



DISCIPLINA:

PRÉ-CÁLCULO

AULA 2



Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues



CONVERSA INICIAL

Nesse tópico serão apresentados de forma simples e direta os conceitos iniciais de funções lineares, quadráticas e polinomiais.

A ideia central é apresentar os elementos centrais de cada desses tipos de funções. Para isso o conteúdo lhe será apresentado de forma progressiva.

TEMA 1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LINEAR

Uma função linear é representada por uma reta. Com essa simples damos início ao conteúdo trazendo o seguinte exemplo.

Exemplo 1: Suponha um reservatório de água residencial com 2.000 litros. O consumo diário de água nessa residência seja de 120 litros por morador. Sabendo que essa residência tem 2 moradores, estabeleça a função que representa o consumo de água em decorrência à utilização plena do reservatório sem reabastecimento.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 1 – 4min20
04-201900316-A02-P01

Exemplo 2: Formalmente escrevemos que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim quando existem dois números reais a e b tais que satisfaçam a seguinte condição, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos:

$$y = f(x) = ax + b$$

Quando que quando $a \neq 0$ temos a definição de uma função do primeiro grau.

Desta forma, seguindo a definição acima, Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: $f(0) = 3$ e $f(3) = 6$.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 2 - 4min11
04-201900316-A02-P02

Exemplo 3. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: $f(0) = 4$ e $f(2) = 2$.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 3 – 4min52
04-201900316-A02-P03

TEMA 2 GRÁFICOS DE FUNÇÕES LINEARES

Como vimos, os elementos estruturais de uma função afim (linear) seguem o modelo $f(x) = ax + b$, sendo que a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear. No próximo exemplo esses elementos serão definidos.

Exemplo 4: Construa o gráfico da função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: $f(0) = 3$ e $f(3) = 6$.



Vídeo Aula 2 – Exemplo 4 – 7min18
04-201900316-A02-P04

Exemplo 5: Construa o gráfico da função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: $f(0) = 4$ e $f(2) = 2$.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 5 - 4min58
04-201900316-A02-P05

Nesses exemplos vimos além a construção de uma função linear, mas também elementos chaves para o estudo das funções lineares.

TEMA 3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática é representada por uma função quadrática no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Outra forma de representar uma função quadrática é na forma fatorada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes.

Exemplo 6. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 6 - 4min50
04-201900316-A02-P06

Exemplo 7. Dada a função quadrática $f(x) = (x - 2)(x - 5)$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 7 – 3min32
04-201900316-A02-P07

Exemplo 8. Uma imobiliária tem 1.600 unidades de imóveis para alugar, das quais 800 já estão alugadas por R\$ 300,00 mensais. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada diminuição de R\$ 5,00 no valor do aluguel mensal, 20 novos contratos são assinados.

(DEMANA, F. D.; WAITS, B. W.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. Pré-Cálculo. 2ª.ed. São Paulo: Pearson, 2013. p. 102)

Vídeo Aula 2 – Exemplo 8 – 3min29
04-201900316-A02-P08

TEMA 4 GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Uma função quadrática é representada por uma parábola. Com essa simples definição damos início ao conteúdo trazendo o seguinte exemplo



Exemplo 9. Cálculo a área máxima de um terreno retangular cujo perímetro é de 100 metros.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 9 - 7min33

04-201900316-A02-P09

TEMA 5 DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E GRÁFICOS

Antes de partirmos para a definição de funções polinomiais propriamente dita, vamos dar uma olhada a ideia de Produtos notáveis, pois esses três elementos que serão demonstrados no próximo exemplo são muito importantes para as disciplinas futuras.

Exemplo 10. Demonstração de produtos notáveis.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 10 - 3min10

04-201900316-A02-P10

Definição de funções polinomiais e gráficos

Um **polinômio** é uma função p tal que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

em que n é um inteiro não negativo e $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números.

(AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2ª ed. São Paulo: LTC, 2016. p. 188)

Exemplo 11. Calcule as raízes e construa o gráfico da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - x$$

Vídeo Aula 2 – Exemplo 11 - 4min53

04-201900316-A02-P11

Exemplo 12. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Vídeo Aula 2 – Exemplo 12 – 5min10

04-201900316-A02-P012

TEMA 6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: $f(1) = 3$ e $f(2) = 5$.

02. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:



$f(-1) = 0$ e $f(2) = 2$.

03. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:
 $f(3) = 5$ e $f(5) = 3$.

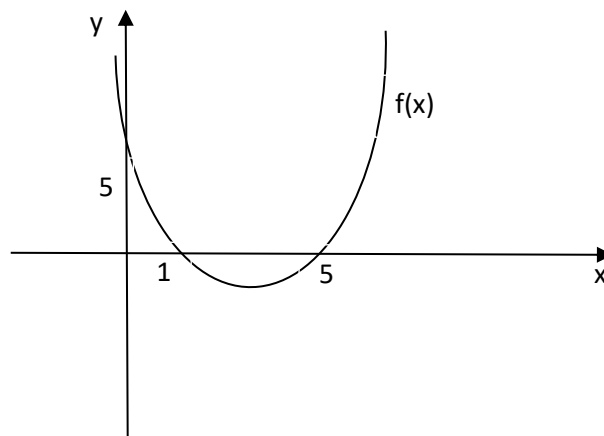
04. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

05. Dada a função quadrática $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

06. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

07. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 9$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

08. Dado o gráfico parabólico, estabeleça a função quadrática original.



09. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

10. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PASSO A PASSO:

01. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:
 $f(1) = 3$ e $f(2) = 5$.

Sendo $y = f(x) = ax + b$

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1),

$$\begin{cases} -1a - b = -3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} -1a - b = -3 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \quad +$$

$$a = 2$$

Substituindo o valor de $a = 2$, na 1ª linha do sistema original,

$$1 \cdot 2 + b = 3$$

$$2 + b = 3$$

$$b = 3 - 2$$

$$b = 1$$

Portanto,

Substituindo os valor de $a=2$ e $b=1$ na forma genérica $f(x) = ax + b$.

Temos a resposta final: $f(x) = 2x + 1$.

02. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:

$$f(-1) = 0 \text{ e } f(2) = 2.$$

$$\text{Sendo } y = f(x) = ax + b$$

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -1a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1) ,

$$\begin{cases} 1a - b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 1a - b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases} + \\ \hline 3a = 2, \text{ logo } a = \frac{2}{3} \end{array}$$

Substituindo o valor de $a = 2/3$, na 1ª linha do sistema original,

$$-1 \cdot \frac{2}{3} + b = 0$$

$$-\frac{2}{3} + b = 0$$

$$b = \frac{2}{3}$$

Portanto,

Substituindo os valor de $a=2/3$ e $b=2/3$ na forma genérica $f(x) = ax + b$.

Temos a resposta final: $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

03. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:

$$f(3) = 5 \text{ e } f(5) = 3.$$

$$\text{Sendo } y = f(x) = ax + b$$

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1) ,

$$\begin{cases} -3a - b = -5 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -3a - b = -5 \\ 5a + b = 3 \end{cases} + \\ \hline 2a = -2 \end{array}$$

$$a = -\frac{2}{2}$$

$$a = -1$$

Substituindo o valor de $a = -1$, na 1ª linha do sistema original,

$$3 \cdot (-1) + b = 5$$

$$-3 + b = 5$$

$$b = 5 + 3$$

$$b = 8$$

Portanto,

Substituindo os valor de $a=-1$ e $b=8$ na forma genérica $f(x) = ax + b$.

Temos a resposta final: $f(x) = (-1)x + 8$, assim, $f(x) = -x + 8$.

04. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 4x + 4$, temos que $a=1$, $b=-4$, $c=4$.

