## Manipulaciones simples de las señales

En esta sección se tratarán las manipulaciones simples sin distinción de que sean señales continuas o discretas.

## Transformación de la variable independiente -tiempo-

### Desplazamiento en tiempo

Una señal $x(t)$ ó $x(n)$, se puede desplazar en el tiempo reemplazando la variable independiente $t$ ó $n$ por $(t-k)$, donde $k \in \mathbb{R}$ ó por $(n-k)$ donde $k \in \mathbb{Z}$. si $K$ es un número negativo el desplazamiento genera un adelanto de la señal, si $K$ es un número positivo, el desplazamiento hará que la señal se atrase un valor $|K|$.

ejemplo: dada la señal

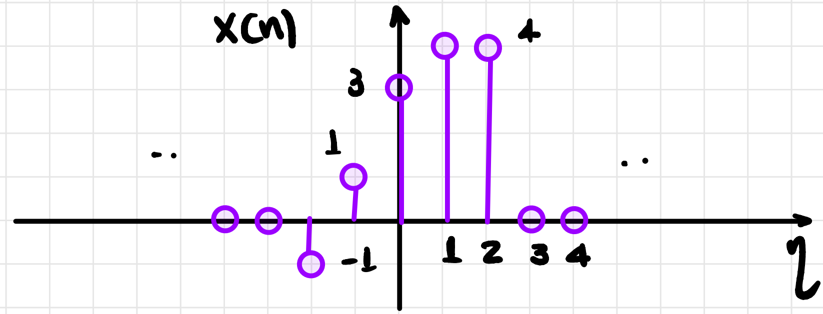
$$x(n) = \{\cdots 0, -1, 1, \underset{\uparrow}{3}, 4, 4, 4, 0 \cdots\}$$

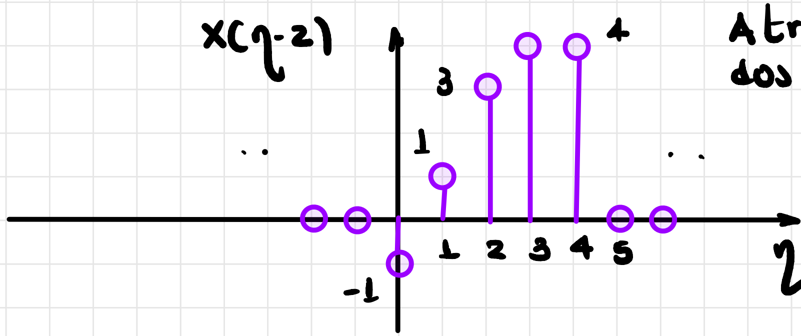
Obtenga los siguientes $x(n-2)$ y $x(n+1)$

$$x(n-2) = \{\cdots 0, \underset{\uparrow}{-1}, 1, 3, 4, 4, 4, 0 \cdots\}$$

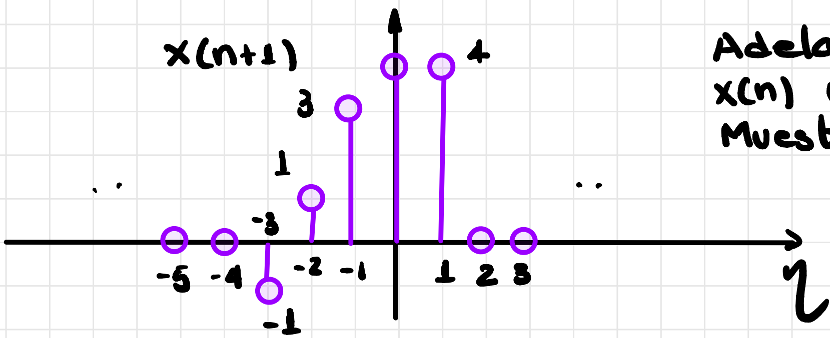
$x(n+1) = \{ \cdots 0, -1, 1, 3, \underset{\uparrow}{4}, 4, 4, 0 \cdots \}$

Graficamente tenemos:



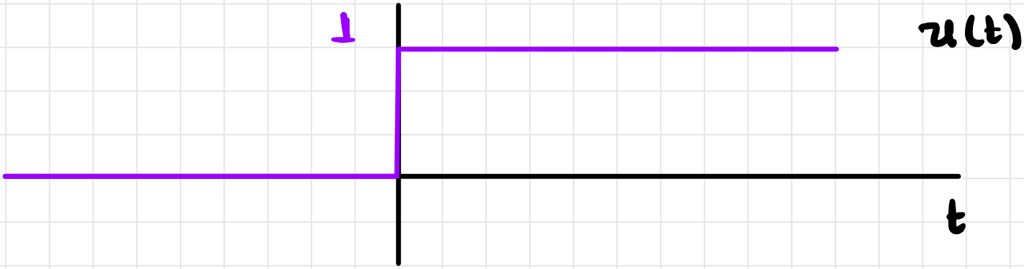

Atraso de x(n) dos muestras

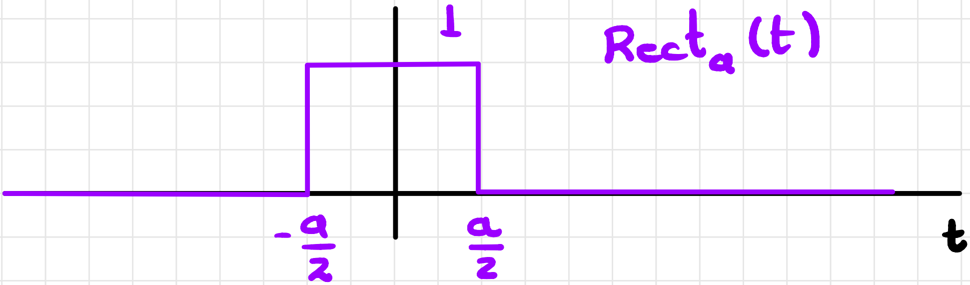



Adelanto de x(n) una Muestra

Ejemplo:

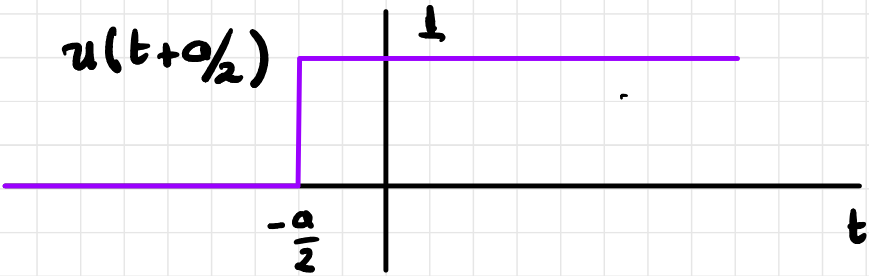
Dada la señal $u(t)$. generar a partir de ella la función $Rect_a(t)$



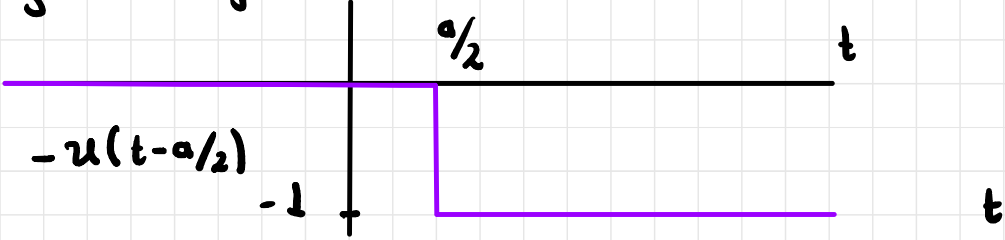




Solución

① Adelantamos $u(t)$ un valor de $a/2$



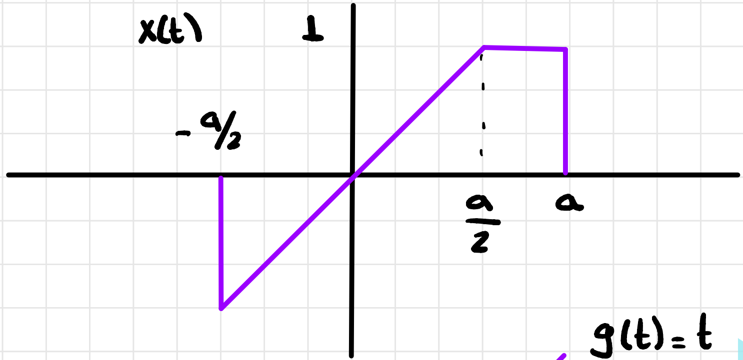

② Atrasamos otra $u(t)$ un valor de $a/2$ y negamos la función.



