UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
ÁNALISIS DE SEÑALES (IE763)
TALLER DE REPASO - CAPÍTULO 1

1. Clasificación de señales

1.1. Determinar cuáles de las siguientes señales de tiempo continuo son periódicas:

a) $x(t) = 3\cos(5\pi t)$
b) $x(t) = 5\sin(6\pi t + \frac{\pi}{3})$
c) $x(t) = e^{2t}$
d) $x(t) = \cos(\pi t) + \sin(2t)$
e) $x(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$
f) $x(t) = 2\cos(\pi t) + \sin(t) + \sin(2\pi t + \pi)$

Sugerencia

Recordar la propiedad de la función exponencial para el punto c).

$$e^{a(t+T)} = e^{at} \cdot e^{aT}$$

Solución:

a) Periódica.
b) Periódica.
c) No periódica.
d) No periódica.
e) No periódica.
f) No periódica.

1.2. Determinar cuáles de las siguientes señales de tiempo discreto son periódicas:

a) $x[n] = \cos[0,01\pi n]$
b) $x[n] = \cos[\pi \frac{30}{405} n]$
c) $x[n] = \sin[3n]$
d) $x[n] = 3\cos[3n + \frac{\pi}{6}]$
e) $x[n] = 2e^{j[\frac{\pi}{6}n - \pi]}$
f) $x[n] = \cos[\frac{\pi}{2}n] - \sin[\frac{\pi}{8}n] + 3\cos[\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}]$

Solución:

a) Periódica.
b) Periódica.
c) No periódica.
d) No periódica.
e) Periódica.
f) Periódica.

1.3. Dados $x_1(t) = \cos(\frac{1}{2}t)$, $x_2(t) = \sin(\frac{4\pi}{3}t)$, y $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$:

a) Determine los periodos fundamentales T_{01} y T_{02} de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente.
b) Demuestre que $x_3(t)$ no es periódica, lo que requiere no existen enteros no nulos l_1 y l_2 tal que $T_0 = l_1 T_{01} = l_2 T_{02}$.

Solución:

a) $T_{01} = 4\pi$ y $T_{02} = \frac{3}{2}$
b) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{8\pi}$, no hay enteros que cumplan la condición.

1.4. Demostrar a partir de la Ecuación (1), que para expresiones periódicas, la expresión para el cálculo de la potencia es la Ecuación (2):

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \tag{1}$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \tag{2}$$

1.5. Dada señal $v(t)$ definida como:

$$v(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k \sin(k\omega_0 t)$$

a) Demuestre que la señal es periódica y calcule su periodo fundamental T_0.

b) Calcule de forma detallada el valor cuadrático promedio (RMS) de la señal $v(t)$ en términos de los coeficientes A_k.

Sugerencia

Recordar que la integral sobre un periodo de la multiplicación de dos funciones sinusoidales con diferentes frecuencias es igual a 0.
Recomendable dividir la sumatoria en dos

$$\sum_{k=1}^{N} A_k sin(kw_0 t) + \sum_{k=1}^{N} A_{-k} sin(-kw_0 t)$$

Solución:

a) La señal es periódica de período fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

b) $V_{RMS} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{(A_k - A_{-k})^2}{2}}$

1.6. Dada la señal $v(t)$ definida como:

$$v(t) = \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

a) Demuestre que la señal es periódica y calcule su periodo fundamental T_0.

b) Calcule de forma detallada el valor cuadrático promedio (RMS) de la señal $v(t)$ en términos de los coeficientes C_k.

Solución:

a) Es periódica de periodo fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

b) $V_{RMS} = \sqrt{\sum_{k=-N}^{N} |C_k|^2}$

Sugerencia

Utilizar la fórmula de Euler;

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)$$

Recordar las siguientes propiedades de los números complejos:

- $$|z|^2 = z \cdot z^*$$
- $$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$$
- $$(z + w)^* = z^* + w^*$$

Donde $z, w \in \mathbb{C}$ y z^*, w^* son sus conjugados.

1.7. Defina la señal $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(0.5t - 10k\right)$, donde:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

a) Una señal es anticausal si está completamente contenida en el intervalo $t \leq 0$, es decir, la señal es nula para todo $t > 0$. Determine la constante a tal que la señal $x(-2t + a)$ sea anticausal.

b) ¿Es periódica la señal $y(t)$? En caso afirmativo, determine el periodo fundamental T_0. En caso negativo, explicar por qué $y(t)$ no es periódica.

c) Determine si la señal $y(t)$ es de potencia o de energía.

