Análisis de Señales

Par de transformadas de Fourier.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Ecuación de Análisis

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Ecuación de Síntesis

Simbólicamente las expresiones se denotan por los operadores:

$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ Transformada directa.

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ Transformada Inversa.

Existencia de la Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier existe si se cumple la siguiente relación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

Es decir la integral del módulo de $f(t)$ exista.

Demostración

Para que la integral de Fourier exista, la expresión

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) \cdot e^{-j\omega t}| \, dt$ debe ser menor a Infinito.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,|e^{-j\omega t}|\,dt$$

como $\left|e^{-j\omega t}\right| = \left|\cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\,\omega t\right|$

$$\left|e^{-j\omega t}\right| = \sqrt{\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t}$$

$$\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot 1\, dt < \infty$$

Lo cual permite deducir que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty .}$$

La expresión es condición suficiente más no necesaria para la existencia de la transformada.

Es decir algunas funciones que no cumplan con la Condición $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \right\}$ Pueden contar con transformada.

La función de densidad espectral es una función compleja.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . (\cos\omega t - j \operatorname{sen}\omega t) dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \cos\omega t - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \operatorname{sen}\omega t \, dt .$$

$$\boxed{F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)}$$

Donde

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \cos\omega t \, dt$$ Parte Real

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \operatorname{sen}\omega t \, dt$$ Parte Imaginaria

Demostrar que si $f(t)$ es real, la parte Real de los Espectros es par. y la parte imaginaria es impar

$$R(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \cos(-\omega t) \, dt$$

$$R(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \cos(\omega t) \, dt$$

$$\boxed{R(-\omega) = R(\omega)}$$ Parte Real PAR.

$\cos\omega t = \cos(-\omega t)$

$\operatorname{sen}\omega t = -\operatorname{sen}(-\omega t)$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\ \text{sen}\,\omega t\, dt$$

$$X(-\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\ \text{sen}(-\omega t)\, dt$$

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\ \text{sen}(\omega t)\, dt$$

$$\boxed{X(-\omega) = -X(\omega)}$$ La parte imaginaria es IMPAR

si $F(\omega) = R(\omega) + \dot{J}X(\omega)$

$$F(-\omega) = R(-\omega) - \dot{J}X(-\omega)$$

$$F(-\omega) = R(\omega) - \dot{J}X(\omega)$$

Por lo tanto

$$\boxed{F(-\omega) = F^*(\omega)}$$

Demostrar que si $f(t)$ es real la magnitud de $F(\omega)$ es par. y su fase es impar.

$$F(\omega) = |F(\omega)|.\ e^{j\phi(\omega)}$$

$$F(-\omega) = |F(-\omega)|.\ e^{j\phi(-\omega)}$$

$$F^*(\omega) = |F(\omega)|.\ e^{-j\phi(\omega)}$$

Como $F(-\omega) = F^*(\omega)$

Por lo tanto las magnitudes y fases quedan descritas así:

$|F(-\omega)| = |F(\omega)|$ La magnitud de $|F(\omega)|$ es par

$\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$ La Fase de $\phi(\omega)$ es impar.

Demostrar que si $f(t)$ es par, sus espectros son Reales:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{par}(t) \cos\omega t \, dt - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{par}(t) . \cancel{\operatorname{sen}\omega t} \, dt}_{0}$$

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{par}(t) . \cos\omega t \, dt \quad \text{Función Real.}}$$

Demostrar que si $f(t)$ es impar sus espectros son imaginarios puros.

$$F(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{imp}(t) . \cancel{\cos\omega t} \, dt}_{0} - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_{imp}(t) . \operatorname{Sen}\omega t \, dt$$

$$\boxed{F(\omega) = j \int_{-\infty}^{+\infty} f_{imp}(t) . \operatorname{Sen}\omega t \, dt \quad \text{Función Imaginaria}}$$

Demostrar que sí $f(t)$ no es par ni impar $F(\omega)$ contará con parte Real e Imaginaria.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \cos\omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \operatorname{sen}\omega t \, dt$$

Y su Magnitud y Fase se describen como se muestra:

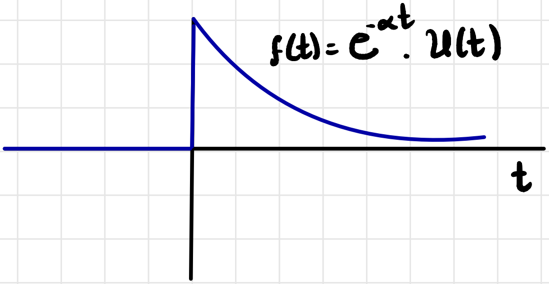
$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(X(\omega)/R(\omega)\right)$$

Ejemplo.

Determine con qué clase de Armónicos cuenta la señal $f(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$. y demuéstrelo.