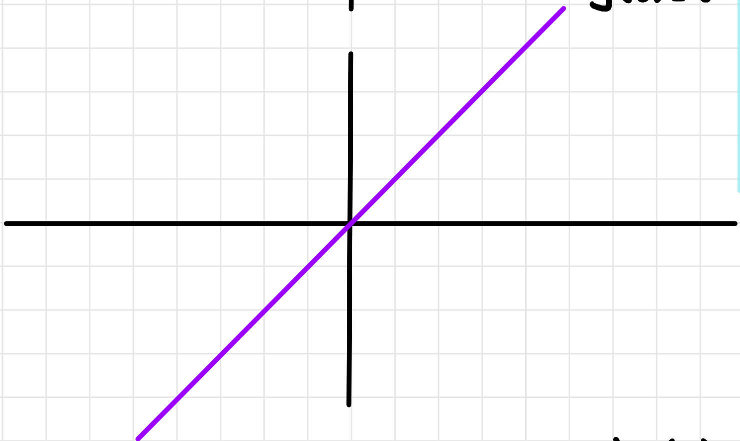

③ Sumamos las $u(t)$ y generamos la función $Rect_a(t)$

Ejemplo:

Se requiere $x(t)$ en función de $\mu(t)$.



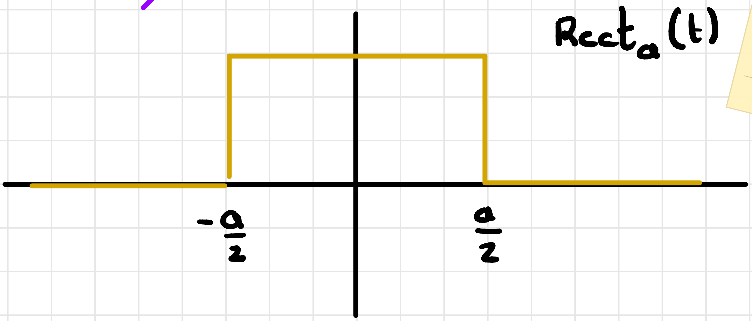

$g(t) = t$



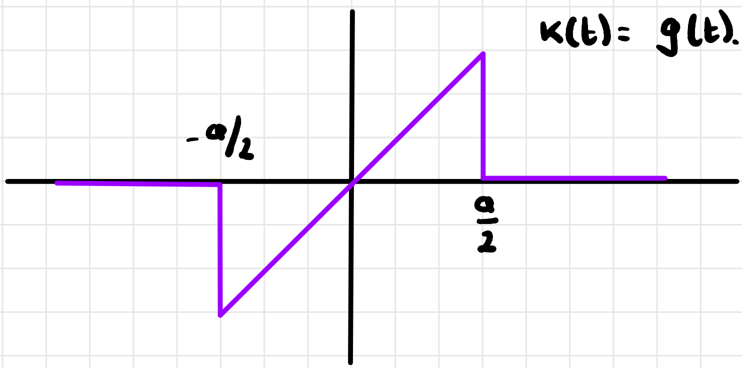
se reconoce la función $g(t) = t$

Se segmenta con la función $Rect_a(t)$

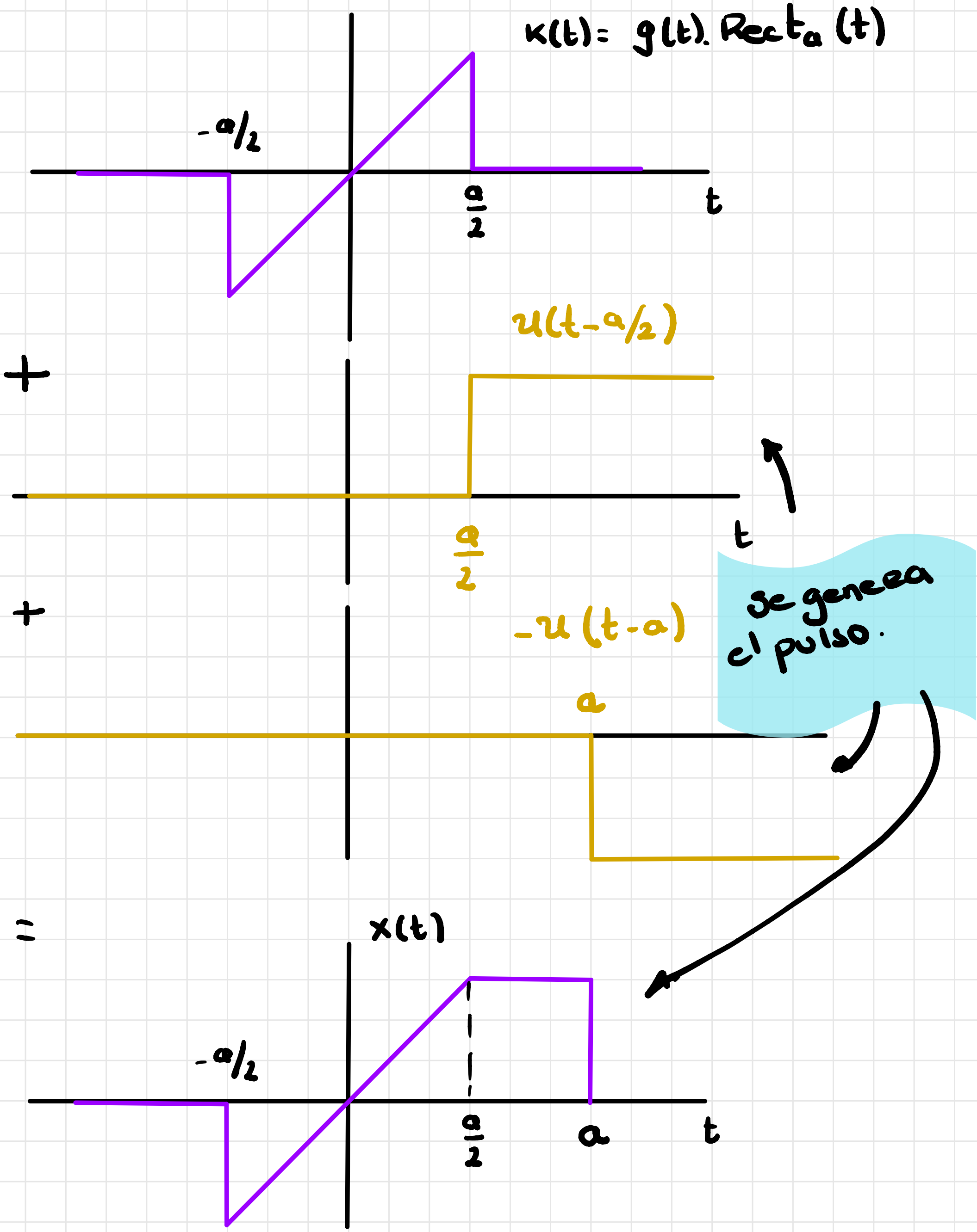
$Rect_a(t)$




$K(t) = g(t) . Rect_a(t)$



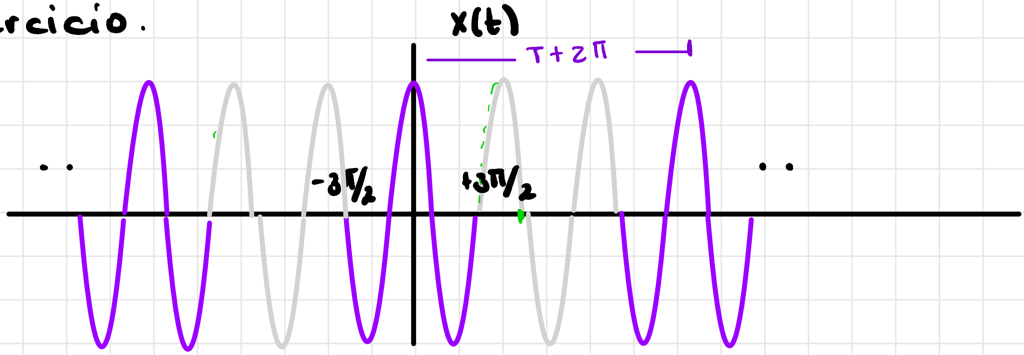
$x(t) = g(t) \cdot \mathrm{Rect}_a(t)$




$$x(t) = g(t) \cdot \mathrm{Rect}_a(t) + u(t-a/2) - u(t-a)$$

$$x(t) = g(t)\left[u(t+a/2) - u(t-a/2)\right] + u\left(t-\frac{a}{2}\right) - u(t-a)$$