Sugerencia

Para el inciso a) se recomienda usar el siguiente desmos y de manera empírica ir cambiando el valor de **a** hasta que se vea gráficamente que la señal $x(-2t + a)$ es anticausal:

Ir a Desmos

Solución:

a) $a \leq 1$

b) $T_0 = 20$

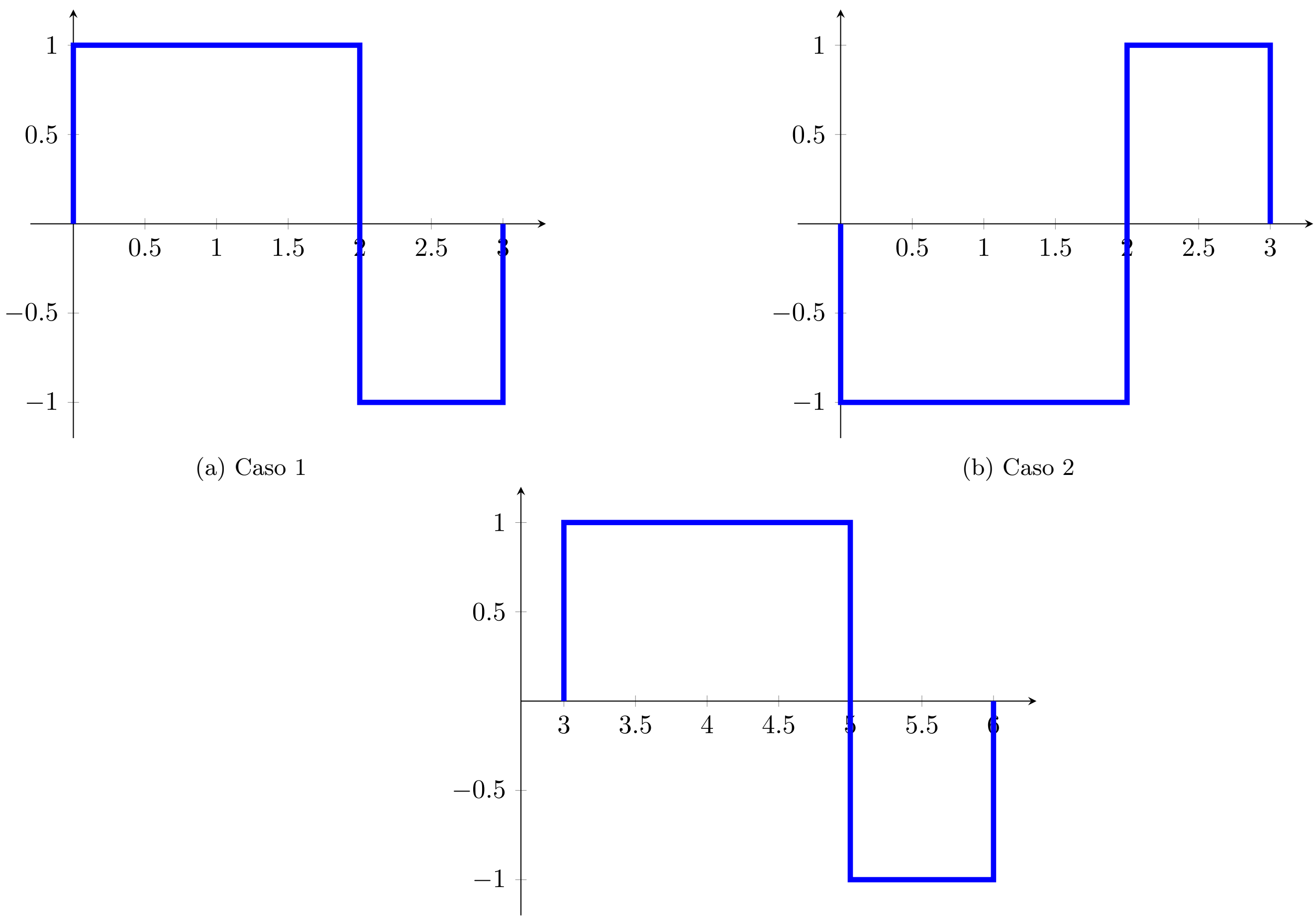
c) Señal de potencia.

1.8. Para las señales mostradas en la Figura 1, encuentre:

a) La energía de las tres señales.

b) Comente el efecto sobre la energía del cambio de signo, el desplazamiento temporal o la duplicación de la señal.

c) ¿Cuál es el efecto sobre la energía si la señal se multiplica por una constante a



(a) Caso 1

(b) Caso 2

(c) Caso 3

Figura 1: Señales en análisis del punto 1.9

Solución:

a) $E_{x1} = 3$, $E_{x2} = 3$ y $E_{x3} = 3$

1.9. Considere la señal $x(t)$ mostrada en la Figura 2. Fuera del intervalo mostrado, $x(t)$ es cero. Determine la energía de la señal E_x

