La representación de una señal periódica a partir de la base trigonométrica es llamada expansión en serie de Fourier en su primera forma.

$$\phi_n(t) = \{1, \cos w_0 t, \cos 2w_0 t, \dots \cos \eta w_0 t, \dots, \operatorname{sen} w_0 t, \operatorname{sen} 2w_0 t, \dots \operatorname{sen} \eta w_0 t \dots\}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{\eta=1}^{+\infty} a_\eta \cos \eta w_0 t + \sum_{\eta=1}^{+\infty} b_\eta \operatorname{sen} w_0 t}$$

Donde los valores de los Coeficientes o Armónicos son Calculados a partir de la expresión ya conocida

$$c_\eta = \frac{\langle x(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle}$$

Aplicado a la serie trigonométrica, los valores de a_0, a_η y b_η son:

$$\boxed{a_0 = \frac{\langle x(t), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt}$$

y $$a_n = \frac{\langle x(t), \cos n\omega_0 t\rangle}{\langle \cos n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t\rangle}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t) \cdot \cos n\omega_0 t}$$

Donde b_n se define como:

$$b_n = \frac{\langle x(t), \operatorname{sen} n\omega_0 t\rangle}{\langle \operatorname{sen} n\omega_0 t, \operatorname{sen} n\omega_0 t\rangle}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt}$$

Ahora bien, en forma general, las funciones base, para la representación de señales, deben cumplir los siguientes requerimientos:

La Serie debe Converger

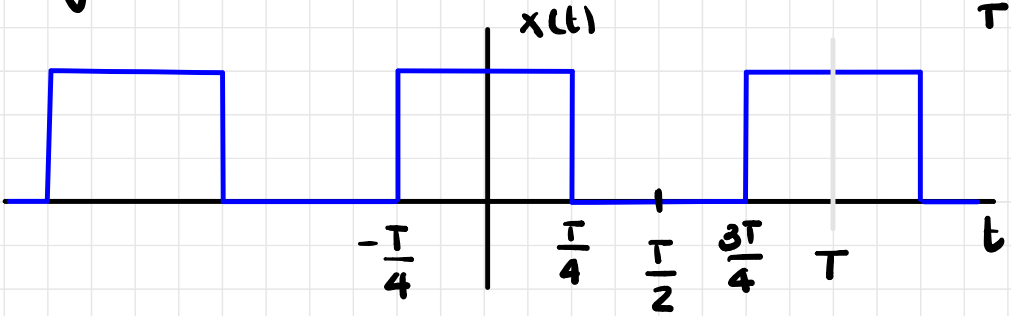
Los Coeficientes $\{C_n\}$ deben tener Procedimientos simples de Cálculo.

Sus valores no deben depender del Límite superior de la Suma de Representación.

Ejemplos

Representar la señal $x(t)$ utilizando la serie trigonométrica de Fourier.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1\,dt = \frac{1}{T}\, t \Big|_{-T/4}^{T/4}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\left(T/4 - (-T/4)\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

El anterior valor del coeficiente a_0 dice que la señal $x(t)$ cuenta con una componente de frecuencia cero igual a $1/2$.

Para el cálculo de los valores a_n, tenemos:

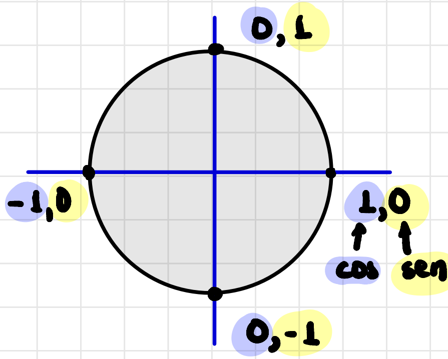
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} x(t).\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1.\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T.n\omega_0}\cdot \operatorname{Sen} n\omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{4}}^{T/4} =$$

$$a_n = \frac{2}{T.n.\frac{2\pi}{T}}\cdot\left(\operatorname{Sen} n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} - \operatorname{sen} n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot -\frac{T}{4}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\cdot\left(\operatorname{Sen} n\pi/2 + \operatorname{Sen} n\pi/2\right)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left(\operatorname{sen} n\pi/2\right)$$



Análisis del $\operatorname{Sen} n\pi/2$

$$\operatorname{Sen} n\pi/2 = \begin{cases} 1 & n = 1, 5, 9, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Por lo tanto

$$a_n = \begin{cases} 2/n\pi & n = 1, 5, 9, \dots \\ -2/n\pi & n = 3, 7, 11, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Para el cálculo de los b_n se tiene

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} x(t) \cdot \operatorname{sen} n w_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1 \cdot \operatorname{sen} n w_0 t \, dt$$

$$b_n = 0.$$

Finalmente $x(t)$ puede expresarse a partir de la base trigonométrica así.

$$x(t) \overset{n}{=} \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos w_0 t - \frac{2}{\pi 3} \cos 3 w_0 t +$$

$$\frac{2}{5\pi} \cos 5 w_0 t - \frac{2}{7\pi} \cdot \cos 7 w_0 t +$$

$$\frac{2}{9\pi} \cos 9 w_0 t - \frac{2}{11\pi} \cos 11 w_0 t +$$

$$\cdots$$

Analicemos el resultado.

$x(t)$ cuenta con una componente de frecuencia cero y componentes de tipo coseno impares.

