

ANALISIS DE FOURIER

Hwei P. Hsu

Associate Professor

Department of Electrical Engineering
Wayne State University, Michigan

Raj Mehra, Editor

Versión en español autorizada de la obra inglesa titulada *Fourier Analysis* por Hwei P. Hsu, edición revisada de 1970, publicada y puesta a la venta a través del mundo con permiso de Simon & Schuster, Inc., Nueva York, N.Y., E.U.A., quien posee todos los derechos de publicación y venta de la obra.

This volume is an authorized Spanish translation of *Fourier Analysis* by Hwei P. Hsu, published and sold throughout the world by permission of Simon & Schuster, Inc., New York, N.Y., U.S.A., the owner of all rights to publish and sell the same. Copyright © 1970 by Simon & Schuster, Inc.

© 1973 por **FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, S.A.**

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él pueden ser reproducidos, archivados o transmitidos en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria, o cualquier otro sin permiso escrito del editor.

Printed in the United States of America. Impreso en E.U.A.
BCDEFGHIJ-AL-798754

PROLOGO

La *Théorie analytique de la chaleur*, de Jean-Baptiste-Joseph Fourier, introdujo los métodos sencillos para la solución de los problemas de valor en la frontera, que se presentan en el tratamiento analítico de la conducción del calor. Sin embargo, este “gran poema matemático”, como Lord Kelvin denominó al análisis de Fourier, se ha extendido a muchas otras aplicaciones físicas diferentes a las del calor. En efecto, el análisis de Fourier se ha convertido en un instrumento indispensable en el tratamiento de casi toda recóndita cuestión de física moderna, teoría de comunicaciones, sistemas lineales, etc.

El objetivo del autor al escribir este libro, es desarrollar completamente el análisis clásico de Fourier y mostrar su relación con las aplicaciones modernas.

El libro está destinado a estudiantes de matemáticas, física y las diversas ramas de ingeniería; se puede utilizar para un curso formal de análisis de Fourier, así como en los numerosos cursos relacionados que presentan y emplean las técnicas de Fourier; tiene la ventaja de ser un libro de texto y de repaso; como texto es suficientemente completo y detallado como para no requerir referencias adicionales; y en la forma directa que caracteriza al libro de repaso, suministra cientos de problemas solucionados completamente, en los cuales se utilizan la teoría y técnicas esenciales.

Los conceptos nuevos, las definiciones y los teoremas fundamentales importantes (o resultados) aparecen en el texto sobre fondo sombreado; los conjuntos de problemas graduados, resueltos completamente, que constituyen la parte integral del libro, ilustran y amplían los conceptos y desarrollan las técnicas de Fourier; los problemas suplementarios están ideados no sólo para servir como ejercicios, sino también como medio de fortalecer la habilidad y perspicacia necesarias en la utilización práctica de las técnicas de Fourier.

Los tres primeros capítulos tratan las series de Fourier y el concepto de espectros de frecuencia; a continuación se incluye un capítulo relacionado con la integral y la transformada de Fourier, y luego uno sobre las transformadas de Fourier de funciones especiales. En la segunda parte del libro se estudian las aplicaciones del análisis de Fourier a sistemas lineales, teoría de comunicaciones, y problemas de valor en la frontera; el capítulo final se relaciona con aplicaciones misceláneas de la transformada de Fourier.

El único requisito formal para comprender el análisis de Fourier, es el conocimiento del cálculo elemental; sin embargo, en la segunda parte del libro se supone que el estudiante está familiarizado con el cálculo avanzado y las matemáticas aplicadas.

El autor desea agradecer a Raj Mehra y Rhea Nichols, de Simon & Schuster, Inc., por sus esfuerzos editoriales en la revisión de la primera edición; así mismo, el autor reconoce el estímulo recibido del profesor Forest E. Brammer, y Edward F. Weller, Jr., así como la colaboración de Dennis F. Wilkie y Eugene A. Hanysz.

Hwei P. Hsu

Southfield, Michigan

CONTENIDO

1

SERIES DE FOURIER

CAPITULO	1.1	FUNCIONES PERIODICAS	1
	1.2	SERIES DE FOURIER	4
	1.3	PROPIEDADES DEL SENO Y DEL COSENO: FUNCIONES ORTOGONALES	5
	1.4	EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER	7
	1.5	APROXIMACION MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER	13
	1.6	LAS CONDICIONES DE DIRICHLET	16
	1.7	DIFERENCIACION E INTEGRACION DE LAS SERIES DE FOURIER	17
	1.8	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	21

2

ANALISIS DE FORMAS DE ONDAS PERIODICAS

CAPITULO	2.1	SIMETRIA DE LA FORMA DE ONDA	24
	2.1a	FUNCIONES PARES E IMPARES	24
	2.1b	SIMETRIA DE MEDIA ONDA	27
	2.1c	SIMETRIA DE CUARTO DE ONDA	27
	2.1d	SIMETRIA ESCONDIDA	27
	2.2	COEFICIENTES DE FOURIER DE ONDAS SIMETRICAS	28
	2.3	EXPANSION EN SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO FINITO	33
	2.3a	EXPANSIONES DE MEDIO INTERVALO	34
	2.4	LA FUNCION IMPULSO	37
	2.4a	DERIVADAS DE LA FUNCION δ	40
	2.5	SERIES DE FOURIER DE LAS DERIVADAS DE FUNCIONES PERIODICAS DISCONTINUAS	43
	2.6	EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR DIFERENCIACION	45
	2.7	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	48

3

ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA

CAPITULO	3.1	INTRODUCCION	52
	3.2	FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER	52
	3.3	ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS	57
	3.4	ESPECTROS DE FRECUENCIA COMPLEJA	58
	3.5	EVALUACION DE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS DE FOURIER POR MEDIO DE LA FUNCION δ	62
	3.6	CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FUNCION PERIODICA: TEOREMA DE PARSEVAL	65
	3.7	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	68

4

INTEGRAL DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS

CAPITULO	4.1	INTRODUCCION	71
	4.2	DE LA SERIE DE FOURIER A LA INTEGRAL DE FOURIER	71
	4.3	TRANSFORMADAS DE FOURIER	74
	4.4	TRANSFORMADAS SENO Y COSENO DE FOURIER	79
	4.5	INTERPRETACION DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	81
	4.6	PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	82
	4.7	CONVOLUCION	88

4.8	TEOREMA DE PARSEVAL Y ESPECTRO DE ENERGIA	92
4.9	FUNCIONES DE CORRELACION	94
4.10	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	99
5	TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES ESPECIALES	
CAPITULO		
5.1	INTRODUCCION	102
5.2	LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION IMPULSO	102
5.3	LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE	104
5.4	LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL ESCALON UNITARIO	106
5.5	LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION PERIODICA	110
5.6	LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES GENERALIZADAS	114
5.7	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	118
6	APLICACIONES A SISTEMAS LINEALES	
CAPITULO		
6.1	SISTEMAS LINEALES	121
6.2	FUNCIONES OPERACIONALES DEL SISTEMA	121
6.3	RESPUESTA A FUNCIONES EXPONENCIALES DE ENTRADA – FUNCIONES PROPIAS Y FUNCIONES DEL SISTEMA	123
6.4	RESPUESTAS SENOIDALES EN ESTADO ESTACIONARIO	125
6.5	APLICACIONES A CIRCUITOS ELECTRICOS	127
6.5a	CALCULO DE POTENCIA EN ESTADO ESTACIONARIO	129
6.6	APLICACIONES A SISTEMAS MECANICOS	131
6.7	RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN IMPULSO UNITARIO – FUNCION DEL SISTEMA	133
6.7a	FUNCION DEL SISTEMA	134
6.7b	SISTEMA CAUSAL	137
6.8	RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN ESCALON UNITARIO – INTEGRAL DE SUPERPOSICION	138
6.9	TRANSMISION SIN DISTORSION	142
6.10	FILTROS IDEALES	144
6.11	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	147
7	APLICACIONES EN TEORIA DE COMUNICACIONES	
CAPITULO		
7.1	TEORIA DE MUESTREO	151
7.2	MODULACION DE AMPLITUD	156
7.3	MODULACION ANGULAR	160
7.4	MODULACION DE PULSOS	164
7.5	FUNCIONES DE CORRELACION PROMEDIO	166
7.6	IDENTIFICACION DE SEÑALES MEDIANTE CORRELACION	169
7.7	ESPECTROS DE POTENCIA PROMEDIO: SEÑALES AL AZAR	171
7.8	RELACIONES ENTRE LA ENTRADA Y LA SALIDA: CALCULO DEL RUIDO	175
7.9	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	178
8	APLICACIONES A PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA	
CAPITULO		
8.1	SEPARACION DE VARIABLES Y SERIES DE FOURIER	183
8.2	VIBRACION	189
8.3	CONDUCCION DE CALOR	199
8.4	TEORIA DE POTENCIALES	205
8.5	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	212

9**APLICACIONES MISCELANEAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER**

CAPITULO

9.1	LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DIFRACCION Y FORMACION DE IMAGENES	215
9.1a	TRANSFORMADA BIDIMENSIONAL DE FOURIER	219
9.1b	TRANSFORMADA TRIDIMENSIONAL DE FOURIER	221
9.2	LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN TEORIA DE PROBABILIDADES	221
9.2a	FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD Y FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD	221
9.2b	ESPERANZA Y MOMENTOS	223
9.2c	FUNCION CARACTERISTICA	224
9.3	EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE EN EL ANALISIS DE FOURIER	228
9.4	FORMULA DE LA SUMATORIA DE POISSON	236
9.5	CAUSALIDAD Y TRANSFORMADA DE HILBERT	239
9.6	EVALUACION DE ALGUNAS INTEGRALES	243
9.7	PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS	244

A**CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER Y EL FENOMENO DE GIBBS**

APENDICE

A.1	CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER	247
A.2	EL FENOMENO DE GIBBS	253

B**RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER Y LAPLACE**

APENDICE

B.1	DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE	256
B.2	RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER Y LAPLACE	259

C**TRES FORMAS DE LAS SERIES DE FOURIER**

APENDICE

D**RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRIA**

APENDICE

E**PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER**

APENDICE

F**LISTA DE SIMBOLOS**

APENDICE

INDICE DE MATERIAS

271

1

CAPITULO

SERIES DE FOURIER

1.1 FUNCIONES PERIODICAS

Una función periódica se puede definir como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T) \quad (1.1)$$

para todo valor de t . La constante mínima T que satisface la relación (1.1) se llama el período de la función. Mediante repetición de (1.1), se obtiene,

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de una función periódica.

PROBLEMA 1.1 Encontrar el período de la función $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$.

Solución: si la función $f(t)$ es periódica con un período T , entonces, de (1.1) se tiene

$$\cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}.$$

Puesto que $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ para cualquier entero m se tiene que

$$\frac{1}{3}T = 2\pi m, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi n.$$

donde m y n son enteros. Por consiguiente $T = 6\pi m = 8\pi n$; cuando $m = 4$ y $n = 3$, se obtiene el mínimo valor de T . (Esto se puede ver mediante el procedimiento de ensayo y error). De donde, $T = 24\pi$.

En general, si la función

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

es periódica con período T , entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que

$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad (1.3)$$

$$\omega_2 T = 2\pi n. \quad (1.4)$$

El cociente de (1.3) y (1.4) es

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}, \quad (1.5)$$

es decir, la relación ω_1/ω_2 debe ser un número racional.

PROBLEMA 1.2 Decir si la función $f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$ es una función periódica.

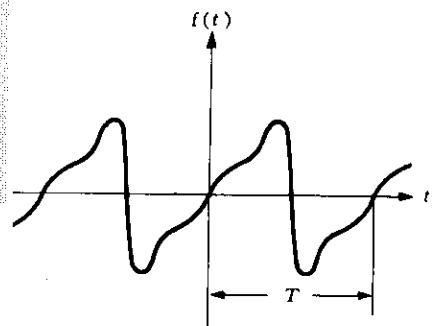


Figura 1.1 Una función periódica.

Solución: aquí $\omega_1 = 10$ y $\omega_2 = 10 + \pi$. Puesto que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$$

no es un número racional, es imposible encontrar un valor T que satisfaga (1.1); por consiguiente $f(t)$ no es una función periódica.

PROBLEMA 1.3 Encontrar el período de la función $f(t) = (10 \cos t)^2$

Solución: si aplicamos la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ se tiene

$$f(t) = (10 \cos t)^2 = 100 \cos^2 t = 100 \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) = 50 + 50 \cos 2t.$$

Puesto que una constante es una función periódica de período T para cualquier valor de T , y el período de $\cos 2t$ es π , se concluye que el período de $f(t)$ es π .

PROBLEMA 1.4 Demostrar que si $f(t+T) = f(t)$, entonces

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (1.6)$$

$$\int_T^{T+t} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt. \quad (1.7)$$

Solución: si $f(t+T) = f(t)$, entonces, al hacer $t = \tau - T$, se tiene

$$f(\tau - T + T) = f(\tau) = f(\tau - T). \quad (1.8)$$

Considerar ahora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

Si se hace la sustitución $t = \tau - T$ y se usa la igualdad (1.8), se obtiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau - T) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau) d\tau.$$

Puesto que cualquier símbolo puede representar la variable comodín

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt. \quad (1.9)$$

Ahora, el primer miembro de la ecuación (1.6) puede escribirse como

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt.$$

Aplicando el resultado de (1.9) a la primera integral del segundo miembro de la anterior ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt + \int_{a+T/2}^{T/2} f(t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \end{aligned}$$

En (1.9), si $\alpha = 0$ y $\beta = t$, entonces (1.9) se convierte en

$$\int_0^t f(t) dt = \int_T^{T+t} f(t) dt.$$

En (1.6), si $a = T/2$, entonces (1.6) se convierte en

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (1.10)$$

PROBLEMA 1.5 Sea $f(t+T) = f(t)$ y

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Demostrar que $g(t+T) = g(t)$ si y sólo si

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0.$$

Solución: puesto que $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$,

$$g(t+T) = \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_T^{T+t} f(\tau) d\tau.$$

Por (1.10) y (1.7), se tiene

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad \int_T^{T+t} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt.$$

Por consiguiente,

$$g(t+T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \int_0^t f(t) dt$$

$$\text{y } g(t+T) = g(t) \text{ si y sólo si } \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$$

PROBLEMA 1.6 Sea $f(t+T) = f(t)$, y

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t,$$

donde $a_o = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$. Demostrar que $F(t+T) = F(t)$.

Solución: puesto que $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t$, se tiene

$$\begin{aligned} F(t+T) &= \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o \cdot (t+T) \\ &= \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_T^{T+t} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t - \frac{1}{2} a_o T. \end{aligned}$$

Por (1.10) y (1.7), se tiene

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} a_o T,$$

$$\int_T^{T+t} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Por consiguiente,

$$F(t+T) = \frac{1}{2} a_o T + \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t - \frac{1}{2} a_o T = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t = F(t).$$

1.2 SERIES DE FOURIER

Sea la función $f(t)$ una función periódica de período T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_o + a_1 \cos \omega_o t + a_2 \cos 2\omega_o t + \dots + b_1 \sin \omega_o t + b_2 \sin 2\omega_o t + \dots \\ &= \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\omega_o = 2\pi/T$.

Una serie como la representada por (1.11) se llama *serie trigonométrica de Fourier*. Esta serie también se puede representar así:

$$f(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n\omega_o t - \theta_n) \quad (1.12)$$

PROBLEMA 1.7 Deducir la forma (1.12) de (1.11) y expresar C_n y θ_n en términos de a_n y b_n .

Solución: se puede expresar

$$a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_o t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_o t \right)$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t &= C_n (\cos \theta_n \cos n\omega_o t + \sin \theta_n \sin n\omega_o t) \\ &= C_n \cos (n\omega_o t - \theta_n), \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (1.14)$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

por consiguiente,

$$\tan \theta_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad \text{ó} \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right). \quad (1.15)$$

También, si se hace

$$C_o = \frac{1}{2} a_o, \quad (1.16)$$

se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n\omega_o t - \theta_n). \quad (1.17)$$

Según (1.12), es obvio que la representación en series de Fourier de una función periódica, representa la función periódica como la suma de componentes senoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente senoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_o$ se denomina la *enésima armónica* de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la *componente fundamental* porque tiene el mismo período de la función y $\omega_o = 2\pi f_o = 2\pi/T$ se conoce como la *frecuencia angular fundamental*. Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n se conocen como *amplitudes armónicas y ángulos de fase*, respectivamente.

1.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO: FUNCIONES ORTOGONALES

Un conjunto de funciones $\phi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ pertenecientes al conjunto $\phi_k(t)$, cumple:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases} \quad (1.18)$$

Considérese, por ejemplo, un conjunto de funciones senoidales; mediante el cálculo elemental se puede demostrar que

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) dt = 0 \quad \text{para } m \neq 0 \quad (1.19a)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_o t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m, \quad (1.19b)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0, \end{cases} \quad (1.19c)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_o t) \sin(n\omega_o t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0, \end{cases} \quad (1.19d)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \text{ y } n. \quad (1.19e)$$

donde $\omega_o = 2\pi/T$.

Estas relaciones demuestran que las funciones $1, \cos \omega_o t, \cos 2\omega_o t, \dots, \cos n\omega_o t, \dots, \sin \omega_o t, \sin 2\omega_o t, \dots, \sin n\omega_o t, \dots$ forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-T/2 < t < T/2$.

PROBLEMA 1.8 Verificar la integral (1.19c).

Solución: con la identidad trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)],$$

y

$$\omega_o t \Big|_{t=\pm T/2} = \frac{2\pi}{T} \left(\pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\cos[(m+n)\omega_o t] + \cos[(m-n)\omega_o t]\} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \left[\sin[(m+n)\omega_o t] \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \left[\sin[(m-n)\omega_o t] \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \{ \sin[(m+n)\pi] + \sin[(m+n)\pi] \} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \{ \sin[(m-n)\pi] + \sin[(m-n)\pi] \} \\ &= 0 \text{ si } m \neq n. \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ y haciendo $m = n \neq 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(m\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos 2m\omega_o t] dt \\ &= \frac{1}{2} t \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4m\omega_o} \left[\sin 2m\omega_o t \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 1.9 Verificar la integral (1.19e).

Solución: con la identidad trigonométrica

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\sin[(m+n)\omega_0 t] + \sin[(m-n)\omega_0 t]\} dt \\
&= \frac{1}{2} \frac{-1}{(m+n)\omega_0} \cos[(m+n)\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{(m-n)\omega_0} \cos[(m-n)\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= 0 \text{ si } m \neq n.
\end{aligned}$$

Si se hace $m = n \neq 0$, y se utiliza la identidad trigonométrica $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2m\omega_0 t) dt \\
&= -\frac{1}{4m\omega_0} \cos(2m\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Evidentemente, para $m = n = 0$, la integral es cero.

1.4 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Utilizando las relaciones de ortogonalidad (1.19a-e) se pueden evaluar ahora los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t). \quad [1.11]$$

Multiplicando ambos lados por $\cos m\omega_0 t$ e integrando entre $[-T/2, T/2]$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt \\
&+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt \\
&+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt.
\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de los signos de integración y sumatoria se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt.
\end{aligned}$$

Si se aplican las relaciones de ortogonalidad (1.19), se tiene

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} a_m. \quad (1.20)$$

De donde,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt. \quad (1.21)$$

Si se integra (1.11) entre $[-T/2, T/2]$ y se usa (1.19), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} a_0 T. \end{aligned} \quad (1.22)$$

De donde,

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (1.23)$$

O

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (1.24)$$

Se debe notar que $a_0/2$ es el valor promedio de $f(t)$ durante un período.

La ecuación (1.24) indica que (1.21), la cual evalúa los coeficientes de la serie coseno, también da el coeficiente a_0 correctamente puesto que $\cos(m\omega_0 t)|_{m=0} = 1$.

Análogamente, si la ecuación (1.11) se multiplica por $\sin(m\omega_0 t)$ y se integra término por término entre los límites $[-T/2, T/2]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

El uso de las relaciones de ortogonalidad (1.19) conduce a

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} b_m. \quad (1.25)$$

De donde

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt. \quad (1.26)$$

Sustituyendo m por n se puede expresar (1.21) y (1.26) como

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

En general, no es necesario que el intervalo de integración de (1.27) y (1.28) sea simétrico alrededor del origen. Si se aplica (1.6), el único requisito es que la integral se tome sobre un período completo.

PROBLEMA 1.10 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.29)$$

y $f(t+T)=f(t)$. (Ver figura 1.2)

Solución: por (1.27) y $\omega_0 t = \left| t = \pm T/2 \right| = \frac{2\pi}{T} \left(\pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi$, se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{-1}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{1}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right) \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \frac{-1}{n\omega_0} [\sin 0 - \sin(-n\pi)] + \frac{1}{n\omega_0} [\sin(n\pi) - \sin 0] \right\} \\ &= 0 \text{ para } n \neq 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

puesto que $\sin 0 = \sin(n\pi) = 0$.

Para $n = 0$, se tiene

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad (1.31)$$

puesto que el valor promedio de $f(t)$ durante un período es cero.

De (1.28) y $\omega_0 T = (2\pi/T)T = 2\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -\sin(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{-1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] \\ &= \frac{2}{n\omega_0 T} \left\{ [1 - \cos(-n\pi)] - [\cos(n\pi) - 1] \right\} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \end{aligned} \quad (1.32)$$

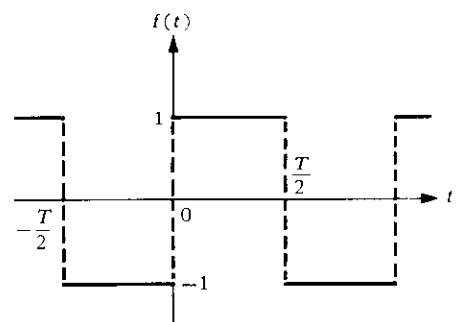


Figura 1.2 Forma de onda del problema 1.10.

Puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (1.33)$$

De donde

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_o t \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_o t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_o t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_o t + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

PROBLEMA 1.11 Encontrar la serie de Fourier para la función cuya forma de onda se muestra en la figura 1.3.

Solución: la función $f(t)$ se puede expresar analíticamente así:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.35)$$

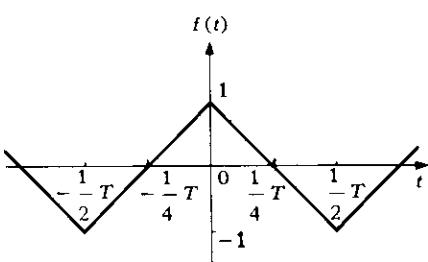


Figura 1.3. Forma de onda del problema 1.11.

Puesto que el valor promedio de $f(t)$ durante un período es cero,

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0. \quad (1.36)$$

Por (1.27) y (1.35) se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_o t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \cos(n\omega_o t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \cos(n\omega_o t) dt. \end{aligned}$$

La primera integral del segundo miembro es igual a cero. Haciendo $t = -\tau$ en la segunda integral se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 (-\tau) \cos[n\omega_o(-\tau)] (-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 \tau \cos(n\omega_o \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \cos(n\omega_o \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt. \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt &= \frac{1}{n\omega_o} t \sin(n\omega_o t) \Big|_0^{T/2} - \frac{1}{n\omega_o} \int_0^{T/2} \sin(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{(n\omega_o)^2} \cos(n\omega_o t) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{(n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{16}{T^2} \frac{1}{(n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (1.38)$$

Análogamente, por (1.28) y (1.35) se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_o t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \sin(n\omega_o t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \sin(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 (-t) \sin[n\omega_o(-t)] (-dt) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega_o t) dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega_o t) dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

De donde,

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega_o t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_o t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_o t + \dots \right). \quad (1.40)$$

PROBLEMA 1.12 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A \sin \omega_o t, & 0 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (1.41)$$

y $f(t+T) = f(t)$, $\omega_o = 2\pi/T$. (Ver figura 1.4.)

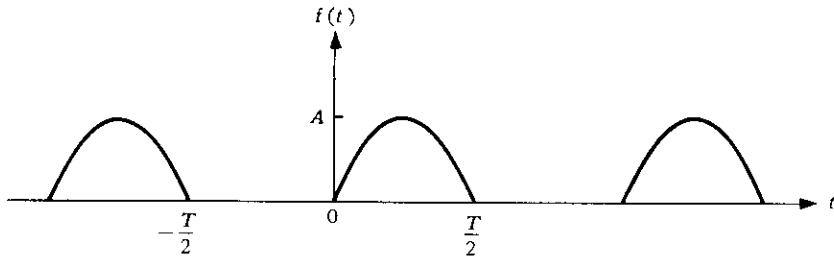


Figura 1.4. Forma de onda del problema 1.12.

Solución: puesto que $f(t) = 0$ cuando $-T/2 < t < 0$, de (1.27) y (1.28) se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(\omega_o t) dt = \frac{2A}{T\omega_o} (-\cos \omega_o t) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{\pi} (1 - \cos \pi) \\ &= \frac{2A}{\pi}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(\omega_o t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \{\sin[(1+n)\omega_o t] + \sin[(1-n)\omega_o t]\} dt. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Cuando $n = 1$,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \sin(2\omega_o t) dt = \frac{A}{T} \left(-\frac{1}{2\omega_o} \cos 2\omega_o t \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{4\pi} [1 - \cos(2\pi)] \\ &= \frac{A}{4\pi} (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Cuando $n = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{T} \left\{ -\frac{\cos[(1+n)\omega_o t]}{(1+n)\omega_o} - \frac{\cos[(1-n)\omega_o t]}{(1-n)\omega_o} \right\} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1 - [\cos(1+n)\pi]}{1+n} + \frac{1 - \cos[(1-n)\pi]}{1-n} \right\} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{A}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2A}{(n-1)(n+1)\pi}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(\omega_o t) \sin(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \{\cos[(1-n)\omega_o t] - \cos[(1+n)\omega_o t]\} dt. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Cuando $n = 1$

$$b_1 = \frac{A}{T} \int_0^{T/2} dt - \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \cos(2\omega_o t) dt = \frac{A}{2} - \frac{A}{T} \frac{\sin 2\omega_o t}{2\omega_o} \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{2}. \quad (1.47)$$

Cuando $n = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{T} \left\{ \frac{\sin[(1-n)\omega_o t]}{(1-n)\omega_o} - \frac{\sin[(1+n)\omega_o t]}{(1+n)\omega_o} \right\} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(1-n)\pi] - \sin 0}{1-n} - \frac{\sin[(1+n)\pi] - \sin 0}{1+n} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

De donde,

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_o t - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega_o t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega_o t + \dots \right). \quad (1.49)$$

PROBLEMA 1.13 Desarrollar $f(t) = \sin^5 t$ en serie de Fourier.

Solución: en vez de proceder como se hizo en el problema (1.12), se hará uso de las identidades

$$e^{\pm jn\theta} = \cos n\theta \pm j \sin n\theta, \quad (1.50)$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}}{2}, \quad (1.51)$$

$$\sin n\theta = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}. \quad (1.52)$$

Se expresa

$$\begin{aligned} \sin^5 t &= \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^5 = \frac{1}{32j} (e^{j5t} - 5e^{j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt} + 5e^{-j3t} - e^{-j5t}) \\ &= \frac{5}{8} \sin t - \frac{5}{16} \sin 3t + \frac{1}{16} \sin 5t. \end{aligned} \quad (1.53)$$

En este caso la serie de Fourier tiene tres términos solamente.

1.5 APROXIMACION MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER

Sea

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \quad (1.54)$$

la suma de los primeros $(2k+1)$ términos de una serie de Fourier que representa $f(t)$ en el intervalo $-T/2 < t < T/2$.

Si $f(t)$ se aproxima por $S_k(t)$, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) + \varepsilon_k(t), \quad (1.55)$$

$$\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t), \quad (1.56)$$

y $\varepsilon_k(t)$ es la diferencia o *error* entre $f(t)$ y su aproximación, entonces el *error cuadrático medio* E_k está definido por

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\varepsilon_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt. \quad (1.57)$$

PROBLEMA 1.14 Demostrar que si se aproxima una función $f(t)$ por una serie finita de Fourier $S_k(t)$, entonces esta aproximación tiene la propiedad de ser el mínimo error cuadrático medio.

Solución: si se sustituye (1.54) en (1.57), se tiene

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt. \quad (1.58)$$

Considerar E_k como una función de a_0 , a_n , y b_n . Entonces para que el error cuadrático medio E_k sea un mínimo, sus derivadas parciales con respecto a a_0 , a_n , y b_n deben ser iguales a cero, es decir,

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Intercambiando el orden de la diferenciación y de la integración:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] dt, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \cos(n\omega_0 t) dt, \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (1.61)$$

Si se usan las propiedades de ortogonalidad (1.19), (1.27), y (1.28) del seno y del coseno, las integrales (1.59), (1.60) y (1.61) se reducen a

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = a_n - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = b_n - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0. \quad (1.64)$$

PROBLEMA 1.16 Demostrar que el error cuadrático medio E_k en una aproximación a $f(t)$ por $S_k(t)$, definida por (1.57), se reduce a

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.65)$$

Solución: por (1.57) se tiene

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{[f(t)]^2 - 2f(t)S_k(t) + [S_k(t)]^2\} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt. \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

Ahora bien;

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt &= \frac{2}{T} \frac{a_o}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt \\
 &\quad + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_o t) dt.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.27) y (1.28), se obtiene

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.67)$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad (1.19),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \right]^2 dt \\
 &= \frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.68)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (1.67) y (1.68) en (1.66), se obtiene

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_o^2}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2).
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 1.16 Establecer la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.69)$$

Solución: por (1.57), se tiene

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \geq 0. \quad (1.70)$$

Y también por (1.65) se deduce que

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.71)$$

El teorema de Parseval afirma que si a_0, a_n , y b_n para $n = 1, 2, \dots$ son los coeficientes en la expansión de Fourier de una función periódica $f(t)$ con periodo T , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.72)$$

PROBLEMA 1.17 Demostrar el teorema de Parseval.

Solución: por (1.65), se tiene

$$E_{k+1} = E_k - \frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2). \quad (1.73)$$

Mediante las relaciones (1.70) y (1.73) se observa que la sucesión $\{E_k\}$ contiene solamente términos no negativos y no es creciente; por consiguiente la sucesión converge. De (1.56),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k(t) = f(t) - \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = 0. \quad (1.74)$$

De donde,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0. \quad (1.75)$$

En consecuencia, por (1.65) se concluye que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

1.6 LAS CONDICIONES DE DIRICHLET

Anteriormente se dedicó atención a la determinación de la serie de Fourier de funciones dadas y se supuso que la función dada se podía representar mediante una serie de Fourier. Ahora se debe investigar la convergencia de la serie de Fourier a $f(t)$.

Una de las partes más elegantes de la teoría de Fourier es la que trata de los problemas de convergencia. Se enunciarán aquí las condiciones, conocidas como *condiciones de Dirichlet*, bajo las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función dada $f(t)$.

Las condiciones de Dirichlet son:

- 1) La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.
- 2) La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
- 3) La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un período es finita; es decir,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt = \text{finita} < \infty. \quad (1.76)$$

Se dice que una función $f(t)$ es *continua por tramos* en el intervalo finito $[-T/2, T/2]$ si satisface las condiciones (1) y (2).

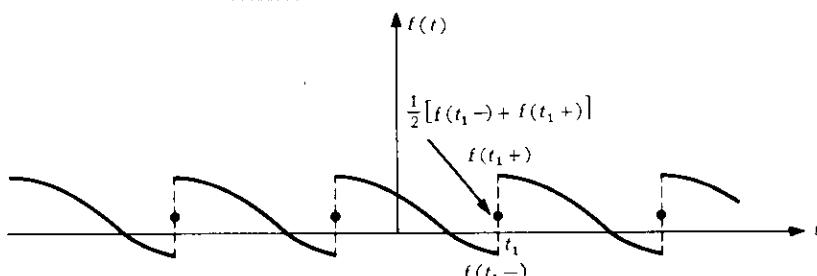


Figura 1.5 Función continua por tramos y límites a la izquierda y a la derecha.

En un punto de discontinuidad, como se muestra en la figura 1.5, el cual se denota por $t = t_1$, la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}[f(t_1^-) + f(t_1^+)], \quad (1.77)$$

donde $f(t_1^-)$ es el límite de $f(t)$ cuando t se aproxima a t_1 por la izquierda, y $f(t_1^+)$ es el límite de $f(t)$ cuando t se aproxima a t_1 por la derecha. La razón de esta propiedad de la serie de Fourier se discute en el apéndice A.

PROBLEMA 1.18 Si a_n y b_n son las sucesiones de los coeficientes de $f(t)$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (1.78)$$

Solución: por (1.69), se tiene

$$\frac{1}{2} a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt.$$

Puesto que la serie del miembro izquierdo es convergente entonces es necesario que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0,$$

lo cual implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

PROBLEMA 1.19 Demostrar que si $f(t)$ es una función continua por tramos y la integral del valor absoluto de $f(t)$ es finita en el intervalo $-T/2 < t < T/2$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_o t) dt = 0. \quad (1.79)$$

Solución: los coeficientes de Fourier a_n y b_n existen, puesto que la integral del valor absoluto de $f(t)$ es finita en el intervalo $[-T/2, T/2]$. Aplicando (1.78) y la definición de los coeficientes de Fourier se concluye que (1.79) es correcta, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos(n\omega_o t) \\ \sin(n\omega_o t) \end{cases} dt = 0.$$

De donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos(n\omega_o t) \\ \sin(n\omega_o t) \end{cases} dt = 0.$$

1.7 DIFERENCIACION E INTEGRACION DE LAS SERIES DE FOURIER

En seguida se considera la diferenciación e integración de las series de Fourier de una función. Se debe observar que la diferenciación término por término de una serie trigonométrica

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t)$$

multiplica los coeficientes a_n y b_n por $\pm n\omega_o$. De donde la diferenciación tiende a

disminuir la convergencia y puede resultar en *divergencia*. Por otra parte, en la integración término por término los coeficientes a_n y b_n se dividen por $\pm n\omega_0$, y el resultado es una serie cuya convergencia aumenta.

PROBLEMA 1.20 Demostrar el siguiente teorema de diferenciación de las series de Fourier:
Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos, y diferenciable, entonces la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.80)$$

se puede diferenciar término por término para obtener

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t). \quad (1.81)$$

Solución: puesto que $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable, su serie de Fourier converge a ella; por lo tanto su representación en serie de Fourier es

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \sin n\omega_0 t), \quad (1.82)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos (n\omega_0 t) dt, \quad (1.83)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \sin (n\omega_0 t) dt. \quad (1.84)$$

Integrando (1.83) y (1.84) por partes,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T} \left[(\cos n\omega_0 t) f(t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + n\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt \right] \\ &\quad - n\omega_0 b_n, \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{T} \left[(\sin n\omega_0 t) f(t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - n\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt \right] \\ &\quad - n\omega_0 a_n \end{aligned} \quad (1.86)$$

puesto que $f(-T/2) = f(T/2)$.

Debe notarse que $\alpha_0 = 0$. Por consiguiente,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t),$$

lo cual se puede obtener de la serie de Fourier de $f(t)$ diferenciando término por término. (La diferenciación de una función con discontinuidades súbitas será tratada en la sec. 2.5).

PROBLEMA 1.21 Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 < t < T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.87)$$

se puede integrar término por término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_o (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_o} [-b_n (\cos n\omega_o t_2 - \cos n\omega_o t_1) + a_n (\sin n\omega_o t_2 - \sin n\omega_o t_1)]. \quad (1.88)$$

Solución: puesto que $f(t)$ es una función continua por tramos y por el resultado del problema 1.6, la función $F(t)$ definida por

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t \quad (1.89)$$

es continua y periódica con período T . Puesto que

$$F'(t) = f(t) - \frac{1}{2} a_o, \quad (1.90)$$

se sigue que $F'(t)$ también es continua. Sea la expansión de $F(t)$ en serie de Fourier

$$F(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_o t + \beta_n \sin n\omega_o t). \quad (1.91)$$

Entonces, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{2}{n\omega_o T} F(t) \sin(n\omega_o t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{n\omega_o T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \sin(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{2}{n\omega_o T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - \frac{1}{2} a_o] \sin(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{1}{n\omega_o} b_n, \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{2}{n\omega_o T} F(t) \cos(n\omega_o t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{n\omega_o T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{2}{n\omega_o T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - \frac{1}{2} a_o] \cos(n\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{n\omega_o} a_n. \end{aligned} \quad (1.93)$$

De donde

$$F(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_o} (-b_n \cos n\omega_o t + a_n \sin n\omega_o t). \quad (1.94)$$

Ahora bien;

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o (t_2 - t_1). \quad (1.95)$$

De donde,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt &= F(t_2) - F(t_1) + \frac{1}{2} a_o (t_2 - t_1) \\ &= \frac{1}{2} a_o (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_o} [-b_n (\cos n\omega_o t_2 - \cos n\omega_o t_1) \\ &\quad + a_n (\sin n\omega_o t_2 - \sin n\omega_o t_1)] \end{aligned}$$

lo cual se puede obtener de la serie de Fourier de $f(t)$ mediante integración término por término.

PROBLEMA 1.22 Demostrar que la integral de una función periódica cuyo valor promedio es diferente de cero no es una función periódica.

Solución: por el resultado del problema 1.21, se tiene

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} a_o t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n\omega_o} (a_n \sin n\omega_o t - b_n \cos n\omega_o t + b_n) \right]. \quad (1.96)$$

El término $\frac{1}{2} a_o t$ no es periódico y por consiguiente la integral no es periódica. Nótese que la integración de la serie de Fourier de $f(t)$ término por término, conduce a la serie de Fourier de la integral de $f(t)$ solamente si $a_o = 0$, es decir, sólo si el valor promedio de $f(t)$ es cero; esto se demostró en el problema 1.5.

PROBLEMA 1.23 Sea $f(t)$ una función continua y $f'(t)$ una función continua por tramos en el intervalo $-T/2 < t < T/2$. Multiplicar

$$f(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \quad (1.97)$$

por $f(t)$, integrar término por término y demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.98)$$

(Cf., teorema de Parseval – Problema 1.17)

Solución: aplicando (1.27) y (1.28), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt &= \frac{1}{2} a_o \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_o t) dt \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_o t) dt \right] \\ &= \frac{1}{4} a_o^2 T + \frac{T}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.99)$$

De esta manera,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

1.8 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 1.24 Encontrar el período de las siguientes funciones:

- (a) $\cos nt$, (b) $\cos 2\pi t$, (c) $\sin(2\pi t/k)$, (d) $\sin t + \sin(t/3) + \sin(t/5)$,
- (e) $|\sin \omega_0 t|$.

Respuesta: (a) $2\pi/n$, (b) 1, (c) k , (d) 30π , (e) π/ω_0 .

PROBLEMA 1.25 Demostrar que la función $f(t) = \text{constante}$, es una función periódica de período T para cualquier valor positivo de T .

PROBLEMA 1.26 Si $f(t)$ es una función periódica de t con período T , demostrar que $f(at)$ para $a \neq 0$ es una función periódica de t con período T/a .

PROBLEMA 1.27 Si $f(t)$ es una función periódica de t con T e integrable, demostrar que $f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau$ también es periódica con período T .

PROBLEMA 1.28 Demostrar que si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos en el intervalo $(-T/2, T/2)$ y periódicas de período T , entonces la función

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

es continua y periódica con período T .

PROBLEMA 1.29 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por $f(t) = 1$ para $-\pi < t < 0$, $f(t) = 0$, para $0 < t < \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$. (Ver figura 1.6).

Respuesta: $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

PROBLEMA 1.30 Encontrar la serie de Fourier de la función $f(t)$ definida por $f(t) = t$ para el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$. (Ver figura 1.7).

Respuesta: $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$.

PROBLEMA 1.31 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por $f(t) = t$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$. (Ver figura 1.8).

Respuesta: $\frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$.

PROBLEMA 1.32 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por $f(t) = e^t$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$. (Ver figura 1.9).

Respuesta: $\frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt) \right]$.

PROBLEMA 1.33 Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t) = |A \sin \omega_0 t|$. (Ver figura 1.10).

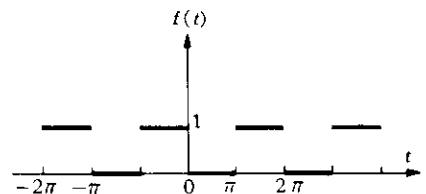


Figura 1.6 La función $f(t)$ del problema 1.29.

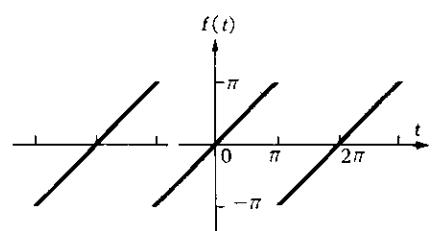


Figura 1.7 La función $f(t)$ del problema 1.30.

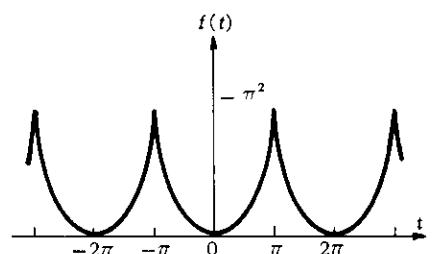


Figura 1.8 La función $f(t)$ del problema 1.31.

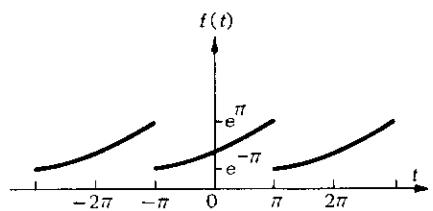


Figura 1.9 La función $f(t)$ del problema 1.32.

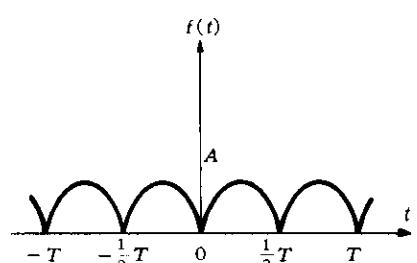


Figura 1.10 La función $f(t)$ del problema 1.33.

$$\text{Respuesta: } \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos(2n\omega_0 t).$$

PROBLEMA 1.34 Desarrollar $f(t) = \sin^2 t \cos^3 t$ en serie de Fourier.

$$\text{Respuesta: } \frac{1}{16} (2 \cos t - \cos 3t - \cos 5t).$$

PROBLEMA 1.35 Desarrollar $f(t) = e^t \cos t \cos(r \sin t)$ en serie de Fourier.
[Sugerencia: usar la serie de potencias para e^z cuando $z = re^{jt}$.]

$$\text{Respuesta: } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cos nt.$$

PROBLEMA 1.36 Aproximar la función $f(t) = t$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ mediante una serie finita de Fourier de 5 términos que sean diferentes de cero. Calcular también el error cuadrático medio en la aproximación.

$$\text{Respuesta: } 2 \sum_{n=1}^5 \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt \right], \quad E_5 = 0.363.$$

PROBLEMA 1.37 Utilizando el desarrollo en serie de Fourier del problema 1.10, demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

[Sugerencia: hacer $t = \frac{1}{4}T$ en (1.34).]

PROBLEMA 1.38 Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

[Sugerencia: hacer $t = \pi$ en el resultado del problema 1.31.]

PROBLEMA 1.39 Encontrar la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

[Sugerencia: hacer $t = 0$ en (1.40) del problema 1.11.]

Respuesta: $\pi^2/8$

PROBLEMA 1.40 Si una función periódica $f(t)$ tiene derivadas continuas hasta el orden k y derivadas continuas por tramos de orden $k+1$, demostrar que existe una cota B , dependiente sólo de $f(t)$ y k tal que

$$|a_n| < \frac{B}{n^{k+1}} \quad \text{y} \quad |b_n| < \frac{B}{n^{k+1}},$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(t)$.

PROBLEMA 1.41 Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por tramos con período T , y sean a_n , b_n y α_n , β_n los respectivos coeficientes de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$.
Demostrar que

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

PROBLEMA 1.42 Si $f(t)$ es una función periódica integrable, con período T , demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\frac{T}{2} - t \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n\omega_0},$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de $f(t)$ y $\omega_0 = 2\pi/T$.

[Sugerencia: desarrollar $\frac{1}{2}(T-t)$, para $0 < t < T$ en serie de Fourier.]

PROBLEMA 1.43 Integrar la serie de Fourier para t^2 en el problema 1.31 para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

PROBLEMA 1.44 Utilizar el teorema de Parseval (1.72) para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 1.10.]

PROBLEMA 1.45 De un conjunto infinito de funciones reales $\{\phi_n(t)\}$, donde $n = 1, 2, \dots$, se dice que es un conjunto *ortonormal* en el intervalo (a, b) si

$$\int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt = \delta_{mn},$$

donde δ_{mn} es la función delta de Kronecker. Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo (a, b) y si se supone que $f(t)$ se puede representar como

$$f(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_n \phi_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

en el intervalo (a, b) , donde las c_n son constantes. Demostrar que

$$c_n = \int_a^b f(t) \phi_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Los coeficientes c_n se denominan *coeficientes de Fourier de $f(t)$ con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n(t)\}$* .

PROBLEMA 1.46 Si $f(t)$ en el problema 1.45, se aproxima por $f_k(t) = \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)$, demostrar que el error cuadrático medio $\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt$ es un mínimo.

PROBLEMA 1.47 Demostrar que si c_n son los coeficientes de Fourier de $f(t)$ con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n(t)\}$, entonces

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

Este resultado se conoce como la *identidad de Parseval*.

2

CAPITULO

ANALISIS DE FORMAS DE ONDAS PERIODICAS

2.1 SIMETRIA DE LA FORMA DE ONDA

En el capítulo primero se vio que cualquier función periódica $f(t)$ con periodo T que satisface las condiciones de Dirichlet, es decir, que la función $f(t)$ es continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo, se puede representar mediante una serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (2.1)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$.

En este capítulo se analizará el efecto de la simetría de la forma de onda y el uso de impulsos en el cálculo de las series de Fourier de algunas formas ondulatorias.

2.1a Funciones pares e impares

Se dice que una función $f(t)$ es *par* si satisface la condición de que

$$f(-t) = f(t), \quad (2.2)$$

y se dice que es *ímpar* si

$$f(-t) = -f(t). \quad (2.3)$$

En la figura 2.1 se muestran ilustraciones de funciones pares e impares.

Se debe notar que una función par es simétrica respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función ímpar es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen. Dedicaremos en seguida algunas propiedades de las funciones pares e impares.

PROBLEMA 2.1 Demostrar que el producto de dos funciones pares, o de dos funciones impares es una función par, y que el producto de una función par y una función ímpar es una función ímpar.

Solución: sea $f(t) = f_1(t) f_2(t)$. Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones pares, entonces

$$f(-t) = f_1(-t) f_2(-t) = f_1(t) f_2(t) = f(t),$$

y si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones impares, entonces

$$f(-t) = f_1(-t) f_2(-t) = -f_1(t) [-f_2(t)] = f_1(t) f_2(t) = f(t).$$

Esto prueba que $f(t)$ es una función par.

Análogamente, si $f_1(t)$ es par y $f_2(t)$ es ímpar, entonces

$$f(-t) = f_1(-t) f_2(-t) = f_1(t) [-f_2(t)] = -f_1(t) f_2(t) = -f(t).$$

Esto prueba que $f(t)$ es una función ímpar.

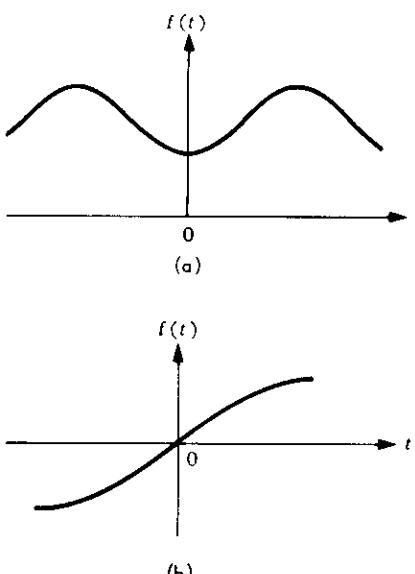


Figura 2.1. (a) Una función par.
(b) Una función ímpar.

PROBLEMA 2.2 Demostrar que cualquier función $f(t)$ se puede expresar como la suma de dos funciones componentes, de las cuales la una es par y la otra impar.

Solución: cualquier función $f(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(-t) + \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(-t) \\ &= \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sea

$$\frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] = f_e(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = f_o(t). \quad (2.6)$$

Entonces,

$$f_e(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) + f(t)] = f_e(t),$$

$$f_o(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) - f(t)] = -\frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = -f_o(t).$$

De donde,

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

donde $f_e(t)$ es la componente par y $f_o(t)$ es la componente impar de la función dada, $f(t)$.

Otra forma de solución: si se supone que $f(t)$ se puede expresar como

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t), \quad (2.7)$$

donde $f_e(t)$ y $f_o(t)$ denotan las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente.

De acuerdo con la definición de componentes par e impar dadas por (2.2) y (2.3), se sigue que

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t). \quad (2.8)$$

La suma y la diferencia de (2.7) y (2.8) dan como resultado, respectivamente

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)],$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)].$$

PROBLEMA 2.3 Encontrar las componentes par e impar de la función definida por [figura 2.2(a)]:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Solución: de acuerdo con (2.9), se tiene

$$f(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ e^t, & t < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Por medio de (2.5) y (2.6), se concluye que

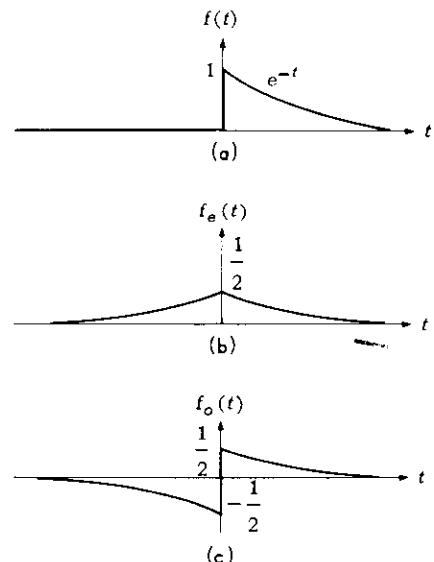


Figura 2.2 (a) La función $f(t)$ del problema 2.3. (b) La componente par de la figura 2.2 (a). (c) La componente impar de la figura 2.2 (a).

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t}, & t > 0 \\ \frac{1}{2} e^t, & t < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t}, & t > 0 \\ -\frac{1}{2} e^t, & t < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Las componentes par e impar de $f(t)$ se muestran en las figuras 2.2(b-c).

PROBLEMA 2.4 Si $f(t)$ es par, demostrar que

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt. \quad (2.13)$$

Solución: si se escribe nuevamente el primer miembro de (2.13), se tiene

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt.$$

Haciendo $t = -x$ en la primera integral del segundo miembro

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_a^0 f(-x) (-dx) = \int_0^a f(-x) dx.$$

Puesto que $f(t)$ es par, es decir, $f(-x) = f(x)$, se tiene

$$\int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt.$$

Lo cual es cierto pues cualquier símbolo se puede usar para representar la variable "comodín"; por consiguiente,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

PROBLEMA 2.5 Si $f(t)$ es impar, demostrar que

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0, \quad (2.14)$$

$$f(0) = 0. \quad (2.15)$$

Solución: si se escribe nuevamente el primer miembro de (2.14), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt. \end{aligned}$$

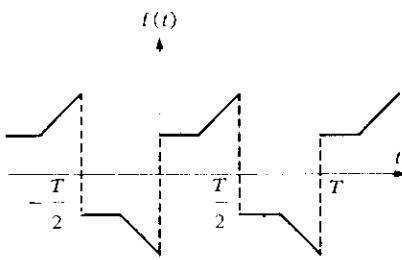


Figura 2.3 Simetría de media onda.

Puesto que $f(t)$ es impar, es decir, $f(-t) = -f(t)$, se tiene

$$\int_{-a}^a f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0.$$

En particular,

$$f(-0) = -f(0);$$

de donde,

$$f(0) = 0.$$

2.1b Simetría de media onda

Si una función $f(t)$ es periódica con período T , entonces se dice que la función periódica $f(t)$ tiene *simetría de media onda* si satisface la condición

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right). \quad (2.16)$$

En la figura 2.3 se muestra una forma de onda con simetría de media onda. Se debe notar que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada horizontalmente medio período.

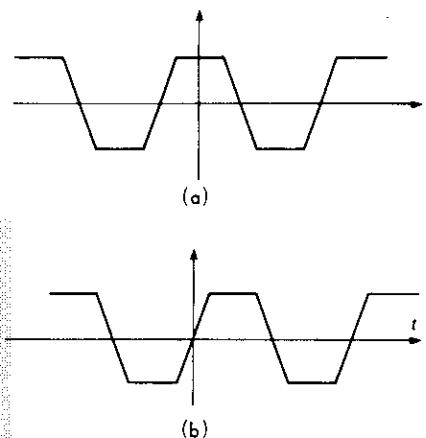


Figura 2.4 (a) Simetría de cuarto de onda par. (b) Simetría de cuarto de onda impar.

PROBLEMA 2.6 Si una función periódica $f(t)$ tiene simetría de media onda, demostrar que

$$f(t) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right). \quad (2.17)$$

Solución: Si $f(t)$ tiene simetría de media onda, entonces, de acuerdo con (2.16), se tiene

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right).$$

Puesto que $f(t)$ es periódica con período T ,

$$f\left(t - \frac{1}{2}T\right) = f\left(t + T - \frac{1}{2}T\right) = f\left(t + \frac{1}{2}T\right).$$

Por consiguiente,

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right).$$

2.1c Simetría de cuarto de onda

Si una función periódica $f(t)$ tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, entonces se dice que $f(t)$ tiene una *simetría de cuarto de onda par o impar*. La figura 2.4 ilustra las formas de ondas con simetría de cuarto de onda.

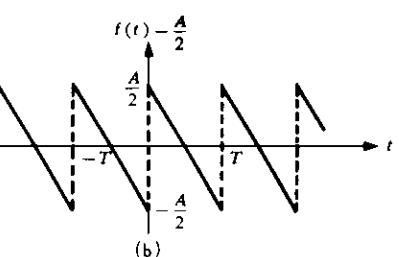
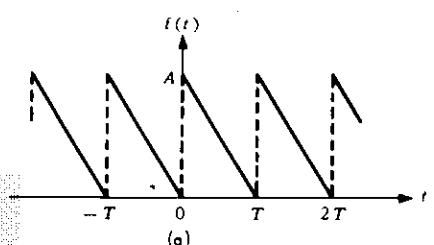


Figura 2.5 (a) Simetría escondida
(b) Simetría impar.

PROBLEMA 2.7 En la figura 2.5(a), demostrar que si se construye una nueva función sustrayendo de $f(t)$ el término constante $A/2$, la nueva función es una función impar.

Solución: la sustracción del término constante $A/2$ de $f(t)$, solamente desplaza el eje horizontal hacia arriba en $A/2$. Como se muestra en la figura 2.5(b), es obvio que la nueva función $g(t) = f(t) - A/2$ es una función impar.

2.2 COEFICIENTES DE FOURIER DE ONDAS SIMETRICAS

El uso de las propiedades de simetría simplifica el cálculo de los coeficientes de Fourier.

PROBLEMA 2.8 Si $f(t)$ es una función periódica par con periodo T , demostrar que su serie de Fourier consta de una constante y de términos del coseno solamente, es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t), \quad (2.18)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

y a_n está dado por

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt. \quad (2.19)$$

Solución: el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)).$$

Por (1.27) y (1.28), se tiene

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Puesto que $\sin(n\omega_0 t)$ es impar y $f(t)$ es par, el producto $f(t) \sin(n\omega_0 t)$ es una función impar. Por consiguiente, de acuerdo con (2.14),

$$b_n = 0.$$

Así mismo, puesto que $\cos(n\omega_0 t)$ es una función par, el producto $f(t) \cos(n\omega_0 t)$ es una función par; por consiguiente, según (2.13), se tiene

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt.$$

PROBLEMA 2.9 Si $f(t)$ es una función periódica impar con periodo T , demostrar que su serie de Fourier consta de términos del seno solamente; es decir,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad (2.20)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

y b_n está dado por

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (2.21)$$

Solución: puesto que $f(t)$ es una función impar, el producto $f(t) \cos n\omega_0 t$ es una función impar, y el producto $f(t) \sin n\omega_0 t$ es una función par. Por consiguiente, de acuerdo con (2.13) y (2.14), se tiene

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

PROBLEMA 2.10 Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica $f(t)$ que tiene simetría de media onda, contiene armónicas impares solamente.

Solución: el coeficiente a_n en la expansión de Fourier de una función periódica $f(t)$ es

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right]. \end{aligned}$$

Cambiando la variable t por $(t - \frac{1}{2} T)$ en la primera integral, se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} f\left(t - \frac{1}{2} T\right) \cos\left[n\omega_0\left(t - \frac{1}{2} T\right)\right] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Puesto que $f(t)$ tiene simetría de media onda, si se tiene en cuenta la propiedad $f(t) = -f(t - \frac{1}{2} T)$ de (2.17) y el hecho de que $\sin n\pi = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [-f(t) \cos(n\omega_0 t) \cos n\pi + f(t) \cos(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{2}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Un desarrollo similar muestra que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.24)$$

PROBLEMA 2.11 Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica $f(t)$ que tiene simetría de cuarto de onda par, consta solamente de armónicos impares de términos del coseno, es decir,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_0 t], \quad (2.25)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt. \quad (2.26)$$

Solución: puesto que $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda par,

$$f(t) = f(-t),$$

$$f\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -f(t).$$

Por los resultados de los problemas 2.8 y 2.10 se tiene, por consiguiente, que

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_{2n} = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{para todos los valores} \\ \text{de } n \text{ (incluyendo } a_0\text{)}, \end{array} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \\ &= \frac{4}{T} \left\{ \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/4}^{T/2} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cambiando la variable t por $(t + \frac{1}{2}T)$ en la segunda integral, se tiene

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \left\{ \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-T/4}^0 f\left(t + \frac{1}{2}T\right) \cos \left[(2n-1)\omega_0 \left(t + \frac{1}{2}T\right)\right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si se usa la propiedad $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$, se tiene

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \left\{ \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt + \int_{-T/4}^0 f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \right\} \\ &= \frac{4}{T} \int_{-T/4}^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dado que $f(-t) = f(t)$ y $f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t]$ es una función par, según (2.13) se obtiene

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt.$$

PROBLEMA 2.12 Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica $f(t)$ que tiene simetría de cuarto de onda impar, consta de armónicos impares de términos del seno solamente, es decir,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen} [(2n-1) \omega_0 t], \quad (2.31)$$

dónde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, y

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{sen} [(2n-1) \omega_0 t] dt.$$

Solución: puesto que $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda impar

$$f(-t) = -f(t) \quad \text{y} \quad f\left(t + \frac{1}{2} T\right) = -f(t).$$

Por consiguiente, de los resultados de los problemas 2.9 y 2.10, se tiene

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_{2n} = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{para todos los valores} \\ \text{de } n \text{ (incluyendo } a_0), \end{array} \quad (2.33)$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} [(2n-1) \omega_0 t] dt. \quad (2.34)$$

Evaluando esta integral como en el problema 2.11

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{sen} [(2n-1) \omega_0 t] dt.$$

PROBLEMA 2.13 Encontrar la serie de Fourier de la onda cuadrada que se muestra en la figura 2.6.

Solución: por la figura 2.6, se tiene

$$f(-t) = f(t) \quad \text{y} \quad f\left(t + \frac{1}{2} T\right) = -f(t),$$

es decir, la función $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda par.

Por consiguiente, según el resultado del problema 2.11, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos [(2n-1) \omega_0 t], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.35)$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1) \omega_0 t] dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} \cos [(2n-1) \omega_0 t] dt \\ &= \frac{8}{(2n-1) \omega_0 T} \operatorname{sen} [(2n-1) \omega_0 t] \Big|_0^{T/4} \\ &= \frac{4}{(2n-1) \pi} \operatorname{sen} \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{(2n-1) \pi} & \text{para } (2n-1) = 1, 5, \dots \\ -\frac{4}{(2n-1) \pi} & \text{para } (2n-1) = 3, 7, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

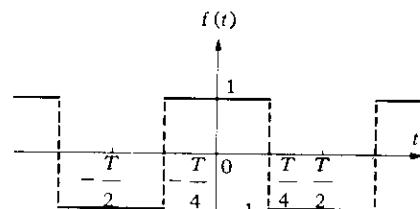


Figura 2.6 La onda cuadrada del problema 2.13

de donde,

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right). \quad (2.38)$$

PROBLEMA 2.14 Encontrar la serie de Fourier de la onda cuadrada que se muestra en la figura 2.7.

Solución: por la figura 2.7, se tiene

$$f(-t) = -f(t),$$

$$f\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -f(t),$$

es decir, la función $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda impar.

Por consiguiente, según el resultado del problema 2.12, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin [(2n-1)\omega_0 t], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.39)$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin [(2n-1)\omega_0 t] dt$$

$$= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} \sin [(2n-1)\omega_0 t] dt$$

$$= \frac{-8}{(2n-1)\omega_0 T} \cos [(2n-1)\omega_0 t] \Big|_0^{T/4}$$

$$= \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ 1 - \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

$$= \frac{4}{(2n-1)\pi}. \quad (2.40)$$

de donde

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right). \quad (2.41)$$

Se debe notar que este resultado es el mismo del problema 1.10.

Por los problemas 2.13 y 2.14, se observa que mediante una adecuada selección del origen (es decir, desplazamiento en el tiempo), se puede desarrollar la función ya sea como una serie de términos del seno o como una serie de términos del coseno. Por supuesto, el origen se puede seleccionar en cualquier parte, por lo cual, en general se obtiene una serie que contiene términos tanto del seno como del coseno.

PROBLEMA 2.15 Encontrar la serie de Fourier de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 2.8(a).

Solución: como se muestra en la figura 2.8(b), la función $g(t) = [f(t) - \frac{1}{2}]$ es una función impar; por consiguiente

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.42)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin (n\omega_0 t) dt. \quad (2.43)$$

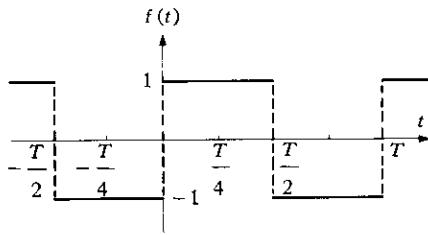


Figura 2.7 La onda cuadrada del problema 2.14.

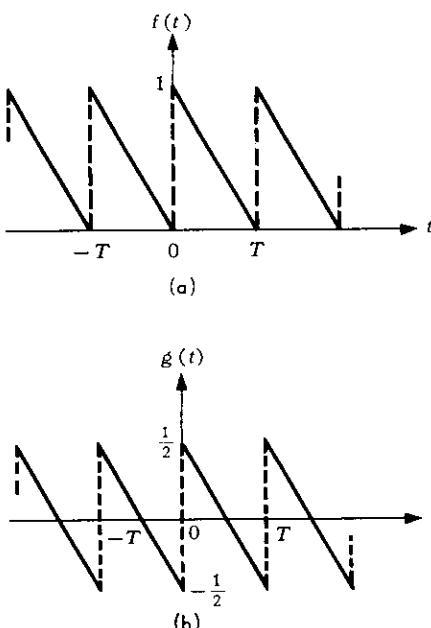


Figura 2.8 (a) La función $f(t)$ del problema 2.15. (b) La componente impar de $f(t)$ de la figura 2.8(a).

Puesto que $g(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t$ es una función par, de (2.13), se tiene

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt. \quad (2.44)$$

Ahora bien;

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{T} t \text{ para } 0 < t < T$$

entonces,

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{T} t \right) \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt.$$

Integrando por partes, se obtiene

$$b_n = \frac{4}{T} \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{T} t \right) \frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} - \frac{\operatorname{sen} n\omega_0 t}{T(n\omega_0)^2} \right]_0^{T/2} = \frac{1}{n\pi}. \quad (2.45)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + g(t) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

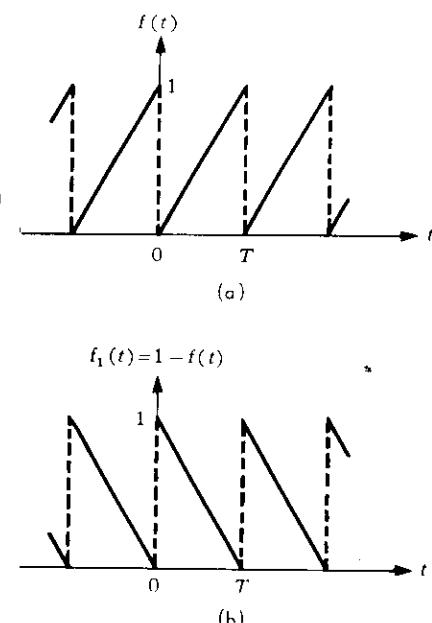
PROBLEMA 2.16 Teniendo en cuenta el resultado del problema 2.15, encontrar la serie de Fourier de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 2.9(a).

Solución: por la figura 2.9(b) y el resultado del problema 2.15, se tiene

$$f_1(t) = 1 - f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t. \quad (2.47)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - f_1(t) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$



2.3 EXPANSIÓN EN SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO FINITO

Una función $f(t)$ no periódica, definida en cierto intervalo finito $(0, \tau)$, se puede desarrollar en una serie de Fourier, la cual está definida solamente en el intervalo $(0, \tau)$. Es posible desarrollar $f(t)$ en una serie de Fourier con cualquier

Figura 2.9 (a) La función $f(t)$ del problema 2.16. (b) La función $f_1(t)$ del problema 2.16.

frecuencia fundamental deseada; además $f(t)$ se puede representar por una serie de términos del seno o coseno solamente, lo cual se puede hacer construyendo una función periódica adecuada que sea idéntica a $f(t)$ en el intervalo $(0, \tau)$, y que satisfaga las condiciones de simetría que conduzcan a la forma deseada de las series de Fourier. Esto se ilustra en la figura 2.10.

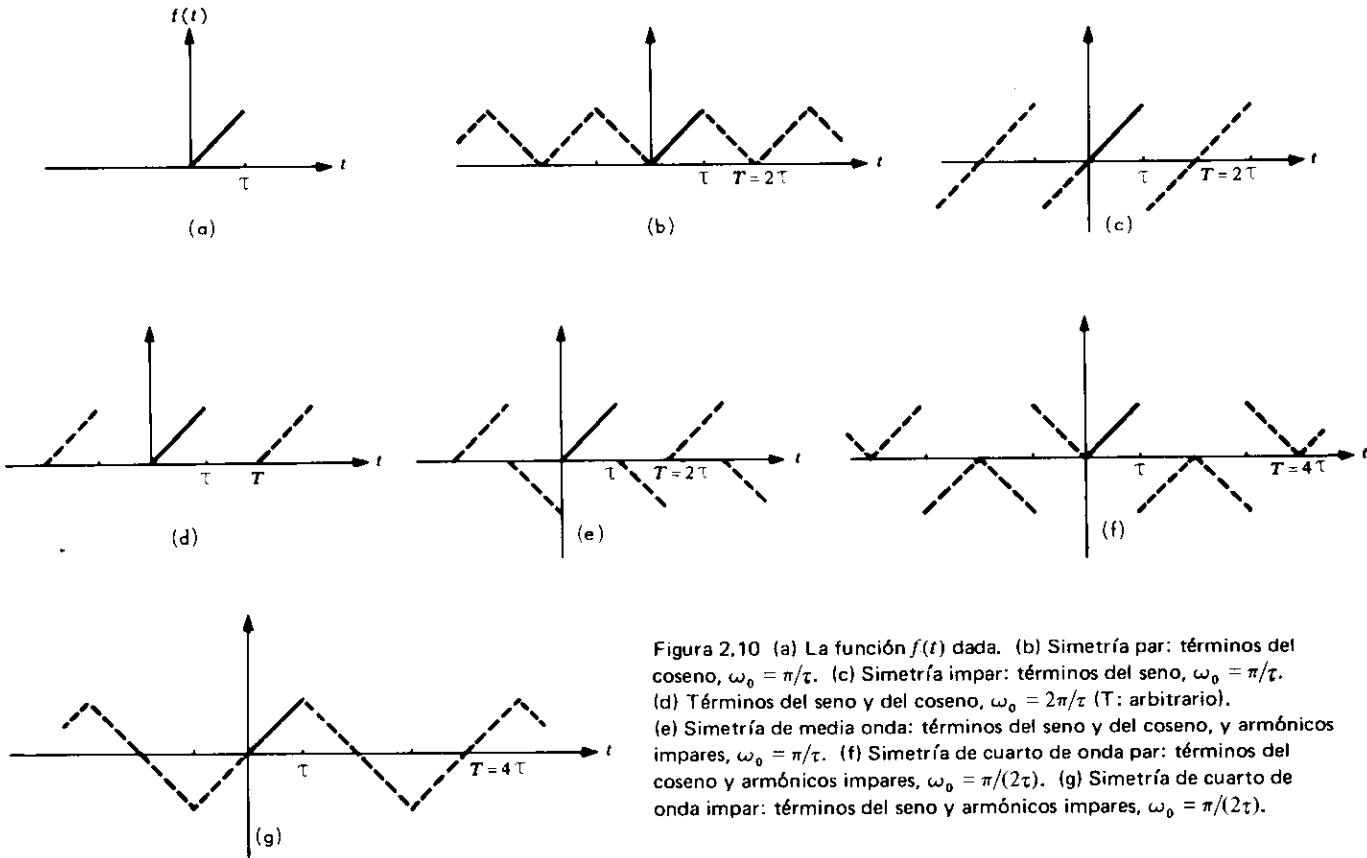


Figura 2.10 (a) La función $f(t)$ dada. (b) Simetría par: términos del coseno, $\omega_0 = \pi/\tau$. (c) Simetría impar: términos del seno, $\omega_0 = \pi/\tau$. (d) Términos del seno y del coseno, $\omega_0 = 2\pi/\tau$ (T : arbitrario). (e) Simetría de media onda: términos del seno y del coseno, y armónicos impares, $\omega_0 = \pi/\tau$. (f) Simetría de cuarto de onda par: términos del seno y armónicos impares, $\omega_0 = \pi/(2\tau)$. (g) Simetría de cuarto de onda impar: términos del seno y armónicos impares, $\omega_0 = \pi/(2\tau)$.