Ejercicio.




$$x_T(t) = \begin{cases} \cos t & -\frac{3\pi}{2} < t < 3\pi/2 \\ x_T(t) = x(t+T+2\pi) = x(t+4\pi) \end{cases}$$

T: periodo del coseno

Generar a x(t) a partir de funciones rectangulares : $Rect_a(t)$

## Solapamiento o Reflexión en el tiempo

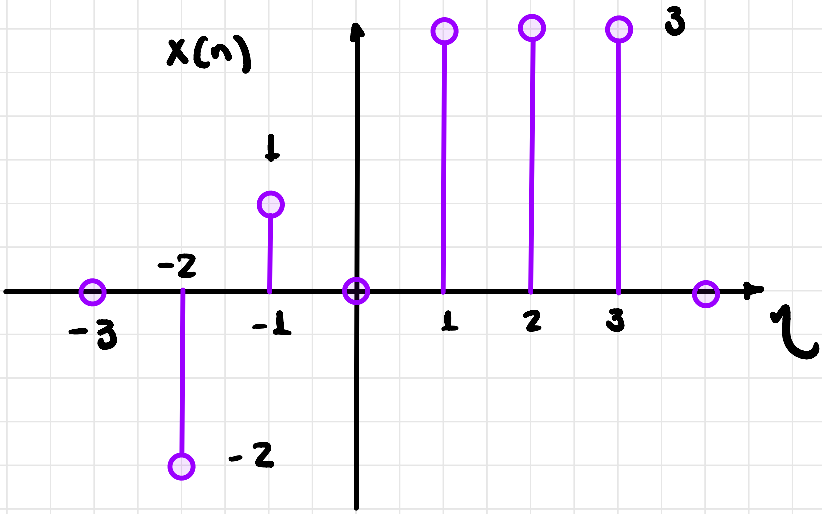
Otra operación sobre el argumento consiste en reemplazar la variable t por -t para el caso de señales continuas y para las señales discretas a $\eta$ por $-\eta$.

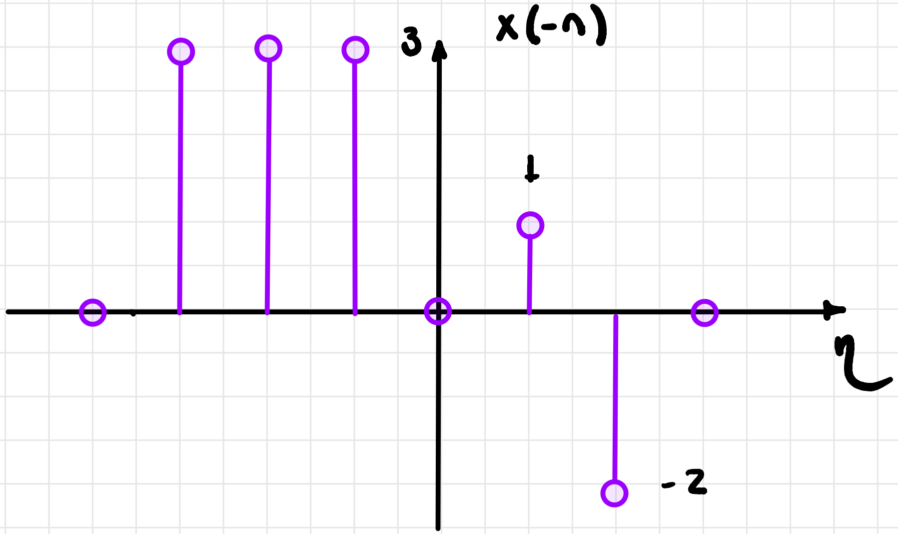
El resultado de la operación se llama Reflexión o Solapamiento.

Dado la señal $x(n) = \{\cdots, 0, -2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 3, 3, 3, 0, \cdots\}$

El valor de $x(-n) = \{\cdots 0, 3, 3, 3, \underset{\uparrow}{0}, 1, -2, 0 \cdots\}$

Gráficamente tenemos




Otra manipulación simple de señales es Adelantar o atrasar funciones solapadas.

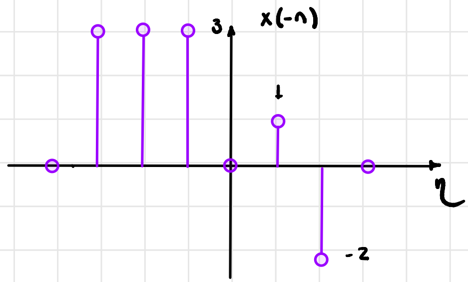
**Atraso** de funciones solapas. $x(-n+k)$

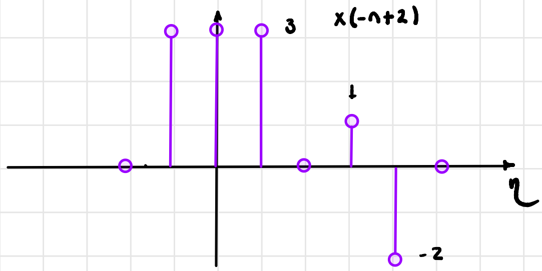
$$x(n) = \{\cdots 0, -2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 3, 3, 3, 0 \cdots\}$$

$$x(-n) = \{\cdots 0, 3, 3, 3, \underset{\uparrow}{0}, 1, -2, 0 \cdots\}$$

$$x(-n+2) = \{\cdots 0, 3, \underset{\uparrow}{3}, 3, 0, 1, -2, 0 \cdots\}$$

Gráficamente




Nótese que la palabra **atraso** sigue la convención de atrasar el eje vertical de la función hacia la izquierda, que coincide con la notación $x(-n+k)$

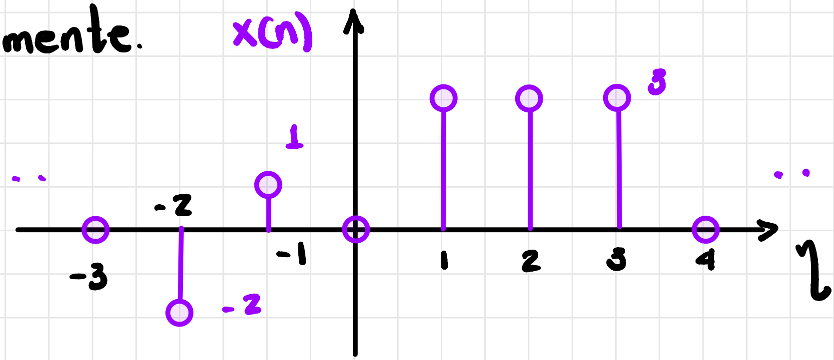
# Adelanto de funciones solapadas $x(-n-k)$