Respuesta:
Los armónicos son complejos con Parte Real y Parte Imaginaria lo anterior dado que f(t) no cuenta con simetría de onda par ni impar

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

Además, dado que f(t) es Real, la magnitud de sus armónicos son pares y su fase es impar

$$F(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

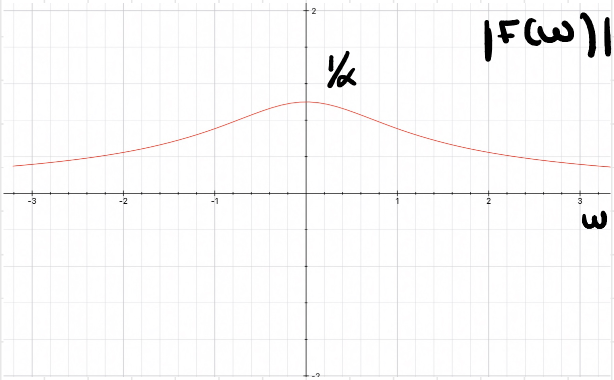
$$F(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t}\, dt$$

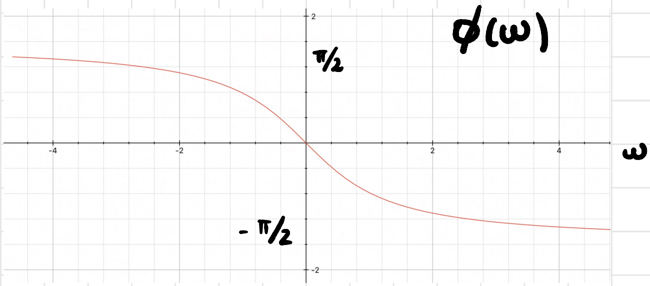
$$F(\omega) = -\frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \left\{ e^{0} - 0 \right\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega/\alpha)$$





Ejercicio.

Determine qué clase de armónicos tiene la señal $f(t)$.

$$\boxed{f(t) = e^{-at^2} \quad \text{para} \quad a > 0.}$$

Sustente su discurso.

Propiedades de la transformada de Fourier.

Propiedad de Linealidad.

Si $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$

$f_2(t) \longrightarrow F_2(\omega)$

$\vdots$

$f_n(t) \longrightarrow F_n(\omega)$

y $a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes. Entonces:

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t)\} =$$

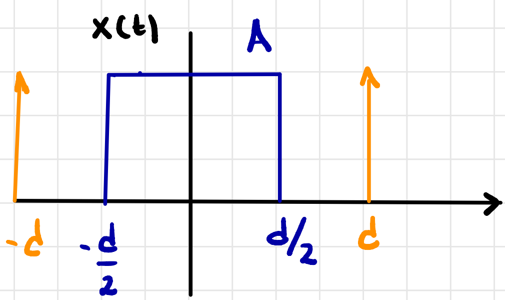
$$a_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\} + \cdots + a_n \{f_n(t)\} =$$

$$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \cdots a_n F_n(\omega)$$

Generalizando

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} a_n F_n(\omega)} \checkmark$$

Ejemplo



Hallar la densidad espectral de x(t).

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{A\,Rect_d(t) + \delta(t-d) + \delta(t+d)\} =$$

Aplicando la propiedad de linealidad tenemos:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{A\,Rect_d(t)\} + \mathcal{F}\{\delta(t-d)\} + \mathcal{F}\{\delta(t+d)\}$$

Analizando término a término.

$$A\,Rect_d(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Ad\,Sa(\omega d/2)$$

$$\delta(t-d) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega d}$$

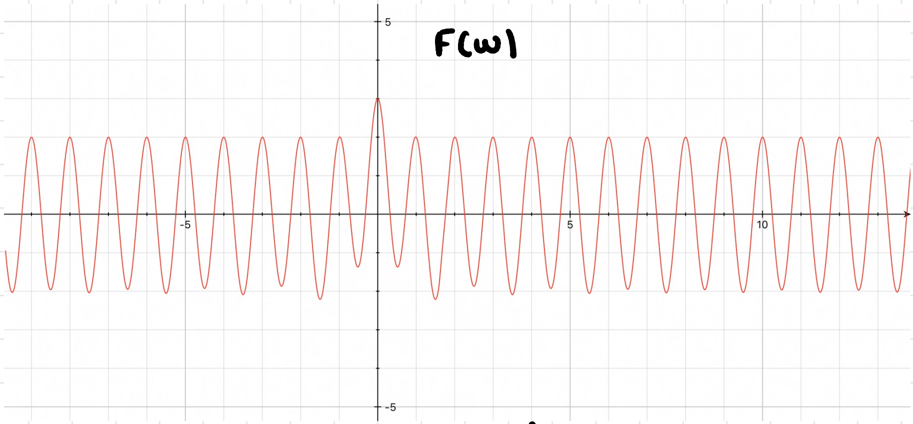
$$\delta(t+d) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega d}$$

Se tiene.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = Ad.Sa(\omega d/2) + e^{-j\omega d} + e^{j\omega d}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = A.d\,Sa(\omega d/2) + \{e^{j\omega d} + e^{-j\omega d}\}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = A.d\,Sa(\omega d/2) + 2.\cos\omega d$$



Nótese que por ser una señal real, la Magnitud de sus espectros es PAR. y Por ser $x(t)$ PAR, sus armónicos son reales.

Propiedad de Escalonamiento.

Si $f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\omega)$ y a es una constante

$$f(at) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{|a|} F(\omega/a)$$

Demostración.