2.3a Expansiones de medio recorrido

Sea $f(t)$ una función de período $T = 2\tau$. Si $f(t)$ es par, entonces de (2.18) y (2.19), se obtiene la serie de Fourier en términos del coseno

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\tau} t$$

con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{\tau} t \right) dt.$$

Si $f(t)$ es impar, entonces por (2.20) y (2.21), se tiene la serie de Fourier en términos del seno

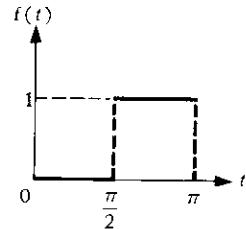
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\tau} t$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \sin \left(\frac{n\pi}{\tau} t \right) dt.$$

Las series (2.49) y (2.51), representan ambas la misma función $f(t)$ dada, en el intervalo $(0, \tau)$; fuera de este intervalo, la serie (2.49) representará la extensión periódica par de $f(t)$, con período $T = 2\tau$ [figura 2.10(b)], y la serie (2.51) representará la extensión periódica impar de $f(t)$, con período $T = 2\tau$ [figura 2.10(c)]. Las series (2.49) y (2.51), cuyos coeficientes están dados por (2.50) y (2.52) se denominan *expansiones de medio recorrido* de la función $f(t)$ dada.

PROBLEMA 2.17 Dada la función (figura 2.11)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < \frac{1}{2}\pi \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2}\pi < t < \pi, \end{cases} \quad (2.53)$$



desarrollar $f(t)$ en una serie de Fourier de términos del coseno y trazar la correspondiente extensión periódica de $f(t)$.

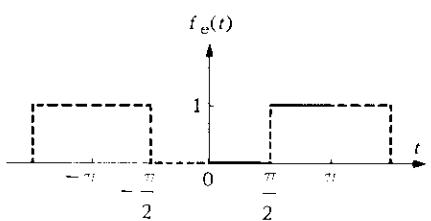
Solución: en la figura 2.12 se muestra la gráfica de la extensión periódica par de $f(t)$.

Puesto que $f(t)$ se extiende a una función par, se tiene

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por (2.50), se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\sin nt \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}; \end{aligned} \quad (2.54)$$



esto es,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par } (n \neq 0) \\ -\frac{2}{n\pi}, & n = 1, 5, \dots \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 3, 7, \dots \end{cases}$$

Para $n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dt = 1. \quad (2.55)$$

De esta manera, se tiene

$$f_e(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right) \quad (2.56)$$

para $0 < t < \pi$.

PROBLEMA 2.18 Desarrollar $f(t)$ definida por (2.53), en una serie de Fourier expresada en términos del seno y trazar la correspondiente extensión periódica de $f(t)$.

Solución: el gráfico de la extensión periódica impar de $f(t)$ se muestra en la figura 2.13.

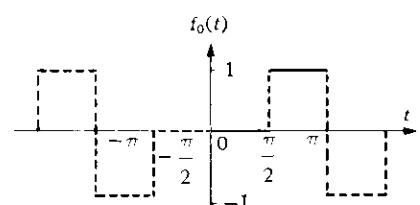


Figura 2.13 La extensión periódica impar de $f(t)$, de la figura 2.11.

Puesto que $f(t)$ se extiende a una función impar,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por (2.52), se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \sin(nt) dt \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos nt \Big|_{\pi/2}^\pi \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(\cos n\pi - \cos \frac{1}{2}n\pi \right); \end{aligned} \quad (2.57)$$

esto es,

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{4}{n\pi}, & n = 2, 6, 10, \dots \\ 0, & n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

Por consiguiente,

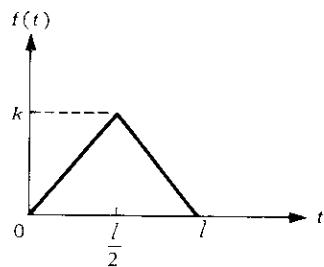


Figura 2.14 La función $f(t)$ del problema 2.19.

$$f_o(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right) - \frac{2}{\pi} \left(\sin 2t + \frac{1}{3} \sin 6t + \frac{1}{5} \sin 10t + \dots \right) \quad (2.58)$$

para $0 < t < \pi$

PROBLEMA 2.19 Dada la función (figura 2.14)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l} t & \text{para } 0 < t < \frac{1}{2}l \\ \frac{2k}{l}(l-t) & \text{para } \frac{1}{2}l < t < l, \end{cases} \quad (2.59)$$

desarrollar $f(t)$ en una serie de Fourier en términos del seno.

Solución: la extensión periódica impar de $f(t)$ se muestra en la figura 2.15.

Puesto que $f(t)$ se extiende a una función impar,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por (2.52), se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t \sin \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) \sin \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

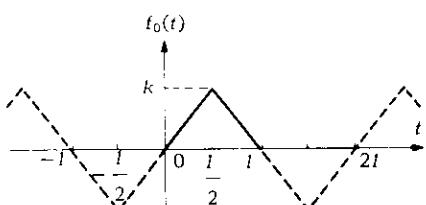


Figura 2.15 La extensión periódica impar de la figura 2.14.

Integrando ahora por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} t \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt &= -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} t \Big|_0^{l/2} + \frac{l}{n\pi} \int_0^{l/2} \cos \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt \\ &= -\frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Análogamente

$$\int_{l/2}^l (l-t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} t \right) dt = \frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi. \quad (2.62)$$

Sustituyendo (2.61) y (2.62) en (2.60),

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi. \quad (2.63)$$

de esta manera

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{l} t - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} 3 \frac{\pi}{l} t + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen} 5 \frac{\pi}{l} t - \dots \right). \quad (2.64)$$

2.4 LA FUNCION IMPULSO

La función *impulso unitario* $\delta(t)$, conocida también como *función delta*, se puede definir de varias maneras. Generalmente se expresa mediante la relación,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ \infty & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.66)$$

La ecuación (2.65) indica que $\delta(t)$ es cero excepto en $t = 0$, donde se hace infinita, de tal manera que se cumple (2.66).

La función delta también se puede definir en términos de las propiedades de sus integrales solamente; ésta es la definición que se utilizará. En adelante, $\delta(t)$ se definirá en el sentido de la llamada *función generalizada* (o *simbólica*).

Si se supone que la función $\phi(t)$ (llamada *función de prueba*) es una función continua, que se anula fuera de algún intervalo finito, entonces la función δ se define como una función simbólica por la relación,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0). \quad (2.67)$$

La expresión (2.67) no tiene el significado común de una integral definida, sino que la integral, así como la función $\delta(t)$, están definidas por el número $\phi(0)$ asignado a la función $\phi(t)$.

Con la interpretación anterior, resulta que $\delta(t)$ se puede tratar como si fuera una función ordinaria, excepto que nunca se hablará del valor de $\delta(t)$, pero sí de los valores de las integrales en que aparece $\delta(t)$.

PROBLEMA 2.20 Probar las siguientes relaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t + t_0) dt = \phi(t_0), \quad (2.68)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0). \quad (2.69)$$

Solución: con un cambio formal de la variable independiente, es decir, $t - t_0 = \tau$, de donde $t = t_0 + \tau$, y $dt = d\tau$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi(\tau + t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi(t + t_0) d\tau;$$

entonces, mediante (2.67), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi(t + t_0) d\tau = \phi(t + t_0) \Big|_{t=0} = \phi(t_0).$$

Análogamente, con $at = \tau$, $t = \tau/a$, $dt = \frac{1}{a} d\tau$, si $a > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{0}{a}\right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{|a|} \phi(0); \end{aligned}$$

si $a < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-\infty} \delta(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \phi(0). \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.21 Considerar una función $g(t)$ continua en $t = t_0$. Si $a < b$ demostrar que

$$\int_a^b \delta(t - t_0) g(t) dt = \begin{cases} g(t_0) & \text{para } a < t_0 < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a, \end{cases} \quad (2.70)$$

Solución: aquí la expresión

$$\int_a^b \delta(t - t_0) g(t) dt$$

se puede interpretar como sigue: si se selecciona la función de prueba $\phi(t)$ tal que

$$\phi(t) = \begin{cases} g(t) & \text{para } a < t < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a, \end{cases} \quad (2.71)$$

entonces, por (2.68), se tiene

$$\int_a^b \delta(t - t_0) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0) = \begin{cases} g(t_0) & \text{para } a < t_0 < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a. \end{cases}$$

PROBLEMA 2.22 Si $a < b$ demostrar que

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & \text{para } a < t_0 < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a. \end{cases} \quad (2.72)$$

Solución: aquí de nuevo la interpretación de la expresión

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt$$

es como sigue: si se selecciona la función de prueba $\phi(t)$ tal que

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } a < t < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a; \end{cases} \quad (2.73)$$

entonces, por (2.68), se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt \\ &= \phi(t_0) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{para } a < t_0 < b \\ 0 & \text{para } b < t_0 < a. \end{cases} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.23 Demostrar que

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t), \quad (2.74)$$

donde $f(t)$ es continua en $t = 0$. Por tanto, demostrar que

$$t \delta(t) = 0, \quad (2.75)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad (2.76)$$

$$\delta(-t) = \delta(t). \quad (2.77)$$

Solución: si $f(t)$ es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \delta(t)] \phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f(t) \phi(t)] dt \\ &= f(0) \phi(0) \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(0) \delta(t)] \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Puesto que $\phi(t)$ es una función de prueba arbitraria, se concluye que $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$. Según este resultado es obvio que

$$t \delta(t) = 0.$$

Por (2.69), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t) \phi(t) dt.$$

Por tanto,

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t).$$

Haciendo $a = -1$ en el anterior resultado,

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t),$$

lo cual muestra que $\delta(t)$ es una función par.

2.4a Derivadas de la función δ

La derivada $\delta'(t)$ de $\delta(t)$ está definida por la relación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi'(t) dt = -\phi'(0), \quad (2.79)$$

donde

$$\delta'(t) = \frac{d \delta(t)}{dt}, \quad \phi'(0) = \left. \frac{d \phi}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.80)$$

La ecuación (2.79) muestra que $\delta'(t) = d \delta(t)/dt$ es una función generalizada que asigna el valor $-\phi'(0)$ a la función de prueba $\phi(t)$.

La derivada enésima de la función δ

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$$

se puede definir análogamente mediante la aplicación de (2.79); es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0). \quad (2.81)$$

donde

$$\phi^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$$

PROBLEMA 2.24 Demostrar que la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt \quad (2.82)$$

es consecuente con la definición ordinaria de una derivada de $f(t)$ si $f(t)$ es una función ordinaria cuya primera derivada es continua.

Solución: considerar la integral dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt.$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = f(t) \phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt. \quad (2.83)$$

Si se recuerda que la función de prueba $\phi(t)$ es tal que se anula fuera de algún intervalo, es decir, es cero en $t = \pm\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt.$$

Se debe notar que la derivada $f'(t)$ de una función generalizada arbitraria está definida por (2.82).

PROBLEMA 2.25 Si $f(t)$ es una función continua y diferenciable, demostrar que la regla del producto

$$[f(t) \delta(t)]' = f(t) \delta'(t) + f'(t) \delta(t) \quad (2.84)$$

se sigue cumpliendo.

Solución: utilizando la expresión (2.82), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \delta(t)]' \phi(t) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \delta(t)] \phi'(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \{f(t) \phi'(t)\} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \{[f(t) \phi(t)]' - f'(t) \phi(t)\} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f(t) \phi(t)]' dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f'(t) \phi(t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) [f(t) \phi(t)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) f'(t)] \phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(t) f(t) + \delta(t) f'(t)] \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Por tanto,

$$[f(t) \delta(t)]' = f(t) \delta'(t) + f'(t) \delta(t).$$

PROBLEMA 2.26 Demostrar que

$$f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t). \quad (2.86)$$

Solución: por (2.84), se tiene

$$f(t) \delta'(t) = [f(t) \delta(t)]' - f'(t) \delta(t). \quad (2.87)$$

Puesto que según (2.74) se tiene, $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$,

$$f'(t) \delta(t) = f'(0) \delta(t),$$

$$[f(0) \delta(t)]' = f(0) \delta'(t).$$

Sustituyendo en (2.87), se obtiene

$$f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t).$$

PROBLEMA 2.27 Demostrar que la función δ es la derivada de la función $u(t)$, la cual está definida por la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt. \quad (2.88)$$

Solución: por (2.82), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi'(t) dt.$$

Pero, según (2.88), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \phi(t) dt = - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = - [\phi(\infty) - \phi(0)] = \phi(0),$$

porque $\phi(\infty) = 0$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt. \quad (2.89)$$

En consecuencia,

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t). \quad (2.90)$$

La función generalizada (o función simbólica) $u(t)$ definida por (2.88), se conoce como la *función unitaria de Heaviside o función escalonada unitaria*. Se suele definir así: (figura 2.16)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (2.91)$$

La función no está definida en $t = 0$.

Se debe notar que la derivada de la función $u(t)$ es cero cuando $t < 0$ y cuando $t > 0$.

PROBLEMA 2.28 Si $f(t)$ es una función continua por tramos con discontinuidades súbitas a_1, a_2, \dots en t_1, t_2, \dots (figura 2.17), y la función $f'(t)$ está definida en todas partes excepto en estas discontinuidades de número finito, encontrar la derivada generalizada de $f(t)$.

Solución: considerar la función

$$g(t) = f(t) - \sum_k a_k u(t - t_k), \quad (2.92)$$

donde

$$u(t - t_k) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > t_k \\ 0 & \text{para } t < t_k. \end{cases}$$

La función $g(t)$, obviamente, es continua en todas partes y su derivada es igual a $f'(t)$ excepto en un número finito de puntos.

Por tanto, la diferenciación de (2.92) da

$$g'(t) = f'(t) - \sum_k a_k \delta(t - t_k) \quad (2.93)$$

Teniendo en cuenta (2.90), por (2.93), se tiene

$$f'(t) = g'(t) + \sum_k a_k \delta(t - t_k). \quad (2.94)$$

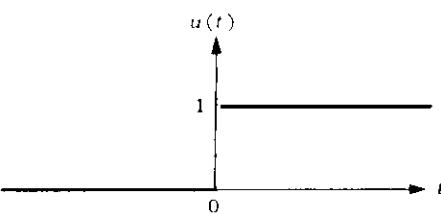


Figura 2.16 La función unitaria de Heaviside o función escalonada unitaria.

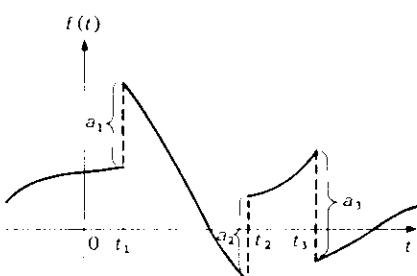


Figura 2.17 Una función continua por tramos con discontinuidades súbitas.

La ecuación (2.94) demuestra que la derivada generalizada de una función continua por tramos y diferenciable que tiene discontinuidades súbitas es la derivada ordinaria, donde ella exista, más la suma de las funciones δ en las discontinuidades multiplicada por la magnitud de los cambios súbitos.

2.5 SERIES DE FOURIER DE LAS DERIVADAS DE FUNCIONES PERIODICAS DISCONTINUAS

Se dice que la sucesión de una función generalizada $f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ converge a la función generalizada $f(t)$, si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t) dt \quad (2.95)$$

para toda función de prueba $\phi(t)$.

Análogamente, una serie

$$\sum_{n=1}^k f_n(t)$$

de funciones generalizadas que converge a la función generalizada $f(t)$ se puede diferenciar término por término. En otros términos,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^k f'_n(t). \quad (2.96)$$

En este caso se dice que la serie converge en el sentido de funciones generalizadas, aunque en el sentido ordinario, la derivada de una serie convergente de funciones diferenciables puede, en general, no converger. Este punto se ilustra en el problema 2.29.

En el problema 1.20 se demostró que si $f(t)$ es periódica y continua y está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (2.97)$$

entonces $f'(t)$ también es periódica y se puede obtener diferenciando término por término, es decir

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\omega_0 a_n \sin n\omega_0 t + n\omega_0 b_n \cos n\omega_0 t). \quad (2.98)$$

Con el concepto de la función δ y las derivadas generalizadas, se puede ahora investigar las series de Fourier para las derivadas de formas de onda con un número finito de discontinuidades en un período.

PROBLEMA 2.29 Encontrar la serie de Fourier para la derivada de la forma de onda de la figura 2.18.

Solución: de acuerdo con el resultado del problema 2.15, la serie de Fourier de $f(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n2\pi}{T} t. \end{aligned} \quad (2.99)$$

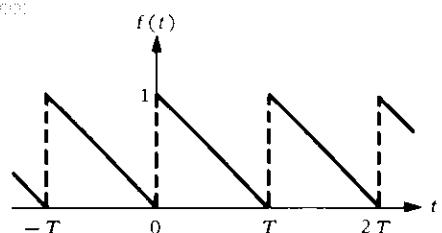


Figura 2.18 La forma de onda del problema 2.29.

Diferenciando término por término, se tiene

$$f'(t) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n2\pi}{T} t. \quad (2.100)$$

Por otra parte, según (2.94), se tiene

$$f'(t) = -\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.101)$$

Se observa que la serie de Fourier (2.100) no es una serie convergente en el sentido ordinario, pero se puede decir que la serie (2.100) converge a la función generalizada (2.101) en el sentido de una función generalizada.

Igualando (2.100) y (2.101) se obtiene un resultado interesante, a saber, la expresión en serie de Fourier de un tren periódico de impulsos unitarios (figura 2.19), es decir

$$-\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n2\pi}{T} t. \quad (2.102)$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t, \quad (2.103)$$

$$\text{donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

La ecuación (2.103) muestra que el tren periódico de impulsos unitarios consiste de un término constante $1/T$ y una suma de armónicos todos con la misma amplitud de $2/T$.

El tren periódico de impulsos unitarios es una función muy útil y por consiguiente es conveniente denotar esta función mediante un símbolo especial $\delta_T(t)$. De este modo,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.104)$$

PROBLEMA 2.30 Deducir la serie de Fourier para un tren periódico de impulsos unitarios $\delta_T(t)$ mediante la aplicación formal de (1.27) y (1.28).

Solución: suponer que

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t). \quad (2.105)$$

Aplicando (1.27) y (1.28), mediante (2.70) y (2.72), se tiene

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}, \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{2}{T}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

Figura 2.19 Un tren periódico de impulsos unitarios.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left. \sin n\omega_0 t \right|_{t=0} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

De donde,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.109}$$

2.6 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR DIFERENCIACION

El uso de la función δ junto con la diferenciación, puede facilitar el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier para ciertas funciones.

PROBLEMA 2.31 Encontrar la serie de Fourier para la forma de onda de la figura 2.20(a), hallando la primera derivada de $f(t)$.

Solución: sea

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \tag{2.110}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \sin n\omega_0 t), \tag{2.111}$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Diferenciando (2.110) término por término e igualando con (2.111), se obtiene

$$\alpha_n = n\omega_0 b_n, \quad \beta_n = -n\omega_0 a_n. \tag{2.112}$$

De donde,

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n\omega_0}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n\omega_0}. \tag{2.113}$$

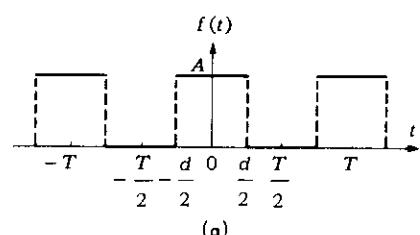
Puesto que $f'(t)$ es una función generalizada impar [figura 2.20(b)], se tiene

$$\alpha_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.114}$$

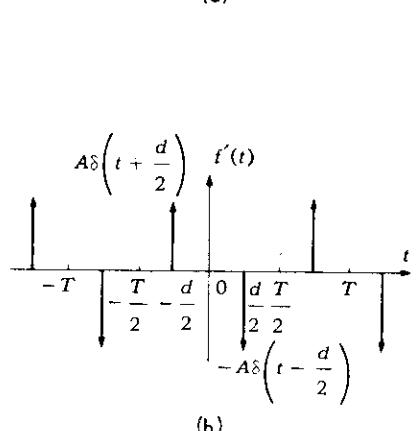
$$\beta_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f'(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left[-A \delta\left(t - \frac{1}{2}d\right) \right] \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$= -\frac{4A}{T} \left. \sin n\omega_0 t \right|_{t=\frac{1}{2}d}$$

$$= -\frac{4A}{T} \sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right). \tag{2.115}$$



(a)



(b)

Figura 2.20 (a) La forma de onda del problema 2.31. (b) La primera derivada de la forma de onda mostrada en la figura 2.20(a).

De acuerdo con esto, por (2.113), se tiene

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n\omega_0} = \frac{4A}{n\omega_0 T} \sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) = \frac{2Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} = \frac{2Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}, \quad (2.116)$$

$$b_n = 0. \quad (2.117)$$

Puesto que el término constante $\frac{1}{2} a_0$ se anula en el proceso de diferenciación, teniendo en cuenta (1.23),

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{Ad}{T}. \quad (2.118)$$

Por consiguiente,

$$f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2Ad}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right). \quad (2.119)$$

PROBLEMA 2.32 Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios (2.103), resolver nuevamente el problema 2.31.

Solución: la derivada $f'(t)$ de la figura 2.20(b) se puede expresar así

$$f'(t) = A \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{1}{2}d - nT\right) \right] - A \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{2}d - nT\right) \right]. \quad (2.120)$$

Por (2.103), se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{1}{2}d - nT\right) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[n\omega_0\left(t + \frac{1}{2}d\right)\right], \quad (2.121)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{2}d - nT\right) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[n\omega_0\left(t - \frac{1}{2}d\right)\right], \quad (2.122)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Sustituyendo (2.121) y (2.122) en (2.120), y utilizando la identidad trigonométrica $\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(n\omega_0 t + \frac{n\pi d}{T}\right) - \cos\left(n\omega_0 t - \frac{n\pi d}{T}\right) \right] \\ &= -\frac{4A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \sin(n\omega_0 t). \end{aligned} \quad (2.123)$$

De donde,

$$\beta_n = -\frac{4A}{T} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right), \quad \alpha_n = 0. \quad (2.124)$$

De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{\beta_n}{n\omega_0} = \frac{4A}{n\omega_0 T} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi d}{T} \right) \\
 &= \frac{2A}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi d}{T} \right) \\
 &= \frac{2Ad}{T} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi d}{T} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{T} \right)} \quad (2.125)
 \end{aligned}$$

$$b_n = 0. \quad (2.126)$$

PROBLEMA 2.33 Encontrar la serie de Fourier para la forma de onda de la figura 2.21(a) por diferenciación.

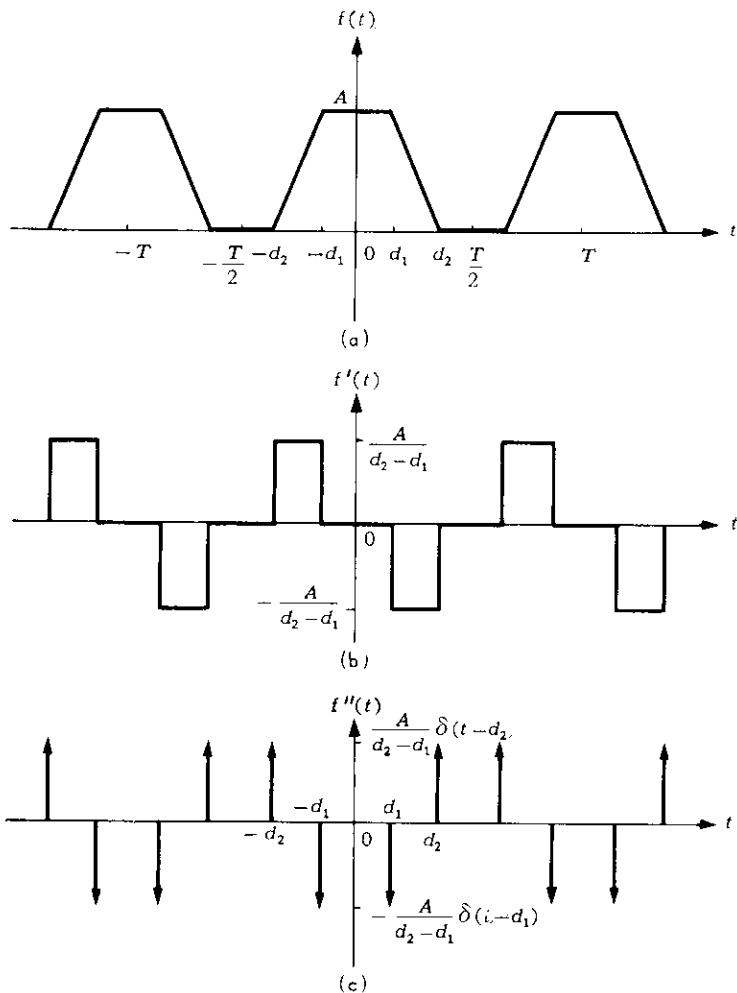


Figura 2.21 (a) La forma de onda del problema 2.33. (b) La primera derivada de la forma de onda de la figura 2.21(a). (c) Una función par generalizada $f''(t)$ de $f(t)$, de la figura 2.21(a).

Solución: si $f(t)$ se desarrolla en una serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \quad (2.127)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\omega_0 a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + n\omega_0 b_n \cos n\omega_0 t), \quad (2.128)$$

$$f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \cos n\omega_0 t - (n\omega_0)^2 b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t]. \quad (2.129)$$

[Ver la figura 2.21(b)]. Ahora bien, según la figura 2.21(c), $f''(t)$ es una función par generalizada y

$$f''(t) = \frac{A}{d_2 - d_1} [-\delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)], \quad 0 < t < \frac{1}{2} T. \quad (2.130)$$

Por tanto,

$$-(n\omega_0)^2 b_n = 0, \quad b_n = 0, \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} -(n\omega_0)^2 a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f''(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4A}{T(d_2 - d_1)} \int_0^{T/2} [-\delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)] \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4A}{T(d_2 - d_1)} (\cos n\omega_0 d_1 - \cos n\omega_0 d_2), \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4A}{(n\omega_0)^2 T(d_2 - d_1)} (\cos n\omega_0 d_1 - \cos n\omega_0 d_2) \\ &= \frac{AT}{n^2 \pi^2 (d_2 - d_1)} (\cos n\omega_0 d_1 - \cos n\omega_0 d_2). \end{aligned} \quad (2.133)$$

El término constante $\frac{1}{2} a_0$ se puede obtener así:

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{A}{T} (d_1 + d_2). \quad (2.134)$$

Por consiguiente,

$$f(t) = \frac{A}{T} (d_1 + d_2) + \frac{AT}{\pi^2 (d_2 - d_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos n\omega_0 d_1 - \cos n\omega_0 d_2) \cos n\omega_0 t. \quad (2.135)$$

2.7 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 2.34 Probar que la función cero es la única función que es simultáneamente par e impar.

PROBLEMA 2.35 Si la función $f(t)$ es impar, probar que $|f(t)|$ es par.

PROBLEMA 2.36 Sea la función $f(t)$ diferenciable en el intervalo $(-a, a)$. Demostrar que su derivada $f'(t)$ es impar cuando $f(t)$ es par, y par cuando $f(t)$ es impar.

PROBLEMA 2.37 Encontrar las componentes par e impar de las siguientes funciones:

$$(a) e^t, \quad (b) \frac{t \pm 1}{t - 1}, \quad (c) t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t.$$

Respuesta: (a) $f_e(t) = \cosh t, \quad f_o(t) = \operatorname{senh} t,$ (b) $f_e(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad f_o(t) = \frac{2t}{t^2 - 1},$ (c) $f_e(t) = t \operatorname{sen} t, \quad f_o(t) = -\operatorname{sen} 2t.$

PROBLEMA 2.38 Encontrar la serie de Fourier de la función $f(t)$ definida por $f(t) = |t|$ para $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t).$ (Ver figura 2.22.)

$$\text{Respuesta: } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t).$$

PROBLEMA 2.39 Sea $f(t)$ una función periódica con período T definida en $(-T/2, T/2)$, cuya serie de Fourier es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Si $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, demostrar que las series de Fourier de $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son, respectivamente:

$$f_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad \text{y} \quad f_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

PROBLEMA 2.40 Utilizar el resultado del problema 2.39 para encontrar la expansión en serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones, definidas en $(-\pi, \pi)$ con período 2π : (a) $\cosh t,$ (b) $\operatorname{senh} t.$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 1.32.]

$$\text{Respuesta: (a) } \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt \right],$$

$$(b) \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2} n \operatorname{sen} nt.$$

PROBLEMA 2.41 Demostrar que el valor de la media cuadrática de $f(t)$ es igual a la suma de los valores de las medias cuadráticas de sus componentes pares e impares o sea,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f_e(t)]^2 dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f_o(t)]^2 dt.$$

PROBLEMA 2.42 Sea la función $f(t)$ periódica con período $T.$ Si $f(\frac{1}{2}T - t) = f(t),$ determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier a_n y b_n de $f(t).$ Ilustrar $f(t)$ gráficamente.

Respuesta: $a_{2n+1} = 0, \quad b_{2n} = 0.$

PROBLEMA 2.43 Si la función periódica $f(t)$ con período T satisface $f(\frac{1}{2}T - t) = -f(t),$ determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier a_n y b_n de $f(t).$ Ilustrar $f(t)$ gráficamente.

Respuesta: $a_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = 0.$

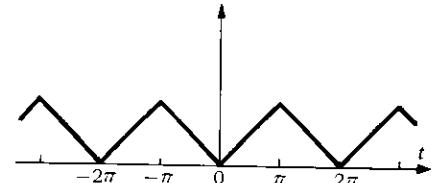


Figura 2.22 La función $f(t)$ del problema 2.38.

PROBLEMA 2.44 Si la expansión en serie de Fourier de $f(t)$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$ es

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \quad \omega_0 = 2\pi/T,$$

demonstrar que la serie de Fourier de cosenos y la de senos de $f(t)$ en el intervalo $(0, T/2)$ son, respectivamente:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos n\omega_0 t \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

Suponer que $f(t) = 0$ para $-T/2 < t < 0$.

PROBLEMA 2.45 Representar las siguientes funciones por una serie de Fourier de cosenos y trazar una gráfica de la correspondiente extensión periódica de $f(t)$:

$$(a) f(t) = t, \quad 0 < t < \pi, \quad (b) f(t) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} t, \quad 0 < t < l.$$

Respuesta: (a) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1)t$,

$$(b) \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cos \left(\frac{2\pi}{l} t \right) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos \left(\frac{4\pi}{l} t \right) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos \left(\frac{6\pi}{l} t \right) + \dots \right].$$

PROBLEMA 2.46 Representar las siguientes funciones por una serie de Fourier de senos y trazar una gráfica de la correspondiente extensión periódica de $f(t)$:

$$(a) f(t) = \cos t, \quad 0 < t < \pi, \quad (b) \pi - t, \quad 0 < t < \pi.$$

Respuesta: (a) $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen} 2nt$, (b) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt$.

PROBLEMA 2.47 Encontrar la serie de Fourier de cosenos y la de senos de

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4} \pi t && \text{para } 0 < t < \frac{1}{2} \pi \\ &= \frac{1}{4} \pi t (\pi - t) && \text{para } \frac{1}{2} \pi < t < \pi. \end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{\pi^2}{16} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} (2n-1)t$.

PROBLEMA 2.48 Sea $\phi_n(t) = \sqrt{(2/\pi)} \operatorname{sen}(n\pi/t)t$, donde $n = 1, 2, \dots$. Demostrar que las funciones $\{\phi_n(t)\}$, forman un conjunto ortonormal en el intervalo $(0, \tau)$.

PROBLEMA 2.49 Suponer a $f(t)$ definida en el intervalo $(0, \tau)$. Demostrar que la serie de Fourier de $f(t)$ con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n(t)\}$ del problema 2.48, es la serie de Fourier en senos de $f(t)$, en el intervalo $(0, \tau)$.
[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 1.45.]

PROBLEMA 2.50 Demostrar que

$$\begin{aligned} (a) \quad f(t) \delta(t - t_0) &= f(t_0) \delta(t - t_0), & (b) \quad t \delta'(t) &= -\delta(t), \\ (c) \quad \delta'(-t) &= -\delta'(t), & (d) \quad \delta^n(-t) &= (-1)^n \delta^n(t). \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.51 Demostrar que $\delta[f(t)] = \sum_{t_n} \frac{1}{|f'(t_n)|} \delta(t - t_n)$, donde t_n son los valores para los cuales $f(t)$ se hace cero.
 [Sugerencia: suponer $f(t) = \tau$ y formar $\psi(\tau) = \phi(t)/|f'(t)|$.]

PROBLEMA 2.52 Demostrar que

$$(a) \delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{\delta(t - a) + \delta(t + a)\}, \quad (b) \delta(\operatorname{sen} t) = \delta_{\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi).$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 2.51.]

PROBLEMA 2.53 Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$ definida por $f(t) = t$, para $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Respuesta: ver el problema 1.30.

PROBLEMA 2.54 Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios (2.103) y la diferenciación, encontrar los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$ definida por $f(t) = e^t$ para $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Respuesta: ver el problema 1.32.

PROBLEMA 2.55 Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la onda sinusoide rectificada, $f(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$.

Respuesta: ver el problema 1.33.

PROBLEMA 2.56 Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la función cuya forma de onda se muestra en la figura 1.3.

Respuesta: la ecuación (1.40).

PROBLEMA 2.57 Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la semionda sinusoide rectificada, de la figura 1.4.

Respuesta: la ecuación (1.49).

PROBLEMA 2.58 Utilizar el resultado del problema 2.55 para deducir la serie de Fourier de la semionda sinusoide rectificada, de la figura 1.4.

[Sugerencia: observar que $f(t)$ se puede expresar como $f(t) = \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{2} |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$.]

PROBLEMA 2.59 Sea $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$, donde $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_e(t) f_e(t - \tau) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_o(t) f_o(t - \tau) dt.$$

PROBLEMA 2.60 Demostrar que si $f(t)$ es una función continua y diferenciable, entonces

$$f(t) \delta'(t - t_o) = f(t_o) \delta'(t - t_o) - f'(t_o) \delta(t - t_o).$$

3

CAPITULO

ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA

3.1 INTRODUCCION

La representación de una función periódica como una serie de Fourier, implica que la especificación de sus coeficientes determina unívocamente la función. En este capítulo se explorará más aún el uso de los coeficientes de Fourier en el estudio de funciones periódicas, y se introducirá el concepto de espectros de frecuencia de señales periódicas.

3.2 FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponentiales complejos $e^{\pm jn\omega_0 t}$.

Si se considera la serie de Fourier de una función periódica $f(t)$, como

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (3.1)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, el seno y el coseno se pueden expresar en términos de los exponentiales como

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}), \quad (3.2)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}). \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.1), se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right]. \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que $1/j = -j$, (3.4) se puede expresar como

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right]. \quad (3.5)$$

Si se hace

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n), \quad (3.6)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) se denomina forma compleja de la serie de Fourier de $f(t)$, o serie compleja de Fourier de $f(t)$.

Los coeficientes c_n se pueden evaluar fácilmente en términos de a_n y b_n , los cuales ya conocemos; en efecto,

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] dt \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt. \tag{3.10}$$

Si $f(t)$ es real, entonces

$$c_{-n} = c_n^*, \tag{3.11}$$

donde * indica el conjugado complejo.

Las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10) se pueden combinar en una sola fórmula; es decir,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.12}$$

Puesto que $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ es periódica con período T , y considerando a (1.10), se tiene que c_n también se puede hallar a partir de la fórmula

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \tag{3.13}$$

Si ahora se tiene

$$c_n |c_n| e^{j\phi_n}, \quad c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}, \tag{3.14}$$

entonces

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \tag{3.15}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3.16)$$

para todos los valores de n , excepto $n = 0$. En este caso c_0 es real y

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0. \quad (3.17)$$

PROBLEMA 3.1 Encontrar la serie compleja de Fourier, para la función diente de sierra que se muestra en la figura 3.1, definida por

$$f(t) = \frac{A}{T} t, \quad 0 < t < T, \quad f(t + T) = f(t). \quad (3.18)$$

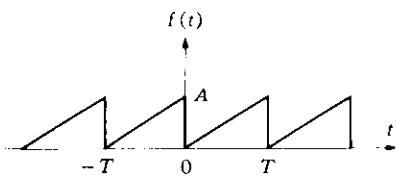


Figura 3.1 La función diente de sierra.

Solución: la representación de $f(t)$ en serie compleja de Fourier está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.19)$$

Los coeficientes c_n se pueden encontrar a partir de (3.13); de esta manera,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-j n \omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T^2} \left(\frac{t e^{-j n \omega_0 t}}{-j n \omega_0} \Big|_0^T + \frac{1}{j n \omega_0} \int_0^T e^{-j n \omega_0 t} dt \right) \\ &= \frac{A}{T^2} \left[\frac{T e^{-j n 2\pi}}{-j n \omega_0} - \frac{1}{(j n \omega_0)^2} (e^{-j n 2\pi} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Puesto que $e^{-j n 2\pi} = 1$,

$$c_n = j \frac{A}{n \omega_0 T} = j \frac{A}{2\pi n} = \frac{A}{2\pi n} e^{j\frac{n}{2}}. \quad (3.21)$$

Ciertamente este resultado no tiene significado para $n = 0$; por consiguiente, para $n = 0$ se tiene, a partir de (3.8),

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{1}{2} A. \quad (3.22)$$

De donde,

$$f(t) = \frac{A}{2} + j \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn\omega_0 t} \quad (3.23a)$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (3.23b)$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ significa que la sumatoria sólo incluye enteros diferentes de cero.

PROBLEMA 3.2 Reducir el resultado del problema 3.1 a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

Solución: puesto que según (3.6),

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2} (a_n + j b_n),$$

se tiene

$$a_0 = 2 c_0, \quad (3.24)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = c_n + c_n^* = 2 \operatorname{Re}[c_n], \quad (3.25)$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - c_n^*) = -2 \operatorname{Im}[c_n], \quad (3.26)$$

donde Re y Im denotan “la parte real de” y “la parte imaginaria de”, respectivamente.

Entonces, por (3.21) y (3.22), se tiene

$$a_0 = A, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{A}{n\pi}. \quad (3.27)$$

De donde,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

PROBLEMA 3.3 Encontrar la serie de Fourier en forma compleja de la función periódica sinusoide rectificada $f(t)$ que se muestra en la figura 3.2, definida por:

$$f(t) = A \sin \pi t, \quad 0 < t < 1, \quad f(t+T) = f(t), \quad T = 1. \quad (3.29)$$

Solución: puesto que el período $T = 1$, ω_0 está dado por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi; \quad (3.30)$$

por consiguiente, la serie compleja de Fourier está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt}. \quad (3.31)$$

A partir de (3.13), los coeficientes c_n son:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j2\pi nt} dt \\ &= \int_0^1 A \sin \pi t e^{-j2\pi nt} dt \\ &= A \int_0^1 \frac{1}{2j} (e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}) e^{-j2\pi nt} dt \\ &= \frac{A}{2j} \int_0^1 [e^{-j\pi(2n-1)t} - e^{-j\pi(2n+1)t}] dt \\ &= \frac{A}{2j} \left[\frac{e^{-j\pi(2n-1)t}}{-j\pi(2n-1)} - \frac{e^{-j\pi(2n+1)t}}{-j\pi(2n+1)} \right] \Big|_0^1. \end{aligned}$$

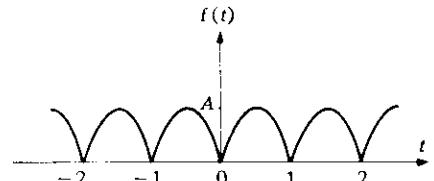


Figura 3.2 La función periódica sinusoide rectificada.

Dado que $e^{\pm j2\pi n} = 1$ y $e^{\pm j\pi} = e^{\mp j\pi}$,

$$c_n = \frac{-2A}{\pi(4n^2 - 1)}. \quad (3.32)$$

Se puede utilizar (3.8) para verificar este resultado cuando $n = 0$; de este modo,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &= \frac{2A}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De donde,

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi nt}. \quad (3.34)$$

PROBLEMA 3.4 Reducir el resultado del problema 3.3 a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

Solución: la ecuación (3.34) se puede expresar también como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{j2\pi t} + \frac{1}{15} e^{j4\pi t} + \frac{1}{35} e^{j6\pi t} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{-j2\pi t} + \frac{1}{15} e^{-j4\pi t} + \frac{1}{35} e^{-j6\pi t} + \dots \right) \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{2} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{15} \frac{1}{2} (e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{35} \frac{1}{2} (e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) + \dots \right] \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\pi t + \frac{1}{15} \cos 4\pi t + \frac{1}{35} \cos 6\pi t + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

O utilizando (3.25) y (3.26), se tiene

$$a_n = 2 \operatorname{Re}[c_n] = \frac{4A}{\pi(4n^2 - 1)}, \quad (3.36)$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im}[c_n] = 0. \quad (3.37)$$

De donde,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cos n2\pi t \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\pi t + \frac{1}{15} \cos 4\pi t + \frac{1}{35} \cos 6\pi t + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.3 ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS DE LAS SERIES DE FOURIER

La ortogonalidad de las funciones seno y coseno ha sido demostrada en la sección 1.3; sin embargo, para funciones que toman valores complejos, el concepto de ortogonalidad debe ser modificado ligeramente. El conjunto de funciones complejas $f(t)$ se denomina *ortogonal* en el intervalo $a < t < b$, si

$$\int_a^b f_n(t) f_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ c_n & \text{para } n = m \end{cases}, \quad (3.39)$$

donde $f_m^*(t)$ es el conjugado complejo de $f_m(t)$. Por ejemplo, si

$$f_m(t) = e^{im\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t + j \sin m\omega_0 t,$$

entonces su conjugado complejo es

$$f_m^*(t) = e^{-im\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t - j \sin m\omega_0 t.$$

PROBLEMA 3.5 Demostrar que el conjunto de funciones complejas de la serie de Fourier $\{e^{in\omega_0 t}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, obedece la condición de ortogonalidad para $n \neq m$ en el intervalo $-\frac{1}{2} T < t < \frac{1}{2} T$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Solución: puesto que $e^{im\omega_0 t} \Big|_{m=0} = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} \cdot 1 dt &= \frac{1}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{jn\omega_0} (e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}) \\ &= 0 \quad \text{para } n \neq 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} (e^{im\omega_0 t})^* dt &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} (e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}) \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} [(-1)^{n-m} - (-1)^{n-m}] \\ &= 0 \quad \text{para } n \neq m. \end{aligned} \quad (3.41)$$

PROBLEMA 3.6 Utilizando la propiedad de ortogonalidad del conjunto de funciones complejas $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ de la serie de Fourier, determinar los coeficientes de la serie compleja de Fourier.

Solución: sea $f(t)$ una función periódica con período T , y sea la serie de Fourier en forma compleja, correspondiente a esta función la dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.42)$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{-jm\omega_0 t}$, e integrando en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\right]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

En razón de (3.41), la cantidad en paréntesis angulares es cero excepto cuando $n = m$; por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt &= c_m \int_{-T/2}^{T/2} e^{j \cdot 0} dt \\ &= c_m \int_{-T/2}^{T/2} dt \\ &= c_m T. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De donde, cambiando m por n ,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.45)$$

3.4 ESPECTROS DE FRECUENCIA COMPLEJA

La gráfica de la magnitud de los coeficientes complejos c_n en la serie (3.7), versus la frecuencia ω (frecuencia angular), se denomina *espectro de amplitud* de la función periódica $f(t)$. La gráfica del ángulo de fase ϕ_n de c_n [ver 3.14] versus ω se denomina *espectro de fase* de $f(t)$. Puesto que el índice n toma solamente valores enteros, los espectros de amplitud y fase no son curvas continuas sino que aparecen en la variable discreta $n\omega_0$; por consiguiente, se les denomina como *espectros de frecuencia discreta* o *espectros de líneas*. La representación de los coeficientes complejos c_n versus la variable discreta $n\omega_0$, especifica la función periódica $f(t)$ en el dominio de la frecuencia, así como $f(t)$ versus t especifica la función en el dominio del tiempo.

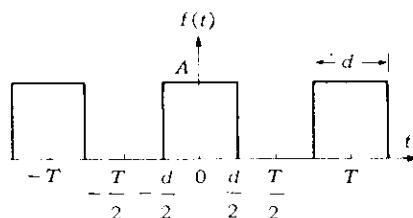


Figura 3.3 Un tren de pulsos rectangulares idénticos.

PROBLEMA 3.7 Encontrar los espectros de frecuencia para la función periódica $f(t)$, que se muestra en la figura 3.3, la cual consta de un tren de pulsos rectangulares idénticos, de magnitud A y duración d .

Solución: la función $f(t)$ se puede expresar en un período como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d, \quad \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T, \end{cases} \quad (3.46)$$

Entonces, por (3.12), con $\omega_0 = 2\pi/T$, se tiene

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \left[\frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \right]_{-d/2}^{d/2} \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\
 &= \frac{Ad}{T} \frac{1}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 d/2} + e^{-jn\omega_0 d/2}) \\
 &\approx \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}. \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

Pero $n\omega_0 d/2 = n\pi d/T$; de donde,

$$c_n = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}. \tag{3.48}$$

Es obvio, según (3.47) o (3.48), que c_n es real y por consiguiente el espectro de fase es cero. El espectro de amplitud se obtiene dibujando (3.47) o (3.48) versus la variable discreta $n\omega_0$. La ecuación (3.47) tiene valores solamente para la frecuencia discreta $n\omega_0$; es decir, el espectro de frecuencia es una función discreta y existe solamente cuando

$$\omega = 0, \quad \frac{\pm 2\pi}{T}, \quad \frac{\pm 4\pi}{T}, \quad \dots, \text{ etc.}$$

Se debe considerar el espectro para algunos valores específicos de d t T ; para $d = 1/20$ y $T = 1/4$ de segundo,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 8\pi.$$

Por consiguiente, el espectro de amplitud existe cuando

$$\omega = 0, \quad \pm 8\pi, \quad \pm 16\pi, \quad \dots, \text{ etc.,}$$

y se muestra en la figura 3.4(a).

Puesto que $d/T = 1/5$, el espectro de amplitud se hace cero en el valor de $n\omega_0$, para el cual

$$n\omega_0 \frac{d}{2} = m\pi \quad \text{o} \quad n\pi \frac{d}{T} = n\pi \left(\frac{1}{5}\right) = m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

es decir, cuando $\omega = \pm 5\omega_0 = \pm 40\pi, \pm 10\omega_0 = \pm 80\pi, \pm 15\omega_0 = \pm 120\pi, \dots$

En el caso siguiente se considerará $d = 1/20$ y $T = 1/2$ de segundo, y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi, \quad \frac{d}{T} = \frac{1}{10}.$$

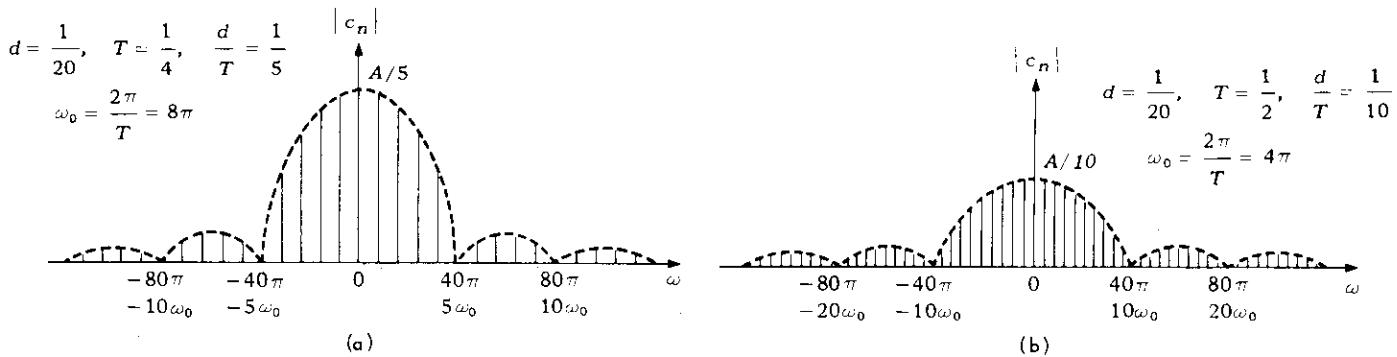


Figura 3.4 Espectros de amplitud.

Por consiguiente, el espectro de amplitud existe cuando

$$\omega = 0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \dots,$$

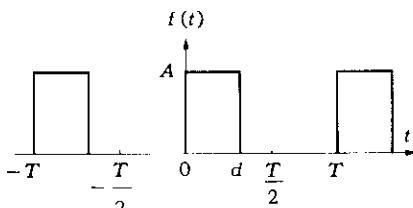
y se hace cero en el valor de $n\omega_0$ para el cual

$$n\omega_0 \frac{d}{2} = m\pi \quad \text{o} \quad n\pi \frac{d}{T} = n\pi \left(\frac{1}{10} \right) = m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

es decir, cuando $\omega = \pm 10\omega_0 = \pm 40\pi, \pm 20\omega_0 = \pm 80\pi, \pm 30\omega_0 = \pm 120\pi, \dots$.

El espectro de amplitud para este caso se muestra en la figura 3.4(b).

Se debe observar que el espectro de fase en el problema 3.7 es cero debido a la simetría de los pulsos rectangulares en la figura 3.3 alrededor de la vertical, y debido a la localización particular escogida para el origen. El siguiente ejemplo ilustrará el caso en que no hay esa simetría, lo cual se consigue desplazando el origen en $\frac{1}{2}d$.

Figura 3.5 La función $f(t)$ del problema 3.8.

PROBLEMA 3.8 Encontrar los espectros de frecuencia de la función periódica que se muestra en la figura 3.5.

Solución: por (3.13), con $\omega_0 = 2\pi/T$, se tiene

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^d \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0 d}) \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 d/2} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\
 &= \frac{Ad}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} e^{-jn\omega_0 d/2} \\
 &= |c_n| e^{j\phi_n}. \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

De donde,

$$|c_n| = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}, \quad (3.50)$$

$$\phi_n = -\frac{n\omega_0 d}{2} = -n\pi\left(\frac{d}{T}\right). \quad (3.51)$$

El espectro de amplitud es exactamente el mismo que el del problema 3.7 y no se ve afectado por el cambio de origen, pero el espectro de fase es, ahora, igual a $-n\omega_0 d/2 = -n\pi d/T$ radianes.

PROBLEMA 3.9 Demostrar que el desplazamiento en el tiempo de una función periódica no tiene efecto sobre el espectro de magnitud, pero modifica el espectro de fase en una cantidad de $-n\omega_0 \tau$ radianes para la componente de frecuencia $n\omega_0$, si el desplazamiento en el tiempo es τ .

Solución: sea $f(t)$ una función periódica con período T , y sea su serie de Fourier la dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (3.52)$$

Por (3.52), se tiene

$$\begin{aligned} f(t - \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-\tau)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 \tau} e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{jn\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde

$$c'_n = c_n e^{-jn\omega_0 \tau}. \quad (3.54)$$

Por consiguiente, si

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}, \quad (3.55)$$

entonces

$$c'_n = |c_n| e^{j(\phi_n - n\omega_0 \tau)}. \quad (3.56)$$

Por (3.55) y (3.56), es obvio que el espectro de magnitud de $f(t)$ y $f(t - \tau)$ es el mismo; sin embargo, las fases son diferentes. El desplazamiento en un tiempo τ produce un atraso de $n\omega_0 \tau$ radianes en la componente de frecuencia $n\omega_0$.

En (3.47) o (3.48), si

$$\frac{n\omega_0 d}{2} = \frac{n\pi d}{T} = x_n$$

entonces

$$c_n = \frac{Ad}{T} \frac{\sin x_n}{x_n}.$$

La envolvente de c_n es una función continua, la cual se encuentra reemplazando $n\omega_0$ por ω_0 o reemplazando x_n por x . En análisis frecuencial, la función

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

desempeña un papel importante y se conoce como la *función de muestreo*, cuya gráfica se ilustra en la figura 3.6. Se debe notar que la función tiene ceros cuando $x = \pm n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, etc.

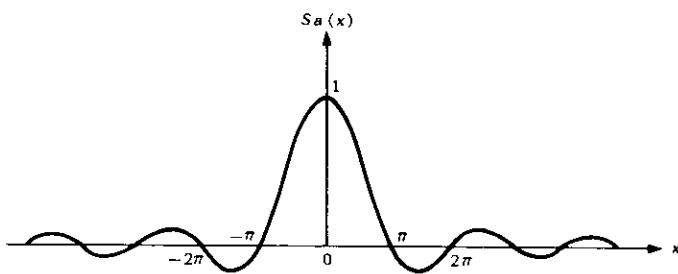


Figura 3.6 La función de muestreo.

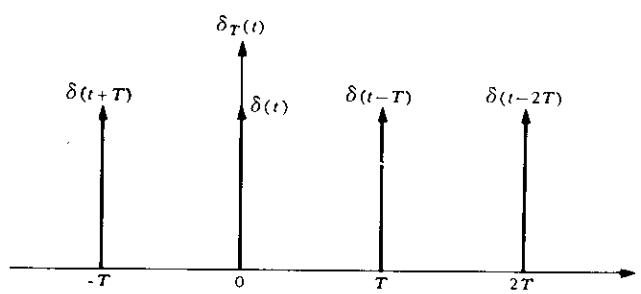


Figura 3.7 Un tren periódico de impulsos unitarios.

3.5 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS DE FOURIER POR MEDIO DE LA FUNCION δ

en la sección 2.6 se vio que la evaluación de los coeficientes de Fourier de ciertas funciones, se facilitaba notablemente utilizando la función δ ; aquí se aplicará la misma técnica para evaluar los coeficientes complejos de Fourier.

PROBLEMA 3.10 Deducir la serie compleja de Fourier, del tren periódico de impulsos unitarios de la figura 3.7.

Solución: un tren periódico $\delta_T(t)$ de impulsos unitarios se puede expresar como

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad \left. \right\} \quad (3.59)$$

$$= \delta(t), \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad \left. \right\}$$

Por consiguiente, con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, se tiene

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \left. e^{-jn\omega_0 t} \right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{T}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{T} t}. \tag{3.61}$$

PROBLEMA 3.11 Probar que (2.103) es igual a (3.61).

Solución: por (3.61), se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \\
&= \frac{1}{T} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{jn\omega_0 t} + e^{j0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \right) \\
&= \frac{1}{T} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \right] \\
&= \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \\
&= \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t \\
&= \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{2\pi}{T} t,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

que es exactamente la expresión (2.103).

PROBLEMA 3.12 Hallar los coeficientes complejos de Fourier de la función $f(t)$ que se muestra en la figura 3.8(a).

Solución: suponer que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{3.63}$$

Diferenciando término por término, como se muestra en la figura 3.8(b-c), se obtiene:

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{3.64}$$

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{3.65}$$

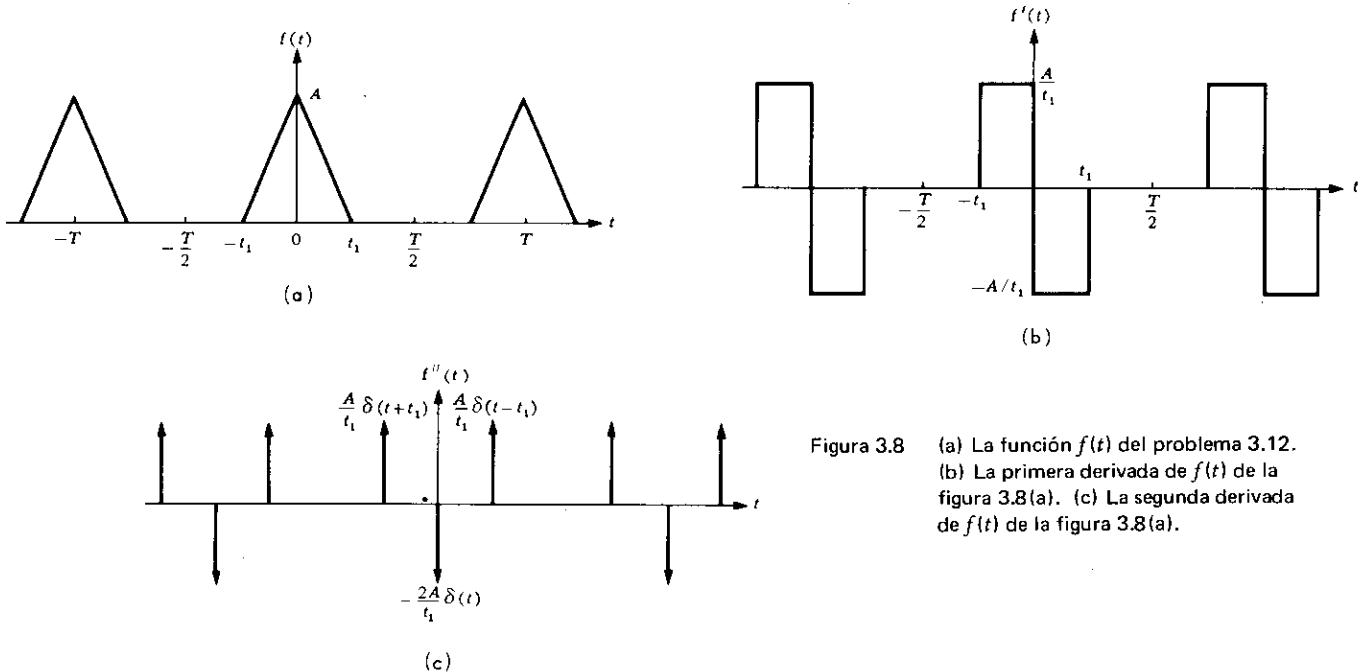


Figura 3.8 (a) La función $f(t)$ del problema 3.12.
 (b) La primera derivada de $f(t)$ de la figura 3.8(a). (c) La segunda derivada de $f(t)$ de la figura 3.8(a).

Por la figura 3.8(c), la segunda derivada de $f(t)$ en el intervalo $-T/2 < t < T/2$ es

$$f''(t) = \frac{A}{t_1} \delta(t + t_1) - \frac{2A}{t_1} \delta(t) + \frac{A}{t_1} \delta(t - t_1); \quad (3.66)$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} -(n\omega_0)^2 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{Tt_1} \int_{-T/2}^{T/2} [\delta(t + t_1) - 2\delta(t) + \delta(t - t_1)] e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{Tt_1} (e^{jn\omega_0 t_1} - 2 + e^{-jn\omega_0 t_1}) \\ &= \frac{2A}{Tt_1} (\cos n\omega_0 t_1 - 1). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$,

$$-(n\omega_0)^2 c_n = -\frac{4A}{Tt_1} \sin^2 \left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right). \quad (3.68)$$

De donde,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4A}{Tt_1} \left[\frac{\sin \left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right)}{n\omega_0} \right]^2 \\ &= A \frac{t_1}{T} \left[\frac{\sin \left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right)}{\left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right)} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

PROBLEMA 3.13 Resolver nuevamente el problema 3.12, mediante la serie compleja de Fourier (3.61) de un tren periódico de impulsos unitarios.

Solución: según la figura 3.8(c), $f''(t)$ se puede expresar así:

$$f''(t) = \frac{A}{t_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + t_1 - nT) - \frac{2A}{t_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + \frac{A}{t_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 - nT). \quad (3.70)$$

Por (3.61), se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.71)$$

Reemplazando t por $t + t_1$, y por $t - t_1$, en la anterior expresión, se obtiene respectivamente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + t_1 - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0(t+t_1)} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t_1} e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.72)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0(t-t_1)} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t_1} e^{jn\omega_0 t}. \quad (3.73)$$

Sustituyendo (3.71), (3.72) y (3.73) en (3.70), se tiene

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{A}{Tt_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{jn\omega_0 t_1} + e^{-jn\omega_0 t_1} - 2) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{2A}{Tt_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos n\omega_0 t_1 - 1) e^{jn\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Por consiguiente,

$$-(n\omega_0)^2 c_n = \frac{2A}{Tt_1} (\cos n\omega_0 t_1 - 1); \quad (3.75)$$

de donde

$$c_n = A \frac{t_1}{T} \left[\frac{\sin \left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right)}{\left(\frac{n\omega_0 t_1}{2} \right)} \right]^2 \quad (3.76)$$

3.6 CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FUNCION PERIODICA: TEOREMA DE PARSEVAL

El *contenido de potencia* de una función periódica $f(t)$ en el período T está definido como el valor cuadrático medio

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt. \quad (3.77)$$

Si se supone que la función $f(t)$ es una onda de voltaje o corriente, entonces (3.77) representa la potencia promedio entregada por $f(t)$ a una resistencia de 1Ω .

PROBLEMA 3.14 Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones periódicas que tienen el mismo período T , demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n (c_2)_{-n}, \quad (3.78)$$

donde $(c_1)_n$ y $(c_2)_n$ son los coeficientes complejos de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente.

Solución: sea

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.79)$$

donde

$$(c_1)_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.80)$$

Sea

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_2)_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.81)$$

donde

$$(c_2)_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.82)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n e^{jn\omega_0 t} \right] f_2(t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

En razón de (3.82), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-j(-n)\omega_0 t} dt \\ &= (c_2)_{-n}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

De donde,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n (c_2)_{-n}.$$

El **teorema de Parseval** establece que si $f(t)$ es una función real y periódica, con período T , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (3.85)$$

donde las letras c son los coeficientes complejos de Fourier de la función $f(t)$.

PROBLEMA 3.15 Probar el teorema de Parseval.

Solución: haciendo $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ en el resultado del problema 3.14, se tiene

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}. \quad (3.86)$$

Si $f(t)$ es real, entonces, según (3.11), se tiene

$$c_{-n} = c_n^*.$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.16 Teniendo en cuenta el resultado (3.85) del problema 3.15, deducir la identidad de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad [1.72]$$

donde la letras a y b son los coeficientes de Fourier de $f(t)$. (Cf., problema 1.17.)

Solución: por (3.6), se tiene

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n);$$

por consiguiente

$$c_0^2 = \frac{1}{4} a_0^2, \quad |c_n|^2 = \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2) = |c_{-n}|^2. \quad (3.87)$$

Sustituyendo (3.87) en (3.85), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (3.88)$$

PROBLEMA 3.17 Demostrar que el valor cuadrático medio de una función periódica $f(t)$ es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos.

Solución: por (1.12), se tiene

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t - \theta_n).$$

Para el armónico enésimo de $f(t)$,

$$f_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n).$$

El valor rcm (raíz cuadrática media) es $C_n/\sqrt{2}$; por consiguiente, el valor cuadrático medio del armónico enésimo es $(C_n/\sqrt{2})^2$.

Debido a (1.14), se tiene

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |c_n|, \quad C_0 = \frac{1}{2} a_0 = |c_0|;$$

de donde,

$$|c_n|^2 = \frac{1}{4} C_n^2, \quad |c_0|^2 = C_0^2.$$

Entonces, por (3.88), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt &= |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{C_n}{\sqrt{2}} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

La ecuación (3.89) indica que el valor cuadrático medio de una función periódica $f(t)$, es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos. Nótese que el contenido de potencia (el valor cuadrático medio) de una función periódica depende solamente de la amplitud de sus armónicos y no de sus fases.

3.7 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 3.18 Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de una función periódica par son reales, y los de una función periódica impar son imaginarios puros.

PROBLEMA 3.19 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones periódicas con período T y sus expansiones de Fourier son

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{para } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

demonstrar que la función

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

es una función periódica de igual período T , que se puede expresar como

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}.$$

PROBLEMA 3.20 Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones periódicas de período T y sus expansiones de Fourier son

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{para } \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

demostrar que la función $h(t) = f(t)g(t)$ es una función periódica de igual período T , que se puede expresar como

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t},$$

donde $\alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$.

[Sugerencia: demostrar que $\alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$ son los coeficientes de Fourier de $h(t)$.]

PROBLEMA 3.21 Si $f(t)$ es una función periódica con período T , y los coeficientes complejos de Fourier son c_n , demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de la función portadora, de amplitud modulada periódicamente $f(t) \cos m\omega_0 t$, están dados por $\frac{1}{2}(c_{n-m} + c_{n+m})$.

PROBLEMA 3.22 Si $f(t)$ es integrable en el intervalo finito $(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ y ω es real, demostrar que

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt = 0.$$

[Sugerencia: utilizar el problema 1.19.]

PROBLEMA 3.23 Encontrar la serie compleja de Fourier para la función $f(t)$ definida por $f(t) = \sin^4 t$ en el intervalo $(0, \pi)$ y $f(t + \pi) = f(t)$.

Respuesta: $\frac{1}{16} (e^{4jt} - 4e^{2jt} + 6 - 4e^{-2jt} + e^{-4jt})$.

PROBLEMA 3.24 Encontrar la serie compleja de Fourier para la función $f(t)$ definida por $f(t) = e^t$ en el intervalo $(0, 2\pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$, mediante integración directa.

Respuesta: $\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-jn} e^{jnt}$.

PROBLEMA 3.25 Mediante diferenciación, encontrar la serie compleja de Fourier para la función del problema 3.4. Nótese que $f'(t) = f(t) - (e^{2\pi} - 1) \delta_{2\pi}(t)$, donde

$$\delta_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n).$$

PROBLEMA 3.26 Reducir el resultado del problema 3.24 a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

Respuesta: $\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt) \right]$.

PROBLEMA 3.27 Demostrar que si $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$\delta'_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(t - nT) = \frac{j\omega_0^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{jn\omega_0 t} = -\frac{\omega_0^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n\omega_0 t.$$

PROBLEMA 3.28 Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la semionda sinusoide rectificada $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} A \operatorname{sen} \omega_0 t & \text{para } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{para } T/2 < t < T \end{cases}$$

y $f(t+T)=f(t)$, donde $\omega_0=2\pi/T$.

Respuesta: $c_n = \frac{1}{2\pi(1-n^2)} (1 + e^{-jn\pi})$ nótese que $c_1 = c_{-1} = -\frac{j}{4}$ y $c_{2m+1} = 0$, donde $m = 1, 2, \dots$,

PROBLEMA 3.29 Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la función diente de sierra definida por $f(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}$ para $0 < t < T$ y $f(t+T)=f(t)$.

Respuesta: $c_n = \frac{1}{j2\pi n}$, $c_0 = 0$.

PROBLEMA 3.30 Aplicar el teorema de Parseval (3.85) al resultado del problema 3.29 para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLEMA 3.31 Mediante la diferenciación, encontrar la serie compleja de Fourier para la función diente de sierra de la figura 3.1.

Respuesta: las ecuaciones (3.23a-b).

PROBLEMA 3.32 Mediante la diferenciación, encontrar la serie compleja de Fourier para la onda sinusoide rectificada de la figura 3.2.

Respuesta: la ecuación (3.34).

PROBLEMA 3.33 Demostrar que si $f(t)$ es una función periódica y real con período T , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

donde las c_n son los coeficientes complejos de Fourier de la función $f(t)$.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 3.15.]

PROBLEMA 3.34 Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones periódicas que tienen el mismo período T , demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t+\tau) f_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_1)_n (c_2)_{-n} e^{jn\omega_0\tau},$$

donde $(c_1)_n$ y $(c_2)_n$ son los coeficientes complejos de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ respectivamente, y $\omega_0 = 2\pi/T$.

PROBLEMA 3.35 Demostrar que si $f(t)$ es una función periódica y real con período T , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau) f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0\tau},$$

donde las c_n son los coeficientes complejos de Fourier de $f(t)$ y $\omega_0 = 2\pi/T$.

4

CAPITULO

INTEGRAL DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS

4.1 INTRODUCCION

Se ha visto ya que las series de Fourier constituyen un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas. Puesto que muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, es deseable desarrollar un método de análisis de Fourier que incluya funciones no periódicas. En este capítulo se estudiará la representación frecuencial de funciones no periódicas por medio de las series de Fourier.

4.2 DE LA SERIE DE FOURIER A LA INTEGRAL DE FOURIER

PROBLEMA 4.1 Si se comienza con una función periódica $f_T(t)$ de período T , y se hace que T tienda a infinito, entonces la función resultante $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t)$ deja de ser periódica. Ilustrar este proceso de límite mediante un tren de pulsos rectangulares

Solución: considerar el tren de pulsos rectangulares de la figura 4.1(a), donde

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d \\ 1 & \text{para } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$f_T(t + T) = f_T(t), \quad T > d.$$

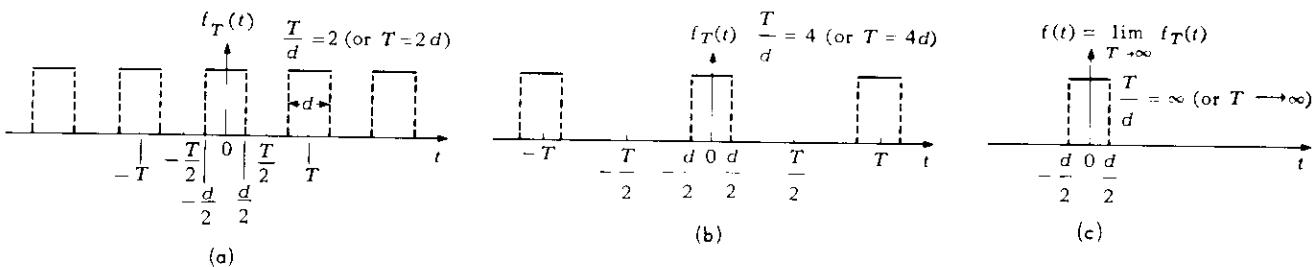


Figura 4.1 El proceso de límite a medida que T aumenta hacia infinito.

Para $T \rightarrow \infty$, se obtiene la función

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (4.2)$$

Es evidente que $f(t)$ no es una función periódica. La figura 4.1 ilustra el proceso de límite a medida que T aumenta y finalmente se hace infinito.

PROBLEMA 4.2 Utilizando el tren de pulsos rectangulares de la figura 4.1 como ejemplo, discutir los efectos de incrementar el período en el espectro de la función periódica.

Solución: el espectro de frecuencia del pulso rectangular periódico ya ha sido hallado en el problema 3.7. En la figura 3.4 se observa que cuando el espectro discreto de una función periódica con período T , se dibuja en función de la frecuencia, la distancia entre armónicos adyacentes es la frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$. De este modo, a medida que el período T aumenta, ω_0 disminuye y las líneas en el espectro se acercan unas a otras. En consecuencia, el número de líneas (armónicos) en una banda de frecuencia aumenta.

Por otra parte, según (3.48), se tiene

$$c_n = A \frac{d}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}.$$

Por tanto, si el período T aumenta, las amplitudes de todos los armónicos disminuyen.

De lo anterior se concluye que en el límite, a medida que T se acerca al infinito [figura 4.1(c)], los armónicos se encuentran infinitamente cercanos y son de amplitud infinitesimal, es decir, el espectro discreto se vuelve continuo.

PROBLEMA 4.3 Sea $f(t)$ una función periódica con período T ; cuando T se aproxima al infinito, $f(t)$ se convierte en una función no periódica; encontrar la representación de Fourier de esta función no periódica.