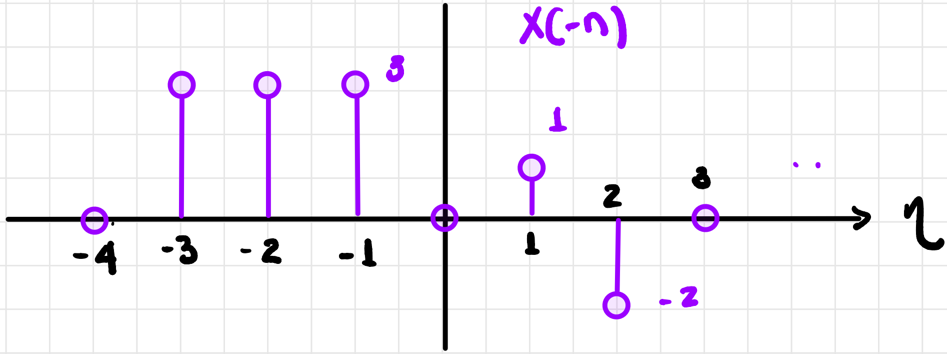
$$x(n) = \{\cdots 0, -2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 3, 3, 3, 0 \cdots\}$$

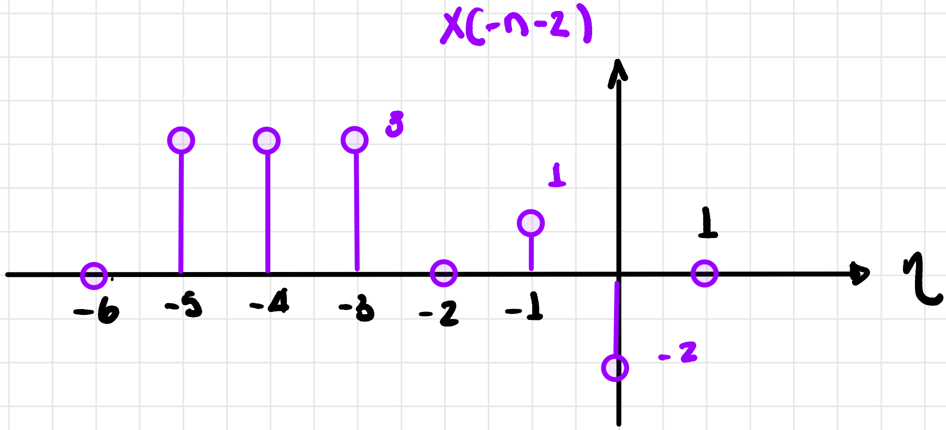
$$x(-n) = \{\cdots 0, 3, 3, 3, \underset{\uparrow}{0}, 1, -2, 0 \cdots\}$$

$$x(-n-2) = \{\cdots 0, 3, 3, 3, 0, 1, \underset{\uparrow}{-2}, 0 \cdots\}$$

Gráficamente.





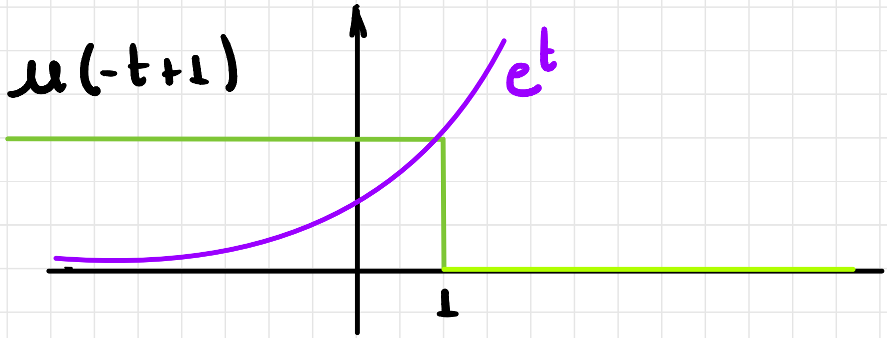

Nótese que la palabra adelanto sigue la convención de adelantar el eje vertical de la función hacia la derecha, que coincide con la notación $x(-n-k)$

Ejemplo

Determine el valor de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t} \cdot u(-t+1)\, dt.$$

Solución.




$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \cdot u(-t+k)\,dt = \int_{-\infty}^{1} e^t\,dt = e^t \Big|_{-\infty}^{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \cdot u(-t+k)\,dt = e^1 - e^{-\infty} = e^1$$

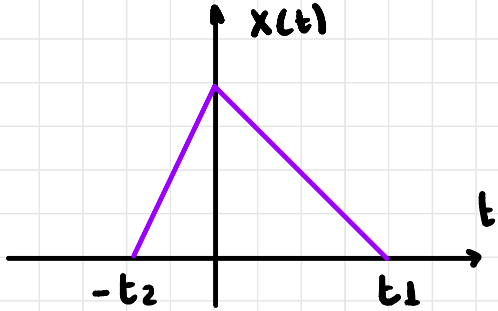
## Escalonamiento en el tiempo.

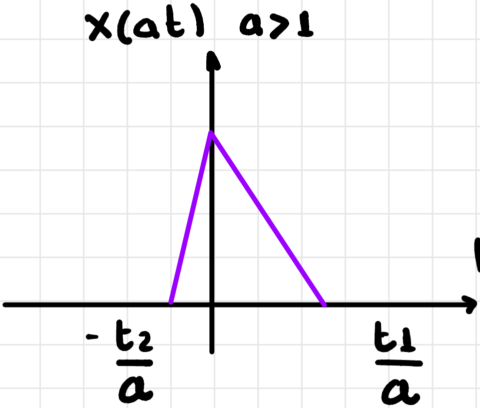
Se conoce como escalonamiento a la expansión o compresión de una señal $x(t)$.

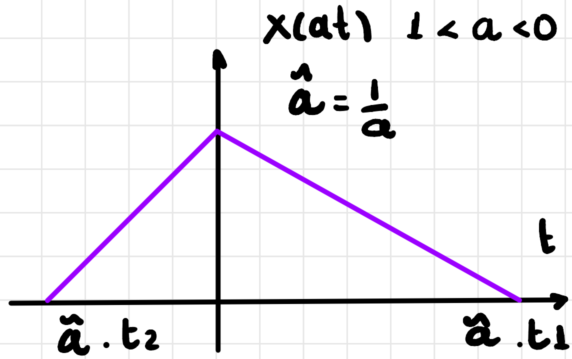
Sea una señal $x(t)$ y $\phi(t) = x(at)$ la misma señal escalada en un factor $(a)$

Si $a > 1$, se dice que la señal $\phi(t)$ es una versión de $x(t)$ comprimida.

• Si $0 < a < 1$, se dice que $\phi(t)$ es una versión **expandida** de $x(t)$.



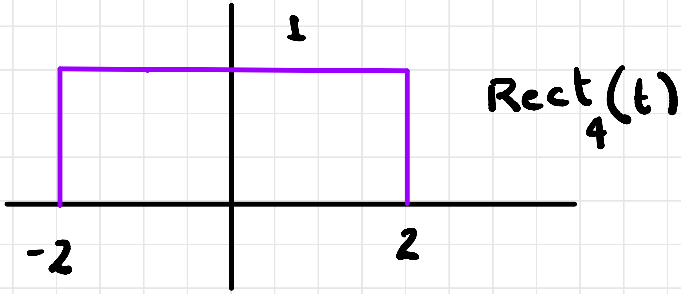




Señal Comprimida

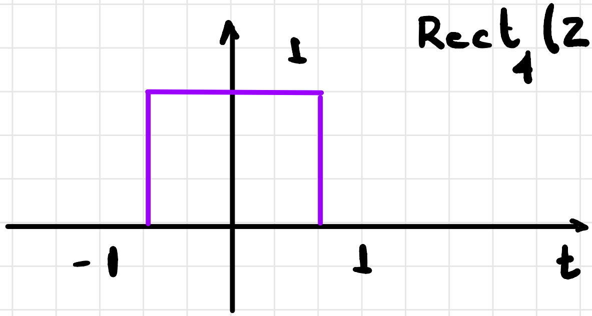
Señal expandida

Ejemplo.

