Análisis de Señales – Tercera forma trigonométrica Fourier

Base Compleja de Fourier. es una base completa y ortogonal.

Esta compuesta por las siguientes funciones:

$$\{ \dots e^{-j2w_0t}, e^{-jw_0t}, 1, e^{jw_0t}, e^{j2w_0t}, \dots \}_T$$

Demostrar que la base compleja es ortogonal

$$\int_T \phi_n(t) \cdot \phi_m^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_{mn} & m = n \end{cases}$$

$$\int_T e^{jnw_0t} \cdot \left(e^{jmw_0t}\right)^* dt \qquad \begin{matrix} n = -\infty \dots +\infty \\ m = -\infty \dots +\infty \end{matrix}$$

$$\int_T e^{jnw_0t} \cdot e^{-jmw_0t}\, dt \qquad \text{si } m = n$$

$$\int_T e^{jnw_0t} \cdot e^{-jnw_0t}\, dt = \int e^{j(n-n)w_0t}\, dt$$

$$\boxed{\int_T e^0\, dt = T}$$

$$\int_T e^{jnw_0t} \cdot e^{-jmw_0t}\, dt = \int_T e^{j(n-m)w_0t}\, dt.$$

Si n y m son enteros $\Rightarrow$ $n - m = L$ y L es otro entero.

$$\int_T e^{jLw_0t} = \int_T \cos Lw_0t + j \int_T \operatorname{sen} Lw_0t\, dt = 0$$

$$\int_T \cos Lw_0t\, dt = 0 \qquad \int_T \operatorname{sen} Lw_0t\, dt = 0$$

$$\boxed{\int_T e^{j(n-m)\omega_0 t}\, dt = 0}$$

entonces se comprobó que:

$$\boxed{\int_T e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T & \text{para } m = n \end{cases}}$$

La Serie compleja de Fourier queda definida de la siguiente forma:

$$x(t) = \cdots F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [T]$$

Los coeficientes F_n se calculan a partir de los productos puntos.

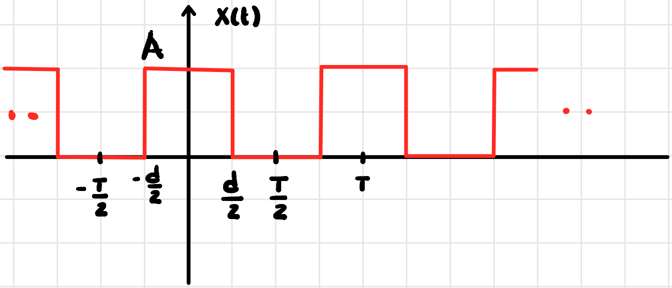
$$F_n = \frac{\langle x(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle}{\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle}$$

$$F_n = \frac{\int_T x(t) \cdot \left(e^{jn\omega_0 t}\right)^* dt}{\int_T e^{jn\omega_0 t} \cdot \left(e^{jn\omega_0 t}\right)^* dt} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

$$\boxed{F_n = \int_T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt.}$$

Ejemplo.

Dada $x(t)$, calcular su correspondiente representación utilizando la base compleja de Fourier.



$d = 1$ y $T = 5$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{+jn\omega_0 t}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-d/2}^{d/2} A \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{-A}{jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-d/2}^{d/2}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{jn\omega_0} \cdot \left(e^{-jn\omega_0(-d/2)} - e^{-jn\omega_0(d/2)}\right)$$

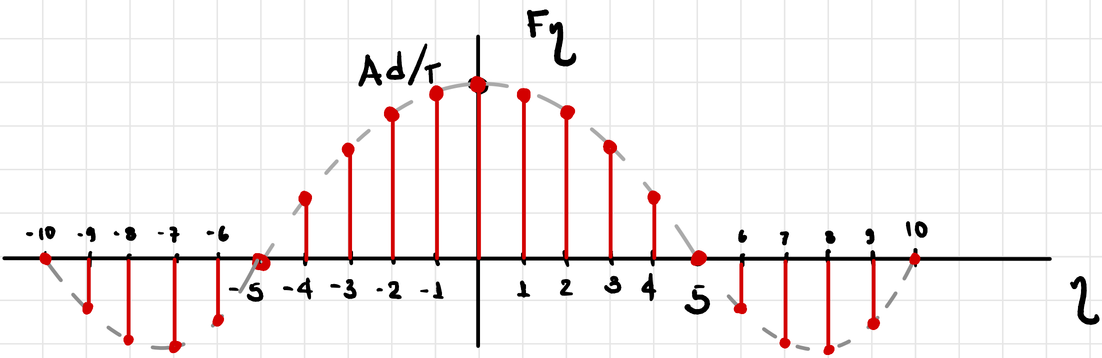
$$F_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{2A}{n\omega_0} \cdot \frac{e^{+jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}}{j2}$$