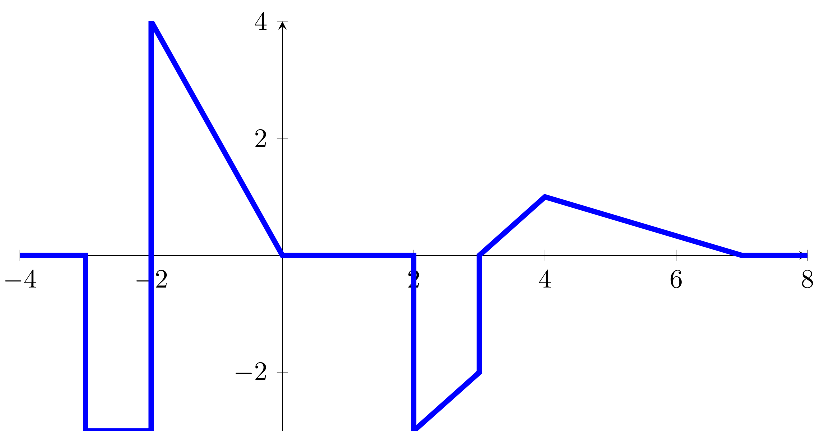


Figura 2: Señal en análisis para el punto 1.11

Solución: $E_x = \frac{82}{3}$

1.10. Calcule la energía y la potencia de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{j\omega t}$

b) $x[n] = n$

c) $x[n] = n^2 \cdot u[n]$

d) $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$

e) $x(t) = e^{2t} \cdot u(t)$

f) $x(t) = e^{-4t} \cdot u(t)$

Sugerencia

Recordar las siguientes propiedades:

$$|e^{j\omega t}|^2 = 1$$

$$\sum_{n=-N}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} n^4 = \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$$

Solución:

a) $P_x = 1$ y $E_x = \infty$

b) $P_x = \infty$ y $E_x = \infty$

c) $P_x = \infty$ y $E_x = \infty$

d) $P_x = 0$ y $E_x = 2$

e) $P_x = \infty$ y $E_x = \infty$

f) $P_x = 0$ y $E_x = \frac{1}{8}$

1.11. La Figura 3 muestra una onda diente de sierra periódica $x(t)$ con un ciclo de trabajo del 75 % y una amplitud A. Determine la energía y la potencia de $x(t)$.

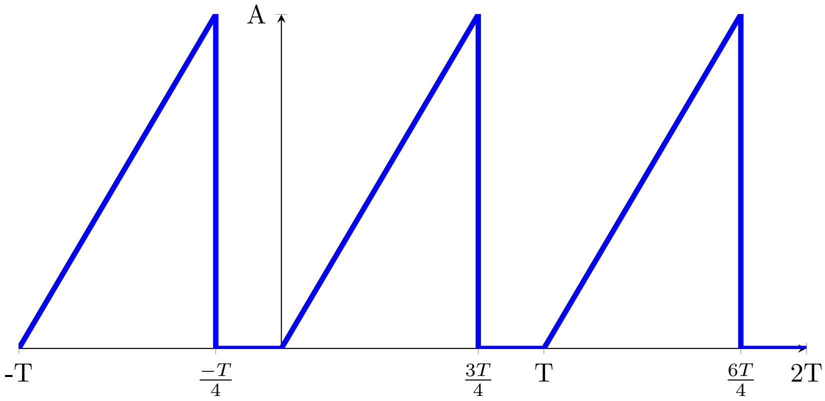


Figura 3: Señal diente de sierra con ciclo de trabajo del 75 %

Solución: $E_x = \infty$ y $P_x = \frac{A^2}{4}$

1.12. Según el diseño original, un sistema emite un impulso de 10 V de 3 segundos de duración. Se desea mejorar la salida de pulso cuadrado con un pulso de "arranque suave" que aumente a 10 voltios en incrementos de 1 V espaciados cada 20 ms. Determine la duración de la señal T para que el impulso de "arranque suave" tenga la misma energía de señal que el impulso cuadrado original.