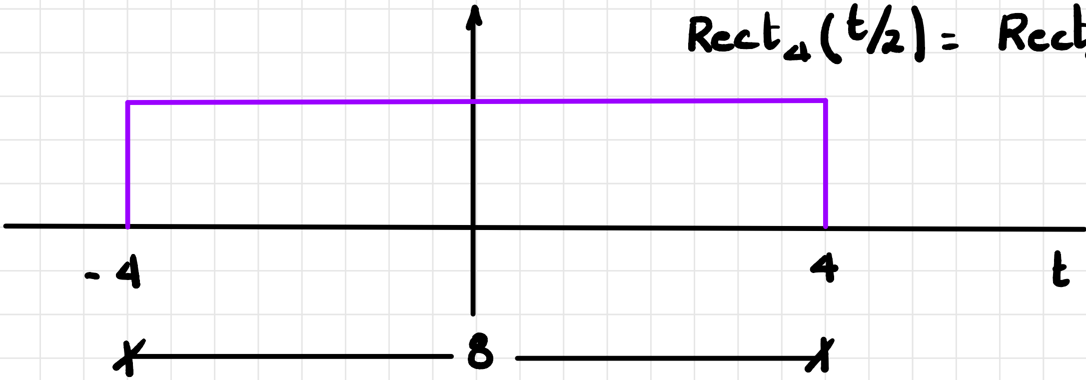
Dada $x(t) = Rect_4(t)$, Hallar $x(2t)$ y $x(\tfrac{1}{2}t)$



$Rect_1(2t) = Rect_2(t)$

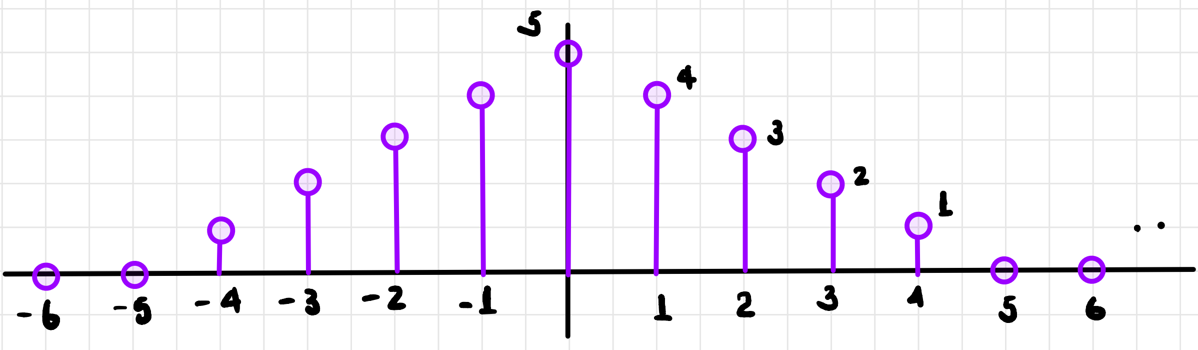



$Rect_4(t/2) = Rect_8(t)$




Ejemplo

$$x(n) = \begin{cases} 5 - |n| & |n| < 5 \\ 0 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$




Submuestrear la señal en 2, es decir Hallar $x(2n)$

también se puede decir que submuestrear la señal en 2, es similar a eliminar las muestras impares

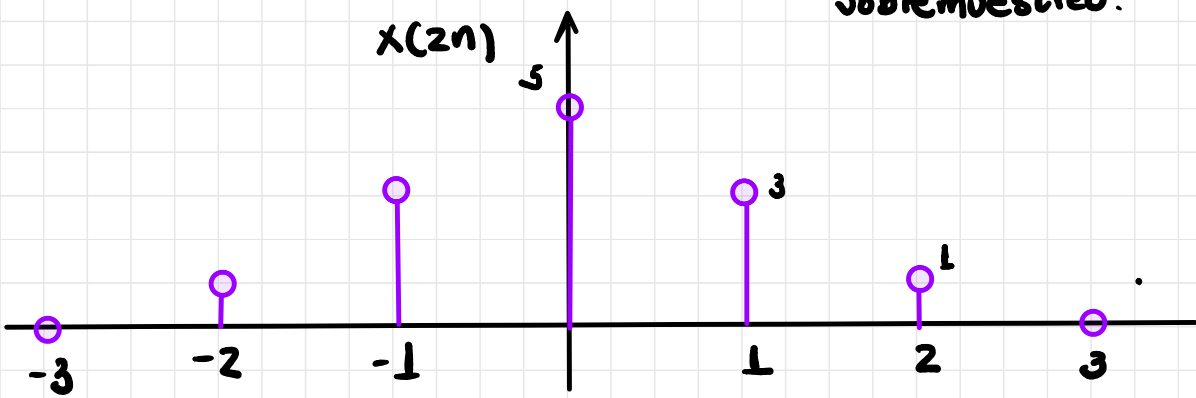
$$x(n) = \{ .\, 0, 1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{5}, 4, 3, 2, 1, 0 \}$$

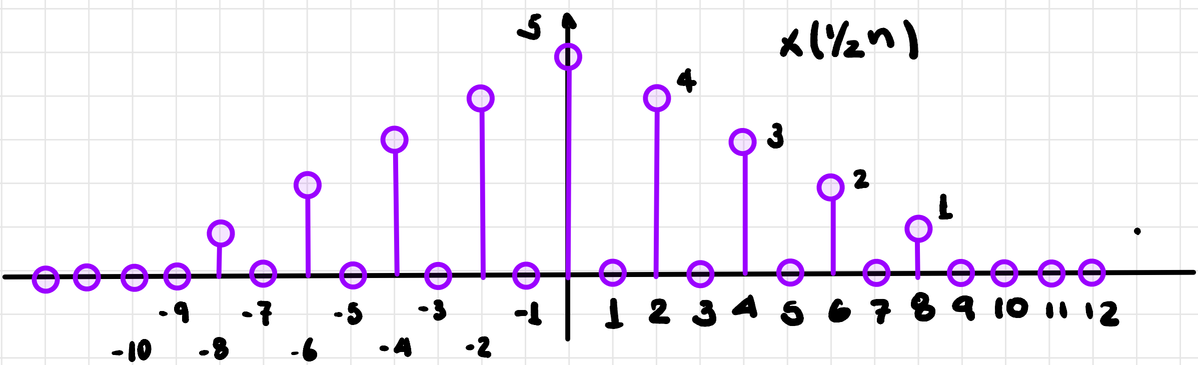
$$x(2n) = \{ \cdots 0, 0, 1, 3, \underset{\uparrow}{5}, 3, 1, 0, 0 \cdots \}$$

Submuestreo

$$x(\tfrac{1}{2}n) = \{ 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \underset{\uparrow}{5}, 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0 \cdots \}$$

Sobremuestreo.

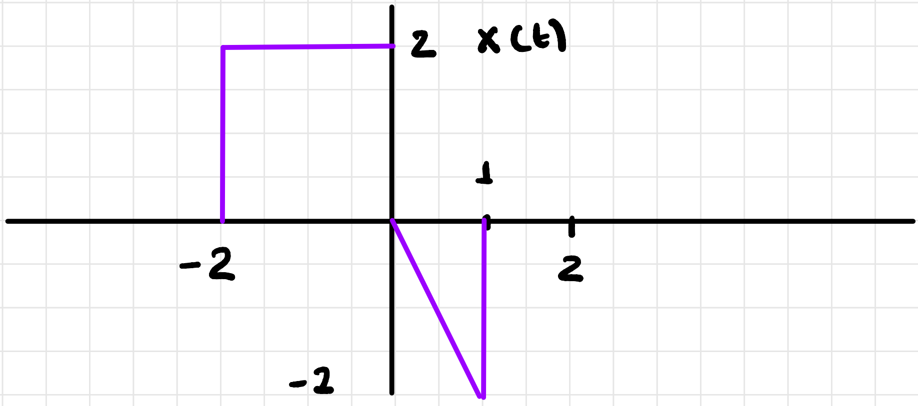



Sobremuestreo de $x(n)$ en 2 $= x(\tfrac{1}{2}n)$

Ejemplo

$$x(t) = \begin{cases} 2 & -2 < t \leq 0 \\ -2t & 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad 0 \text{ en cualquier otro}$$