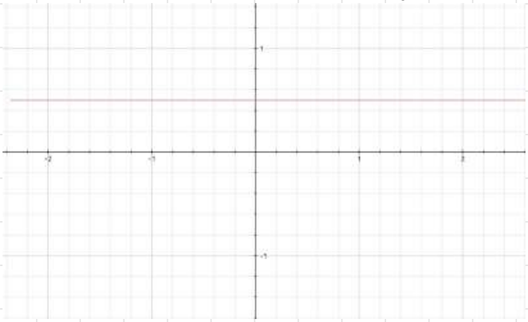
y no cuenta con componentes sinusoidales.

Analicemos la construcción de la señal $x(t)$ a partir de sus componentes armónicas.

$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}$ Solamente

$\hat{x}(t)$: $x(t)$ Aproximada

$x(t) = 1/2$

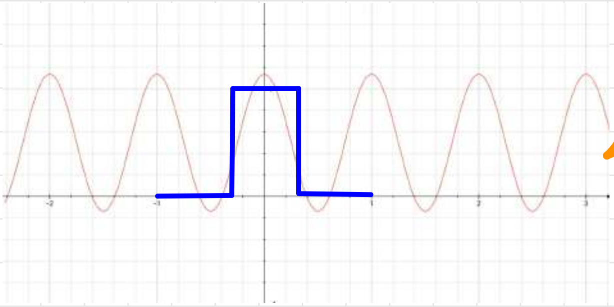


Aumentando un Coeficiente o Armónico.

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos w_0 t$$

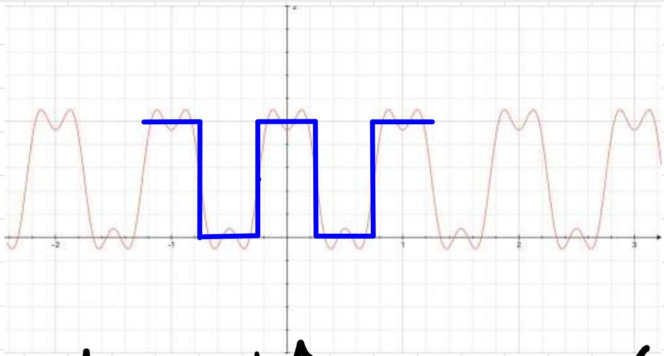
Para poderla graficar hacemos $w_0 = 2\pi$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos 2\pi t$$



Aumentando a tres coeficientes.

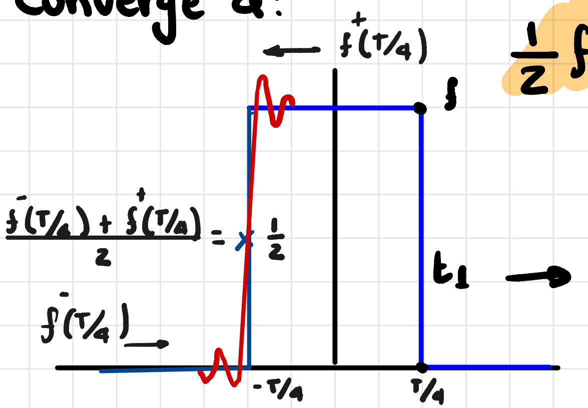
$$\hat{x}(t) \triangleq 1/2 + \frac{2}{\pi}\cos w_0 t - \frac{3}{\pi}\cos 3w_0 t$$



Nótese que la señal $\hat{x}(t)$ converge rápidamente y va tomando la forma de la señal $x(t)$.

Pero en las discontinuidades la Serie de Fourier converge a:

$$\frac{1}{2}f(t_i^-) + \frac{1}{2}f(t_i^+)$$

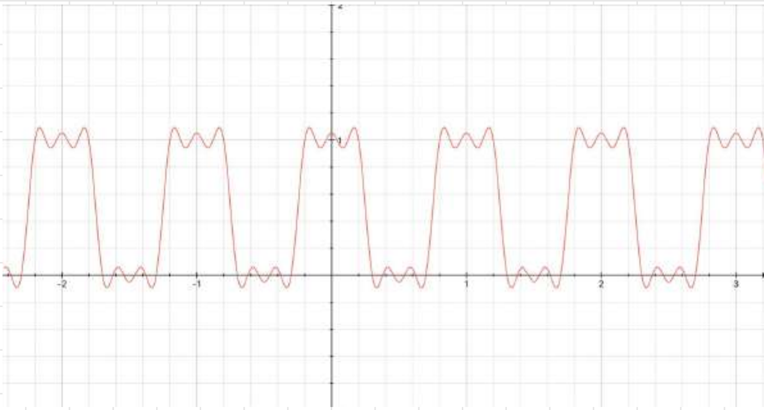


$t_1 \rightarrow$ tiempo en que ocurre la discontinuidad

Donde $f(t_i^-)$, es el límite de $f(t)$ cuando t se aproxima a t_1 por la izquierda y $f(t_1^+)$ es el límite de $f(t)$ Cuando t se aproxima a t_1 por la derecha

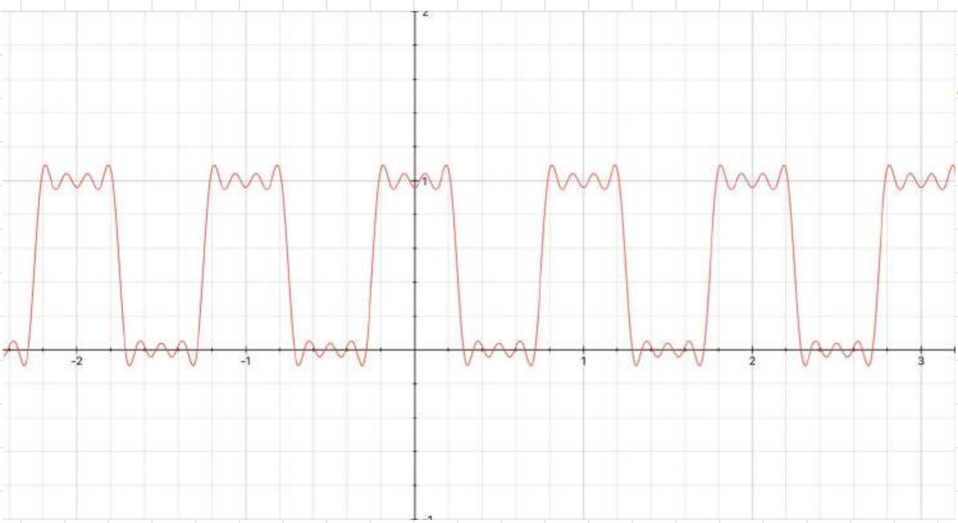
Continuando con el aumento de los coeficientes tenemos