Solución: T = 3.123 s

1.13. Determine la potencia y el valor RMS de la señal $x(t)$ mostrada en la Figura 4.

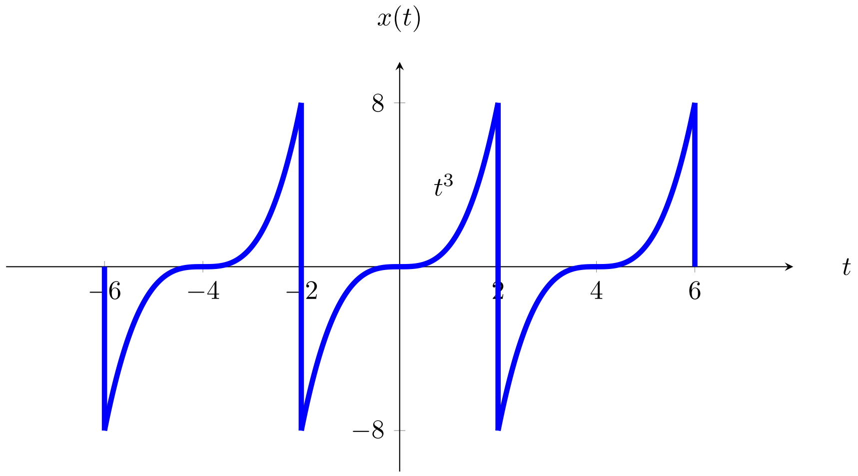


Figura 4: Señal en análisis

Solución: $P = \frac{64}{7}$ y $V_{RMS} = \frac{8}{\sqrt{7}}$

1.14. Sea la señal $x(t)$ como se expresa a continuación:

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(t - (2^n - 1))$$

donde $y(t) = u(t) - u(t-1)$ siendo $u(t)$ la función escalón.

a) Bosqueje $x(t)$ para los primeros 4 términos de la sucesión.

b) Calcule su energía.

c) Calcule su potencia.

Solución:

b) $E_x = \infty$ c) $P_x = 0$

1.15. Teniendo la señal seno causal definida como $y(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$, determine su potencia.

Sugerencia

Recordar que para una señal aperiódica se debe usar la definición general de potencia:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Solución: $P_x = \frac{P_{T_0}}{2}$

1.16. Clasificar las siguientes señales por su tipo (de potencia o de energía):

a) $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-4n)$
con $x(t) = 0 \ \forall \ |t| > 1$

b) $y(t) = ate^{-tk}(u(t) - u(t-t_0))$
con $t_0, a, k > 0$ y $u(t)$ representa la función escalón unitario.

c) $y(t) = t^n u(t)$
con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $u(t)$ representa la función escalón unitario.

d) $y(t) = \sin(\omega t)\,\text{sign}(t)$
donde $sign(t)$ representa la función signo.

Solución:

a) Señal de potencia.

b) Señal de energía.

c) Señal que no es de potencia ni de energía

d) Señal de potencia.

1.17. Si E_x es la energía de $x(t)$, calcule la energía de $Ax(\frac{t-b}{a})$ en términos de E_x, donde $a \in \mathbb{R}/\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{C}$.

Solución: $|A|^2 \cdot |a| \cdot E_x$

1.18. Calcule el valor de la potencia de la siguiente señal en términos de los coeficientes A_k y B_k con $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$

$$v(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)$$

Sugerencia

Recordar los siguientes casos dados por el principio de ortogonalidad de la funciones senos y cosenos:

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(j\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |k| \neq |j| \\ \frac{T}{2} & \text{si } |k| = |j| \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(j\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |k| \neq |j| \\ \frac{T}{2} & \text{si } k = j \\ -\frac{T}{2} & \text{si } k = -j \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\sin(j\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para todos } k \text{ y } j \end{cases}$$

Solución: $P_v = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(A_k + A_{-k})^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(B_k - B_{-k})^2$

1.19. Para el circuito mostrado en la Figura 5, determine:

a) El valor eficaz de la tensión V_{rms}

b) El valor eficaz de la corriente I_{rms}

c) La potencia aparente S_{load}

d) La potencia activa P_{load}

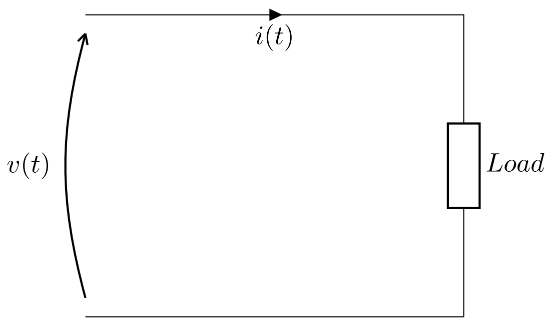


Figura 5: Circuito con carga

Donde:

$$v(t) = A\sin(2\pi 10t)\ [\text{V}]$$
$$i(t) = A\ \text{sign}(\sin(2\pi 20t))\ [\text{A}]$$
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

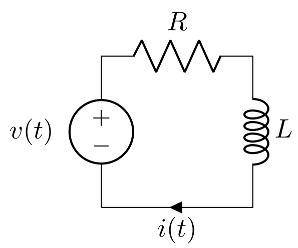
a) $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

b) $I_{rms} = A$

c) $S_{load} = \frac{A^2}{\sqrt{2}}\text{VA}$

d) $\overline{P_{load}} = 0\text{W}$

1.20. El circuito en serie RL que se enseña es excitado con una fuente de voltaje:



$$v(t) = \sum_{k=0}^{N} V_k \cos(2\pi k F_0 t)$$

Calcular:

a) $i(t)$, $P_{v(t)}$, $P_{i(t)}$.

b) V_{rms}, I_{rms}, S_{aparente} para $N = 0$.

c) V_{rms}, I_{rms}, S_{aparente} para $N = 1$.

d) V_{rms}, I_{rms}, S_{aparente} para $N = 2$.

e) Generalice el cálculo de V_{rms}, I_{rms}, S_{aparente} para cualquier valor de N.