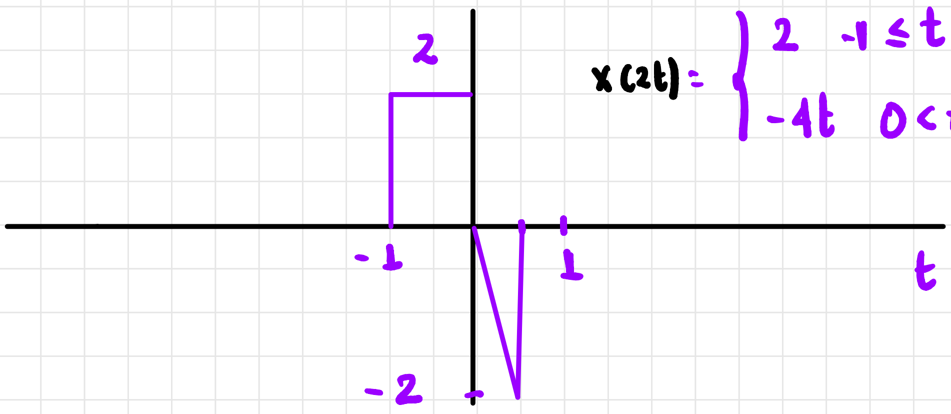



Determine la forma Analítica de la función x(t)

$$x(t) = 2\left(u(t+2) - u(t)\right) - 2t\left(u(t) - u(t-1)\right)$$

y Para x(2t) es:

$$x(2t) = 2\left(u(2t+2) - u(2t)\right) - 2 \times 2t\left(u(2t) - u(2t-1)\right)$$




$$x(2t) = \begin{cases} 2 & -1 \leq t < 0 \\ -4t & 0 < t < 1/2 \end{cases}$$

$$x(2t) = 2\left[u(t+1) - u(t)\right] - 4t\left[u(t) - u(t-\tfrac{1}{2})\right]$$

## Escalamiento y desplazamiento de la variable independiente.

Dada la función $x(t)$, Hallar $x(at \pm b)$

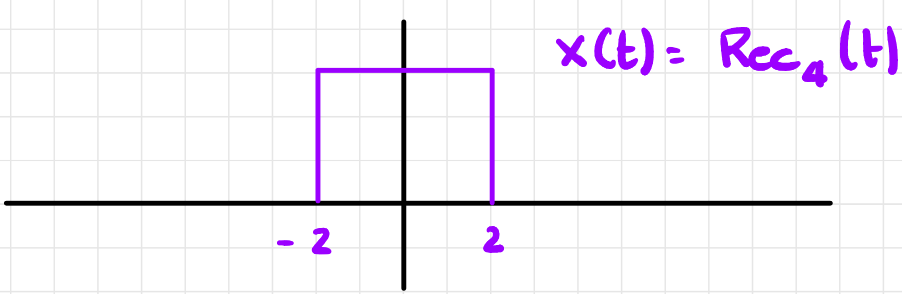
Existen 2 secuencias para su solución

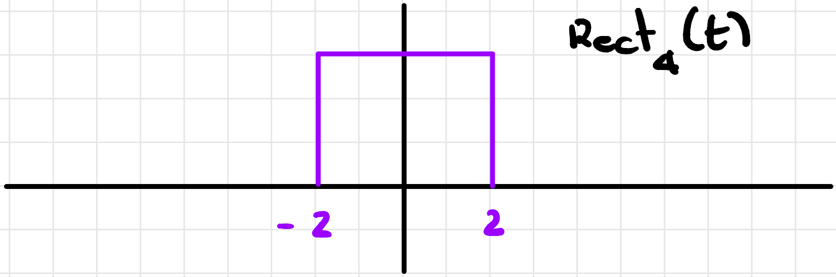
**1ª Secuencia:**

Escalar la función $x(t)$ en $a$ y obtener $x(at)$; después atrasar o adelantar la funcion en $|b/a|$ Unidades de tiempo

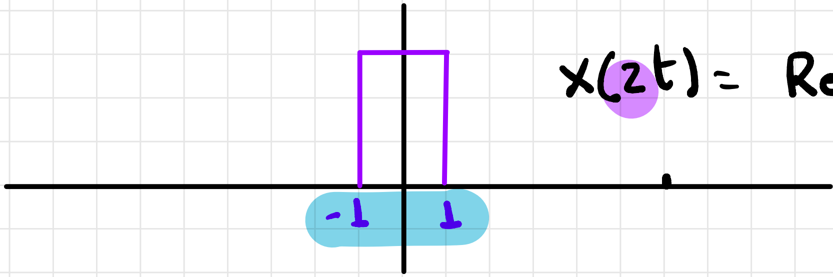
Ejemplo dada la función $x(t) = Rec_4(t)$

Determine La función $x(2t-6)$, como un nuevo Pulso Rectangular.





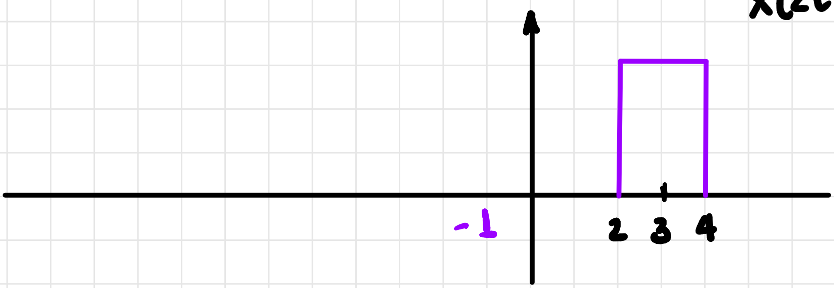

Primero escalo en 2 a $x(t)$




$x(2t) = Rect_2(t)$

Segundo desplazo la señal $6/2$ unidades

$x(2t-6) = Rect_2(t-3)$



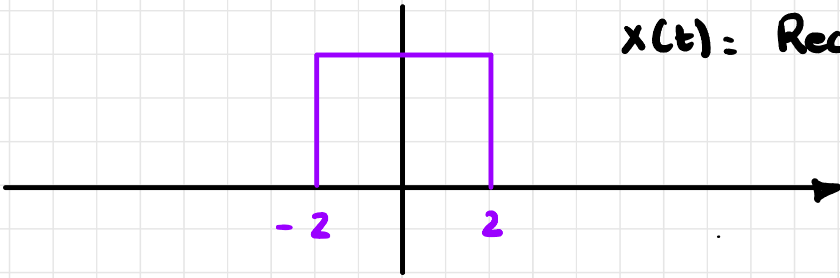

2da secuencia. para obtener $x(at-b)$ a partir de $x(t)$.

Primero

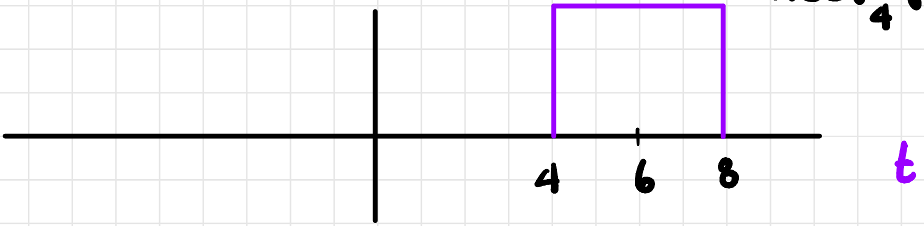
Desplazo la señal $x(t)$ en $b$ Unidades $x(t-b)$

b) Segundo escalo el tiempo por $|a|$ de la función $x(t-b)$ es decir $x(at-b/a)$