Solución: se comienza con la forma exponencial de la serie de Fourier (3.7), esto es,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (4.3)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jnt\omega_0} dt, \quad (4.4)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.5)$$

Sustituyendo (4.4) en (4.3), se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jnx\omega_0} dx \right] e^{jn\omega_0 t}. \quad (4.6)$$

Aquí, la variable comodín x de la integral se utiliza para evitar confusión con t . Puesto que $1/T = \omega_0 / 2\pi$, la ecuación (4.6) se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jnx\omega_0} dx \right] \omega_0 e^{jn\omega_0 t}. \quad (4.7)$$

Ahora se hace que $T \rightarrow \infty$, y así, por (4.5), ω_0 se anula. Sea $\omega_0 = \Delta\omega$; entonces, la frecuencia de cualquier "armónico" $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. En otras palabras, $n \rightarrow \infty$ a medida que $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$, tal que el producto es finito; esto es,

$$n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega.$$

de este modo, (4.7) se convierte en:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{jn\Delta\omega x} dx \right] e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega. \quad (4.8)$$

En el límite, $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, y la sumatoria se convierte en la integral sobre ω ; es decir, la función no periódica $f(t)$ se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.9)$$

Si se define

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.10)$$

entonces (4.9) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Las expresiones (4.10) y (4.11) son la representación de Fourier de la función no periódica.

Se observa que (4.11) es análoga a (4.3), y (4.10) es análoga a (4.4). La relación (4.9) se conoce como *identidad de Fourier*.

Se debe hacer hincapié en que la anterior derivación heurística de (4.10) y (4.11) o (4.9) no está fundada en una base rigurosamente matemática. Sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería, el interés primordial está en la interpretación y utilización de tales relaciones.

El teorema de la integral de Fourier afirma que si $f(t)$ es real, entonces

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega. \quad (4.12)$$

PROBLEMA 4.4 Probar el teorema de la integral de Fourier.

Solución: la relación (4.9) también se puede expresar como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega(t-x)} dx d\omega. \quad (4.13)$$

Si $f(t)$ es real, se puede igualar las partes reales en la identidad de Fourier (4.13), la cual se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega. \quad (4.14)$$

Puesto que $\cos \omega(t-x)$ es par con respecto a ω , por (2.13), se tiene

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega.$$

4.3 TRANSFORMADAS DE FOURIER

La función $F(\omega)$ definida por (4.10) se conoce como la *integral de Fourier* o *transformada de Fourier* de $f(t)$, y la operación de integración se simboliza frecuentemente por \mathcal{F} ; esto es,

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.15)$$

Análogamente \mathcal{F}^{-1} es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa o sea, obtener $f(t)$ cuando $F(\omega)$ está dado; esto es,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.16)$$

y $f(t)$ se denomina *transformada inversa de Fourier* de $F(\omega)$. Las ecuaciones (4.15) y (4.16) se conocen a menudo como *par de transformadas de Fourier*.

La condición para que exista $F(\omega)$ generalmente está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (4.17)$$

En otros términos, la integral del valor absoluto de $f(t)$ debe ser finita.

PROBLEMA 4.5 Demostrar que (4.17) es condición suficiente para que exista la transformada de Fourier de $f(t)$.

Solución: puesto que

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

de donde

$$|e^{-j\omega t}| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1,$$

$$|f(t) e^{-j\omega t}| = |f(t)|,$$

se sigue que si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt$$

es finita, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

es finita, es decir, $\mathcal{F}[f(t)]$ existe.

Se debe observar que (4.17) es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de $\mathcal{F}[f(t)]$; las funciones que no satisfacen (4.17) pueden tener transformadas de Fourier; estas funciones se estudiarán en el capítulo quinto.

La función $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ es, en general, compleja y, se tiene

$$F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)}, \quad (4.18)$$

donde $|F(\omega)|$ se denomina *espectro de magnitud* de $f(t)$, y $\phi(\omega)$, *espectro de fase* de $f(t)$.

PROBLEMA 4.6 Si $f(t)$ es real, demostrar que las partes real e imaginaria de $F(\omega)$ son:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (4.19)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt. \quad (4.20)$$

Así mismo, demostrar que $R(\omega)$ y $X(\omega)$ son funciones par e impar de ω , respectivamente; es decir,

$$R(\omega) = R(-\omega), \quad (4.21)$$

$$X(\omega) = -X(-\omega), \quad (4.22)$$

$$F(-\omega) = F^*(\omega), \quad (4.23)$$

donde $F^*(\omega)$ denota el conjugado complejo de $F(\omega)$.

Solución: si $f(t)$ es real, entonces, mediante la identidad

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t,$$

es posible expresar la relación (4.15) como sigue:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \\ &= R(\omega) + j X(\omega). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Igualando las partes real e imaginaria, se tiene

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Puesto que $f(t)$ es real, se tiene

$$R(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos (-\omega t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = R(\omega),$$

$$X(-\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin (-\omega t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = -X(\omega).$$

Por tanto, $R(\omega)$ es una función par de ω y $X(\omega)$ es una función impar de ω .

Por (4.21) y (4.22), se tiene

$$F(-\omega) = R(-\omega) + j X(-\omega) = R(\omega) - j X(\omega) = F^*(\omega).$$

PROBLEMA 4.7 Demostrar que (4.23) es una condición necesaria y suficiente para que $f(t)$ sea real.

Solución: el hecho de que (4.23), es decir, $F(-\omega) = F^*(\omega)$, es una condición necesaria para que $f(t)$ sea real, ya se demostró en el problema 4.6. Ahora se debe demostrar que (4.23) es también una condición suficiente para que $f(t)$ sea real.

Sea

$$f(t) = f_1(t) + j f_2(t), \quad (4.25)$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones reales. Entonces de (4.16), se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + j f_2(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + j X(\omega)] (\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \operatorname{sen} \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por tanto,

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega, \quad (4.27)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \operatorname{sen} \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (4.28)$$

Ahora, si $F(-\omega) = F^*(\omega)$, entonces

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad \text{y} \quad X(-\omega) = -X(\omega).$$

En consecuencia (de los resultados del problema 2.1), $R(\omega) \operatorname{sen} \omega t$ y $X(\omega) \cos \omega t$ son funciones impares de ω , y el integrando en (4.28) es una función impar de ω .

Por consiguiente, de (2.21), se tiene

$$f_2(t) = 0,$$

es decir, $f(t)$ es real.

PROBLEMA 4.8 Si $f(t)$ es real, demostrar que su espectro de magnitud $|F(\omega)|$ es una función par de ω , y que su espectro de fase $\phi(\omega)$ es una función impar de ω .

Solución: si $f(t)$ es real, entonces, por (4.23), se tiene

$$F(-\omega) = F^*(\omega). \quad (4.29)$$

Ahora bien, por (4.18), se tiene

$$F^*(\omega) = |F(\omega)| e^{-j\phi(\omega)}, \quad (4.30)$$

$$F(-\omega) = |F(-\omega)| e^{j\phi(-\omega)}. \quad (4.31)$$

Por consiguiente,

$$|F(-\omega)| e^{j\phi(-\omega)} = |F(\omega)| e^{-j\phi(\omega)}, \quad (4.32)$$

y por tanto,

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|, \quad (4.33)$$

$$\phi(-\omega) = -\phi(\omega). \quad (4.34)$$

PROBLEMA 4.9 Demostrar que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es real, entonces $f(t)$ es una función par de t ; y que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es imaginaria pura, entonces $f(t)$ es una función impar de t .

Solución: sea

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega). \quad (4.35)$$

Entonces por (4.19) y (4.20), se tiene

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (4.36)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (4.37)$$

Si $F(\omega) = R(\omega)$ y $X(\omega) = 0$, entonces el integrando de (4.37) debe ser impar con respecto a t . Puesto que $\sin \omega t$ es una función impar de t , $f(t)$ debe ser una función par de t .

Otra forma de solución: por (4.27), con $X(\omega) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde, por (4.19), se tiene

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (4.39)$$

Según (4.38), es obvio que $f(-t) = f(t)$.

Análogamente si $F(\omega) = j X(\omega)$, es decir, $R(\omega) = 0$, entonces el integrando de (4.36) debe ser impar con respecto a t . Como $\cos \omega t$ es una función par de t , $f(t)$ debe ser una función impar de t .

O, utilizando nuevamente (4.27) y si $R(\omega) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde, por (4.20), se tiene

$$X(\omega) = - 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (4.41)$$

Según (4.40), también es obvio que $f(-t) = -f(t)$.

De los resultados anteriores se concluye que si $f(t)$ es una función real y

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega),$$

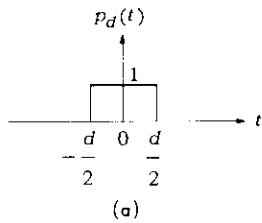
entonces

$$\mathcal{F}[f_e(t)] = R(\omega), \quad (4.42)$$

$$\mathcal{F}[f_o(t)] = j X(\omega), \quad (4.43)$$

donde $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$, siendo $f_e(t)$ y $f_o(t)$ las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente.

PROBLEMA 4.10 Encontrar la transformada de Fourier del pulso rectangular $p_d(t)$ [figura 4.2(a)] definido por

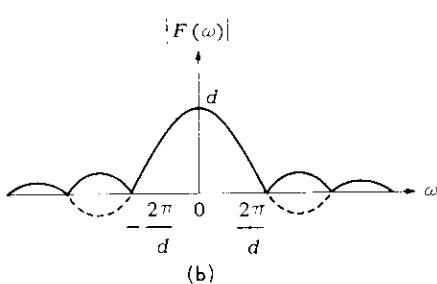


(a)

$$p_d(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2}d \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}d. \end{cases} \quad (4.44)$$

Solución: de (4.15), se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[p_d(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_d(t) e^{-j\omega t} dt$$



(b)

Figura 4.2 (a) El pulso rectangular del problema 4.10. (b) La transformada de Fourier del pulso rectangular de la figura 4.2(a).

$$\begin{aligned} &= \int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{1}{j\omega} [e^{j\omega d/2} - e^{-j\omega d/2}] \\ &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right) \\ &= d \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

En la figura 4.2(b) la línea continua es el espectro de magnitud $|F(\omega)|$, y la línea punteada es $F(\omega)$.

PROBLEMA 4.11 Encontrar la transformada de Fourier de $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

donde $\alpha > 0$ (figura 4.3).

Solución: de acuerdo con (4.15), se tiene

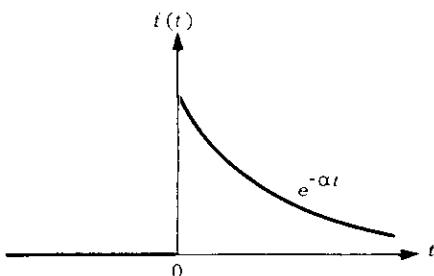


Figura 4.3 La función $f(t)$ del problema 4.11.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4 TRANSFORMADAS SENO Y COSENO DE FOURIER

PROBLEMA 4.12 Si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$, demostrar que $f(t)$ se puede representar por

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (4.48)$$

donde $F_c(\omega)$ está dado por

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt. \quad (4.49)$$

Solución: si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$ se puede definir $f(t)$ para valores negativos de t por la ecuación $f(-t) = f(t)$, por lo que la función resultante es par.

En este caso se supone un comportamiento conveniente de $f(t)$ para valores negativos del tiempo; al interpretar los resultados, por supuesto, se debe tener presente que $f(t)$ está definida sólo para t mayor de cero.

Si ahora se define

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

entonces, por (4.38) y (4.39), se tiene

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega.$$

$F_c(\omega)$ se denomina *transformada coseno de Fourier* de $f(t)$, la cual se denotará por

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (4.50)$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \quad (4.51)$$

PROBLEMA 4.13 Si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$, demostrar que $f(t)$ se puede representar por

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \operatorname{sen} \omega t \, d\omega, \quad (4.52)$$

donde $F_s(\omega)$ está dado por

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt. \quad (4.53)$$

Solución: si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$, se puede también definir $f(t)$ para valores negativos de t por la ecuación $f(-t) = -f(t)$, por lo que la función resultante es impar. Si ahora se define

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt,$$

entonces, por (4.40) y (4.41), se tiene

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \operatorname{sen} \omega t \, d\omega.$$

$F_s(\omega)$ se denomina *transformada seno de Fourier*, la cual se denotará por

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen} \omega t dt, \quad (4.54)$$

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega. \quad (4.55)$$

PROBLEMA 4.14 Encontrar $\mathcal{F}_c[e^{-\alpha t}]$ y $\mathcal{F}_s[e^{-\alpha t}]$ para $t > 0$, $\alpha > 0$.

Solución: las transformadas coseno y seno de Fourier de $e^{-\alpha t}$ son

$$\mathcal{F}_c[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \omega t dt,$$

$$\mathcal{F}_s[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t dt.$$

Sea $\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \omega t dt = I_1$ y $\int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t dt = I_2$; entonces, integrando I_1 por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \omega t dt \\ &= \frac{-e^{-\alpha t} \cos \omega t}{\alpha} \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t dt \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} I_2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Análogamente, integrando I_2 por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t dt \\ &= \frac{-e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t}{\alpha} \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \omega t dt \\ &= \frac{\omega}{\alpha} I_1. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Resolviendo (4.56) y (4.57) para I_1 e I_2 resulta

$$I_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2};$$

por tanto,

$$\mathcal{F}_c[e^{-\alpha t}] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (4.58)$$

$$\mathcal{F}_s[e^{-\alpha t}] = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.59)$$

4.5 INTERPRETACION DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Si se supone que $f(t)$ es periódica con período T , entonces $f(t)$ se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.60)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (4.61)$$

Si ahora se considera que a medida que $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega = 2\pi\Delta f$, $\Delta f = 1/T$, entonces (4.60) y (4.61) se convierten, respectivamente, en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\Delta\omega)t}, \quad (4.62)$$

$$c_n = \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j(n\Delta\omega)t} dt. \quad (4.63)$$

Siguiendo un argumento similar al utilizado en la derivación de (4.9), se observa que si $\Delta\omega \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ tal que $n\Delta\omega \rightarrow \omega$. En otros términos, en el límite, en vez de tener armónicos discretos correspondientes a $n\omega_0$, todo valor de ω es permitido. De esta manera, en vez de C_n se tiene $C(\omega)$, y por (4.63), se tiene que

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{c(\omega)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega). \quad (4.64)$$

Según (4.64) se observa que

$$F(\omega) d\omega = c(\omega), \quad (4.65)$$

O, puesto que $\omega = 2\pi f$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega = c(\omega), \quad (4.66)$$

Entonces (4.62) se convierte en

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Esta ecuación muestra que $\frac{1}{2\pi} |F(\omega)| d\omega$ representa la magnitud infinitesimal de un armónico a la frecuencia angular ω . Estos armónicos tienen frecuencia fundamental cero ($\omega_0 \rightarrow d\omega$) y están separados por infinitésimos. Aunque $|F(\omega)| d\omega$ es infinitesimal, $F(\omega)$ es finito; por esta razón a la gráfica $|F(\omega)|$ vs ω se le denomina *espectro continuo* y a $|F(\omega)|$ se le denomina generalmente, *espectro de magnitud* de $f(t)$.

La representación anterior de una función no periódica como suma de exponentiales con la frecuencia fundamental tendiendo a cero, no es un concepto fácil de aceptar. A veces la interpretación que sigue del par de transformadas de Fourier (4.15) y (4.16) será más directa y de mayor significado.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad [4.15]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad [4.16]$$

Es decir, se supone que cualquier función dada tiene dos modos equivalentes de representación: uno en el dominio del tiempo, $f(t)$, y el otro en el dominio de la frecuencia, $F(\omega)$. La ecuación (4.15) transforma la función $f(t)$, en el dominio del tiempo, a su función equivalente $F(\omega)$, en el dominio de la frecuencia, y la ecuación (4.16) invierte el proceso. La ecuación (4.15) analiza la función del tiempo en un espectro de frecuencia y la ecuación (4.16) sintetiza el espectro de frecuencia para obtener nuevamente la función en términos del tiempo.

4.6 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

PROBLEMA 4.15 Si $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$, y a_1 y a_2 son dos constantes arbitrarias, demostrar que

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega). \quad (4.68)$$

Solución: la transformada de Fourier requerida es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega). \end{aligned}$$

PROBLEMA 4.16 Si a es una constante real y $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (4.69)$$

Solución: para $a > 0$,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt.$$

Sea $at = x$; entonces,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(\omega/a)x} dx.$$

Puesto que la variable comodín se puede representar por cualquier símbolo, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega/a)t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Para $a < 0$,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt.$$

Si de nuevo se tiene, $at = x$; entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(\omega/a)x} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega/a)t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}\quad (4.71)$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

La ecuación (4.68) es la *propiedad de linealidad* de la transformada de Fourier.

La ecuación (4.69) es la *propiedad de escalonamiento* de la transformada de Fourier. La función $f(at)$ representa la función $f(t)$ contraída en la escala del tiempo por un factor a . Análogamente la función $F(\omega/a)$ representa la función $F(\omega)$ expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor a . La propiedad de escalonamiento, por consiguiente, afirma que la contracción en el dominio del tiempo es equivalente a la expansión en el dominio de la frecuencia y vice-versa.

PROBLEMA 4.17 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega). \quad (4.72)$$

Solución: por (4.69), se tiene

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Haciendo $a = -1$,

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega).$$

Otra forma de solución: la transformada de Fourier de $f(-t)$ es

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt.$$

Haciendo $-t = x$ dentro de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(-t)] &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{j\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(-\omega)x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \\ &= F(-\omega).\end{aligned}$$

PROBLEMA 4.18 Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (4.73)$$

Solución: la transformada de Fourier requerida es

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Haciendo $t - t_0 = x, dt = dx$; por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(t_0 + x)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega).\end{aligned}$$

PROBLEMA 4.19 Si ω_0 es una constante real y $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0). \quad (4.74)$$

Solución: la transformada de Fourier requerida es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0).\end{aligned}$$

La ecuación (4.73) es la *propiedad de desplazamiento en el tiempo* de la transformada de Fourier.

La ecuación (4.74) es la *propiedad de desplazamiento en la frecuencia* de la transformada de Fourier.

PROBLEMA 4.20 Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, hallar la transformada de Fourier de $f(t) \cos \omega_0 t$.

Solución: con la identidad $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, y la propiedad (4.74), se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} f(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0).\end{aligned} \quad (4.75)$$

PROBLEMA 4.21 Hallar la transformada de Fourier de la función coseno de duración finita igual a d .

Solución: la función coseno de duración d [figura 4.4(a)] se puede expresar como una función modulada por un pulso; es decir,

$$f(t) = p_d(t) \cos \omega_0 t, \quad (4.76)$$

donde

$$p_d(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{1}{2}d. \end{cases}$$

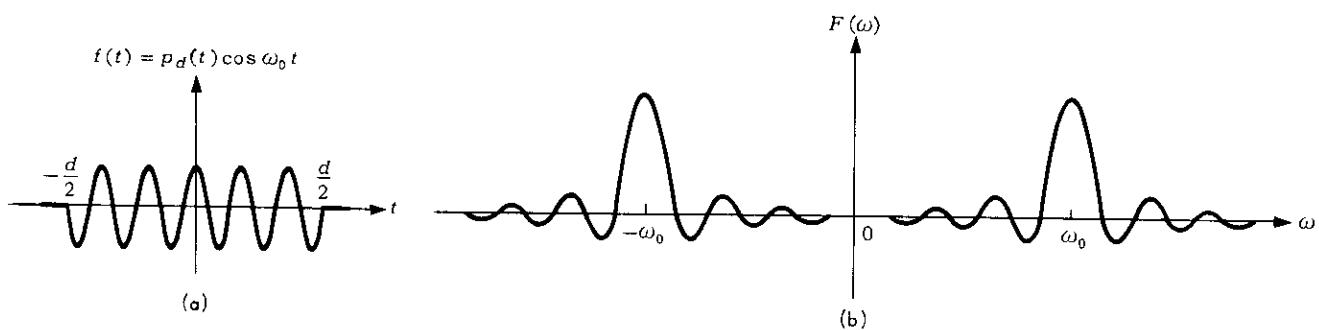


Figura 4.4 (a) La función coseno de duración finita. (b) La transformada de Fourier de la función coseno en la figura 4.4(a).

Según el resultado (4.45) del problema 4.10, se tiene

$$\mathcal{F}[p_d(t)] = \frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega d}{2} \right). \quad (4.77)$$

Entonces, por (4.75), se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[p_d(t) \cos \omega_0 t] \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} d (\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin \frac{1}{2} d (\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

La transformada de Fourier, \$F(\omega)\$, se representa en la figura 4.4(b).

PROBLEMA 4.22 Si \$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]\$, demostrar que

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega). \quad (4.79)$$

Solución: por (4.16), se tiene

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.80)$$

Cambiando \$t\$ por \$-t\$ en la expresión anterior,

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (4.81)$$

Ahora, intercambiando \$t\$ y \$\omega\$ en (4.81), se obtiene

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[F(t)]. \quad (4.82)$$

La ecuación (4.79) es la *propiedad de simetría* de la transformada de Fourier.

PROBLEMA 4.32 Hallar la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}. \quad (4.83)$$

Solución: por el resultado (4.45) del problema 4.10, se tiene

$$\mathcal{F}[p_d(t)] = \frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega d}{2} \right). \quad (4.84)$$

Según la propiedad de simetría de la transformada de Fourier, dada por (4.79), se tiene

$$\mathcal{F} \left[\frac{2}{t} \operatorname{sen} \left(\frac{dt}{2} \right) \right] = 2\pi p_d(-\omega) \quad (4.85)$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} dt \right)}{\pi t} \right] = p_d(-\omega). \quad (4.86)$$

Puesto que $p_d(\omega)$ está definida por (ver problema 4.10),

$$p_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } |\omega| > \frac{1}{2}d \end{cases}, \quad (4.87)$$

es una función par de ω ; por consiguiente,

$$p_d(-\omega) = p_d(\omega). \quad (4.88)$$

Haciendo $\frac{1}{2}d = a$ en (4.86), se tiene

$$\mathcal{F} \left(\frac{\operatorname{sen} at}{\pi t} \right) = p_{2a}(\omega), \quad (4.89)$$

donde,

$$p_{2a}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < a \\ 0 & \text{para } |\omega| > a. \end{cases} \quad (4.90)$$

Las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} at/\pi t$ y su transformada, $F(\omega)$, se muestran en la figura 4.5.

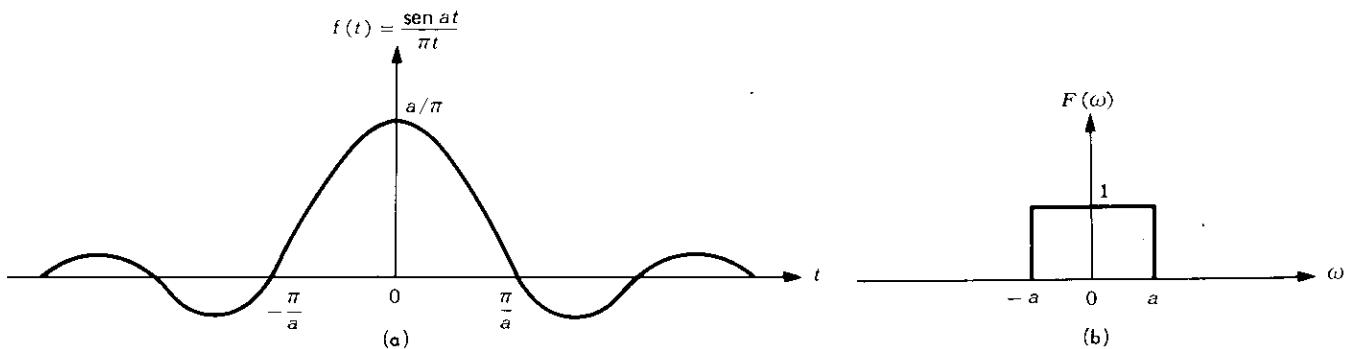


Figura 4.5 (a) La función $f(t)$ del problema 4.23. (b) La transformada de Fourier de $f(t)$ mostrada en la figura 4.5(a).

Ahora se busca la relación entre la transformada de Fourier de una función $f(t)$, y la transformada de Fourier de su derivada $f'(t)$.

PROBLEMA 4.24 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ y $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$, demostrar que $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[f(t)].$ (4.91)

Solución: integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.92)$$

Puesto que $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, se tiene que

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[f(t)].$$

El problema 4.24 demuestra que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada de Fourier por $j\omega$, dado que $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Se debe observar que si $f(t)$ tiene un número finito de súbitas discontinuidades, entonces $f'(t)$ contiene impulsos (ver problema 2.28). Por consiguiente, la transformada de Fourier de $f'(t)$, en este caso, debe contener la transformada de Fourier de los impulsos en $f'(t)$, lo cual será estudiado en el capítulo quinto.

Mediante aplicación repetida de (4.91), se obtiene

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}[f(t)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.93)$$

Se debe observar que (4.93) no garantiza la existencia de la transformada de Fourier de $f^{(n)}(t)$; sólo indica que si la transformada existe, entonces está dada por $(j\omega)^n F(\omega)$.

PROBLEMA 4.25 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $\omega \neq 0$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0, \quad (4.94)$$

demostrar que

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)]. \quad (4.95)$$

Solución: considerar la función

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx; \quad (4.96)$$

entonces, $\phi'(t) = f(t)$. De donde, si $\mathcal{F}[\phi(t)] = \Phi(\omega)$, entonces, de (4.91), se tiene

$$\mathcal{F}[\phi'(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = j\omega \Phi(\omega) \quad (4.97)$$

con tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0. \quad (4.98)$$

Por consiguiente,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{j\omega} F(\omega); \quad (4.99)$$

esto es,

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)].$$

Observar que (4.95) se aplica sólo cuando $\omega \neq 0$. Cuando $\omega = 0$,

$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt. \quad (4.100)$$

Cuando $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq 0$, se tiene

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(x) dx \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega). \quad (4.101)$$

Esto se demuestra en el problema 5.12.

PROBLEMA 4.26 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, demostrar que

$$\mathcal{F}[-jt f(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega}. \quad (4.102)$$

Solución: puesto que

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.103)$$

se tiene

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.104)$$

Cambiando el orden de la diferenciación y de la integración se

$$\begin{aligned} \frac{dF(\omega)}{d\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial \omega} (e^{-j\omega t}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-jt f(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}[-jt f(t)]. \end{aligned}$$

4.7 CONVOLUCIÓN

Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones dadas. La *convolución* de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, está definida por la función

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx, \quad (4.105)$$

la cual se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t). \quad (4.106)$$

Un caso especial importante es aquel en el cual

$$f_1(t) = 0 \text{ para } t < 0, \quad \text{y} \quad f_2(t) = 0 \text{ para } t < 0.$$

Entonces, (4.105) se convierte en

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx. \quad (4.107)$$

PROBLEMA 4.27 Demostrar que la convolución cumple la *ley commutativa*; esto es,

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t). \quad (4.108)$$

Solución: por (4.105), se tiene

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx. \quad (4.109)$$

Cambiando la variable por $t - x = y$,

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y) f_2(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) f_1(t-y) dy \\ &= f_2(t) * f_1(t). \end{aligned} \quad (4.110)$$

PROBLEMA 4.28 Demostrar que la convolución cumple la *ley asociativa*; esto es

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)], \quad (4.111)$$

Solución: si se hace $f_1(t) * f_2(t) = g(t)$, y $f_2(t) * f_3(t) = h(t)$, entonces (4.111) se puede expresar como

$$g(t) * f_3(t) = f_1(t) * h(t). \quad (4.112)$$

Puesto que

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(t-y) dy, \quad (4.113)$$

se tiene

$$\begin{aligned} g(t) * f_3(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_3(t-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy \right] f_3(t-x) dx. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Sustituyendo $z = x - y$ e intercambiando el orden de integración, se obtiene

$$g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) f_3(t-y-z) dz \right] dy. \quad (4.115)$$

Y dado que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) f_3(t-z) dz, \quad (4.116)$$

se tiene

$$h(t-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) f_3(t-y-z) dz. \quad (4.117)$$

Por consiguiente, la integral se identifica dentro del paréntesis angular en el segundo miembro de (4.115) como $h(t-y)$.

De donde,

$$g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) h(t-y) dy = f_1(t) * h(t); \quad (4.118)$$

esto es,

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)].$$

PROBLEMA 4.29 Demostrar que la convolución de una función $f(t)$ con una función impulsiva unitaria $\delta(t)$ conduce a la misma función $f(t)$.

Solución: por la definición de convolución (4.105), se tiene

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t-x) dx.$$

Utilizando la propiedad commutativa (4.108), se tiene

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(t-x) dx = f(t) \quad (4.119)$$

de acuerdo con (2.68).

De donde,

$$f(t) * \delta(t) = f(t).$$

PROBLEMA 4.30 Demostrar que

$$f(t) * \delta(t-T) = f(t-T), \quad (4.120)$$

$$f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2). \quad (4.121)$$

Solución: procediendo como en el problema 4.29, se tiene

$$f(t) * \delta(t-T) = \delta(t-T) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-T) f(t-x) dx = f(t-T)$$

de acuerdo con (2.68). Análogamente, se obtiene

$$\begin{aligned} f(t-t_1) * \delta(t-t_2) &= \delta(t-t_2) * f(t-t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t_2) f(t-x-t_1) dx \\ &= f(t-t_2-t_1) \\ &= f(t-t_1-t_2). \end{aligned}$$

El *teorema de convolución en el tiempo* afirma que si $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, y $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (4.122)$$

PROBLEMA 4.31 Probar el teorema de convolución en el tiempo.

Solución: la transformada de Fourier de $f_1(t) * f_2(t)$ es

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Cambiando el orden de integración, se tiene

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt \right] dx. \quad (4.123)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier (4.73), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-j\omega x}.$$

Sustituyendo el resultado anterior en (4.123), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(\omega) e^{-j\omega x} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} dx \right] F_2(\omega) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt \right] F_2(\omega) \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega). \end{aligned}$$

El **teorema de convolución en la frecuencia** afirma que si $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)] = f_1(t)$ y $\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)] = f_2(t)$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi f_1(t) f_2(t), \quad (4.124)$$

o

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy. \quad (4.125)$$

PROBLEMA 4.32 Probar el teorema de convolución en la frecuencia.

Solución: por (4.16), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy\right] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Sustituyendo $\omega - y$ por x e intercambiando el orden de la integración, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) e^{j(x+y)t} dx\right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) e^{jyt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) e^{jxt} dx\right] dy \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right] \\ &= 2\pi [f_1(t) f_2(t)] \end{aligned} \quad (4.127)$$

en donde las variables comodines de la integración se han cambiado.

La ecuación (4.127) se puede expresar también como

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy.$$

PROBLEMA 4.33 Utilizando la propiedad de simetría de (4.79) la transformada de Fourier y el resultado (4.122) del problema 4.31, resolver nuevamente el problema 4.32.

Solución: por (4.122), se tiene

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega);$$

esto es

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx\right] = F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (4.128)$$

Según la propiedad de simetría de la transformada de Fourier, se sabe que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$; aplicando este resultado a (4.128), se obtiene

$$\mathcal{F}[F_1(t) F_2(t)] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(-\omega - x) dx. \quad (4.129)$$

Sustituyendo x por $-y$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[F_1(t) F_2(t)] &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-y) f_2(-\omega + y) dy \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-y) f_2[-(\omega - y)] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi f_1(-y)] \{2\pi f_2[-(\omega - y)]\} dy.\end{aligned}\quad (4.130)$$

Ahora, recordando que $2\pi f_1(-\omega) = \mathcal{F}[F_1(t)]$ y $2\pi f_2(-\omega) = \mathcal{F}[F_2(t)]$, y cambiando $F_1(t)$ y $F_2(t)$ por $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, y consecuentemente cambiando $2\pi f_1(-\omega)$ y $2\pi f_2(-\omega)$ por $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$, respectivamente, la ecuación (4.130) se puede escribir también como

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

PROBLEMA 4.34 Utilizar la convolución para encontrar $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+j\omega)^2}\right]$.

Solución: la transformada de Fourier de $f(t)$ es

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{(1+j\omega)} \times \frac{1}{(1+j\omega)}.$$

Por (4.47), se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right] = e^{-t} u(t).$$

Por consiguiente, según 4.122, se obtiene

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} u(x) e^{-(t-x)} u(t-x) dx. \quad (4.131)$$

En la integral anterior, el integrando incluye el factor $u(x)u(t-x)$. Como $u(x)=0$ para $x<0$, y $u(t-x)=0$ para $x>t$, entonces

$$u(x)u(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 > x \text{ y } x > t \\ 1 & \text{para } 0 < x < t. \end{cases}$$

De donde,

$$f(t) = \int_0^t e^{-x} e^{-(t-x)} dx = e^{-t} \int_0^t dx = t e^{-t} u(t). \quad (4.132)$$

4.8 TEOREMA DE PARSEVAL Y ESPECTRO DE ENERGIA

PROBLEMA 4.35 Si $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) f_2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega. \quad (4.133)$$

Solución: por (4.125), se tiene que

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy;$$

esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) f_2(t)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy. \quad (4.134)$$

Ahora, haciendo $\omega = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) f_2(t)] dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega \end{aligned}$$

mediante el cambio de la variable comodín de integración.

PROBLEMA 4.36 Si las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son reales, $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, y $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$; demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega, \quad (4.135)$$

donde $F_2^*(\omega)$ denota el conjugado complejo de $F_2(\omega)$.

Solución: si $f(t)$ es real, entonces de (4.23), se tiene

$$F(-\omega) = F^*(\omega).$$

En consecuencia, según (4.133), se puede expresar

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

El **teorema de Parseval** afirma que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.136)$$

PROBLEMA 4.37 Probar el teorema de Parseval.

Solución: si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{j\omega t}]^* dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right]^* \\ &= F^*(-\omega). \end{aligned} \quad (4.137)$$

Por consiguiente, si se hace $f_1(t) = f(t)$ y $f_2(t) = f^*(t)$ en (4.133), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Como $f(t) f^*(t) = |f(t)|^2$ y $F(\omega) F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Si $f(t)$ es real, la relación (4.136) se puede obtener de (4.135), en forma sencilla

En la sección 3.6 se vió que la potencia de una señal para una función periódica, se puede relacionar con la potencia contenida en cada uno de los componentes de frecuencia discreta. El mismo concepto se puede extender a funciones no periódicas, para las cuales se usará un concepto útil: el *contenido de energía E*, el cual está definido por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (4.139)$$

En verdad, si se supone que $f(t)$ es el voltaje de una fuente conectada a través de una resistencia de $1 \cdot \Omega$, entonces la cantidad $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2$ es igual a la energía total entregada por la fuente.

Ahora bien, según el teorema de Parseval, dado por (4.136), se tiene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 dt. \quad (4.140)$$

Esta ecuación afirma que el contenido de energía de $f(t)$ está dado por $\frac{1}{2\pi} \pi$ multiplicado por el área bajo la curva $|F(\omega)|^2$. Por esta razón la cantidad $|F(\omega)|^2$ se denomina *espectro de energía o función densidad de energíapectral de f(t)*.

4.9 FUNCIONES DE CORRELACION

La función

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \quad (4.141)$$

se conoce como la *función de correlación* entre las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. En forma análoga, se define

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(t - \tau) dt. \quad (4.142)$$

La función de correlación $R_{12}(\tau)$ o $R_{21}(\tau)$ suministra una medida de la similitud o interdependencia entre las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en función del parámetro τ (el desplazamiento de una función con respecto a la otra). Si la función de correlación es cero para todo valor de τ , entonces se dice que las dos funciones no están correlacionadas. Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son idénticas, entonces la función de correlación

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt \quad (4.143)$$

se denomina *función de autocorrelación* de $f_1(t)$.

PROBLEMA 4.38 Demostrar que

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt, \quad (4.144)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) f_1(t) dt, \quad (4.145)$$

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_1(t) dt. \quad (4.146)$$

Solución: cambiando la variable t por $t + \tau$ en (4.141), (4.142) y (4.143), se obtiene

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt,$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t + \tau) f_1(t) dt,$$

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_1(t) dt.$$

Según los resultados anteriores, se observa que es indiferente si se desplaza la función $f_1(t)$ en una cantidad τ en la dirección negativa, o si se desplaza la función $f_2(t)$ en la misma cantidad, en la dirección positiva.

PROBLEMA 4.39 Demostrar que

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau), \quad (4.147)$$

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau). \quad (4.148)$$

Solución: por (4.145), se tiene

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t + \tau) f_1(t) dt,$$

y por consiguiente

$$R_{21}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = R_{12}(\tau).$$

Análogamente, por (4.146), se tiene

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_1(t) dt,$$

y por consiguiente,

$$R_{11}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = R_{11}(\tau),$$

en razón de (4.143).

La ecuación (4.148) establece que la función de autocorrelación es una función par de τ .

PROBLEMA 4.40 Demostrar que la correlación de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está relacionada con la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(-t)$.

Solución: Sea $G_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$ de la definición (4.105) de convolución, esto es,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} G_{12}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2[-(t-x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x-t) dx. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Cambiando la variable t por τ , se tiene

$$G_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x-\tau) dx. \quad (4.150)$$

Cambiando nuevamente la variable comodín x por t , se obtiene

$$\begin{aligned} G_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \\ &= R_{12}(\tau). \end{aligned} \quad (4.151)$$

De donde,

$$R_{12}(\tau) = G_{12}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t)|_{t=\tau}. \quad (4.152)$$

PROBLEMA 4.41 Si $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, demostrar que

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) F_2(-\omega), \quad (4.153)$$

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = F_1(-\omega) F_2(\omega), \quad (4.154)$$

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = F_1(\omega) F_1(-\omega). \quad (4.155)$$

Así mismo, si $f_1(t)$ es real, demostrar que

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = |F(\omega)|^2. \quad (4.156)$$

Solución: la ecuación (4.72) del problema 4.17 muestra que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$. De tal manera que si

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega),$$

entonces

$$\mathcal{F}[f_1(-t)] = F_1(-\omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}[f_2(-t)] = F_2(-\omega).$$

Aplicando ahora el teorema de convolución en el tiempo

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad [4.122]$$

a la relación (4.152), se obtiene

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(-t)] = F_1(\omega) F_2(-\omega),$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F_1(\omega) F_2(-\omega). \quad (4.157)$$

Análogamente, se obtiene

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = \mathcal{F}[f_2(t) * f_1(-t)] = F_2(\omega) F_1(-\omega) = F_1(-\omega) F_2(\omega),$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{21}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F_1(-\omega) F_2(\omega), \quad (4.158)$$

y

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = \mathcal{F}[f_1(t) * f_1(-t)] = F_1(\omega) F_1(-\omega).$$

Según (4.23), si $f_1(t)$ es una función real de t , entonces $F_1(-\omega) = F_1^*(\omega)$. De donde,

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = F_1(\omega) F_1^*(\omega) = |F_1(\omega)|^2$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |F_1(\omega)|^2 \quad (4.159)$$

si $f_1(t)$ es una función real de t .**PROBLEMA 4.42** Deducir el resultado (4.159) sin utilizar (4.155).**Solución:** por (4.143), se tiene

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-j\omega t} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] dt \end{aligned} \quad (4.160)$$

por intercambio en el orden de integración.

Cambiando la variable $(t - \tau)$ por x en la integral que está dentro de los paréntesis angulares de (4.160), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega(t-x)} dx \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{j\omega x} dx \\ &= F_1(\omega) F_1(-\omega) \\ &= |F_1(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Del resultado (4.159) o (4.161) se sigue que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$, conduce al espectro de energía $|F_1(\omega)|^2$ de $f_1(t)$. En otras palabras, la función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$ y la densidad espectral de energía $|F_1(\omega)|^2$, constituyen un par de transformadas de Fourier, es decir,

$$|F_1(\omega)|^2 = \mathcal{F}\{R_{11}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.162)$$

$$R_{11}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|F_1(\omega)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.163)$$

Este resultado se conoce como el *teorema de Wiener-Khintchine*.

PROBLEMA 4.43 Demostrar que

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt. \quad (4.164)$$

Solución: por (4.143), se tiene

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt.$$

Haciendo $\tau = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} R_{11}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4.44 Deducir el teorema de Parseval a partir de los resultados (4.163) y (4.164), es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.165)$$

Solución: por (4.163), se tiene que

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Haciendo $\tau = 0$,

$$R_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.166)$$

Por (4.164), se tiene que

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega.$$

4.10 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 4.45 Hallar la integral de Fourier que representa la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1. \end{cases}$$

Respuesta: $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos t\omega \sin \omega}{\omega} d\omega$.

PROBLEMA 4.46 Utilizar el resultado del problema 4.45 para deducir

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

[Sugerencia: hacer $t = 0$ en el resultado del problema 4.45.]

PROBLEMA 4.47 Si $f(t)$ es una función imaginaria pura, esto es, $f(t) = jg(t)$, donde $g(t)$ es real, demostrar que las partes real e imaginaria de $F(\omega)$ son

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt.$$

Así mismo, demostrar que $R(\omega)$ y $X(\omega)$ son funciones impar y par de ω , respectivamente; esto es,

$$R(-\omega) = -R(\omega), \quad X(-\omega) = X(\omega), \quad F(-\omega) = -F^*(\omega).$$

PROBLEMA 4.48 Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, demostrar que $\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$, donde $f^*(t)$ es el conjugado de $f(t)$, y $F^*(-\omega)$ es el conjugado de $F(-\omega)$.

PROBLEMA 4.49 Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(at) e^{j\omega_0 t}] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right).$$

PROBLEMA 4.50 Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, hallar la transformada de Fourier de $f(t) \sin \omega_0 t$.

Respuesta: $\frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$.

PROBLEMA 4.51 Hallar la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$.

Respuesta: $2a/(a^2 + \omega^2)$.

PROBLEMA 4.52 Hallar la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$.

[Sugerencia: aplicar la propiedad de simetría de la transformada de Fourier (4.79) al resultado del problema 4.51.]

Respuesta: $(\pi/a) e^{-a|\omega|}$.

PROBLEMA 4.53 (a) Hallar la transformada de Fourier del pulso $f_1(t)$ que se muestra en la figura 4.6(a). (b) El pulso $f_2(t)$ que se muestra en la figura 4.6(b), es la integral de $f_1(t)$; utilizar el resultado de la parte (a) para obtener la transformada de Fourier de $f_2(t)$; comprobar el resultado mediante integración directa.

[Sugerencia: para la parte (b), utilizar el resultado del problema 4.25.]

Respuesta: (a) $F_1(\omega) = -\frac{4A}{j\omega T} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$, (b) $F_2(\omega) = AT \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$.

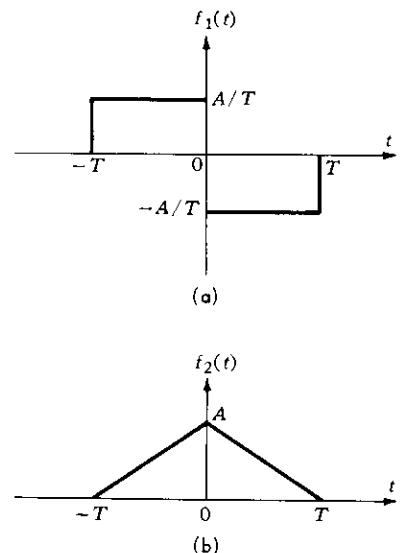


Figura 4.6 (a) El pulso del problema 4.53.
(b) La integral del pulso en la figura 4.6(a).

PROBLEMA 4.54 El momento enésimo m_n de una función $f(t)$ está definido por

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando el resultado del problema 4.26, demostrar que

$$m_n = (-j)^n \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{donde } \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} = \left. \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \quad \text{y} \quad F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)].$$

PROBLEMA 4.55 Utilizar el resultado del problema 4.54 para demostrar que $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ se puede expresar como

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}.$$

[Sugerencia: desarrollar $e^{-j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^n}{n!}$ e integrar (4.15) término por término.]

PROBLEMA 4.56 Demostrar que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad |F(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{df(t)}{dt} \right| dt, \quad |F(\omega)| \leq \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right| dt.$$

Estas desigualdades determinan las cotas superiores de $|F(\omega)|$.

PROBLEMA 4.57 Utilizar la convolución para encontrar $f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \right]$.

Respuesta: $(e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$.

PROBLEMA 4.58 Hallar $f(t)$ del problema 4.57 desarrollando $F(\omega)$ en fracciones parciales

[Sugerencia: $\frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2}$ y utilizar el resultado del problema 4.11.]

PROBLEMA 4.59 Demostrar que si $f(t)$ es de banda limitada, esto es, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 0$ para $|\omega| > \omega_c$, entonces $f(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = f(t)$ para $a > \omega_c$.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 4.23 y el teorema de convolución en el tiempo (4.122).]

PROBLEMA 4.60 Sea $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ y $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$. Probar que

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) d\omega,$$

$$(c) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega,$$

donde el asterisco denota el conjugado complejo.

[Sugerencia: (a) Utilizar (4.122) y (4.16); (b) deducir el resultado de la parte (a) haciendo $t = 0$; (c) deducir el resultado de la parte (b) con la ayuda de (4.72) y del problema 4.48.]

PROBLEMA 4.61 Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones gaussianas; esto es,

$$f_1(t) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_1^2}, \quad f_2(t) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}.$$

Demostrar que si $f_3(t) = f_1(t) * f_2(t)$, entonces $f_3(t)$ también es una función gaussiana y

$$f_3(t) = \frac{1}{\sigma_3 \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_3^2}, \quad \text{donde } \sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

PROBLEMA 4.62 Demostrar que la función de correlación de dos funciones gaussianas cualesquiera, es una función gaussiana.

PROBLEMA 4.63 Si $R_{11}(\tau)$ es la función de autocorrelación de $f_1(t)$, demostrar que $R_{11}(0) \geq |R_{11}(\tau)|$.

[Sugerencia: desarrollar la expresión $x > 0$ para $\tau \neq 0$.]

PROBLEMA 4.64 Si $R_{11}(\tau)$ y $R_{22}(\tau)$ son las funciones de autocorrelación de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, y $R_{12}(\tau)$ es la función de correlación de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, demostrar que $R_{11}(0) + R_{22}(0) > 2|R_{12}(0)|$, para todo valor de τ .

[Sugerencia: desarrollar la expresión $x > 0$, para todo valor de τ .]

PROBLEMA 4.65 (a) Hallar la función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$ del pulso rectangular $f(t)$, definido por

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } |t| < d/2 \\ 0 & \text{para } |t| > d/2. \end{cases}$$

(b) Hallar la densidad espectral de energía $S(\omega)$ de $f(t)$, a partir de $R_{11}(\tau)$, obtenido en la parte (a) y también comprobar que $S_{11}(\omega) = |F(\omega)|^2$, mediante $F(\omega)$ dado en (4.45).

$$\text{Respuesta: (a)} \quad R_{11}(\tau) = \begin{cases} A^2(d - |\tau|) & \text{para } |\tau| < d \\ 0 & \text{para } |\tau| > d, \end{cases} \quad \text{(b)} \quad S_{11}(\omega) = A^2 d \left[\frac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2} \right]^2$$

PROBLEMA 4.66 Sea $R_{11}(\tau)$ la función de autocorrelación y $S_{11}(\omega) = |F_1(\omega)|^2$, la densidad espectral de energía de la función $f_1(t)$. Demostrar que el teorema de Wiener-Khintchine (4.162-3) se puede expresar también como

$$S_{11}(\tau) = \int_0^\infty R_{11}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad \text{y} \quad R_{11}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{11}(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

5

CAPITULO

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES ESPECIALES

5.1 INTRODUCCION

La condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de una función $f(t)$ está dada por la ecuación (4.17), es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (5.1)$$

En otras palabras, la integral del valor absoluto de la función $f(t)$ es finita.

Las funciones tales como $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, el escalón unitario $u(t)$, etc., no satisfacen la condición anterior. El objeto de este capítulo es encontrar las transformadas de Fourier de estas funciones y así mismo, definir las transformadas de Fourier de las funciones generalizadas, tales como la función impulsiva $\delta(t)$ y sus derivadas (sección 2.4).

5.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION IMPULSO

PROBLEMA 5.1 Hallar la transformada de Fourier de la función impulso unitario $\delta(t)$ que se muestra en la figura 5.1(a).

Solución: la transformada de Fourier de $\delta(t)$ está dada por

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.2)$$

Según el análisis de la sección 2.4, se llega a la definición

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1. \quad (5.3)$$

De donde la transformada de Fourier de la función impulso unitario es la unidad.

Es evidente que la función impulso tiene una densidad espectral uniforme en todo el intervalo de frecuencia. [Ver la figura 5.1(b).]

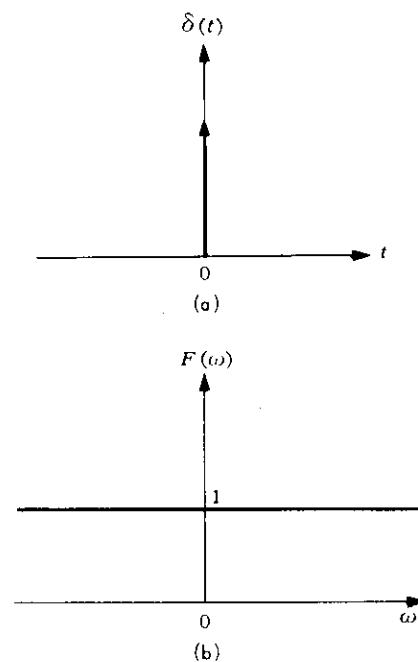
PROBLEMA 5.2 Deducir la siguiente identidad:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.4)$$

Solución: aplicando la fórmula (4.16), que es la transformada inversa de Fourier, a (5.3) se obtiene

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega.$$

Figura 5.1 (a) La función impulso unitario.
(b) La transformada de Fourier de la función impulso unitario.



Se debe observar que la integración ordinaria de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$ no tiene significado en este caso; en vez de ello, se debe interpretar la identidad (5.4) como una función generalizada (o función simbólica), es decir la integración de (5.4) converge hacia $\delta(t)$ en el sentido de una función generalizada.

PROBLEMA 5.3 Deducir la siguiente representación integral de $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega. \quad (5.5)$$

Solución: por (5.4), y utilizando la identidad $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega \end{aligned}$$

en donde se han utilizado las propiedades (2.13) y (2.14) de las funciones par e impar.

Se observa de nuevo que la integración (5.5) converge a $\delta(t)$ en el sentido de una función generalizada.

Utilizando las identidades (5.4) y (5.5) se puede expresar en general,

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx, \quad (5.6)$$

$$\delta(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xy) dx. \quad (5.7)$$

PROBLEMA 5.4 Hallar la transformada de Fourier de la función impulso desplazada $\delta(t - t_0)$ que se muestra en la figura 5.1(a).

Solución: utilizando (2.68), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0} \\ &= e^{-j\omega t_0}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

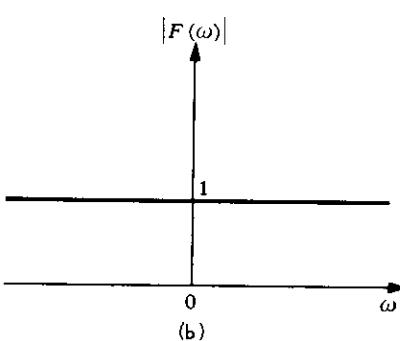
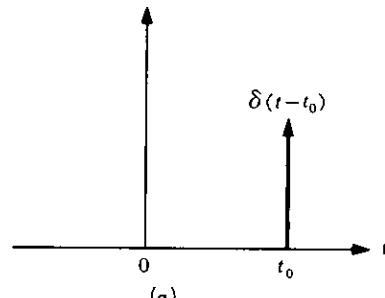
Otra forma de solución: dado que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, y según (4.73), o sea,

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0},$$

se obtiene

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = 1 e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0}, \quad (5.9)$$

tal como se muestra en la figura 5.2(b).



(a) La función impulso desplazada. (b) La transformada de Fourier de la función impulso desplazada.

PROBLEMA 5.5 Utilizando la identidad (5.6) y la relación (2.68), probar la fórmula de la inversión de la transformada de Fourier; es decir,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5.10)$$

donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.11)$$

Solución: sustituyendo (5.11) en el segundo miembro de (5.10), se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j\omega y} dy \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.12)$$

Aquí, para evitar confusión, se utiliza y , una variable comodín diferente. Intercambiando el orden de integración y usando (5.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-y)} d\omega \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(t-y) dy = f(t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

La última integral se obtiene mediante el uso de (2.68). Por consiguiente, la fórmula (5.10) ha sido probada.

5.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE

En seguida se hallará la transformada de Fourier de una función $f(t) = A$. Se observa que esta función no satisface la condición (5.1) de ser absolutamente integrable.

PROBLEMA 5.6 Hallar la transformada de Fourier de una función constante

$$f(t) = A, \quad (5.14)$$

tal como se muestra en la figura 5.3(a).

Solución: la transformada de Fourier de $f(t) = A$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[A] &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ahora, por (5.6), se tiene

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx. \quad (5.16)$$

Haciendo $x = t$ e $y = -\omega$, se tiene

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt(-\omega)} dt. \quad (5.17)$$

Sustituyendo (5.17) en (5.15), se obtiene

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A \delta(-\omega). \quad (5.18)$$

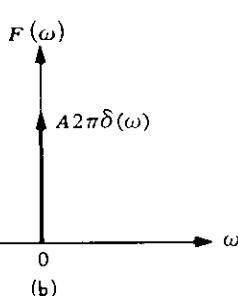
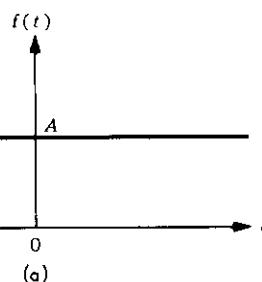


Figura 5.3
(a) La función $f(t) = A$.
(b) La transformada de Fourier de $f(t) = A$.

Puesto que por (2.77), $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$,

$$\mathcal{F}[A] = A 2\pi \delta(\omega). \quad (5.19)$$

Haciendo $A = 1$, se obtiene

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega). \quad (5.20)$$

Otra forma de solución: por (5.3), se tiene

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

Ahora, utilizando la propiedad de simetría (4.79) de la transformada de Fourier, es decir, si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$, se tiene

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega).$$

Por consiguiente, $\mathcal{F}[A] = A 2\pi \delta(\omega)$, tal como se muestra en la figura 5.3(b).

Se debe hacer hincapié en que $f(t) = A$ significa que la función $f(t)$ es constante para todo valor de t [ver la figura 5.3(a)], y no es la función escalón discontinua $Au(t)$. Por consiguiente, se observa que si $f(t) = \text{constante}$, la única frecuencia que se puede relacionar con esta función es la **frecuencia cero (corriente directa pura)**.

PROBLEMA 5.7 Hallar la transformada de Fourier de $f(t)$

Solución: por (5.20), se tiene

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$$

y por (4.74), se tiene

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0).$$

De donde la transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ es

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (5.21)$$

PROBLEMA 5.8 Hallar las transformadas de Fourier de $\cos \omega_0 t$ y de $\sin \omega_0 t$.

Solución: utilizando la identidad

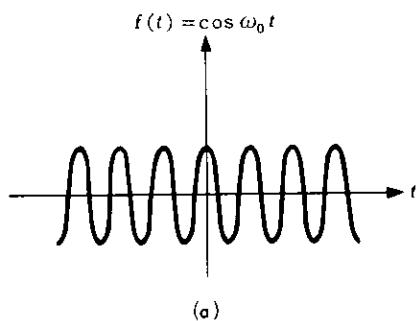
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

y el resultado (5.21), la transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$, es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (5.22)$$

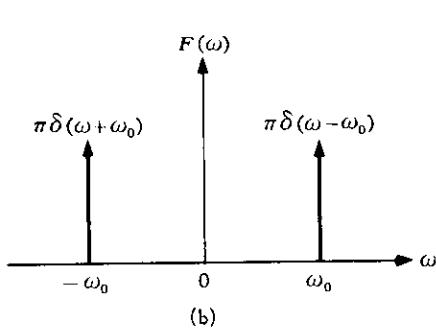
Análogamente, puesto que $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})\right] \\ &= \frac{1}{2j}[2\pi \delta(\omega - \omega_0) - 2\pi \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= -j\pi \delta(\omega - \omega_0) + j\pi \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (5.23)$$



Se observa que la función $e^{j\omega_0 t}$ no es una función real del tiempo, y por consiguiente tiene un espectro, dado por 5.21, el cual existe sólo en $\omega = \omega_0$; es decir, la magnitud de su espectro no es una función par de ω . En el problema 4.8 se demostró que el espectro de amplitud de una función real del tiempo es una función par de ω ; así que, para una función real del tiempo, si su espectro tiene un impulso en $\omega = \omega_0$, también debe tener un impulso en $\omega = -\omega_0$, tal es el caso de las funciones reales $\cos \omega_0 t$ y $\sin \omega_0 t$ (ver la figura 5.4).

5.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL ESCALÓN UNITARIO



PROBLEMA 5.9 Hallar la transformada de Fourier del escalón unitario $u(t)$, el cual está definido por (2.88) o sea

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Solución: supóngase que

$$\mathcal{F}[u(t)] = F(\omega).$$

Entonces, por (4.72), se tiene

$$\mathcal{F}[u(-t)] = F(-\omega). \quad (5.25)$$

Figura 5.4 (a) La función $f(t) = \cos \omega_0 t$
(b) La transformada de Fourier de $f(t) = \cos \omega_0 t$

Puesto que

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t > 0 \\ 1 & \text{para } t < 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

se tiene

$$u(t) + u(-t) = 1 \text{ (excepto cuando } t = 0).$$

Por la linealidad de la transformada de Fourier y por (5.20), se tiene

$$\mathcal{F}[u(t)] + \mathcal{F}[u(-t)] = \mathcal{F}[1]; \quad (5.27)$$

esto es,

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi \delta(\omega). \quad (5.28)$$

Ahora, se supone que

$$F(\omega) = k \delta(\omega) + B(\omega), \quad (5.29)$$

donde $B(\omega)$ es una función ordinaria y k es una constante. Entonces, como $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$, se tiene

$$\begin{aligned} F(\omega) + F(-\omega) &= k \delta(\omega) + B(\omega) + k \delta(-\omega) + B(-\omega) \\ &= 2k \delta(\omega) + B(\omega) + B(-\omega) \\ &= 2\pi \delta(\omega). \end{aligned} \quad (5.30)$$

De donde se concluye que $k = \pi$, y $B(\omega)$ es una función impar.

Para encontrar $B(\omega)$, se procede así: por (2.90), se tiene

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t). \quad (5.31)$$

Entonces, de acuerdo con (4.91), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u'(t)] &= j\omega F(\omega) = j\omega [\pi \delta(\omega) + B(\omega)] \\ &= \mathcal{F}[\delta(t)] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ahora, puesto que según (2.75), $\omega \delta(\omega) = 0$, se tiene

$$j\omega B(\omega) = 1. \quad (5.33)$$

De donde,

$$B(\omega) = \frac{1}{j\omega}. \quad (5.34)$$

Finalmente, se obtiene

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (5.35)$$

Los resultados anteriores muestran que el espectro de la función escalón unitario contiene un impulso en $\omega = 0$; de este modo la función $u(t)$ contiene una componente c.d. como se esperaba. La figura 5.5 muestra la función unitaria, su transformada y su espectro.

Se debe hacer hincapié en que la aplicación superficial del teorema de diferenciación (4.91) a

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (5.36)$$

habría dado como resultado

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = j\omega F(\omega), \quad (5.37)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $u(t)$.

Por tanto, con la definición (5.3), se tiene

$$1 = j\omega F(\omega). \quad (5.38)$$

Por consiguiente,

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad (5.39)$$

un resultado que no está de acuerdo con (5.35).

En general, si

$$\omega F_1(\omega) = \omega F_2(\omega), \quad (5.40)$$

no se sigue que

$$F_1(\omega) = F_2(\omega). \quad (5.41)$$

En vez de esto, la conclusión correcta es

$$F_1(\omega) = F_2(\omega) + k\delta(\omega), \quad (5.42)$$

donde k es una constante, porque $\omega\delta(\omega) = 0$, como se observa de la propiedad (2.75) de la función δ .

Por consiguiente, la conclusión correcta del resultado (5.38), no es (5.39) sino

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + k\delta(\omega) \quad (5.43)$$

PROBLEMA 5.10 Probar que la transformada de Fourier de la función escalón unitario, dada por (5.39), es decir, $\mathcal{F}[u(t)] = 1/j\omega$, es incorrecta.

Solución: se observa que $1/j\omega = -j/\omega$ es una función imaginaria pura de ω ; de acuerdo con el resultado del problema 4.9, se ha probado que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es imaginaria pura, entonces $f(t)$ es una función impar de t . Pero $u(t)$ no es una función impar de t y, por consiguiente, $1/j\omega$ no puede ser su transformada de Fourier.

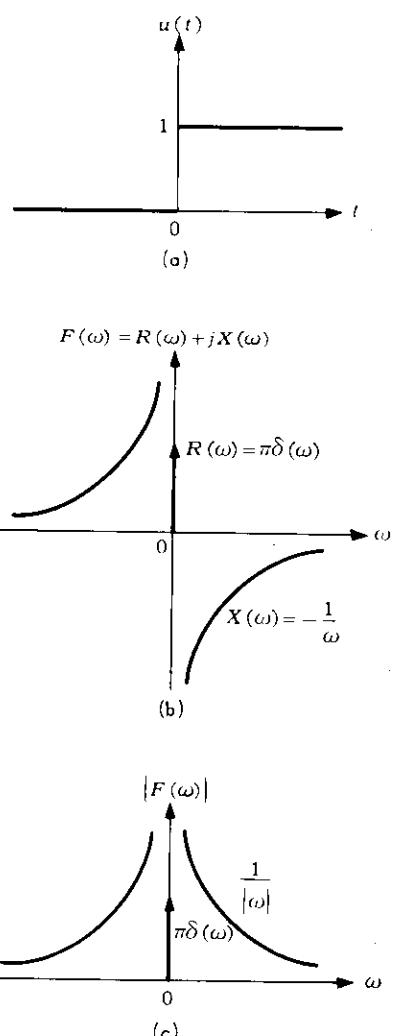
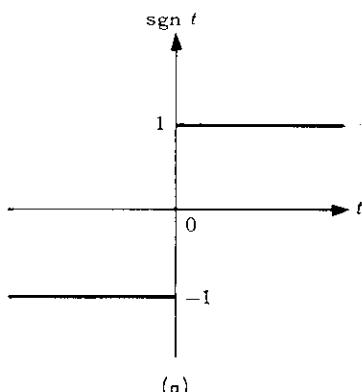


Figura 5.5 (a) La función escalón unitario. (b) La transformada de Fourier de la función escalón unitario. (c) El espectro de la función escalón unitario.

PROBLEMA 5.11 Probar que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t, \quad (5.44)$$



donde $\operatorname{sgn} t$ (léase *signum* t) está definido como

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{para } t < 0 \\ -1 & \text{para } t > 0 \end{cases}. \quad (5.45)$$

Solución: sean $f(t) = \operatorname{sgn} t$ y $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$. Como $\operatorname{sgn} t$ es una función impar de t [figura 5.6(a)], $F(\omega)$ será imaginaria pura, de acuerdo con el resultado del problema 4.9 y, en consecuencia, es una función impar de ω .

Ahora, por (2.94), se tiene

$$f'(t) = 2\delta(t). \quad (5.46)$$

Entonces, por (4.91), se tiene

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2. \quad (5.47)$$

Por consiguiente,

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega} + k\delta(\omega), \quad (5.48)$$

donde k es una constante arbitraria. Puesto que $F(\omega)$ debe ser imaginaria pura e impar, $k = 0$. De donde,

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = \frac{2}{j\omega}. \quad (5.49)$$

de lo cual se concluye que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t.$$

La figura 5.6 muestra la función signum $\operatorname{sgn} t$ y su espectro.

Otra forma de solución: por la ecuación (5.35), se tiene

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

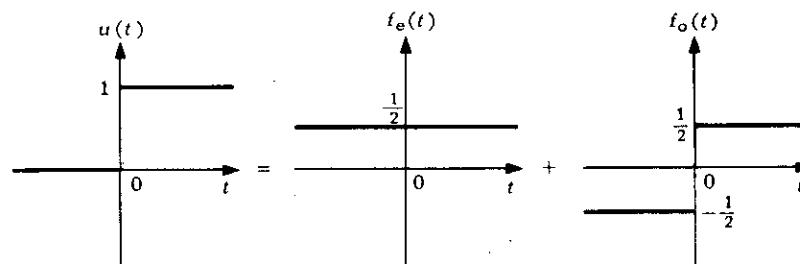


Figura 5.7 La función escalón unitario y sus componentes par e impar.

Se observa que $u(t)$ se puede expresar como (figura 5.7)

$$u(t) = f_e(t) + f_o(t), \quad (5.50)$$

donde $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $u(t)$, respectivamente. Por (2.15) y (2.16), se tiene

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [u(t) + u(-t)] = \frac{1}{2}, \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
 l(t) - l(-t) &= \operatorname{sgn}(t) \\
 \operatorname{sgn}(t) &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
 \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
 \mathcal{F}[-\operatorname{sgn}(-t)] &= -\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
 \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
 \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t) - \operatorname{sgn}(-t)] &= 2/j\omega \\
 \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= 2/j\omega \\
 \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right] &= 1/j\omega
 \end{aligned}$$

$$f_0(t) = \frac{1}{2} [u(t) - u(-t)] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0 \end{cases} . \quad (5.52)$$

Por consiguiente, según (4.42) y (4.43), se concluye que

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] = \pi \delta(\omega), \quad (5.53)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn} t\right] = \frac{1}{j\omega}. \quad (5.54)$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t.$$

PROBLEMA 5.12 En el problema 4.25 se demostró que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega),$$

supuesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0.$$

Demostrar que si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) \neq 0,$$

entonces

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega). \quad (5.55)$$

Solución: sea

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

La integral anterior se puede expresar como la convolución de $f(t)$ con la función escalón unitario $u(t)$; es decir,

$$f(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(t-x) dx = \int_{-\infty}^t f(x) dx = g(t) \quad (5.56)$$

puesto que $u(t-x) = 0$ para $x > t$.

Por consiguiente, según el teorema de convolución en el tiempo (4.122) y el resultado (5.35), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[u(t)] \\ &= F(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(\omega) \delta(\omega). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Según (2.74), se tiene

$$F(\omega) \delta(\omega) = F(0) \delta(\omega).$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(x) dx \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega).$$

5.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION PERIODICA

En el capítulo cuarto se desarrolló la integral de Fourier como un caso de límites de la serie de Fourier, haciendo que el período de la función periódica fuera infinito. En esta sección se demostrará que la serie de Fourier se puede deducir formalmente como un caso especial de la integral de Fourier.

Se debe observar que para cualquier función periódica $f(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \infty;$$

es decir, no cumple la condición (4.17) de que la integral del valor absoluto de la función sea finita; pero su transformada de Fourier existe en el sentido de una función generalizada, lo cual ya ha sido demostrado al encontrar la transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$ y $\sin \omega_0 t$.

PROBLEMA 5.13 Encontrar la transformada de Fourier de una función periódica $f(t)$.

Solución: una función periódica $f(t)$ con período T , se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

tomando la transformada de Fourier de ambos lados, se obtiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}]. \quad (5.58)$$

Puesto que según (5.21), se tiene

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0), \quad (5.59)$$

la transformada de Fourier de $f(t)$ es

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.60)$$

La ecuación (5.60) establece que la transformada de Fourier de una función periódica, consta de una sucesión de impulsos equidistantes localizados en las frecuencias armónicas de la función.

PROBLEMA 5.14 Probar que la sucesión de pulsos equidistantes

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (5.61)$$

es la transformada de Fourier de una función periódica $f(t)$ con período T .

Solución: la función periódica es

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(\omega - n\omega_0)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - n\omega_0)]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Por (5.59), se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - n\omega_0)] = \frac{1}{2\pi} e^{jn\omega_0 t}. \quad (5.63)$$

De donde,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} e^{jn\omega_0 t}. \quad (5.64)$$

Puesto que $e^{jn\omega_0(t+2\pi/\omega_0)} = e^{jn\omega_0 t}$, se tiene

$$f\left[t + \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = f(t + T) = f(t);$$

es decir, $f(t)$ es una función periódica con período $T = 2\pi/\omega_0$.

PROBLEMA 5.15 Encontrar la transformada de Fourier del tren de impulsos unitarios $\delta_T(t)$, donde $\delta_T(t)$ está definido por

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &= \dots + \delta(t + 2T) + \delta(t + T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned}$$

Solución: puesto que $\delta_T(t)$ es una función periódica con período T , y según el resultado (3.61) del problema (3.10), la serie de Fourier de la función $\delta_T(t)$ está dada por

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}, \quad (5.65)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}].$$

Por (5.59), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega), \end{aligned} \quad (5.66)$$

or

$$\mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.67)$$

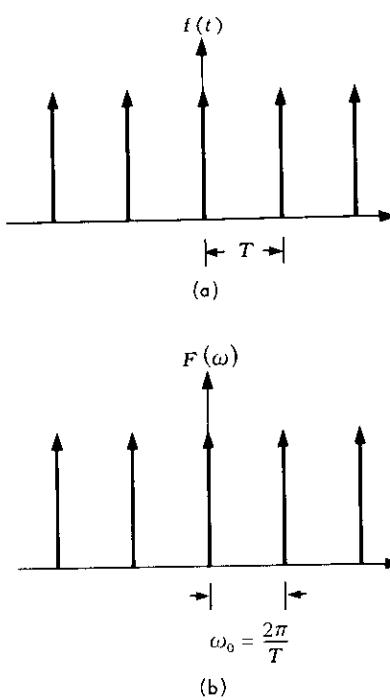


Figura 5.8 (a) El tren de impulsos.
(b) La transformada de Fourier del tren de impulsos.

La ecuación (5.67) establece que la transformada de Fourier de un tren de impulsos unitarios es también un tren similar de impulsos. Por consiguiente, se puede decir que el tren de impulsos es su propia transformada (figura 5.8).