Solución:

- $|Z_k| = \sqrt{R^2 + (2\pi k F_0 L)^2}$ y $\theta_k = \tan^{-1}(\frac{2\pi k F_0 L}{R})$

a) $i(t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{V_k}{|Z_k|}\right) \cos(2\pi k F_0 t - \theta_k)$, $P_{v(t)} = V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k^2$
y $P_{i(t)} = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{V_k}{|Z_k|}\right)^2$

b) $V_{rms} = V_0$, $I_{rms} = \frac{V_0}{R}$ y $S_{aparente} = \frac{V_0^2}{R}$

c) $V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}\right)^2}$, $I_{rms} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{|Z_1|}\right)^2}$
y $S_{aparente} = \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{|Z_1|}\right)^2}$

d) $V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{\sqrt{2}}\right)^2}$, $I_{rms} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{|Z_1|}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_2}{|Z_2|}\right)^2}$
y $S_{aparente} = \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{|Z_1|}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_2}{|Z_2|}\right)^2}$

e) $V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k^2}$, $I_{RMS} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{V_k}{|Z_k|}\right)^2}$
y $S_{aparente} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{V_k}{|Z_k|}\right)^2}$

1.21. Representar la señal $F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ en magnitud y fase. Además, graficar su parte real e imaginaria, su magnitud y su fase.

Solución: $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$ y $\theta(t) = -\tan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

1.22. Graficar la magnitud y fase de la señal $x(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)}$

2. Muestreo de señales

Muestreo de Señales

Dada una señal continua $x(t)$ con espectro limitado a $|\omega| \le \omega_m$, el **muestreo** consiste en tomar valores discretos en el tiempo:

1. Muestreo en tiempo continuo:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

- T_s: periodo de muestreo, $f_s = \frac{1}{T_s}$ frecuencia de muestreo.
- En frecuencia,

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(\omega - k\omega_s\big), \quad \omega_s = 2\pi f_s.$$

  Aquí aparecen *réplicas* o *copias espectrales* desplazadas cada ω_s.
- Para evitar aliasing, se debe cumplir

$$f_s > 2f_{\max} \quad \big(\omega_s > 2\omega_m\big).$$

2. Reconstrucción de la señal original:
Asumiendo $f_s > 2f_{\max}$, podemos recuperar $x(t)$ mediante filtrado ideal:

$$\hat{x}(t) = x_s(t) * h(t), \qquad H(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \le \omega_m, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} T_s\, e^{j\omega t}\, d\omega = T_s \frac{\sin(\omega_m t)}{\pi t}$.

3. Señal muestreada en tiempo discreto:
Definimos la secuencia

$$x[n] = x(nT_s),$$

con transformada en z o DTFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\Big(\Omega/T_s - k\omega_s\Big).$$

A partir de $x[n]$ y un *reconstructor digital–analógico* (DAC) con el mismo filtro ideal, se obtiene de nuevo $x(t)$.

2.23. Determine la frecuencia de muestreo necesaria para captar un ciclo de una señal de 60Hz utilizando únicamente 60 muestras.

Solución: $F_s = 3600\text{Hz}$

2.24. Un instrumento de medida cuenta con una capacidad de almacenamiento máxima de N muestras. Calcule la frecuencia de muestreo F_s que debe tener el instrumento de medida para que las N muestras correspondan a un período fundamental de la señal $x(t) = A\cos(60\pi t)$.

Solución: $F_s = 30N$

2.25. Para las señales $x(nT_s)$ mostradas en la Figura 6, determine la señal sinusoidal $x(t)$.

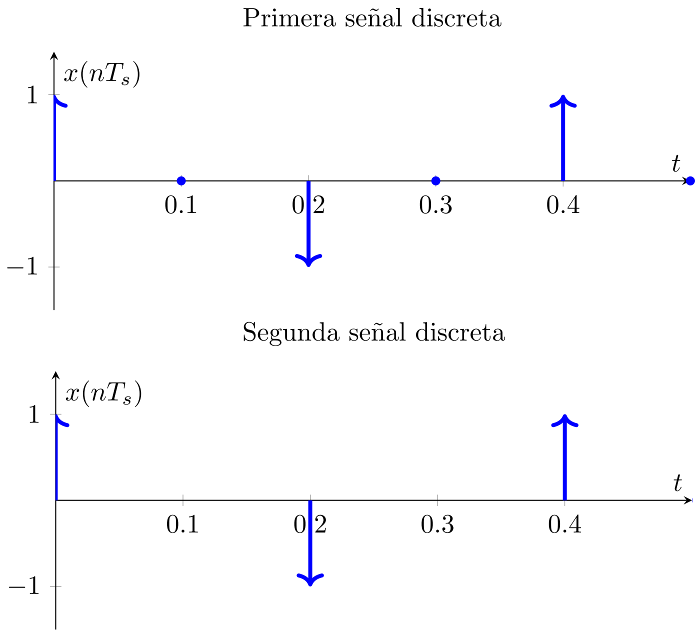


Figura 6: Señales discretas para su reconstrucción.