Sendo $a>0$ a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

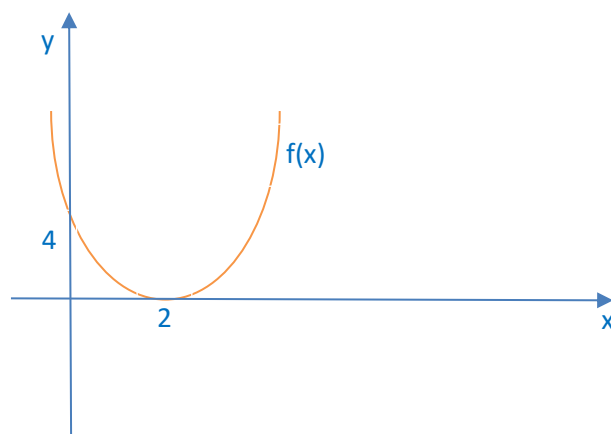
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$, isso significa que as duas raízes têm o mesmo valor.

Graficamente:



05. Dada a função quadrática $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = -x^2 + 7x - 10$, temos que $a=-1$, $b=7$, $c=-10$.

Sendo $a<0$ a concavidade da parábola será para baixo.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2}$$

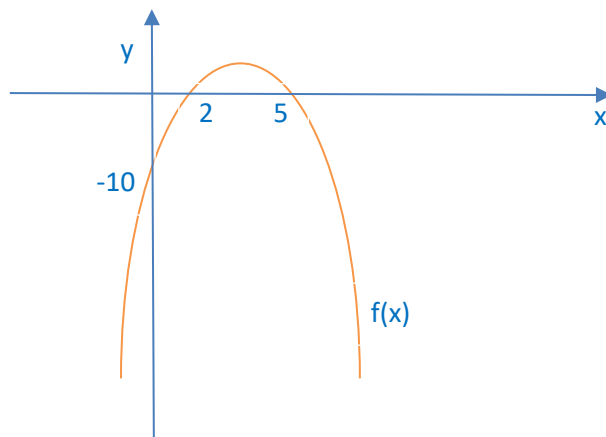
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{-2}, \text{ separando o numerador}$$

$$x_1 = \frac{-7 - 3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-7 + 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Graficamente:



06. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 8x$, temos que $a=1$, $b=-8$, $c=0$.

Sendo $a>0$ a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{2}$$

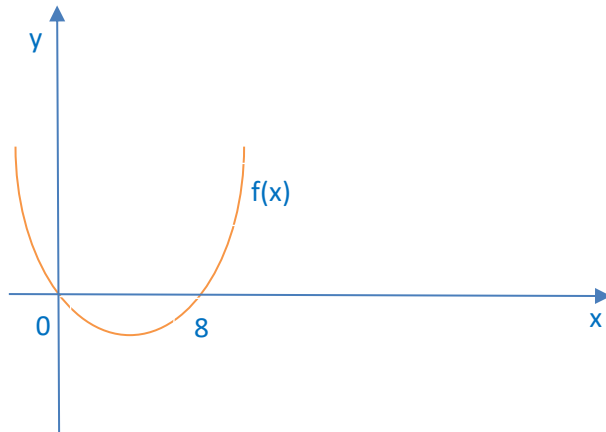
$$x = \frac{8 \pm 8}{2}, \text{ separando o numerador}$$

$$x_1 = \frac{8 - 8}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{8 + 8}{2} = \frac{16}{2} = 8$$



Graficamente:



07. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 9$, construa o gráfico que representa a função $f(x)$.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 9$, temos que $a=1$, $b=0$, $c=-9$.