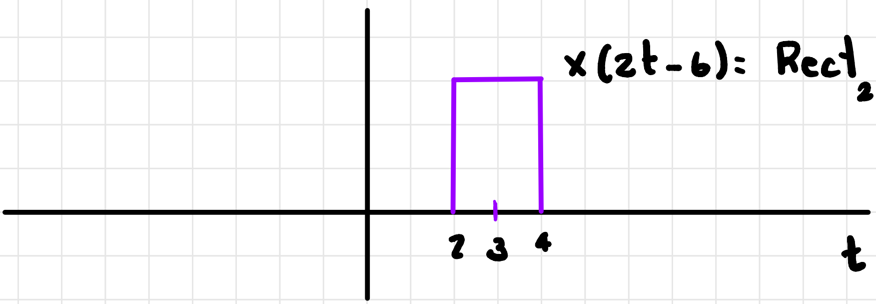
$x(t) = Rect_4(t)$




$Rect_4(t-6)$



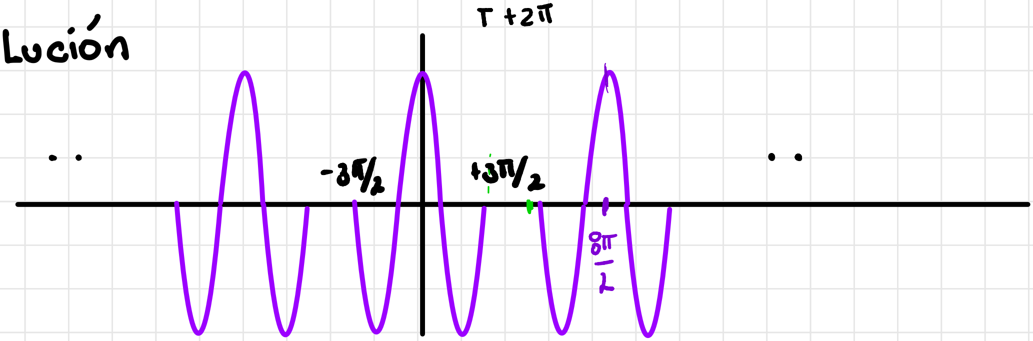

$x(2t-6) = Rect_2(t-3)$




Nótese que ambas secuencias dan resultados iguales

$$x(at-b) = Rect_2(t-3)$$

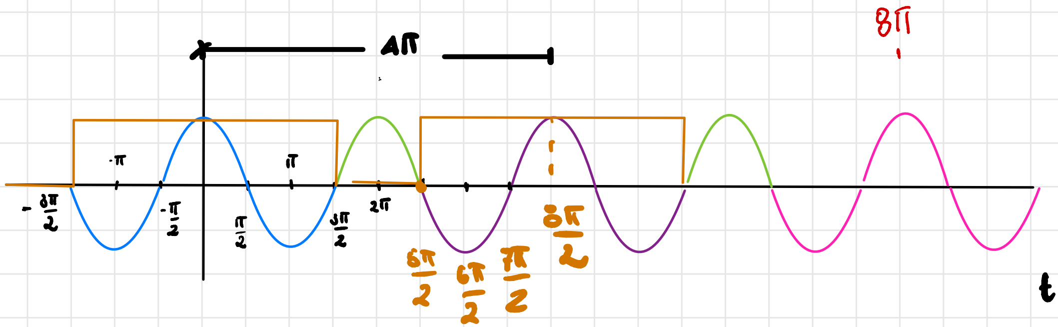
## Solución




$$x_T(t) = \begin{cases} \cos t & -\frac{3\pi}{2} < t < 3\pi/2 \\ x(t) = x(t+4\pi) \end{cases}$$

https://www.desmos.com/calculator/11lgbujr0a

Generar la función x(t) a partir de funciones Rect.




Solución:

$\cos t \cdot \mathrm{Rect}_{3\pi}(t);$

$\cos t \cdot \mathrm{Rect}_{3\pi}(t-4\pi)$

$\cos t \cdot \mathrm{Rect}_{3\pi}(t-2(4\pi))$

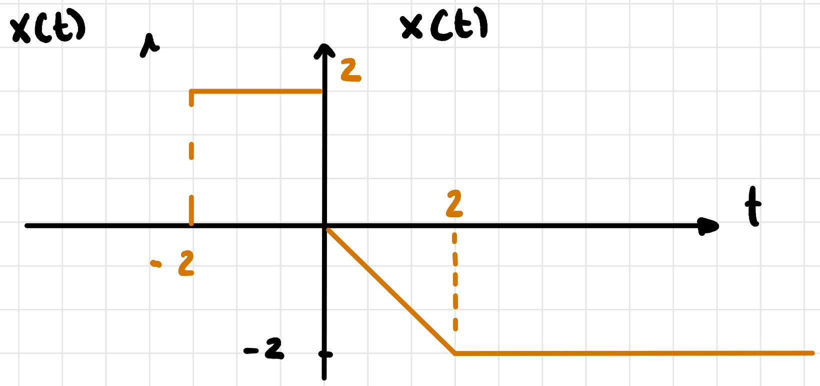
$\vdots$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos t \cdot \mathrm{Rect}_{3\pi}(t-k(4\pi))$$

Tener presente que el coseno cuenta con un periodo $T = 2\pi$.

Ejercicio

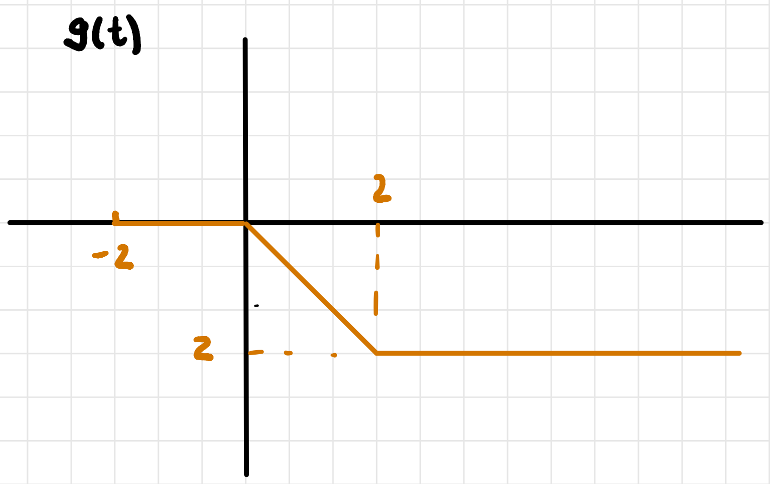
Encontrar la derivada de $x(t)$, por dos métodos.



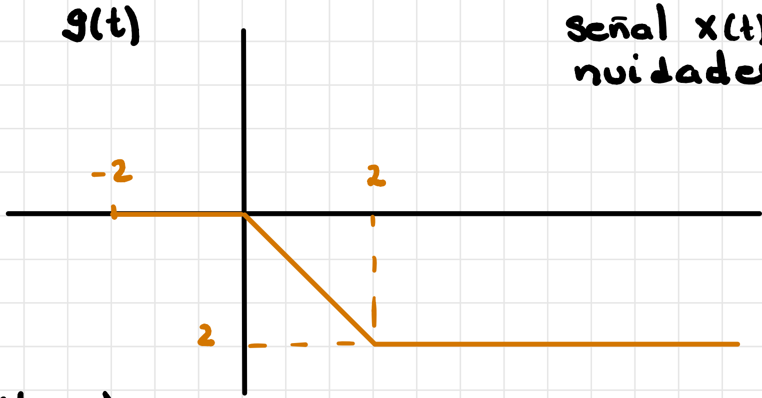

Hallar $x'(t)$

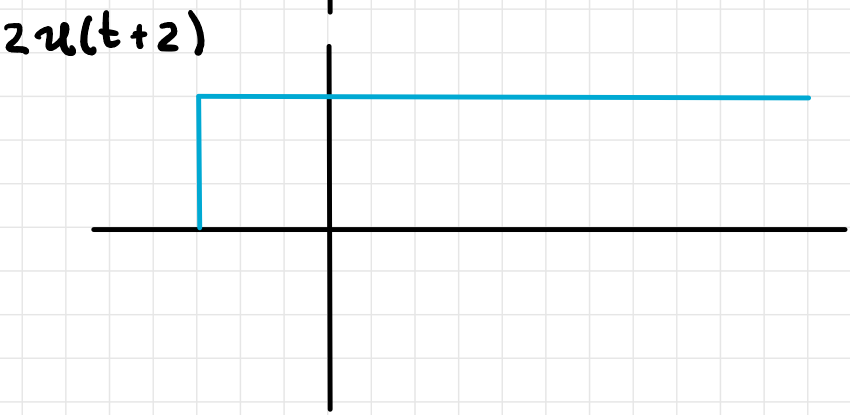
Primer método.