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t$$



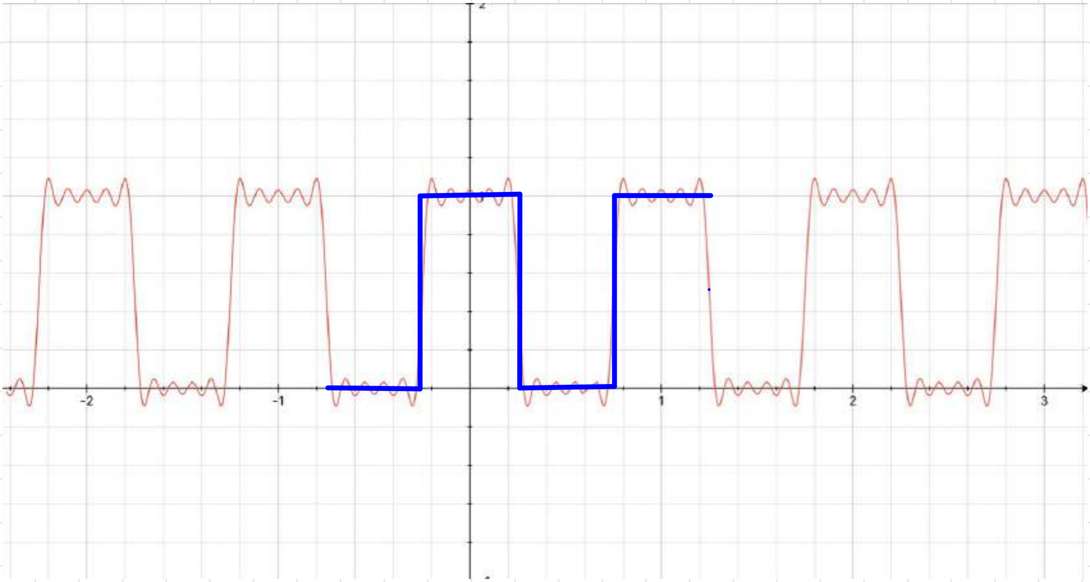
$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t$$

$$- \frac{2}{7\pi}\cdot\cos 7\omega_0 t$$



$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t$$

$$- \frac{2}{7\pi}\cdot\cos 7\omega_0 t + \frac{2}{9\pi}\cos 9\omega_0 t$$



Nótese el ajuste de la serie con relación a la función original $x(t)$.

Pero a qué será igual el error cometido en la aproximación?

Sabemos intuitivamente que la señal de error es igual a: $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ y la potencia de $\epsilon(t)$ es igual a:

$$P_{\epsilon(t)} = \frac{1}{T}\int_T |\epsilon(t)|^2 dt$$

$$P_{\epsilon(t)} = \frac{1}{T}\int_T |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

$|a-b|^2 = (a-b)(a-b)^*$
$|a-b|^2 = (a-b)(a^*-b^*)$
$|a-b|^2 = aa^* - a^*b - ab^* + bb^*$

Pero en general $\hat{x}(t)$ es igual a:

$$\hat{x}(t) = c_0\phi_0(t) + c_1\phi_1(t) + \cdots c_n\phi_n(t) + \cdots$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n\phi_n(t)}$$

trunco la Serie

> Nótese que $\hat{x}(t)$ es una suma truncada, es decir no va hasta infinito.

Entonces la potencia media de la señal de error es:

$$\overline{P_{\epsilon(t)}} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} \left|x(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(t)\right|^2 dt$$

Ver Cuadro Amarillo

$$\overline{P_{\epsilon(t)}} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t) \cdot \sum_{n=0}^{N} c_n^*\phi_n^*(t)\, dt$$

$$- \frac{1}{t_f - t_i}\int_T x^*(t) \sum_{n=0}^{N} c_n\phi_n(t)\, dt + \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} \sum_{n=0}^{N} c_n\phi_n(t) \cdot \sum_{m=0}^{N} c_m^* \cdot \phi_m^*(t)\, dt.$$

Factorizando la sumatoria $\sum_{n=0}^{N}$ del segundo y tercer factor tenemos.

$$P_{\epsilon(t)} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{t_f - t_i} \cdot \int_{t_i}^{t_f} x(t) . c_n^* \phi_n^*(t)\, dt \right.$$

$$\left. + \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) . C_n \phi_n(t)\, dt - \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} c_n . \phi_n(t) . \sum_{n=0}^{N} C_m^* . \phi_m^*(t)\, dt \right)$$

Ahora la expresión

$$\frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} C_n \phi_n(t) . \sum_{m=0}^{N} C_m^* \phi_m^*(t)\, dt$$

tomará la forma de

$$\frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} C_n \phi_n(t) .\ C_n^* . \phi_m^*(t)$$