PROBLEMA 5.16 Demostrar que los coeficientes complejos c_n de la expansión en serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ con período T igualan a los valores de la transformada de Fourier $F_0(\omega)$ de la función $f_0(t)$ en $\omega = n\omega_0 = n2\pi/T$ multiplicada por $1/T$, donde $f_0(t)$ está definido por

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < \frac{1}{2}T \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}T. \end{cases} \quad (5.68)$$

Solución: la función periódica $f(t)$ con período T se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

donde $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$. Ahora,

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \mathcal{F}[f_0(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Puesto que

$$F_0(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad (5.70)$$

se concluye que

$$c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0). \quad (5.71)$$

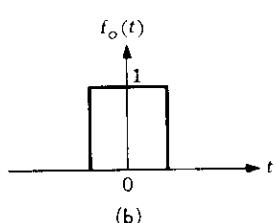
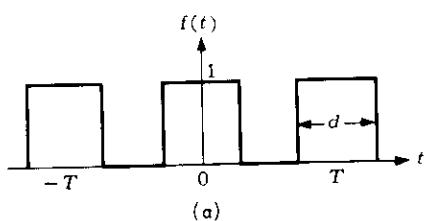


Figura 5.9 (a) Un tren de pulsos rectangulares. (b) Un sólo pulso rectangular.

PROBLEMA 5.17 Utilizando el resultado del problema 5.16, encontrar los coeficientes complejos de la serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares cuyo ancho es d y cuyo período es T , tal como se muestra en la figura 5.9(a).

Solución: sea

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.72)$$

Entonces, según la figura 5.9(b), se tiene

$$f_0(t) = p_d(t). \quad (5.73)$$

Por consiguiente, según (4.45), se tiene

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \mathcal{F}[f_0(t)] = \mathcal{F}[p_d(t)] = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right) \\ &= d \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Por tanto, según (5.71), los coeficientes c_n de la serie de Fourier de $f(t)$ están dados por

$$c_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{d}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}, \quad (5.75)$$

que es exactamente el mismo resultado de (3.47), excepto por el factor A , la altura del pulso.

PROBLEMA 5.18 Hallar la transformada de Fourier de un tren de pulsos rectangulares de ancho d y período T , el cual se muestra en la figura 5.9(a).

Solución: según el resultado del problema 5.17, la serie de Fourier de esta función está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

donde

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{d}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} = \frac{d}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} \\ &= \frac{d}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi d}{T}\right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

De (5.60) se sigue que la transformada de Fourier de esta función está dada por

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{2\pi d}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.77)$$

La ecuación (5.77) indica que la transformada de Fourier de un tren de pulsos rectangulares consta de impulsos localizados en $\omega = 0, \pm\omega_0, +2\omega_0, \dots$, etc. La intensidad del impulso localizado en $\omega = n\omega_0$ está dada por $(2\pi d/T) \operatorname{Sa}(n\pi d/T)$. El espectro se muestra en la figura 5.10 (caso en que $d/T = 1/5$).

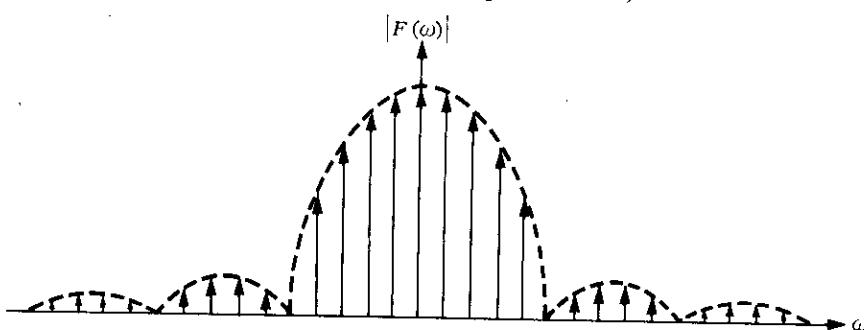


Figura 5.10 El espectro de un tren de pulsos rectangulares.

5.6 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES GENERALIZADAS

En esta sección se definirán las transformadas de Fourier de funciones generalizadas y de ciertas funciones ordinarias para las cuales la definición convencional de transformada no tiene significado. Esto se hará mediante el uso de la *ecuación de Parseval*.

PROBLEMA 5.19 Sea $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ y $\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$; establecer la ecuación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx. \quad (5.78)$$

Solución: según la definición de transformada de Fourier, se tiene

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxy} dx, \quad (5.79)$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-jxy} dy. \quad (5.80)$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-jxy} dy \right] dx. \quad (5.81)$$

Intercambiando el orden de la integración, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxy} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(y) dy, \end{aligned}$$

y como se puede cambiar el símbolo de la variable comodín, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx. \quad (5.82)$$

Según (5.78), es obvio que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathcal{F}[g(t)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)] g(\omega) d\omega. \quad (5.83)$$

Puesto que $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ y $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$, la ecuación (5.82) se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] dt. \quad (5.84)$$

De modo que es posible extender la relación (5.82) para definir la transformada de Fourier de una función generalizada.

Sea $\phi(t)$ una función de prueba tal como se definió en la sección 2.4; entonces,

$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \Phi(\omega)$$

realmente existe, y la transformada de Fourier $F(\omega)$ de una función generalizada $f(t)$ está definida por la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx. \quad (5.85)$$

PROBLEMA 5.20 Utilizando la definición (5.85), demostrar que

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

Solución: según la definición (5.85), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(t)] \phi(\omega) d\omega. \quad (5.86)$$

y según la definición (2.67) de la función δ , se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \Phi(t) dt = \Phi(t) \Big|_{t=0} = \Phi(\omega) \Big|_{\omega=0} = \Phi(0).$$

Pero

$$\Phi(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=0},$$

y como en la ecuación anterior la integración es con respecto a t , se obtiene

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega. \quad (5.87)$$

Comparando los resultados (5.87) y (5.86), se concluye que

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

PROBLEMA 5.21 Utilizando la relación (5.85) hallar la transformada de Fourier de $\delta(t - \tau)$.

Solución: se puede expresar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(t - \tau)] \phi(\omega) d\omega. \quad (5.88)$$

Según (2.68), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \Phi(t) dt &= \Phi(\tau) = \Phi(t) \Big|_{t=\tau} = \Phi(\omega) \Big|_{\omega=\tau} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-j\tau x} dx. \end{aligned}$$

Dado que el símbolo de la variable comodín se puede cambiar a voluntad, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\tau\omega} d\omega. \quad (5.89)$$

Comparando los resultados (5.88) y (5.89), se obtiene

$$\mathcal{F}[\delta(t - \tau)] = e^{-j\omega\tau}.$$

Este es el mismo resultado (5.8) obtenido en el problema 5.4.

PROBLEMA 5.22 Utilizando la relación (5.85), demostrar que

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega),$$

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(t)] = (j\omega)^k F(\omega),$$

donde $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

Solución: por (5.85), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f'(t)] \phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\omega) \Phi(\omega) d\omega. \quad (5.90)$$

Ahora bien, según la definición (2.82), derivada de una función generalizada, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\omega) \Phi(\omega) d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Phi'(\omega) d\omega. \quad (5.91)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{\partial}{\partial \omega} (e^{-j\omega t}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -jt \phi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [jt \phi(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= - \mathcal{F}[jt \phi(t)], \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\omega) \Phi(\omega) d\omega &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Phi'(\omega) d\omega \\ &= + \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathcal{F}[jt \phi(t)] d\omega. \end{aligned} \quad (5.92)$$

De nuevo, mediante (5.85), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathcal{F}[jt \phi(t)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \phi(\omega) F(\omega) d\omega. \quad (5.93)$$

Comparando (5.93) y (5.90), se concluye que

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega). \quad (5.94)$$

Repetiendo el resultado (5.94), se obtiene

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(t)] = (j\omega)^k F(\omega). \quad (5.95)$$

PROBLEMA 5.23 Hallar las transformadas de Fourier de $\delta'(t)$ y $\delta^{(k)}(t)$.

Solución: puesto que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, entonces, por (5.94) y (5.95), se obtiene

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega, \quad (5.96)$$

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}(t)] = (j\omega)^k. \quad (5.97)$$

PROBLEMA 5.24 Utilizando la relación (5.85), demostrar que

$$\mathcal{F}[-jt f(t)] = F'(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

$$\mathcal{F}[-jt^k f(t)] = F^{(k)}(\omega) = \frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k},$$

donde $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

Solución: según la definición (2.82), de la derivada de una función generalizada, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(\omega) \phi(\omega) d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \phi'(\omega) d\omega. \quad (5.98)$$

Y según (5.85), se tiene

$$- \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \phi'(\omega) d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathcal{F}[\phi'(t)] d\omega. \quad (5.99)$$

Ahora, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\phi'(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \phi(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \Phi(\omega) \end{aligned}$$

dado que la función de prueba $\phi(t)$ se anula fuera de algún intervalo $\phi(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathcal{F}[\phi'(t)] d\omega &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) j\omega \Phi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega) f(\omega) \Phi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-jt) f(t) \Phi(t) dt. \end{aligned} \quad (5.100)$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(\omega) \phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt) f(t) \Phi(t) dt.$$

Por lo cual, según (5.85), se concluye que

$$\mathcal{F}[-jt f(t)] = F'(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}. \quad (5.101)$$

Mediante repetición de (5.101), se obtiene

$$\mathcal{F}[-j t^k f(t)] = F^{(k)}(\omega) = \frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k}. \quad (5.102)$$

PROBLEMA 5.25 Hallar las transformadas de Fourier de t y t^k .

Solución: según la ecuación (5.20), $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$; y según (5.101), se tiene

$$\mathcal{F}[-j t] = 2\pi\delta'(\omega). \quad (5.103)$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}[t] = \frac{2\pi}{-j}\delta'(\omega) = j2\pi\delta'(\omega), \quad (5.104)$$

donde $\delta'(\omega) = \frac{d\delta(\omega)}{d\omega}$. Análogamente, según (5.102), se tiene

$$\mathcal{F}[t^k] = \frac{2\pi}{(-j)^k}\delta^{(k)}(\omega) = 2\pi j^k\delta^{(k)}(\omega), \quad (5.105)$$

donde

$$\delta^{(k)}(\omega) = \frac{d^k\delta(\omega)}{d\omega^k}.$$

5.7 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 5.26 Evaluar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

- (a) $1 - 3\delta(t) + 2\delta'(t-2)$, (b) $\sin^3 t$, (c) $u(t-1)$.

Respuesta: (a) $2\pi\delta(\omega) - 3 + 3j\omega e^{-j2\omega}$, (b) $j(\pi/4)[\delta(\omega-3) - 3\delta(\omega-1) + 3\delta(\omega+1) - \delta(\omega+3)]$, (c) $\pi\delta(\omega) - e^{-j\omega}/j\omega$.

PROBLEMA 5.27 Demostrar que la función escalón unitario $u(t)$ se puede expresar,

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

[Sugerencia: utilizar las fórmulas (5.35) y (4.27).]

PROBLEMA 5.28 Probar que

$$(a) \quad \mathcal{F}[\cos \omega_0 t u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + j \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$(b) \quad \mathcal{F}[\sin \omega_0 t u(t)] = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

[Sugerencia: $\cos \omega_0 t u(t) = \frac{1}{2} \{e^{j\omega_0 t} u(t) + e^{-j\omega_0 t} u(t)\}$ y utilizar el resultado del problema 4.19.]

PROBLEMA 5.29 Hallar la transformada de Fourier de un tren finito de impulsos unitarios

$$f(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \delta(t - nT).$$

Respuesta: $e^{-j(k-1)\omega T/2} \frac{\sin(k\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}$

PROBLEMA 5.30 Si $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, demostrar que $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$.
 [Sugerencia: $f'(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} u(t)$.]

PROBLEMA 5.31 Sea $f(t)$ una función periódica con período T . Si la función $f_0(t)$ está definida como

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para } |t| < T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2 \end{cases}$$

demostrar que $f(t)$ se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT) = f_0(t) * \delta_T(t),$$

$$\text{donde } \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

PROBLEMA 5.32 Utilizando el resultado del problema 5.31 y el teorema de convolución, demostrar que la transformada de Fourier de una función periódica $f(t)$ con período T , y coeficientes complejos c_n , se puede expresar como

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0),$$

$$\text{donde } F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0(t)] \quad \text{y} \quad f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para } |t| < T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2. \end{cases}$$

[Sugerencia: utilizar los resultados de los problemas 5.15 y 2.50.]

PROBLEMA 5.33 Probar que $\mathcal{F}[1/t] = -j\pi \operatorname{sgn} \omega - \pi j u(\omega)$.

[Sugerencia: aplicar la propiedad de simetría (4.79) al resultado (5.44) del problema 5.11.]

PROBLEMA 5.34 Del resultado del problema 5.33 deducir que para $n = 1, 2, \dots$, se tiene

$$\mathcal{F}[-1/t^2] = -j\omega \pi j \operatorname{sgn} \omega - \omega \pi \operatorname{sgn} \omega,$$

$$\mathcal{F}[2/t^3] = - (j\omega)^2 \pi j \operatorname{sgn} \omega - j\omega^2 \pi \operatorname{sgn} \omega,$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^n}\right] = - \frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \pi j \operatorname{sgn} \omega.$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 4.24; esto es, $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$.]

PROBLEMA 5.35 Demostrar que $\mathcal{F}[tu(t)] = j\pi \delta'(\omega) - 1/\omega^2$.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 5.24.]

PROBLEMA 5.36 Demostrar que $\mathcal{F}[|t|] = -2/\omega^2$.

[Sugerencia: utilizar $|t| = 2t u(t) - t$, la ecuación (5.104), y el resultado del problema 5.35.]

PROBLEMA 5.37 Hallar la solución particular de la ecuación $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = u(t)$, utilizando la transformada de Fourier.

[Sugerencia: tomar la transformada de Fourier de ambos miembros de la ecuación. Hallar $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y tomar la transformada inversa de Fourier.]

Respuesta: $\frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) u(t)$.

PROBLEMA 5.38 Hallar la solución particular a la ecuación $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 3\delta(t)$, utilizando la transformada de Fourier.

Respuesta: $3(e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$.

PROBLEMA 5.39 Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$ y $f_k(t)$ la función definida por

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Demostrar que

$$f_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \frac{\sin kx}{x} dx.$$

PROBLEMA 5.40 En el resultado del problema 5.39, demostrar que

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kt}{t}.$$

[Sugerencia: observar que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$.]

PROBLEMA 5.41 Hallar la transformada de Fourier del escalón unitario desplazado $u(t-t_0)$.

Respuesta: $\pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega}$

PROBLEMA 5.42 Utilizar la relación (5.85) para deducir el teorema de convolución en el tiempo

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega).$$

PROBLEMA 5.43 Utilizar la relación (5.85) para demostrar que

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

PROBLEMA 5.44 La transformada de Fourier $F(\omega)$, de la función generalizada $f(t)$ se puede definir mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Phi(-\omega) d\omega,$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba, y $\mathcal{F}[\phi(t)] = \Phi(\omega)$. Utilizando la ecuación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) d\omega, \quad [4.133]$$

demonstrar que la transformada de Fourier de la función impulso unitario es

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

[Sugerencia: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-\omega) d\omega.$]

6

CAPITULO

APLICACIONES A SISTEMAS LINEALES

6.1 SISTEMAS LINEALES

En todo sistema hay una *función de entrada* (o función de excitación) y una *función de salida* (o función de respuesta). Un sistema está completamente caracterizado si se conoce la naturaleza de la dependencia de la salida sobre la entrada.

Si se supone que la respuesta de un sistema a la excitación $f_i(t)$ es la función $f_o(t)$, y si la respuesta de ese sistema a la excitación $f_i(t) = a_1 f_{i1}(t) + a_2 f_{i2}(t)$ es $f_o(t) = a_1 f_{o1}(t) + a_2 f_{o2}(t)$, se dice que es un *sistema lineal*. (Ver la figura 6.1.)

Por tanto, un sistema lineal se puede definir como un sistema al cual se le puede aplicar el principio de superposición.

Si la respuesta de un sistema a la excitación $f_i(t)$ es la función $f_o(t)$, y si la respuesta de ese sistema a la excitación $f_i(t - t_o)$ es la función $f_o(t - t_o)$, se dice que es un *sistema invariante en el tiempo* (o un sistema de parámetros constantes).

Otra definición de sistema lineal es la de que la función de la excitación y la función de la respuesta del sistema, están relacionadas por una *ecuación diferencial lineal*; es decir,

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n f_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f_o(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df_o(t)}{dt} + a_0 f_o(t) \\ & = b_m \frac{d^m f_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f_i(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df_i(t)}{dt} + b_0 f_i(t). \quad (6.1) \end{aligned}$$

6.2 FUNCIONES OPERACIONALES DEL SISTEMA

Si se denota d/dt por el operador p , tal que

$$pf(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad p^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n},$$

entonces, la ecuación (6.1) se puede expresar como

$$\sum_{n=0}^n a_n p^n f_o(t) = \sum_{m=0}^m b_m p^m f_i(t) \quad (6.2)$$

$$A(p) f_o(t) = B(p) f_i(t), \quad (6.3)$$

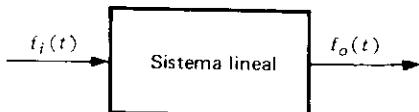


Figura 6.1 Entrada y salida de un sistema lineal

donde

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

En un sistema lineal los coeficientes a_n y b_m son *independientes* de la función de respuesta. En el sistema invariante (o de parámetros constantes) los coeficientes a_n y b_m son *constantes*.

La ecuación (6.3) se puede expresar simbólicamente en la forma

$$f_o(t) - \frac{B(p)}{A(p)} f_i(t) = H(p) f_i(t), \quad (6.4)$$

donde $H(p) = B(p) / A(p)$. Se entiende que la ecuación (6.4) es una expresión operacional de la ecuación diferencial (6.1). El operador $H(p)$ que opera sobre la función de entrada para producir la función de salida, se denomina *función operacional del sistema*. Utilizando el símbolo L para $H(p)$, la ecuación (6.4) se puede expresar como

$$L \{f_i(t)\} = f_o(t). \quad (6.5)$$

El símbolo u operador lineal L en la ecuación (6.5) indica la ley que determina la función de salida, $f_o(t)$, dada la función de entrada, $f_i(t)$. A veces se menciona la ecuación (6.5) como una transformación L de la función $f_i(t)$ en la función $f_o(t)$.

Con la notación de (6.5), un *sistema lineal e invariante en el tiempo* está definido por

$$L \{a_1 f_{i1}(t) + a_2 f_{i2}(t)\} = a_1 L \{f_{i1}(t)\} + a_2 L \{f_{i2}(t)\}, \quad (6.6)$$

$$L \{f_i(t + t_0)\} = f_o(t + t_0), \quad (6.7)$$

donde t_0 es una constante arbitraria.

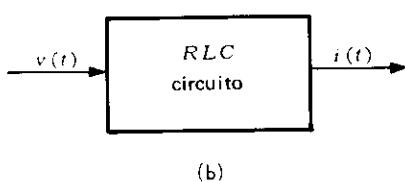
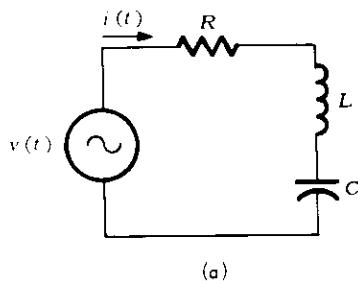


Figura 6.2 (a) El circuito del problema 6.1. (b) Sistema del circuito de la figura 6.2(a).

PROBLEMA 6.1 Obtener la expresión operacional para la respuesta de la corriente $i(t)$, al voltaje $v(t)$, del circuito que se muestra en la figura 6.2(a).

Solución: la fuente es el voltaje aplicado $v(t)$, y la respuesta es la corriente $i(t)$, como se muestra en la figura 6.2(b). La ecuación diferencial que relaciona $i(t)$ y $v(t)$ se puede obtener utilizando la ley de Kirchhoff, así:

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = v(t). \quad (6.8)$$

Diferenciando ambos miembros, se obtiene

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (6.9)$$

donde el símbolo L representa la inductancia y no al operador L .

Utilizando el operador $p = d/dt$, la ecuación (6.9) se puede expresar como

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) i(t) = pv(t). \quad (6.10)$$

Por tanto,

$$i(t) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} v(t) = H(p) v(t), \quad (6.11)$$

donde

$$H(p) = \frac{p}{\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \frac{1}{\left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{1}{Z(p)} = Y(p).$$

En el circuito eléctrico de la figura 6.2(a), $Y(p)$ se denomina *función de admitancia operacional*, y $Z(p) = 1/Y(p)$ se denomina *función de impedancia operacional*.

PROBLEMA 6.2 Considerar el sistema mecánico simple que se muestra en la figura 6.3(a). Obtener la expresión operacional de $x(t)$, que representa el desplazamiento de una masa m desde su posición de equilibrio.

Solución: la fuente es la fuerza aplicada $f(t)$, y la respuesta es el desplazamiento $x(t)$ de la masa m desde su posición de equilibrio [figura 6.3(b)].

Las fuerzas que actúan sobre la masa son las siguientes:

- (1) la fuerza aplicada $f(t)$;
- (2) la reacción por inercia ($-md^2 x/dt^2$);
- (3) la fuerza de amortiguamiento (resistencia por fricción) ($-k_d dx/dt$), y
- (4) la fuerza restauradora elástica ($-k_s x$).

En los numerales (3) y (4), k_d y k_s son el coeficiente dinámico de fricción y la constante del resorte, respectivamente.

Aplicando el principio de d'Alembert, se tiene

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_d \frac{dx(t)}{dt} + k_s x(t) = f(t). \quad (6.12)$$

Utilizando operadores, la ecuación (6.12) se convierte en

$$(mp^2 + k_d p + k_s) x(t) = f(t). \quad (6.13)$$

Por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + k_d p + k_s} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.14)$$

donde $H(p) = 1/(mp^2 + k_d p + k_s)$.

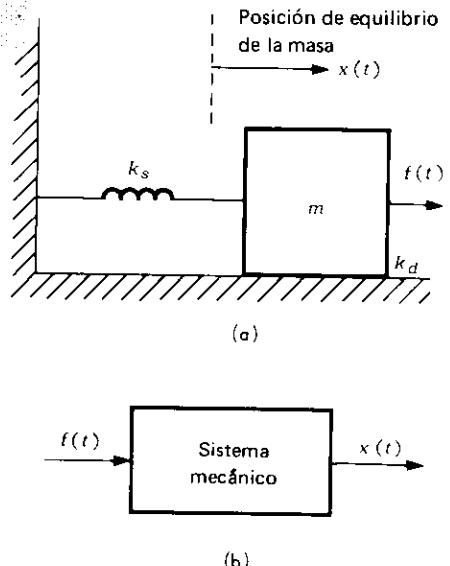


Figura 6.3 (a) El sistema mecánico del problema 6.2.
(b) Representación del sistema mecánico de la figura 6.3(a).

6.3 RESPUESTA A FUNCIONES EXPONENCIALES DE ENTRADA - FUNCIONES PROPIAS Y FUNCIONES DEL SISTEMA

La respuesta de sistemas lineales a funciones de entrada que sean funciones exponenciales del tiempo, son de especial importancia en el análisis de sistemas lineales.

PROBLEMA 6.3 Demostrar que la respuesta de un sistema lineal e invariante a una función exponencial $e^{j\omega t}$, también es una función exponencial y proporcional a la entrada; es decir,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = k e^{j\omega t}, \quad (6.15)$$

Solución: sea $f_o(t)$ la respuesta a $e^{j\omega t}$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = f_o(t). \quad (6.16)$$

Puesto que el sistema es invariante, entonces por (6.7), se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega(t+t_0)}\} = f(t+t_0). \quad (6.17)$$

Pero según (6.6), se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega(t+t_0)}\} = \mathcal{L}\{e^{j\omega t_0} e^{j\omega t}\} = e^{j\omega t_0} \cdot \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}. \quad (6.18)$$

De donde,

$$f_o(t+t_0) = e^{j\omega t_0} f_o(t). \quad (6.19)$$

Haciendo $t=0$, se obtiene

$$f_o(t_0) = f_o(0) e^{j\omega t_0}. \quad (6.20)$$

Como t_0 es arbitrario, se cambia t_0 por t y se expresa la ecuación (6.20) como

$$f_o(t) = f_o(0) e^{j\omega t} + k e^{j\omega t}.$$

Es decir, la salida es proporcional a la entrada, siendo $k = f_o(0)$ la constante de proporcionalidad. En general, k es compleja y depende de ω .

Otra forma de solución: supóngase que la excitación en la ecuación (6.3), es la función $f_i(t) = e^{j\omega t}$; entonces

$$A(p) f_o(t) = B(p) e^{j\omega t}, \quad (6.21)$$

donde $f_o(t)$ es la respuesta del sistema. Ahora bien;

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

$$B(p) e^{j\omega t} = B(j\omega) e^{j\omega t}$$

dado que

$$p^m e^{j\omega t} = \frac{d^m}{dt^m} (e^{j\omega t}) = (j\omega)^m e^{j\omega t}.$$

Por tanto, la respuesta $f_o(t)$ está definida por la ecuación diferencial lineal

$$A(p) f_o(t) = B(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.22)$$

La función excitadora de la ecuación (6.22) es $B(j\omega) e^{j\omega t}$, una función exponencial, y según la teoría de las ecuaciones diferenciales, se puede suponer que la respuesta $f_o(t)$ también es exponencial. De donde, si $f_o(t) = k_1 e^{j\omega t}$, entonces

$$A(p) f_o(t) = A(p) [k_1 e^{j\omega t}] = k_1 A(p) [e^{j\omega t}] = k_1 A(j\omega) e^{j\omega t} = A(j\omega) f_o(t). \quad (6.23)$$

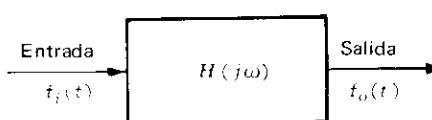
Sustituyendo (6.23) en la ecuación (6.22), se obtiene:

$$A(j\omega) f_o(t) = B(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.24)$$

Por tanto, si $A(j\omega) \neq 0$, entonces

$$f_o(t) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} e^{j\omega t} = H(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (6.25)$$

La figura 6.4 muestra un diagrama que ilustra la relación entre la entrada y la salida, dada por (6.25).



La entrada $f_i(t) = e^{j\omega t}$ y
la salida $f_o(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$.

La ecuación (6.25) se puede expresar en forma simbólica como

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.26)$$

En lenguaje matemático, una función $f(t)$ que satisface la ecuación

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = k f(t), \quad (6.27)$$

se denomina *función propia* (o función característica) y el valor correspondiente de k , *valor propio* (o valor característico). Según la ecuación (6.26), se puede decir que la función característica de un sistema lineal e invariante es una función exponencial. El valor propio $H(j\omega)$ del sistema está definido como la *función del sistema*.

PROBLEMA 6.4 Hallar la respuesta del sistema especificado por $H(j\omega)$, a una constante K .

Solución: según la ecuación (6.26) y por la linealidad del sistema, se tiene

$$\mathcal{L}\{K\} = K \mathcal{L}\{1\}, \quad (6.28)$$

donde $H(0) = H(j\omega)|_{\omega=0}$.

PROBLEMA 6.5 Si la función de entrada de un sistema lineal especificado por $H(j\omega)$ es una función periódica, con período T , hallar la respuesta del sistema.

Solución: puesto que la función de entrada $f_i(t)$ es periódica, entonces

$$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.29)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (6.30)$$

De la ecuación (6.26) se sigue que

$$f_{on}(t) = H(jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (6.31)$$

es la salida en respuesta a la componente de entrada

$$f_{in}(t) = c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (6.32)$$

Como el sistema es lineal, su respuesta total a $f_i(t)$ es la suma de las componentes $f_{on}(t)$.

De este modo

$$f_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}. \quad (6.33)$$

La ecuación (6.33) indica que si la entrada a un sistema lineal es periódica, entonces la salida también es periódica. Se debe observar que la expresión (6.33) es la *respuesta en estado estacionario*.

6.4 RESPUESTAS SENUSOIDALES EN ESTADO ESTACIONARIO

La respuesta senoidal en estado estacionario de un sistema lineal se puede deducir como un caso especial de la respuesta a funciones exponenciales.

PROBLEMA 6.6 Demostrar que las respuestas en estado estacionario del sistema especificado por $H(j\omega)$, a las funciones de entrada $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$ están dadas por $\operatorname{Re}[H(j\omega) e^{j\omega t}]$ e $\operatorname{Im}[H(j\omega) e^{j\omega t}]$ respectivamente, donde Re denota “la parte real de” e Im denota “la parte imaginaria de”.

Solución: supóngase que la respuesta en estado estacionario del sistema a la entrada $\cos \omega t$ es $r_c(t)$, y que la respuesta en estado estacionario a $\operatorname{sen} \omega t$ es $r_s(t)$; es decir

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = r_c(t), \quad (6.34)$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} \omega t\} = r_s(t). \quad (6.35)$$

De la propiedad de linealidad (6.6) se sigue que

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t\} = r_c(t) + j r_s(t). \quad (6.36)$$

Pero como $\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t = e^{j\omega t}$,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = r_c(t) + j r_s(t). \quad (6.37)$$

Según (6.26) se sigue que

$$r_c(t) + j r_s(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.38)$$

Puesto que $r_c(t)$ y $r_s(t)$ son funciones reales de t , se tiene

$$r_c(t) = \operatorname{Re} [H(j\omega) e^{j\omega t}], \quad (6.39)$$

$$r_s(t) = \operatorname{Im} [H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.40)$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \operatorname{Re} [H(j\omega) e^{j\omega t}], \quad (6.41)$$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \operatorname{Im} [H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.42)$$

En análisis de estado estacionario senoidal se suelen emplear fasores para representar funciones senoidales. Así, una función coseno $v(t)$ se puede expresar como

$$v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re} [\mathbf{V}_m e^{j\omega t}],$$

donde $\mathbf{V}_m = v_m e^{j\beta} = v_m \angle \beta$. La cantidad compleja \mathbf{V}_m es el fasor que representa a la función $v(t)$.

PROBLEMA 6.7 Si la función del sistema $H(j\omega)$ se expresa en forma de fasor, es decir,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = |H(j\omega)| \angle \theta(\omega),$$

demostrar que las respuestas en estado estacionario del sistema a las entradas $v_m \cos(\omega t + \beta)$ y $v_m \sin(\omega t + \beta)$ están dadas, respectivamente, por

$$\operatorname{Re} [H(j\omega) \mathbf{V}_m e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta),$$

$$\operatorname{Im} [H(j\omega) \mathbf{V}_m e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta).$$

Solución: se procede como se hizo en el problema 6.6. Sea

$$\mathcal{L}\{v_m \cos(\omega t + \beta)\} = r_c(t), \quad (6.43)$$

$$\mathcal{L}\{v_m \sin(\omega t + \beta)\} = r_s(t). \quad (6.44)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v_m [\cos(\omega t + \beta) + j \sin(\omega t + \beta)]\} &= \mathcal{L}\{\mathbf{V}_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \\ &= \mathcal{L}\{v_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Sea $v_m e^{j\beta} = \mathbf{V}_m$; entonces, de la ecuación (6.26), se tiene

$$\mathcal{L}\{\mathbf{V}_m e^{j\omega t}\} = \mathbf{V}_m \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \mathbf{V}_m H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.46)$$

Por tanto,

$$r_c(t) + j r_s(t) = \mathbf{V}_m H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.47)$$

Puesto que $\mathbf{V}_m H(j\omega) e^{j\omega t} = v_m |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \beta + \theta)}$,

$$r_c(t) = \operatorname{Re} [\mathbf{V}_m H(j\omega) e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta), \quad (6.48)$$

$$r_s(t) = \operatorname{Im} [\mathbf{V}_m H(j\omega) e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta). \quad (6.49)$$

De este modo,

$$\mathcal{L}\{v_m \cos(\omega t + \beta)\} = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta), \quad (6.50)$$

$$\mathcal{L}\{v_m \sin(\omega t + \beta)\} = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta). \quad (6.51)$$

De los resultados anteriores se concluye que la salida $f_o(t)$ se puede representar por el fasor $\mathbf{V}_m H(j\omega)$, si la entrada $f_i(t)$ está representada por el fasor \mathbf{V}_m . Por consiguiente, si la entrada y la salida son funciones senoidales estacionarias, entonces la función del sistema $H(j\omega)$ es el cociente de los valores complejos de la salida y la entrada.

PROBLEMA 6.8 Hallar la respuesta $f_o(t)$ de un sistema lineal cuando la entrada $f_i(t)$ es periódica con período T , y está expresada en serie de Fourier por

$$f_i(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.52)$$

Solución: del principio de superposición y de los resultados de los problemas 6.4 y 6.7, se sigue que

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{f_i(t)\} \\ &= L\left\{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)\right\} \\ &= L\{C_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} L\{C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)\} \\ &= C_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n |H(jn\omega_0)| \cos[n\omega_0 t + \phi_n + \theta(n\omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

6.5 APLICACIONES A CIRCUITOS ELECTRICOS

En esta sección se aplicarán las ideas desarrolladas hasta ahora, a algunos de los problemas que se presentan en el tratamiento de los circuitos eléctricos.

PROBLEMA 6.9 Una fuente de voltaje $v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta)$ se aplica al circuito en serie RLC , que se muestra en la figura 6.5. Hallar la corriente de respuesta $i_s(t)$ en estado estacionario.

Solución: según el resultado del problema 6.1, la respuesta de la corriente $i(t)$ está relacionada con la fuente de voltaje por

$$i(t) = H(p)v(t) = \frac{1}{Z(p)}[v(t)], \quad (6.54)$$

donde $H(p) = 1/Z(p)$ y $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$. Utilizando ahora la notación fasorial, se tiene

$$v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{j\omega t}], \quad (6.55)$$

donde $\mathbf{V}_m = v_m e^{j\beta}$.

Entonces según (6.50), la respuesta senoidal en estado estacionario $i_s(t)$, está dada por

$$i_s(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{Z(j\omega)} \mathbf{V}_m e^{j\omega t}\right]. \quad (6.56)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= |Z(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = |Z(j\omega)| \angle \theta(\omega), \end{aligned} \quad (6.57)$$

donde

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

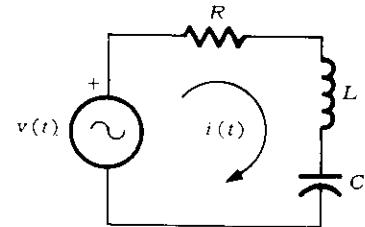


Figura 6.5 El circuito en serie RLC del problema 6.9.

Entonces,

$$i_s(t) = \frac{V_m}{|Z(j\omega)|} \cos [\omega t + \beta - \theta(\omega)], \quad (6.58)$$

Mediante la notación fasorial, la ecuación (6.56) se puede expresar como

$$i_s(t) = \operatorname{Re} [I_m e^{j\omega t}]. \quad (6.59)$$

Entonces el fasor I_m , que representa a $i_s(t)$, está relacionado con el fasor V_m , que representa a $v(t)$, por

$$I_m = \frac{1}{Z(j\omega)} V_m = Y(j\omega) V_m \quad (6.60)$$

o

$$\frac{V_m}{I_m} = Z(j\omega), \quad \frac{I_m}{V_m} = Y(j\omega), \quad (6.61)$$

donde $Z(j\omega)$ y $Y(j\omega)$ se denominan *funciones senoidales de impedancia y admitancia* del circuito, respectivamente.

PROBLEMA 6.10 Una fuente de voltaje $v(t)$, cuya forma es una onda cuadrada, como se muestra en la figura 6.6(a), se aplica al circuito en serie RL que se muestra en la figura 6.6(b). Hallar la corriente de respuesta $i_s(t)$, en estado estacionario.

Solución: la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada está dada por (2.38). Con $\omega_0 = 2\pi/T = 1$, se tiene

$$v(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right]. \quad (6.62)$$

La impedancia del circuito RL (figura 6.6(b)) a cualquier frecuencia angular ω está dada por

$$Z(j\omega) = R + j\omega L.$$

Por consiguiente, para el armónico enésimo la impedancia es:

$$Z(jn\omega_0) = R + jn\omega_0 L.$$

Para este problema, $R = 1\Omega$ y $L = 1h$; por consiguiente,

$$Z(jn\omega_0) = Z(jn) = 1 + jn = |Z(jn)| e^{j\theta(n)},$$

donde

$$|Z(jn)| = \sqrt{1 + n^2}, \quad \theta(n) = \tan^{-1} n.$$

Según el principio de superposición, se sigue que la respuesta en estado estacionario $i_s(t)$, está dada por

$$i_s(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \tan^{-1} 1) - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos(3t - \tan^{-1} 3) \right. \\ \left. - \frac{1}{5\sqrt{26}} \cos(5t - \tan^{-1} 5) + \dots \right]. \quad (6.63)$$

PROBLEMA 6.11 El voltaje de entrada al circuito RC , de dos fuentes, que se muestra en la figura 6.7, es la serie finita de Fourier

$$v_i(t) = 100 \cos t + 10 \cos 3t + \cos 5t.$$

Hallar la respuesta resultante $v_{os}(t)$ en estado estacionario.

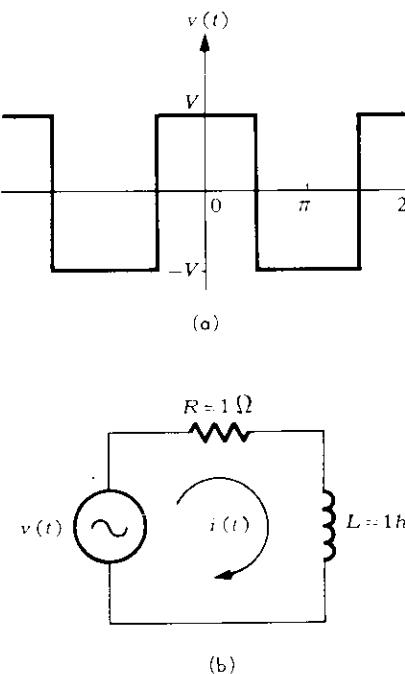


Figura 6.6 (a) Forma de onda de la fuente de voltaje. (b) El circuito en serie RL del problema 6.10.

Solución: puesto que la fuente es

$$v_i(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \left(R + \frac{1}{pC} \right) i(t), \quad (6.64)$$

la respuesta es

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{pC} i(t). \quad (6.65)$$

Dividiendo el resultado (6.65) por (6.64), se obtiene

$$\frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC}.$$

Por consiguiente, la respuesta $v_o(t)$ y la entrada $v_i(t)$ están relacionados por

$$v_o(t) = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} v_i(t) = H(p) v_i(t), \quad (6.66)$$

donde

$$H(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC}.$$

Ahora la razón de fasores V_o/V_i a cualquier frecuencia angular ω es

$$\frac{V_o}{V_i} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j\omega RC}. \quad (6.67)$$

Puesto que $\omega_0 = 1$, la razón de fasores del armónico enésimo es

$$\frac{V_o}{V_i} |_n = H(jn\omega_0) = H(jn) = \frac{1}{\sqrt{1 + (nRC)^2}} e^{-jnRC}.$$

Por tanto, según el principio de superposición se sigue que la respuesta en estado estacionario, $v_{os}(t)$, está dada por

$$\begin{aligned} v_{os}(t) &= \frac{100}{\sqrt{1 + R^2 C^2}} \cos(t - \tan^{-1} RC) + \frac{10}{\sqrt{1 + 9R^2 C^2}} \cos(3t - \tan^{-1} 3RC) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1 + 25R^2 C^2}} \cos(5t - \tan^{-1} 5RC). \end{aligned} \quad (6.68)$$

En este problema, $H(j\omega)$ de (6.67), se denomina *función de transferencia de voltaje*.

6.5a Cálculo de potencia en estado estacionario

PROBLEMA 6.12 El voltaje $v_{ab}(t)$, en los terminales $a-b$ del circuito de la figura 6.8, es periódico y está definido por la serie de Fourier

$$v_{ab}(t) = V_a + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n), \quad (6.69)$$

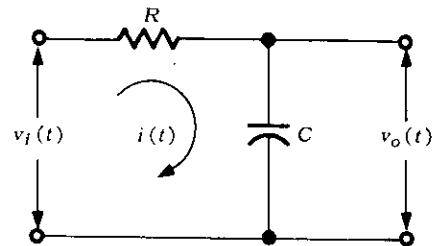


Figura 6.7 El circuito RC de dos fuentes del problema 6.11.

y la corriente $i_s(t)$, en estado estacionario que entra por el terminal a es

$$i_s(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n). \quad (6.70)$$

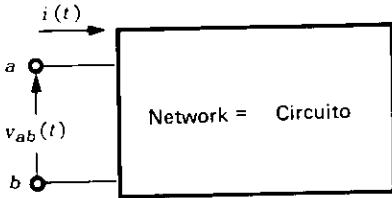


Figura 6.8 El circuito del problema 6.12.

Demostrar que la potencia promedio de entrada P_{ab} definida por

$$P_{ab} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_{ab}(t) i_s(t) dt \quad (6.71)$$

es igual a

$$P_{ab} = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\beta_n - \alpha_n). \quad (6.72)$$

Solución: sustituyendo (6.69) y (6.70) en (6.71), se tiene

$$\begin{aligned} P_{ab} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[V_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \right] \left[I_o + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[V_o I_o + V_o \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) + I_o \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_n I_k \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \right] dt \\ &= V_o I_o \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + V_o \sum_{k=1}^{\infty} I_k \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt \\ &\quad + I_o \sum_{n=1}^{\infty} V_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sum_{k=1}^{\infty} I_k \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad de la sección 1.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) dt &= 0, \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{T}{2} \cos(\beta_n - \alpha_n), & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, (6.73) se puede expresar como

$$P_{ab} = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\beta_n - \alpha_n).$$

Denotando la raíz cuadrática media del armónico enésimo del voltaje por $V_{eff,n}$ y la del armónico enésimo de la corriente por $I_{eff,n}$, se tiene

$$\frac{1}{2} V_n I_n = V_{eff,n} I_{eff,n}. \quad (6.74)$$

Sea

$$\theta_n = \beta_n - \alpha_n. \quad (6.75)$$

Entonces θ_n denota la diferencia de fase entre los armónicos enésimos del voltaje y de la corriente. Introduciendo (6.74) y (6.75) en (6.72), se obtiene

$$\begin{aligned} P_{ab} &= V_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_{eff,n} I_{eff,n} \cos \theta_n \\ &\approx P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n, \end{aligned} \quad (6.76)$$

donde P_n es la potencia promedio del armónico enésimo.

La ecuación (6.76) muestra que la potencia promedio entregada por una excitación periódica a un circuito es la suma de la potencia promedio entregada por los armónicos individuales. No hay contribuciones a la potencia promedio, por parte de la corriente a una frecuencia y del voltaje a otra frecuencia.

PROBLEMA 6.13 Determinar la potencia promedio entregada al circuito de un puerto, de la figura 6.8, si se sabe que

$$v_{ab}(t) = 10 + 2 \cos(t + 45^\circ) + \cos(2t + 45^\circ) + \cos(3t - 60^\circ),$$

$$i(t) = 5 + \cos t + 2 \cos(3t + 75^\circ).$$

Solución: para V_i, I_i, θ_i y p_i , siendo $i = 0, 1, 2, 3$, se tiene

$$V_0 = 10, \quad I_0 = 5, \quad P_0 = 50,$$

$$V_1 = 2, \quad I_1 = 1, \quad \theta_1 = 45^\circ, \quad P_1 = \frac{1}{2} 2 \cos 45^\circ = 0.707,$$

$$V_2 = 1, \quad I_2 = 0, \quad P_2 = 0,$$

$$V_3 = 1, \quad I_3 = 2, \quad \theta_3 = -135^\circ, \quad P_3 = \frac{1}{2} 2 \cos(-135^\circ) = -0.707.$$

Por tanto, la potencia promedio entregada al circuito es

$$P_{ab} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 50 + 0.707 + 0 - 0.707 = 50 \text{ w.}$$

6.6 APLICACIONES A SISTEMAS MECÁNICOS

El método presentado en la sección precedente se puede aplicar también a sistemas mecánicos.

PROBLEMA 6.14 Considerar el sistema mecánico ilustrado en la figura 6.9 que consiste de un resorte, una masa y un amortiguador. Si el sistema se perturba por una fuerza $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \beta)$, hallar el desplazamiento $x_s(t)$, de la respuesta en estado estacionario.

Solución: la respuesta $x_s(t)$ y la función excitadora $f(t)$ están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t), \quad (6.77)$$

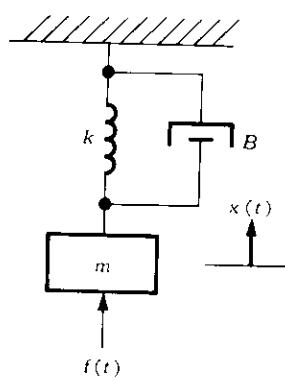


Figura 6.9 El sistema mecánico del problema 6.14.

donde m , B y k representan la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante del resorte, respectivamente. La ecuación (6.77) se puede expresar en forma operacional como

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + Bp + k} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.78)$$

donde

$$H(p) = \frac{1}{(mp^2 + Bp + k)}.$$

Dado que se pide la respuesta en estado estacionario, mediante notación fasorial, se tiene

$$f(t) = f_o \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re} [\mathbf{F}_o e^{j\omega t}],$$

donde $\mathbf{F}_o = f_o e^{j\beta}$.

Entonces, según (6.50), se tiene que la respuesta en estado estacionario, $x_s(t)$, está dada por

$$x_s(t) = \operatorname{Re} [\mathbf{F}_o H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.79)$$

Ahora bien;

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + B(j\omega) + k} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega B} = |H(j\omega)| \angle \theta(\omega),$$

donde

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 B^2}}, \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega B}{k - m\omega^2} \right).$$

Entonces,

$$x_s(t) = \frac{f_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 B^2}} \cos \left(\omega t + \beta - \tan^{-1} \frac{\omega B}{k - m\omega^2} \right). \quad (6.80)$$

El ángulo $\theta(\omega)$ se denomina ángulo de fase en retraso.

PROBLEMA 6.15 Analizar el movimiento en estado estacionario del sistema que se muestra en la figura 6.10(a), si la fuerza perturbadora $f(t)$ es la que se muestra en la figura 6.10(b).

Solución: la respuesta $x(t)$, el desplazamiento de la masa m desde su posición de equilibrio, y la fuerza perturbadora están relacionadas por

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k x(t) = f(t), \quad (6.81)$$

ecuación que se puede expresar también como:

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + k} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.82)$$

donde

$$H(p) = \frac{1}{(mp^2 + k)}.$$

La expansión en serie de Fourier de $f(t)$, se obtiene del resultado del problema 2.15, esto es,

$$f(t) = -\frac{A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right),$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$.

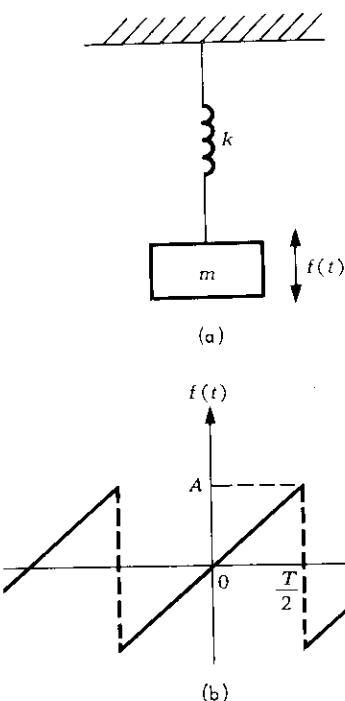


Figura 6.10 (a) El sistema mecánico del problema 6.15. (b) La fuerza perturbadora del problema 6.15.

Puesto que interesa sólo el movimiento forzado o movimiento en estado estacionario del sistema, se procede a utilizar la notación fasorial. Entonces, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + k} = \frac{1}{k - m\omega^2} = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

y

$$H(jn\omega_0) = \frac{1}{[k - m(n\omega_0)^2]}.$$

Dado que el ángulo de fase en retraso $\theta(\omega)$ es cero, entonces, por (6.51), se obtiene

$$x_s(t) = -\frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin \omega_0 t}{k - m\omega_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega_0 t}{k - 4m\omega_0^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3\omega_0 t}{k - 9m\omega_0^2} + \dots \right]. \quad (6.83)$$

6.7 RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN IMPULSO UNITARIO—FUNCION DEL SISTEMA

Ahora se considerará una situación más general en la cual la excitación de un sistema es cualquier función dada del tiempo.

La respuesta de un sistema lineal al impulso unitario $\delta(t)$, se denota por $h(t)$. Simbólicamente esto se expresa como

$$L\{\delta(t)\} = h(t). \quad (6.84)$$

Si el sistema es invariante (o de parámetros constantes), entonces, según la ecuación (6.7) se observa que su respuesta a $\delta(t-\tau)$ está dada por $h(t-\tau)$; es decir,

$$L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau). \quad (6.85)$$

PROBLEMA 6.16 Demostrar que la respuesta $f_o(t)$ de un sistema lineal e invariante, a una entrada arbitraria $f_i(t)$, se puede expresar como la convolución de la entrada $f_i(t)$ y de la respuesta del sistema al impulso unitario $h(t)$, es decir,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) h(t-\tau) d\tau = f_i(t) * h(t) \quad (6.86)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(t) * f_i(t). \quad (6.87)$$

Solución: según la propiedad (2.68) de la función δ , $f_i(t)$ se puede expresar como

$$f_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) \delta(t-\tau) d\tau. \quad (6.88)$$

Entonces, según la linealidad del operador L , dada por (6.6) y en razón de la ecuación (6.85), se tiene

$$f_o(t) = L\{f_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) L\{\delta(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (6.89)$$

Según la definición (4.105) y la propiedad (4.108) de la convolución, la ecuación (6.89) se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_o(t) &= f_i(t) * h(t) = h(t) * f_i(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La ecuación (6.86) o (6.87) presenta un resultado muy interesante, pues implica que la respuesta de un sistema lineal está determinado únicamente por el conocimiento de la respuesta al impulso unitario $h(t)$ del sistema.

6.7a Función del sistema

La transformada de Fourier de la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal, se denomina *función del sistema*:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (6.90)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.91)$$

Las ecuaciones (6.90) y (6.91) indican que la respuesta al impulso unitario, y la función del sistema constituyen un par de transformadas de Fourier.

PROBLEMA 6.17 Si $F_i(\omega)$ y $F_o(\omega)$ denotan las transformadas de Fourier, de la entrada $f_i(t)$ y de la salida $f_o(t)$ de un sistema lineal, respectivamente, demostrar que

$$F_o(\omega) = F_i(\omega) H(\omega), \quad (6.92)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.93)$$

donde $H(\omega)$ es la función del sistema definido por (6.90).

Solución: por (6.86), se tiene

$$f_o(t) = f_i(t) * h(t).$$

Por consiguiente, aplicando el teorema de convolución en el tiempo, dado por (4.122), se obtiene

$$F_o(\omega) = F_i(\omega) H(\omega).$$

Aplicando la fórmula (4.16), de la transformada inversa de Fourier, se obtiene

$$f_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_o(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

PROBLEMA 6.18 Verificar que la función del sistema $H(\omega)$ definida por (6.90), es exactamente la misma función del sistema $H(j\omega)$ definida por (6.26).

Solución: si $f_i(t) = e^{j\omega_0 t}$, entonces de (5.21), se tiene

$$F_i(\omega) = \mathcal{F}[f_i(t)] = \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad [5.21]$$

De donde,

$$F_i(\omega) H(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) H(\omega) = 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0), \quad (6.94)$$

en razón de la propiedad (2.74), de la función δ . Entonces, por (6.93), se tiene

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= H(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Dado que (6.95) se cumple para cualquier valor de ω_0 , se puede cambiar ω_0 por ω y se obtiene

$$f_o(t) = L\{e^{j\omega t}\} = H(\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.96)$$

Por (6.26), se tiene

$$f_o(t) = L\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad [6.26]$$

Comparando (6.96) y (6.26), se concluye que

$$H(\omega) = H(j\omega).$$

De hecho, en la definición de la transformada de Fourier de $f(t)$, se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad [4.15]$$

la variable ω siempre aparece con j , y por consiguiente, la integral se puede expresar como función de $j\omega$. De este modo, se puede expresar la definición (4.15) como

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

y, en consecuencia,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Por consiguiente, $F(\omega)$ y $F(j\omega)$ representan la misma función $\mathcal{F}[f(t)]$. La distinción es sólo cuestión de notación. En el resto de este libro $F(\omega)$ y $F(j\omega)$ se utilizarán indistintamente. De este modo, la relación (6.92) se puede expresar también como

$$F_o(j\omega) = F_i(j\omega) H(j\omega). \quad (6.97)$$

Por (6.92) ó (6.97), se tiene

$$H(j\omega) = \frac{F_o(j\omega)}{F_i(j\omega)} = \frac{\mathcal{F}[f_o(t)]}{\mathcal{F}[f_i(t)]}. \quad (6.98)$$

La ecuación (6.98) indica que la función del sistema $H(j\omega)$ también es el cuociente entre la transformada de la respuesta y la transformada de la fuente.

PROBLEMA 6.19 Hallar la respuesta al impulso unitario, del circuito RC que se muestra en la figura 6.11(a).

Solución: la función del sistema $H(j\omega)$, obtenida en el resultado (6.67) del problema 6.11, está dada por

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC} \left(\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \right). \quad (6.99)$$

Por consiguiente, según el resultado del problema 4.11, se tiene

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{RC} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \right] = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t). \quad (6.100)$$

La respuesta $h(t)$ al impulso unitario está trazada en la figura 6.11(b).

PROBLEMA 6.20 Una fuente de voltaje $v_i(t) = e^{-t} u(t)$ se aplica al circuito RC de la figura 6.11(a); hallar la respuesta, el voltaje $v_o(t)$, si $R = 1/2\Omega$ y $C = 1\text{ f}$.

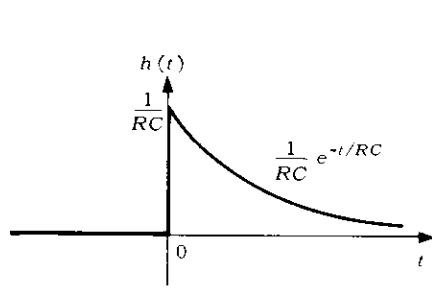
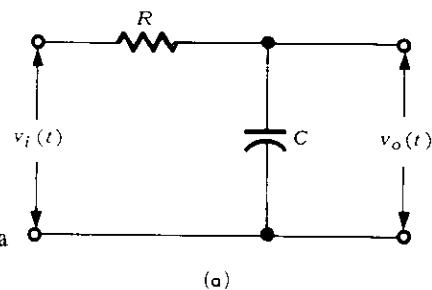


Figura 6.11 (a) El circuito RC del problema 6.19. (b) La respuesta al impulso unitario.

Solución: sustituyendo $R = 1/2\Omega$ y $C = 1$ f en (6.100) se obtiene

$$h(t) = 2 e^{-2t} u(t). \quad (6.101)$$

Por tanto, según (6.86), se tiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) 2e^{-2(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau \\ &= 2 e^{-2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dado que

$$u(\tau) u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau < 0, \tau > t \\ 1 & \text{para } 0 < \tau < t, \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \left(2 e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \right) u(t) \\ &= 2 e^{-2t} (e^t - 1) u(t) \\ &= 2 (e^{-t} - e^{-2t}) u(t). \end{aligned} \quad (6.102)$$

La expresión $u(t)$ en el resultado (6.102) indica que no hay respuesta debida a la fuente, antes de que ésta se aplique.

PROBLEMA 6.21 Hallar la respuesta del circuito RC de la figura 6.11(a), al escalón unitario $u(t)$, por convolución.

Solución: por (6.100), se tiene

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t).$$

Por tanto, según (6.86), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} u(t - \tau) d\tau \\ &= \left[\frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \right] u(t) \\ &= \left(\frac{1}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau \right) u(t) \\ &= (1 - e^{-t/RC}) u(t). \end{aligned} \quad (6.103)$$

6.7b Sistema causal

Un sistema físico pasivo tiene la propiedad de que si la fuente es cero para $t < t_0$, entonces la respuesta también es cero para $t < t_0$; es decir, si

$$f_i(t) = 0 \quad \text{para } t < t_0, \quad (6.104)$$

entonces

$$f_o(t) = L\{f_i(t)\} = 0 \quad \text{para } t < t_0. \quad (6.105)$$

Un sistema que satisface (6.104) y (6.105) se llama *sistema causal*. Una función $f(t)$ se denominará *causal* si su valor es cero para $t < 0$; es decir, $f(t) = 0$ para $t < 0$. Se puede demostrar que todos los sistemas físicamente realizables son causales.

PROBLEMA 6.22 Demostrar que la respuesta $f_o(t)$ de un sistema lineal causal, a cualquier fuente $f_i(t)$, está dada por

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.106)$$

$$= \int_0^\infty f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (6.107)$$

Solución: de (6.104) y (6.105) se sigue que $h(t)$, la respuesta al impulso unitario, es causal; es decir,

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < 0. \quad (6.108)$$

Esto significa que

$$h(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau < 0 \quad (6.109)$$

y

$$h(t - \tau) = 0 \quad \text{para } t - \tau < 0 \quad \text{ó} \quad -\tau > t. \quad (6.110)$$

Si se aplica (6.110), se tiene que el integrando en la ecuación (6.86) es cero en el intervalo $\tau = t$ a $\tau = \infty$. De (6.86) se tiene, entonces,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^\infty f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Análogamente, si se aplica (6.109) se tiene que el integrando en (6.87) es cero en el intervalo $\tau = -\infty$ a $\tau = 0$. Por (6.87) se tiene, entonces,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^\infty f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau.$$

PROBLEMA 6.23 Si la función de la fuente $f_i(t)$ es causal, es decir, si la fuente $f_i(t)$ se aplica en $t = 0$, demostrar que la respuesta $f_o(t)$ del sistema lineal causal es

$$f_o(t) = \int_0^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.111)$$

Solución: Si $f_i(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, entonces el límite inferior de la integral que aparece en la ecuación (6.106), se puede cambiar a cero, pues en el intervalo $\tau = -\infty$ a $\tau = 0$, el integrando es cero. De este modo,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

6.8 RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN ESCALON UNITARIO—INTEGRAL DE SUPERPOSICION

Las ecuaciones (6.86) y (6.87) expresan la respuesta de un sistema lineal en términos de la respuesta al impulso unitario. En algunos casos también es conveniente expresar la respuesta en términos de la *respuesta del sistema al escalón unitario*.

La respuesta de un sistema al escalón unitario $u(t)$ se denota por $a(t)$, es decir,

$$\mathcal{L}[u(t)] = a(t). \quad (6.112)$$

PROBLEMA 6.24 Demostrar que $a(t)$, la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario, se puede expresar como

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad (6.113)$$

$$a(\infty) = a(t)|_{t=\infty} = H(0), \quad (6.114)$$

donde $H(\omega)$ es la función del sistema y $h(\tau)$ es la respuesta al impulso unitario. Si el sistema es causal, demostrar que

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (6.115)$$

Solución: puesto que $f_i(t) = u(t)$ y $f_o(t) = a(t)$, se sigue de (6.87) que

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (6.116)$$

Dado que

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau > t \\ 1 & \text{para } \tau < t, \end{cases}$$

se tiene

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau.$$

Haciendo $t = \infty$, se obtiene

$$a(\infty) = a(t)|_{t=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

En realidad, esta integral se puede expresar como

$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau|_{\omega=0} = H(\omega)|_{\omega=0} = H(0).$$

Puesto que $h(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, la ecuación (6.113), para un sistema causal, se convierte en

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

PROBLEMA 6.25 Utilizando (6.115), resolver de nuevo el problema 6.21.

Solución: por (6.100), se tiene

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t). \quad [6.100]$$

Sustituyendo (6.100) en (6.115), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) = a(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} d\tau \\ &= \left[\frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\tau/RC} d\tau \right] u(t) \\ &= (1 - e^{-t/RC}) u(t), \end{aligned}$$

lo cual es exactamente el mismo resultado de (6.103).

PROBLEMA 6.26 Demostrar que la transformada de Fourier de $a(t)$ está dada por

$$A(\omega) = \mathcal{F}[a(t)] = \pi H(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega), \quad (6.117)$$

donde $H(\omega)$ es la función del sistema.

Solución: por (5.35), se tiene

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = \mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad [5.35]$$

Si ahora $\mathcal{F}[f_o(t)] = \mathcal{F}[a(t)] = A(\omega)$, entonces, por (6.92), se tiene

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] H(\omega) \\ &= \pi \delta(\omega) H(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega) \\ &= \pi H(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega), \end{aligned}$$

en razón de (2.74), una propiedad de la función δ .

Otra forma de solución: puesto que según (6.113), se tiene

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau,$$

del resultado (5.55), del problema 5.12, se sigue que

$$A(\omega) = \frac{1}{j\omega} H(\omega) + \pi H(0) \delta(\omega).$$

PROBLEMA 6.27 Si $a(t)$ es la respuesta al escalón unitario de un sistema lineal cuya función es $H(\omega)$, demostrar que la respuesta $f_o(t)$ del sistema, a cualquier fuente $f_i(t)$, está dada por

$$f_o(t) = f_i(-\infty) H(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau, \quad (6.118)$$

donde $f'_i(\tau) = df_i(\tau)/d\tau$.

Solución: cualquier función de entrada $f_i(t)$ se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_i(-\infty) + \int_{-\infty}^t f'_i(\tau) d\tau \\ &= f_i(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) u(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.119)$$

puesto que

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau \\ 1 & \text{para } t > \tau. \end{cases}$$

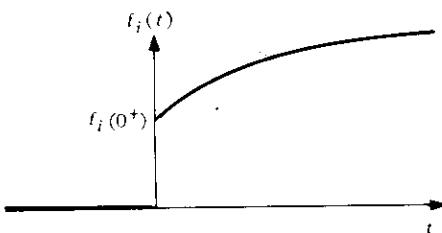
Entonces, por (6.28) y (6.112), se tiene

$$L\{K\} = K H(0) \quad \text{y} \quad L\{u(t)\} = a(t) \longrightarrow L\{u(t - \tau)\} = a(t - \tau).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{f_i(t)\} = L\{f_i(-\infty)\} + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) L\{u(t - \tau)\} d\tau \\ &= f_i(-\infty) H(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.28 En un sistema lineal y causal, la función de entrada, $f_i(t) = 0$ para $t < 0$, tiene una discontinuidad de valor $f_i(0+)$ en $t = 0$, y es continua para $t > 0$, como se muestra en la figura 6.12. Demostrar que la respuesta $f_o(t)$ del sistema, está dada por la integral de superposición, o integral de Duhamel.



$$f_o(t) = f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau. \quad (6.120)$$

Solución: como $f_i(-\infty) = 0$, por (6.119), se tiene

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau. \quad (6.121)$$

Como $f_i(t)$ tiene una discontinuidad de valor $f_i(0+)$ en $t = 0$, se tiene, entonces, según el resultado (2.94) del problema 2.28, que

$$f'_i(t) = f_i(0+) \delta(t) + f'_{i+}(t), \quad (6.122)$$

donde $f'_{i+}(t) = f'_i(t)u(t)$, es decir, la derivada de $f_i(t)$, para $t > 0$. Sustituyendo (6.122) en (6.121), se obtiene

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_i(0+) \delta(\tau) + f'_{i+}(\tau) u(\tau)] a(t - \tau) d\tau \\ &= f_i(0+) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) a(t - \tau) d\tau + \int_{0+}^{\infty} f'_{i+}(\tau) a(t - \tau) d\tau \\ &= f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

puesto que, $a(t - \tau) = 0$, para $\tau > t$ en el sistema causal.

La ecuación (6.120) expresa la respuesta de un sistema causal en términos de $a(t)$, la respuesta a un escalón unitario.

PROBLEMA 6.29 Explicar de qué manera la integral de superposición (6.120), expresa realmente la respuesta de un sistema, como una suma continua de las respuestas a las componentes en escalón, de la función $f_i(t)$.

Solución: Una función de entrada $f_i(t)$ se puede aproximar por la suma de un gran número de escalones infinitesimales, como se muestra en la figura 6.13. Un escalón infinitesimal localizado en τ se puede expresar como

$$\frac{df_i(\tau)}{d\tau} \Delta \tau u(t - \tau) = f'_i(\tau) \Delta \tau u(t - \tau). \quad (6.123)$$

En la figura 6.13 se observa que $f_i(t)$ se puede expresar como

$$f_i(t) = f_i(0+) u(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t f'_i(\tau) \Delta \tau u(t - \tau). \quad (6.124)$$

Puesto que la respuesta del sistema al escalón unitario $u(t)$ es $a(t)$, la respuesta debida a un escalón infinitesimal (6.123) está dada por

$$f'_i(\tau) \Delta \tau a(t - \tau).$$

De donde $f_o(t)$, la respuesta del sistema a la fuente $f_i(t)$, estará expresada como la suma continua de las respuestas a los componentes escalonados de $f_i(t)$, es decir

$$\begin{aligned} f_o(t) &= f_i(0+) a(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t f'_i(\tau) \Delta \tau a(t - \tau) \\ &= f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.125)$$

PROBLEMA 6.30 Resolver el problema 6.20 utilizando la integral de superposición, dada en (6.120).

Solución: respecto a la figura 6.14, hacer: $v_i(t) = e^{-t} u(t)$. De este modo, se tiene $v_i(0+) = 1$, $v'_i(t) = -e^{-t}$ para $t > 0$.

$a(t)$, la respuesta al escalón unitario, se obtiene del resultado (6.103) como

$$a(t) = (1 - e^{-2t}) u(t).$$

De donde, utilizando (6.120), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &\sim v_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t v'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) + \int_{0+}^t -e^{-\tau} [1 - e^{-2(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) - \left[\int_0^t e^{-\tau} d\tau - e^{-2t} \int_0^t e^\tau d\tau \right] u(t) \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) + (e^{-t} - 1) u(t) + e^{-2t} (e^t - 1) u(t) \\ &= 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t), \end{aligned}$$

lo cual es el resultado (6.102).

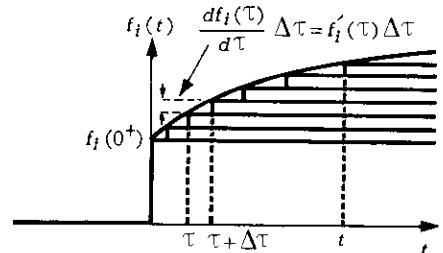


Figura 6.13 La función de entrada $f_i(t)$, aproximada por la suma de funciones escalones.

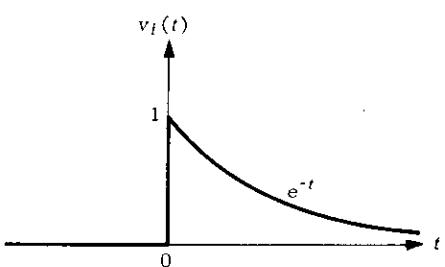


Figura 6.14 La fuente de voltaje del problema 6.30.

6.9 TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

Para que un sistema de transmisión no introduzca distorsión en las señales, se requiere que la forma de onda de la respuesta sea una réplica exacta de la forma de onda de la entrada, aunque la amplitud de la respuesta puede diferir de la amplitud de la entrada.

PROBLEMA 6.31 Supongase que la función $H(j\omega)$ de un sistema lineal, está dada por

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0}, \quad (6.126)$$

donde K y t_0 son constantes positivas. Hallar la respuesta del sistema, $f_o(t)$, a la excitación, $f_i(t)$.

Solución: sea

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = F_i(j\omega), \quad \mathcal{F}[f_o(t)] = F_o(j\omega).$$

Según (6.92), se tiene que $F_i(j\omega)$ y $F_o(j\omega)$ están relacionadas por

$$\begin{aligned} F_o(j\omega) &= F_i(j\omega) H(j\omega) \\ &= K F_i(j\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (6.127)$$

De donde,

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F_o(j\omega)] \\ &= \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_i(j\omega) e^{-j\omega t_0}] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned}$$

En razón de que

$$f_i(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_i(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$f_o(t)$ se puede expresar como

$$f_o(t) = K f_i(t - t_0). \quad (6.128)$$

La ecuación (6.128) muestra que la respuesta es una réplica retardada de la función de entrada, con la magnitud de la respuesta alterada por el factor constante K , lo cual se ilustra en la figura 6.15.

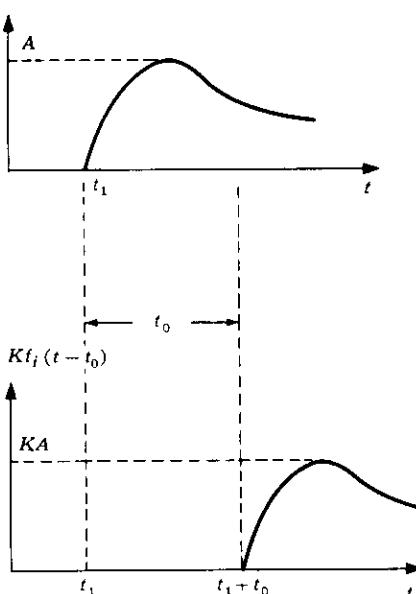


Figura 6.15 La función de entrada del problema 6.31 y su réplica retardada.

En general, se tiene

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)},$$

donde $|H(j\omega)|$ se conoce como la *amplitud de la respuesta* del sistema, y $\theta(\omega)$ como la *fase de la respuesta*. Del resultado del problema 6.31 se concluye que la función del sistema que conduce a una transmisión sin distorsión, tiene una amplitud constante y una fase lineal, es decir,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= K_1, \quad \text{una constante (independiente de } \omega\text{),} \\ \theta(\omega) &= \omega K_2, \quad \text{una función lineal de } \omega, \end{aligned} \quad (6.129)$$

donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias.

PROBLEMA 6.32 Hallar $h(t)$, la respuesta al impulso unitario de un sistema de transmisión sin distorsión.

Solución: según la definición de la función de un sistema, dada por (6.91), se tiene

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Sustituyendo ahora $H(j\omega)$, del sistema de transmisión sin distorsión, dada por (6.126), en la anterior expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= K \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (6.130)$$

resultado que se obtiene mediante la identidad (5.6).

PROBLEMA 6.33 La constante de propagación $\gamma(\omega)$, de una línea de transmisión bajo condiciones de estado senoidal, está definida como

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)},$$

donde R es la resistencia, L la inductancia en serie, G la conductancia, y C la capacitancia en paralelo, por unidad de longitud de la línea. Demostrar que la condición para que la línea no introduzca distorsión está dada por

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}. \quad (6.131)$$

Solución: si $v(x, t)$ es el voltaje en un punto distante x de la entrada, y en un tiempo t , entonces para una entrada senoidal de frecuencia ω , el voltaje se puede expresar como

$$v(x, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{j\omega t} - \gamma(\omega)x], \quad (6.132)$$

donde \mathbf{V}_m es la amplitud compleja del voltaje a la entrada y $\gamma(\omega)$ es la constante de propagación.