Solución:

a) $\cos(5\pi t)$

b) $\cos(5\pi t)$

2.26. Una señal $v(t) = 110\cos(2\pi 60t)$ es muestreada a 200 muestras/segundo. Encuentre los dos primeros alias de la señal cuando se muestrea a la frecuencia de muestreo anterior.

Solución:

a) $Alias_1 = A \cdot \cos(2\pi 260t)$

b) $Alias_2 = A \cdot \cos(2\pi 460t)$

2.27. Determine la señal de tiempo discreto resultante de muestrear las siguientes señales de tiempo continuo a una frecuencia de muestreo F_s [muestras/segundos]. Si es un alias, calcule a qué señal original corresponde. De ser original, calcule la señal que corresponde a su primer alias.

a) $x(t) = 3\cos(300\pi t)$ con $F_s = 60$Hz

b) $x(t) = 15\cos(120\pi t)$ con $F_s = 120$Hz

c) $x(t) = 0,5\sin(600\pi t)$ con $F_s = 1000$Hz

Solución:

a) Alias. $x_{original}(t) = 3\sin(60\pi t)$

b) Original. $x_{alias}(t) = 15\cos(360\pi t)$

c) Original. $x_{alias}(t) = 0,5\sin(2600\pi t)$

2.28. Un sistema de monitoreo de señales cuenta con una tarjeta de adquisición de datos de señales (DAQ), cuya velocidad de muestreo es de 200 muestras por segundo. Una señal $x(t)$ requiere capturarse y analizarse. Para la señal a capturar, determine:

a) Hasta cual componente puedo adquirir sin que exista *aliasing*.

b) Grafique la señal sin los componentes que generan aliasing

c) Determine la potencia de la señal excluyendo las componentes que generan aliasing.

La señal es $x(t) = \cos^2(120\pi t) \cdot \operatorname{sen}^2(60\pi t)$

Solución:

a) $f = 60\,\text{Hz}$

c) $P = \frac{17}{128}$

2.29. La señal que se describe requiere ser muestreada.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \sin(k\omega t)$$

donde $\omega = 2\pi F$ y $F = 60$Hz. Para lo cual se necesita:

a) La frecuencia de muestreo para que no existan aliasing en función de N.

b) Si cuento con un sistema de adquisición que toma muestras a máximo 1200 muestras por segundo, determine a partir de cuáles componentes de $x(t)$ se presentarán aliasing.

c) Fijar una estrategia para que el fenómeno anterior no se presente.

Solución:

a) $F_s = 120N$

b) $k > 10$

2.30. La señal $x(t)$ requiere ser discretizada.

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k-1} \cos(2\pi(2k-1)t)$$

En base a esto, calcule el valor de la frecuencia de muestreo F_s para garantizar que no exista aliasing, al truncar la serie en algún armónico.

Solución: $F_s = 4N - 2$

2.31. Una tarjeta DAQ registra un ciclo de una señal proveniente de un sistema eléctrico, cuya señal original es $V_1(t) = 2\cos(66\pi t) - 13\operatorname{sen}(70\pi t)$, mientras que la adquirida es $V_1[n] = 2\cos[\frac{6\pi n}{7}] - 13\operatorname{sen}[\frac{10\pi n}{11}]$

a) ¿Cuál es la frecuencia de muestreo utilizada para discretizar a $V_1(t)$?

b) Una segunda tarjeta DAQ con frecuencia de muestreo $2F_s$ muestrea del mismo sistema una segunda señal $V_2(t) = 10\operatorname{sen}(70\pi t)$. ¿Cuál es la transformación sobre la variable independiente que se debe hacer para sumar correctamente $V_1[n]$ y $V_2[n]$?

Solución:

a) $F_s = 77\,\text{Hz}$

b) $V_2[n] \rightarrow V_2[2n]$

2.32. Se desea muestrear la señal $x(t) = 100\cos(2\pi 60t) + 10\cos(2\pi 120t)$. Para garantizar una correcta adquisición de la información, se decide tomar las muestras durante 5 períodos fundamentales de la señal. Sin embargo, la memoria del dispositivo de adquisición es limitada y solo se pueden tomar un máximo de 64 muestras.

a) Determine la frecuencia de muestreo F_s necesaria para garantizar este objetivo.

b) Calcule la señal en tiempo discreto resultante. ¿Esta señal también es periódica? Justifique su respuesta.

c) Si la señal en tiempo discreto resultante corresponde a una señal original, calcule 2 alias (copias) en tiempo continuo; de lo contrario, determine a qué señal en tiempo continuo corresponde.