Como $a>0$ a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1}$$

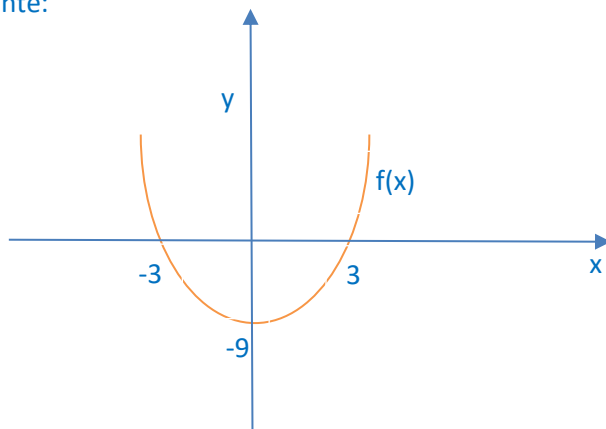
$$x = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{0 \pm 6}{2}, \text{ separando o numerador}$$

$$x_1 = \frac{0 - 6}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

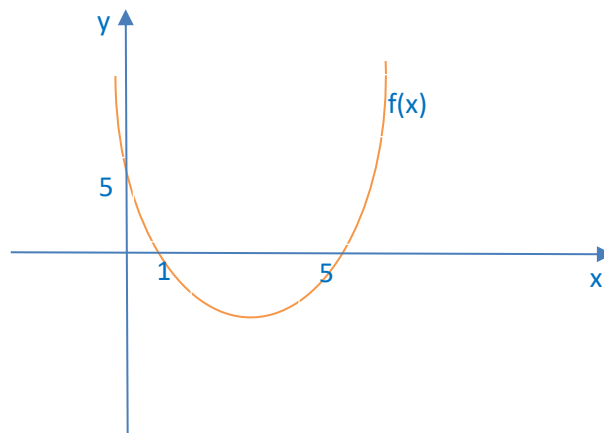
$$x_2 = \frac{0 + 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Graficamente:





08. Dado o gráfico parabólico, estabeleça a função quadrática original.



Sendo as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$, desta forma temos na forma reduzida:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2), \text{ desta forma, } f(x) = (x - 1)(x - 5).$$

Assim, desenvolvendo pela propriedade distributiva:

$$f(x) = (x - 1)(x - 5)$$

$$f(x) = x^2 - 5x - 1x + 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

09. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Para calcular as raízes deve-se igualar a zero o polinômio. Assim temos que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Usando Briot-Ruffini:

P.R.R. = $\{\pm 1, \pm 2\}$, lembrando que esses números são os divisores do termo independente (2).

Esses valores são os valores que arbitramos no dispositivo de Briot-Ruffini em busca do resultado 0 (zero) no último elemento.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Desta forma, a primeira raiz é $x_1 = -1$

Para calcular as outras raízes usaremos a equação de segundo grau que resultou: $1x^2 - 3x + 2 = 0$.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara), onde $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}, \text{ separando o numerador}$$



$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: Raízes = $\{-1, 1, 2\}$

10. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Para calcular as raízes deve-se igualar a zero o polinômio. Assim temos que $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Colocando o valor “x” em evidência,

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Desta forma, Temos um produto de dois termos que resultariam em zero.

$$x = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0$$

Logo, a primeira raiz é $x_1 = 0$

Para calcular as outras raízes usaremos a equação de segundo grau que resultou: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara), onde $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Desta forma: } x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}, \text{ separando o numerador}$$

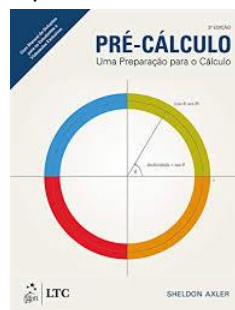
$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Resposta: Raízes = $\{0, 1, 2\}$

REFERÊNCIAS

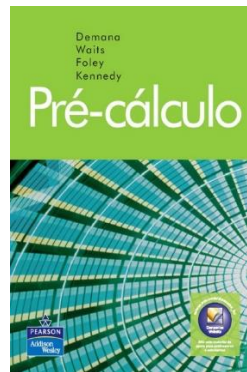
AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2ª ed. São Paulo: LTC, 2016.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Minha Biblioteca



DEMANA, F. D.; WAITS, B. W.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. Pré-Cálculo. São Paulo: Pearson, 2009.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Biblioteca Pearson