Entonces, el voltaje de entrada está dado por $v_i(t) = v(0, t)$, y el voltaje de salida por $v_o(t) = v(l, t)$ donde l es la longitud de la línea de transmisión. De este modo, mediante notación fasorial, se tiene

$$v_i(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{j\omega t}]$$

y

$$v_o(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{j\omega t} - \gamma(\omega)l] = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{-\gamma(\omega)l} e^{j\omega t}].$$

De donde, la función del sistema $H(j\omega)$ para la línea de transmisión está dada por

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_m e^{-\gamma(\omega)l}}{\mathbf{V}_m} = e^{-\gamma(\omega)l}. \quad (6.133)$$

Si $\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-\gamma(\omega)l} = e^{-[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]l} \\ &= e^{-\alpha(\omega)l} e^{-j\beta(\omega)l} \\ &= |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \end{aligned} \quad (6.134)$$

donde

$$[H(j\omega)] = e^{-\alpha(\omega)t}, \quad \theta(\omega) = -\beta(\omega)t.$$

Según las condiciones para transmisión sin distorsión, dadas por (6.129), se concluye que $\alpha(\omega)$ debe ser constante e independiente de ω , y $\beta(\omega)$ debe ser una función lineal de ω ; es decir

$$\alpha(\omega) = K_1, \quad \beta(\omega) = K_2\omega.$$

Entonces, $\gamma(\omega)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ &= \sqrt{RG \left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right) \left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right)} \\ &= \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\ &= K_1 + jK_2\omega. \end{aligned} \tag{6.135}$$

Es obvio que la ecuación (6.135) se cumple si

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}.$$

Entonces, la constante de propagación está dada por

$$\gamma(\omega) = \sqrt{RG \left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right)^2} = \sqrt{RG} + j\omega L \sqrt{\frac{G}{R}} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega).$$

De donde,

$$\alpha(\omega) = \sqrt{RG} = K_1, \quad \beta(\omega) = \omega L \sqrt{\frac{G}{R}} = \omega L \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega \sqrt{LC} = \omega K_2.$$

De este modo, cuando la condición (6.131) se cumple, se tiene la línea sin distorsión.

6.10 FILTROS IDEALES

La ecuación (6.97) muestra que el espectro de frecuencia de la respuesta, $F_o(j\omega)$, está relacionado con el espectro de frecuencia de la fuente, $F_i(j\omega)$, por medio de la función del sistema, $H(j\omega)$, según

$$F_o(j\omega) = F_i(j\omega) H(j\omega). \tag{6.97}$$

Esto se ilustra en la figura 6.16.

Se observa que $H(j\omega)$ actúa como una función ponderadora de las componentes de diferente frecuencia en la entrada. En este sentido, la relación (6.97) indica la característica de filtro del sistema lineal. Si la característica ponderadora o característica de filtro es el interés principal, entonces generalmente se hace referencia al sistema como al *filtro*.

El llamado *filtro ideal para frecuencias bajas* se define como un sistema para el cual la función del sistema, $H(j\omega)$, está dada por

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{para } |\omega| > \omega_c \end{cases}, \tag{6.136}$$

donde a ω_c se le conoce como la *frecuencia de corte*.

PROBLEMA 6.34 Hallar $h(t)$, la respuesta al impulso unitario, de un filtro ideal para frecuencias bajas y comentar el resultado.

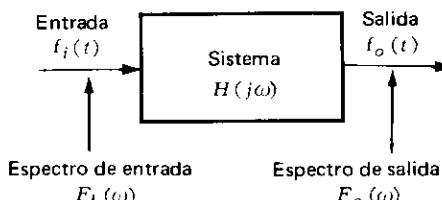


Figura 6.16 Ilustración de la relación (6.97).

Solución: la figura 6.17(a) muestra las características de un filtro ideal para frecuencias bajas. Según (6.91), la respuesta al impulso unitario, $h(t)$, se obtiene por

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi(t-t_0)2j} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\
 &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}. \tag{6.137}
 \end{aligned}$$

El resultado (6.137) está dibujado en la figura 6.17(b), de la cual se sacan las siguientes conclusiones:

(1) La entrada aplicada es distorsionada por el sistema, debido al hecho de que el filtro transmite sólo una limitada banda de frecuencias.

(2) El valor pico de la respuesta ω_c/π es proporcional a la frecuencia de corte ω_c . El ancho del pulso principal es $2\pi/\omega_c$; se puede hacer referencia a esta cantidad, como la duración efectiva del pulso de salida, T_d . Se observa que cuando $\omega_c \rightarrow \infty$ (es decir, cuando el filtro permite el paso de todas las frecuencias), $T_d \rightarrow 0$, y el pico de la respuesta $\rightarrow \infty$; en otros términos, la respuesta se approxima a un impulso, tal como debe ser.

(3) También se observa que la respuesta no es cero antes de $t = 0$, es decir, antes de que se aplique la entrada. Esta es la característica de un sistema físicamente no realizable. Los filtros ideales no son físicamente realizables, y por consiguiente, no son necesariamente sistemas causales.

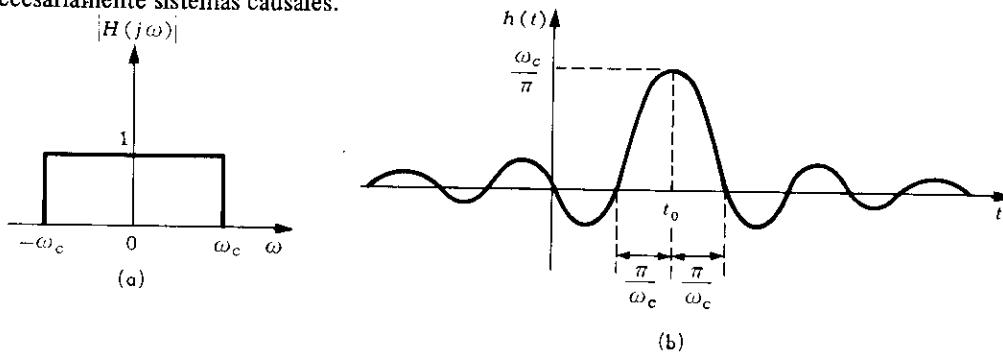


Figura 6.17 (a) Características de frecuencia de un filtro ideal para frecuencias bajas.
 (b) La respuesta al impulso unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas.

La función seno-integral (del límite superior y) es

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^y Sa(x) dx.$$

PROBLEMA 6.35 (a) Evaluar la función seno-integral. (b) Hallar $a(t)$, la respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas y comentar el resultado.

Solución: (a) dado que $Sa(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una función par, entonces

$$Si(-y) = -Si(y).$$

Según la definición, cuando $y = 0$, entonces

$$\text{Si}(0) = 0.$$

Dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

se tiene

$$\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{Si}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

En la figura 6.18 se muestra una gráfica de $\text{Si}(y)$.

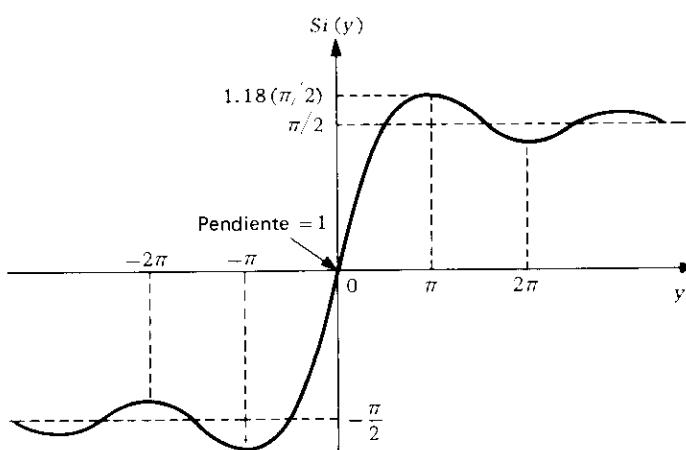


Figura 6.18 La función seno-integral.

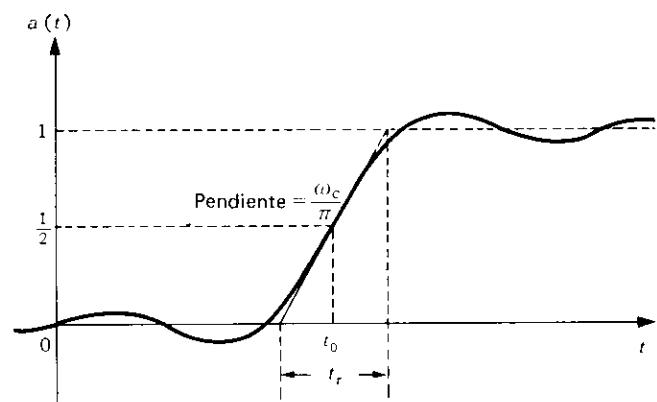


Figura 6.19 La respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas.

(b) A partir de (6.113), $a(t)$ la respuesta al escalón unitario, se puede obtener de $h(t)$, la respuesta al impulso unitario; es decir,

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad [6.113]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_c(\tau - t_0)}{(\tau - t_0)} d\tau. \quad (6.138)$$

Cambiando la variable $\omega_c(\tau - t_0)$ por x , en la integral (6.138), se obtiene

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Mediante la función seno-integral, la ecuación (6.139) se puede expresar como

$$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)]. \quad (6.140)$$

En la figura 6.19 se muestra una gráfica de $a(t)$, la respuesta al escalón unitario.

En el resultado anterior se observa lo siguiente:

- (1) se observa nuevamente la distorsión debida a la banda limitada del filtro;
- (2) se observa nuevamente que la respuesta no es cero antes de $t = 0$;
- (3) utilizando $Si(\pm\infty) = \pm\pi/2$, se observa que cuando $\omega_c \rightarrow \infty$,

$$a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{para } t < t_0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{para } t > t_0,$$

y la respuesta se convierte en $u(t - t_0)$, un escalón unitario retardado, tal como debe ser, y

- (4) la entrada, un escalón unitario, tiene un súbito ascenso mientras la respuesta muestra un ascenso gradual.

Si se define el *tiempo de ascenso* de la respuesta $a(t)$, como al intervalo t_r entre las intercepciones de la tangente en $t = t_0$, con las líneas $a(t) = 0$ y $a(\infty) = 1$, entonces, como es evidente según la figura 6.19, se tiene

$$\left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{t_r} = \frac{\omega_c}{\pi}.$$

Por tanto,

$$t_r = \frac{\pi}{\omega_c} \quad (6.141)$$

o

$$\omega_c t_r = \pi. \quad (6.142)$$

El tiempo de ascenso (o tiempo de subida) t_r está dado por la ecuación (6.141) y es inversamente proporcional al ancho de banda del filtro. La ecuación (6.142) indica que

$$(\text{ancho de banda}) \times (\text{tiempo de ascenso}) = \text{constante}$$

6.11 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 6.36 Hallar el voltaje de salida en estado estacionario, del circuito de la figura 6.20(a), cuando la corriente de entrada tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.20(b). Hacer $R = 1\Omega$ y $C = 1\text{f}$.

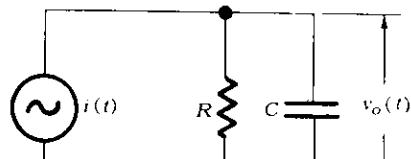
$$\begin{aligned} \text{Respuesta: } v_{os}(t) = & \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}} \sin(\pi t - \tan^{-1} \pi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3\sqrt{1 + 9\pi^2}} \sin(3\pi t - \tan^{-1} 3\pi) + \dots \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.37 Calcular la potencia entregada al circuito del problema 6.36 y los valores de las raíces cuadráticas medias de $i(t)$ y $v_o(t)$.

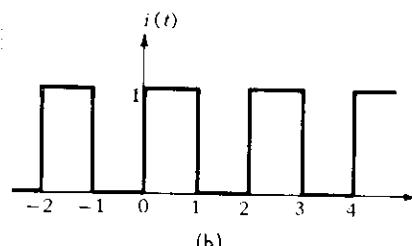
$$\text{Respuesta: } P = 0,2689 \text{ vatios}, I = 0,707, \text{ y } V = 0,519.$$

PROBLEMA 6.38 La corriente de entrada del circuito RLC de la figura 6.21(a), tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.21(b). La inductancia es $L = 10 \text{ mH}$ y el voltaje de salida es una onda senoidal de 300 hertz. Si el valor pico en el voltaje de salida de las otras frecuencias, es menor que $1/20$ del valor pico de la componente de 300 hz, hallar los valores de C y de R .

$$\text{Respuesta: } C = 28.2 \mu\text{F}, R = 590 \Omega.$$

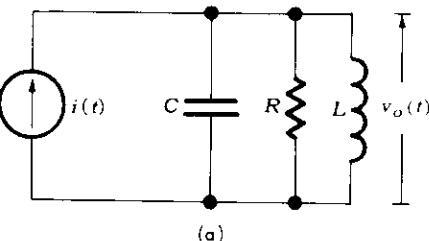


(a)

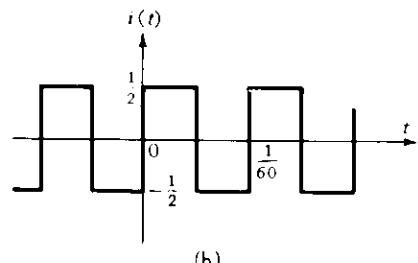


(b)

Figura 6.20 (a) El circuito del problema 6.36. (b) La forma de onda de la corriente de entrada en el problema 6.36.



(a)



(b)

Figura 6.21 (a) El circuito RLC del problema 6.38. La forma de onda de la corriente de entrada, circuito de la figura 6.21(a).

PROBLEMA 6.39 Analizar el movimiento en estado estacionario, del sistema mecánico que se muestra en la figura 6.10, si la fuerza perturbadora $f(t)$ es una onda sinusoidal rectificada, $f(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$.

$$\text{Respuesta: } x_s(t) = \frac{2A}{k\pi} - \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \frac{\cos 2\omega_0 t}{(k - m\omega_0^2)} + \frac{1}{15} \frac{\cos 4\omega_0 t}{(k - 4m\omega_0^2)} + \dots \right].$$

PROBLEMA 6.40 Cuando el pulso rectangular $f_i(t) = u(t) - u(t-1)$ se aplica a cierto sistema lineal, la respuesta es $f_o(t) = \frac{1}{2} [u(t-2) - u(t-4)]$. Hallar: (a) la función del sistema $H(j\omega)$, y (b) la respuesta al impulso unitario, $h(t)$.

$$\text{Respuesta: (a) } H(j\omega) = \frac{1}{2} (e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}), \text{ (b) } h(t) = \frac{1}{2} [\delta(t-2) + \delta(t-3)].$$

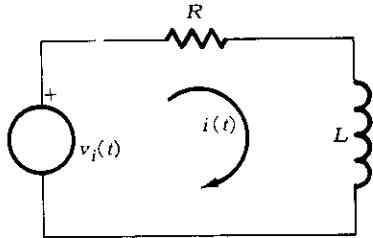


Figura 6.22 El circuito RL del problema 6.41.

PROBLEMA 6.41 Hallar la corriente del circuito RL , figura 6.22, debida a un impulso unitario

$$\text{Respuesta: } h(t) = \frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t).$$

PROBLEMA 6.42 Una fuente de voltaje $v_i(t) = 2e^{-t} u(t)$, se aplica al circuito RL de la figura 6.22. Hallar la respuesta $i(t)$, donde $R = 2\Omega$ y $L = 1\text{ h}$.

$$\text{Respuesta: } 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t).$$

PROBLEMA 6.43 La respuesta al impulso unitario de un sistema lineal es $e^{-t} \cos t u(t)$. Hallar la respuesta debida al escalón unitario $u(t)$, por convolución.

$$\text{Respuesta: } \frac{1}{2} [e^{-t} (\operatorname{sen} t - \cos t) + 1] u(t).$$

PROBLEMA 6.44 Si la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal es $h(t) = t e^{-t} u(t)$, y la entrada es $f_i(t) = e^{-t} u(t)$, hallar el espectro de frecuencia de la salida.

$$\text{Respuesta: } 1/(1 + j\omega)^3.$$

PROBLEMA 6.45 Demostrar que si la función de entrada a un sistema lineal es diferenciada, entonces la respuesta también es diferenciada.

[Sugerencia: demostrar que $f'_i(t) * h(t) = [f_i(t) * h(t)]' = f'_o(t)$.]

PROBLEMA 6.46 Demostrar que si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$, donde $h(t)$ es la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal, entonces la respuesta del sistema a cualquier entrada acotada también es acotada.

[Sugerencia: utilizar $|f_o(t)| = |f_i(t) * h(t)|$.]

PROBLEMA 6.47 Si $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ es la función del sistema, de un sistema lineal, demostrar que la respuesta del sistema a la entrada $f_i(t) = \cos \omega_0 t u(t)$, se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_o(t) &= R(\omega) \cos \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega X(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t d\omega \\ &= -X(\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega R(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \operatorname{sen} \omega t d\omega. \end{aligned}$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 5.28.]

PROBLEMA 6.48 Hallar $h(t)$, la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal cuya función es

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\theta_0} & \text{para } \omega > 0 \\ e^{j\theta_0} & \text{para } \omega < 0. \end{cases}$$

[Sugerencia: observar que $H(\omega) = \cos \theta_0 - j \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sgn} \omega$, y utilizar el resultado del problema 5.33.]

Respuesta: $h(t) = \cos \theta_0 \delta(t) + \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\pi t}$.

PROBLEMA 6.49 El sistema del problema 6.48 se denomina *defasador*. Demostrar que la respuesta del sistema del problema 6.48 a $\cos \omega_c t$, es $\cos(\omega_c t - \theta_0)$.

PROBLEMA 6.50 Demostrar que si la señal de entrada a un sistema lineal, cuya función $H(j\omega)$ está definida por

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -j & \text{para } \omega > 0 \\ +j & \text{para } \omega < 0, \end{cases}$$

es una función real del tiempo, entonces la salida de este sistema también es una función real del tiempo.

[Sugerencia: utilizar el problema 4.7.]

PROBLEMA 6.51 Hallar la salida $\hat{m}(t)$ si la entrada $m(t)$ es (a) $\cos \omega_c t$, y (b) $(1/(1+t^2))$, para el sistema del problema 6.50, que es un defasador de $-\pi/2$ (-90°) dado que la función del sistema se puede expresar como

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & \text{para } \omega > 0 \\ e^{j\pi/2} & \text{para } \omega < 0. \end{cases}$$

Respuesta: (a) $\operatorname{sen} \omega_c t$, (b) $t/(1+t^2)$.

PROBLEMA 6.52 Sea un sistema formado por la conexión en cascada de dos defasadores idénticos, como el defasador del problema 6.51. Demostrar que la salida de este sistema es $-m(t)$ cuando la entrada es $m(t)$.

PROBLEMA 6.53 La entrada de un filtro ideal para frecuencias bajas, cuya función es

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{para } |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

es un tren de impulsos

$$f_i(t) = T f(t) \delta_T(t) - T f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

cuya envolvente $f(t)$ tiene un espectro de banda limitada, $|F(\omega)| = 0$ para $|\omega| > \omega_c$.

Demostrar que si $T < \pi/\omega_c$, entonces la respuesta del filtro es $f_0(t) = f(t - t_0)$:

PROBLEMA 6.54 Hallar $h(t)$, la respuesta al impulso unitario del *filtro ideal para frecuencias altas*, cuya función $H(j\omega)$ es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 6.34, y observar que $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} - H_l(j\omega)$, donde $H_l(j\omega)$ es la función del sistema de un filtro ideal para frecuencias bajas.]

$$\text{Respuesta: } h(t) = \delta(t - t_0) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (t - t_0)}{\omega_c (t - t_0)}.$$

PROBLEMA 6.55 Hallar $a(t)$, la respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias altas.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 6.35.]

$$\text{Respuesta: } a(t) = u(t - t_0) - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin [\omega_c (t - t_0)] \right\}.$$

PROBLEMA 6.56 Un *filtro gaussiano* es un sistema lineal cuya función es

$$H(\omega) = e^{-\alpha\omega^2} e^{-j\omega t_0}.$$

Hallar la respuesta de este filtro a un impulso unitario.

$$\text{Respuesta: } h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-(t-t_0)^2/4\alpha}.$$

PROBLEMA 6.57 Si $H(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$ es la función de un sistema lineal y causal, demostrar que $h(t)$, la respuesta al impulso unitario del sistema, se puede expresar, ya sea como una función de $R(\omega)$ o de $X(\omega)$; es decir,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

[Sugerencia: $h(t) = 0$ para $t < 0$; de donde $h(t)$ se puede expresar como $h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t)$ para $t > 0$, donde $h_e(t)$ y $h_o(t)$ son las componentes par e impar de $h(t)$, respectivamente.]

PROBLEMA 6.58 Demostrar que si $H(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$ es la función de un sistema lineal y causal, entonces, (a) la transformada de Fourier de $a(t)$, la respuesta del sistema al escalón unitario, está dada por

$$\mathcal{F}[a(t)] = \pi R(0) \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{\omega} - j \frac{R(\omega)}{\omega},$$

(b) la respuesta al escalón unitario, $a(t)$, se puede expresar como

$$a(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = R(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega.$$

APLICACIONES EN TEORIA DE COMUNICACIONES

7 CAPITULO

7.1 TEORIA DE MUESTREO

El teorema del muestreo uniforme en el dominio del tiempo afirma que si una función del tiempo, $f(t)$, no contiene componentes de frecuencias superiores a f_M ciclos por segundo, entonces $f(t)$ se puede determinar por completo mediante sus valores separados por intervalos uniformes menores de $1/(2f_M)$ segundos.

PROBLEMA 7.1 Probar el teorema del muestreo uniforme en el dominio del tiempo.

Solución: el teorema del muestreo se puede probar con la ayuda de (4.125), el teorema de convolución en la frecuencia; es decir,

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)], \quad [4.125]$$

donde $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$.

Como $f(t)$ no tiene componentes frecuenciales superiores a f_M ciclos por segundo, entonces $f(t)$ es una función de banda limitada, como se muestra en la figura 7.1(a), lo cual significa que

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 0 \quad \text{para } |\omega| > \omega_M = 2\pi f_M \quad (7.1)$$

[Ver figura 7.1(b)].

Considerar ahora a $f_s(t)$, una función muestrada definida por el producto de la función $f(t)$ y $\delta_T(t)$, que es una función periódica de impulsos unitarios [ver la figura 7.1(c)]:

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t). \quad (7.2)$$

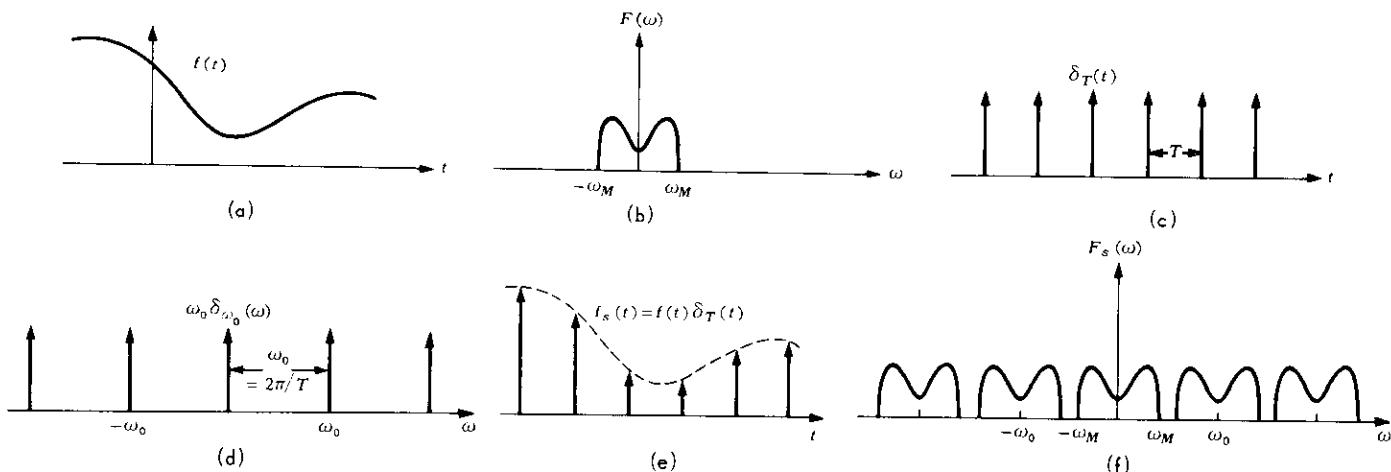


Figura 7.1 (a) La función de banda limitada $f(t)$. (b) El espectro de $f(t)$. (c) El tren de impulsos unitarios. (d) El espectro del tren de impulsos unitarios. (e) La función muestrada $f_s(t)$. (f) El espectro de $f_s(t)$.

Recordando la definición de $\delta_T(t)$ dada por (2.104), y sus propiedades, se tiene

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (7.3)$$

[Ver figura 7.1(e).] La ecuación (7.3) muestra que la función $f_s(t)$ es una sucesión de impulsos localizados a intervalos regulares de T segundos y cuyos valores son iguales a los de $f(t)$ en los instantes del muestreo [figura 7.1(c)].

Del resultado del problema 5.15, se tiene

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad [5.66]$$

De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), se tiene

$$\mathcal{F}[f_s(t)] = F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)]. \quad (7.4)$$

Sustituyendo $\omega_0 = 2\pi/T$, se obtiene

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \left[F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0). \end{aligned} \quad (7.5)$$

En el capítulo cuarto se demostró que

$$f(t) * \delta(t) = f(t), \quad [4.119]$$

$$f(t) * \delta(t - T) = f(t - T). \quad [4.120]$$

Por consiguiente, el resultado (7.5) se puede expresar como

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0). \quad (7.6)$$

La ecuación (7.6) muestra que la transformada de Fourier de $f_s(t)$, se repite cada ω_0 rad/seg., como se muestra en la figura 7.1(f). Se debe observar que $F(\omega)$ se repetirá periódicamente sin solaparse en tanto que $\omega_0 > 2\omega_M$, ó $2\pi/T > 2(2\pi f_M)$; es decir,

$$T < \frac{1}{2f_M}. \quad (7.7)$$

Por consiguiente, mientras que se tomen muestras de $f(t)$ a intervalos regulares menores de $1/(2f_M)$ segundos, el espectro de Fourier de $f_s(t)$ será una réplica periódica de $F(\omega)$, y contendrá toda la información acerca de $f(t)$.

Se puede investigar el resultado anterior, utilizando una técnica diferente, la cual, naturalmente, ha de conducir a las mismas conclusiones. El espectro de Fourier $F(\omega)$, de una función de banda limitada $f(t)$, es el que se muestra en la figura 7.1(b).

Supóngase ahora, que el espectro $F(\omega)$ es esa porción del espectro periódico $F_s(\omega)$ [figura 7.1(f)] que se encuentra entre $-1/2\omega_0$ y $1/2\omega_0$, donde $\omega_0 = 2\pi/T$ y $\omega_0 > 2\omega_M$. Como $F_s(\omega)$ es una función periódica de ω , cuyo período es ω_0 , se puede expandir en una serie de Fourier, esto es,

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi\omega/\omega_0}, \quad (7.8)$$

donde, por definición,

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} F_s(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.9)$$

Como $F_s(\omega) = F(\omega)$ para $-\omega_M < \omega < \omega_M$, y $(1/2)\omega_0 > \omega_M$, entonces la expresión (7.9) se puede expresar como

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.10)$$

Ahora bien,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.11)$$

Puesto que $f(t)$ es de banda limitada, es decir, $F(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$, entonces la expresión (7.11) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.12)$$

Seleccionando como puntos de muestreo los localizados en $t = -nT = -n2\pi/\omega_0$, por (7.12) se tiene que

$$f(-nT) = f\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.13)$$

Comparando (7.13) y (7.10), se obtiene

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = T f(-nT). \quad (7.14)$$

La ecuación (7.14) indica que c_n puede encontrarse únicamente a partir de los valores de la función, en los puntos de muestreo. Pero conociendo c_n , se puede hallar $F_s(\omega)$ si se utiliza (7.8), y en consecuencia, también se halla $F(\omega)$. Si se conoce $F(\omega)$, se puede hallar $f(t)$ para todos los valores del tiempo mediante la relación (7.11).

Ahora, de la suposición $\omega_0 > 2\omega_M$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} &> 4\pi f_M, \\ T &< \frac{1}{2f_M}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Lo cual completa la prueba.

El intervalo máximo de muestreo $T = 1/(2f_M)$ se denomina a veces *intervalo de Nyquist*.

En la sección anterior se demostró que $f(t)$ se puede reproducir completamente a partir del conocimiento de las muestras de $f(t)$, a intervalos uniformes. A continuación se mostrará cómo se puede reconstruir $f(t)$ a partir de las muestras.

PROBLEMA 7.2 Considerar una señal de banda limitada $f(t)$ muestreada a la mínima tasa requerida ($2f_M$ muestras por segundo). [Ver la figura 7.2(a-b).] Demostrar que la señal $f(t)$ se puede expresar como

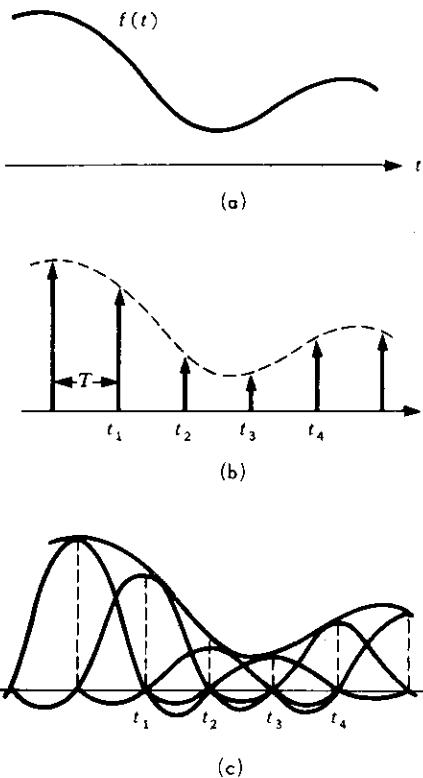


Figura 7.2 (a) La función de banda limitada $f(t)$. (b) La función muestreada. (c) Reconstrucción de una forma de onda.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)} \quad (7.16)$$

$$\text{o}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_M}\right) \frac{\sin (\omega_M t - n\pi)}{\omega_M t - n\pi}, \quad (7.17)$$

donde $\omega_M = 2\pi f_M$ y $T = 1/(2f_M)$ = el intervalo de muestreo.

Solución: como $T = 1/(2f_M)$, entonces $\omega_0 = 2\pi/T = 4\pi f_M = 2\omega_M$. Por tanto, (7.8) se convierte en

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi\omega/2\omega_M} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnT\omega}. \quad (7.18)$$

Por (7.14), se tiene

$$c_n = T f(-nT) = \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT). \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.19) en (7.18), se obtiene

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT) e^{jnT\omega}. \quad (7.20)$$

Puesto que $F_s(\omega) = F(\omega)$ para $-\omega_M < \omega < \omega_M$, entonces (7.20) se puede reemplazar en (7.12), de lo cual se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT) e^{jnT\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.21)$$

Intercambiando los signos de la integración y de la sumatoria, se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(-nT) \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \frac{1}{2\omega_M} e^{j\omega(t+nT)} d\omega \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT) \frac{\sin \omega_M(t + nT)}{\omega_M(t + nT)} \\ &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)}. \end{aligned}$$

En la última ecuación, $(-n)$ se reemplazó por n porque todos los valores positivos y negativos de n están incluidos en la sumatoria. Puesto que $T = \pi/\omega_M$, la expresión (7.16) se puede expresar también como

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_M}\right) \frac{\sin (\omega_M t - n\pi)}{\omega_M t - n\pi}.$$

Matemáticamente, la expresión (7.16) indica que cada muestra de la función está multiplicada por una función "muestreadora"

$$\text{Se } [\omega_M(t - nT)] = \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)},$$

y todas las formas de ondas resultantes se suman para obtener $f(t)$. Esto se ilustra en la figura 7.2(c).

El teorema de muestreo en el dominio de la frecuencia establece que si una función $f(t)$ es cero en toda su extensión excepto en el intervalo $-T < t < T$, entonces su

transformada de Fourier $F(\omega)$, se puede determinar únicamente a partir de sus valores $F(n\pi/T)$, localizados en puntos equidistantes, separados en π/T . De hecho, $F(\omega)$ está dada por

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}. \quad (7.22)$$

PROBLEMA 7.3 Verificar la expresión (7.22).

Solución: supóngase que

$$f(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T. \quad (7.23)$$

Entonces, en el intervalo, $-T < t < T$, la función $f(t)$ se puede expandir en una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/2T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t/T}, \quad (7.24)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-j2\pi nt/2T} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-jn\pi t/T} dt. \quad (7.25)$$

Puesto que $f(t) = 0$ para $t > T$, y $t < -T$, entonces la ecuación (7.25) se puede expresar como

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\pi t/T} dt = \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right), \quad (7.26)$$

donde

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

y

$$\omega = \frac{n\pi}{T}.$$

Sustituyendo la expresión (7.26) en la expresión (7.24), se obtiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) e^{jn\pi t/T}. \quad (7.27)$$

Ahora bien,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (7.28)$$

en razón del supuesto (7.23).

Sustituyendo (7.27) en (7.28), e intercambiando los signos de sumatoria y de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-T}^T \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) e^{jn\pi t/T} \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-j(\omega - n\pi/T)t} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}. \end{aligned}$$

De este modo, se completa la prueba del teorema de muestreo en la frecuencia.

7.2 MODULACION DE AMPLITUD

Se denomina *modulación* al método de procesar una señal para obtener una transmisión más eficiente. Un tipo de modulación comúnmente utilizado, se basa en el siguiente *teorema de translación de la frecuencia* (algunas veces denominado *teorema de la modulación*) de la transformada de Fourier. El teorema establece que la multiplicación de una señal $f(t)$ por una señal senoidal de frecuencia ω_c translada su espectro en $\pm \omega_c$ radianes.

PROBLEMA 7.4 Verificar el teorema de translación de la frecuencia.

Solución: supóngase que $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$. Por (5.22) y (5.23), se tiene

$$\mathcal{F}[\cos \omega_c t] = \pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c),$$

$$\mathcal{F}[\sin \omega_c t] = -j \pi \delta(\omega - \omega_c) + j \pi \delta(\omega + \omega_c).$$

Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{2} F(\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} F(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ &= \frac{1}{2} F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_c) \end{aligned} \quad (7.29)$$

resultado que se obtiene mediante (4.120). Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_c t] &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * [-j \pi \delta(\omega - \omega_c) + j \pi \delta(\omega + \omega_c)] \\ &= -\frac{1}{2} j F(\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} j F(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ &= -\frac{1}{2} j F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} j F(\omega + \omega_c). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Las ecuaciones (7.29) y (7.30) indican que la multiplicación de una señal $f(t)$, por una señal senoidal de frecuencia ω_c , translada su espectro en $\pm \omega_c$ radianes. El proceso de translación de la frecuencia se ilustra en la figura 7.3.

PROBLEMA 7.5 Demostrar que si $f(t)$ es una señal de banda limitada, sin componentes espectrales por encima de la frecuencia ω_M , entonces el espectro de la señal $f(t) \cos \omega_c t$, es también de banda limitada.

Solución: como la señal $f(t)$ es una señal de banda limitada, se tiene que

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M.$$

De los resultados (7.29) del problema 7.4, y de la figura 7.3, se sigue que la señal $f(t) \cos \omega_c t$ también es de banda limitada, y su espectro es igual a cero fuera de la banda $(\omega_c - \omega_M)$ a $(\omega_c + \omega_M)$ para $\omega > 0$. Se debe observar que este resultado está basado en la suposición de que $\omega_c > \omega_M$.

Una señal ordinaria, modulada en amplitud (AM), usualmente se expresa en la forma

$$f(t) = K[1 + m(t)] \cos \omega_c t, \quad (7.31)$$

donde $m(t)$ es la señal de banda limitada, tal que

$$\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M \text{ y } |m(t)| < 1 \text{ para } \omega_c > \omega_M. \quad (7.32)$$

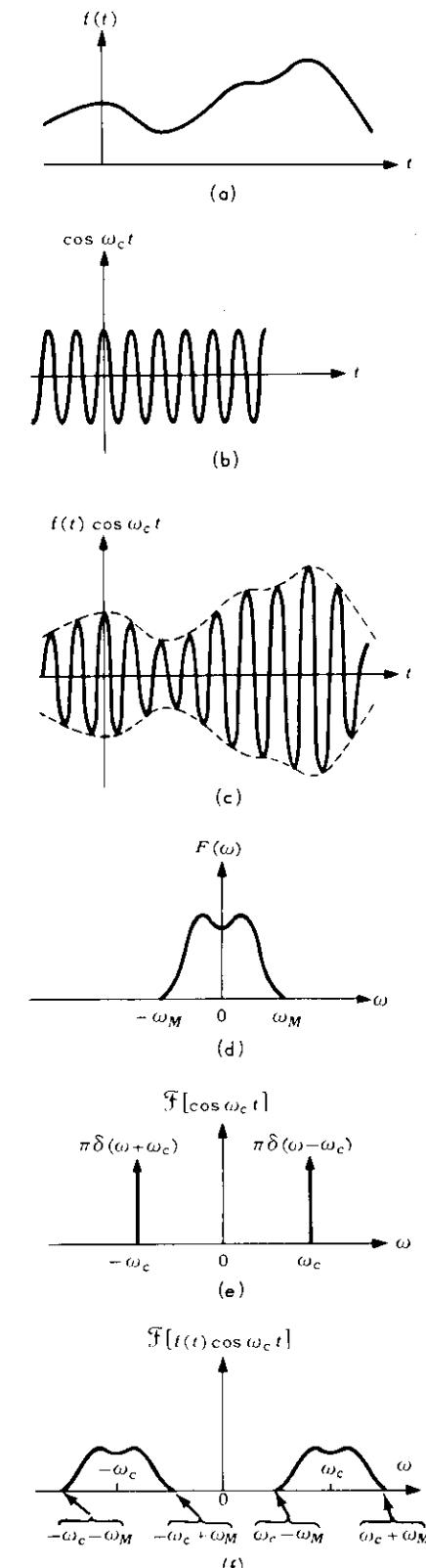


Figura 7.3 (a) La señal de banda limitada $f(t)$ del problema 7.5. (b) La función $\cos \omega_c t$. (c) La función $f(t) \cos \omega_c t$. (d) El espectro de $f(t)$. (e) El espectro de $\cos \omega_c t$. (f) El espectro de $f(t) \cos \omega_c t$.

En la expresión (7.31), a la senusoide $\cos \omega_c t$ se le denomina *portadora*, y a la frecuencia $f_c = \omega_c / 2\pi$ se le denomina *frecuencia portadora*. Un ejemplo de la forma de onda de una señal modulada en amplitud, se muestra en la figura 7.4. Como $|m(t)| < 1$, se observa que $K[1 + m(t)] > 0$ para $K > 0$.

PROBLEMA 7.6 Hallar el espectro de frecuencia de una señal modulada en amplitud (7.31).

Solución: mediante la propiedad de superposición y el teorema de translación de la frecuencia, dado en (7.29), se tiene que la transformada de Fourier de $f(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\ &= \mathcal{F}[K[1 + m(t)] \cos \omega_c t] \\ &= \mathcal{F}[K \cos \omega_c t] + \mathcal{F}[K m(t) \cos \omega_c t] \\ &= K \pi \delta(\omega - \omega_c) + K \pi \delta(\omega + \omega_c) \\ &\quad + \frac{1}{2} K M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} K M(\omega + \omega_c). \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$.

En la figura 7.5 se observa que el espectro de la frecuencia de una señal modulada en amplitud, consta de impulsos localizados en la frecuencia portadora ω_c y del espectro de $m(t)$, centrado alrededor de ω_c . La porción del espectro superior a ω_c se denomina *banda lateral superior* del espectro, y la porción simétrica inferior a ω_c se denomina *banda lateral inferior*. Nótese que las bandas laterales son las que contienen la información de la señal modulada.

PROBLEMA 7.7 Hallar el espectro de la señal modulada en amplitud, la cual está dada por (7.31), si la señal moduladora es una señal senoidal, esto es

$$m(t) = m_0 \cos \omega_m t, \quad \omega_m < \omega_c, \quad 0 < m_0 < 1.$$

Solución: la señal de AM, en este caso, está dada por

$$f(t) = K(1 + m_0 \cos \omega_m t) \cos \omega_c t. \quad (7.34)$$

Utilizando identidades trigonométricas, la relación (7.34) se puede expresar también como

$$f(t) = K \cos \omega_c t + \frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m - \omega_c)t + \frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m + \omega_c)t. \quad (7.35)$$

De lo cual, mediante (5.22), se tiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = K \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{1}{2} K m_0 \pi [\delta(\omega - \omega_m + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_m - \omega_c) \\ &\quad + \delta(\omega - \omega_m - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_m + \omega_c)]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

El espectro de este ejemplo se muestra en la figura 7.6. En este caso, las bandas laterales constan de los impulsos localizados en $\omega = \omega_c \pm \omega_m$.

PROBLEMA 7.8 Para la señal de AM del problema 7.7, hallar el contenido relativo de potencia, en la portadora y en las bandas laterales que llevan la información.

Solución: la señal AM del problema 7.7, está dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= K[1 + m_0 \cos \omega_m t] \cos \omega_c t \\ &= K \cos \omega_c t + \underbrace{\frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m - \omega_c)t + \frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m + \omega_c)t}_{\text{bandas laterales}}. \end{aligned}$$

portadora

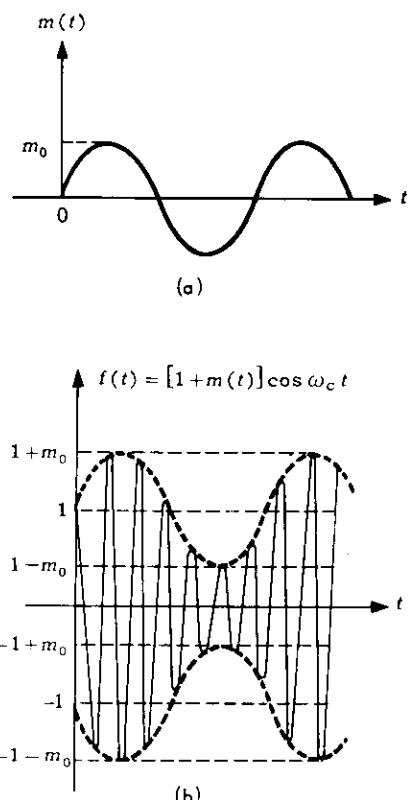


Figura 7.4 (a) La señal mensaje de banda limitada, $f(t)$. (b) La forma de onda de una señal modulada en amplitud.

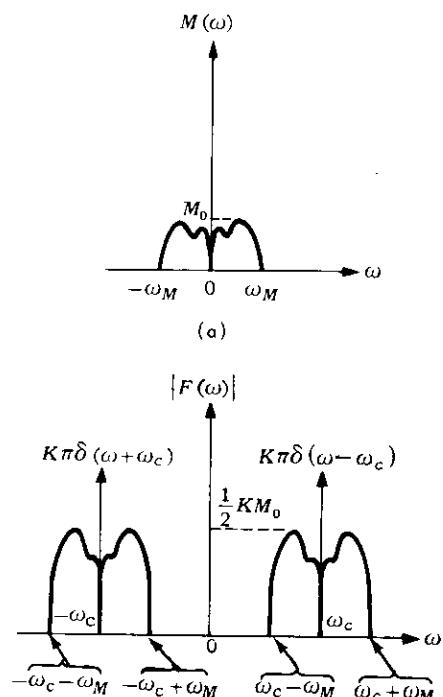


Figura 7.5 (a) El espectro de $m(t)$. (b) El espectro de una señal ordinaria modulada en amplitud.

En la expresión anterior aparecen los términos correspondientes a la portadora y a las bandas laterales. Es obvio que el promedio total de potencia, P_t , entregada por $f(t)$ (referida a una resistencia de 1Ω) está dada por

$$P_t = \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{8} K^2 m_0^2 + \frac{1}{8} K^2 m_0^2 = \frac{1}{2} K^2 \left(1 + \frac{1}{2} m_0^2\right). \quad (7.37)$$

Luego la potencia en la portadora, P_c , y la potencia transportada por las bandas laterales, P_s , están dadas por

$$P_c = \frac{1}{2} K^2, \quad P_s = \frac{1}{4} K^2 m_0^2.$$

Obsérvese que $P_s = K^2 m_0^2 / 8$, en cada una de las bandas laterales. El porcentaje de potencia contenida en las bandas laterales es

$$\frac{P_s}{P_t} \times 100 = \frac{m_0^2}{2 + m_0^2} \times 100\%. \quad (7.38)$$

Por ejemplo, si $m_0 = 1/2$, entonces

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{\frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{9}, \quad \text{o sea, cerca del } 11\%,$$

cuando $m_0 = 1$, $[P_s/P_t]_{\max} = 1/3$, o sea, cerca del 33%.

Se debe recordar que la señal $m(t)$ que contiene la información, da lugar a las bandas laterales y sólo una fracción de la potencia de $f(t)$, dada por la expresión (7.38), está contenida en esas bandas laterales. La potencia contenida en la portadora representa un desperdicio

Una señal de AM con doble banda lateral y portadora suprimida (DBLPS) está dada por

$$f(t) = m(t) \cos \omega_c t, \quad (7.39)$$

donde $m(t)$ es una señal de banda limitada, como antes. La figura 7.7 muestra a $f(t)$ para una senoidal $m(t)$.

PROBLEMA 7.9 Hallar el espectro de una señal de AM (DBLPS) dada por la ecuación (7.39).

Solución: si $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$, entonces, se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[m(t) \cos \omega_c t] = \frac{1}{2} [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)], \quad (7.40)$$

resultado que se obtiene aplicando (7.29), el teorema de translación en la frecuencia.

El espectro de una señal DBLPS se muestra en la figura 7.8.

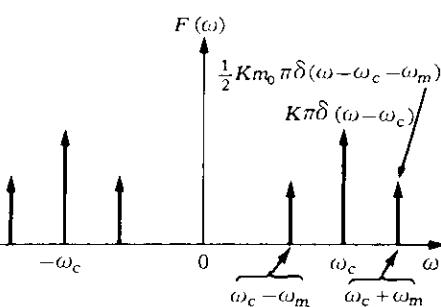


Figura 7.6 El espectro de la señal AM del problema 7.7.

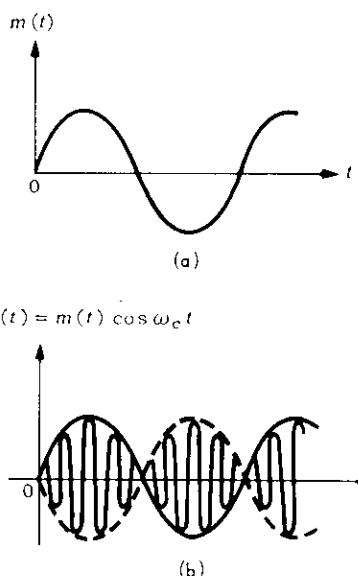


Figura 7.7 (a) La señal senoide de banda limitada $m(t)$. (b) La función $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$.

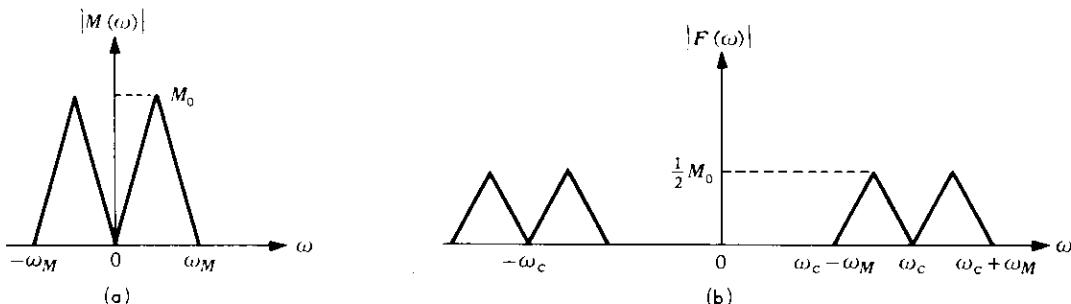


Figura 7.8 (a) El espectro de $m(t)$. (b) El espectro de la señal DBLPS.

El proceso de separar la señal moduladora de la señal modulada se denomina **demodulación o detección**.

PROBLEMA 7.10 Demostrar que el espectro de la señal modulada puede ser transladado a su posición original, si se multiplica la señal modulada por $\cos \omega_c t$, en el extremo receptor.

Solución: sea la señal modulada la expresada por

$$f(t) = m(t) \cos \omega_c t. \quad (7.41)$$

Entonces, como se muestra en la figura 7.9(a), en el receptor se multiplica la señal recibida, $f(t)$, por $\cos \omega_c t$ para obtener, mediante el uso de una identidad trigonométrica, el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f(t) \cos \omega_c t &= m(t) \cos^2 \omega_c t \\ &= m(t) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_c t) \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_c t. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Ahora bien, si $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$ y $M(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$, entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_c t] &\approx \mathcal{F}[m(t) \cos^2 \omega_c t] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} m(t)\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_c t\right] \\ &= \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} M(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2\omega_c). \end{aligned} \quad (7.43)$$

El espectro de $f(t) \cos \omega_c t = m(t) \cos^2 \omega_c t$, se muestra en la figura 7.9(c). Del espectro que se muestra en la figura 7.9(b), se concluye que la señal original $m(t)$ se puede recuperar mediante un filtro para bajas frecuencias, que permita el paso del espectro hasta la frecuencia ω_M . El proceso de demodulación se muestra en el diagrama de bloques de la figura 7.9(a).

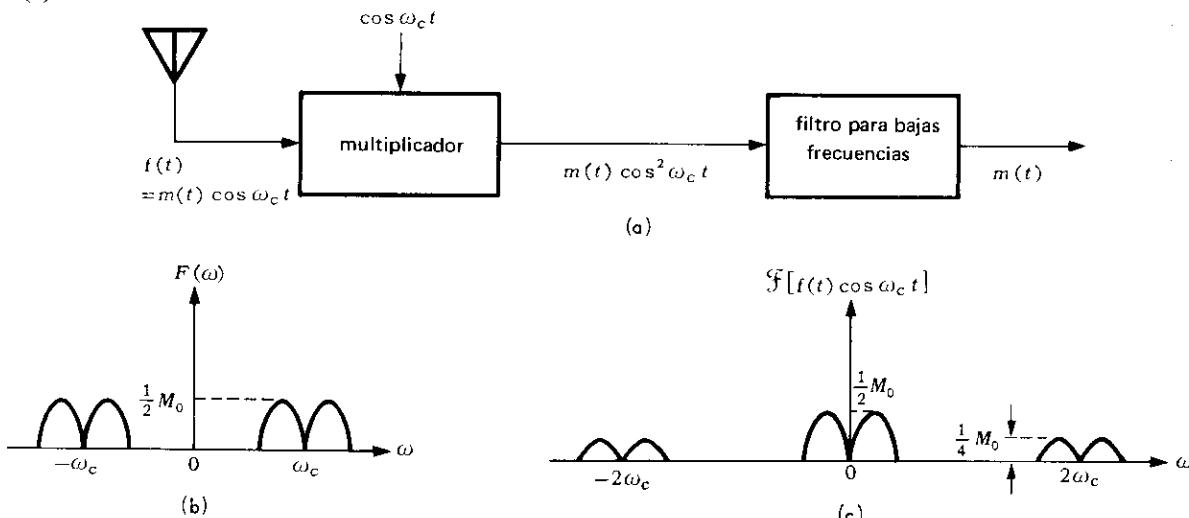


Figura 7.9 (a) El sistema de demodulación. (b) El espectro de la señal modulada $f(t)$. (c) El espectro de la señal $f(t) \cos \omega_c t$.

PROBLEMA 7.11 Demostrar que la demodulación también se puede lograr multiplicando la señal modulada $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$, por cualquier señal periódica de frecuencia ω_c .

Solución: si $p(t)$ es una señal periódica de frecuencia ω_c y de la forma

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_c t}, \quad (7.44)$$

entonces, según el resultado (5.57), su transformada de Fourier se puede expresar como

$$\mathcal{F}[p(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_c). \quad (7.45)$$

Ahora bien, según (7.40), se tiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c).$$

De donde, de acuerdo con (4.125), la transformada de Fourier de $f(t)p(t)$, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)p(t)] &= \pi [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_c) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] * \delta(\omega - n\omega_c) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \{M[\omega - (n+1)\omega_c] + M[\omega - (n-1)\omega_c]\} \end{aligned} \quad (7.46)$$

mediante la relación (4.121).

Es obvio que este espectro contiene el término $M(\omega)$, el espectro de $m(t)$, el cual se puede recuperar mediante un filtro para bajas frecuencias, que permita el paso de frecuencias hasta la frecuencia ω_M .

7.3 MODULACION ANGULAR

En la modulación de amplitud, la amplitud de la portadora es modulada por la señal $m(t)$, la cual contiene la información, y por consiguiente, la información transportada está contenida en la variación de amplitud de la portadora. La modulación de amplitud, sin embargo, no es el único medio de modular una portadora senoidal. También es posible modular, ya sea la frecuencia o la fase de la portadora, de acuerdo con la señal que contiene la información.

De la señal

$$f(t) = A \cos [\omega_c t + \phi(t)] \quad (7.47)$$

se dice que es una *señal modulada en ángulo*.

Si se tiene

$$\phi(t) = k_p m(t),$$

donde k_p es una constante, entonces, de la señal modulada en ángulo

$$f_{PM}(t) = A \cos [\omega_c t + k_p m(t)] \quad (7.48)$$

se dice que es una señal *modulada en fase* (PM) cuya señal moduladora es $m(t)$, y a la relación

$$\phi_m = |k_p m(t)|_{\max} \text{ radianes} \quad (7.49)$$

se le denomina *índice de modulación* de la señal PM.

Si se tiene

$$\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau,$$

donde k_f es una constante, entonces, de la relación

$$f_{PM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] \quad (7.50)$$

se dice que es una señal de *frecuencia modulada* (FM), y a la relación

$$\phi_m = \left| k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (7.51)$$

se le denomina *índice de modulación* de la señal FM.

Sea

$$\theta(t) = \omega_c t + \phi(t); \quad (7.52)$$

entonces la señal modulada en ángulo dada por (7.47), se puede expresar como

$$I(t) = A \cos \theta(t). \quad (7.53)$$

Se define ahora la *frecuencia angular instantánea*, ω_i , de la señal (7.53) modulada en ángulo como

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t). \quad (7.54)$$

PROBLEMA 7.12 Demostrar que ω_i , para las señales PM y FM está dada por

$$\omega_{iPM}(t) = \omega_c + k_p \frac{d}{dt} m(t), \quad (7.55)$$

$$\omega_{iFM}(t) = \omega_c + k_f m(t), \quad (7.56)$$

respectivamente.

Solución: en el caso de una señal PM, se tiene

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{d}{dt} [\omega_c t + k_p m(t)] = \omega_c + k_p m'(t).$$

En el caso de una señal FM, se tiene

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{d}{dt} \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] = \omega_c + k_f m(t).$$

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) indican que en modulación de fase, la frecuencia instantánea varía *linealmente con la derivada* de la señal moduladora, mientras que en frecuencia modulada, la frecuencia instantánea varía *directamente* con la señal moduladora.

PROBLEMA 7.13 Si la señal moduladora $m(t)$ es senoidal, es decir, si se tiene

$$m(t) = m_0 \cos \omega_m t, \quad \omega_m < \omega_c, \quad (7.57)$$

demostrar que las señales PM y FM tendrán las formas dadas por

$$I_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \cos \omega_m t), \quad (7.58)$$

$$I_{FM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t), \quad (7.59)$$

respectivamente, donde ϕ_m es el índice de modulación de la señal PM (o FM).

Solución: si $m(t) = m_0 \cos \omega_m t$, entonces por (7.48), se tiene

$$I_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + k_p m_0 \cos \omega_m t).$$

Por la relación (7.49), se tiene que $\phi_m = k_p m_0$, porque la magnitud máxima de $m(t)$ es m_0 ; de esta manera, se tiene

$$I_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \cos \omega_m t), \quad \phi_m = k_p m_0.$$

Dado que para la señal FM, $\phi(t) = k_f \int m(t) dt - \frac{k_f m_0}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t$,

$$\begin{aligned} f_{\text{FM}}(t) &= A \cos \left(\omega_c t + \frac{k_f m_0}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t \right) \\ &= A \cos (\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t), \quad \phi_m = \frac{k_f m_0}{\omega_m}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 7.14 Demostrar que en una señal FM de modulación senoidal, el índice de modulación se puede definir como

$$\phi_m = \frac{\Delta f}{f_m}, \quad (7.60)$$

donde f_m es la frecuencia de la señal moduladora, y Δf es la desviación frecuencial definida como

$$\Delta f = \left[\frac{1}{2\pi} (\omega_i - \omega_c) \right]_{\max}$$

Solución: según la fórmula (7.56), para una señal FM se tiene

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t) = \omega_c + k_f m_0 \cos \omega_m t.$$

De donde,

$$\omega_i - \omega_c = k_f m_0 \cos \omega_m t. \quad (7.61)$$

En la relación (7.61) se observa que

$$(\omega_i - \omega_c)_{\max} = k_f m_0 = 2\pi \Delta f,$$

es decir, la máxima diferencia entre ω_i y ω_c se denomina *desviación de frecuencia angular* de la señal FM. Por consiguiente,

$$\phi_m = \frac{k_f m_0}{\omega_m} = \frac{2\pi \Delta f}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}.$$

No existe un teorema general sencillo, que relacione el espectro de $\cos [\omega_c t + \phi(t)]$ con el espectro de $\phi(t)$, y el análisis espectral de una señal general modulada en ángulo es, por consiguiente, bastante complicado. En consecuencia, a continuación se considerará únicamente el caso especial de modulación por una señal senoidal.

PROBLEMA 7.15 Hallar el espectro de una señal FM, en la cual la modulación se hace por una señal senoidal

Solución: por (7.59), se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos (\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &= A \cos \omega_c t \cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) - A \operatorname{sen} \omega_c t \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t). \end{aligned} \quad (7.62)$$

En la expresión (7.62), los términos

$$\cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$$

son funciones periódicas, cuyo período es $T = 2\pi/\omega_m$. Por consiguiente, estos términos se pueden expandir en serie de Fourier. Se debe observar que

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) + j \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t). \quad (7.63)$$

Considérese, por tanto, la expansión en serie de Fourier de (7.63), es decir,

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t}, \quad (7.64)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{(j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)} e^{(-jn\omega_m t)} dt \quad (7.65)$$

y $T = 2\pi/\omega_m$. De esta manera, se tiene

$$c_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t - n\omega_m t)} dt. \quad (7.66)$$

Al hacer, $\omega_m t = x$, se obtiene

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} x - nx)} dx. \quad (7.67)$$

Los coeficientes de Fourier dados por la ecuación (7.67), son las funciones de Bessel de primera clase. De la función generadora de las funciones de Bessel, se tiene

$$e^{z(x^2-1)/2x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) x^n, \quad (7.68)$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de primera clase, orden n y argumento z .

Al hacer, $x = e^{j\omega t}$ en la ecuación (7.68), se obtiene

$$\frac{z(x^2-1)}{2x} = z \left(x - \frac{1}{x} \right) = jz \left(\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right) = jz \operatorname{sen} \omega t. \quad (7.69)$$

De donde,

$$e^{jz \operatorname{sen} \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{jn\omega t}. \quad (7.70)$$

Comparando las ecuaciones (7.70) y (7.64) resulta

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\phi_m) e^{jn\omega_m t}. \quad (7.71)$$

De esta manera, por (7.67), se obtiene

$$c_n = J_n(\phi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} x - nx)} dx. \quad (7.72)$$

Las propiedades de las funciones de Bessel y las curvas que ilustran su comportamiento, se encuentran en muchos libros de matemáticas. Por (7.72), se obtiene

$$J_{-n}(\phi_m) = (-1)^n J_n(\phi_m). \quad (7.73)$$

Ahora bien, por (7.71), se obtiene

$$\begin{aligned} e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\phi_m) e^{jn\omega_m t} \\ &= J_0(\phi_m) + J_1(\phi_m) (\cos \omega_m t + j \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &\quad + J_{-1}(\phi_m) (\cos \omega_m t - j \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &\quad + J_2(\phi_m) (\cos 2\omega_m t + j \operatorname{sen} 2\omega_m t) \\ &\quad + J_{-2}(\phi_m) (\cos 2\omega_m t - j \operatorname{sen} 2\omega_m t) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (7.74)$$

Si se igualan las partes real e imaginaria y se utiliza la relación (7.73), se obtiene

$$\cos(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) = J_0(\phi_m) + 2J_2(\phi_m) \cos 2\omega_m t + 2J_4(\phi_m) \cos 4\omega_m t + \dots$$

$$= J_0(\phi_m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\phi_m) \cos 2n\omega_m t, \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) &= 2 J_1(\phi_m) \operatorname{sen} \omega_m t + 2 J_3(\phi_m) \operatorname{sen} 3 \omega_m t + \dots \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\phi_m) \operatorname{sen}(2n+1) \omega_m t.\end{aligned}\quad (7.76)$$

Las ecuaciones (7.75) y (7.76) son las expansiones en serie de Fourier de los términos $\cos(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$, y $\operatorname{sen}(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$.

La distribución espectral de la señal FM se puede obtener ahora, por sustitución de (7.75) y (7.76) en la ecuación (7.62), de esta manera,

$$\begin{aligned}f(t) &= A \cos(\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &= A \cos \omega_c t \{ J_0(\phi_m) + 2 [J_2(\phi_m) \cos 2 \omega_m t + J_4(\phi_m) \cos 4 \omega_m t + \dots] \} \\ &\quad - 2 A \operatorname{sen} \omega_c t [J_1(\phi_m) \operatorname{sen} \omega_m t + J_3(\phi_m) \operatorname{sen} 3 \omega_m t + \dots].\end{aligned}\quad (7.77)$$

Mediante las fórmulas trigonométricas de suma y diferencia

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}f(t) &= A \{ J_0(\phi_m) \cos \omega_c t - J_1(\phi_m) [\cos(\omega_c - \omega_m)t - \cos(\omega_c + \omega_m)t] \\ &\quad + J_2(\phi_m) [\cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \cos(\omega_c + 2\omega_m)t] \\ &\quad - J_3(\phi_m) [\cos(\omega_c - 3\omega_m)t - \cos(\omega_c + 3\omega_m)t] \\ &\quad + \dots \}.\end{aligned}\quad (7.78)$$

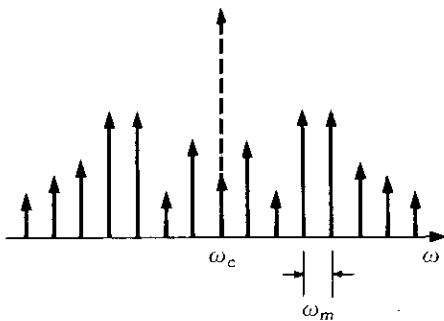


Figura 7.10 El espectro de la señal FM dada por la ecuación 7.78.

La ecuación (7.78) muestra que la señal FM, representada por $f(t)$, consta de una portadora y un número infinito de bandas laterales, separadas en las frecuencias $(\omega_c + \omega_m)$, $(\omega_c + 2\omega_m)$, $(\omega_c + 3\omega_m)$, etc., como se muestra en la figura 7.10. Las amplitudes de los términos de la portadora y de las bandas laterales, dependen de ϕ_m , el índice de modulación; esta dependencia está expresada por las funciones apropiadas de Bessel.

7.4 MODULACION DE PULSOS

En un sistema de modulación de pulsos, la portadora consta de una sucesión periódica de pulsos. Tanto la amplitud, como la duración o la posición del pulso, se pueden modular de acuerdo con la señal de entrada. La base teórica de la técnica de modulación de pulsos es la teoría de muestreo presentada en la sección 7.1. En un sistema de modulación de pulsos, se tiene un tren de pulsos no modulados que consta de pulsos idénticos, separados uniformemente, que se suceden a una tasa de muestreo, apropiada para la señal moduladora (es decir, a una tasa superior al doble de la frecuencia de la componente de más alta frecuencia de la señal moduladora).

En esta sección se considerará únicamente el caso de *modulación de amplitud de pulsos* (MAP). Una señal MAP se define como sigue:

Supóngase que $m(t)$ es una señal de banda limitada, con $M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)] = 0$ para $|\omega| > \omega_M (= 2\pi f_M)$, y que $g(t)$ es un tren de pulsos periódicos con período T ; entonces, el producto

$$t(t) = m(t) g(t) \quad (7.79)$$

es una señal MAP si se cumple que $T \leq 1/(2f_M)$.

PROBLEMA 7.16 Hallar el espectro de la señal MAP (7.79) si $g(t)$ es un tren de pulsos rectangulares periódicos, el ancho del pulso es d segundos, y se repiten cada $T = 1/(2f_M)$ segundos.

Solución: sea

$$\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega), \quad (7.80)$$

$$M(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M.$$

De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), la transformada de Fourier de $f(t) = m(t) g(t)$ es

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[m(t)g(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * G(\omega), \end{aligned} \quad (7.81)$$

donde $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$.

La función $G(\omega)$ se puede obtener de (5.77), si se hace

$$T = \frac{1}{(2f_M)} = \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_M.$$

Entonces;

$$G(\omega) = 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) \delta(\omega - 2n\omega_M). \quad (7.82)$$

Sustituyendo (7.82) en (7.81), se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\omega_M d M(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) \delta(\omega - 2n\omega_M) \\ &= 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) M(\omega) * \delta(\omega - 2n\omega_M) \\ &= 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) M(\omega - 2n\omega_M), \end{aligned} \quad (7.83)$$

mediante la relación (4.120).

Si $m(t)$ es una señal de banda limitada, como se muestra en la figura 7.11(a), entonces el espectro de amplitud de la señal MAP es el que ilustra la figura 7.11(f).

En el problema 7.16 se utiliza como $g(t)$ un tren de pulsos rectangulares. El análisis espectral del ejemplo siguiente muestra que la forma de onda del pulso no es pertinente.

PROBLEMA 7.17 Hallar el espectro de la señal MAP, dado por la ecuación (7.79), si $g(t)$ es un tren de pulsos periódicos de forma de onda arbitraria, que se repiten cada $T < 1/(2f_M)$ segundos.

Solución: puesto que $g(t)$ es una función periódica, se puede expandir en una serie de Fourier; de esta manera,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Entonces, según (7.79), la señal MAP $f(t) = m(t) g(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(t) &= m(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n m(t) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (7.84)$$

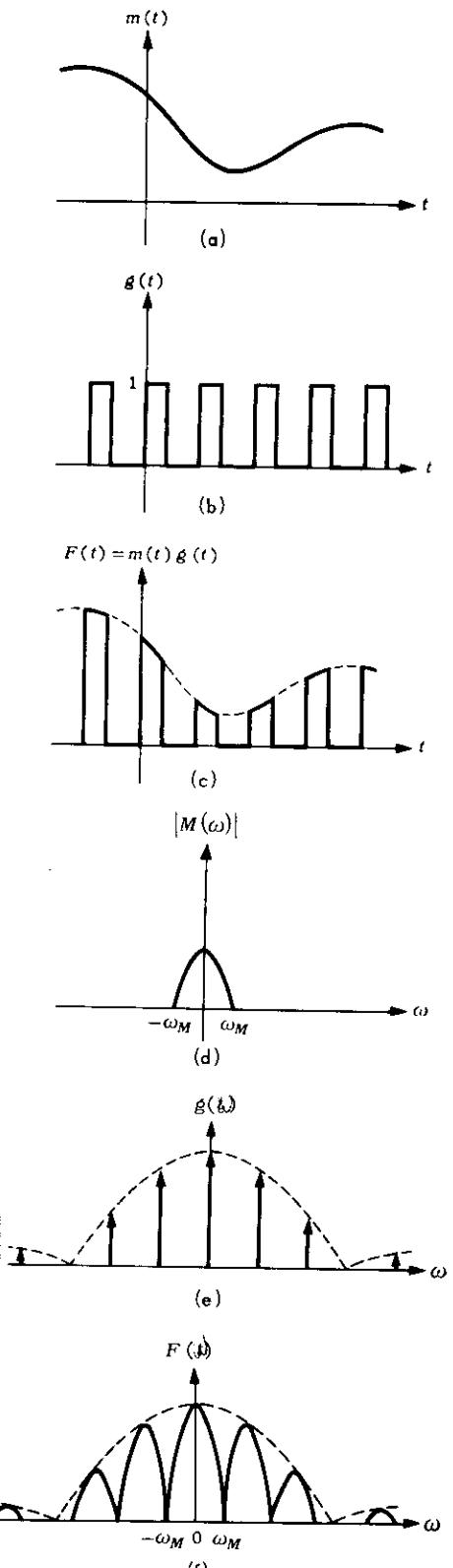


Figura 7.11 (a) La señal de banda limitada $m(t)$ del problema 7.16. (b) Un tren periódico de pulsos rectangulares $g(t)$. (c) La señal MAP $F(t) = m(t) g(t)$. (d) El espectro de $m(t)$. (e) El espectro de $g(t)$. (f) El espectro de la señal MAP $F(t)$.

De esta manera

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n m(t) e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[m(t) e^{jn\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Ahora bien, de acuerdo con la propiedad de desplazamiento en la frecuencia de la transformada de Fourier, dada por 4.74, si $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$, entonces, se tiene

$$\mathcal{F}[m(t) e^{jn\omega_0 t}] = M(\omega - n\omega_0).$$

De donde,

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n M(\omega - n\omega_0). \quad (7.86)$$

La figura 7.12(b) ilustra el espectro de amplitud de la señal MAP, el cual consta de pulsos espaciados periódicamente, cuya amplitud es modificada por los coeficientes de Fourier de $g(t)$. En la figura 7.12, ω_0 se selecciona de tal manera que $T < 1/(2f_M)$.

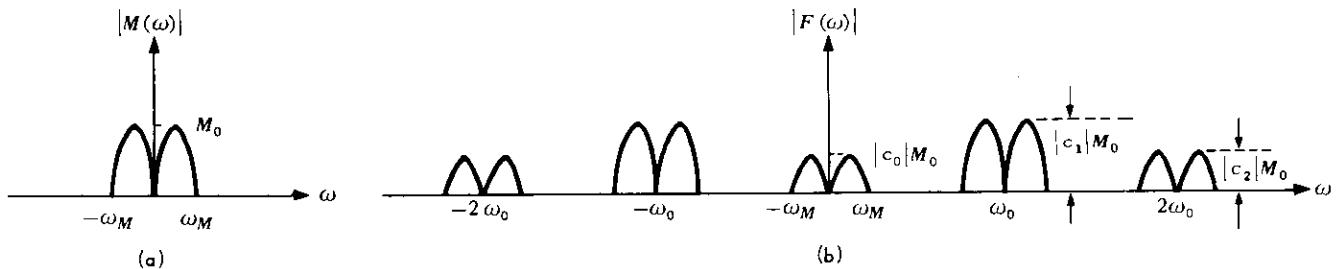


Figura 7.12 (a) El espectro de la señal de banda limitada $m(t)$. (b) El espectro de la señal MAP del problema 7.17.