$$F_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{\operatorname{Sen} n\omega_0 d/2}{n\omega_0}$$

$$F_n = \frac{2}{T} A \, d/2 \quad \frac{\operatorname{sen} n\omega_0 d/2}{n\omega_0 \cdot d/2}$$

$$\boxed{F_n = A d/T . Sa(n\omega_0 \, d/2)}$$

F_n es una función compleja $\quad F_n = |F_n| e^{J\theta_n}$



Para conocer los cruces por cero de la función se hace que el argumento $n\omega_0 d/2$ sea igual a $\pm k\pi$ para valores de $k = 1, 2, 3 \ldots$

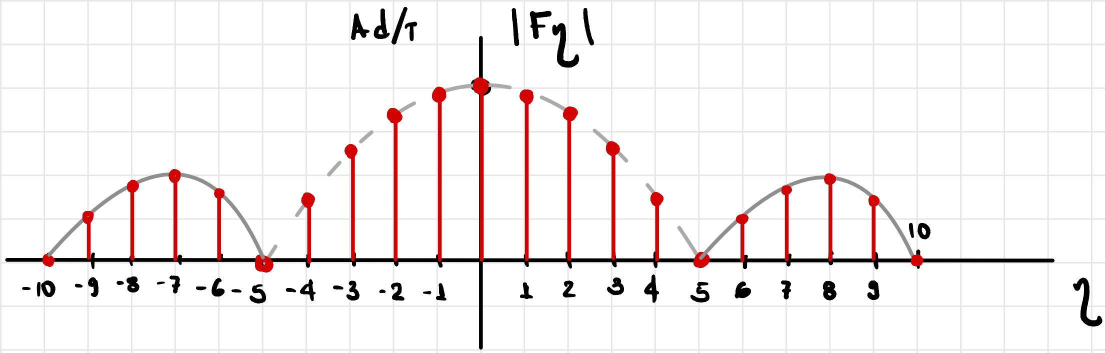
$$n\omega_0 d/2 = \pm K\pi$$

$$n \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{d}{2} = \pm K\cancel{\pi}$$

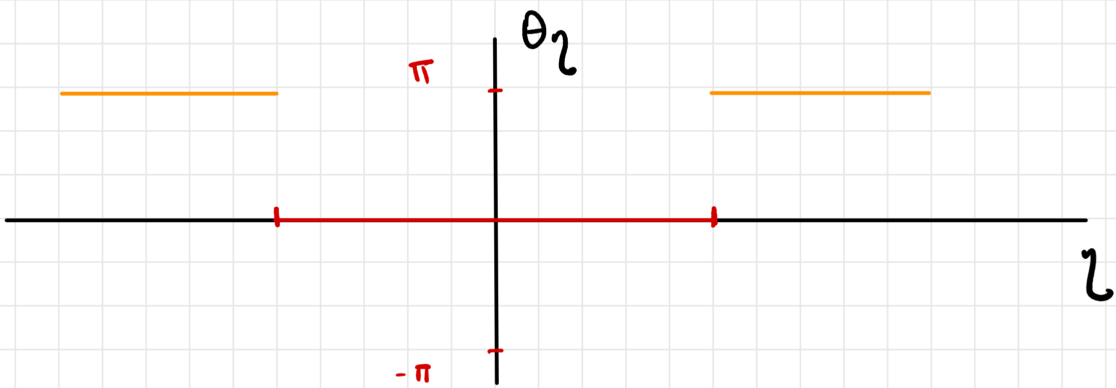
$$n = \pm K \, T/d \qquad K = 1, 2, 3 \ldots$$

para el caso del ejercicio $d/T = 1/5$, el cálculo de η será $\eta = \pm K . T/d = \pm k . 5$ para $k = 1, 2, 3 \ldots$