Debido a la Ortogonalidad del conjunto de funciones $\{ \phi_n(t) \}$.

tenemos que $P_\epsilon(t)$ es igual a:

$$\overline{P_{\varepsilon(t)}} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{\eta=0}^{N}\left(\frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t).c_\eta^* \phi_n^*(t)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x^*(t).c_\eta \phi_n(t)\,dt - \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} c_n \phi_n(t).\, c_n^* \phi_n^*(t)\,dt\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{P_{\varepsilon(t)}} = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{\eta=0}^{N}\Bigg(& c_n^* . \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t).\phi_\eta^*(t)\,dt \\ & + c_n . \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x^*(t).\phi_n(t)\,dt - |c_n|^2 \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} |\phi_n(t)|^2 dt\Bigg)\end{aligned}}$$

y teniendo presente que:

$$c_\eta = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x(t).\phi_n^*(t)\,dt}{\int_{t_i}^{t_f} \phi_n(t).\phi_n^*(t)\,dt}$$

$$P_n c_\eta = \frac{\langle x(t), \phi_n(t)\rangle}{t_f - t_i}$$

$$P_n c_n^* = \frac{\langle \phi_n(t), x(t)\rangle}{t_f - t_i}$$

$$c_\eta = \frac{\frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t).\phi_n^*(t)\,dt}{\frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} \phi_n(t).\phi_n^*(t)\,dt} \Rightarrow P_\eta(t)$$

y si $\frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} |\phi_n(t)|^2 dt \leftarrow$ Potencia de la señal base.

$$c_n \cdot P_n = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \cdot \phi_n^*(t)\, dt \qquad c_n^* P_n = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) \cdot \phi_n(t)\, dt$$

Reemplazando este valor en la ecuación de la Potencia media de la señal de error, tenemos:

$$\overline{P_{\epsilon(t)}} = P_{señal} - \sum_{n=0}^{N} \left(2c_n^* \cdot c_n \cdot P_n - |c_n|^2 \cdot P_n \right)$$

$$\overline{P_{\epsilon(t)}} = P_{señal} - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 P_n$$

De donde podemos decir

$$P_{señal} \geq \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 P_n$$

y si la sumatoria cuenta con infinitos términos $N \to +\infty$ la Potencia del Error tenderá a cero.

$$0 = P_{señal} - \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot P_n \Rightarrow$$

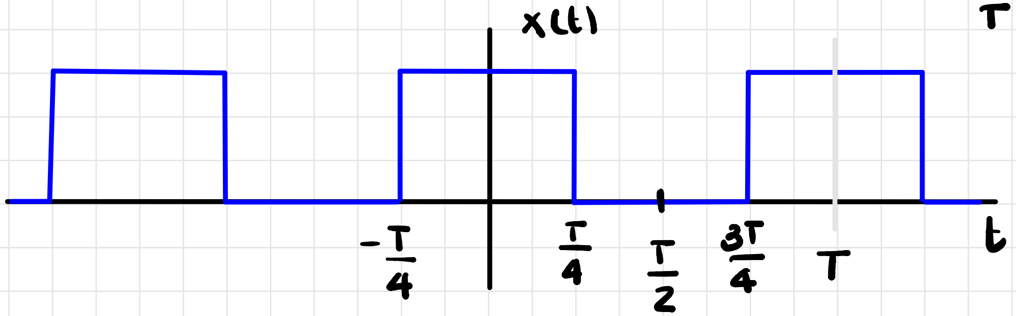
$$\boxed{P_{señal} = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 \cdot P_n}$$

lo que indica que podemos conocer la potencia de una señal a partir de sus Armónicos o Coeficientes.

ejemplo

Dada la señal

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

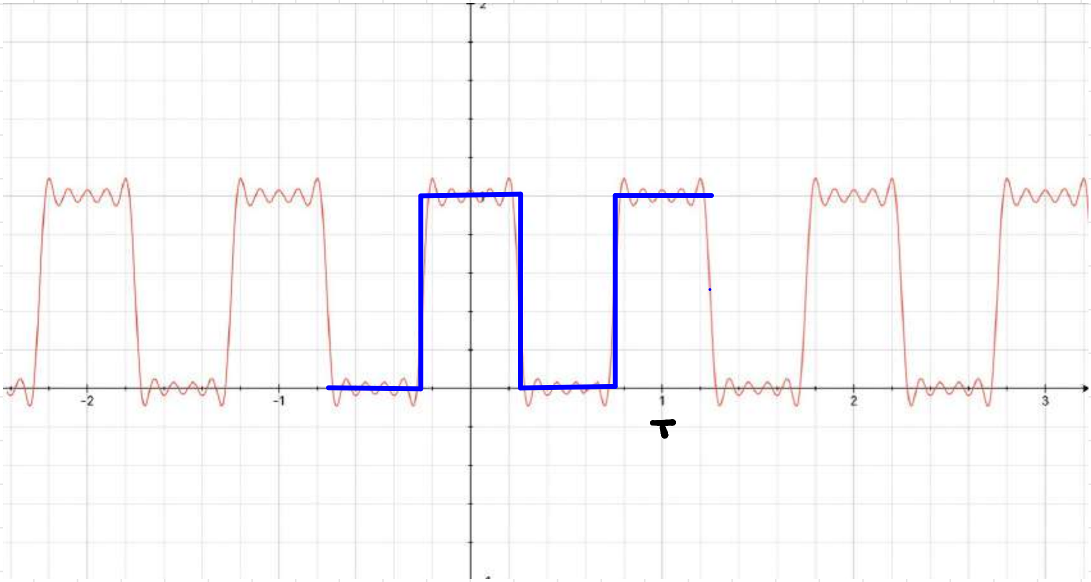


Que cuenta con la siguiente representación que contiene hasta el noveno armónico

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t$$

$$- \frac{2}{7\pi}\cdot\cos 7\omega_0 t + \frac{2}{9\pi}\cos 9\omega_0 t$$

Determine el error cometido en la representación.