7.5 FUNCIONES DE CORRELACION PROMEDIO

El concepto de funciones de correlación se presentó en la sección 4.9. Para señales periódicas o de ruido que existan a lo largo del intervalo de tiempo $(-\infty, \infty)$, el contenido de energía será infinito, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \infty.$$

Luego es obvio que las funciones de correlación tal como fueron definidas en la sección 4.9, no existen. En tales casos se consideran las siguientes funciones de correlación promedio.

La función de *autocorrelación promedio* de $f_1(t)$, denotada por $\bar{R}_{11}(\tau)$, está definida por el límite

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt. \quad (7.87)$$

Análogamente, la función de *correlación promedio* de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, denotada por $\bar{R}_{12}(\tau)$, está definida por el límite

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt. \quad (7.88)$$

PROBLEMA 7.18 Para funciones periódicas (con período T_1) demostrar que

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt, \quad (7.89)$$

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt. \quad (7.90)$$

Solución: sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones periódicas con período T_1 , entonces, se tiene

$$f_1(t) = f_1(t + T_1), \quad (7.91)$$

$$f_1(t - \tau) = f_1(t - \tau + T_1), \quad (7.92)$$

$$f_2(t - \tau) = f_2(t - \tau + T_1). \quad (7.93)$$

Por consiguiente, los integrandos en (7.87) y (7.88) son funciones periódicas en la variable t y con período T_1 . La integral de tal función en cada período es la misma, por tanto, no es importante si las funciones de correlación son promediadas en un intervalo muy grande, $T \rightarrow \infty$, o en un intervalo de un período T_1 .

Luego para funciones periódicas, se tiene que

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt,$$

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt.$$

PROBLEMA 7.19 Demostrar que las funciones de autocorrelación y correlación promedios, de señales periódicas cuyo período es T_1 , son también funciones periódicas y de igual período.

Solución: por el resultado (7.89), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau + T_1) dt. \end{aligned}$$

Pero según (7.93), se tiene que

$$\bar{R}_{11}(\tau - T_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = \bar{R}_{11}(\tau). \quad (7.94)$$

Análogamente, por (7.90) y (7.93), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau + T_1) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \bar{R}_{12}(\tau), \\ &= \bar{R}_{12}(\tau). \end{aligned} \quad (7.95)$$

Las ecuaciones (7.94) y (7.95) muestran que $\bar{R}_{11}(\tau)$ y $\bar{R}_{12}(\tau)$ son funciones periódicas cuyo período es T_1 .

PROBLEMA 7.20 Hallar la función de autocorrelación promedio de la onda sinusoidal dada por

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Solución: puesto que $f(t)$ es periódica, entonces de (7.89), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) \operatorname{sen}[\omega_1(t - \tau) + \phi] dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi - \omega_1 \tau) dt. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \frac{A^2}{2 T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [\cos \omega_1 \tau - \cos(2\omega_1 t + 2\phi - \omega_1 \tau)] dt \\ &= \frac{A^2}{2 T_1} \cos \omega_1 \tau \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_1 \tau). \end{aligned} \quad (7.97)$$

La ecuación (7.97) muestra que $\bar{R}_{ff}(\tau)$ es independiente de la fase ϕ de $f(t)$.

PROBLEMA 7.21 Demostrar que si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones reales y periódicas, que tienen el mismo período T_1 , entonces

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{1n}^* c_{2n}] e^{-jn\omega_1 \tau}, \quad (7.98)$$

donde $\omega_1 = 2\pi/T_1$ y c_{1n} , c_{2n} son los coeficientes complejos de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, y c_{1n}^* denota el conjugado complejo de c_{1n} .

Solución: en el caso de funciones periódicas, según (7.90) se tiene

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt.$$

Sean las expansiones en series de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ las dadas por

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1n} e^{jn\omega_1 t}, \quad (7.99)$$

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{jn\omega_1 t}, \quad (7.100)$$

donde

$$c_{1n} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (7.101)$$

$$c_{2n} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_2(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (7.102)$$

Expresando $f_2(t - \tau)$ de la ecuación (7.90), en la forma dada en (7.100), se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12}(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{jn\omega_1(t-\tau)} \right] dt. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral, se tiene

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{-jn\omega_1 \tau} \left[\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{jn\omega_1 t} dt \right]. \quad (7.104)$$

La integral dentro del paréntesis angular se reconoce, comparando con la expresión (7.101), como el conjugado complejo de c_{1n} . Por tanto,

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{1n}^* c_{2n}] e^{-jn\omega_1 \tau}.$$

Obsérvese que $\bar{R}_{12}(\tau)$ también es una función periódica de τ cuyo período es T_1 .

PROBLEMA 7.22 Demostrar que si $f(t)$ es una función real y periódica con período T , entonces

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}, \quad (7.105)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ y c_n son los coeficientes complejos de Fourier de $f(t)$.

Solución: si se hace $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, y $T_1 = T$, entonces, de (7.98) en el problema 7.21, se obtiene

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n e^{-jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{-jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}$$

dado que $|c_{-n}|^2 = |c_n|^2$.

Obsérvese que la ecuación (7.105) es una expansión en serie de Fourier de $\bar{R}_{ff}(\tau)$, y por consiguiente, $\bar{R}_{ff}(\tau)$ es una función de τ , periódica y de igual período que el de la función $f(t)$. La ecuación (7.105) también muestra que los coeficientes de Fourier de $\bar{R}_{ff}(\tau)$, sólo contienen los valores absolutos de los coeficientes de Fourier de $f(t)$. Por consiguiente, se sigue que todas las funciones periódicas en el tiempo, que tienen las mismas magnitudes de los coeficientes de Fourier y la misma periodicidad, tienen la misma función de autocorrelación, aun cuando las fases de los coeficientes de Fourier sean diferentes.

7.6 IDENTIFICACION DE SEÑALES MEDIANTE CORRELACION

A continuación se considera el caso de señales que están contaminadas por ruido. Normalmente se denomina ruido a cualquier perturbación espuria o indeseada que tiende a oscurecer o encubrir la señal transmitida. La señal de ruido que se encuentra en la práctica, es una señal cuya amplitud varía al azar. En lo que sigue, se supone que el ruido tiene un valor promedio de cero, es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt = 0. \quad (7.106)$$

En general, de dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se dice que *no están correlacionadas* si

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \\ &= \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) dt \right] \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (7.107)$$

PROBLEMA 7.23 Sean $s(t)$ una señal útil y $n(t)$ una señal que representa el ruido.

Demostrar que si $s(t)$ y $n(t)$ no están correlacionadas, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) n(t - \tau) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } \tau. \quad (7.108)$$

Solución: si $s(t)$ y $n(t)$ no están correlacionadas, entonces, por la relación (7.107), se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) n(t - \tau) dt = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \right] \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt \right] = 0$$

en razón de la suposición dada por la relación (7.106).

Si se denota como $\bar{R}_{sn}(\tau)$ a la función de correlación promedio de $s(t)$ y $n(t)$, entonces la relación (7.108) se puede expresar como

$$\bar{R}_{sn}(\tau) = 0 \quad \text{para todo valor de } \tau. \quad (7.109)$$

Para señales de ruido al azar, cuyo valor promedio es cero, se tiene

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{R}_{nn}(\tau) = 0. \quad (7.110)$$

PROBLEMA 7.24 Demostrar que la función de autocorrelación promedio de la suma de la señal y del ruido, es la suma de las funciones individuales de autocorrelación de la señal y del ruido, respectivamente.

Solución: sea $f(t) = s(t) + n(t)$; entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) + n(t)] [s(t - \tau) + n(t - \tau)] dt \\ &= \bar{R}_{ss}(\tau) + \bar{R}_{nn}(\tau) + \bar{R}_{sn}(\tau) + \bar{R}_{ns}(\tau). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Puesto que la señal $s(t)$ y el ruido $n(t)$ no están correlacionadas, se tiene

$$\bar{R}_{sn}(\tau) = \bar{R}_{ns}(\tau) = 0.$$

De esta manera,

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \bar{R}_{ss}(\tau) + \bar{R}_{nn}(\tau). \quad (7.112)$$

PROBLEMA 7.25 Utilizando el resultado (7.112) del problema 7.24, demostrar que la función de autocorrelación se puede usar para detectar señales.

Solución: sea $f(t)$ la señal recibida, que es la suma de la señal útil $s(t)$ y el ruido $n(t)$. Ahora bien, si se conoce la naturaleza del ruido, tal como el espectro de potencia que se estudiará en la sección siguiente, entonces se puede calcular $\bar{R}_{nn}(\tau)$, la función de

autocorrelación promedio del ruido. Si $\bar{R}_{ss}(\tau)$ difiere de $\bar{R}_{ff}(\tau)$, se puede concluir que una señal útil $s(t)$, existe en la señal recibida $f(t)$, puesto que $\bar{R}_{ss}(\tau)$ es diferente de cero.

La ecuación (7.112) también ofrece un medio de detectar una señal periódica oculta por el ruido. Puesto que en este caso $s(t)$ es una señal periódica y $n(t)$ es una señal no periódica, del resultado del problema 7.19 y de la relación (7.110), se sigue que $\bar{R}_{ss}(\tau)$ es periódica, mientras que $\bar{R}_{nn}(\tau)$ se hace muy pequeña para valores grandes de τ . Por consiguiente, para valores suficientemente grandes de τ , $\bar{R}_{ff}(\tau)$ será casi igual a $\bar{R}_{ss}(\tau)$, y $\bar{R}_{ff}(\tau)$ mostrará una naturaleza periódica.

PROBLEMA 7.26 Demostrar que la función de autocorrelación entre las señales transmitida y recibida, es la misma función de autocorrelación entre la señal transmitida y la señal útil recibida.

Solución: sean $g(t)$ y $f(t)$ la señal transmitida y la señal recibida, respectivamente. Entonces, se tiene que

$$f(t) = s(t) + n(t),$$

donde $s(t)$ es la señal útil recibida y $n(t)$ es el ruido. Si ahora se correlaciona la señal recibida $f(t)$ con la señal transmitida, se obtiene

$$\bar{R}_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) + n(t)] g(t - \tau) dt = \bar{R}_{sg}(\tau) + \bar{R}_{ng}(\tau). \quad (7.113)$$

Puesto que $n(t)$ y $g(t)$ no están correlacionadas, es decir, $\bar{R}_{ng}(\tau) = 0$, se tiene que

$$\bar{R}_{fg}(\tau) = \bar{R}_{sg}(\tau). \quad (7.114)$$

PROBLEMA 7.27 Partiendo del resultado (7.114) del problema (7.25), demostrar que la correlación promedio se puede utilizar para la detección de señales.

Solución: si la señal recibida $f(t)$ es únicamente ruido, es decir, si $s(t) = 0$, entonces la función de correlación promedio $\bar{R}_{sg}(\tau) = 0$, y por tanto $\bar{R}_{fg}(\tau) = 0$. Por consiguiente, se concluye que si la función de correlación promedio entre la señal transmitida y la señal recibida no es cero, entonces existe una señal útil en la señal recibida. La ecuación (7.114) también puede ser utilizada en la detección de una señal periódica contaminada por el ruido. Puesto que la señal útil $s(t)$ y la señal transmitida $g(t)$ son señales de la misma frecuencia, se sigue del resultado del problema 7.19, que $\bar{R}_{sg}(\tau)$ también es una función periódica de igual período. Por consiguiente, del resultado (7.114) se concluye que si la función de correlación promedio, de la señal recibida $f(t)$ y la señal transmitida $g(t)$, es periódica, entonces $f(t)$ debe contener una señal periódica.

Se debe observar que en el método de correlación, $\bar{R}_{fg}(\tau) = \bar{R}_{sg}(\tau)$, sin ningún término adicional del ruido, tal como $\bar{R}_{nn}(\tau)$, encontrado en la técnica de detección mediante autocorrelación; por tanto, es posible detectar una señal periódica en la señal recibida $f(t)$ a cualquier valor de τ .

7.7 ESPECTROS DE POTENCIA PROMEDIO: SEÑALES AL AZAR

En la sección 4.8, se presentó el concepto de espectro de energía o densidad de energía de $f(t)$; en esa sección se supuso que el contenido de energía de $f(t)$ es finito, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \text{finito}. \quad (7.115)$$

Para tales funciones, la potencia promedio en el intervalo T se aproxima a cero a medida que T se aproxima a infinito; de esta manera, se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = 0. \quad (7.116)$$

En relación con los cálculos de ruido, es necesario considerar señales sin contenido finito de energía. En este caso, la potencia promedio de $f(t)$ es la cantidad

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt. \quad (7.117)$$

Cuando este límite existe, la cantidad

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (7.118)$$

se denomina *espectro de potencia* o *densidad espectral de potencia* de la función $f(t)$.

Si sólo se especifica la densidad espectral de potencia de la función $f(t)$, no se puede conocer su forma de onda, porque sólo se conoce el espectro promediado en el tiempo. Las señales especificadas de esta manera se denominan *señales al azar*. Las señales al azar generalmente se describen en términos de sus propiedades estadísticas; sin embargo, aquí no se analizarán estas propiedades.

Aunque la cantidad dada por la ecuación (7.118) se conoce como la densidad espectral de potencia de la función $f(t)$, la densidad espectral de potencia (o simplemente densidad espectral) de la función $f(t)$ se define generalmente como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación promedio de $f(t)$. De esta manera, se define

$$P(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{tt}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{tt}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.119)$$

$$\bar{R}_{tt}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.120)$$

PROBLEMA 7.28 Demostrar que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función $f(t)$, está dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi\nu) d\nu, \quad (7.121)$$

donde $\omega = 2\pi\nu$.

Solución: de la relación (7.120), se sigue que

$$\bar{R}_{tt}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi\nu) d\nu. \quad (7.122)$$

Ahora bien, por (7.87), se tiene que

$$\bar{R}_{tt}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt. \quad (7.87)$$

Por consiguiente,

$$\bar{R}_{tt}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt. \quad (7.123)$$

Comparando (7.123) con (7.122), se obtiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi\nu) d\nu.$$

La ecuación (7.121) establece que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función $f(t)$, está dada por la integral de $P(\omega)$ a lo largo de todo el intervalo de frecuencia. Por esta razón la cantidad $P(\omega)$ se denomina *espectro de potencia* o *densidad espectral de potencia* de $f(t)$.

PROBLEMA 7.29 Hallar la densidad espectral de potencia de una función periódica $f(t)$ cuyo período es T .

Solución: supóngase que la serie de Fourier de la función $f(t)$, está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.124)$$

En el problema 7.22 se demostró que la función de autocorrelación promedio de $f(t)$ está dada por

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}. \quad [7.105]$$

Si se toma la transformada de Fourier de $\bar{R}_{ff}(\tau)$, se obtiene

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \mathcal{F}[\bar{R}_{ff}(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 \tau}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (7.125)$$

mediante la relación (5.21).

Por tanto, $P(\omega)$ consta de una serie de impulsos localizados en las frecuencias armónicas de $f(t)$. Cada impulso tiene un valor igual a la potencia contenida en esa componente frecuencial y es una clara medida de la distribución de potencia en $f(t)$.

PROBLEMA 7.30 Demostrar que la potencia promedio por período en una función periódica $f(t)$, está dada por

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (7.126)$$

Solución: dado que $f(t)$ es periódica, entonces de la ecuación (7.89), se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt, \quad (7.127)$$

donde T_1 es el período de $f(t)$.

Sustituyendo (7.125) en (7.121) y utilizando la relación (7.127), se obtiene

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega.$$

Si se intercambia el orden de la sumatoria y de la integral, y se utiliza la propiedad de la función δ , se obtiene

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

La ecuación (7.126) es exactamente el teorema de Parseval para una función periódica, expresado en la ecuación (3.85).

El ruido blanco se define como cualquier señal al azar cuya densidad espectral de potencia es una constante (independiente de la frecuencia).

PROBLEMA 7.31 Hallar la función de autocorrelación promedio del ruido blanco.

Solución: según la definición de ruido blanco, se tiene que

$$P(\omega) = K. \quad (7.128)$$

De la relación (7.120), se sigue que

$$\bar{R}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Según la identidad (5.4) de la función δ , es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau),$$

se tiene.

$$\bar{R}(\tau) = K \delta(\tau). \quad (7.129)$$

Por consiguiente, la función de autocorrelación promedio del ruido blanco resulta ser un impulso.

PROBLEMA 7.32 La función de autocorrelación promedio de la corriente del ruido térmico está dada por

$$\bar{R}_{ii}(\tau) = kTG\alpha e^{-\alpha|\tau|}, \quad (7.130)$$

donde

k = constante de Boltzmann, $k = 1,38 \times 10^{-23}$ julios/ $^{\circ}\text{K}$,

T = temperatura ambiente en grados Kelvin,

G = conductancia de la resistencia en mhos,

α = número promedio de colisiones de un electrón, en un segundo.

Hallar la densidad espectral de potencia promedio, para la corriente del ruido térmico.

Solución: si se toma la transformada de Fourier de (7.130), se tiene

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \mathcal{F}[\bar{R}_{ii}(\tau)] \\ &= kTG\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= kTG\alpha \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{2kTG\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2kTG}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Puesto que α , el número de colisiones por segundo, es del orden de 10^{12} , el factor $1 + \omega^2/\alpha^2$ está cercano a la unidad para frecuencias inferiores a 10^{10} hz. Por consiguiente, para frecuencias inferiores a 10^{10} hz, la densidad espectral de potencia promedio, para la corriente del ruido térmico, se puede aproximar por medio de

$$P(\omega) = 2kTG. \quad (7.132)$$

7.8 RELACIONES ENTRE LA ENTRADA Y LA SALIDA: CALCULO DEL RUIDO

Las relaciones entre la entrada y la salida estudiadas en el capítulo sexto, determinan la salida de un sistema lineal de parámetros constantes, cuando la entrada es una función del tiempo conocida. Dado que las señales al azar, tal como la del ruido, no se pueden expresar como funciones deterministas del tiempo, entonces las técnicas desarrolladas en el capítulo sexto no se pueden aplicar directamente cuando la entrada es una señal al azar.

En esta sección se estudiará la aplicación de funciones de correlación y densidades espectrales de potencia, a problemas de análisis de sistemas que involucran señales al azar.

PROBLEMA 7.33 Sean $x(t)$ y $y(t)$ las señales al azar de entrada y salida, respectivamente, de un sistema lineal, estable, y de parámetros constantes, caracterizado por la función $H(\omega)$. Demostrar que las autocorrelaciones promedios de la entrada y de la salida están relacionadas por

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda, \quad (7.133)$$

donde $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$ = respuesta del sistema al impulso unitario

Solución: en la ecuación (6.87) se demostró que la salida $y(t)$ está relacionada con la entrada $x(t)$, por la integral de convolución, es decir,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (7.134)$$

Ahora bien, según la relación (7.87), se tiene que

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) y(t - \tau) dt. \quad (7.135)$$

Por la relación (7.134), se puede expresar $y(t)$ y $y(t - \tau)$ como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda, \quad (7.136)$$

$$y(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \tau - \sigma) d\sigma. \quad (7.137)$$

Sustituyendo (7.136) y (7.137) en (7.135), se obtiene

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \tau - \sigma) d\sigma \right] dt. \quad (7.138)$$

Intercambiando el orden de la integración se puede expresar la relación (7.138) como

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \lambda) x(t - \tau - \sigma) dt \right] d\sigma d\lambda. \quad (7.139)$$

Dado que,

$$\bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \lambda) x(t - \tau - \sigma) dt, \quad (7.140)$$

la ecuación (7.139) se convierte en

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda.$$

PROBLEMA 7.34 Demostrar que $P_0(\omega)$, la densidad espectral de potencia de la salida, y $P_i(\omega)$, la densidad espectral de potencia de la entrada, de un sistema lineal, están relacionados por

$$P_0(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega), \quad (7.141)$$

donde $H(\omega)$ es la función del sistema.

Solución: por la ecuación 7.119, se tiene que $P_0(\omega)$ está dado por

$$P_0(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{yy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.142)$$

Sustituyendo (7.133) en (7.142), se obtiene

$$P_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.143)$$

Con el cambio de la variable $\mu = \tau + \sigma - \lambda$, seguido por una separación de variables, se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\mu) e^{-j\omega(\mu - \sigma + \lambda)} d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{j\omega\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{xx}(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu. \end{aligned} \quad (7.144)$$

Puesto que

$$P_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

y $h(t)$ es siempre real,

$$H^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Entonces, la ecuación (7.144) se puede expresar como

$$P_0(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) P_i(\omega). \quad (7.145)$$

Dado que $H(\omega) H^*(\omega) = |H(\omega)|^2$, se tiene

$$P_0(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega).$$

Para las señales al azar no se tiene ni se puede obtener, una expresión explícita del ruido de entrada, o de la respuesta de un sistema a tal fuente. En consecuencia, no se dispone de una relación tal como la (6.92) para señales al azar. Sin embargo, por medio de densidades espectrales de potencia, se puede establecer y utilizar la relación (7.141) en problemas que involucran señales al azar, aplicadas a un sistema lineal.

PROBLEMA 7.35 Hallar la función de autocorrelación promedio, de la salida del circuito RC para bajas frecuencias, que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada es ruido blanco. Así mismo, hallar la media cuadrática del voltaje del ruido en la salida.

Solución: según el resultado (6.100) del problema (6.19), la respuesta impulsiva $h(t)$ del circuito está dada por,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t),$$

mientras que, según (7.129), la función de autocorrelación promedio de la entrada (que es el ruido blanco) está dada por

$$\bar{R}_{xx}(\tau) = K \delta(\tau).$$

Entonces, mediante la relación (7.133), se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\lambda/RC} u(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{RC} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) \delta(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda \\ &= \frac{K}{(RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + \sigma - \lambda) e^{-\lambda/RC} u(\lambda) d\lambda d\sigma. \end{aligned} \quad (7.146)$$

Recordando la propiedad (2.68) de la función δ , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yy}(\tau) &= \frac{K}{(RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) e^{-(\tau+\sigma)/RC} d\sigma \\ &= \frac{K}{(RC)^2} \int_0^{\infty} e^{-\tau/RC} e^{-2\sigma/RC} d\sigma \end{aligned}$$

dado que $u(\sigma) = 0$, para $\sigma < 0$, y $u(\sigma) = 1$, para $\sigma > 0$.

De donde,

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{K}{(RC)^2} e^{-\tau/RC} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma/RC} d\sigma = \frac{K}{2RC} e^{-\tau/RC}. \quad (7.147)$$

La ecuación (7.147) es válida sólo para valores positivos de τ ; sin embargo, como la función de autocorrelación es una función par de τ [ver 4.148], se tiene

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{K}{2RC} e^{-|\tau|/RC}, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (7.148)$$

La media cuadrática del voltaje del ruido en la salida está dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt = \bar{R}_{yy}(0) = \frac{K}{2RC}. \quad (7.149)$$

PROBLEMA 7.36 Hallar la densidad espectral de potencia, para la salida del circuito RC , que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada es ruido blanco. Así mismo, comparar la media cuadrática del voltaje del ruido en la salida, con el valor obtenido mediante la relación (7.121).

Solución: según (6.99), la función del sistema, $H(\omega)$, del circuito RC , está dada por

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}. \quad [6.99]$$

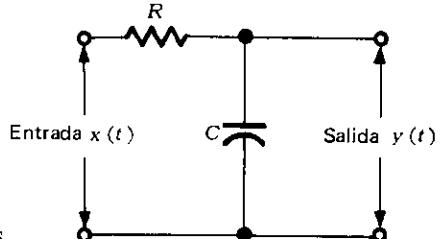


Figura 7.13 El circuito RC para bajas frecuencias del problema 7.35.

La densidad espectral de potencia de la entrada (ruido blanco), está dada por

$$P_i(\omega) = K. \quad [7.128]$$

De esta manera, según (7.141), la densidad espectral de potencia de la salida, está dada por

$$P_o(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} K. \quad (7.150)$$

Por (7.121), se tiene que la media cuadrática del voltaje de salida, se puede evaluar a partir de $P_o(\omega)$; de esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_o(\omega) d\omega \\ &= \frac{K}{2\pi (RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \\ &= \frac{K}{2RC} \end{aligned} \quad (7.151)$$

lo cual está de acuerdo con el resultado (7.149).

7.9 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 7.37 Demostrar que una función periódica de banda limitada, sin armónicos de orden superior a N , se puede especificar únicamente por su valor en $2N + 1$ instantes de un período.

[Sugerencia: con $2N + 1$ incógnitas, una función periódica de banda limitada tiene la forma

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_0 t + \phi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

PROBLEMA 7.38 Considerar las funciones muestradoras

$$\phi_n(t) = \frac{\sin \omega_M (t - nT)}{\omega_M (t - nT)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

donde $\omega_M = 2\pi f_M$, y $T = 1/(2f_M)$. Demostrar que (a) $\phi_n(t)$ son ortogonales en el intervalo $-\infty < t < \infty$, y (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) \phi_m(t) dt = T \delta_{nm},$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 4.23, y el teorema de Parseval.]

PROBLEMA 7.39 Si $f(t)$ es una señal de banda limitada, esto es, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 0$, para $|\omega| > \omega_c$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_n(t) dt = T f(nT),$$

donde $\phi_n(t)$ es la función muestradora del problema 7.38, para todo $\phi_n(t)$ del mismo problema, con $\omega_M > \omega_c$.

[Sugerencia: multiplicar (7.16) por $\phi_n(t)$, integrar entre $-\infty$ e ∞ , y utilizar el resultado del problema 7.38.]

PROBLEMA 7.40 Utilizando el teorema de convolución en el tiempo, dado por (4.122), verificar el resultado del problema 7.39.

[Sugerencia: ver el problema 4.95.]

PROBLEMA 7.41 Sea $f(t)$ una señal de banda limitada, cuyo espectro es cero fuera del intervalo de $-f_M$ a f_M Hertz. Si $f(t)$ se muestrea a una tasa de $2f_M$ muestras por segundo, probar que

$$\frac{1}{2f_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f\left(\frac{n}{2f_M}\right) \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt.$$

PROBLEMA 7.42 Demostrar que el producto de una señal de AM, con una onda periódica cuya frecuencia fundamental es la frecuencia de la portadora de la señal AM, incluye un término proporcional a la señal $m(t)$.

PROBLEMA 7.43 Demostrar que la señal DBLPS se puede demodular, multiplicando la señal por cualquier señal periódica, cuya frecuencia fundamental es la frecuencia portadora de la señal DBLPS.

PROBLEMA 7.44 La eliminación de una banda lateral en una señal DBLPS, produce una señal denominada señal de AM de *banda lateral única* (BLU). La figura 7.14 muestra un diagrama de bloques del método de defasamiento para producir una señal BLU.

Obtener: (a) la señal DBLPS, $f_1(t)$, multiplicando el mensaje dado, $m(t)$, por una portadora $\cos \omega_c t$, y (b) la señal DBLPS, $f_2(t)$, multiplicando la portadora defasada en $-\frac{1}{2}\pi$, por el mensaje también defasado en $-\frac{1}{2}\pi$. Demostrar también que $f_1(t) - f_2(t)$, produce una señal BLU.

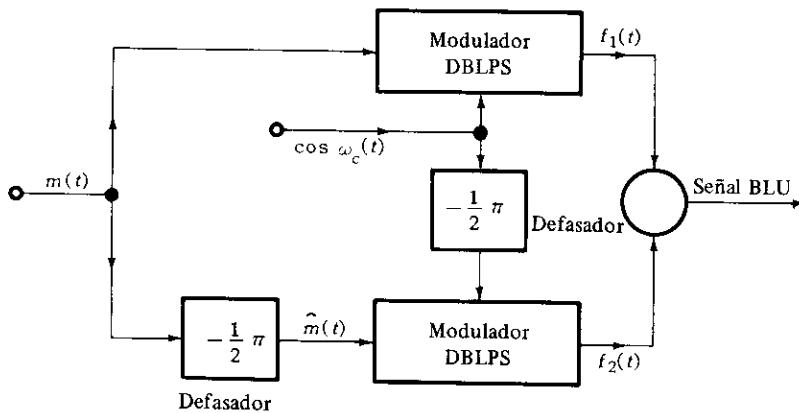


Figura 7.14 Diagrama de bloques del método de defasamiento para producir una señal BLU.

PROBLEMA 7.45 (a) Demostrar que la señal $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$, donde $m(t)$ es una onda periódica cuadrada, se puede expresar como la señal modulada en fase $\cos [\omega_c t + \phi(t)]$. (b) Hallar $\phi(t)$.

Respuesta: si se tiene

$$m(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < T/2 \\ -1 & \text{para } T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{y} \quad m(t+T) = m(t),$$

entonces $\phi(t)$ también es una onda periódica cuadrada, es decir,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < T/2 \\ \pi & \text{para } T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi(t+T) = \phi(t).$$

PROBLEMA 7.46 Las señales de FM con $\phi(t) = k_t \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \ll \frac{1}{2}\pi$ para todo

valor de t , se denominan señales de FM de *banda angosta*. Hallar la ecuación y el espectro de frecuencia de una señal de FM de banda angosta.

Respuesta: $A \cos \omega_c t - A \phi(t) \sin \omega_c t$,

$$\frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{Ak_f}{2\omega} [M(\omega - \omega_c) - M(\omega + \omega_c)],$$

donde $M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)]$.

PROBLEMA 7.47 Comparar y hallar las diferencias entre una señal de FM de banda angosta y una señal ordinaria de AM. (Cf., problema 7.46.)

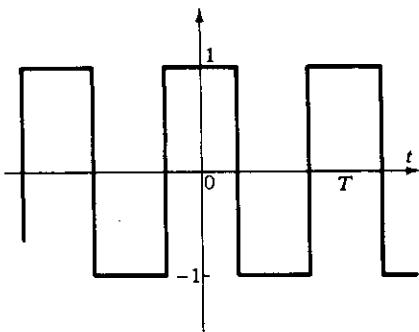


Figura 7.15 El pulso rectangular periódico y simétrico del problema 7.48.

PROBLEMA 7.48 Hallar el espectro de la señal MAP (7.79), si $g(t)$ es el pulso rectangular periódico y simétrico, que se muestra en la figura 7.15. Esta señal especial MAP también se denomina señal *recortada*.

Respuesta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_{2n-1} [M\{\omega - (2n-1)\omega_0\} + M\{\omega + (2n-1)\omega_0\}]$, con

$$a_{2n-1} = \begin{cases} \frac{4}{(2n-1)\pi} & \text{para } (2n-1) = 1, 5, \dots \\ \frac{-4}{(2n-1)\pi} & \text{para } (2n-1) = 3, 7, \dots \end{cases}$$

(Cf., problema 2.13.)

PROBLEMA 7.49 Demostrar que la función de autocorrelación promedio $R_{11}(\tau)$, es una función par de τ .

PROBLEMA 7.50 Demostrar que la derivada de la función de autocorrelación promedio de $f(t)$, es el negativo de la función de correlación promedio de $f(t)$ y df/dt ; esto es,

$$d\bar{R}_{ff}/d\tau = -\bar{R}_{f df/dt}.$$

PROBLEMA 7.51 De dos señales periódicas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ con período T , se dice que *no están correlacionadas* o son incoherentes, si para todo valor de τ , se cumple que

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) dt \times \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) dt;$$

es decir, la función de correlación promedio de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, es igual al producto del promedio de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en un período.

Demostrar que el valor cuadrático medio de la suma de dos señales periódicas incoherentes, es la suma de los valores cuadráticos medios de las dos señales, cuando el valor promedio de cada señal es cero

PROBLEMA 7.52 Demostrar que el espectro de la densidad de potencia de una onda senoidal $A \operatorname{sen} \omega_1 t$ ($\delta A \cos \omega_1 t$), es $P(\omega) = \frac{1}{4} A^2 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$. [Sugerencia: utilizar el resultado del problema 7.20.]

PROBLEMA 7.53 Dos señales $f_a(t)$ y $f_b(t)$ se aplican a dos sistemas, como se muestra en la figura 7.16, siendo las salidas resultantes $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Expresar la función de correlación promedio $\bar{R}_{12}(\tau)$, de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, en términos de \bar{R}_{ab} , $h_1(t)$ y $h_2(t)$, donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son las respectivas respuestas de los dos sistemas al impulso unitario.

$$\text{Respuesta: } \bar{R}_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{ab}(\tau + \sigma - \lambda) h_2(\sigma) d\sigma d\lambda.$$

PROBLEMA 7.54 Si la *densidad espectral* $S_{12}(\omega)$, de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, está definida por $S_{12}(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{12}(\tau)]$, demostrar que para los dos sistemas del problema 7.53, se cumple

$$S_{12}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{ab}(\omega),$$

donde $S_{ab}(\omega)$ es la densidad espectral de $f_a(t)$ y $f_b(t)$; $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ son las funciones respectivas de los sistemas.

PROBLEMA 7.55 Hallar la función de autocorrelación promedio, de la salida del circuito para bajas frecuencias que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada tiene una función de autocorrelación promedio de la forma $\bar{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \alpha K e^{-\alpha|\tau|}$.

$$\text{Respuesta: } \bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{b^2 \alpha K}{2(b^2 - \alpha^2)} \left[e^{-\alpha|\tau|} - \frac{\alpha}{b} e^{-b|\tau|} \right], \text{ donde } b = \frac{1}{RC}.$$

PROBLEMA 7.56 El coeficiente $\frac{1}{2} \alpha K$, de $\bar{R}_{xx}(\tau)$ del problema 7.55, ha sido seleccionado de tal manera que la entrada tenga una densidad espectral K cuando $\omega = 0$. Luego, a bajas frecuencias la densidad espectral es la misma del ruido blanco. Demostrar que cuando $\alpha \gg 1/RC = b$, el resultado del problema 7.55 se aproxima al resultado (7.148) del ruido blanco. [Sugerencia: expresar $\bar{R}_{yy}(\tau)$ como

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{bK}{2} e^{-b|\tau|} \left[\frac{1}{(1 - b^2/\alpha^2)} \left(1 - \frac{b}{\alpha} e^{-(\alpha-b)|\tau|} \right) \right].$$

PROBLEMA 7.57 Sea $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, la transformada de Fourier de una función real $f(t)$, y $\hat{F}(\omega)$ la transformada de Fourier de $\hat{f}(t)$, donde $\hat{f}(t)$ está definida por

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [X(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega.$$

Demostrar que (a) la relación entre $\hat{f}(t)$ y $f(t)$ es

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x) \operatorname{sen} \omega(t-x) dx d\omega;$$

(b) la relación entre $\hat{F}(\omega)$ y $F(\omega)$ es

$$\hat{F}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega F(\omega).$$

[Sugerencia: (a) utilizar 4.19-20; (b) sustituir

$$R(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega) + F(-\omega)] \quad \text{y} \quad X(\omega) = \frac{1}{2j} [F(\omega) - F(-\omega)]$$

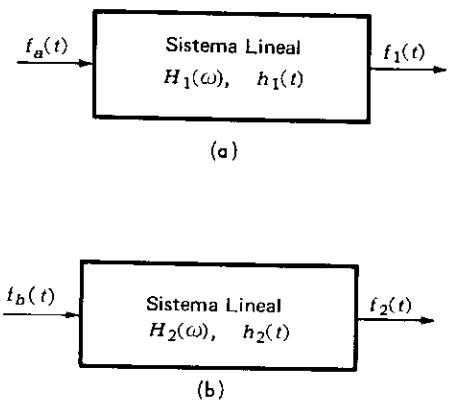


Figura 7.16 Los dos sistemas del problema 7.53.

en la definición de $\hat{f}(t)$, y observar que $\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$. [Ver los problemas 6.50 y 9.55.]

PROBLEMA 7.58 La señal analítica $f_+(t)$ relacionada con la señal real $f(t)$ está definida por

$$f_+(t) = f(t) + j\hat{f}(t),$$

donde $\hat{f}(t)$ es la señal definida en el problema 7.57. Demostrar que si $\mathcal{F}[f_+(t)] = F_+(\omega)$, entonces

$$F_+(\omega) = 2F(\omega)u(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0, \end{cases}$$

donde $u(\omega)$ es el escalón unitario.

PROBLEMA 7.59 Hallar la señal analítica relacionada con la señal $f(t) = \cos \omega t$.

[Sugerencia: ver el problema 6.51.]

Respuesta: $f_+(t) = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t = e^{j\omega t}$.

PROBLEMA 7.60 Con frecuencia es conveniente representar una señal real arbitraria $f(t)$, como una senoide de la forma $f(t) = A(t) \cos \theta(t)$, que es una onda modulada en amplitud y en ángulo; en esta expresión, $A(t)$ se denomina la *función envolvente*, $\theta(t)$ la *función de fase*, y $\omega_i = d\theta(t)/dt$ la frecuencia instantánea de la señal $f(t)$. Sea $\hat{f}(t)$ la señal definida en el problema 7.57; entonces la función envolvente $A(t)$ se puede definir mediante

$$A(t) = \frac{f(t)}{\cos \{\tan^{-1} [\hat{f}(t)/f(t)]\}},$$

y la función de fase se puede definir mediante

$$\theta(t) = \tan^{-1} [\hat{f}(t)/f(t)].$$

Utilizando las anteriores definiciones, expresar $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, donde A y ω son constantes, en la forma de una senoide modulada en amplitud y en ángulo.

Respuesta: $f(t) = A \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$.

PROBLEMA 7.61 Hallar la frecuencia instantánea de la señal $f(t) = 1/(1 + t^2)$.

[Sugerencia: ver el problema 6.51(b).]

Respuesta: $\omega_i = 1/(1 + t^2)$.

8

CAPITULO

APLICACIONES A PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA

8.1 SEPARACION DE VARIABLES Y SERIES DE FOURIER

Muchos problemas de valor en la frontera que se encuentran en las matemáticas de ingeniería, se pueden resolver adecuadamente por el método denominado "separación de variables". Se ilustrará la esencia del método por medio de ejemplos particulares.

PROBLEMA 8.1 Considérese la siguiente ecuación que regula las vibraciones transversales pequeñas de un cordel elástico que se estira a una longitud l y luego se fijan sus extremos:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.1)$$

donde $u(t, x)$ es la deflexión de la cuerda, y $c^2 = T/\rho$, donde ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud, y T la tensión de la cuerda. La ecuación (8.1) se conoce como la *ecuación de onda en una dimensión*; las condiciones de frontera son

$$u(0, t) = 0 \quad y \quad u(l, t) = 0 \quad \text{para todo valor de } t. \quad (8.2)$$

Las condiciones iniciales son

$$u(x, 0) = f(x), \quad y \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (8.3)$$

Hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación (8.1), que satisfaga las condiciones (8.2) y (8.3).

Solución: primero supóngase que la solución $u(x, t)$ de la ecuación (8.1) será de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (8.4)$$

que es el producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo de la variable x y la otra sólo de la variable t . Mediante diferenciación de (8.4), se obtiene

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x) T(t) \quad y \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = X(x) T''(t), \quad (8.5)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto al argumento de cada factor.

Sustituyendo (8.5) en la ecuación (8.1), se obtiene

$$X''(x) T(t) = \frac{1}{c^2} X(x) T''(t). \quad (8.6)$$

Dividiendo por $X(x) T(t)$, y luego separando las variables una a cada lado de la ecuación, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}. \quad (8.7)$$

Ahora bien, el primer miembro de la ecuación (8.7) es independiente de t , y por consiguiente el segundo miembro también lo es; el segundo miembro es independiente de x , y así mismo debe ser el primero. Por tanto, las expresiones del primero y del segundo miembro de la ecuación (8.7), deben ser iguales a una constante, independiente tanto de x como de t .

De esta manera, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -k^2. \quad (8.8)$$

La constante, que se denota por $-k^2$, se denomina *constante de separación*. La ecuación (8.8) conduce a dos ecuaciones diferenciales, lineales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.9)$$

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.10)$$

Ahora se determinan las soluciones $X(x)$ y $T(t)$ de las ecuaciones (8.9) y (8.10), de tal manera que $u(x, t) = X(x) T(t)$, satisaga las condiciones (8.2) y (8.3). Las soluciones generales de (8.9) y (8.10) son

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx, \quad (8.11)$$

$$T(t) = C \cos kct + D \operatorname{sen} kct. \quad (8.12)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.2), se tiene

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0.$$

Aquí se tiene el producto de dos términos, el cual es igual a cero. Puesto que $T(t)$ no es idénticamente cero, entonces $X(0)$ debe ser igual a cero. Análogamente, la segunda condición

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0$$

implica que $X(l) = 0$.

Por $X(0) = 0$, se concluye que

$$X(0) = A \cos 0 + B \operatorname{sen} 0 = A = 0; \quad (8.13)$$

por tanto,

$$X(x) = B \operatorname{sen} kx.$$

Por la segunda condición, se tiene

$$X(l) = B \operatorname{sen} kl = 0.$$

Pero si $B = 0$, $X(x) = 0$, y por tanto, $u(x, t) = 0$. Esto contradice las condiciones iniciales dadas por (8.3), de que $u(x, 0) = f(x) \neq 0$. Por consiguiente, se concluye que

$$\operatorname{sen} kl = 0,$$

de donde,

$$kl = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.14)$$

De esta manera se consigue un conjunto infinito de soluciones $X(x) = X_n(x)$, donde

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

La solución (8.12) se convierte en

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + D_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{l} t. \quad (8.16)$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(E_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + F_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \quad (8.17)$$

son las soluciones de la ecuación (8.1), que satisfacen las condiciones de frontera dadas por (8.2). En la expresión (8.17), los coeficientes E_n y F_n todavía no han sido determinados.

Observar que $B_n C_n = E_n$, y $B_n D_n = F_n$.

Evidentemente, la sola solución $u_n(x, t)$, dada en (8.17), no satisfará, en general, las condiciones iniciales dadas por (8.3). Como la ecuación (8.1) es lineal, se considera la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(E_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + F_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right). \quad (8.18)$$

Si ahora se requiere que (8.18) satisfaga las condiciones iniciales dadas en (8.3), se encuentra que los coeficientes E_n y F_n deben satisfacer las ecuaciones

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad (8.19)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{cn\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x). \quad (8.20)$$

La ecuación (8.19) muestra que los coeficientes E_n deben ser escogidos de tal manera que $u(x, 0)$ sea la expansión de $f(x)$ en una serie de Fourier en términos de senos (ver la sección 2-3); es decir,

$$E_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Análogamente, la ecuación (8.20) indica que los coeficientes F_n se deben escoger de tal manera que $\partial u(t, x)/\partial t|_{t=0}$ sea la expansión de $g(x)$ en una serie de Fourier en términos de senos; es decir,

$$F_n \frac{cn\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.22)$$

O

$$F_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.23)$$

Por tanto, la solución deseada es la (8.18), donde los coeficientes E_n y F_n son los dados por (8.21) y (8.23).

PROBLEMA 8.2 Hallar la solución de la ecuación (8.1), con las condiciones de frontera dadas por (8.2), pero con deflexión inicial triangular (figura 8.1) y velocidad inicial cero;

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l} x & \text{para } 0 < x < \frac{1}{2} l \\ \frac{2k}{l} (l - x) & \text{para } \frac{1}{2} l < x < l, \end{cases} \quad (8.24)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = 0. \quad (8.25)$$

Solución: puesto que $g(x) = 0$, entonces, por (8.23), se concluye que, $F_n = 0$. Por el resultado del problema 2.19, se observa que los coeficientes E_n de (8.21), están dados por (2.63); es decir,

$$E_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

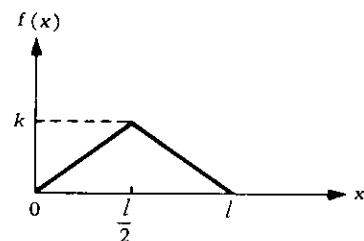


Figura 8.1 Deflexión inicial triangular.

Por tanto, la serie de Fourier de $f(x)$ en términos de senos, está dada por (2.64); es decir,

$$u(x, 0) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right).$$

Luego, por (8.18), se tiene

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{c\pi t}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3c\pi t}{l} + \dots \right). \quad (8.26)$$

PROBLEMA 8.3 En el problema 8.1, si $u(x, 0) = f(x)$, pero $\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = g(x) = 0$, demostrar que la solución de (8.1) se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x - ct) + \frac{1}{2} f_1(x + ct), \quad (8.27)$$

donde $f_1(x)$ es la extensión periódica impar de $f(x)$, siendo el período $2l$. Dar, así mismo, la interpretación física de (8.27).

Solución: la solución general de la ecuación (8.1) está dada por (8.18); es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(E_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + F_n \sin \frac{cn\pi t}{l} \right). \quad [8.18]$$

Puesto que la velocidad inicial $g(x)$, es cero, por (8.22) se deduce que los coeficientes F_n son cero, y la expresión (8.18) se reduce a

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l}. \quad (8.28)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)],$$

se sigue que

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \sin \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right].$$

Por tanto, se puede expresar (8.28) en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{l} (x + ct). \quad (8.29)$$

Comparando con (8.19), se concluye que las dos series anteriores son las obtenidas sustituyendo $(x - ct)$ y $(x + ct)$, respectivamente, por la variable x en la expansión de $f(x)$, dada por (8.19). Por consiguiente,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x - ct) + \frac{1}{2} f_1(x + ct),$$

donde $f_1(x)$ es la extensión periódica impar de $f(x)$, siendo el período $2l$, el cual se muestra en la figura 8.2.

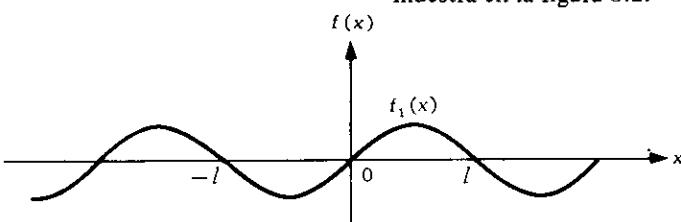


Figura 8.2 Extensión periódica de $f(x)$ del problema 8.3.

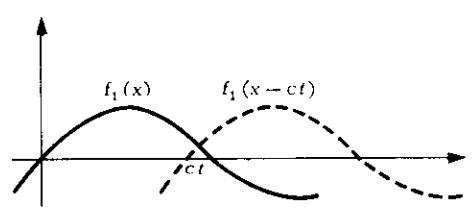


Figura 8.3 Gráfica de $f_1(x)$ y $f_1(x - ct)$ del problema 8.3.

La gráfica de $f_1(x - ct)$ se obtiene de la gráfica de $f_1(x)$, desplazándola ct unidades a la derecha (figura 8.3). Se reconoce, así mismo, que es posible permanecer en un valor particular de la función conservando el argumento, $x - ct$, constante; es decir, con movimiento en la dirección x positiva y velocidad c mientras t aumenta. Esto significa que $f_1(x - ct)$, ($c > 0$) representa una onda que se propaga hacia la derecha. Análogamente $f_1(x + ct)$ representa una onda que se propaga hacia la izquierda con velocidad c . Por consiguiente, la solución $u(x, t)$ es la superposición de estas dos ondas.

PROBLEMA 8.4 En problemas de flujo de calor en estado estacionario, o en problemas de potencial electrostático en un plano, siendo el plano $x - y$, la función de la distribución de temperatura, o la función de potencial electrostático $u(x, y)$ en una región libre de fuentes, satisface la siguiente ecuación en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (8.30)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Laplace*.

Hallar la solución de (8.30) con las siguientes condiciones de frontera:

$$u(x, y) = 0 \text{ en } x = 0, \quad y = 0, \quad y = b; \quad (8.31)$$

$$u(x, y) = U_0 \text{ en } x = d, \quad 0 < y < b. \quad (8.32)$$

Solución: supóngase que la solución de la ecuación (8.30) es de la forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (8.33)$$

donde $X(x)$ es función de x solamente, y $Y(y)$ es función de y solamente. Si se sustituye (8.33) en (8.30), se obtiene

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (8.34)$$

Dividiendo por $X(x)$ $Y(y)$ y separando las variables, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad (8.35)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (8.36)$$

El primer miembro de la ecuación (8.36) es independiente de y , y por consiguiente, el segundo miembro también lo es. El segundo miembro es independiente de x , y el primer miembro también debe serlo. Esto significa que las expresiones en ambos miembros de la ecuación (8.36), deben ser independientes de las dos variables x y y , e iguales a una constante. Si la constante de separación se denota por k^2 , entonces,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2. \quad (8.37)$$

El signo de la constante de separación se escogió de tal manera que las condiciones de frontera pudieran ser satisfechas. La ecuación (8.37) conduce a las dos ecuaciones diferenciales lineales

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0, \quad (8.38)$$

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0. \quad (8.39)$$

Las soluciones generales de (8.38) y (8.39) son

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (8.40)$$

$$Y(y) = C \cos ky + D \sin ky. \quad (8.41)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.31), se tiene

$$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0, \\ Y(0) &= C = 0, \quad Y(b) = D \operatorname{sen} kb = 0. \end{aligned}$$

De donde,

$$A = -B, \quad (8.42)$$

$$\operatorname{sen} kb = 0,$$

de lo cual se deduce que

$$kb = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.43)$$

De esta manera se obtiene un conjunto infinito de soluciones $Y(y) = Y_n(y)$, donde

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.44)$$

Las soluciones generales correspondientes a (8.40) se convierten en

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n(e^{kx} - e^{-kx}) = 2A_n \operatorname{senh} kx \\ &= 2A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.45)$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.46)$$

son las soluciones de (8.30) que satisfacen las condiciones de frontera (8.31). Obsérvese que $2A_n D_n$ se reemplazó por la nueva constante arbitraria E_n .

Evidentemente una sola solución, $u_n(x, y)$, de (8.46), no satisfacerá la otra condición de frontera dada por (8.32). Dado que la ecuación (8.30) es lineal, se considera la serie infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.47)$$

Si se aplica la condición de frontera (8.32), se obtiene

$$\begin{aligned} u(d, y) &= U_o = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < y < b, \end{aligned} \quad (8.48)$$

donde

$$c_n = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b}.$$

La ecuación (8.48) es una serie de Fourier en términos del seno, y los coeficientes c_n se pueden determinar como [ver (2.51)]

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b U_o \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{2U_o}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_o}{n\pi}, & n = 1, 3, \dots \\ 0, & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

sin embargo,

$$c_n = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b},$$

y por consiguiente,

$$E_n = \frac{4U_0}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi d}{b}\right)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (8.49)$$

lo cual se puede sustituir en (8.47) para obtener la solución deseada:

$$u(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi d}{b}\right)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.50)$$

En esta sección se han obtenido soluciones formales de ciertas ecuaciones diferenciales parciales, lineales y de segundo orden, que satisfacen las condiciones iniciales y de frontera dadas, pero no se ha demostrado que las soluciones obtenidas sean únicas. Dado que la prueba de unicidad es complicada, e infortunadamente no existe un teorema general al respecto, no se probará la unicidad de las soluciones obtenidas en esta sección, ni en las secciones siguientes.

8.2 VIBRACION

La vibración de una cuerda y la ecuación que regula esa vibración, es decir, la ecuación de onda en una dimensión, se estudiaron en el problema 8.1. En las páginas siguientes se aplicará la técnica del análisis de Fourier a varios problemas de vibración.

PROBLEMA 8.5 La ecuación que regula las vibraciones transversales pequeñas de una membrana, está dada por

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8.51)$$

donde $u(x, y, t)$ es la deflexión de la membrana, y $c^2 = T/\rho$, siendo ρ la masa de la membrana por unidad de área, y T la tensión de la membrana. La ecuación (8.51) se denomina *ecuación de onda en dos dimensiones*. Considerar la membrana rectangular de la figura 8.4 y hallar la solución de (8.51) que satisface la siguiente condición de frontera:

$u(x, y, t) = 0$ en la frontera de toda la membrana y para todo valor de t ; esto es,

$$u(x, y, t) = 0 \text{ para } x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b. \quad (8.52)$$

Las condiciones iniciales son

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (8.53)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y), \quad (8.54)$$

donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son el desplazamiento y la velocidad inicial de la membrana, respectivamente.

Solución: supóngase que la solución de (8.51) es de la forma

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (8.55)$$

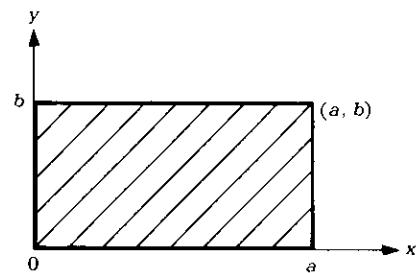


Figura 8.4 Una membrana rectangular.

Si se sustituye (8.55) en (8.51), se obtiene

$$X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) - \frac{1}{c^2} X(x)Y(y)T''(t) = 0, \quad (8.56)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto a los argumentos de cada función. Si se divide por $X(x)Y(y)T(t)$ y se separan las variables, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (8.57)$$

Como el segundo miembro de (8.57) depende sólo de t , mientras que el primer miembro no depende de t , las expresiones de ambos miembros deben ser iguales a una constante. Denotando esta constante por $-k^2$, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2.$$

La anterior ecuación conduce a las dos ecuaciones diferenciales

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0, \quad (8.58)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2,$$

o

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (8.59)$$

Una vez más, como el primer miembro de (8.59) depende sólo de x , mientras que el segundo miembro depende sólo de y , las expresiones de ambos miembros deben ser iguales a una constante, la cual debe ser negativa (de otra manera las condiciones de frontera no podrían ser satisfechas); si, $-k_x^2$, entonces, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_x^2.$$

La anterior expresión conduce a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \quad (8.60)$$

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \quad (8.61)$$

donde

$$k_y^2 = k^2 - k_x^2 \quad \text{o} \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (8.62)$$

Las soluciones generales de (8.58), (8.60) y (8.61) tienen las formas

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x, \quad (8.63)$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y, \quad (8.64)$$

$$T(t) = E \cos k t + F \sin k t. \quad (8.65)$$

Por la condición de frontera (8.52), se tiene

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Por consiguiente,

$$X(0) = A = 0, \quad X(a) = B \sin k_x a = 0,$$

de lo cual se deduce que

$$k_x a = m\pi \quad \text{o} \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (8.66)$$

Análogamente $Y(0) = C = 0$ y $Y(b) = D \operatorname{sen} k_y b = 0$; de donde,

$$k_y b = n\pi \quad \text{o} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.67)$$

De esta manera se obtienen las soluciones

$$X_m(x) = B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Puesto que $k^2 = k_x^2 + k_y^2$,

$$k^2 = k_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (8.68)$$

y la solución general correspondiente de (8.58) es

$$T_{mn}(t) = E_{mn} \cos k_{mn}ct + F_{mn} \operatorname{sen} k_{mn}ct.$$

Se sigue que las funciones

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, t) &= X_m(x) Y_n(y) T_{mn}(t) \\ &= (G_{mn} \cos k_{mn}ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn}ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (8.69)$$

donde $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, y con k_{mn} dada por (8.68), son soluciones de la ecuación de onda (8.51), las cuales son cero en la frontera de la membrana rectangular de la figura 8.4. Ahora se deben evaluar las constantes arbitrarias G_{mn} y H_{mn} .

Para obtener la solución que también satisface las condiciones iniciales (8.53) y (8.54), se procede en forma análoga a la utilizada en el problema 8.1.

Considérese la siguiente serie doble

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cos k_{mn}ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn}ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Por (8.70) y (8.53), se tiene

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.71)$$

La serie (8.71) se denomina *serie doble de Fourier*, y representa a $f(x, y)$ en la región $0 < x < a$, y $0 < y < b$. Los coeficientes de Fourier G_{mn} , de $f(x, y)$ en (8.71), se pueden determinar como sigue:

Si se hace

$$J_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.72)$$

se puede expresar (8.71) en la forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} J_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (8.73)$$

Para un valor fijo de y , la expresión (8.73) es la serie de Fourier en términos del seno, de la función $f(x, y)$ y se considera como una función de x . Por (2.52), se sigue que los coeficientes de esta expansión están dados por

$$J_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (8.47)$$

La expresión (8.72) es la serie de Fourier en términos del seno, de $J_m(y)$ y por consiguiente, los coeficientes G_{mn} están dados por

$$G_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b J_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (8.75)$$

Sustituyendo (8.74) en (8.75), se obtiene

$$G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (8.76)$$

donde $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$.

Para determinar H_{mn} de (8.70), se diferencia (8.70) término a término con respecto a t , y se utiliza (8.54),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= g(x, y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} c k_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Procediendo como antes, se tiene

$$H_{mn} = \frac{4}{abck_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (8.78)$$

donde $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$.

De donde, (8.70), con los coeficientes dados por (8.76) y (8.78), es la solución deseada.

PROBLEMA 8.6 Hallar la solución de (8.51), con las siguientes condiciones de frontera y condiciones iniciales:

$$u(x, y, t) = 0 \text{ para } x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b,$$

$$u(x, y, 0) = xy(x - a)(y - b),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Solución: por (8.70), se tiene

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn} ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

si se hace $t = 0$, se tiene

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

De acuerdo con (8.76), se tiene

$$\begin{aligned}
 G_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a u(x, y, 0) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
 &= \frac{4}{ab} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b y(y-b) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 &= \frac{4}{ab} \frac{2a^3}{m^3 n^3} [(-1)^m - 1] \frac{2b^3}{n^3 m^3} [(-1)^n - 1] \\
 &= \begin{cases} \frac{64a^2 b^2}{\pi^6 m^3 n^3} & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Puesto que $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$, y de acuerdo con (8.78), $H_{mn} = 0$, la solución final es

$$u(x, y, t) = \frac{64a^2 b^2}{\pi^6} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos k_{mn} ct \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.79)$$

donde $k_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$.

PROBLEMA 8.7 Las pequeñas vibraciones transversales libres, de una viga uniforme sujetada por un extremo, que se extiende a lo largo del eje x , está regulada por la ecuación de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.80)$$

donde $c^2 = EI/(\rho A)$, E = módulo de elasticidad de Young, I = momento de inercia de la sección transversal de la viga, ρ = densidad, A = área seccional. Hallar la solución de (8.80) que satisface las siguientes condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (8.81)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (8.82)$$

$$u(x, 0) = x(l-x), \quad (8.83)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.84)$$

Solución: supóngase que la solución de (8.80) será de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (8.85)$$

Sustituyendo (8.85) en (8.80), se tiene

$$X^{(4)}(x) T(t) + \frac{1}{c^2} X(x) T''(t) = 0.$$

Dividiendo por $X(x) T(t)$ y separando las variables, se obtiene

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (8.86)$$

Puesto que el primer miembro de (8.86) depende sólo de x , y el segundo miembro depende sólo de t , las dos expresiones en ambos miembros, deben ser iguales a una constante. La constante, por ejemplo k^4 , debe ser positiva, por consideraciones físicas; en particular, para hacer a $T(t)$ oscilatorio. De esta manera, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X^{(4)}(x) - k^4 X(x) = 0, \quad (8.87)$$

$$T''(t) + c^2 k^4 T(t) = 0. \quad (8.88)$$

Las soluciones generales de (8.87) y (8.88) son

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \cosh kx + D \sinh kx, \quad (8.89)$$

$$T(t) = E \cos k^2 ct + F \sin k^2 ct. \quad (8.90)$$

Ahora bien, por las condiciones de frontera (8.81), se obtiene

$$X(0) = A + C = 0, \quad (8.91)$$

$$X(l) = A \cos kl + B \sin kl + C \cosh kl + D \sinh kl = 0. \quad (8.92)$$

Puesto que

$$X''(x) = -k^2 (A \cos kx + B \sin kx - C \cosh kx - D \sinh kx),$$

utilizando las condiciones de frontera (8.82), se tiene

$$X''(0) = -k^2 (A - C) = 0, \quad (8.93)$$

$$X''(l) = -k^2 (A \cos kl + B \sin kl - C \cosh kl - D \sinh kl) = 0. \quad (8.94)$$

Por (8.91) y (8.93), $A + C = 0$, $A - C = 0$, y por tanto, $A = C = 0$. Entonces, por (8.92) y (8.94), se tiene

$$B \sin kl + D \sinh kl = 0,$$

$$B \sin kl - D \sinh kl = 0,$$

y por tanto,

$$B \sin kl = 0, \quad D \sinh kl = 0.$$

La segunda condición da $D = 0$, dado que si $\sinh kl = 0$, entonces $k = 0$, y por tanto, $X(x) = 0$, lo cual daría una solución trivial. Entonces, por la primera condición,

$$\sin kl = 0,$$

esto es,

$$kl = n\pi, \quad 0 < k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.95)$$

De esta manera se obtiene el conjunto infinito de soluciones $X(x) = X_n(x)$; es decir,

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.96)$$

Puesto que

$$T'(t) = k^2 c (-E \sin k^2 ct + F \cos k^2 ct),$$

por la condición inicial (8.84), se obtiene

$$T'(0) = k^2 c F = 0.$$

Por consiguiente, $F = 0$, y las soluciones correspondientes $T_n(t)$ se convierten en

$$T_n(t) = E_n \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}. \quad (8.97)$$

Por consiguiente, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}, \quad (8.98)$$

donde $b_n = B_n E_n$, son las soluciones de (8.80) que satisfacen las condiciones de frontera (8.81), (8.82), y la condición de velocidad inicial cero, dada por (8.84).

Para satisfacer la condición inicial dada por (8.83), se considera

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Por tanto, según (8.83), se tiene

$$u(x, 0) = x(l - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.100)$$

De esta manera los coeficientes b_n son los coeficientes de Fourier en términos del seno, de la función $x(l - x)$, y están dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x(l - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \begin{cases} \frac{8 l^2}{n^3 \pi^3} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.101)$$

La solución final es, por consiguiente,

$$u(x, t) = \frac{8 l^2}{\pi^3} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}. \quad (8.102)$$

En el siguiente ejemplo se considerará la vibración de una cuerda infinita; en este caso no se tienen condiciones de frontera, pero sí se tienen condiciones iniciales.

PROBLEMA 8.8 Determinar el desplazamiento $u(x, t)$, de una cuerda infinita con velocidad inicial cero. El desplazamiento inicial está dado por $f(x)$, para $-\infty < x < \infty$.

Solución: la función $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda de una dimensión

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad [8.1]$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (8.103)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.104)$$

Procediendo como en el problema 8.1, se sustituye

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

en la ecuación (8.1), lo cual conduce a dos ecuaciones diferenciales lineales

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.105)$$

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.106)$$

Las funciones

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx,$$

$$T(t) = C \cos kct + D \operatorname{sen} kct$$

son las soluciones de (8.105) y (8.106), respectivamente.

Utilizando la condición inicial (8.104), se obtiene

$$T'(0) = kc D = 0.$$

De donde, $D = 0$, y

$$u(x, t; k) = (F \cos kx + G \operatorname{sen} kx) \cos kct \quad (8.107)$$

es una solución de (8.1) que satisface la condición (8.104).

Cualquier serie de las funciones (8.107), hallada de la manera usual, tomando k como múltiplos de un número fijo, conduciría a una función que es periódica en x cuando $t = 0$. Sin embargo, como $f(x)$ en (8.103) no se supone periódica, es natural usar la integral de Fourier en el presente caso en vez de las series de Fourier.

Puesto que F y G en (8.107) son arbitrarias, se pueden considerar como funciones de k , y expresar, $F = F(k)$, y $G = G(k)$. Como la ecuación de onda (8.1) es lineal y homogénea, la función

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; k) dk = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] \cos kct dk \quad (8.108)$$

también es solución de (8.1).

Por (8.103), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] dk. \quad (8.109)$$

Ahora bien, por el teorema de la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(x) \cos \omega(t-x) dx \right] d\omega, \quad [4.12]$$

se puede expresar

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk \quad (8.110)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) (\cos kx \cos ky + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ky) dy \right] dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos kx \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos ky dy + \operatorname{sen} kx \int_{-\infty}^\infty f(y) \operatorname{sen} ky dy \right] dk. \end{aligned} \quad (8.111)$$

Si se hace

$$F(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos ky dy, \quad G(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \operatorname{sen} ky dy,$$

entonces la expresión (8.111) se puede expresar en esta forma:

$$f(x) = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] dk. \quad (8.112)$$

Comparando (8.112) y (8.109), se puede expresar (8.109) como

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk. \quad (8.113)$$

Entonces, por (8.108), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-y) \cos kct dy \right] dk. \quad (8.114)$$

Mediante la identidad trigonométrica

$$\cos k(x - y) \cos kct = \frac{1}{2} [\cos k(x + ct - y) + \cos k(x - ct - y)],$$

la ecuación (8.114) se convierte en

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x + ct - y) dy \right] dk \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x - ct - y) dy \right] dk. \end{aligned} \quad (8.115)$$

Si se reemplaza x por $x \pm ct$ en (8.110), se tiene

$$f(x \pm ct) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x \pm ct - y) dy \right] dk,$$

y comparando esto con (8.115), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct) \quad (8.116)$$

que es la ecuación ya conocida, de las ondas viajeras (ver el problema 8.3).

En los capítulos anteriores se ha tratado el par de transformadas de Fourier, $f(t)$ y $F(\omega)$, la primera de las cuales denota una función del tiempo, y la segunda una función de la frecuencia. El uso de la transformada de Fourier no está limitado, bajo ninguna razón, a los dominios de tiempo y frecuencia. Si las funciones $f(x)$ y $F(s)$ forman un par de transformadas de Fourier, entonces

$$F(s) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-isx} dx, \quad (8.117)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(s) e^{isx} ds. \quad (8.118)$$

En el siguiente ejemplo se aplicará la técnica de la transformada de Fourier, para resolver un problema de valor inicial.

PROBLEMA 8.9 Utilizando la transformada de Fourier resolver nuevamente el problema 8.8.

Solución: sea la transformada de Fourier de la solución $u(x, t)$ con respecto a x , la dada por

$$U(s, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{-isx} dx; \quad (8.119)$$

entonces,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(s, t) e^{isx} ds. \quad (8.120)$$

Se supondrá que las soluciones $u(x, t)$ y $\partial u(x, t)/\partial x$, son pequeñas cuando $|x|$ se hace grande, y tienden a cero si $x \rightarrow \pm\infty$.

Sean

$$u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Mediante integraciones parciales sucesivas se encuentra que la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[u_{xx}(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} e^{-j sx} du_x(x, t) \\
 &= e^{-j sx} u_x(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + j s \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= j s \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} e^{-j sx} du(x, t) \\
 &= j s e^{-j sx} u(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - j s (-js) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= -s^2 U(s, t)
 \end{aligned} \tag{8.121}$$

dado que $u_x(\pm\infty, t) = u(\pm\infty, t) = 0$.

La transformada de Fourier de $u_{tt}(x, t)$ es (puesto que se está tomando la transformada con respecto a x)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[u_{tt}(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= U_{tt}(s, t).
 \end{aligned} \tag{8.122}$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a la ecuación de onda (8.1) y por (8.121) y (8.122), se obtiene

$$\begin{aligned}
 -s^2 U(s, t) - \frac{1}{c^2} U_{tt}(s, t) &= 0, \\
 \frac{\partial^2 U(s, t)}{\partial t^2} + s^2 c^2 U(s, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{8.123}$$

que es la ecuación de la transformada $U(s, t)$.

La solución general de (8.123) es

$$U(s, t) = A(s) e^{j s c t} + B(s) e^{-j s c t}, \tag{8.124}$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son constantes con respecto a t . Aplicando la transformada de Fourier a las condiciones iniciales (8.103) y (8.104) se obtiene

$$\begin{aligned}
 U(s, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-j sx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j sx} dx \\
 &= F(s),
 \end{aligned} \tag{8.125}$$

$$U_t(s, 0) = \mathcal{F}[u_t(x, t)|_{t=0}] = 0. \tag{8.126}$$

Por las relaciones (8.125) y (8.126), $A(s)$ y $B(s)$ de (8.124), se pueden evaluar ahora, de la siguiente manera:

$$F(s) = U(s, 0) = A(s) + B(s), \quad 0 = U_t(s, 0) = jsc [A(s) - B(s)].$$

Resolviendo $A(s)$ y $B(s)$ en estas dos ecuaciones algebraicas, se obtiene

$$A(s) = B(s) = \frac{1}{2} F(s).$$

Por tanto, según (8.124), se tiene

$$U(s, t) = \frac{1}{2} F(s) e^{jst} + \frac{1}{2} F(s) e^{-jst}. \quad (8.127)$$

La solución deseada $u(x, t)$, es la transformada inversa de Fourier de $U(s, t)$, en particular,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{jst}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{-jst}]. \quad (8.128)$$

Por medio de la propiedad de desplazamiento en el tiempo, dada por (4.73), se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{jst}] = f(x + ct), \quad (8.129)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{-jst}] = f(x - ct). \quad (8.130)$$

De esta manera,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct)$$

que es el mismo resultado obtenido en (8.116).

8.3 CONDUCCION DE CALOR

El flujo de calor en un cuerpo de material homogéneo está determinado por la ecuación del calor

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = 0, \quad (8.131)$$

donde $u(x, y, z, t)$ es la temperatura del cuerpo, y $c^2 = K/(\rho\sigma)$, siendo K la conductividad térmica, σ el calor específico, y ρ la densidad del material del cuerpo. El laplaciano de u es $\nabla^2 u$, y en coordenadas rectangulares se puede expresar como

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8.132)$$

PROBLEMA 8.10 Considérese la temperatura de una barra uniforme de longitud l , que está orientada a lo largo del eje x . Ambos extremos de la barra se mantienen a una temperatura de cero grados. Si la temperatura inicial de la barra es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x < \frac{1}{2} l \\ l - x & \text{para } \frac{1}{2} l < x < l, \end{cases}$$

donde x es la distancia medida desde uno de los extremos, hallar la distribución de temperatura después de un tiempo t .