Para $a>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t} dt$$

$x = at$

$dx = a\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{a}.dx$

los límites siguen igual

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\, e^{-j\omega x/a} . \frac{dx}{a}$$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-j(\omega/a)x} .\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t}.dt = \frac{1}{a}.F(\omega/a)$$

Para $a<0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t} dt$$

$x = at$

$dx = a\,dt$

$dt = \frac{1}{a} dx$

límites: $t \to -\infty \Rightarrow x \to +\infty$

$t \to +\infty \Rightarrow x \to -\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t}\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x).e^{-j\omega\frac{x}{a}}.\frac{dx}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{|a|}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-j\frac{\omega}{a}.x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{|a|}.F(\omega/a)$$

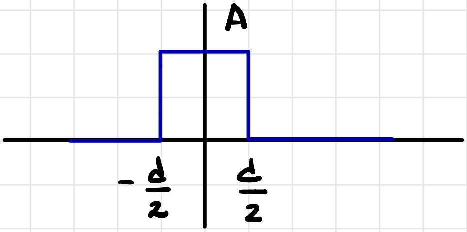
Para valores $a>0$ y $a<0$, la expresión generalizada.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at).e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{|a|}.F(\omega/a)$$

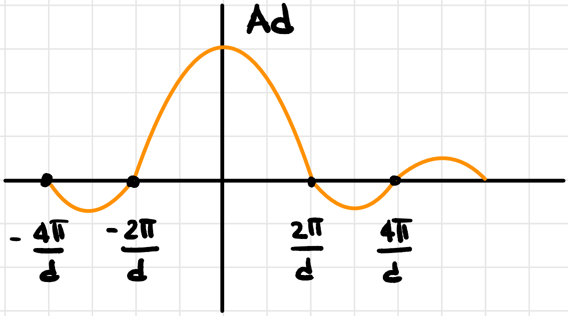
Ejemplo: encontrar la función de densidad espectral de las siguientes funciones a) $x(t) = A\,Rect_d(t)$
b) $x(t/2) = A\,Rect_d(t/2)$ y c) $x(2t) = A\,Rect_d(2t)$

a)

$x(t) = A\,Rect_d(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Ad.Sa(\omega d/2)$



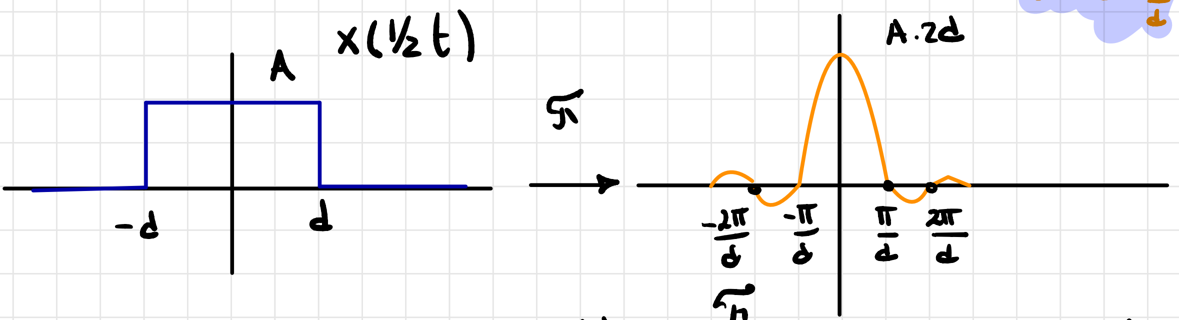
$\xrightarrow{\mathcal{F}}$



b) Para la función $x(\frac{1}{2}t)$, se generará una expansión por 2 a la función $x(t)$.

$\omega d = \pm k\pi$

$\omega = \pm \frac{k\pi}{d}$



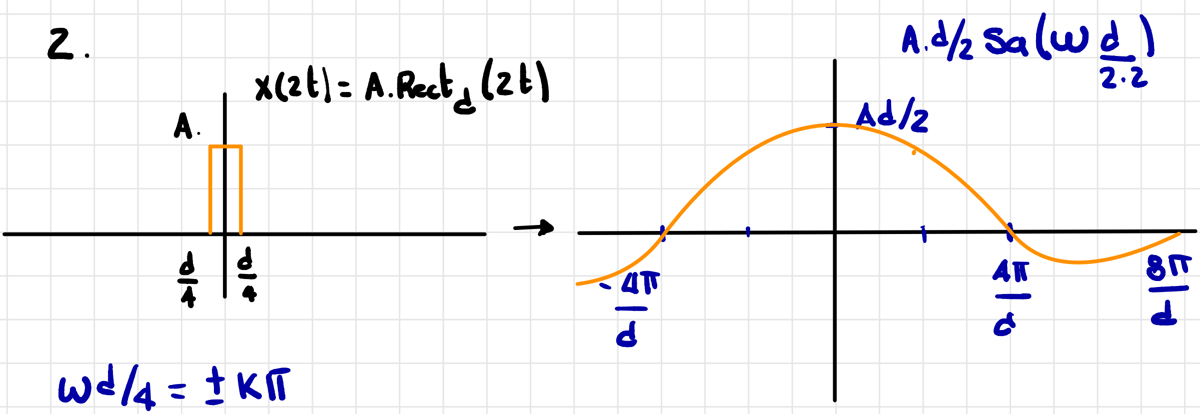
$$A\,Rect_d\left(\tfrac{1}{2}t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} A.\,2d\; Sa(\omega\, 2d/2)$$

Recordar $\quad x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \cdot F(\omega/a)$

Nótese que al expandirse la señal $x(t)$ por 2, $a = \frac{1}{2}$ sus espectros aumentan en amplitud x 2 y se comprimen en frecuencia a la mitad.

c) Para la función $x(2t)$, se generará la correspondiente compresión en $x(t)$.