El error se calcula a partir de la potencia media del error.

$$\boxed{\overline{P_{\epsilon(t)}} = P_{x(t)} - \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 P_n}$$

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1^2 . dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$a_0 = \frac{1}{2}$; $a_1 = \frac{2}{\pi}$; $a_3 = -\frac{2}{3\pi}$; $a_5 = \frac{2}{5\pi}$

$a_7 = -\frac{2}{7\pi}$; $a_9 = \frac{2}{9\pi}$

Calculamos el Módulo de los Coeficientes. $\longrightarrow$

$a_0^2 = \frac{1}{4}$; $a_1^2 = \frac{4}{\pi^2}$; $a_3^2 = \frac{4}{9\pi^2}$; $a_5^2 = \frac{4}{25\pi^2}$

$a_7^2 = \frac{4}{49\pi^2}$; $a_9^2 = \frac{4}{81\pi^2}$

$\boxed{\text{Cálculo de la Potencia de las señales base.}}$

$$P_0 = \frac{1}{T}\int_T 1^2\, dt = \frac{T}{T} = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_T |\cos w_0 t|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2} dt + \frac{1}{T}\int \frac{1}{2}\cos 2w_0 t\, dt$$

$$P_1 = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

En general

$$P_\eta = \frac{1}{T}\int_T |\cos \eta w_0 t|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2} dt + \frac{1}{T}\int \frac{1}{2}\cos 2\eta w_0 t\, dt$$

$$P_\eta = \frac{1}{2}$$

El Error es igual a :

$$\overline{P}_{\varepsilon(t)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{9\pi^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{25\pi^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{49\pi^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{81\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{P_{\varepsilon(t)} = \frac{1}{2} - 0{,}4899 = 0{,}01 \checkmark}$$

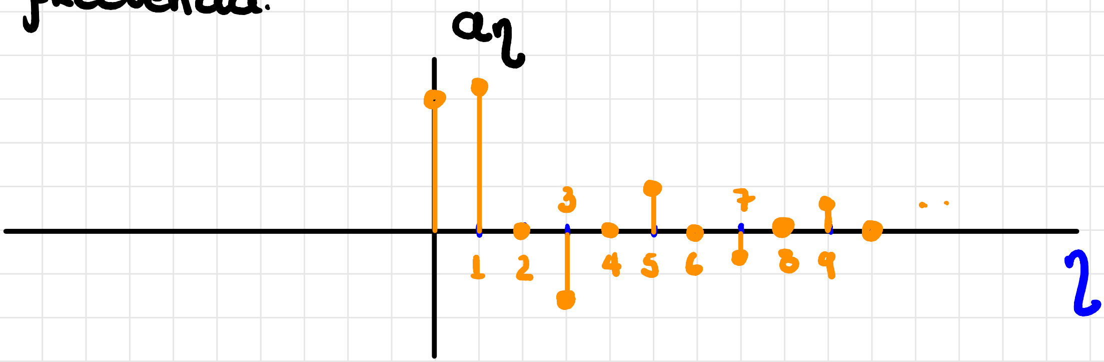
Lo que indica que el error en la aproximación es de tan solo 0,01.

Ejercicio.

Generar una representación $\hat{x}(t)$, que contenga solo el 1×10^{-3} de error en la representación.

Para terminar esta sección

Graficar los espectros de la representación en frecuencia.



$a_0 = \frac{1}{2}$; $a_1 = \frac{2}{\pi}$; $a_3 = -\frac{2}{3\pi}$; $a_5 = \frac{2}{5\pi}$

$a_7 = -\frac{2}{7\pi}$; $a_9 = \frac{2}{9\pi}$

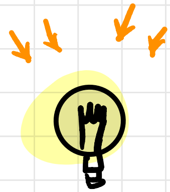
$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t$$

$$- \frac{2}{7\pi}\cdot\cos 7\omega_0 t + \frac{2}{9\pi}\cos 9\omega_0 t$$

En resumen si cuento con una representación de una señal $x(t)$ a partir de la Base trigonométrica de Fourier, el teorema de Parseval toma la siguiente forma.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t).\cos n\omega_0 t\,dt$$



$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t).\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt$$

$$\overline{P}_{\varepsilon(t)} = P_{x(t)} - \left\{ |a_0|^2 . P_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n|^2 P_n + |b_n|^2 P_n \right) \right\}$$

y si la sumatoria va hasta el infinito, es claro que el $\varepsilon(t)$ va a ser cero. y por lo tanto su potencia. media es también cero.

$$0 = P_{x(t)} - \left\{ |a_0|^2 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 P_n + |b_n|^2 P_n \right) \right.$$

y la Potencia del error puede ser calculada a Partir de

$$P_{x(t)} = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 P_n + |b_n|^2 P_n \right)$$

Representación en series trigonométricas de Fourier de funciones que cohabitan en el mismo espacio base.

Hallar la Representación de $x(t) = \cos^2 w_0 t$

El formato al cual debemos llevar al $\cos^2 w_0 t$ es:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + \cdots a_n \cos n w_0 t$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} w_0 t + b_2 \operatorname{sen} w_0 t + \cdots b_n \operatorname{sen} n w_0 t$$

como

$$x(t) = \cos^2 w_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 w_0 t$$

y comparando con la serie se observa que $a_0 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = \frac{1}{2}$, el resto de los coeficientes son ceros.