Solución: puesto que la temperatura $u(x, t)$ depende sólo de x y t , la ecuación de calor (8.131) se convierte en la denominada ecuación de calor en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (8.133)$$

Las condiciones de frontera son

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (8.134)$$

y la condición inicial es

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x < \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{para } \frac{1}{2}l < x < l. \end{cases} \quad (8.135)$$

Nuevamente, suponer que la solución sea de la forma del producto

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (8.136)$$

y reemplazar en la ecuación (8.133). De donde,

$$X'''(x) T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) T'(t) = 0. \quad (8.137)$$

Dividiendo por $X(x) T(t)$ y separando variables, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)}. \quad (8.138)$$

La expresión del primer miembro depende solamente de x , mientras que la expresión del segundo sólo depende de t ; por consiguiente, se concluye que ambas expresiones deben ser igual a una constante. Esta constante, por ejemplo K , debe ser negativa pues si $K > 0$, la única solución $u(x, t) = X(x) T(t)$ que satisface (8.134) es $u(x, t) = 0$. Esto se demuestra como sigue: si

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K = k^2,$$

entonces

$$X'''(x) - k^2 X(x) = 0,$$

y la solución general será

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}.$$

Aplicando la condición de frontera (8.134), se obtiene

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad A e^{kl} + B e^{-kl} = 0.$$

Resolviendo para A y B , se tiene que $A = -B = 0$. De esta manera $X(x) = 0$, y en consecuencia, $u(x, t) = 0$, lo cual da una solución trivial. Por tanto, haciendo $K = -k^2$, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2, \quad (8.139)$$

y de aquí se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.140)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.141)$$

Las soluciones generales de (8.140) y (8.141) son

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx, \quad (8.142)$$

$$T(t) = C e^{-c^2 k^2 t} \quad (8.143)$$

Por la condición de frontera (8.134), se tiene

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(l) = B \sin kl = 0.$$

De esta manera,

$$kl = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.144)$$

Se obtienen así las soluciones de (8.140), que satisfacen la condición (8.134) como

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.145)$$

Las soluciones correspondientes de (8.141) son

$$T_n(t) = C_n e^{-c^2 k^2 t} = C_n e^{-c^2 n^2 \pi^2 t/l^2} = C_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.146)$$

donde

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}.$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.147)$$

donde $b_n = B_n C_n$, son las soluciones de la ecuación de calor (8.133) que satisfacen la condición (8.134).

Para hallar una solución que también satisfaga la condición inicial, dada por (8.135), se considera la serie

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (8.148)$$

Por (8.135) y (8.148), se obtiene

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.149)$$

Por tanto, para que (8.148) satisfaga la condición (8.135), los coeficientes b_n deben ser escogidos de tal manera que (8.149) sea la expansión en series de Fourier en términos del seno de $f(x)$; es decir,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (8.150)$$

Por consiguiente, la solución es

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} e^{-(c\pi/l)^2 t} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} e^{-(3c\pi/l)^2 t} + \dots \right]. \quad (8.151)$$

Se observa que la solución $u(x, t)$, dada por (8.151), se hace pequeña después de un largo período de tiempo, es decir, tiende a cero a medida que $t \rightarrow \infty$.

En el siguiente ejemplo se considerarán soluciones de la ecuación de calor en una dimensión, dada por (8.133), en el caso de una barra que se extiende hacia el infinito en ambos extremos. En este caso, similar al de la vibración de una cuerda infinita (problema 8.8), no se tienen condiciones de frontera; solamente las condiciones iniciales.

PROBLEMA 8.11 Hallar la distribución de temperatura $u(x, t)$ en el caso de una barra infinita. La distribución inicial de temperatura está dada por $f(x)$ para $-\infty < x < \infty$.

Solución: la función $u(x, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad [8.133]$$

y la condición inicial es

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \quad (8.152)$$

Procediendo como en el problema 8.10, se reemplaza

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

en la ecuación (8.133), lo cual conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.153)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.154)$$

Las soluciones generales de (8.153) y (8.154) son

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

$$T(t) = C e^{-c^2 k^2 t}.$$

De donde,

$$u(x, t; k) = X(x) T(t) = (D \cos kx + E \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} \quad (8.155)$$

es una solución de la ecuación (8.133), donde D y E son constantes arbitrarias. Puesto que $f(x)$, en general, es no periódica, siguiendo el argumento análogo para el caso de la vibración de una cuerda infinita (problema 8.8), se pueden considerar D y E como funciones de k . Entonces la función

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty u(x, t; k) dk \\ &= \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \sin kx] e^{-c^2 k^2 t} dk \end{aligned} \quad (8.156)$$

también es solución de (8.133).

Por (8.152), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \sin kx] dk, \quad (8.157)$$

Ahora bien, si

$$D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos ky dy,$$

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin ky dy,$$

entonces, con el teorema de la integral de Fourier, dado por (4.12), se puede expresar la relación (8.157) como

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk. \quad (8.158)$$

De esta manera, por (8.156), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-y) e^{-c^2 k^2 t} dy \right] dk. \quad (8.159)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \left[\int_0^\infty e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk \right] dy. \quad (8.160)$$

Para evaluar la integral interior se procede como sigue:

De la tabla de fórmulas de integrales se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \quad (8.161)$$

Introduciendo una nueva variable de integración k , si se hace $s = ck\sqrt{t}$, y se selecciona

$$b = \frac{x-y}{2c\sqrt{t}},$$

la fórmula (8.161) se vuelve

$$\int_0^\infty e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)}. \quad (8.162)$$

Reemplazando (8.162) en (8.160), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy. \quad (8.163)$$

Introduciendo la nueva variable de integración, $q = (x-y)/(2c\sqrt{t})$, la ecuación (8.163) se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x - 2cq\sqrt{t}) e^{-q^2} dq. \quad (8.164)$$

PROBLEMA 8.12 Utilizando la técnica de la transformada de Fourier, resolver nuevamente el problema 8.11..

Solución: sea la transformada de Fourier, de la solución $u(x, t)$, con respecto a x , la dada por

$$U(s, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{-isx} dx; \quad (8.165)$$

entonces,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(s, t) e^{isx} ds. \quad (8.166)$$

Se supondrá que las soluciones $u(x, t)$ y $\partial u(x, t)/\partial x$ son pequeñas para valores grandes de $|x|$ y se acercan a cero a medida que $x \rightarrow \pm\infty$.

Según (8.121), la transformada de Fourier de $u_{xx}(x, t)$ es

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u_{xx}(x, t) e^{-isx} dx = -s^2 U(s, t). \quad (8.167)$$

La transformada de Fourier de $U_t(x, t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t(x, t)] &= \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t) e^{-isx} dx = \frac{\partial}{\partial t} U(s, t) \\ &= U_t(s, t). \end{aligned} \quad (8.168)$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a la ecuación del calor (8.133), se obtiene

$$-s^2 U(s, t) - \frac{1}{c^2} U_t(s, t) = 0$$

o

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} + c^2 s^2 U(s, t) = 0. \quad (8.169)$$

La solución de la ecuación (8.169) es

$$U(s, t) = U(s, 0) e^{-c^2 s^2 t}. \quad (8.170)$$

Pero aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial (8.152), se obtiene

$$\begin{aligned} U(s, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-j s x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j s x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy. \end{aligned} \quad (8.171)$$

Reemplazando (8.171) en (8.170), se tiene

$$U(s, t) = e^{-c^2 s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy. \quad (8.172)$$

Ahora se puede obtener la solución $u(x, t)$ tomando la transformada de Fourier de (8.172); esto es,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, t) e^{j s x} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(j s x - c^2 s^2 t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy \right] ds. \end{aligned} \quad (8.173)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds \right\} dy. \quad (8.174)$$

Para evaluar la integral interior se procede como sigue:

Por la tabla de integrales, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}. \quad (8.175)$$

Ahora bien;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\left(\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds \\ &= e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Introduciendo una nueva variable de integración w , mediante

$$\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} = jw,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-y)-c^2 s^2 t]} ds &= \frac{1}{c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)}, \end{aligned} \quad (8.176)$$

en razón de (8.175).

Sustituyendo (8.176) en (8.174), se obtiene finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy \quad (8.177)$$

que es exactamente el resultado (8.163).

Ahora (8.174) u (8.177) se pueden expresar como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G(x-y, t) dy, \quad (8.178)$$

donde

$$G(x-y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-y)-c^2 s^2 t]} ds = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \quad (8.179)$$

se denomina *función de Green, de la ecuación del calor* (8.133) para el intervalo infinito.

PROBLEMA 8.13 Hallar la temperatura $u(x, t)$ de una barra semi-infinita, que se extiende de 0 a ∞ . El extremo en $x = 0$ se mantiene a una temperatura de cero, y la distribución inicial de la temperatura es $f(x)$ para $0 < x < \infty$. Se supone que la condición en el extremo infinito es tal que $u(x, t) \rightarrow 0$, a medida que $x \rightarrow \infty$.

Solución: hay varias maneras de resolver este problema, pero en este caso se utilizará el método de las imágenes.

Como la temperatura en $x = 0$ se mantiene en cero, se extiende la función inicial dada, $f(x)$, $x > 0$, a una función impar, para $-\infty < x < \infty$; de esta manera, el problema pasa a ser de una barra infinita. (Ver el problema 8.11.)

Por (8.177), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy. \quad [8.177]$$

Teniendo en cuenta el hecho de que, $f(-y) = -f(y)$, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy + \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(-y) e^{-(x+y)^2/(4c^2 t)} dy \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(y) [e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} - e^{-(x+y)^2/(4c^2 t)}] dy \end{aligned} \quad (8.180)$$

que es la solución deseada.

8.4 TEORIA DE POTENCIALES

En esta sección se aplicará el análisis de Fourier a la *teoría de potenciales*, que es la teoría de la solución de la *ecuación de Laplace*

$$\nabla^2 u = 0. \quad (8.181)$$

donde $\nabla^2 u$ es el laplaciano de u . La ecuación de Laplace se presenta en relación con

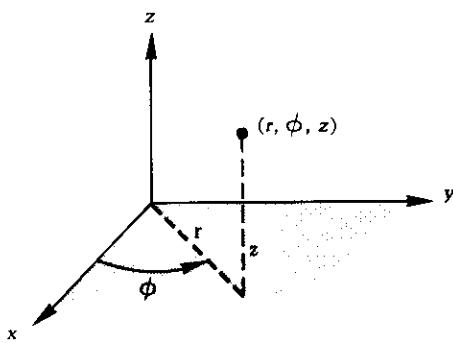


Figura 8.5 Coordenadas cilíndricas.

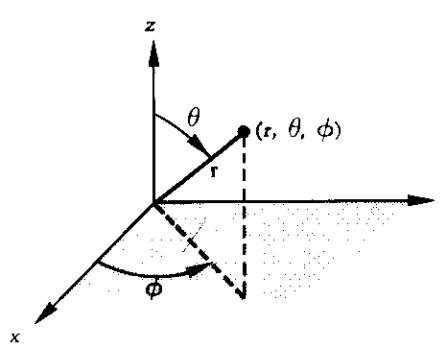


Figura 8.6 Coordenadas esféricas.

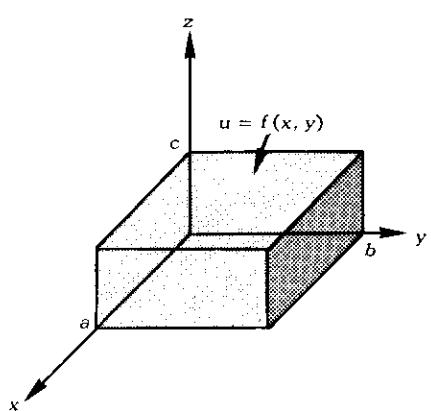


Figura 8.7 La caja rectangular del problema 8.14.

potenciales gravitacionales, potenciales electrostáticos, problemas estacionarios de calor, potenciales de flujo de fluidos incompresibles, etc.

En coordenadas rectangulares, el laplaciano de una función u en tres dimensiones se puede expresar como

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8.182)$$

Como se muestra en la figura 8.5, el laplaciano en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8.183)$$

Como se muestra en la figura 8.6, el laplaciano en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , es

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (8.184)$$

La técnica de separación de variables, aplicada a la ecuación de Laplace en dos dimensiones, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, se comentó en el problema 8.2; en el ejemplo siguiente se considerará el caso tridimensional.

PROBLEMA 8.14 Hallar la distribución de potencial, de la caja rectangular que se muestra en la figura 8.7, si el potencial es cero en los lados y en la base, y $f(x, y)$ en la parte superior.

Solución: sea $u(x, y, z)$ la distribución de potencial en la caja rectangular que se muestra en la figura 8.7. Entonces, $u(x, y, z)$ satisface la ecuación

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (8.185)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, b, z) = u(x, y, 0) = 0, \quad (8.186)$$

$$u(x, y, c) = f(x, y). \quad (8.187)$$

El método de separación de variables, sugiere el suponer una solución a (8.185) de la forma

$$u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (8.188)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación (8.185), ésta se reduce a

$$X''(x) Y(y) Z(z) + X(x) Y''(y) Z(z) + X(x) Y(y) Z''(z) = 0. \quad (8.189)$$

Dividiendo por $X(x) Y(y) Z(z)$ y separando las variables, se obtiene

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k_x^2, \quad (8.190)$$

donde k_x^2 es la constante de separación. En este caso, la separación depende del hecho de que el primer miembro es independiente de y y z , y el segundo miembro es independiente de x .

Por consiguiente,

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0. \quad (8.191)$$

Luego de una segunda separación, se tiene

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} - k_x^2 = k_y^2. \quad (8.192)$$

Lo cual conduce a las siguientes ecuaciones:

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \quad (8.193)$$

$$Z''(z) - k_z^2 Z(z) = 0, \quad (8.194)$$

donde $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$. Las soluciones generales de (8.191), (8.193) y (8.194) son

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x, \quad (8.195)$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y, \quad (8.196)$$

$$Z(z) = E \cosh k_z z + F \sinh k_z z. \quad (8.197)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.186), se tiene

$$X(0) = X(a) = 0,$$

$$Y(0) = Y(b) = 0,$$

$$Z(0) = 0.$$

Por consiguiente,

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(a) = B \sin k_x a = 0;$$

de donde,

$$k_x a = m\pi \quad \text{o} \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (8.198)$$

Análogamente,

$$Y(0) = C = 0,$$

$$Y(b) = D \sin k_y b = 0;$$

de donde,

$$k_y b = n\pi \quad \text{o} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.199)$$

Así mismo

$$Z(0) = E = 0.$$

Expresando k_z en términos de m y n ,

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = k_{mn}^2$$

o

$$k_z = k_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (8.200)$$

se obtienen las soluciones

$$X(x) = X_m(x) = B_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$Y(y) = Y_n(y) = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$Z(z) = Z_{mn}(z) = F_{mn} \sinh k_{mn} z.$$

Luego, expresando $b_{mn} = B_m D_n F_{mn}$, se sigue que las funciones

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, z) &= X_m(x) Y_n(y) Z_{mn}(z) \\ &= b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh k_{mn} z, \end{aligned} \quad (8.201)$$

donde $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, con k_{mn} definido por (8.200), son soluciones de la ecuación (8.185), que satisfacen las condiciones de frontera dadas por (8.186).

Para satisfacer la condición de frontera dada por (8.187), se supone la solución deseada en la forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} k_{mn} z. \end{aligned} \quad (8.202)$$

Si se hace

$$c_{mn} = b_{mn} \operatorname{senh} k_{mn} c, \quad (8.203)$$

la condición de frontera (8.187) toma la forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (8.204)$$

De esta manera, los coeficientes c_{mn} son los coeficientes de la doble serie de Fourier en términos del seno, que representa la función $f(x, y)$ sobre el rectángulo indicado. Por (8.76), estos coeficientes se determinan fácilmente como

$$c_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (8.205)$$

Con estos valores de c_{mn} , la notación de (8.203), solución (8.202), se convierte en

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{senh} k_{mn} z}{\operatorname{senh} k_{mn} c}, \quad (8.206)$$

donde k_{mn} está definido por (8.200).

PROBLEMA 8.15 Resolver el problema 8.14, si $f(x, y) = U_o$, siendo U_o una constante.

Solución: por (8.205), se tiene

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a U_o \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4U_o}{ab} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \begin{cases} \frac{16U_o}{mn\pi^2} & \text{para } m \text{ y } n \text{ impares} \\ 0 & \text{para } m \text{ y } n \text{ pares} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, según (8.206), se obtiene

$$u(x, y, z) = \frac{16U_o}{\pi^2} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{senh} k_{mn} z}{\operatorname{senh} k_{mn} c}, \quad (8.207)$$

donde $k_{mn} = \sqrt{[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)]^{1/2}}$.

En el siguiente ejemplo se considerará la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

PROBLEMA 8.16 Hallar la distribución de temperatura en estado estacionario, en una placa semicircular de radio a , en la que las dos caras están aisladas, la parte circular se mantiene a una temperatura constante U_0 y su diámetro se conserva a una temperatura de cero grados (figura 8.8).

Solución: en la sección 8.3, la ecuación de flujo de calor se expresó como

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad [8.131]$$

En estado estacionario, la temperatura u es independiente del tiempo, por tanto, $\partial u / \partial t = 0$, y u satisface la ecuación de Laplace; es decir,

$$\nabla^2 u = 0.$$

Como en este problema el flujo de calor es en dos dimensiones y las fronteras son cilíndricas, se utilizará el laplaciano de u en dos dimensiones y en coordenadas cilíndricas. En consecuencia, por (8.183), se tiene

$$\nabla^2 u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial \phi^2} = 0. \quad (8.208)$$

La temperatura $u(r, \phi)$, considerada como función de r y ϕ , satisface (8.208) y las condiciones de frontera (figura 8.8)

$$u(a, \phi) = U_0, \quad (8.209)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad (8.210)$$

$$u(r, \pi) = 0. \quad (8.211)$$

El método de separación de variables, sugiere el suponer una solución a (8.208) de la forma

$$u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi). \quad (8.212)$$

Reemplazando (8.212) en (8.208), se obtiene

$$R''(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r} R'(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r^2} R(r)\Phi''(\phi) = 0,$$

o

$$r^2 R''(r)\Phi(\phi) + r R'(r)\Phi(\phi) + R(r)\Phi''(\phi) = 0. \quad (8.213)$$

Dividiendo (8.213) por $R(r)\Phi(\phi)$, y separando las variables, se obtiene

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = k^2, \quad (8.214)$$

donde k^2 es la constante de separación. En este caso la separación resulta del hecho de que el primer miembro es independiente de ϕ y el segundo es independiente de r .

El signo de la constante de separación, se escogió de tal manera que la función $\Phi(\phi)$ estuviera expresada en términos del seno y del coseno en vez de funciones exponenciales.

La ecuación (8.214) conduce entonces a las dos ecuaciones siguientes:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0, \quad (8.215)$$

$$\Phi''(\phi) + k^2 \Phi(\phi) = 0. \quad (8.216)$$

La solución general de (8.216) es

$$\Phi(\phi) = A \cos k\phi + B \sin k\phi. \quad (8.217)$$

Para resolver la ecuación (8.215) se hace la transformación

$$r = e^s.$$

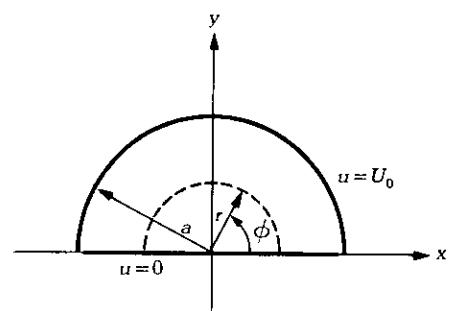


Figura 8.8 La placa semicircular del problema 8.16.

Entonces,

$$R'(r) \cdot \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{ds},$$

$$R''(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2R}{ds^2} = \frac{1}{r^2} \frac{dR}{ds},$$

y (8.215) se reduce a

$$\frac{d^2R}{ds^2} - k^2 R = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$R = C e^{ks} + D e^{-ks}.$$

Como $e^s = r$, entonces

$$R(r) = C r^k + D r^{-k}. \quad (8.218)$$

Según las condiciones de frontera (8.210) y (8.211), se tiene

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0.$$

Por tanto,

$$\Phi(0) = A = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(\pi) = B \sin k\pi = 0.$$

Puesto que resulta una solución trivial, si $B = 0$, se debe tener $\sin k\pi = 0$, por lo cual

$$k\pi = n\pi \quad \text{o} \quad k = n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

De donde se hallan las soluciones

$$\Phi(\phi) = \Phi_n(\phi) = B_n \sin n\phi, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.219)$$

En (8.218) se observa que cuando $r \rightarrow 0$, el término $r^{-k} \rightarrow \infty$, dado que $k = n > 0$.

Puesto que en $r = 0$, $R(0) = 0$, D debe ser igual a cero. De esta manera, se tiene

$$R(r) = R_n(r) = C_n r^n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.220)$$

Entonces, se sigue que las funciones

$$u_n(r, \phi) = R_n(r) \Phi_n(\phi) = b_n r^n \sin n\phi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.221)$$

donde $b_n = B_n C_n$, satisfacen la ecuación (8.208), así como las condiciones de frontera (8.210) y (8.211).

Para satisfacer la condición de frontera (8.209), se supone la solución deseada en la forma

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin n\phi. \quad (8.222)$$

Por (8.209), se tiene

$$u(a, \phi) = U_o = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^n \sin n\phi. \quad (8.223)$$

De esta manera, los términos $b_n a^n$ son los coeficientes de Fourier en senos, de la función U_o , y

$$\begin{aligned} b_n a^n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_o \sin n\phi \, d\phi \\ &= \begin{cases} \frac{4U_o}{n\pi} & \text{para } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

De donde,

$$b_n = \frac{4U_0}{\pi n a^n}, \quad n = 1, 3, \dots.$$

Con estos valores de b_n , la solución (8.222) se convierte en

$$u(r, \phi) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\phi. \quad (8.224)$$

En el siguiente ejemplo se considerará la aplicación de la transformada de Fourier, a la solución de la ecuación de Laplace en el semiplano.

PROBLEMA 8.17 Hallar la solución $U(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el semiplano $y > 0$, si $u(x, 0) = f(x)$ para $-\infty < x < \infty$ (figura 8.9).

Solución: a la ecuación de Laplace

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0,$$

se aplica la transformada de Fourier con respecto a la variable x , en particular,

$$U(s, y) = \mathcal{F}[u(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-jsx} dx.$$

Suponiendo que $u(x, y)$ y $u_x(x, y)$ se anulen cuando $x \rightarrow \pm\infty$, se obtiene la ecuación para $U(s, y)$ como [ver (8.121)]

$$\frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2} - s^2 U(s, y) = 0. \quad (8.225)$$

La solución general de (8.225) es

$$U(s, y) = A(s) e^{sy} + B(s) e^{-sy}. \quad (8.226)$$

Así mismo, se supondrá que $u(x, y)$ está acotada cuando $y \rightarrow +\infty$. Por tanto, para $s > 0$, se hace $A(s) = 0$, y

$$U(s, y) = B(s) e^{-sy} \quad \text{para } s > 0. \quad (8.227)$$

Puesto que $U(s, 0) = B(s)$, se puede expresar (8.227) como

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{-sy} \quad \text{para } s > 0. \quad (8.228)$$

Análogamente, para $s < 0$, se hace $B(s) = 0$, en (8.226), y se expresa

$$U(s, y) = A(s) e^{sy} \quad \text{para } s < 0. \quad (8.229)$$

Nuevamente, como $U(s, 0) = A(s)$, se puede expresar (8.229) como

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{sy} \quad \text{para } s < 0. \quad (8.230)$$

Las dos ecuaciones (8.228) y (8.230) se pueden combinar en

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{-|s|y}. \quad (8.231)$$

Puesto que, $u(x, 0) = f(x)$, se tiene

$$U(s, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-jsx'} dx'. \quad (8.232)$$

Por (8.231), se tiene

$$U(s, y) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-jsx'} dx' \right] e^{-|s|y}. \quad (8.233)$$

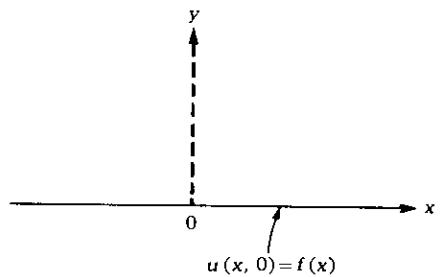


Figura 8.9 El semiplano del problema 8.17.

La solución deseada $u(x, y)$ es la transformada inversa de Fourier de (8.233); es decir,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[U(s, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, y) e^{jsx} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jsx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-jsx'} dx' \right] e^{-|s|y} ds. \end{aligned} \quad (8.234)$$

Intercambiando el orden de la integración, se obtiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-x')-|s|y]} ds \right\} dx'. \quad (8.235)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-x')-|s|y]} ds &= \int_{-\infty}^0 e^{[js(x-x')+sy]} ds + \int_0^{\infty} e^{[js(x-x')-sy]} ds \\ &= \frac{e^{js(x-x')+sy}}{j(x-x')+y} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{js(x-x')-sy}}{j(x-x')-y} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{j(x-x')+y} - \frac{1}{j(x-x')-y} \\ &= \frac{2y}{(x-x')^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (8.236)$$

Sustituyendo (8.236) en (8.235), se obtiene finalmente

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x-x')^2 + y^2}, \quad y > 0. \quad (8.237)$$

8.5 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 8.18 Resolver la ecuación (8.1), utilizando las condiciones de frontera dadas por (8.2) y con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{k}{a} x & \text{para } 0 < x < a \\ \frac{k}{l-a} (l-x) & \text{para } a < x < l, \end{cases} \quad y \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Ver la figura 8.10.

$$\text{Respuesta: } u(x, t) = \frac{2kl^2}{\pi^2 a(l-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right).$$

PROBLEMA 8.19 Si la energía instantánea de una cuerda vibrante es

$$W_{KE} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx,$$

hallar la energía cinética de la cuerda vibrante del problema 8.18.

$$\text{Respuesta: } \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{2l} A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi c t}{l}\right), \quad \text{donde } A_n = \frac{2kl^2}{\pi^2 a(l-a)} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right).$$

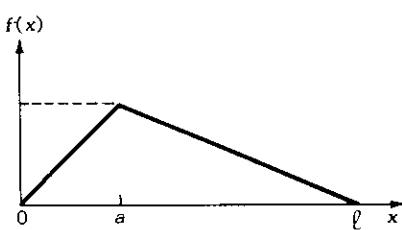


Figura 8.10 La condición inicial de la cuerda elástica del problema 8.18.

PROBLEMA 8.20 Probar que la función

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

es una solución de la ecuación de onda en una dimensión, dada por (8.1), siempre que f y g sean dos funciones diferenciables de una sola variable.

PROBLEMA 8.21 La temperatura de una barra aislada de longitud l , satisface las condiciones de frontera $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 1$, y la condición inicial $u(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x/l)$. Hallar (a) la distribución de temperatura después de un tiempo t , y (b) la temperatura en estado estacionario, es decir, la temperatura en la barra a medida que $t \rightarrow \infty$.

Respuesta: (a) $u(x, t) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\lambda_n^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$,

$$(b) u(x, t) \Big|_{t=\infty} = \frac{x}{l} .$$

PROBLEMA 8.22 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, y $u(x, 0) = \operatorname{sen} x$.

Respuesta: $u(x, t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} e^{-4n^2 c^2 t} \cos 2nx$.

PROBLEMA 8.23 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

con las siguientes condiciones de frontera e inicial: $u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0$, y $u(x, 0) = f(x)$.

Respuesta: $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{senh}[n\pi(b-y)/a]}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, donde

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx .$$

PROBLEMA 8.24 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < \infty,$$

con $u(x, y) \rightarrow 0$, cuando $y \rightarrow \infty$, $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$ y $u(x, 0) = x(a-x)$.

Respuesta: $u(x, y) = \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^3} e^{-n\pi y/a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$.

PROBLEMA 8.25 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{para } r < 1, \quad 0 < \phi < \pi,$$

con $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$ y $u(1, \phi) = \phi(\pi - \phi)$.

$$\text{Respuesta: } u(r, \phi) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} r^{2n-1} \sin(2n-1)\phi.$$

PROBLEMA 8.26 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{para } r < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{con } u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(r, \frac{1}{2}\pi \right) = 0, \quad \text{y} \quad u(1, \phi) = \phi.$$

$$\text{Respuesta: } u(r, \phi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} r^{2n-1} \sin(2n-1)\phi.$$

PROBLEMA 8.27 Hallar la distribución de temperatura $u(x, t)$ de una barra infinita, si la distribución de temperatura inicial es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ T & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

donde T es una constante. (Cf., problema 8.11.)

$$\text{Respuesta: } u(x, t) = \frac{T}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad \text{donde } \operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2} d\xi.$$

PROBLEMA 8.28 Utilizando la transformada de Fourier, resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

con la condición inicial $u(x, 0) = 0$ para $t > 0$.

$$\text{Respuesta: } u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} H(t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad \text{donde}$$

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda > 0 \\ 0 & \text{para } \lambda < 0. \end{cases}$$

PROBLEMA 8.29 Utilizando la transformada de Fourier, en términos del seno, resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{para } x > 0, \quad t > 0,$$

con $u(x, 0) = 0$, para $x > 0$, y $u(0, t) = g(t)$, para $T > 0$.

$$\text{Respuesta: } u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-x^2/[4(t-\tau)]} d\tau.$$

APLICACIONES MISCELLANÉAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER*

9

CAPÍTULO

9.1 LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DIFRACCION Y FORMACION DE IMAGENES

La aplicación de la transformada de Fourier en óptica, hace posible el establecimiento de relaciones generales, que clarifiquen y simplifiquen el cálculo de la formación de imágenes por un sistema óptico. En esta sección se considerará la difracción y formación de imágenes. Se supone que el lector está familiarizado con la física de estos fenómenos.

En esta sección se supondrá que $f(x)$ es una función real; es decir, la pantalla no introduce cambio de fase.

PROBLEMA 9.1 En el fenómeno de difracción de Fraunhofer, deducir la relación entre el patrón de difracción y la característica de transmisión de la pantalla absorbente.

Solución: considérese una pantalla absorbente AB , como se muestra en la figura 9.1, cuyo coeficiente de transmisión en el punto x está dado por $f(x)$; supóngase que la pantalla está iluminada por una onda monocromática plana de longitud de onda λ . Examíñese la amplitud compleja de la onda resultante en la dirección θ . La contribución del elemento dx en el punto x tiene una amplitud proporcional a $f(x)$, y una fase dada por $[2\pi \operatorname{sen}(\theta/\lambda)]x$. Si la onda incidente está representada por la cantidad compleja

$$U_0 e^{i\omega t},$$

entonces la contribución debida a dx en el punto x está dada por

$$U_0 f(x) e^{i(\omega t - kx)}, \quad (9.1)$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \quad (9.2)$$

Por tanto, la contribución total de toda la pantalla está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0 f(x) e^{i(\omega t - kx)} dx = U_0 e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (9.3)$$

Entonces el patrón de difracción de la pantalla, que está definido como la relación de la onda resultante en la dirección θ a la onda incidente, se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k), \quad (9.4)$$

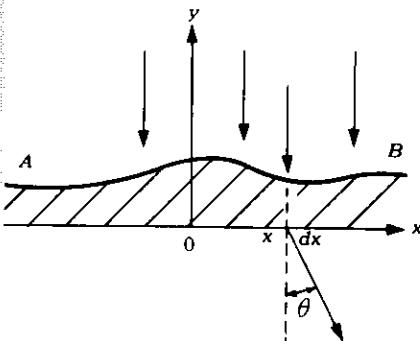


Figura 9.1 La pantalla absorbente del problema 9.1.

*Las secciones de este capítulo no pretenden ser una exposición completa y suficiente de los temas respectivos.

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta.$$

Se observa que la característica de transmisión $f(x)$ y el patrón de difracción $F(k)$, forman un par de transformadas de Fourier. De esta manera, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (9.5)$$

PROBLEMA 9.2 Considérese la difracción de una rendija que se extiende desde

$x = -\frac{a}{2}$, hasta $x = \frac{a}{2}$, como se muestra en la figura 9.2(a). Supóngase que la amplitud de la luz transmitida por la rendija es A veces la magnitud de la onda incidente, y que la pantalla es completamente opaca en las otras regiones. Hallar la distribución de la intensidad de la luz, difractada en la dirección θ .

Solución: según las suposiciones del problema, la característica de transmisión $f(x)$ es la que se muestra en la figura 9.2(b) y está dada por

$$f(x) = A p_a(x), \quad (9.6)$$

donde $p_a(x)$ se define como

$$p_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} a \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} a. \end{cases}$$

Entonces, por el resultado (4.45) del problema 4.10, se tiene

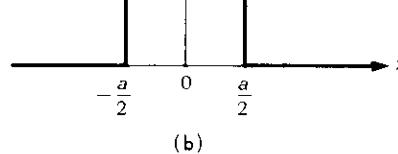


Figura 9.2 (a) La rendija del problema 9.2. (b) La característica de transmisión de una sola rendija.

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = Aa \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{ka}{2}\right)}$$

$$= Aa \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)}. \quad (9.7)$$

Como la distribución de intensidad de la luz difractada I , es proporcional al cuadrado de la amplitud del patrón de difracción, se tiene

$$I = (Aa)^2 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)^2}, \quad (9.8)$$

donde a es el ancho de la rendija y λ la longitud de onda.

PROBLEMA 9.3 Hallar la distribución de intensidad producida por una rejilla de difracción, que consta de N rendijas de ancho a y separadas por una longitud d [figura 9.3(a)].

Solución: en el caso de una sola rendija, como se muestra en la figura 9.2(b), la característica de transmisión $f(x)$ corresponde a un pulso de ancho a . En el caso de una rejilla que consta de N rendijas de ancho a y espaciadas en una longitud d , la característica de transmisión $f(x)$ corresponde a un tren finito de pulsos como se muestra en la figura 9.3(b).

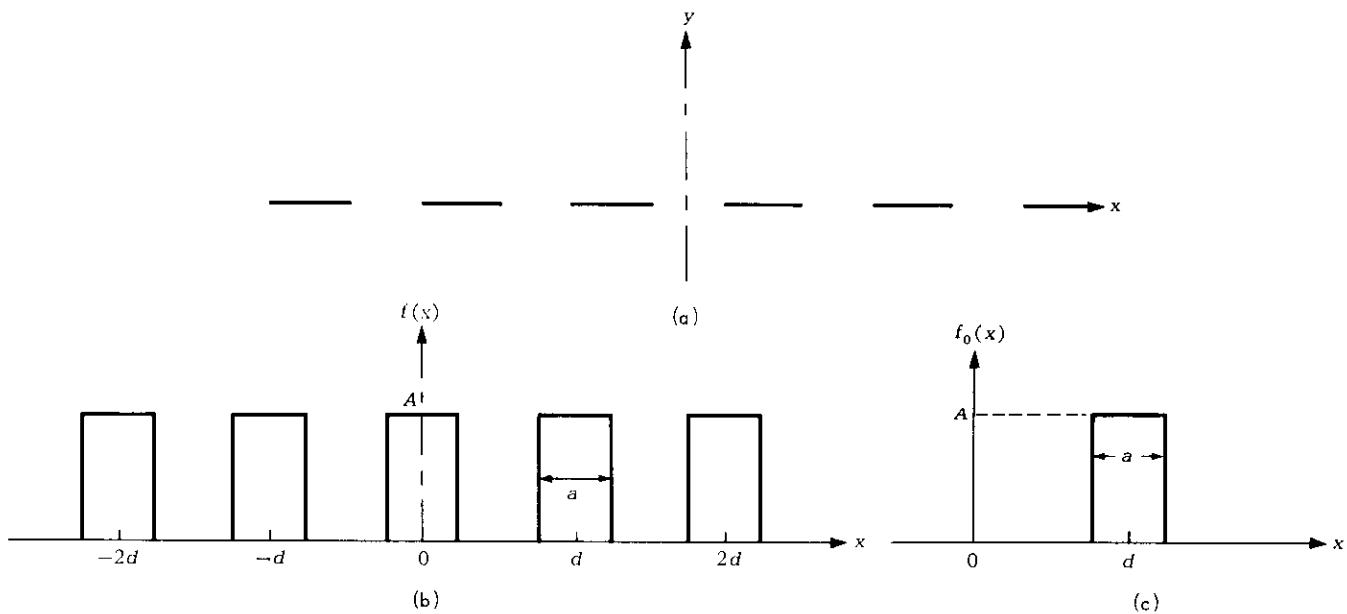


Figura 9.3 (a) La rejilla de difracción del problema 9.3. (b) La característica de transmisión de N rendijas. (c) Un pulso individual que ocurre en $x = d$.

Para hallar la transformada de Fourier de $f(x)$ se procede como sigue:

Por la ecuación (9.7) se tiene la transformada de Fourier, $F_o(k)$, de un pulso de magnitud A y ancho a , localizado en el origen; es decir,

$$F_o(k) = Aa \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{ka}{2}\right)}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta. \quad (9.9)$$

Entonces la transformada de Fourier de un pulso que ocurre en $x = d$, como se muestra en la figura 9.3(c), se encuentra por medio del teorema del desplazamiento, dado por 4.73, como

$$e^{-jkd} F_o(k). \quad (9.10)$$

Considérese ahora, un tren de N pulsos que ocurren en

$$x = -nd, -(n-1)d, \dots, -d, 0, d, \dots, (n-1)d, nd,$$

donde $N = 2n + 1$. Por superposición, se tiene

$$\begin{aligned} F(k) &= F_o(k) (1 + e^{jkd} + e^{-jkd} + \dots + e^{jnkd} + e^{-jnkd}) \\ &= F_o(k) [1 + 2(\cos kd + \cos 2kd + \dots + \cos nkd)] \\ &= F_o(k) [-1 + 2(1 + \cos kd + \cos 2kd + \dots + \cos nkd)]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Las series entre paréntesis angulares se pueden sumar, tomando la parte real de la serie exponencial correspondiente, y operando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &-1 + 2(1 + \cos kd + \cos 2kd + \dots + \cos nkd) \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re}(1 + e^{jkd} + e^{j2kd} + \dots + e^{jnkd}) \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{j(n+1)kd}}{1 - e^{jkd}} \right] \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(1 - e^{j(n+1)kd})(1 - e^{-jkd})}{(1 - e^{jkd})(1 - e^{-jkd})} \right] \\ &= -1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-jkd} + e^{jnkd} - e^{j(n+1)kd}}{2(1 - \cos kd)} \right]. \end{aligned}$$

De donde, considerando las partes reales, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & -1 + 2(1 + \cos kd + \cos kd + \dots + \cos nkd) \\
 & = -1 + \frac{1 - \cos kd + \cos nkd - \cos(n+1)kd}{1 - \cos kd} \\
 & = \frac{\cos nkd - \cos(n+1)kd}{1 - \cos kd} \\
 & = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2n+1)kd \operatorname{sen} \frac{1}{2}kd}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}kd} \\
 & = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}Nkd}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}kd} \tag{9.12}
 \end{aligned}$$

De donde

$$F(k) = F_o(k) \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}Nkd\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}kd\right)} = Aa \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}ka\right)}{\left(\frac{1}{2}ka\right)} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}Nkd\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}kd\right)}. \tag{9.13}$$

La distribución de la intensidad I , producida por una rejilla de difracción que consta de N rendijas de ancho a , espaciadas por una longitud d , está dada por

$$I = |F(k)|^2 = (Aa)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2}ka\right)}{\left(\frac{1}{2}ka\right)^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2}Nkd\right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2}kd\right)}, \tag{9.14}$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta$.

PROBLEMA 9.4 Demostrar que la distribución de la intensidad de la luz no se afecta si la rejilla de difracción es desplazada.

Solución: supóngase que la rejilla sea desplazada en la dirección x en una cantidad x_o ; entonces $f(x-x_o)$ representa el cambio de la característica de transmisión. Entonces, de acuerdo con el teorema del desplazamiento, dado en (4.73), el patrón de difracción se convierte en

$$F(k) e^{-j k x_o} \tag{9.15}$$

La distribución de la intensidad está dada por

$$|F(k) e^{-j k x_o}|^2 = |F(k)|^2 \tag{9.16}$$

puesto que $|e^{-j k x_o}| = 1$.

La ecuación (9.16) demuestra que la distribución de la intensidad no se afecta si la rejilla de difracción es desplazada.

En seguida se considera la formación de imágenes y la transformada de Fourier en dos dimensiones.

Cuando una función de dos variables independientes, tal como la intensidad de la luz en un punto, se reproduce en otra parte como otra función de dos variables, se habla de formación de imágenes.

Una imagen se puede describir en su totalidad, por la distribución de la intensidad de iluminación $I(x, y)$, supóngase que $E(x, y)$ es la imagen de una fuente puntual, y que $O(x, y)$ representa la distribución de un objeto. En efecto, como el objeto es incoherente, la distribución de la intensidad en la imagen se puede obtener, sumando las intensidades individuales producidas por cada imagen de los varios puntos del objeto.

De esta manera, la distribución de la imagen $I(x, y)$, se obtiene de la distribución del objeto $O(x, y)$, por convolución con la imagen de un punto $E(x, y)$; es decir,

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y') E(x - x', y - y') dx' dy' \quad (9.17)$$

$$= O(x, y) * E(x, y). \quad (9.18)$$

La ecuación (9.17) define la integral de convolución, de dos funciones en dos dimensiones $O(x, y)$ y $E(x, y)$.

9.1a Transformada bidimensional de Fourier

Para aplicar la técnica de la transformada al análisis de la formación de imágenes, se necesitará la teoría de las transformadas bidimensionales de Fourier.

La transformada bidimensional de Fourier $F(u, v)$, de una función bidimensional $f(x, y)$, se puede definir como una integral doble

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy. \quad (9.19)$$

Entonces $f(x, y)$ se puede hallar por la fórmula de inversión

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv. \quad (9.20)$$

PROBLEMA 9.5 Utilizando la técnica de la transformada de Fourier en una dimensión, deducir la fórmula de inversión (9.20).

Solución: se denota como $G(u, y)$, la transformada de Fourier de la función $f(x, y)$, donde la transformada se toma con respecto a x ; es decir,

$$G(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-jux} dx. \quad (9.21)$$

Entonces, por la fórmula de inversión unidimensional (4.16), se tiene

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, y) e^{juy} du. \quad (9.22)$$

Ahora se toma la transformada de Fourier $F(u, v)$, de $G(u, y)$ con respecto a y , considerando a x como un parámetro; es decir,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u, y) e^{-jvy} dy. \quad (9.23)$$

La fórmula de inversión (4.16) da

$$G(u, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{jvy} dv. \quad (9.24)$$

Reemplazando (9.24) en (9.22), se obtiene

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv.$$

Combinando (9.23) y (9.21), se obtiene

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy.$$

PROBLEMA 9.6 Demostrar que la transformada de Fourier, de la imagen de un objeto incoherente, es igual al producto de la transformada de Fourier del objeto, y la transformada de Fourier de la imagen de una fuente puntual.

Solución: supóngase que las transformadas de Fourier de $O(x, y)$, $I(x, y)$, y $E(x, y)$, son las funciones $\Omega(u, v)$, $\Psi(u, v)$ y $\Gamma(u, v)$, respectivamente; es decir,

$$\Omega(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy, \quad (9.25)$$

$$\Psi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy, \quad (9.26)$$

$$\Gamma(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy. \quad (9.27)$$

Entonces, mediante la fórmula de inversión de Fourier (9.20), se tiene

$$O(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv, \quad (9.28)$$

$$I(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv, \quad (9.29)$$

$$E(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv. \quad (9.30)$$

Por (9.30), se tiene

$$E(x - x', y - y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u, v) e^{j[(u(x-x')+v(y-y')]} du dv. \quad (9.31)$$

Reemplazando (9.31) en (9.17), se obtiene

$$I(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y') \cdot E(x - x', y - y') dx' dy' \quad (9.32)$$

en donde $E(x - x', y - y')$, está dado por (9.31). Intercambiando el orden de integración en (9.32), resulta

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma(u, v) e^{j(ux+vy)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y') e^{-j(ux'+vy')} dx' dy' \right] \right\} du dv. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Mediante (9.25), el resultado (9.33) se convierte en

$$I(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(u, v) \Gamma(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv. \quad (9.34)$$

Comparando (9.34) con (9.29), se concluye que

$$\Psi(u, v) = \Omega(u, v) \Gamma(u, v). \quad (9.35)$$

La ecuación (9.35) es el teorema de la convolución bidimensional; esta ecuación implica que la formación de imágenes es estrechamente paralela al caso de los filtros que se comentó en la sección 6.10; es decir, la transición del objeto a la imagen, es equivalente a la acción de un filtro lineal. En la sección 6.10 se comenzó con una función del tiempo, que se transformó para conseguir su espectro, el cual fue modificado por el filtro; la función del tiempo a la salida, era la transformada inversa de la funciónpectral resultante. En la formación de imágenes, el sistema óptico se comporta como un filtro y el espectro espacial de la intensidad se transforma de esta manera.

9.1b Transformada tridimensional de Fourier

En la difracción de rayos X por cristales, se debe considerar la transformada tridimensional de Fourier; el par de transformadas tridimensionales está definido como

$$F(u, v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-j(ux+vy+wz)} dx dy dz, \quad (9.36)$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w) e^{j(ux+vy+wz)} du dv dw. \quad (9.37)$$

Un estudio más a fondo de este tema, está fuera de los propósitos de este libro.

9.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN TEORÍA DE PROBABILIDADES

La transformada de Fourier se utiliza ampliamente en la teoría de probabilidades y en los procesos de azar. En esta sección se estudiarán brevemente algunas funciones básicas y las transformadas de Fourier utilizadas en la teoría de probabilidades. Se supone que el lector tiene alguna familiaridad con la teoría de probabilidades.

9.2a Función de distribución de probabilidad y función de densidad de probabilidad

Una variable al azar x , que asume valores reales entre $-\infty$ y $+\infty$, se puede caracterizar por una *función de distribución de probabilidad* $P(x)$, la cual está definida por

$$P(x) = Pr(X < x), \quad (9.38)$$

donde $P_r(x < x)$ es la probabilidad de que la variable al azar x , asuma un valor menor que algún número dado x .

Si $P(x)$ es diferenciable, entonces la *función de densidad de probabilidad* o función de frecuencia $p(x)$, está definida por

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (9.39)$$

La función de distribución $P(x)$ tiene las siguientes propiedades:

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = 1, \quad (9.40a, b)$$

$$P(x_1) \leq P(x_2) \quad \text{si } x_1 < x_2. \quad (9.41)$$

En razón de que $P_r(X = -\infty) = 0$, es obvio que

$$P(-\infty) = 0.$$

Puesto que $X < +\infty$, y la certidumbre corresponde a probabilidad de uno,

$$P(\infty) = Pr(X < +\infty) = 1.$$

De esta manera, (9.40) indica que $P(x)$ es positiva y tiene valores entre 0 y 1.

Para probar (9.41), se observa que si x_1 y x_2 son números reales tales que $x_1 < x_2$, entonces

$$\Pr(X < x_2) = \Pr(X < x_1) + \Pr(x_1 < X < x_2) \quad (9.42)$$

de tal manera que

$$\Pr(x_1 < X < x_2) = P(x_2) - P(x_1). \quad (9.43)$$

Por esta relación y por el hecho de que la probabilidad de un evento es siempre positiva, se tiene

$$P(x_1) \leq P(x_2), \quad \text{si } x_1 < x_2.$$

La ecuación (9.41) indica que $P(x)$ es una función-monótona creciente.

PROBLEMA 9.7 Demostrar que

$$p(x) > 0, \quad (9.44)$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx, \quad (9.45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (9.46)$$

$$\Pr(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (9.47)$$

Solución: por la definición (9.39) y por el hecho de que $P(x)$ es una función monótona creciente para todo valor de x , se tiene

$$p(x) > 0.$$

Integrando (9.39) entre $-\infty$ y x , se obtiene

$$\int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{dP(x)}{dx} dx = P(x) - P(-\infty).$$

Por (9.40a), se tiene que $P(-\infty) = 0$; de esta manera,

$$\int_{-\infty}^x p(x) dx = P(x).$$

Entonces, por (9.40b), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = P(\infty) - P(-\infty) = 1.$$

Por (9.45), se obtiene

$$P(x_2) - P(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (9.48)$$

Por (9.48) y (9.43), se obtiene

$$\Pr(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

PROBLEMA 9.8 Supóngase que la variable al azar x asume el valor x_o ; entonces,

$$P(x) = 0 \quad \text{para } X < x_o, \quad P(x) = 1 \quad \text{para } X > x_o.$$

Hallar la densidad de probabilidad $p(x)$.

Solución: de acuerdo con la suposición, $P(x)$ se puede expresar como

$$P(x) = u(x - x_0), \quad (9.49)$$

un escalón unitario. En este caso, la densidad de probabilidad $p(x)$ no existe en el sentido ordinario. Sin embargo, en el sentido de una función generalizada (ver sección 2.4), se puede obtener

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{du(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0) \quad (9.50)$$

mediante (2.90).

9.2b Esperanza y momentos

Sea X una variable al azar con densidad de probabilidad $p(x)$.

La esperanza matemática o *valor medio* de X , $E[X]$, se define como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (9.51)$$

Para cualquier función $g(x)$ de valores reales, $g(X)$ es una variable al azar y la esperanza matemática de $g(X)$ está definida por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x) dx. \quad (9.52)$$

Una esperanza originada por cierta función $g(x)$, se menciona con frecuencia, como un parámetro estadístico. A continuación se definirán los más comunes de estos parámetros:

$$\text{Valor medio de } X = E[X] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx; \quad (9.53)$$

$$\text{Valor cuadrático medio de } X = E[X^2] = \bar{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx; \quad (9.54)$$

$$\text{Momento enésimo de } X = E[X^n] = m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx; \quad (9.55)$$

Varianza de X = valor cuadrático de X alrededor del valor medio

$$= E[(X - \bar{X})^2]; \quad (9.56)$$

$$\text{Desviación estándar } \sigma = \sqrt{E(X - \bar{X})^2}. \quad (9.57)$$

PROBLEMA 9.9 Demostrar que

$$\text{Varianza de } X = (\bar{X}^2) - (\bar{X})^2. \quad (9.58)$$

Solución: por (9.56) y (9.52), se tiene

$$\begin{aligned} \text{Varianza de } X &= E[(X - \bar{X})^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\bar{X} + \bar{X}^2) p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2\bar{X} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx + (\bar{X})^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{var}(X) = (\bar{X}^2) - 2\bar{X}\bar{X} + (\bar{X})^2 = (\bar{X}^2) - (\bar{X})^2. \quad (9.59)$$

Las ecuaciones (9.53), (9.54) y (9.46) se utilizan en la deducción de (9.59).

PROBLEMA 9.10 Demostrar que si la densidad de probabilidad $p(x)$ es una función par, es decir, $p(-x) = p(x)$, entonces el valor medio y todos los momentos impares son cero.

Solución: por (9.55), se tiene

$$m_n = \text{momento enésimo de } X = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx.$$

Si n es impar, entonces el integrando $x^n p(x)$ es una función impar de x . Por tanto, según (2.14), se tiene

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = 0 \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots. \quad (9.60)$$

9.2c Función característica

La función característica $\phi(\omega)$ de una variable al azar X , cuya densidad de probabilidad es $p(x)$, está definida por

$$\phi(\omega) = E[e^{j\omega X}], \quad (9.61)$$

donde ω es un parámetro real arbitrario.

PROBLEMA 9.11 Demostrar que la función característica $\phi(\omega)$ de una variable al azar X , es la transformada de Fourier de su densidad de probabilidad $p(x)$ con el signo cambiado.

Solución: mediante la definición (9.52) se puede expresar la definición (9.61) como

$$\phi(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p(x) dx, \quad (9.62)$$

que es la transformada de Fourier de $p(x)$ con el signo cambiado; algunas veces se le denomina la *transformada de Fourier con +j*.

PROBLEMA 9.12 Demostrar que la densidad de probabilidad $p(x)$ se puede expresar en términos de $\phi(\omega)$ como

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega, \quad (9.63)$$

la cual se conoce como la *fórmula de inversión*.

Solución: según la fórmula (9.62), $\phi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $p(x)$ con un cambio en el signo del exponente; entonces $p(x)$ se puede hallar a partir de la transformada inversa de Fourier de $\phi(\omega)$, nuevamente con un cambio en el signo del exponente; es decir,

$$p(x) = \mathcal{F}^{-1}[\phi(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega.$$

Otra forma de solución: reemplazando (9.62) en el segundo miembro de (9.63), se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \lambda} p(\lambda) d\lambda \right] d\omega. \quad (9.64)$$

Cambiando el orden de integración, se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\lambda-x)} d\omega \right] d\lambda. \quad (9.65)$$

Mediante la identidad (5.6) de la función δ , se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\lambda-x)} d\omega = \delta(\lambda - x). \quad (9.66)$$

Por tanto, en razón de (2.68), se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \delta(\lambda - x) d\lambda = p(x).$$

Uno de los usos importantes de las funciones características, se sigue de la existencia del par de transformadas de Fourier, (9.62) y (9.63). En muchos problemas, cuando se necesita hallar la densidad de probabilidad de una variable al azar, es más fácil calcular la función característica primero y luego hallar la densidad de probabilidad. Otra aplicación importante de la función característica se ilustra en el siguiente ejemplo.

PROBLEMA 9.13 Demostrar que las derivadas de la función característica, de una variable al azar X , están relacionadas con los momentos de esa variable

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx$$

mediante

$$\left. \frac{d^n \phi(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = j^n m_n. \quad (9.67)$$

Solución: puesto que

$$e^{j\omega x} = 1 + \frac{j\omega x}{1} + \dots + \frac{(j\omega x)^n}{n!} + \dots, \quad (9.68)$$

reemplazando (9.68) en (9.62), se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{j\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[1 + \frac{j\omega x}{1} + \dots + \frac{(j\omega x)^n}{n!} + \dots \right] dx. \end{aligned}$$

Suponiendo que la integración término por término es válida, se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx + \dots + \frac{(j\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx + \dots \\ &= 1 + j\omega m_1 + \dots + \frac{(j\omega)^n}{n!} m_n + \dots \end{aligned} \quad (9.69)$$

Por tanto,

$$\left. \frac{d^n \phi(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} = j^n m_n.$$

Hasta ahora se ha tratado sólo con una variable al azar; a continuación, se extenderán estos conceptos a dos variables al azar.

La función de distribución conjunta de las variables al azar X y Y , está definida por

$$P(x, y) = \Pr\{X < x, Y < y\}. \quad (9.70)$$

Suponiendo que $P(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden, la cantidad

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (9.71)$$

se conoce como la función de densidad conjunta de las variables al azar X y Y .

Dos variables al azar X y Y son independientes si

$$P(x, y) = P(x)P(y). \quad (9.72)$$

PROBLEMA 9.14 Demostrar que si dos variables al azar X y Y son independientes, entonces

$$p(x, y) = p(x)p(y). \quad (9.73)$$

Solución: como las variables X y Y son independientes, según (9.72), se tiene

$$P(x, y) = P(x)P(y).$$

Entonces, por (9.71), se tiene

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P(x)P(y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x)}{\partial x} \frac{\partial P(y)}{\partial y} = p(x)p(y).$$

El valor esperado de la variable al azar $g(X, Y)$ está definido por

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy. \quad (9.74)$$

De dos variables al azar X y Y , se dice que no son correlacionadas si

$$E[XY] = E[X]E[Y]. \quad (9.75)$$

Dos variables al azar X y Y son ortogonales si

$$E[XY] = 0. \quad (9.76)$$

La función característica conjunta de dos variables al azar X y Y , está definida por

$$\phi(\omega_1, \omega_2) = E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}]. \quad (9.77)$$

PROBLEMA 9.15 Demostrar que si dos variables al azar X y Y son independientes, entonces no son correlacionadas.

Solución: por (9.73) y (9.74), se tiene

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x) p(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy \\ &= E[X]E[Y]. \end{aligned} \quad (9.78)$$

De esta manera, según (9.75) se concluye que las dos variables al azar X y Y no están correlacionadas.

Se observa que si X y Y son independientes, entonces $f(X)$ y $g(Y)$ también son independientes. Aplicando (9.78) a $f(X)$ y $g(Y)$, se obtiene

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]. \quad (9.79)$$

PROBLEMA 9.16 Demostrar que la función característica conjunta, de dos variables al azar X y Y , es la doble transformada de Fourier de $p(x, y)$ definida por (9.19), con el signo del exponente cambiado.

Solución: por (9.74), se puede expresar (9.77) como

$$\begin{aligned} \phi(\omega_1, \omega_2) &= E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy, \end{aligned} \quad (9.80)$$

que es la transformada bidimensional de Fourier de $p(x, y)$, definida por (9.19), con el signo del exponente cambiado.

PROBLEMA 9.17 Demostrar que la densidad de probabilidad conjunta $p(x, y)$ se puede expresar en términos de $\phi(\omega_1, \omega_2)$, mediante

$$p(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (9.81)$$

Solución: por (9.80), se sabe que $\phi(\omega_1, \omega_2)$ es la transformada bidimensional de Fourier de $p(x, y)$; entonces, aplicando la transformada inversa de Fourier (9.20), con un signo cambiado, se obtiene (9.81).

PROBLEMA 9.18 Demostrar que si las variables al azar X y Y son independientes, entonces

$$\phi(\omega_1, \omega_2) = \phi(\omega_1)\phi(\omega_2). \quad (9.82)$$

Solución: si X y Y son independientes, entonces por (9.79), se tiene

$$E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] = E[e^{j\omega_1 X} e^{j\omega_2 Y}] = E[e^{j\omega_1 X}] E[e^{j\omega_2 Y}]. \quad (9.83)$$

Por tanto,

$$\phi(\omega_1, \omega_2) = \phi(\omega_1)\phi(\omega_2).$$

PROBLEMA 9.19 Demostrar que si $\phi(\omega_1, \omega_2) = \phi(\omega_1)\phi(\omega_2)$, entonces las variables X y Y son independientes.

Solución: por (9.81), se tiene

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_1)\phi(\omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_1) e^{-j\omega_1 x} d\omega_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega_2) e^{-j\omega_2 y} d\omega_2 \\ &= p(x)p(y), \end{aligned}$$

en razón de (9.63). Por tanto, según (9.73), se concluye que X y Y son independientes.

PROBLEMA 9.20 Demostrar que la densidad de probabilidad, de la suma de dos variables al azar e independientes, es igual a la convolución de sus respectivas densidades.

Solución: supóngase que

$$Z = X + Y, \quad (9.84)$$

donde X y Y son variables al azar e independientes.

Sea

$$\phi_x(\omega) = E[e^{j\omega X}],$$

$$\phi_y(\omega) = E[e^{j\omega Y}],$$

$$\phi_z(\omega) = E[e^{j\omega Z}].$$

Entonces

$$\phi_z(\omega) = E[e^{j\omega Z}] = E[e^{j(\omega X + \omega Y)}].$$

Dado que X y Y son independientes, por (9.83), se tiene

$$\phi_z(\omega) = E[e^{j\omega X}] E[e^{j\omega Y}] = \phi_x(\omega) \phi_y(\omega). \quad (9.85)$$

Aplicando el teorema de convolución (4.122), se obtiene

$$\begin{aligned} p_z(z) &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_z(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_x(\omega) \phi_y(\omega)] \\ &= p_x(x) * p_y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) p_y(z-x) dx. \end{aligned} \quad (9.86)$$

9.3 EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE EN EL ANALISIS DE FOURIER

El principio de incertidumbre en el análisis espectral se puede establecer así: el producto del ancho de banda espectral y el tiempo de duración de una señal no puede ser inferior a cierto valor mínimo. Este es análogo al conocido principio de incertidumbre de Heisenberg, en mecánica cuántica.

En esta sección se analizará la relación entre el tiempo de difusión de una función $f(t)$, y la forma de su transformada de Fourier $F(\omega)$.

Se considera una señal real $f(t)$ y su transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Se consideran también las siguientes definiciones:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty, \quad (9.87)$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t f^2(t) dt, \quad (9.88)$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 f^2(t) dt < \infty, \quad (9.89)$$

donde $\|f(t)\|^2$ es el *contenido de energía*, E , de la señal $f(t)$, definida en (4.139), \bar{t} es el *centro de gravedad* del área bajo la curva $f^2(t)$, y (Δt) es una medida de la señal difundida alrededor de \bar{t} , y que se denomina *dispersión de la señal en el tiempo*.

Análogamente, se define

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (9.90)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (9.91)$$

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (9.92)$$

PROBLEMA 9.21 Demostrar que $\bar{\omega}$ de (9.91), es igual a cero

Solución: puesto que $|F(\omega)|^2$ es par con respecto a ω , el integrando de (9.91) es una función impar de ω . Por tanto, según (2.14), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega = 0,$$

es decir, $\bar{\omega} = 0$. Con $\bar{\omega} = 0$, la definición (9.92) se puede expresar como

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (9.93)$$

El ancho de banda espectral de la señal $\Delta\omega$, es una medida del ancho de banda de la señal.

PROBLEMA 9.22 Hallar el tiempo de dispersión Δt , de la señal que se muestra en la figura 9.4, la cual decrece exponencialmente.

Solución: según (9.88), el centro de gravedad de esta onda, \bar{t} , se encuentra como

$$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} t A^2 e^{-2t/T} dt}{\int_0^{\infty} A^2 e^{-2t/T} dt} = \frac{\frac{A^2 T^2}{4}}{\frac{A^2 T}{2}} = \frac{T}{2}. \quad (9.94)$$

Entonces, por (9.89), dado que $\|f\|^2 = A^2 T / 2$, se tiene

$$\begin{aligned} (\Delta t)^2 &= \frac{1}{A^2 T} \int_0^{\infty} \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 A^2 e^{-2t/T} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 e^{-2t/T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \left(t^2 - Tt + \frac{1}{4} T^2 \right) e^{-2t/T} dt, \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{T^3}{4} - \frac{T^3}{4} + \frac{T^3}{8} \right) \\ &= \frac{T^2}{4}. \end{aligned} \quad (9.95)$$

Por tanto

$$\Delta t = \frac{1}{2} T. \quad (9.96)$$

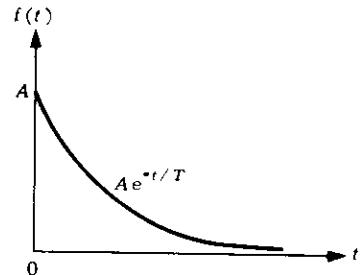


Figura 9.4 Señal que decrece en forma exponencial.

Se observa que el tiempo de dispersión Δt de una señal que decae exponencialmente, es proporcional a la constante de tiempo T .

PROBLEMA 9.23 Demostrar que el ancho de banda espectral $\Delta\omega$, de una señal $f(t)$ definida por (9.93), será finito sólo si la siguiente integral es finita; esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt = \text{finita} \quad (9.97)$$

donde $f'(t) = df(t)/dt$.

Solución: puesto que

$$\begin{aligned}\omega^2 |F(\omega)|^2 &= \omega^2 F(\omega) F^*(\omega) = j\omega F(\omega) [-j\omega F^*(\omega)] \\ &= j\omega F(\omega) [j\omega F(\omega)]^* \\ &= |j\omega F(\omega)|^2,\end{aligned}$$

se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega F(\omega)|^2 d\omega. \quad (9.98)$$

Se recuerda que si

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega),$$

y si $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, entonces por (4.91), se tiene

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega).$$

Por consiguiente, según el teorema de Parseval (4.136), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt. \quad (9.99)$$

Por tanto, si $\int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt = \text{finita}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = \text{finita} \quad (9.100)$$

y en consecuencia, según (9.93), $\Delta\omega$ será finita.

La ecuación (9.100) también significa que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 = 0.$$

Por el resultado del problema 9.23, se observa que la definición del ancho de banda espectral (9.93), puede conducir a un ancho de banda infinito, a menos que la señal $f(t)$ satisfaga la condición (9.97) o (9.101). El siguiente ejemplo ilustra este caso.

PROBLEMA 9.24 Hallar el ancho de banda espectral del pulso rectangular de la figura 9.5(a).

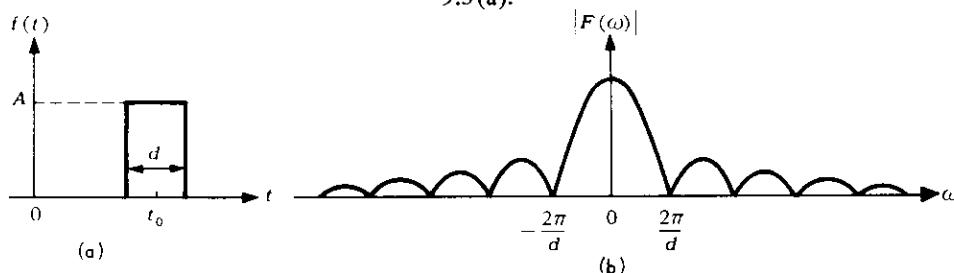


Figura 9.5 (a) El pulso rectangular del problema 9.24. (b) El ancho de banda espectral del pulso rectangular de la figura 9.5(a).

Solución: según (4.45) y (4.73), la transformada de Fourier de $f(t)$ está dada por

$$F(\omega) = e^{-j\omega t_0} Ad \frac{\sin\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)}. \quad (9.102)$$

Puesto que $|e^{-j\omega t_0}| = 1$, entonces

$$|F(\omega)| = Ad \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)} \right|. \quad (9.103)$$

Según el teorema de Parseval, dado por 4.136, se tiene

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 2\pi A^2 d. \quad (9.104)$$

Por (9.93), se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2 &= \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi A^2 d} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 d^2 \omega^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)^2} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega d}{2}\right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\omega d)] d\omega \end{aligned} \quad (9.105)$$

el cual es infinito, puesto que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 |F(\omega)| \neq 0$.

En la práctica, el ancho de bandapectral de un pulso cuadrado, se define en forma adecuada como $2\pi/d$; es decir, el primer cero de $|F(\omega)|$ [ver figura 9.5(b)]. La mayor parte de la energía del pulso, está concentrada dentro de este ancho.

El principio de incertidumbre en el análisis espectral, establece que si la señal $f(t)$ es tal que las integrales (9.87) a (9.93) son finitas, y así mismo, que $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} f(t) = 0$, entonces

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (9.106)$$

La desigualdad de Schwartz establece que para dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt \right|^2 \quad (9.107)$$

PROBLEMA 9.25 (a) Probar la desigualdad de Schwartz. (b) Probar el principio de incertidumbre en el análisis espectral.

Solución: (a) sea x una variable real cualquiera y

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + x g(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt + 2x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt + x^2 \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt.$$

Sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = a, \quad 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = b, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = c. \quad (9.108)$$

Puesto que $m(x)$ es la integral de un valor al cuadrado, entonces la integral es siempre positiva y real; de donde,

$$m(x) = ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{para valores reales de } x. \quad (9.109)$$

De (9.109) se sigue que su discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser negativo; es decir,

$$b^2 - 4ac \leq 0 \quad \text{o} \quad ac \geq \frac{1}{4} b^2.$$

La desigualdad de Schwartz, (9.107), se prueba reemplazando a, b y c dados por (9.108).

(b) Según el teorema de Parseval, dado por (4.136), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt, \quad (9.110)$$

esto es,

$$\|F\|^2 = 2\pi \|f\|^2. \quad (9.111)$$

Por (9.99), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt. \quad [9.99]$$

Multiplicando (9.89) y (9.93), y utilizando (9.110) y (9.99) se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta t \Delta \omega)^2 &\approx \frac{1}{\|f\|^2 \|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{[\|f\|^2]^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (9.112)$$

Escogiendo una referencia de tiempo adecuada, se puede hacer $\bar{t} = 0$, sin pérdida de generalidad; por tanto, con esta escogencia, se tiene

$$(\Delta t \Delta \omega)^2 = \frac{1}{[\|f\|^2]^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt. \quad (9.113)$$

Utilizando la desigualdad de Schwartz (9.107), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) f'(t) dt \right|^2. \quad (9.114)$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) f'(t) dt &= \int_{t=-\infty}^{t=\infty} t f(t) df(t) \\ &= \frac{1}{2} t f^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Por tanto, si $\lim_{t \rightarrow \infty} t f^2(t) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) f'(t) dt &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \|f\|^2. \end{aligned} \quad (9.115)$$

Reemplazando este resultado en (9.114) y utilizando la desigualdad resultante en (9.113), se obtiene

$$(\Delta t \Delta \omega)^2 \geq \frac{1}{4} \left[\frac{\|f\|^2}{\|f'\|^2} \right]^2 - \frac{1}{4}. \quad (9.116)$$

Por tanto,

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 9.26 Considerando la función $f(t)$ que se muestra en la figura 9.6(a), ilustrar el principio de incertidumbre del problema 9.25.

Solución: la función y su derivada son

$$f(t) = at e^{-at} u(t), \quad a > 0,$$

$$f'(t) = a(1 - at) e^{-at} u(t).$$

Por (9.88), el centro de gravedad \bar{t} de esta forma de onda es

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{\int_0^\infty a^2 t^3 e^{-2at} dt}{\int_0^\infty a^2 t^2 e^{-2at} dt} = \frac{\int_0^\infty t^3 e^{-2at} dt}{\int_0^\infty t^2 e^{-2at} dt} \\ &= \frac{\frac{3}{2a} \frac{1}{4a^3}}{\frac{1}{(4a^3)}} = \frac{3}{2a}. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Entonces por (9.89), se tiene

$$\begin{aligned} (\Delta t)^2 &= \frac{1}{4a} \int_0^\infty \left(t - \frac{3}{2a} \right)^2 a^2 t^2 e^{-2at} dt \\ &= \frac{1}{4a} \frac{3}{16a^3} \\ &= \frac{3}{4a^2}. \end{aligned} \quad (9.120)$$

De donde,

$$\Delta t = \frac{\sqrt{3}}{2a}. \quad (9.121)$$

El ancho de banda espectral $\Delta\omega$ de $f(t)$ se puede encontrar así: por (9.93), se tiene

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Por (9.108) y (9.99), la ecuación (9.93) se puede expresar como

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2 &= \frac{1}{2\pi \|f\|^2} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (9.122)$$

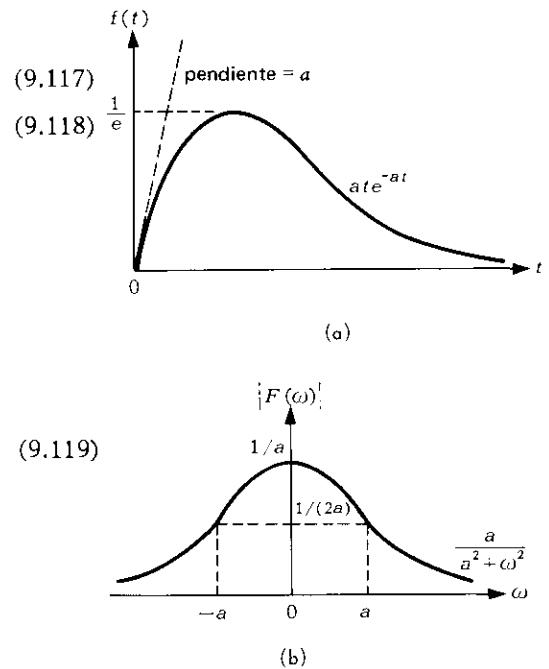


Figura 9.6 (a) La función $f(t)$ del problema 9.26. (b) El espectro de la función $f(t)$ de la figura 9.6(a).