2.



$\omega d/4 = \pm k\pi$

Nótese que si se genera una compresión de la señal en un factor de 2 ($a=2$), sus espectros se reducen en Amplitud en el factor 2, y se expanden en el MISMO factor

Finalmente, con relación a la propiedad de escalonamiento de la transformada de Fourier. $f(at)$ representa la función $f(t)$ Contraida en un factor a. De forma similar $F(\omega/a)$ representa la función $F(\omega)$ expandida por el mismo factor.

La propiedad de escalonamiento, afirma que la contracción/ de una señal en el tiempo equivale a la expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa.

Ejemplo

Demostrar que $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$

Por la propiedad de escalonamiento tenemos:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F(\omega/a)$$

si $a=-1$.

$$\mathcal{F}\{f(-1.t)\} = \frac{1}{|-1|} \cdot F(\omega/-1) = F(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$$

Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

Dice que si conocemos la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces su versión desplazada en un valor t_0, tendrá como transformada la misma función $F(\omega)$ pero desfasada en t_0. e^{jt_0}

Si conocemos $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

Entonces $f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

$f(t+t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \cdot e^{+j\omega t_0}$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Haciendo $x = t - t_0$ y $dx = dt$

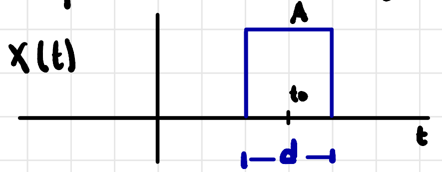
Los límites permanecen iguales

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega(x+t_0)} \cdot dx$$

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega x} \cdot dx \cdot e^{-j\omega t_0}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}}$$

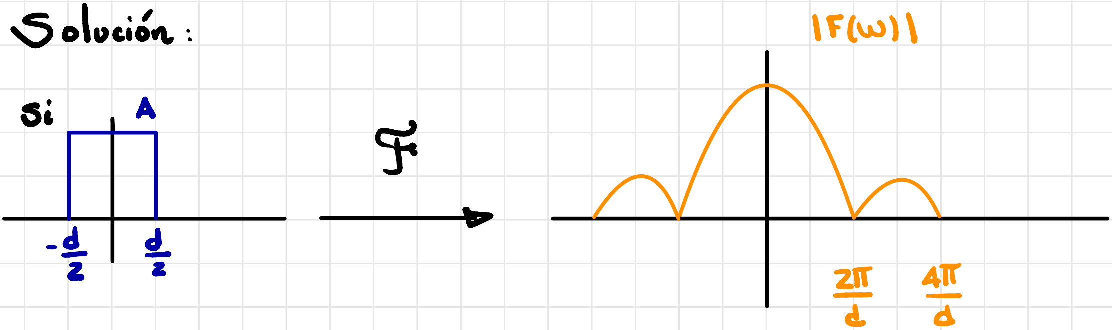
Ejemplo: Hallar la transformada de Fourier de $x(t)$.



$X(t) = A\,\text{Rect}_d(t-t_0)$

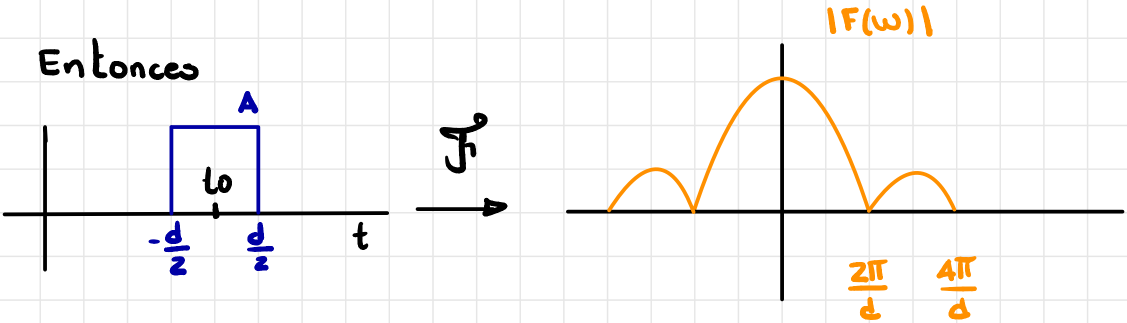
Solución :

Si

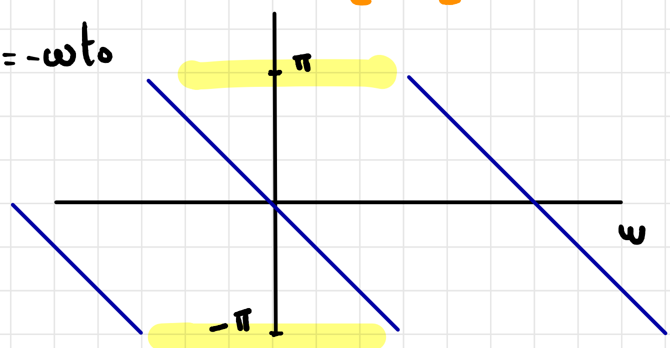


$$A\,Rect_d(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} A d\,Sa(\omega d/2)$$

Entonces



$\phi(\omega) = -\omega t_0$



$$A\,Rect_d(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} A.d.Sa(\omega d/2)\,e^{-j\omega t_0}$$

Propiedad de desplazamiento en frecuencia.