Ejemplo 2.

Hallar la representación de $x(t) = \cos^3 w_0 t$

Nuevamente se debe llevar el $\cos^3 w_0 t$ al formato de la serie.

$$\cos^3 w_0 t = \left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2} \right)^3$$

$$\cos^3 w_0 t = \left(\frac{e^{jw_0t} + e^{-jw_0t}}{2} \right)^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\cos^3 w_0 t = \left(e^{j3w_0t} + 3e^{j2w_0t} \cdot e^{-jw_0t} + 3e^{jw_0t} \cdot e^{-j2w_0t} + e^{-j3w_0t} \right) 1/2^3$$

Reagrupando obtenemos

$$\cos^3 w_0 t = \frac{1}{2^2} \left(\frac{e^{j3w_0t} + e^{-3jw_0t}}{2} + 3 \left(\frac{e^{jw_0t} + e^{-jw_0t}}{2} \right) \right)$$

$$\cos^3 w_0 t = \frac{1}{2^2} \cdot \cos 3w_0 t + \frac{3}{2^2} \cos w_0 t$$

$$\cos^3 w_0 t = \frac{3}{4} \cos w_0 t + \frac{1}{4} \cos 3w_0 t$$ comparando los términos con la serie tenemos.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) = {} & a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + \cdots a_n \cos n w_0 t \\ & + b_1 \operatorname{sen} w_0 t + b_2 \operatorname{sen} w_0 t + \cdots b_n \operatorname{sen} n w_0 t \end{aligned}}$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 3/4$

$a_2 = 0$

$a_3 = 1/4$ $\longrightarrow$ Resto de Componentes cero.

Ejemplo 3.

$$x(t) = \cos\pi t \cdot \cos 3\pi t$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

si $\alpha = \pi t$ y $\beta = 3\pi t$

$$\cos\pi t \cdot \cos 3\pi t = \frac{1}{2}\left\{\cos(4\pi t) + \cos(2\pi t)\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \frac{1}{2}\cos 4\pi t$$

comparándolo con la serie

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) = {} & a_0 + a_1\cos w_0t + a_2\cos 2w_0t + \cdots a_n\cos nw_0t \\ & + b_1 \operatorname{sen} w_0t + b_2 \operatorname{sen} w_0t + \cdots b_n \operatorname{sen} nw_0t \end{aligned}}$$

$a_0 = 0$
$a_1 = 0$
$a_2 = 1/2$
$a_3 = 0$
$a_4 = 1/2$

El resto de componentes es cero.

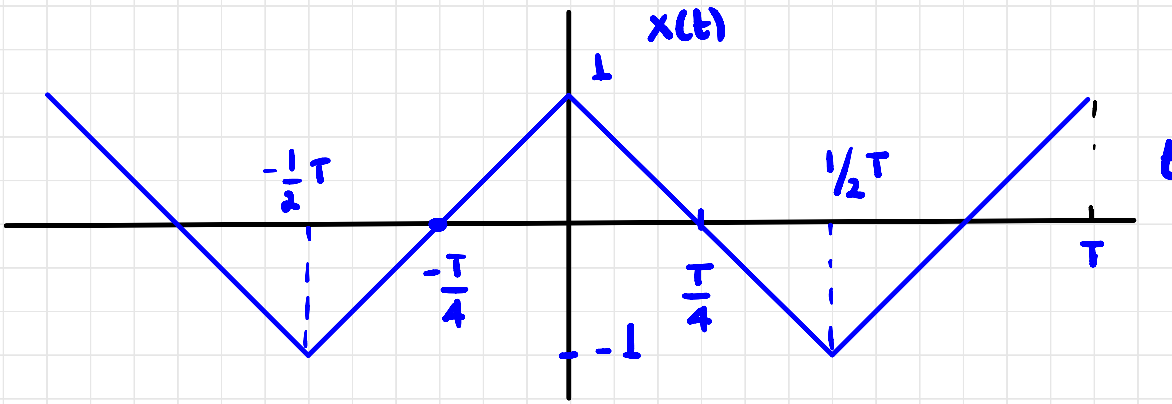
Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

A

Nombre: ______________________ Código: ________

Nombre: ______________________ Código: ________

Determine para x(t), una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0,01. Finalmente grafique los armónicos vs la frecuencia.



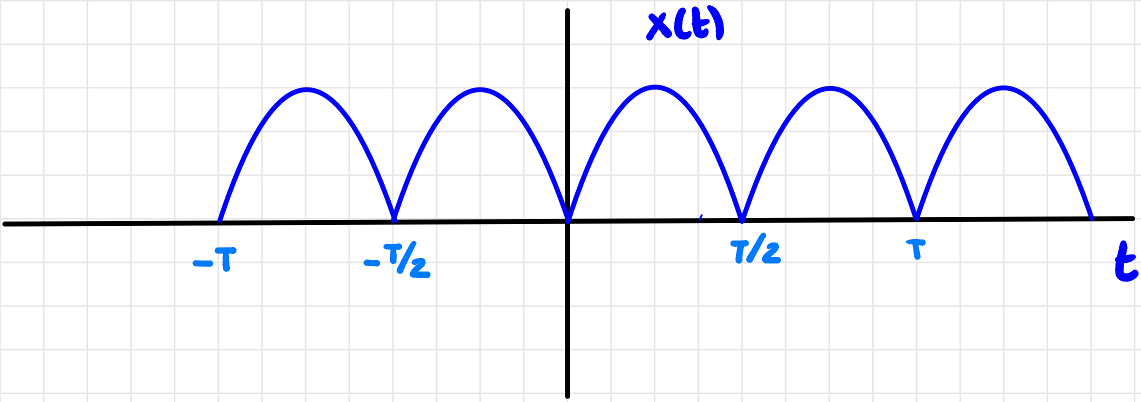
Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

(B)

Nombre: ______________________ Código: ________

Nombre: ______________________ Código: ________

Determine para x(t), una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0.01. Finalmente grafíque los armónicos vs la frecuencia y La gráfica de $\hat{x}(t)$.