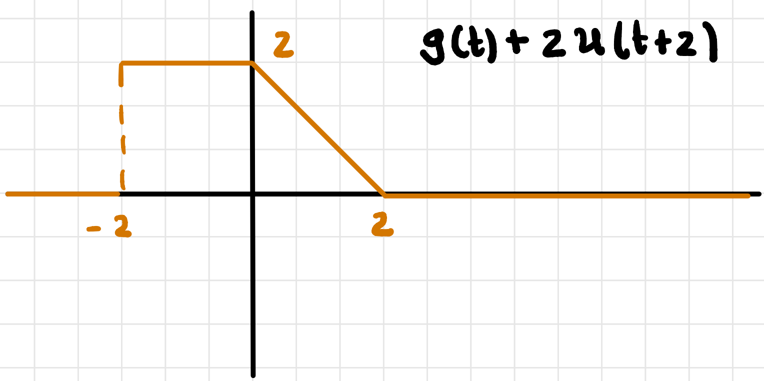
a) encontrar la función $x(t)$ sin discontinuidades y la llamaremos $g(t)$

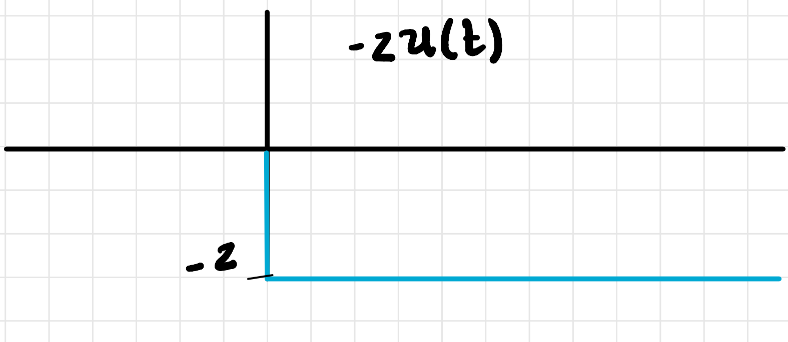


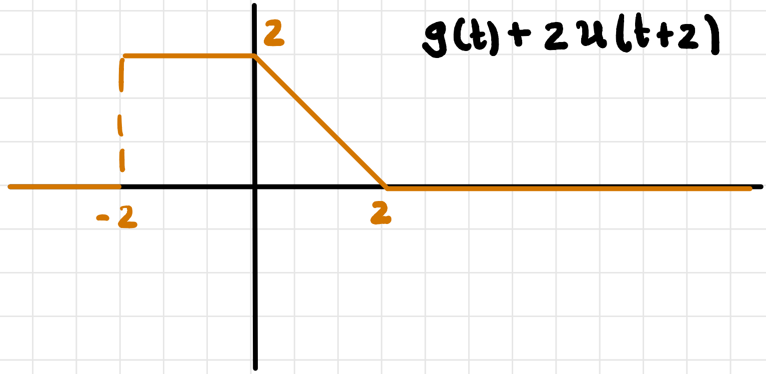
Señal x(t) sin discontinuidades

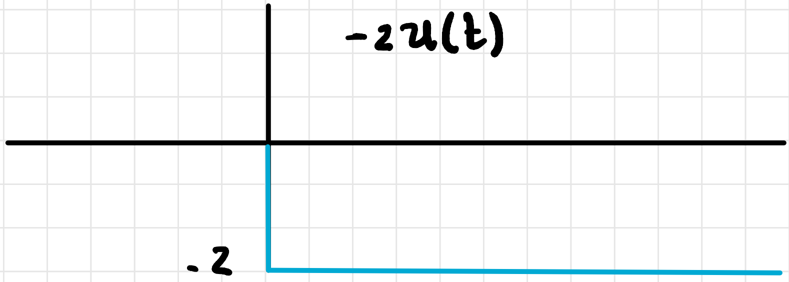


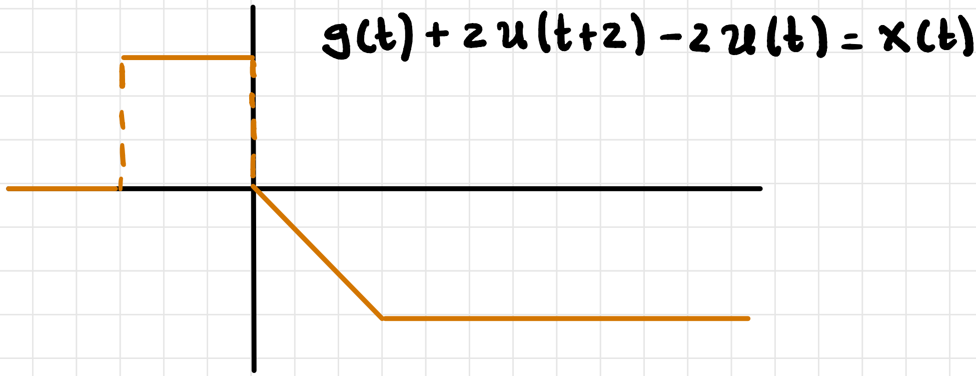



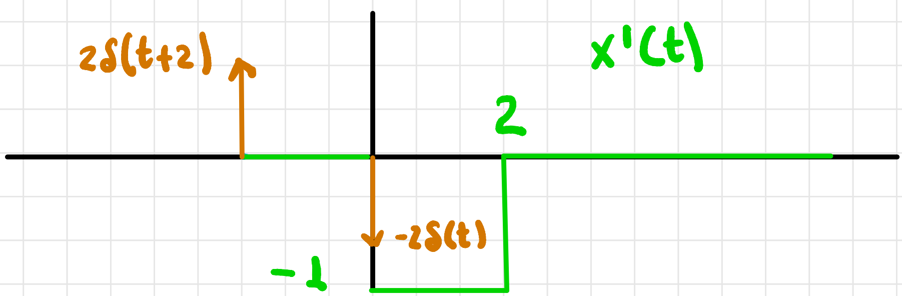





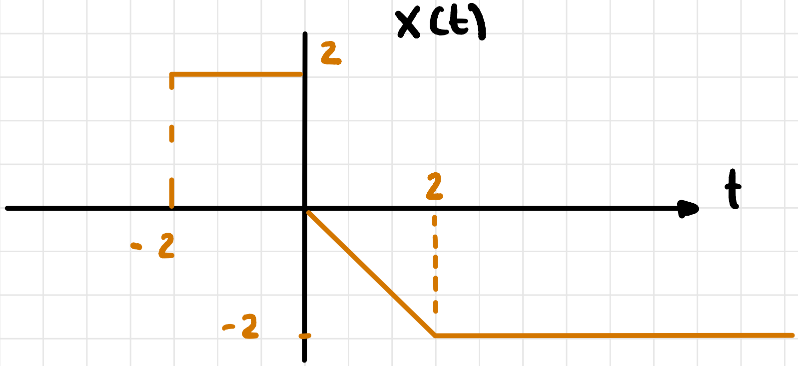




$$x'(t) = g'(t) + 2\delta(t+2) - 2\delta(t)$$




$$x'(t) = 2\delta(t+2) - 2\delta(t) - u(t) + u(t-2)$$

# Segundo método




Puedo representar analíticamente a $x(t)$ por la siguiente función

$$x(t) = \underbrace{2\left[u(t+2) - u(t)\right]}_{A} - \underbrace{t\left[u(t) - u(t-2)\right]}_{B}$$

$$\underbrace{-\,2u(t-2)}_{C}$$

La derivada la haremos en tres partes

Derivada de la parte A $= 2\delta(t+2) - 2\delta(t)$

Derivada de la parte B $= \dfrac{d}{dt}\left(-\,t u(t) + t u(t-2)\right)$

$$= -\cancelto{0}{t\delta(t)} - 1.u(t) + \cancelto{2\delta(t-2)}{t\delta(t-2)} + u(t-2)$$

Recordar que
$f(t).\delta(t) =$
$f(0).\delta(t)$

Derivada de la parte B $= -u(t) + 2\delta(t-2) + u(t-2)$

Derivada de la parte C $= -2\delta(t-2)$

Sumando las derivadas de las Partes A, B y C tenemos a $x'(t)$.

$$x'(t) = 2\delta(t+2) - 2\delta(t) - u(t) + \cancel{2\delta(t-2)} + u(t-2) \cancel{- 2\delta(t-2)}$$

$$x'(t) = 2\delta(t+2) - 2\delta(t) - u(t) + u(t-2)$$