Dice que si conocemos la transformada de Fourier de una función $f(t)$, entonces la transformada de Fourier de la función $f(t)$ multiplicada por un desfase $e^{jw_0 t}$ su transformada de Fourier es la función $F(w)$ desplazada en un factor $-w_0$.

Si $\quad f(t) \longrightarrow F(w)$

$\rightarrow \quad f(t)\, e^{jw_0 t} \longrightarrow F(w - w_0)$

ó $\quad f(t)\, e^{-jw_0 t} \longrightarrow F(w + w_0)$

Demostración

$$\mathcal{F}\{ f(t).e^{+jw_0 t} \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\, e^{jw_0 t} . e^{-jwt}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{ f(t).e^{+jw_0 t} \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\, e^{-j(w - w_0)t}\, dt$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{ f(t).e^{+jw_0 t} \} = F(w - w_0)}$$

$$\cos w_0 t = \frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}$$

Ejemplo:

Hallar la transformada de Fourier de $f(t).\cos w_0 t$

$$\mathcal{F}\{ f(t).\cos w_0 t \} = \mathcal{F}\{ f(t).\left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2} \right) \}$$

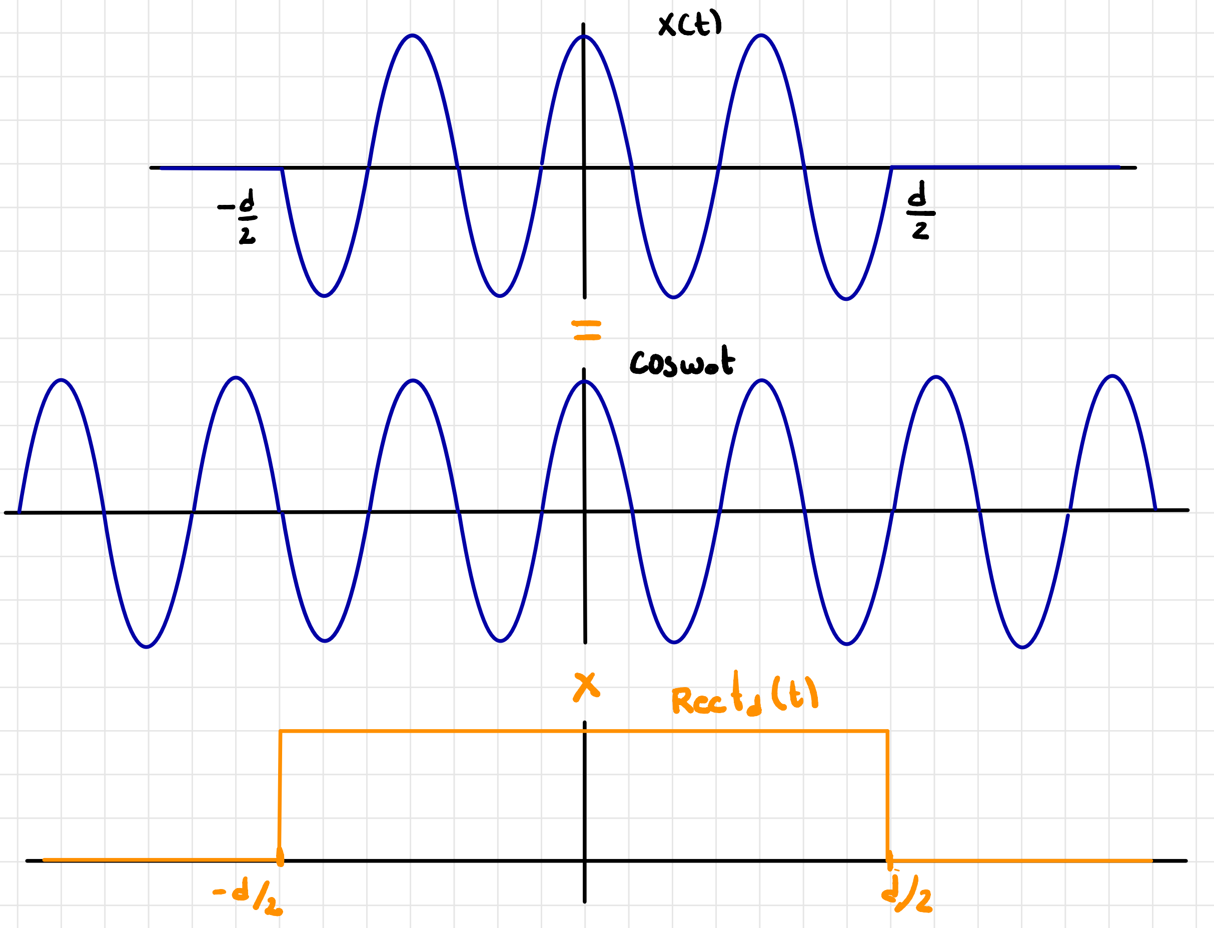
$$\mathcal{F}\left\{ f(t).\cos w_0 t \right\} = \mathcal{F}\left\{ \frac{f(t)\, e^{jw_0 t}}{2} + \frac{f(t)\, e^{-jw_0 t}}{2} \right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{ f(t).\cos w_0 t \right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{ f(t)\, e^{jw_0 t} \right\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{ f(t).\, e^{-jw_0 t} \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{ f(t).\cos w_0 t \right\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)}$$