$x(t) = |\operatorname{Sen} \omega t|$

$$x(t) = |A \operatorname{sen} \omega t|$$

$$x(t) = A . \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} . t$$

$$a_0 = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A . \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} . t$$

$$a_0 = \frac{-2A}{T \frac{2\pi}{T}} . \cos \frac{2\pi}{T} . \Big|_0^{T/2}$$

$$a_0 = -\frac{A}{\pi} . \cos \left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}} . \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}} - \cos \frac{2\pi}{T} . 0 \right)$$

$$a_0 = -\frac{A}{\pi} . \cos (-1 - 1)$$

$$a_0 = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T/2} . \int_0^{T/2} A . \operatorname{sen} \underline{\frac{2\pi}{T} . t} \cos n \times \frac{2\pi}{T/2} . t \, dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} . A \int_0^{T/2} \operatorname{sen} \underbrace{\frac{2\pi}{T} . t}_{\alpha} . \cos \underbrace{n \times \frac{4\pi}{T} . t}_{\beta} \, dt$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha . \cos\beta + \operatorname{sen}\beta . \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta . \cos\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2} = \operatorname{sen}\alpha . \cos\beta .$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)}{2} = \text{sen}\,\alpha . \cos\beta .$$

$$a_n = \frac{4A}{2T} \Big\{ \int_0^{T/2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{4\pi}{T}.n\right) t \, dt + \int_0^{T/2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{4\pi}{T}.n\right) t \, dt$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \Big\{ \underbrace{\int_0^{T/2} \text{sen}(1+2n) \frac{2\pi}{T} t \, dt}_{C} + \underbrace{\int_0^{T/2} \text{sen}\left(1-2n\right) \frac{2\pi}{T} \, dt}_{B}$$

$$C = \frac{-2A}{T} . \frac{1}{(1+2n)\frac{2\pi}{T}} . \cos(1+2n)\frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2}$$

$$C = -\frac{A}{(1+2n)\pi} . \left(\cos(1+2n) \frac{2\pi}{T} . \frac{T}{2} - 1\right)$$

$$C = \frac{-A}{(1+2n)\pi} \left(\cos(1+2n)\pi - 1\right)$$

$$C = \frac{2A}{(1+2n)\pi}$$

$$a_n = \frac{2A}{(1+2n)\pi} + \frac{2A}{(1-2n)\pi}$$

$$B = \frac{-2A}{T} . \frac{1}{(1-2n)\frac{2\pi}{T}} . \cos(1-2n)\frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2}$$

$$B = \frac{-A}{(1-2n)\pi} . \left(\cos(1-2n)\frac{2\pi}{T} . T/2 - 1\right)$$

$$B = \frac{2A}{(1-2n)\pi}$$

$$a_n = \frac{2A}{(1+2n)\pi} + \frac{2A}{(1-2n)\pi}$$

$$a_n = \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1-\cancel{2n}+1+\cancel{2n}}{(1+2n)(1-2n)}\right) = \frac{2A}{\pi}\cdot\frac{2}{1^2-4n^2}$$

$$a_n = \frac{4A}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1-4n^2}\right)$$

$\boxed{b_n = 0 \quad \text{hacer cálculos.}}$

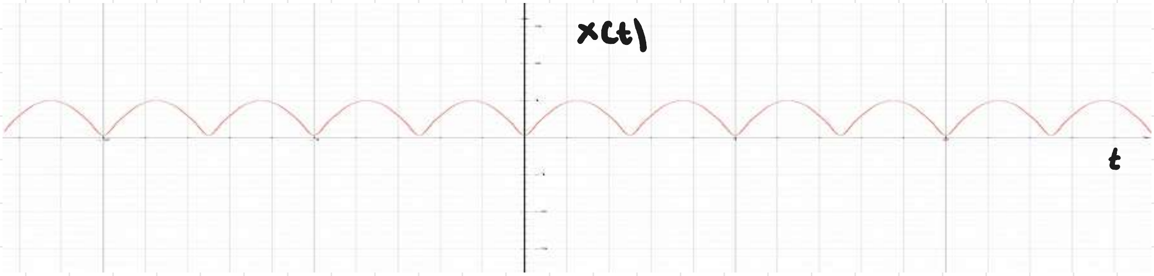
$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{T/2}\cdot t\right)$$

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)$$

Hacemos $A=1$ y a $T=1$ para graficarlo.

$$x(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cdot\cos(4\pi t) - \frac{4}{15\pi}\cos\left(2\times\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)$$

$$-\frac{4}{35\pi}\cdot\cos(3\times 4\pi\cdot t) - \frac{4}{65\pi}\cos(4\times 4\pi\times t)$$