La gráfica de $|F_n|$ es:



Y su fase se grafica.



$$\theta_\eta = \begin{cases} 0 & F_\eta \geq 0 \\ \pi \text{ o } -\pi & F_\eta \leq 0 \end{cases}$$

Segunda Forma trigonométrica de Fourier

Permite representar a $x(t)$ como la suma de funciones trigonométricas $C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$, es decir

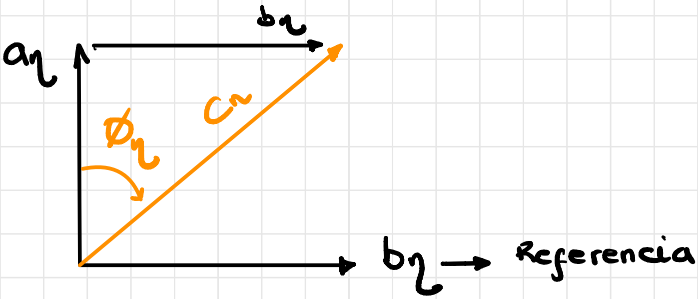
$$\boxed{x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)} \qquad x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Esto se logra a partir de la base trigonométrica:

$\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots \cos n\omega_0 t, \operatorname{sen}\omega_0 t, \operatorname{sen} 2\omega_0 t$
$\operatorname{sen} n\omega_0 t\}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

Donde se Representa a a_n y b_n como se observa:

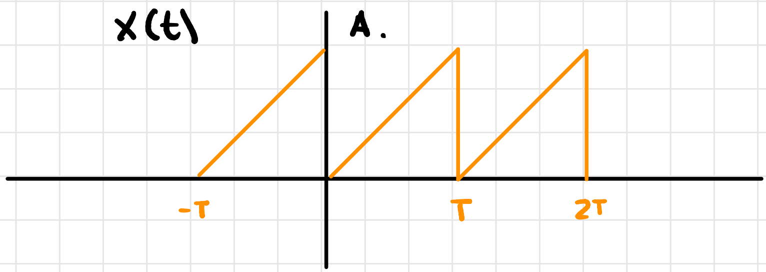


$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\arctan\left(b_n / a_n\right)$$

$$C_0 = a_0$$

Ejercicio



Representar la señal x(t) a partir de la serie compleja

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T} t & 0 < t < T \\ x(t+T) = x(t) & \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot (e^{jn\omega_0 t})^* dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$F_n = \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\boxed{F_n = \frac{A}{2\pi n} e^{j\pi/2}}$$

El anterior valor no tiene significado para F_0, puesto que indetermina a F_n cuando $n=0$, por lo tanto debemos evaluarlo por aparte

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-j \times 0 \cdot \omega_0 t} dt$$

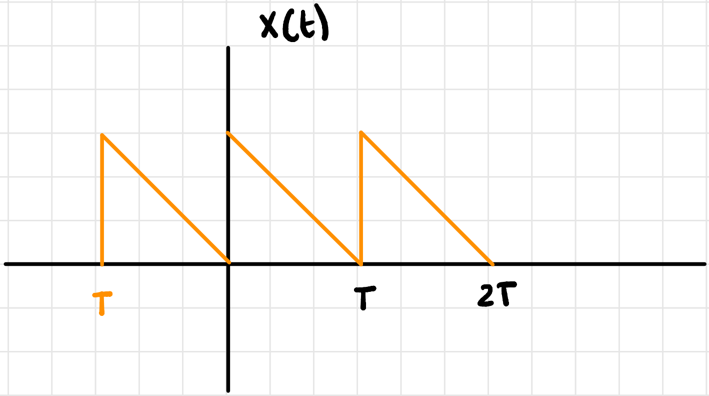
$$F_0 = \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt = \frac{1}{2} A.$$

Finalmente

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{j(n\omega_0 t + \pi/2)} \quad \underline{n \neq 0}}$$