Ejemplo

Hallar las componentes frecuenciales de la señal x(t)



Nótese que x(t) (trozo de un $\cos\omega_0 t$) es la multiplicación de un coseno perpetuo de frecuencia ω_0 y una función rectangular de ancho d.

$$X(t) = Rect_d(t) \cdot \cos\omega_0 t$$

Se requiere $\mathcal{F}\{X(t)\}$

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \mathcal{F}\{Rect_d(t) \cdot \cos\omega_0 t\}$$

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \mathcal{F}\left\{Rect_d(t) \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)\right\}$$

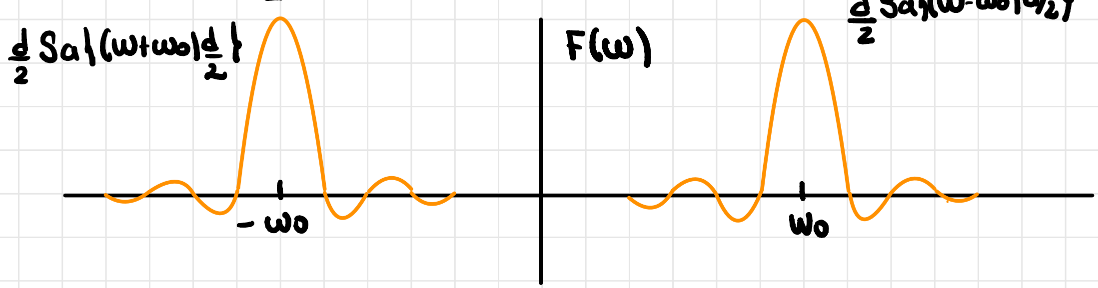
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{Rect_d(t)\, e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{Rect_d(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}\}$$

$$\mathcal{F}\{Rect_d(t)\, e^{j\omega_0 t}\} = d\,Sa\{(\omega-\omega_0)\tfrac{d}{2}\}$$

$$\mathcal{F}\{Rect_d(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}\} = d\,Sa\{(\omega+\omega_0)\tfrac{d}{2}\}$$

Entonces la transformada de la función $x(t) = Rect_d(t) \cdot \cos\omega_0 t$ es:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{d}{2} Sa\{(\omega-\omega_0)\tfrac{d}{2}\} + \frac{d}{2} Sa\{(\omega+\omega_0)\tfrac{d}{2}\}$$



Ejercicio:

Determine las formas de las componentes frecuenciales para los siguientes casos:

a) el trozo de la función $\cos\omega_0 t$ es la mitad de la que se enseña en el ejercicio anterior.

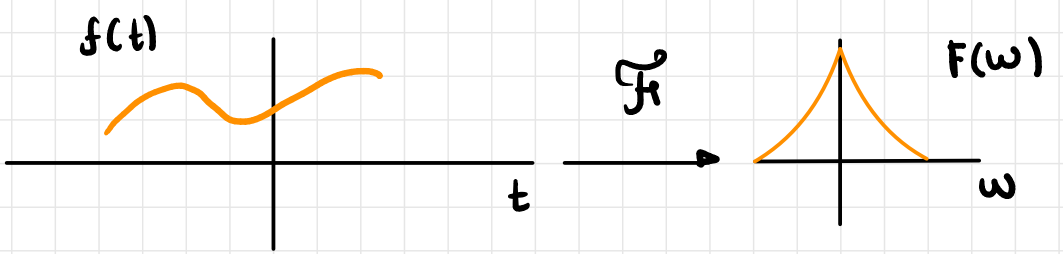
b) el trozo de la función $\cos\omega_0 t$ es 3 veces más grande del que se enseña en el documento anterior.

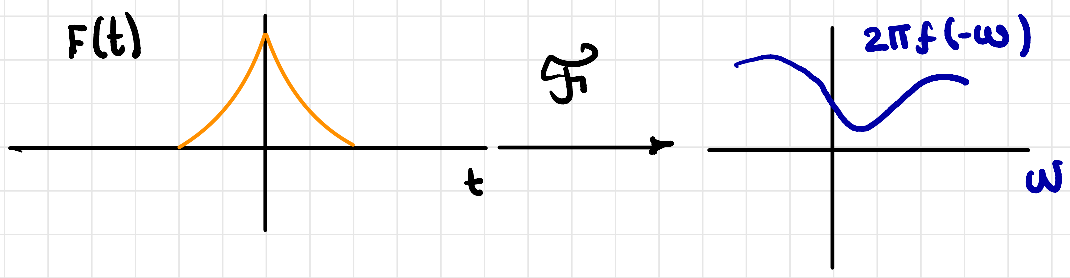
Discuta el resultado.

Propiedad de la simetría de la transformada de Fourier.

Si una función $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$.

$$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$$





Demostración.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).\, e^{+j\omega t}\, d\omega$$

se hace $t=\omega$ y $\omega = t$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t).\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$2\pi f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t).\, e^{j\omega t}\, dt$$

Multiplicando a ω por -1.