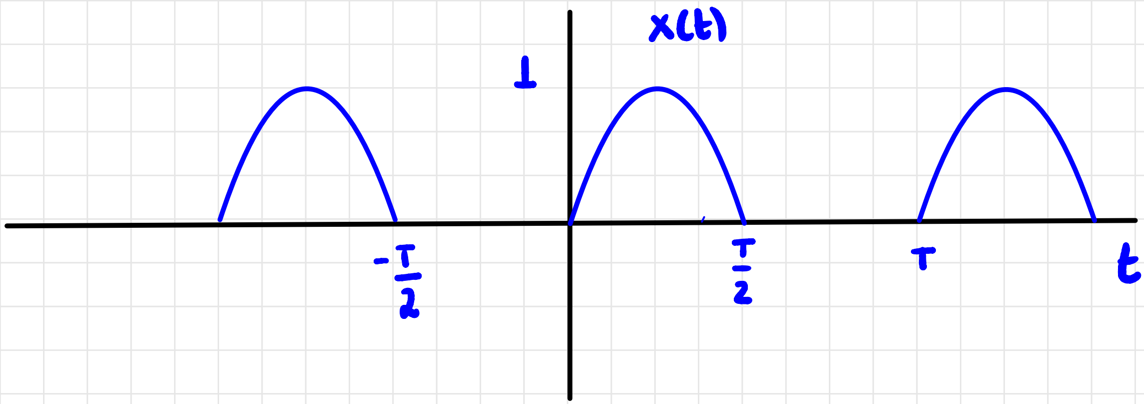
Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

C

Nombre: ______________________ Código: ________

Nombre: ______________________ Código: ________

Determine para $x(t)$, una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0,01. Finalmente grafique los armónicos vs la frecuencia y La gráfica de $\hat{x}(t)$.



$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ \operatorname{sen} \omega_0 t & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

$$x(t+T) = x(t)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

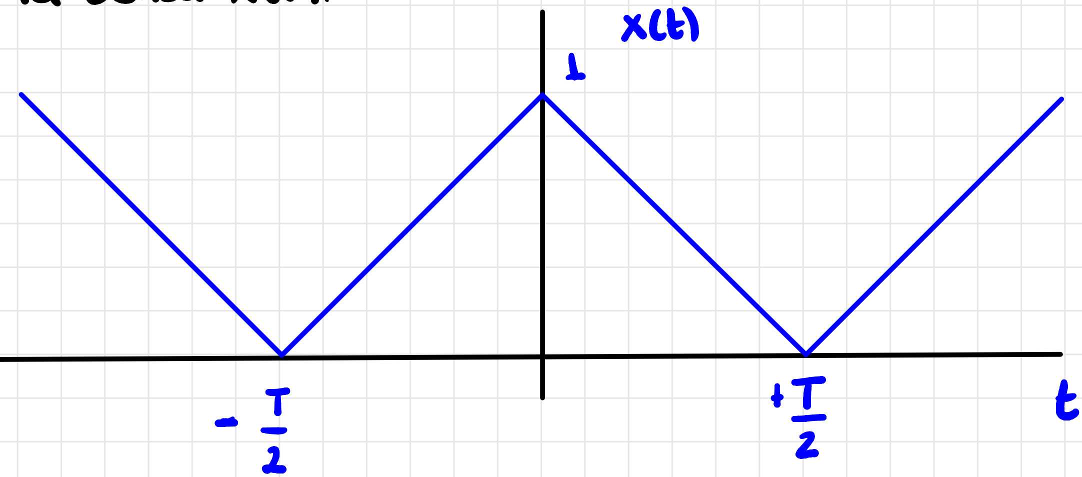
Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

D

Nombre: ______________________________ Código: ________

Nombre: ______________________________ Código: ________

Determine para x(t), una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0,01. Finalmente grafíque los armónicos vs la frecuencia y la señal $\hat{x}(t)$.



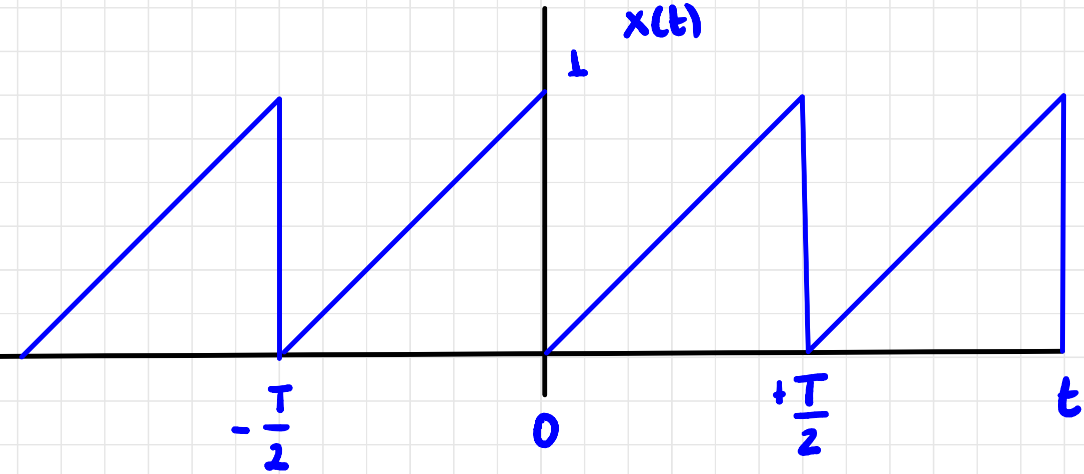
Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

E

Nombre: ______________________________ Código: ________

Nombre: ______________________________ Código: ________

Determine para x(t), una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier. y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0,01. Finalmente grafíque los armónicos vs la frecuencia.



Universidad Tecnológica de Pereira
Análisis de señales

F

Nombre: ______________________________ Código: ________

Nombre: ______________________________ Código: ________

Determine para x(t), una representación utilizando la Base trigonométrica de Fourier. y cuya potencia media en el error que se cometa sea del 0,01. Finalmente grafíque los armónicos vs la frecuencia.