Ejercicio

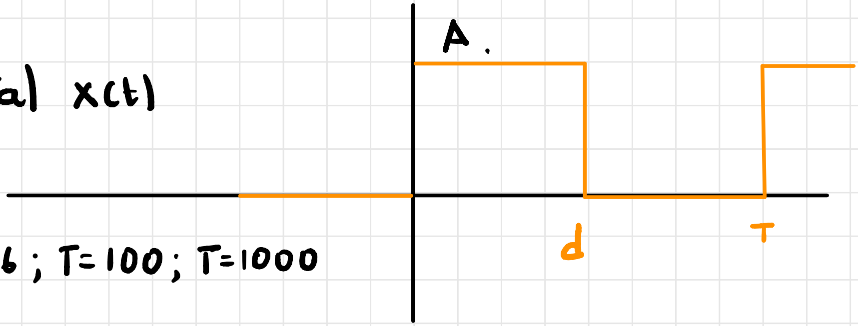
Representar la función $x(t)$, utilizando la base compleja de Fourier. b) graficar la función cuando se trunca en $\eta = \pm 5$, c) cuantos coeficientes tendrá la Representación si se requiere que el error medio cuadrático sea menor a 1×10^{-4}



2) Repetir los pasos b) y c) para los ejercicios resueltos en este documento.

Ejemplo

Dada la Señal $x(t)$



$A = 1$
$d = 1$
$T = 2$; $T = 4$; $T = 16$; $T = 100$; $T = 1000$

Calcular F_n y Grafique la Magnitud y Fase para cada valor de T propuesto.

CÓMO pasar de la forma compleja de Fourier a la primera forma trigonométrica de Fourier. y vice versa.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \qquad 1^a \text{ Forma}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \qquad 3^a \text{ Forma}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{-n} (\cos n\omega_0 t - j \operatorname{sen} n\omega_0 t) + F_0$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} F_n (\cos n\omega_0 t + j \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

Agrupando los Senos y Cosenos, tenemos:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (F_n + F_{-n}) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} (jF_n - jF_{-n}) \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$+ F_0.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (F_n + F_{-n}) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} (jF_n - jF_{-n}) \operatorname{sen} n\omega_0 t + F_0.$$

$$x(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (F_n + F_{-n}) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} j(F_n - F_{-n}) \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

y comparando con la primera forma:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

tenemos que:

$$\boxed{a_0 = F_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= F_n + F_{-n} \\ b_n &= j(F_n - F_{-n}) \end{aligned}}$$

De la tercera forma a la primera forma.

Para Calcular los coeficientes F_n y F_{-n} en función de a_n y b_n tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= F_n + F_{-n} \\ -jb_n &= +F_n - F_{-n} \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)}$$

de la Primera A la tercera.

$$\begin{aligned} a_n &= F_n + F_{-n} \\ jb_n &= -F_n + F_{-n} \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)}$$

$$F_n = (F_{-n})^*.$$

Ejercicio.

https://colab.research.google.com/drive/1nZjmhHwi9QQRsnyGsMMya8gAYx7su6WI#scrollTo=75fdOPK5ie55

Pasar los Resultados de los Coeficientes F_n de los Ejercicios propuestos y resueltos, a la primera forma trigonométrica de Fourier, utilizando las expresiones encontradas en la sección anterior.

Dado que $F_n = \text{Real}\{F_n\} + j\,\text{Imag}\{F_n\}$

$a_n = F_n + F_{-n}$ y $F_{-n} = F_n^*$

$$a_n = \text{Real}\{F_n\} + j\,\text{Imag}\{F_n\}$$
$$+ \text{Real}\{F_n\} - j\,\text{Imag}\{F_n\}$$

$$\boxed{a_n = 2\,\text{Real}\{F_n\}}$$

$$b_n = j(F_n - F_{-n})$$

$$b_n = j\{\text{Real}\{F_n\} + j\,\text{Imag}\{F_n\}$$
$$- \text{Real}\{F_n\} + j\,\text{Imag}\{F_n\}\}$$

$$b_n = j\{2j\,\text{Imag}\{F_n\}\}$$

$$\boxed{b_n = -2\,\text{Imag}\{F_n\}}$$