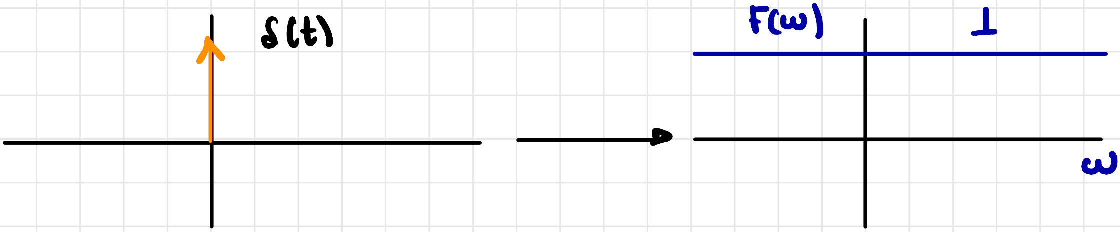
$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t).\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)}$$

Ejemplos

1. Hallar la transformada de una función $\delta(t)$.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$



2) Hallar la transformada de la función $x(t) = 1$.

Hacemos uso de la propiedad de simetría.

Si $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$

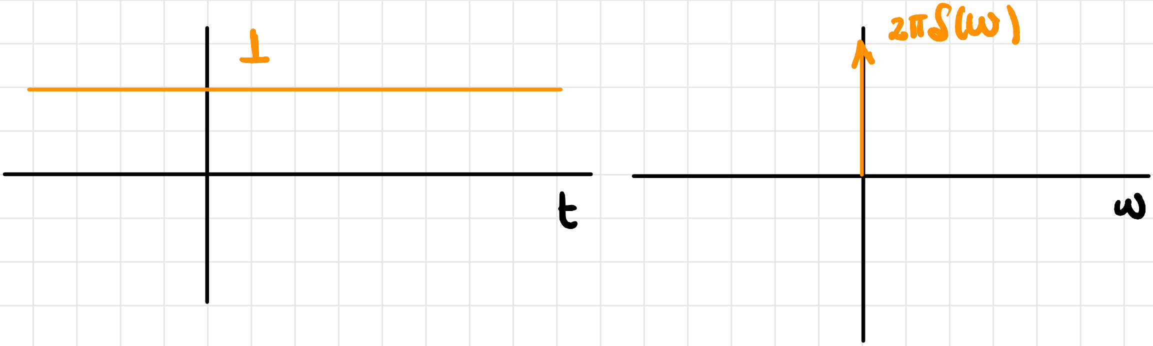
Si $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega)$

Como $\delta(\omega)$ es par $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$

entonces.

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$



Ejercicio:

Hallar la transformada de $\boxed{f(t) = \dfrac{\text{sen}(at)}{\pi t}}$

Cómo se observa la función es una especie de función Sa, utilizaremos la propiedad de la simetría para solucionarlo.

Sabemos que:

$$\text{Rect}_d(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} d\,\text{Sa}(\omega d/2)$$

$$\frac{d.\,\text{Sen}(t\,d/2)}{d/2\; t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\text{Rect}_d^t(-\omega)$$

Función Par

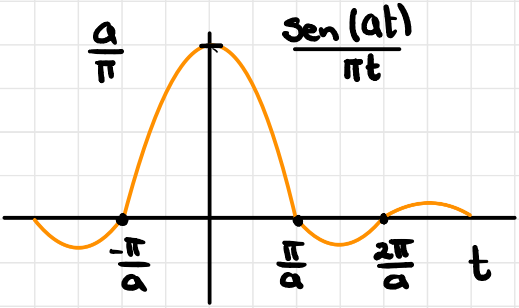
$$2\,\frac{\text{Sen}(t\,d/2)}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\text{Rect}_d^t(\omega)$$

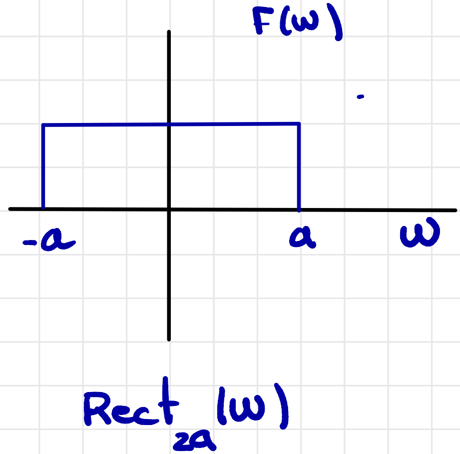
Dividiendo por 2π. tenemos

$$\frac{\text{sen}(t\,d/2)}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Rect}_d(\omega)$$

Si hacemos $d/2 = a$ entonces $d = 2a$

$$\text{sen}(at)/\pi t \longrightarrow \text{Rect}_{2a}(\omega).$$





$$\frac{\operatorname{sen}(at)}{\pi t} = \frac{a}{\pi}\,\mathrm{sa}(at)$$

$$at = \pm K\pi$$
$$t = \pm K\pi/a$$

Ejeecicio:

Hallar la transformada del $\cos w_0 t$ (Coseno Perpetuo)

Hallar los Componentes frecuenciales del $\operatorname{Sen} w_0 t$ Perpetuo.

Propiedad de la derivada de la transformada de Fourier.