Solución:

a) $F_s = 768\text{Hz}$

b) $100\cos(\frac{5\pi}{32}n) + 10\cos(\frac{5\pi}{16}n)$. Además, es periódica con periodo fundamental $N_0 = 32$

c) Señal original. $x(t)_{alias1} = 100\cos(2\pi \cdot 828t) + 10\cos(2\pi \cdot 888t)$ y $x(t)_{alias2} = 100\cos(2\pi \cdot 1596t) + 10\cos(2\pi \cdot 1656t)$

3. Manejo de la variable independiente

3.33. La señal en tiempo discreto $x[n]$ está definida por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \text{ y } n = 1 \\ 0, & n = 0 \text{ y } |n| > 1 \end{cases}$$

Encuentre la señal compuesta $y[n]$, definida en términos de $x[n]$, como:

$$y[n] = x[n] + x[-n]$$

Solución:

$$y[n] = \begin{cases} 2, & n = -1 \text{ y } n = 1 \\ 0, & n = 0 \text{ y } |n| > 1 \end{cases}$$

3.34. La señal en tiempo discreto $x[n]$ está definida por

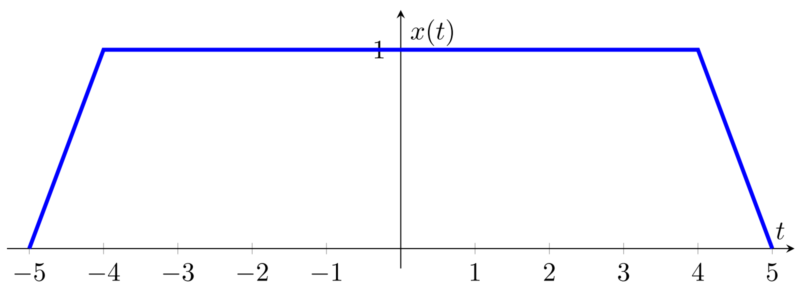
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -1, & n = -1 \\ 0, & n = 0 \text{ y } |n| > 1 \end{cases}$$

Encuentra la señal compuesta $y[n]$, definida en términos de $x[n]$, como:

$$y[n] = x[n] + x[-n]$$

Solución: $y[n] = 0$ para todos los valores enteros de n.

3.35. El pulso trapezoidal $x(t)$ de la siguiente Figura se escala en el tiempo, produciendo $y(t) = x(at)$. Dibuje $y(t)$ para $a = 5$ y $a = 0.2$.



3.36. Un pulso triangular $x(t)$ se describe en la siguiente Figura. Dibuje cada una de las siguientes señales obtenidas de $x(t)$:

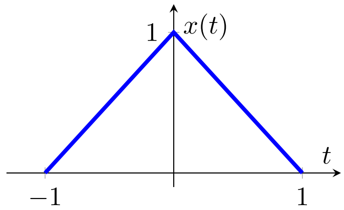
a) $x(3t)$

b) $x(3t+2)$

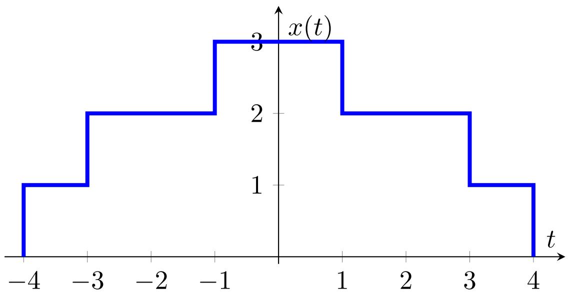
c) $x(-2t-1)$

d) $x(2(t+2))$

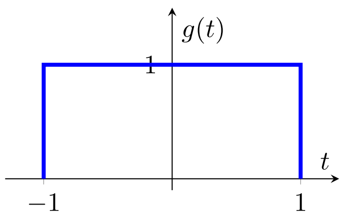
e) $x(3t)+x(3t+2)$



3.37. La Figura 7a representa un pulso $x(t)$ que puede considerarse como la superposición de pulsos rectangulares. Empezando con el pulso rectangular $g(t)$ de la Figura 7b, construya esta forma de onda y exprese $x(t)$ en términos de $g(t)$.