Por tanto, según (9.118), se tiene

$$\frac{(\Delta\omega)^2}{4} = \frac{1}{4a} \int_0^\infty a^2(1-at)^2 e^{-2at} dt = \frac{1}{4a} \frac{a}{4} = a^2, \quad (9.123)$$

$$\Delta\omega = a. \quad (9.124)$$

Y por consiguiente,

$$\Delta t \Delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{2a} a = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}. \quad (9.125)$$

PROBLEMA 9.27 Considerando la función gaussiana [figura 9.7(a)]

$$f(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0, \quad (9.126)$$

ilustrar el principio de incertidumbre del problema 9.25.

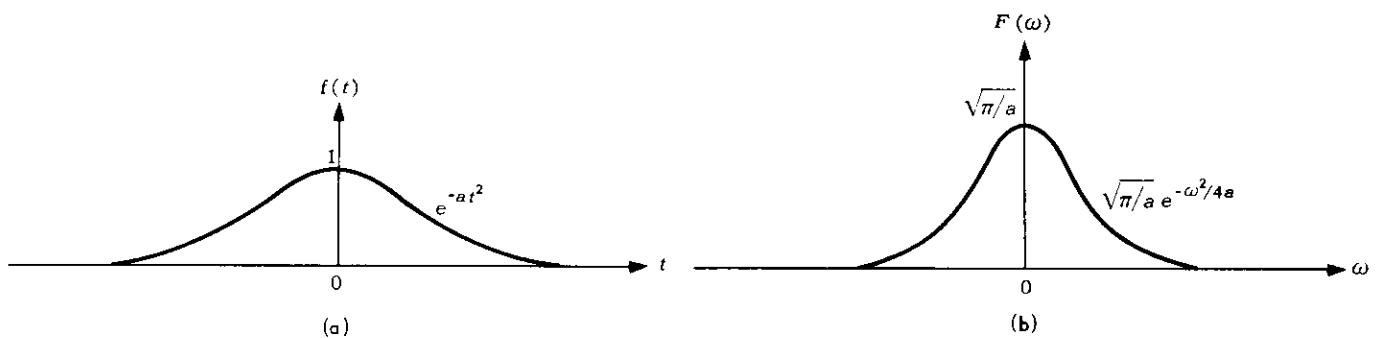


Figura 9.7 (a) La función gaussiana. (b) El espectro de la función de la figura 9.7 (a).

Solución: sea $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$. Entonces,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2+j\omega t/a)} dt.$$

Esta clase de integral se evalúa "completando el cuadrado". Para hacer esto, multiplicar el integrando por $e^{-\omega^2/4a} \cdot e^{+\omega^2/4a}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/(4a)} e^{-a[t+j\omega/(2a)]^2} dt \\ &\approx e^{-\omega^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{\sqrt{a}[t+j\omega/(2a)]\}^2} dt. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Introduciendo una nueva variable de integración y , mediante

$$\sqrt{a} \left[t + \frac{j\omega}{(2a)} \right] = y,$$

entonces $\sqrt{a} dt = dy$, y se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{\sqrt{a}[t+j\omega/(2a)]\}^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (9.128)$$

en razón de (8.175); es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Por consiguiente,

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}. \quad (9.129)$$

Por (9.126) y (9.129) se observa que la transformada de Fourier de una función gaussiana, es también gaussiana.

Con $a = 1/2$, la transformada (9.129) da

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}] = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}. \quad (9.130)$$

De esta manera, excepto por el factor $\sqrt{2\pi}$, la función $e^{-t^2/2}$ es su propia transformada de Fourier.

Puesto que la función e^{-at^2} es par, por (9.88) se deduce que el centro de gravedad \bar{t} de esta onda es cero.

Entonces, por (9.89), se tiene

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt}. \quad (9.131)$$

Ahora bien, de acuerdo con (9.128), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}. \quad (9.132)$$

Diferenciando la ecuación (9.132) con respecto a b , se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-by^2} dy = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}. \quad (9.133)$$

Utilizando (9.132) y (9.133), se puede evaluar (9.131) como

$$(\Delta t)^2 = \frac{\frac{1}{2}(2a)}{\sqrt{\frac{\pi}{2a}}} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2a}}}{2(2a)}. \quad (9.134)$$

Análogamente, por (9.93) y (9.129), se obtiene

$$\begin{aligned} (\Delta \omega)^2 &= \frac{\frac{\pi}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\omega^2/(2a)} d\omega}{\frac{\pi}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/(2a)} d\omega} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\omega^2/(2a)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/(2a)} d\omega} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2a)\sqrt{2a\pi}}{\sqrt{2a\pi}} \\ &= \frac{1}{2}(2a) \end{aligned} \quad (9.135)$$

mediante (9.132) y (9.133).

Por consiguiente,

$$(\Delta t)^2 (\Delta \omega)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\alpha)} \cdot \frac{1}{2} (2\alpha) = \frac{1}{4}, \quad (9.136)$$

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{1}{2}. \quad (9.137)$$

La ecuación (9.137) muestra que el signo de igualdad en la ecuación (9.106), es válido para la función gaussiana.

En el problema 9.23 se analizó la condición necesaria para que $f(t)$ tenga un ancho de banda finito, en la forma definida por (9.93). Con una definición apropiada de ancho de banda espectral, diferente a la definición (9.93), se puede establecer la relación general entre la duración de la señal y su ancho de banda espectral, lo cual se ilustra en el problema siguiente.

PROBLEMA 9.28 Considerar el pulso rectangular dado en el problema 9.24. Demostrar que el producto del ancho de banda espectral y la duración del pulso, es una constante con “apropiada” selección de alguna medida del ancho de banda.

Solución: en la figura 9.5 se observa intuitivamente que si se selecciona

$$\Delta t = d,$$

y el ancho de banda espectral $\Delta \omega$ como la banda que se extiende al primer cero de $|F(\omega)|$ (la mayor parte de la energía está concentrada en este ancho).

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{d}. \quad (9.138)$$

Se observa entonces que

$$\Delta t \Delta \omega = d \cdot \frac{2\pi}{d} = 2\pi, \quad (9.139)$$

o sea que el producto del ancho de banda y la duración del pulso es una constante.

9.4 FORMULA DE LA SUMATORIA DE POISSON

Los teoremas de la transformada de Fourier también ayudan a evaluar sumas. En esta sección se deducirá la fórmula de la sumatoria de Poisson y se explicarán algunas de sus aplicaciones.

PROBLEMA 9.29 Si $f(t)$ es una función arbitraria y $F(\omega)$ es su transformada de Fourier, probar la siguiente identidad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} F(n\omega_0), \quad (9.140)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$

Solución: sea

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (9.141)$$

la cual está definida en (2.104).

Entonces, por (4.120), se tiene

$$\begin{aligned}
f(t) * \delta_T(t) &= f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) * \delta(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)
\end{aligned} \tag{9.142}$$

dado que todos los valores positivos y negativos de n están incluidos en la sumatoria.
Por tanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = f(t) * \delta_T(t). \tag{9.143}$$

Ahora bien, por (5.66), se tiene

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Aplicando el teorema de convolución en el tiempo (4.122), a (9.143), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT)\right] &= F(\omega) \mathcal{F}[\delta_T(t)] \\
&= F(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\
&= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) \delta(\omega - n\omega_0) \\
&= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)
\end{aligned} \tag{9.144}$$

mediante la propiedad de la función δ , dada por (2.74).

Por (5.21), se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - n\omega_0)] = \frac{1}{2\pi} e^{jn\omega_0 t}.$$

Por consiguiente, según (9.144), se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - n\omega_0)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}.$$

La fórmula de la suma de Poisson establece que si $f(t)$ es una función arbitraria y $F(\omega)$ es su transformada de Fourier, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0), \tag{9.145}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$

PROBLEMA 9.30 Probar la fórmula de la sumatoria de Poisson.

Solución: haciendo $t = 0$ en (9.140), se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0).$$

PROBLEMA 9.31 Probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2\pi n)^2}, \quad a > 0. \quad (9.146)$$

Solución: sea

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-a|t|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (9.147)$$

Si se hace $T = 1$ (de donde, $\omega_0 = 2\pi$) en la fórmula de Poisson dada por (9.145), se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(2\pi n). \quad (9.148)$$

Por tanto, según (9.147), se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2\pi n)^2}.$$

PROBLEMA 9.32 Deducir la siguiente identidad de la función theta:

$$\frac{a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} \cos 2\pi nt. \quad (9.149)$$

Solución: sea

$$f(t) = e^{-at^2}$$

Entonces, por (9.129), se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}. \quad [9.129]$$

Si se hace $T = 1$ (de donde, $\omega_0 = 2\pi$) en (9.140), se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(2\pi n) e^{j2\pi nt}.$$

Por tanto, según (9.129), se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{j2\pi nt}, \quad (9.150)$$

o

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{j2\pi nt} \\ &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{j2\pi nt} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{j2\pi nt} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} (e^{j2\pi nt} + e^{-j2\pi nt}) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} \cos 2\pi nt. \end{aligned}$$

9.5 CAUSALIDAD Y TRANSFORMADA DE HILBERT

En esta sección se analizará la relación entre la parte real y la parte imaginaria de la transformada de Fourier, de una función causal, y su aplicación en la determinación de la transformada de Hilbert.

PROBLEMA 9.33 Sea $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, la transformada de Fourier de una función causal $f(t)$. Demostrar que $f(t)$ se puede expresar en términos de $R(\omega)$ o $X(\omega)$ solamente.

Solución: puesto que $f(t)$ es causal, por definición, se tiene

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0. \quad (9.151)$$

De acuerdo con esto, se tiene

$$f(-t) = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (9.152)$$

Por consiguiente, según (2.5) y (2.6), se tiene

$$f(t) = 2f_e(t) - 2f_o(t) \quad \text{para } t > 0, \quad (9.153)$$

donde

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

y $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente. Entonces, por (4.38) y (4.40) se obtiene

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (9.154)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (9.155)$$

para $t > 0$.

PROBLEMA 9.34 Sea $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, la transformada de Fourier de una función causal $f(t)$. Demostrar que las funciones $R(\omega)$ y $X(\omega)$ no son independientes una de otra, sino que cada una de ellas se puede determinar únicamente en términos de la otra.

Solución: si $f(t)$ es real y causal, entonces por los resultados del problema 4.6, se tiene

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (9.156)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = - \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (9.157)$$

Reemplazando la expresión (9.155) en (9.156) se obtiene

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(y) \sin yt \cos \omega t dy dt. \quad (9.158)$$

Análogamente, reemplazando (9.154) en (9.157), se obtiene

$$X(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(y) \cos yt \sin \omega t dy dt. \quad (9.159)$$

PROBLEMA 9.35 Sea $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, la transformada de Fourier de una función causal $f(t)$. Demostrar las siguientes identidades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega, \quad (9.160)$$

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^2(\omega) d\omega,$$

Solución: con la descomposición de $f(t)$ en sus componentes par e impar, es decir,

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

por (4.42) y (4.43) se tiene que,

$$\mathcal{F}[f_e(t)] = R(\omega),$$

$$\mathcal{F}[f_o(t)] = jX(\omega).$$

Por consiguiente, según el teorema de Parseval, dado por (4.136), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_e(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\omega) d\omega, \quad (9.162)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_o(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega. \quad (9.163)$$

En razón de la causalidad de $f(t)$ y de (9.153), se sigue que

$$f(t) = 2f_e(t) = 2f_o(t) \quad \text{para } t > 0.$$

Por tanto,

$$|f_e(t)| = |f_o(t)|. \quad (9.164)$$

En consecuencia, según (9.162) y (9.163), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} R^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega.$$

Puesto que

$$|F(\omega)|^2 = R^2(\omega) + X^2(\omega),$$

y según el teorema de Parseval, dado por (4.136), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R^2(\omega) + X^2(\omega)] d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\omega) d\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^2(\omega) d\omega
\end{aligned} \tag{9.165}$$

en razón de (9.160) y $R^2(-\omega) = R^2(\omega)$.

Para una función causal $f(t)$, dado que $f(t) = 0$, para $t < 0$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} f^2(t) dt.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^2(\omega) d\omega.$$

PROBLEMA 9.36 Demostrar la igualdad de estas dos integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}. \tag{9.166}$$

Solución: sea $f(t) = e^{-at} u(t)$. Entonces, por (4.47), se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con (9.160), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

PROBLEMA 9.37 Si la función causal $f(t)$ no contiene impulsos en el origen, demostrar que si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = R(\omega) + jX(\omega)$, entonces $R(\omega)$ y $X(\omega)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy, \tag{9.167}$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy. \tag{9.168}$$

Solución: sea

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

donde $f_e(t)$ y $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente. Puesto que $f(t)$ es causal, se tiene

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0.$$

Ciertamente, para cualquier función causal se puede suponer que

$$f_e(t) = -f_o(t) \quad \text{para } t < 0.$$

Así mismo, por (9.153), se tiene

$$f_o(t) = f_e(t) \quad \text{para } t > 0.$$

Por consiguiente, se puede expresar que

$$f_e(t) = f_o(t) \operatorname{sgn} t, \quad (9.169)$$

$$f_o(t) = f_e(t) \operatorname{sgn} t, \quad (9.170)$$

donde $\operatorname{sgn} t$ se define como [ver ecuación (5.45)]

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ -1 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

Ahora bien, por (4.42), (4.43) y (5.49), se obtiene

$$\mathcal{F}[f_e(t)] = R(\omega),$$

$$\mathcal{F}[f_o(t)] = jX(\omega),$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = \frac{2}{(j\omega)}.$$

Por tanto, según el teorema de convolución en la frecuencia, dado por la ecuación (4.125), se obtiene

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \mathcal{F}[f_e(t)] = \mathcal{F}[f_o(t) \operatorname{sgn} t] \\ &= \frac{1}{2\pi} jX(\omega) * \frac{2}{j\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} X(\omega) * \frac{1}{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$\begin{aligned} jX(\omega) &= \mathcal{F}[f_o(t)] = \mathcal{F}[f_e(t) \operatorname{sgn} t] \\ &= \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega} \\ &= -j \frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy.$$

El par de ecuaciones (9.167) y (9.168), se conoce como la transformada de Hilbert.

PROBLEMA 9.38 La parte real de la función del sistema $H(\omega)$, de un sistema causal es, $\pi\delta(\omega)$; hallar la función del sistema $H(\omega)$.

Solución: sea

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega).$$

Dado que $R(\omega) = \pi\delta(\omega)$, por (9.168), se tiene

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(y)}{\omega - y} dy = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{1}{\omega - y} dy = -\frac{1}{\omega} \quad (9.171)$$

mediante la relación (2.67).

Por tanto,

$$H(\omega) = \pi \delta(\omega) - j \frac{1}{\omega} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (9.172)$$

9.6 EVALUACION DE ALGUNAS INTEGRALES

La evaluación de algunas integrales se facilita utilizando el teorema de Parseval (4.136) y el par de transformadas de Fourier, lo cual se ilustrará en los ejemplos siguientes.

PROBLEMA 9.39 Evaluar las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Solución: sea

$$f(t) = e^{-at} u(t).$$

Entonces, por el resultado del problema 4.11, se tiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{a + j\omega}, \\ |F(\omega)|^2 &= \frac{1}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (9.173)$$

Ahora bien, de acuerdo con el teorema de Parseval (4.136), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \end{aligned} \quad (9.174)$$

Por tanto, según (9.173), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2at} dt \\ &= 2\pi \left. \frac{e^{-2at}}{-2a} \right|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{a}. \quad (9.175)$$

Haciendo $a = 1$, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi. \quad (9.176)$$

PROBLEMA 9.40 Evaluar las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Solución: sea

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-|at|}.$$

Entonces, por (9.147), se obtiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{a}{a^2 + \omega^2}.$$

Ahora bien, utilizando el teorema de Parseval (4.136), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-|at|} \right]^2 dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|at|} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} dt \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2at}}{2a} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-2at}}{-2a} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{\pi}{2a}. \end{aligned} \tag{9.177}$$

De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{2a}. \tag{9.178}$$

Haciendo $a = 1$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{9.179}$$

9.7 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

PROBLEMA 9.41 Si $\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$, demostrar que

$$(a) \quad \mathcal{F}[f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right),$$

$$(b) \quad \mathcal{F}[f(x-a, y-b)] = F(u, v) e^{-j(au+bu)}.$$

PROBLEMA 9.42 Demostrar el teorema de Parseval para dos dimensiones, es decir,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv.$$

PROBLEMA 9.43 Demostrar el teorema de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[\nabla^2 f(x, y)] = -(u^2 + v^2) \mathcal{F}[f(x, y)],$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

PROBLEMA 9.44 Supóngase que la función de prueba $\phi(x, y)$ es una función continua, que se anula fuera de alguna región finita, y que la función bidimensional δ es la función simbólica definida por la relación

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) \phi(x, y) dx dy = \phi(0, 0).$$

Demostrar las siguientes propiedades de la función bidimensional δ :

$$(a) \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi, y - \eta) \phi(x, y) dx dy = \phi(\xi, \eta);$$

$$(b) \delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y);$$

$$(c) \mathcal{F}[\delta(x, y)] = 1.$$

PROBLEMA 9.45 En el capítulo sexto se definió un sistema, como la transformación de una función de entrada en una función de salida. [Cf., (6.5).] Las funciones de entrada y de salida, son funciones de una variable independiente unidimensional (el tiempo); pero en el caso de sistemas de formación de imágenes, la entrada y la salida pueden ser funciones de una variable independiente bidimensional (el espacio). De esta manera, un sistema lineal de formación de imágenes se puede representar por

$$L\{f_i(x, y)\} = f_o(x, y),$$

$$L\{a_1 f_{i1}(x, y) + a_2 f_{i2}(x, y)\} = a_1 L\{f_{i1}(x, y)\} + a_2 L\{f_{i2}(x, y)\}.$$

Se dice que el sistema es *invariante en el espacio* si

$$L\{f_i(x + x_o, y + y_o)\} = f_o(x + x_o, y + y_o).$$

Sea $h(x, y)$ la respuesta del sistema al impulso unitario; es decir,

$$L\{\delta(x, y)\} = h(x, y).$$

Deducir la relación de convolución bidimensional

$$f_o(x, y) = f_i(x, y) * h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_i(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

PROBLEMA 9.46 Si $\mathcal{F}[h(x, y)] = H(u, v)$, $\mathcal{F}[f_i(x, y)] = F_i(u, v)$ y $\mathcal{F}[f_o(x, y)] = F_o(u, v)$, demostrar que

$$F_o(u, v) = F_i(u, v) H(u, v),$$

donde $H(u, v)$ es la función bidimensional del sistema. [Cf., (9.35).]

PROBLEMA 9.47 Hallar la función característica de la variable gaussiana al azar, X ,

$$\text{cuya densidad de probabilidad es } p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

Respuesta: $\phi(\omega) = e^{im\omega} e^{-\omega^2\sigma^2/2}$.

PROBLEMA 9.48 Si X es la variable gaussiana al azar del problema 9.47, demostrar que $E[X] = m$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

PROBLEMA 9.49 Si $\phi_x(\omega)$ es la función característica de la variable al azar X , hallar la función característica $\phi_y(\omega)$, de la variable al azar $Y = aX + b$, donde a y b son dos números reales cualesquiera, en términos de $\phi_x(\omega)$.

Respuesta: $\phi_y(\omega) = e^{ib\omega} \phi_x(a\omega)$.

PROBLEMA 9.50 La variable al azar X se distribuye normalmente con densidad probabilística $p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. Hallar la densidad probabilística de la variable al azar $Y = aX^2$.

[Sugerencia: si $Y = g(X)$, entonces $\phi_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega g(x)} p_x(x) dx$, con un cambio de variable $y = g(x)$,

$$\phi_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega y} h(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega y} p_y(y) dy \quad y \quad h(y) = p_y(y).$$

Respuesta: $p_y(y) = \frac{e^{-y/2a\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}ay} u(y)$, donde $u(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0 \\ 0 & \text{para } y < 0 \end{cases}$

PROBLEMA 9.51 La densidad probabilística de una variable al azar X , es $p(x) = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + x^2}$. Demostrar que su función característica es $\phi(\omega) = e^{-|\alpha|\omega}$.

PROBLEMA 9.52 Demostrar que si la densidad probabilística de una variable al azar X , es $\frac{1}{2}\alpha e^{-|\alpha|x}$, entonces su función característica $\phi(\omega)$, es $\alpha^2/(\alpha^2 + \omega^2)$.

PROBLEMA 9.53 Verificar el principio de incertidumbre en el análisis espectral, para la señal $f(t) = e^{-|a|t}$.

PROBLEMA 9.54 Probar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2 n^2} = \frac{\pi}{a} \coth\left(\frac{\pi}{a}\right)$.

[Sugerencia: aplicar la fórmula de la sumatoria de Poisson, con $f(t) = 1/(1+t^2)$.]

PROBLEMA 9.55 Demostrar que $\hat{m}(t)$ y $m(t)$ del problema 6.51, están relacionados por

$$\hat{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad \text{y} \quad m(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{m}(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

De esta manera, $\hat{m}(t)$ también se denomina *transformada de Hilbert* de $m(t)$.

PROBLEMA 9.56 Si una función real $m(t)$, tiene como transformada de Hilbert a $\hat{m}(t)$, demostrar que la transformada de Hilbert de $\hat{m}(t)$ es $-m(t)$; esto es, $\hat{\hat{m}}(t) = -m(t)$.

PROBLEMA 9.57 Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [m(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{m}(t)]^2 dt \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \hat{m}(t) dt = 0.$$

[Sugerencia: utilizar el teorema de Parseval.]

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER Y EL FENOMENO DE GIBBS

A
APENDICE

A.1 CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

En la sección 1.6 se mencionaron brevemente las condiciones de Dirichlet, bajo las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función periódica $f(t)$. Ahora se demostrará que la serie infinita

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (\text{A.1})$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, y a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(t)$, converge al valor $f(t)$.

PROBLEMA A.1 Si $S_k(t)$ denota la suma de los primeros $(2k + 1)$ términos de la serie de Fourier de $f(t)$, es decir

$$S_k(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (\text{A.2})$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, y a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt, \quad (\text{A.3})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt, \quad (\text{A.4})$$

demonstrar entonces que

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) D_k [\omega_0(x - t)] dx, \quad (\text{A.5})$$

donde $D_k(\xi)$ es el llamado “núcleo Dirichlet”; es decir,

$$D_k(\xi) = \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \xi \right]}{2 \sin \frac{1}{2} \xi}. \quad (\text{A.6})$$

Solución: en las expresiones (A.3) y (A.4), t es la variable comodín. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 & a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \\
 &= \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx \right] \cos n\omega_0 t \\
 &\quad + \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx \right] \sin n\omega_0 t \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) [\cos(n\omega_0 x) \cos(n\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 x) \sin(n\omega_0 t)] dx \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos[n\omega_0(x - t)] dx. \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
 S_k(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx + \sum_{n=1}^k \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos[n\omega_0(x - t)] dx \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \left\{ \frac{1}{2} + \cos[\omega_0(x - t)] + \cos[2\omega_0(x - t)] \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \cos[k\omega_0(x - t)] \right\} dx. \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

Hacer $\omega_0(x - t) = \xi$ y considerar la suma

$$D_k(\xi) = \frac{1}{2} + \cos \xi + \cos 2\xi + \dots + \cos k\xi.$$

Utilizando la identidad trigonométrica, $2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 2 \sin \frac{\xi}{2} D_k(\xi) &= \sin \frac{\xi}{2} + 2 \sin \frac{\xi}{2} \cos \xi + 2 \sin \frac{\xi}{2} \cos 2\xi \\
 &\quad + \dots + 2 \sin \frac{\xi}{2} \cos k\xi \\
 &= \sin \frac{\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} + \sin \frac{3}{2}\xi - \sin \frac{3}{2}\xi + \sin \frac{5}{2}\xi \\
 &\quad - \dots - \sin \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \xi \right] + \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \xi \right] \\
 &= \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \xi \right].
 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$D_k(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\xi + \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \xi \right]}{2 \sin \frac{1}{2}\xi}. \tag{A.9}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_k(t) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 (x - t) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} \omega_0 (x - t) \right]} dx \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) D_k[\omega_0(x - t)] dx, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{donde } D_k(\xi) = \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \xi \right]}{2 \sin \frac{1}{2} \xi}$$

PROBLEMA A.2 Demostrar que la relación (A.10) se puede expresar como

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.11})$$

Solución: haciendo el cambio de variables $x - t$ por λ en la relación (A.10), el resultado es

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.12})$$

Ahora bien, por la relación (A.9), se tiene

$$\frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n \omega_0 \lambda. \quad (\text{A.13})$$

Por tanto,

$$\frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)}$$

es una función periódica en la variable λ , con período T . Puesto que la función $f(t + \lambda)$ también es periódica en la variable λ , con período T , el integrando de (A.12) es periódico en la variable λ , con período T . Entonces, por (1.6), se puede expresar (A.12) como

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda$$

que es la solución deseada.

PROBLEMA A.3 Sea $f(t)$ una función periódica con período T , integrable absolutamente en un período. Demostrar que en todo punto de continuidad donde existe la derivada, la serie de Fourier de $f(t)$ converge al valor $f(t)$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = f(t). \quad (\text{A.14})$$

Solución: sea t un punto de continuidad de $f(t)$. De acuerdo con (A.11), se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.15})$$

Por (A.13), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n \omega_0 \lambda \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} d\lambda + \sum_{n=1}^k \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n \omega_0 \lambda) d\lambda \\ &= \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

en razón de (1.19a). Por tanto,

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda = 1 \quad (\text{A.17})$$

para cualquier valor de k .

Por (A.17), se tiene

$$f(t) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.18})$$

Por (A.18) y (A.15), se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = f(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t + \lambda) - f(t)] \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.19})$$

Considerar ahora la función

$$g(\lambda) = \frac{f(t + \lambda) - f(t)}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} = \frac{f(t + \lambda) - f(t)}{\lambda} \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)}. \quad (\text{A.20})$$

Dado que $f(t)$ tiene una derivada en el punto t ,

$$\frac{f(t + \lambda) - f(t)}{\lambda}$$

permanece limitado a medida que $\lambda \rightarrow 0$.

Por otra parte, la función

$$\frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)}$$

es continua para $\lambda \neq 0$, y se aproxima a $1/\omega_0$ a medida que $\lambda \rightarrow 0$, puesto que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Según estos resultados y dado que $f(t)$ es integrable absolutamente, se sigue que la función $g(t)$ definida en (A.20), es integrable absolutamente. Entonces, por el resultado (1.79) del problema 1.19, se tiene,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) - f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right] d\lambda = 0. \quad (\text{A.21})$$

Por tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = f(t)$.

PROBLEMA A.4 Sea $f(t)$ una función continua por tramos, periódica con período T , e integrable absolutamente en un período. Demostrar que en todo punto de discontinuidad donde $f(t)$ tiene una derivada de derecha y una de izquierda, la serie de Fourier de $f(t)$ converge al valor

$$\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)],$$

donde $f(t+)$ es el valor de $f(t)$ justamente en el lado derecho de la discontinuidad, y $f(t-)$ es el valor de $f(t)$ justamente en el lado izquierdo de la discontinuidad; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)]. \quad (\text{A.22})$$

Solución: por (A.15), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Puesto que el integrando en (A.17) es par, entonces de acuerdo con (2.13), se obtiene

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.24})$$

Por tanto, según (A.24), se tiene

$$\frac{1}{2} f(t+) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.25})$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda &= \frac{1}{2} f(t+) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(t + \lambda) - f(t+)] \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda. \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

Considérese ahora la función

$$g(\lambda) = \frac{f(t + \lambda) - f(t+)}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} = \frac{f(t + \lambda) - f(t+)}{\lambda} \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)}. \quad (\text{A.27})$$

Puesto que $f(t)$ tiene una derivada en el lado derecho en t ,

$$\frac{f(t + \lambda) - f(t+)}{\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

permanece limitado a medida que $\lambda \rightarrow 0$, y la función

$$\frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)}$$

también es limitada. Como en el caso donde $f(t)$ es continuo, se concluye que la función $g(\lambda)$ es integrable absolutamente en el intervalo $[0, T/2]$. De esta manera, por (1.79), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda &= \frac{1}{2} f(t+) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right] d\lambda \\ &\rightarrow 0. \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{1}{2} f(t+). \quad (\text{A.29})$$

Análogamente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t + \lambda) \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \lambda \right]}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \omega_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{1}{2} f(t-). \quad (\text{A.30})$$

Por tanto, según (A.29), (A.30) y (A.23), se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)].$$

A.2 EL FENOMENO DE GIBBS

Cuando una función dada se aproxima mediante una suma parcial de la serie de Fourier, habrá un error considerable en la vecindad de una discontinuidad, no importa cuántos términos se quieran utilizar. Este efecto se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

Se ilustrará este fenómeno considerando la onda cuadrada estudiada en el capítulo primero (problema 1.10).

PROBLEMA A.5 Considérese la onda cuadrada de amplitud uno y período 2π (figura A.1), es decir,

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Analizar la suma de un número finito de términos de la serie de Fourier.

Solución: según el resultado del problema 1.10, la serie de Fourier de la onda cuadrada es: (haciendo $\omega_0 = 2\pi/T = 1$)

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right). \quad (\text{A.31})$$

Esta serie no muestra uniformidad en la convergencia de la serie de Fourier, cerca de la discontinuidad. En la figura A.2 se ilustran aproximaciones sucesivas.

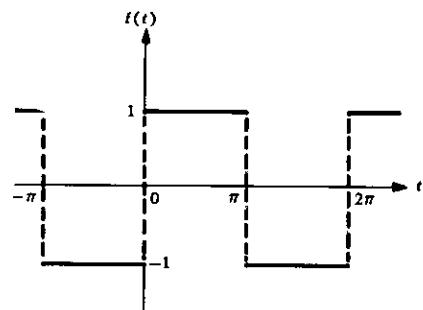


Figura A.1 La onda cuadrada del problema A.5.

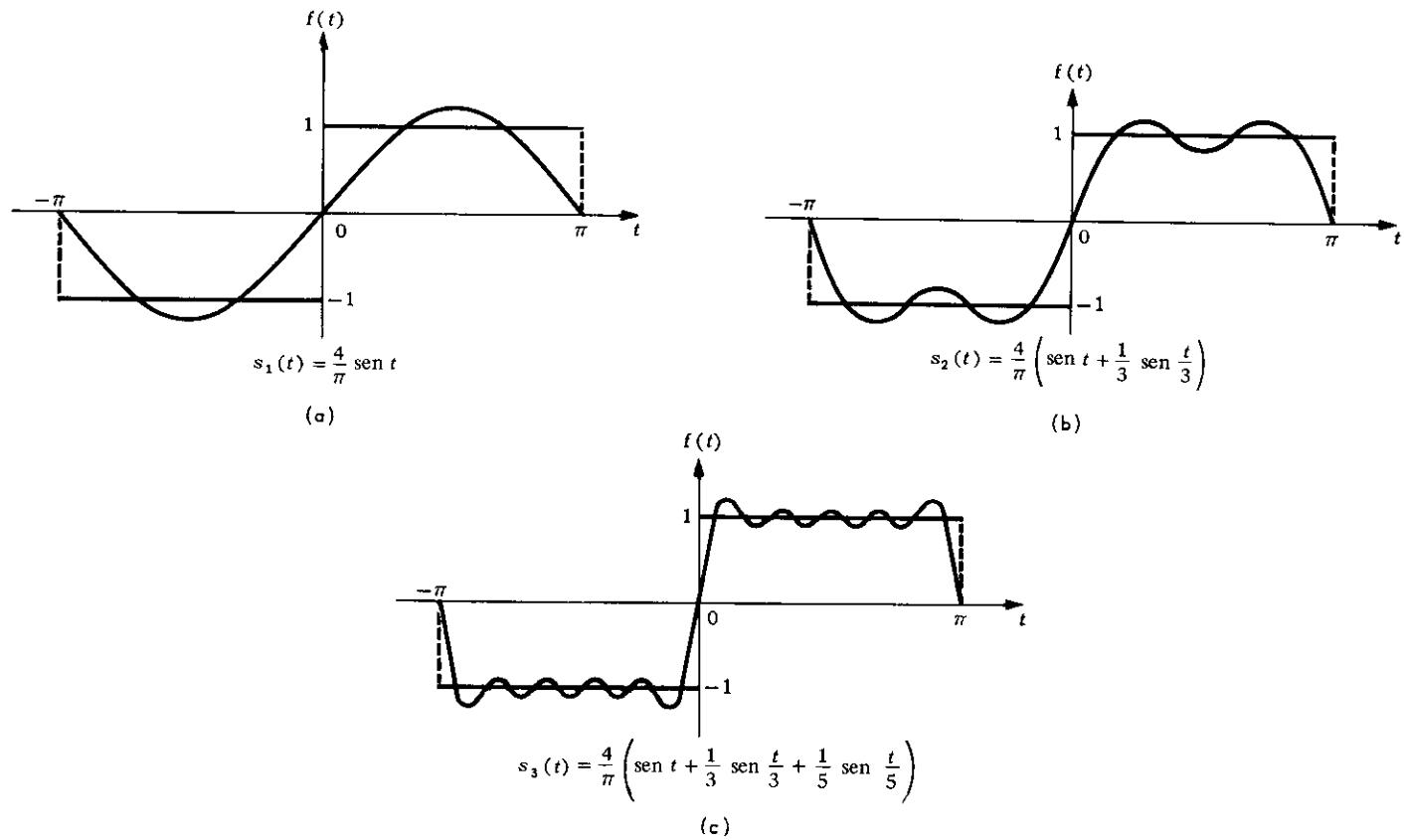


Figura A.2 Las tres primeras sumas finitas de la serie de Fourier, en la onda cuadrada de la figura A.1.

Considérese ahora la suma de un número finito de términos, de la serie $S_k(t)$. Según (A.10), esta suma está dada por ($T = 2\pi$, $\omega_0 = 2\pi/T = 1$)

$$\begin{aligned}
S_k(t) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \omega_0(x-t) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \omega_0(x-t) \right]} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)(x-t) \right]}{\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(x-t) \right]} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)(x-t) \right]}{\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(x-t) \right]} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)(x'-t) \right]}{\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(x'-t) \right]} dx'. \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

Sustituyendo $x-t$ por y , $y-t$ por y' , se obtiene

$$S_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{\pi-t} \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}y \right)} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+t}^t \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y' \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}y' \right)} dy'. \quad (\text{A.33})$$

Esto es así, porque

$$\begin{aligned}
dy' &= -dx', \\
\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)(-y') \right] &= -\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y' \right], \\
\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(-y') \right] &= -\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}y' \right].
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\int_{-t}^{\pi-t} + \int_{\pi+t}^t = \int_{-t}^t + \int_t^{\pi-t} + \int_{\pi+t}^{\pi-t} + \int_{\pi-t}^t = \int_{-t}^t + \int_{\pi+t}^{\pi-t},$$

se puede expresar (A.33) como

$$S_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}y \right)} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+t}^{\pi-t} \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}y \right)} dy. \quad (\text{A.34})$$

En la vecindad de la discontinuidad, es decir, $t=0$, se evalúa la primera integral en la región donde $y=0$. Aplicando la *regla de L'Hospital*, se obtiene el valor del integrando en $y=0$, como

$$\left. \frac{\left(k + \frac{1}{2} \right) \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)y \right]}{\frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2}y \right)} \right|_{y=0} = 2k + 1.$$

La segunda integral se evalúa en la región donde $y=\pi$. El integrando de la segunda integral en $y=\pi$ es $(-1)^k$. Se puede despreciar la contribución de la segunda integral en comparación con la contribución de la primera. Por consiguiente,

$$S_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} y \right)} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} y \right)} dy \quad (\text{A.35})$$

puesto que el integrando es par en y .

Como lo que interesa es la vecindad de la discontinuidad, es decir, $t = 0$, y

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

se puede reemplazar $\sin 1/2y$ por $1/2y$, y obtener

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right]}{\frac{1}{2} y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right]}{y} dy. \quad (\text{A.36})$$

Sustituyendo $(k + 1/2)y$ por ζ , se tiene

$$S_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{(k+1/2)t} \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{2}{\pi} Si \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right], \quad (\text{A.37})$$

donde $Si(y)$ es la función seno-integral comentada en el problema 6.34. Puesto que $Si(0) = 0$, y $Si(\infty) = \pi/2$ (ver el problema 6.34),

$$S_k(0) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = 1.$$

Según la gráfica de $Si(y)$ (figura 6.18) y figura A.2, se observa que en $t = 0$ el valor de $S_k(t)$ es cero; luego asciende rápidamente a medida que t aumenta, sobrepasa el valor 1 y oscila alrededor de la línea $f(t) = 1$, con amplitud decreciente. A medida que el número de los términos aumenta, la curva resultante oscila con frecuencia creciente y amplitud decreciente; a ambos lados de las discontinuidades hay sobreaproximación de curvas. Aunque la magnitud del pico no disminuye a medida que k aumenta, hay un límite inferior de 9% de sobreaproximación aun si $k \rightarrow \infty$.

RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER Y LAPLACE

B.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (\text{B.1})$$

donde s es una variable compleja, $s = \sigma + j\omega$. La notación operacional $\mathcal{L}[f(t)]$ significa "transformada de Laplace de $f(t)$ ".

Para que la función $F(s)$ de la definición (B.1) exista, es suficiente que

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty \quad (\text{B.2})$$

siendo σ_1 , un número positivo real.

La condición (B.2) es satisfecha por la mayoría de funciones $f(t)$ encontradas en ingeniería.

La transformada inversa de Laplace está dada por la integral compleja de inversión

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (\text{B.3})$$

donde $\sigma_1 > \sigma_c$, siendo σ_c la abscisa de convergencia.

Debe señalarse que en muchos casos la transformada inversa de Laplace, se puede obtener sin integración formal; esto se basa en la propiedad de unicidad de la transformada de Laplace, es decir, correspondiente a la función $f(t)$ hay una función $F(s)$ que es única, y viceversa; esto es verdad sólo para $t > 0$. Un análisis más profundo de la existencia, convergencia y propiedades de unicidad de la transformada de Laplace, y la evaluación formal de (B.3), están más allá de los propósitos de este texto.

PROBLEMA B.1 Hallar la transformada de Laplace del escalón unitario

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Solución: utilizando la definición B.1, se tiene

$$F(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (\text{B.5})$$

PROBLEMA B.2 Hallar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

donde α es una constante.

Solución: utilizando la definición (B.1), se obtiene

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}, \quad \operatorname{Re}[s] > \alpha. \quad (\text{B.7})$$

PROBLEMA B.3 Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones del tiempo, y a_1 y a_2 son constantes, demostrar que

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s). \quad (\text{B.8})$$

Solución: utilizando la definición (B.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= a_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + a_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s). \end{aligned}$$

PROBLEMA B.4 Hallar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Solución: por la identidad $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \operatorname{sen} \omega t$, se tiene

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Utilizando el resultado (B.7) del problema B.2, se tiene

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega}, \quad \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] = \frac{1}{s + j\omega}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (\text{B.10})$$

Y utilizando (B.8), se obtiene

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (\text{B.11})$$

A continuación se considerará la relación entre la transformada de Laplace de una función, y las transformadas de Laplace de sus derivadas e integrales.

PROBLEMA B.5 Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, hallar la transformada de Laplace de

$$\frac{df(t)}{dt}.$$

Solución: por definición,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt,$$

integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = [f(t) e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Puesto que para $\operatorname{Re}[s] > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) e^{-st}] = 0$,

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] - sF(s) - f(0). \quad (\text{B.12})$$

Se observa que (B.12) es vaga cuando $f(t)$ no es continua en $t = 0$, si $f(0)$ no está definida, o si $f(0^-)$ difiere de $f(0^+)$. Si se escoge 0^- como el límite inferior en la integral que define la transformada de Laplace, es decir,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (\text{B.13})$$

entonces

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(0^-). \quad (\text{B.14})$$

Esta es una forma muy apropiada para utilizar, dado que en la mayor parte de los problemas se conocen las condiciones iniciales en $t = 0^-$, mientras que las condiciones en $t = 0^+$ se deben deducir.

Sin embargo, si se selecciona 0^+ como el límite inferior en la integral que define la transformada de Laplace, es decir,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (\text{B.15})$$

entonces

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(0^+). \quad (\text{B.16})$$

PROBLEMA B.6 Hallar la transformada de Laplace del impulso unitario $\delta(t)$.

Solución: en el problema 2.27 se demostró que

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (\text{B.17})$$

Utilizando esto en conjunto con (B.12) y (B.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right] \\ &= s \mathcal{L}[u(t)] - u(0) \\ &= s \frac{1}{s} - u(0) \\ &= 1 - u(0). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Obsérvese que en la definición de $u(t)$, dada en (B.4), $u(0)$ no está definida. Si se utiliza (B.16), entonces

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 - u(0^+) = 1 - 1 = 0, \quad (\text{B.19})$$

mientras que si se utiliza (B.14), entonces

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 - u(0^-) = 1 - 0 = 1. \quad (\text{B.20})$$

Como en el caso de la transformada de Fourier, es conveniente tener

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (\text{B.21})$$

De esta manera, se observa nuevamente una ventaja en seleccionar 0^- como el límite inferior, de la integral que define la transformada de Laplace.

PROBLEMA B.7 Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, hallar la transformada de Laplace de

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Solución: sea

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau. \quad (\text{B.22})$$

entonces

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t),$$

de tal manera que mediante (B.14), se obtiene

$$sG(s) - g(0-) = F(s), \quad (\text{B.23})$$

donde $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$. Por el resultado (B.23), se tiene

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} g(0-). \quad (\text{B.24})$$

Dado que $g(0-) = \int_{-\infty}^{0-} f(\tau) d\tau$, entonces

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0-} f(\tau) d\tau. \quad (\text{B.25})$$

En el análisis de sistemas lineales, generalmente se trata con funciones fuentes que son causales, es decir, fuentes que se suponen ser cero antes de que $t = 0$. Si $f(t)$ es causal, es decir, $f(t) = 0$, para $t < 0$, se puede expresar

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (\text{B.26})$$

B.2 RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER Y LAPLACE

Una comparación de las definiciones de las transformadas de Fourier y Laplace revela una considerable similitud:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{B.28})$$

Para algunas funciones $f(t)$, las fórmulas pueden ser las mismas. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

PROBLEMA B.8 Si $f(t)$ es causal, es decir,

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \quad (\text{B.29})$$

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty, \quad (\text{B.30})$$

entonces, demostrar que

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega}. \quad (\text{B.31})$$

Solución: por la definición (B.28), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

dado que $f(t) = 0$, para $t < 0$.

La transformada $\mathcal{F}[f(t)]$ existe si se cumple la condición (B.30). Comparando (B.32) y (B.27), se obtiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega}.$$

PROBLEMA B.9 Utilizar (B.31) para encontrar la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$.

Solución: puesto que $f(t) = 0$, para $t < 0$ y $\alpha > 0$,

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

y se puede aplicar (B.31). Por el resultado (B.7) del problema B.2, se tiene

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Por tanto, según (B.31), se tiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{s + \alpha} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + \alpha} \quad (\text{B.33})$$

que es exactamente el resultado obtenido en (4.47).

PROBLEMA B.10 Demostrar que la transformada de Fourier del escalón unitario $u(t)$, no se puede encontrar a partir de (B.31).

Solución: puesto que

$$\int_0^{\infty} |u(t)| dt = \int_0^{\infty} 1 dt = \infty,$$

la condición (B.30) no se cumple; por tanto, (B.31) no se puede aplicar. En efecto, según los resultados del problema B.1 y problema 5.9, se tiene

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

PROBLEMA B.11 Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

demostrar que

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega} + \mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega} \quad \text{si } f(t) \text{ es par} \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega} - \mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega} \quad \text{si } f(t) \text{ es impar} \quad (\text{B.35})$$

Solución: mediante (B.28), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, entonces existe $\int_0^{\infty} f(t) e^{\pm j\omega t} dt$ y es igual a

$$\mathcal{L}[f(t)]_{s=\mp j\omega}.$$

Si $f(t)$ es par, es decir, $f(-t) = f(t)$, entonces, cambiando las variables de integración, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_0^{\infty} f(-\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(j\omega)\tau} d\tau \\ \mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Si $f(t)$ es impar, es decir, $f(-t) = -f(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_0^{\infty} f(-\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \\ &= - \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(j\omega)\tau} d\tau \\ = -\mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Sustituyendo (B.37) y (B.38) en (B.36), se obtiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega} + \mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega} \quad \text{si } f(-t) = f(t),$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega} - \mathcal{L}[f(t)]_{s=-j\omega} \quad \text{si } f(-t) = -f(t).$$

PROBLEMA B.12 Demostrar que una función $f(t)$, que tiene valor para t negativo, no se puede representar únicamente como una transformada inversa de Laplace.

Solución: puesto que la transformada de Laplace está definida sólo para $t > 0$ (esto se denomina con frecuencia *transformada unilateral de Laplace*), habrá muchas funciones con la misma forma de onda para $t > 0$ y diferente en la región $t < 0$, pero la transformada inversa de Laplace no puede representar únicamente una función $f(t)$, que esté definida para valores negativos de t .

PROBLEMA B.13 Analizar la diferencia entre la transformada de Fourier y la transformada bilateral de Laplace, definida por

$$\mathcal{L}_{\text{B}}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega. \quad (\text{B.39})$$

Solución: la transformada bilateral de Laplace, dada por (B.39), se puede expresar como

$$\mathcal{L}_{\text{BI}}[f(t)] = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (\text{B.40})$$

Para tener la transformada bilateral de Laplace, se debe encontrar un factor de convergencia $\operatorname{Re}[s] = \sigma = \sigma_1$, para la primera integral, y $\operatorname{Re}[s] = \sigma = \sigma_2$, para la segunda. Entonces, la transformada bilateral de Laplace existe para $\sigma_1 < \operatorname{Re}[s] < \sigma_2$.

Por otra parte, si la transformada de Fourier existe, entonces es válida para toda la variable real ω .

Por tanto, de estas observaciones se concluye que las transformadas de Laplace y Fourier son distintas y que ninguna es generalización de la otra.

TRES FORMAS DE LAS SERIES DE FOURIER

Forma 1: trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t).$$

Forma 2: trigonométrica

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n).$$

Forma 3: exponencial compleja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}.$$

Para todas las formas anteriores

$$f(t + T) = f(t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Fórmulas de conversión:

Para $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) = c_n^*,$$

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}, \quad |c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right),$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} [c_n], \quad b_n = -2 \operatorname{Im} [c_n],$$

$$C_n = 2 |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) = -\phi_n.$$

Para $n = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = C_0.$$

D

APENDICE

RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRIA

Resumen de las condiciones de simetría para ondas periódicas y coeficientes de Fourier.

Tipo de simetría	Condiciones	Formas de las series de Fourier	Fórmulas de los coeficientes de Fourier
Par	$f(t) = f(-t)$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$	$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt$
Impar	$f(t) = -f(-t)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$	$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt$
Media onda	$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos (2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1} \sin (2n-1)\omega_0 t]$	$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt \\ b_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin [(2n-1)\omega_0 t] dt \end{aligned}$
Cuarto de onda par	$f(t) = f(-t)$ y $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos (2n-1)\omega_0 t$	$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos [(2n-1)\omega_0 t] dt$
Cuarto de onda impar	$f(t) = -f(-t)$ y $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin (2n-1)\omega_0 t$	$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin [(2n-1)\omega_0 t] dt$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

E
APENDICE

Las funciones son periódicas con período T , $a > 0$; b , t_0 y $\omega_0 = 2\pi/T$, son constantes reales, con $n = 1, 2, \dots$.

$f(t)$	$F(\omega)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(-t)$	$F(-\omega)$
$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
$f(t) \sin \omega_0 t$	$\frac{1}{2j} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} F(\omega + \omega_0)$
$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$	$R(\omega)$
$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$	$jX(\omega)$
$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$	$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f'(t)$	$j\omega F(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$
$-jt f(t)$	$F'(\omega)$
$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$
$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$e^{- t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t < a/2 \\ 0 & \text{para } t > a/2 \end{cases}$	$a \frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\left(\frac{\omega a}{2}\right)}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_{2a}(\omega)$
$t e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{-at} \sin bt u(t)$	$\frac{b}{(j\omega + a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt u(t)$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + b^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$\frac{\cos bt}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{2a} [e^{-a \omega-b } + e^{-a \omega+b }]$
$\frac{\sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{2aj} [e^{-a \omega-b } - e^{-a \omega+b }]$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\delta'(t)$	$j\omega$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(t - t_0)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
t	$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\operatorname{sen} \omega_0 t$	$-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\operatorname{sen} \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$t u(t)$	$j\pi \delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
$\frac{1}{t}$	$\pi j - 2\pi j u(\omega)$
$\frac{1}{t^n}$	$\frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi j - 2\pi j u(\omega)]$
$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j\omega}$
$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$

Otras propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx.$$

F

APENDICE

LISTA DE SIMBOLOS

a_n	Coeficientes de Fourier	m	Masa
b_n		m_n	Momento enésimo de X
c_n		$m(t)$	Mensaje
$a(t)$	Respuesta al escalón unitario	$n(t)$	Ruido
B	Coeficiente de amortiguación	p	El operador d/dt
C	Capacitancia	$p(x), p(x, y)$	Densidad probabilística o función de frecuencia
d	Duración de un pulso		
$D_k(\xi)$	Núcleo de Dirichlet	$p_d(t)$	Pulso rectangular de amplitud unitaria y duración d
E	Contenido de energía; esperanza matemática		
E_k	Error cuadrático medio	P	Potencia
f	Frecuencia	$P(x), P(x, y)$	Función de distribución probabilística
$f(t)$	Función del tiempo	$P(\omega)$	Densidad espectral de potencia; espectro de potencia
$\ f\ ^2$	Contenido de energía de $f(t)$	R	Resistencia
$F(\omega), F(j\omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$	$R(\omega)$	Parte real de $F(\omega)$
$F_c(\omega)$	Transformada coseno de Fourier de $f(t)$	R_{11}, R_{22}, \dots	Funciones de autocorrelación
$F_s(\omega)$	Transformada seno de Fourier de $f(t)$	R_{12}, R_{21}, \dots	Funciones de correlación
$\ F\ ^2$	Contenido de energía de $F(\omega)$	$\bar{R}_{11}, \bar{R}_{22}, \dots$	Funciones de autocorrelación promedias
G	Conductancia	$\bar{R}_{12}, \bar{R}_{21}, \dots$	Funciones de correlación promedias
$h(t)$	Respuesta al impulso unitario	Si	Función seno integral
$H(p)$	Función operacional del sistema	$S_a(t)$	Función muestreadora
$H(\omega), H(j\omega)$	Transformada de Fourier de $h(t)$; función del sistema	$S_k(t)$	Suma de los primeros $(2k + 1)$ términos de la serie de Fourier de $f(t)$
i, I	Corriente	t	Tiempo
I_m	Amplitud del fasor que representa la corriente $i(t)$	T	Período de una función periódica; temperatura; tensión
k	Constante de Boltzman; constante del resorte	\bar{t}	Centro de gravedad del área bajo la curva $f^2(t)$
K	Conductividad térmica		
k^2, k_x, \dots, k_m	Constante de separación		
L	Inductancia; operador lineal		

t_r	Tiempo de ascenso	ϵ_k	Error entre $f(t)$ y $S_k(t)$
T_d	Duración efectiva del pulso	θ	Ángulo de fase
u	Deflexión del cordel o de la membrana; potencial electrostático; distribución de temperatura	λ ρ σ	Longitud de onda Densidad Desviación estándar
$u(t)$	Función escalón unitario	ϕ	Función característica; ángulo de fase; función de prueba
v, V	Voltaje		
\mathbf{V}_m	Amplitud del fasor que representa al voltaje $v(t)$	ϕ_m	Índice de modulación
x	Desplazamiento; variable	ω	Frecuencia angular
X	Variable al azar	$\bar{\omega}$	Centro de gravedad del área bajo la curva
$X(\omega)$	Parte imaginaria de $F(\omega)$		$ F(\omega) ^2$
$Y(p), Y(j\omega)$	Admitancia	$\mathcal{F}, (\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s)$	Transformada de Fourier (coseno, seno)
$Z(p), Z(j\omega)$	Impedancia	$\mathcal{F}^{-1}, (\mathcal{F}_c^{-1}, \mathcal{F}_s^{-1})$	Transformada inversa de Fourier (coseno, seno)
α	Constante de Atenuación	\mathcal{L}	Transformada de Laplace
β	Constante de fase	\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
α_n, β_n	Coeficientes de Fourier		
γ	Constante de propagación		
$\delta(t)$	Función delta o impulso unitario	\mathcal{L}_{II}	Transformada bilateral de Laplace
$\delta_T(t), \delta_{\omega_o}(\omega)$	Tren periódico de impulsos unitarios		
Δt	Dispersión en el tiempo	Re	La parte real de
$\Delta\omega$	Ancho de banda	Im	La parte imaginaria de

INDICE

A

Admitancia
operacional, 123
senoidal, 128
AM (modulación de amplitud), 156-160
señal, 156
BLU (banda lateral única), 179
DBLPS (doble banda lateral y portadora suprimida), 158
ordinaria, 156

Ancho de banda espectral, 229, 236
de un pulso cuadrado, 231
Ancho de banda, 147, 229, 236
de un filtro, 147
de una señal, 229
espectral, 229, 236

Aproximación mediante una serie finita de Fourier, 13-16

Armónico
amplitud del, 5
enésimo, 5

Azar
proceso al, 221
ruido al, 166, 169
señal al, 171-172, 175
variable al, 221
función característica de la, 224
gaussiana, 245
momento enésimo de la, 223
no correlacionada, 226
ortogonal, 226
valor cuadrático medio de, 223
valor medio de, 223
varianza de, 223

B

Banda lateral, 157
inferior, 157
superior, 157

C

Cálculo de potencia en estado estacionario, 129-131

Cálculo de ruido, 175
Característica de transmisión, 215
de una pantalla absorbente, 215-216
de una rendija, 215-216
de una rejilla de difracción, 216-217
Causalidad, 239
Centro de gravedad, 228
Circuitos eléctricos, 127
Coeficientes de Fourier
con respecto al conjunto ortonormal, 23
de ondas simétricas, 28-33
simetría de cuarto de onda, 29
simetría de media onda, 29
simetría impar, 28
simetría par, 28
evaluación de los, 7-13
por diferenciación, 45-48
por medio de la función δ , 62-65
Coeficiente de transmisión, 215
Condiciones de Dirichlet, 16, 24, 247
Condiciones de frontera, 183
Condiciones iniciales, 183
Conducción de calor, 199-205
Conjunta
función característica, 226
función de densidad, 226
función de distribución, 226
Conjunto ortonormal, 50
Constante de propagación de una línea de transmisión, 143-144
Constante de separación, 184
Contenido de potencia, 65, 172
de una función periódica, 65
de una señal, 172
Convergencia
de una sucesión de una función generalizada, 43
de la serie de Fourier, 16, 247
en un punto de discontinuidad, 17, 251
Convolución, 88-92, 133
de las funciones causales, 88, 137
ley asociativa de la, 89
ley commutativa de la, 89
Convolución en dos dimensiones, 221, 245
teorema de la, 221
Cuerda vibrante, 212
energía instantánea de la, 212
energía cinética de la, 212

D

Defasador, 149
Delta de Kronecker, 23
De las series de Fourier a la integral de Fourier, 71-73
Demodulacion, 158-159
Densidad espectral de potencia, 172-173
de una función periódica, 173
del ruido blanco, 174
del ruido termico, 174
Derivadas generalizadas, 40, 43
de una función con discontinuidades, 42-43
Descomposicion de una función en funciones pares e impares, 25
Desigualdad de Schwartz, 232, 233
Desviación de frecuencia angular de una señal de FM, 162
Desviación estándar, 223
Detección, 158
Diferenciación de las series de Fourier, 17
Difracción, 215
de Fraunhofer, 215
de rayos X por cristales, 221
patrón de, 215
por una rejilla, 216
por una rendija, 216
Discontinuidades, 16, 42
súbitas, 42
Dispersión, 228
Distribución de temperatura en estado estacionario
de una barra infinita, 202
de una barra semi-infinita, 205
de una placa semicircular, 209
Distribución del objeto, 219
Distribución de potencial de una caja rectangular, 206
Doble banda lateral y portadora suprimida (DBLPS)
señal de AM con, 158

E

Ecuación del calor
función de Green de la, 205
Ecuación de Laplace, 187, 205
Ecuación de Parseval, 114

- El laplaciano, 199, 205
 - en coordenadas cilíndricas, 206
 - en coordenadas esféricas, 206
 - en coordenadas rectangulares, 206
- El principio de incertidumbre, 228
 - de Heisenberg, 228
 - en el análisis de Fourier, 228-236
 - en el análisis espectral, 228
- Energía cinética de una cuerda vibrante, 212
- Energía
 - contenido, 94, 166, 228
 - de una señal (o función), 94, 166, 228
 - densidad de, 171
 - densidad espectral de, 94, 98
 - espectro de, 92, 94, 98, 171
- Energía instantánea de una cuerda vibrante, 212
- Enésimo armónico de una función periódica, 5
- Enésimo momento, 100, 223
 - de una función, 100
 - de una variable al azar, 223
- Error
 - cuadrático medio, 14
 - en la aproximación por una serie finita de Fourier, 13, 16
 - Error cuadrático medio, 14
 - con serie finita de Fourier, 14
 - mínimo, 14
 - Espectro de magnitud, 74, 81
 - Espectro de potencia, 171 (ver densidad espectral de potencia)
 - Espectro de potencia media, 171
 - Espectro frecuencial
 - complejo, 58
 - continuo, 71, 81
 - de una señal DBLPS, 158
 - de una señal ordinaria de AM, 157
 - de una señal MAP, 164-166
 - de una señal periódica, 52
 - de una señal senoidal modulada en FM, 162-164
 - discreto, 52, 58, 72
 - Esperanza matemática, 223
 - Evaluación de los coeficientes de Fourier, 7-13
 - por diferenciación, 45-48
 - usando la función δ , 62-65
 - Expansión de Fourier de medio intervalo, 34-35
 - Expansiones de medio intervalo, 34-35
 - series de Fourier en cosenos, 34
 - series de Fourier en senos, 34
 - Expansión en serie de Fourier de una función en un intervalo finito, 33-37
- F
- Fase
 - ángulo de, 5
 - espectro de, 58, 74
 - función de, 182
 - modulación de, (PM), 160
 - respuesta de, 142
 - retraso, 132
- Fasores, 126
 - representación fasorial de funciones senoidales, 126
- Fenómeno de Gibbs, 253
- Filtro ideal, 144-147
 - para altas frecuencias, 149
 - para bajas frecuencias, 144
 - ancho de banda del, 147
 - frecuencia de corte del, 144
 - respuesta al escalón unitario del, 145-147
 - respuesta al impulso unitario del, 144-145
 - tiempo de ascenso, 147
- Flujo de calor en estado estacionario, 187
- FM (modulación de frecuencia), 161
 - banda angosta, 180
 - desviación de la frecuencia angular de, 162
 - espectro de una senoidal modulada, 162-164
 - índice de modulación de, 161
 - señal de, 161
- Frecuencia
 - de corte, 144
 - función de, 221
 - fundamental angular, 5, 72
 - instantánea, 161, 182
 - portadora, 157
- Fórmula de la sumatoria de Poisson, 236-239
- Fórmula de inversión, 224
- Función de autocorrelación, 95
 - promedio, 166
 - transformada de Fourier de la, 98
- Función de autocorrelación promedio, 166
 - de ondas senoidales, 168
 - de señales periódicas, 167, 169
 - del ruido blanco, 174
 - del ruido térmico, 174
 - transformada de Fourier de la, 168
- Función de entrada, 121
- Función de Green, 205
 - de la ecuación del calor, 205
- Función de prueba, 37, 114
- Función de salida, 121
- Función delta, 37-43 (ver impulso unitario)
 - bidimensional, 245
 - definición de la, 37
 - derivada de la, 40
 - representación integral de la, 103
 - transformada de Fourier de la, 102, 115
 - transformada de Laplace de la, 258
- Función envolvente, 182
- Función gaussiana, 101, 234
 - transformada de Fourier de la, 235
- Función generalizada, 37, 103
 - sucesión de la, 43
 - convergencia de la, 43
 - transformada de Fourier de la, 102, 114-118, 268
- Función impar, 24
 - coeficientes de Fourier de la, 28-29
 - integración de la, 26
 - transformada de Fourier de la, 77
- Función muestreada, 151
- Función muestreadora, 62, 154
- Función propia (o característica), 124
 - de un sistema lineal, 124
- Función seno-integral, 146, 255
- Función simbólica, 37-103
- Función unitaria de Heaviside, 42 (ver escalón unitario)
- Función theta, 238
- Funciones de Bessel, 163
 - función generadora de las, 163
- Funciones características, 224
 - conjuntas, 226
 - derivadas de las, 225
- Funciones causales, 137, 239
 - convolución de las, 88, 137
 - transformada de Fourier de las, 239
- Funciones de correlación, 94-98
 - autocorrelación, 95
 - correlación, 94
 - promedio, 166-171
- Funciones de correlación promedio, 166
 - de señales reales periódicas, 168-169
 - transformada de Fourier de las, 180
- Funciones pares, 24
 - coeficientes de Fourier de las, 28
 - integración de las, 26
 - transformada de Fourier de las, 77
- Funciones periódicas, 1
 - armónico enésimo de las, 5
 - autocorrelación de, 167
 - componente fundamental de, 5
 - contenido de potencia de, 65
 - correlación de, 167
 - densidad espectral de potencia de, 173
 - espectro frecuencial complejo de, 58
 - periodo de, 1
 - series de Fourier de, 4
 - transformada de Fourier de, 110-113
- Fundamental
 - componente fundamental de una función periódica, 5
 - frecuencia angular fundamental, 5, 72
- Imagen
 - de una fuente puntual, 219
 - distribución, 219
 - formación, 215-221
- Impedancia
 - operacional, 123
 - senoidal, 128
- Impulso unitario, 37-43 (ver función delta)
- Integración de las series de Fourier, 17
- Integral de Duhamel, 141
- Integral de Fourier, 71, 74
- Integral de superposición, 138-141
- Integral del valor absoluto de una función, 16, 74, 102
- Intensidad
 - de iluminación, 219
 - distribución, 216
 - producida por una rendija, 216
 - producida por una rejilla, 216-218

- Intervalo de Nyquist, 153
- Inversa
 - transformada de Fourier, 74
 - transformada de Laplace, 256
- L
 - La ecuación de onda
 - en dos dimensiones, 189
 - en una dimensión, 183
 - La transformada de Fourier en dos dimensiones, 218-220, 227
 - Ley asociativa de la convolución, 89
 - Ley commutativa de la convolución, 89
 - Línea de transmisión, 143
 - constante de propagación de la, 143-144
 - función del sistema para la, 143
- M
 - Modulación
 - angular, 160-164
 - de amplitud (AM), 156-160
 - de amplitud de pulsos (MAP), 164
 - de fase (PM), 160
 - de frecuencia (FM), 161
 - de pulsos, 164-166
 - índice, 160-161
 - de una señal de FM, 161
 - de una señal PM, 160
 - Momento, 100, 223
 - enésimo, 100, 223
 - de una función, 100
 - de una variable al azar, 223
- N
 - Núcleo de Dirichlet, 247
- O
 - Onda incidente, 215
 - Onda plana monocromática, 215
 - Ondas periódicas, 24
 - análisis de, 24
 - Ondas viajeras, 197
 - Operacional
 - admitancia, 123
 - función del sistema en forma, 121
 - impedancia, 123
 - Operador lineal, 122
 - Ortogonalcs
 - conjunto de funciones, 5
 - funciones, 5, 57
 - definición de, 5, 57
 - variables al azar, 226
 - Ortogonalidad
 - de las funciones exponenciales complejas, 57-58
 - de las funciones seno y coseno, 5
- P
 - Pantalla absorbente, 215
- característica de transmisión de la, 215-216
 - patrón de difracción de la, 215
- Parámetros estadísticos, 223
- Período
 - definición, de, 1
- PM (modulación de fase), 160
- Portadora, 157
 - frecuencia de la, 157
- Potencial electrostático, 187
- Principio de superposición, 121
- Probabilidad
 - función de distribución de, 221 conjunta, 226
 - función de densidad de, 221 conjunta, 226
 - teoría de, 221-228
- Problemas de valor en la frontera, 183-214
- Problema de valor inicial, 197
- Propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier, 84
- Propiedad de desplazamiento en la frecuencia de la transformada de Fourier, 84
- Propiedad de escalonamiento de la transformada de Fourier, 83
- Propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, 83
- Propiedad de simetría de la transformada de Fourier, 85
- Pulsos rectangulares
 - espectro de frecuencia de, 58
- Punto de discontinuidad, 17
- R
 - Relaciones entre la entrada y la salida, 175
 - Relación entre las transformadas de Fourier y Laplace, 259
 - Representación en serie de Fourier de una función no periódica, 72-73
 - Representación integral de la función delta, 103
 - Respuesta
 - amplitud de la respuesta, 142
 - a un escalón unitario, 138
 - a un impulso unitario, 138
 - de un sistema lineal, 133
 - a una función exponencial, 123
 - en estado estacionario, 125
 - fase de la, 142
 - función de la, 121
 - Respuesta en estado estacionario de un sistema lineal, 125-127
 - senoidal, 125
 - Ruido, 166, 175
 - al azar, 166
 - blanco, 174
 - térmico, 174
 - S
 - Senoidal
 - admitancia, 128
 - función, 5
 - impedancia, 128
 - Senusoide modulada en amplitud y en ángulo, 182
 - Señales
 - al azar, 171-172, 175
 - AM (modulación de amplitud), 156
 - BLU (banda lateral única), 179
 - DBLPS (doble banda lateral y portadora suprimida), 158
 - analíticas, 182
 - ancho de banda de las, 228-229
 - contenido de energía de las, 94, 166, 228
 - de banda limitada, 151, 153, 156
 - de tiempo limitado, 154
 - duración de las, 228
 - FM (modulación de frecuencia), 161
 - de banda angosta, 180
 - incoherente, 180
 - MAP (modulación de amplitud de pulsos), 164
 - moduladas en ángulo, 160
 - no correlacionadas, 180
 - PM (modulación de fase), 161
 - recortados, 180
 - Señal FM de banda angosta, 180
 - Serie(s) de Fourier, 1, 4
 - compleja, 53
 - convergencia de las, 16, 247
 - de derivadas de funciones periódicas discontinuas, 43-45
 - de una función diente de sierra, 54
 - de una función senusoide rectificada, 55
 - de un tren periódico de impulsos unitarios, 44, 62-63
 - diferenciación e integración de las, 17
 - divergencia de las, 17
 - doble, 191
 - expansión de una función en un intervalo finito, 33-37
 - finitas, 13
 - forma compleja de las, 52-56
 - teorema de diferenciación de las, 18
 - trigonométricas, 4
 - Serie de Fourier en términos del coseno, 34
 - Serie de Fourier en términos del seno, 34
 - Series dobles de Fourier en términos del seno, 208
 - Serie finita de Fourier, 13
 - aproximación por una, 13-16
 - Separación de variables, 183
 - Sgn t (Signum t), 108
 - Simetría
 - propiedad de la transformada de Fourier, 85
 - de onda, 24
 - Simetría de cuarto de onda, 27
 - impar, 27
 - par, 27
 - coeficientes de Fourier de señales con, 29-31
 - Simetría de media onda, 27
 - coeficientes de Fourier de funciones con, 29

Simetría escondida, 27

Sistema

- causal, 137
- de formación de imágenes, 245
- de parámetros constantes, 121
- físicamente

 no realizable, 145

 realizable, 145

invariante en el espacio, 245

invariante en el tiempo, 121, 122

mecánico, 131

óptico, 215

que no introduce distorsión, 142

Sistema lineal, 121

 característica de filtro del, 144

 función propia del, 124

 respuesta a una función exponencial, 123

 respuesta al impulso unitario de un,
 133-134

 respuesta al escalón unitario de un,
 138-139

 respuesta de amplitud del, 142

 respuesta de fase del, 142

 respuesta senoidal en estado
 estacionario del, 125

 valor propio de, 124

T

Teorema de convolución

 en el tiempo, 90

 en dos dimensiones, 221

 en la frecuencia, 91

Teorema de convolución en la frecuencia,
 151, 156

Teorema de la integral de Fourier, 73

Teorema de modulación, 156

Teorema del muestreo, 151, 155

 en el dominio de la frecuencia, 154

 en el dominio del tiempo, 151

 uniforme, 151

Teorema de Parseval, 16, 65, 67, 92,
 94, 98, 173

 en dos dimensiones, 244

Teorema de translación en la frecuencia,
 156

Teorema de Wiener-Khinchine, 98, 101

Teoría de comunicaciones, 151-182

Teoría de potenciales, 205-212

Tiempo de dispersión, 228

Tiempo de subida, 147

Transformada coseno de Fourier, 79

Transformada de Fourier, 74

 aplicaciones misceláneas de la, 215-246

 bidimensional, 218-220, 227

 con $+j$, 224

 de derivadas, 86

 definición de la, 74

 de funciones especiales, 102, 120

 de funciones generalizadas, 102,
 114-118, 265

 de la función δ , 102, 115

 de la función gaussiana, 235

 del coseno, 105

 del escalón unitario, 102, 115

 del impulso unitario, 102, 115

 del seno, 105

 de una constante, 104

 de una función exponencial, 78, 105

 de una función impar, 77

 de una función par, 77

 de una función periódica, 110-113

 de un pulso rectangular, 78

de un tren de impulsos unitarios,

 111-112

de un tren de pulsos rectangulares, 113

doble, 227

en difracción y en formación de

 imágenes, 215-221

en teoría de probabilidades, 221-228

interpretación de la, 81-82

Transformada de Hilbert, 239, 242, 246

Transformada de Laplace, 256

 bilateral, 261

 definición de la, 256

 de un escalón unitario, 256

 de un impulso unitario, 258

 inversa, 256

 relación con la transformada de Fourier,
 259

 unilateral, 261

Transformadas seno de Fourier, 79-80

Transformada tridimensional de Fourier,
 221

Transmisión sin distorsión, 142-144

V

Valor cuadrático medio, 223

Valor medio, 223

Valor propio (o característico), 124

 de un sistema lineal, 124

Varianza, 223

Vibración, 189-199

 de una cuerda, 183

 de una cuerda infinita, 195-197

 de una membrana, 189

 de una viga uniforme sujetada por un
 extremo, 193

1903
1904