinacion lineal de los valores de los píxeles adyacentes y el mismo, segun la caja

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Figura 2: *I*

Donde se supone que a_{22} (la ponderación del propio pıxel) es mayor que la suma de todos los demás valores a_{ij} en valor absoluto. Se pide:

a) Si se desea realizar la operación inversa (enfocar), ¿se puede utilizar el algoritmo de Gauss-Seidel o el de Jacobi? ¿Piensas que es mejor usar uno de estos (si es que se puede) o, por ejemplo, la factorización **LU**? ¿Por qué?

b) ¿Qué condiciones se han de dar para que la matriz de la transformación sea simétrica? ¿Y definida positiva?