(a) Señal compuesta

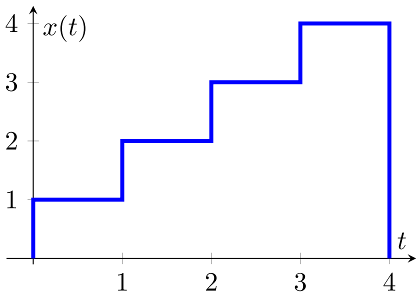


(b) Señal rectangular

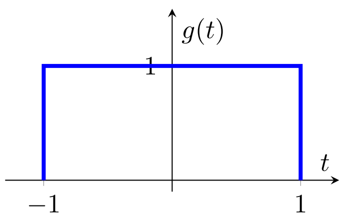
Solución:

$$x(t) = g(0.25t) + g(\frac{1}{3}t) + g(t)$$

3.38. La Figura 8a muestra una señal $x(t)$ similar a una escalera que puede verse como la superposición de pulsos rectangulares. Empezando con el pulso rectangular $g(t)$ mostrado en la Figura 8b, construya esta forma de onda y exprese $x(t)$ en términos de $g(t)$ realizando transformaciones de la variable independiente.



(a) Señal compuesta



(b) Señal rectangular

Solución:

$$x(t) = g(0.5t-1) + g(\frac{2}{3}t - \frac{5}{3}) + g(t-3) + g(2t-7)$$

4. Señales singulares

4.39. Teniendo en cuenta la señal $x(t)$ mostrada a continuación, responder:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t < 2 \\ 4 - t & 2 \le t < 4 \\ 0 & t \ge 4 \end{cases}$$

a) Reescribir usando funciones rampa y escalones unitarios.

b) Obtenga la derivada de la señal $x(t)$.

Solución:

a) $x(t) = t \cdot u(t) - 2t \cdot u(t-2) + t \cdot u(t-4)$

b) $x'(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-4)$

4.40. Sea la segunda derivada distribuida:

$$x''(t) \;=\; \delta(t) \;-\; 2\,\delta(t-1) \;+\; \delta(t-2),$$

con condiciones iniciales

$$x(0^-) = 0, \qquad x'(0^-) = 0.$$

a) Integre paso a paso en el sentido de distribuciones para encontrar $x(t)$. Expresa el resultado final en función de $u(t)$ (escalón unitario) y rampas $r(t) = t\,u(t)$.

b) Identifique claramente en qué instantes t aparecen discontinuidades de $x(t)$ y de $x'(t)$, y qué tipo (escalón o rampa).

c) Grafique esquemáticamente $x(t)$ y $x'(t)$, marcando con flechas los puntos donde surgieron las deltas originales.

Solución:

a) $x(t) = t \cdot u(t) - 2t \cdot u(t-1) + t \cdot u(t-2)$

4.41. Demostrar las siguientes expresiones:

a) $(t^3 + 3)\delta(t) = 3\delta(t)$

b) $[\sin(t^2 - \frac{\pi}{2})]\delta(t)$

c) $e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) cos(\frac{\pi t}{4}) dt = 0$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2-t) e^{-2(x-t)} dt = e^{-2(x-2)}$

4.42. Bosquejar la primera y segunda derivada de la señal mostrada en la Figura 9.

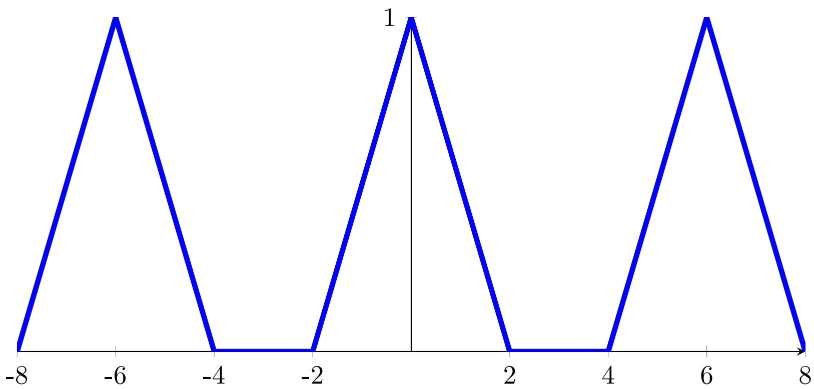


Figura 9: Tren de pulsos triangulares

4.43. La función de impulso unitario $\delta(t)$ es una de las funciones más importantes en el estudio de señales y sistemas. Esta función fue definida por primera vez en dos partes por P. A. M. Dirac como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ \infty & \text{si } t = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

La delta de Dirac $\delta(t)$ puede aproximarse mediante una función exponencial en el límite. Considere la siguiente función:

$$f(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}}$$

a) Grafique la función $f(t)$ para diferentes valores pequeños de ϵ, por ejemplo $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0.5$, y $\epsilon = 0.1$. Observe y comente el comportamiento de la función a medida que ϵ se hace más pequeño.

4.44. La derivada de la función impulso $\delta(t)$ se conoce como un doblete. Se denota por medio de $\delta'(t)$. Muestre que $\delta'(t)$ satisface la propiedad de selección:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_o) f(t) dt = f'(t_o)$$

Donde

$$f'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t) \bigg|_{t=t_0}$$