Si una función $f(t)$, tiene como transformada $F(w)$ entonces requerimos la transformada de $f'(t)$

$$\text{Si} \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$
$$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} JwF(w)$$

Demostración.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) . e^{-J\omega t} dt$$

Recordando que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) . \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \phi'(t) dt$$

Tenemos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) . e^{-J\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \frac{d\{e^{-J\omega t}\}}{dt} dt$$

$$F(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \{-j\omega . e^{-J\omega t}\} dt$$

$$F(\omega) = +J\omega . \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-J\omega t} dt$$

$$\boxed{F(\omega) = J\omega . F(\omega)}$$

La anterior propiedad puede ser generalizada así:

si $f(t) \longrightarrow F(\omega)$

$f^n(t) \longrightarrow (J\omega)^n F(\omega) \qquad n = 1, 2 . .$

Ejercicio

Hallar los espectros de la derivada del $\cos\omega_0 t$ utilizando la propiedad anterior.

si $\cos w_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$$\frac{d(\cos w_0 t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\left(\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\omega\,\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\omega\,\delta(\omega+\omega_0)$$

Recordar la propiedad.

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$
$$f(t).\delta(t-t_0) = f(t_0).\delta(t-t_0)$$

$$\boxed{\frac{d(\cos w_0 t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\omega_0.\delta(\omega-\omega_0)-j\pi\omega_0\,\delta(\omega+\omega_0)}$$

Validación

$$\frac{d\cos w_0 t}{dt} = -w_0 \operatorname{sen} w_0 t$$

$$\mathcal{F}\{-w_0 \operatorname{sen} w_0 t\} = -w_0\,\mathcal{F}\{\operatorname{sen} w_0 t\}$$

$$\mathcal{F}\{-w_0.\operatorname{sen} w_0 t\} = -\omega_0\{-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{-w_0.\operatorname{sen} w_0 t\} = j\pi\omega_0\,\delta(\omega-\omega_0)-j\pi\omega_0\,\delta(\omega+\omega_0)\}}$$

Propiedad de la Integral de la transformada Fourier.

Si $f(t) \longrightarrow F(\omega)$ $\quad \omega\neq 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = F(0) = 0$

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right) \longrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

Demostración

llamamos a la $\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$, $\phi(t)$

y su derivada $\phi'(t)$ que es igual $f(t)$

La transformada de $\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$ es $\phi(\omega)$

$$\phi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \phi(\omega)$$

$$\phi'(t) \longrightarrow F(\omega)$$

$$\phi'(t) \longrightarrow j\omega\,\phi(\omega)$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt \right\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \qquad \omega \neq 0.}$$

Propiedad de la derivada en frecuencia.

si $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$$jtf(t) \longrightarrow F'(\omega).$$

Demostración

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-j\omega t} dt$$

$$F'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-j\omega t} dt \right\}$$

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega} \left\{ f(t) . e^{-j\omega t} \right\} dt$$

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \frac{d}{d\omega} \left\{ e^{-j\omega t} \right\} dt$$

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-jt) . e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{F'(\omega) = \mathcal{F} \{ (-jt) . f(t) . \}}$$

Generalizando

$$\text{Si} \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

$$(-jt)^n f(t) \longrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

Ejercicio.

Hallar la transformada de Fourier de $x(t) = t$.

$$t \xrightarrow{\mathfrak{F}} ?$$

Recordando la Propiedad de la derivada en frecuencia.

$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\omega)$$

$$-jtf(t) \longrightarrow F'(\omega)$$

$$1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$-jt \times 1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} 2\pi\delta'(\omega)$$

$$-j.jt \xrightarrow{\mathfrak{F}} j2\pi\delta'(\omega)$$

$$t \xrightarrow{\mathfrak{F}} j2\pi\delta'(\omega)$$

$$\boxed{\mathfrak{F}\{t\} = j2\pi\delta'(\omega)}$$

Hallar la transformada de t^2

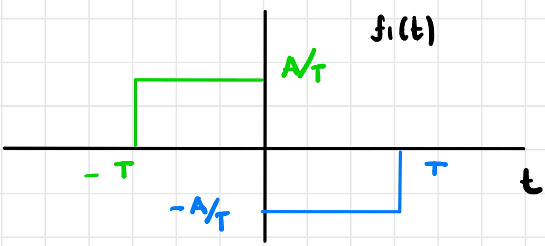
$\mathfrak{F}\{t^2\}$

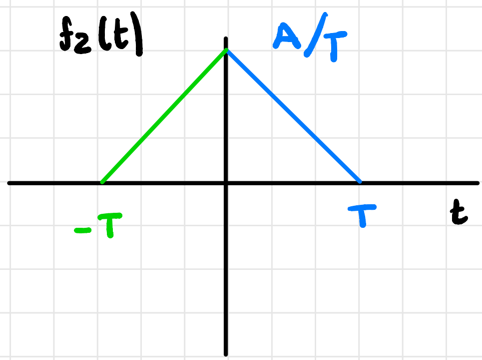
TALLER CLASE.

1. Si conocemos la transformada del $\cos(w_0 t)$ determine la transformada del $\cos(2w_0 t)$ utilizando la propiedad de escalonamiento.

2. Si conocemos la transformada del $\cos(w_0 t)$, determine la transformada de Fourier del $\operatorname{sen}(w_0 t)$ utilizando la propiedad de la derivada.

3. Hallar la transformada de Fouriee del pulso $f_1(t)$.





4. El Pulso $f_2(t)$ es la integral de $f_1(t)$, utilizar el Resultado del ejercicio anterior, para calcular los espectros de $f_2(t)$.

5. Hallar la transformada de t^2.