Paul Dirac

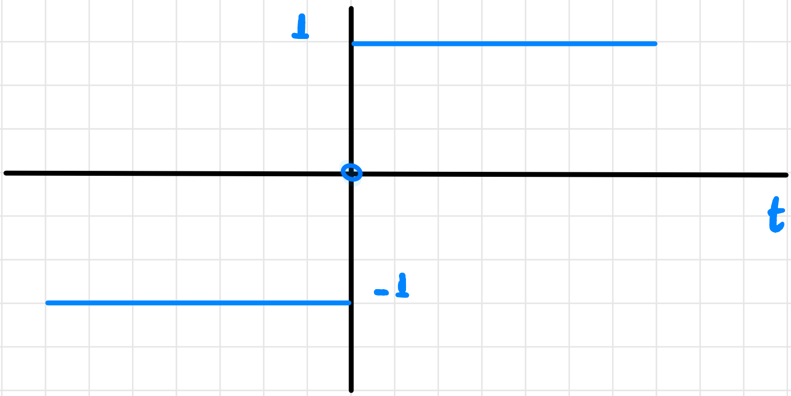
La función delta de dirac es una función matemática $\delta(t)$, con aplicaciones en física e ingeniería.
La función delta-dirac, le debe su nombre al físico británico Paul Dirac quien hizo importantes contribuciones a la mecánica cuántica y a la teoría cuántica de campos.
La función delta dirac es estremadamente útil en matemáticas y física debido a su capacidad para describir distribuciones pontuales o concentradas en un punto en particular. En mecánica cuántica sirve para representar estados discretos y calcular probabilidades de estados discretos. En la teoría de señales e Ingeniería, se aplica en el análisis de sistemas lineales.
Paul Dirac, fue quien le dio una fundamentación matemática más rigurosa.

Son funciones que son modelos ideales matemáticos, y no aparecen en sistemas físicos implementables. Sin embargo, son buenas aproximaciones a ciertas condiciones y restricciones de los sistemas físicos.

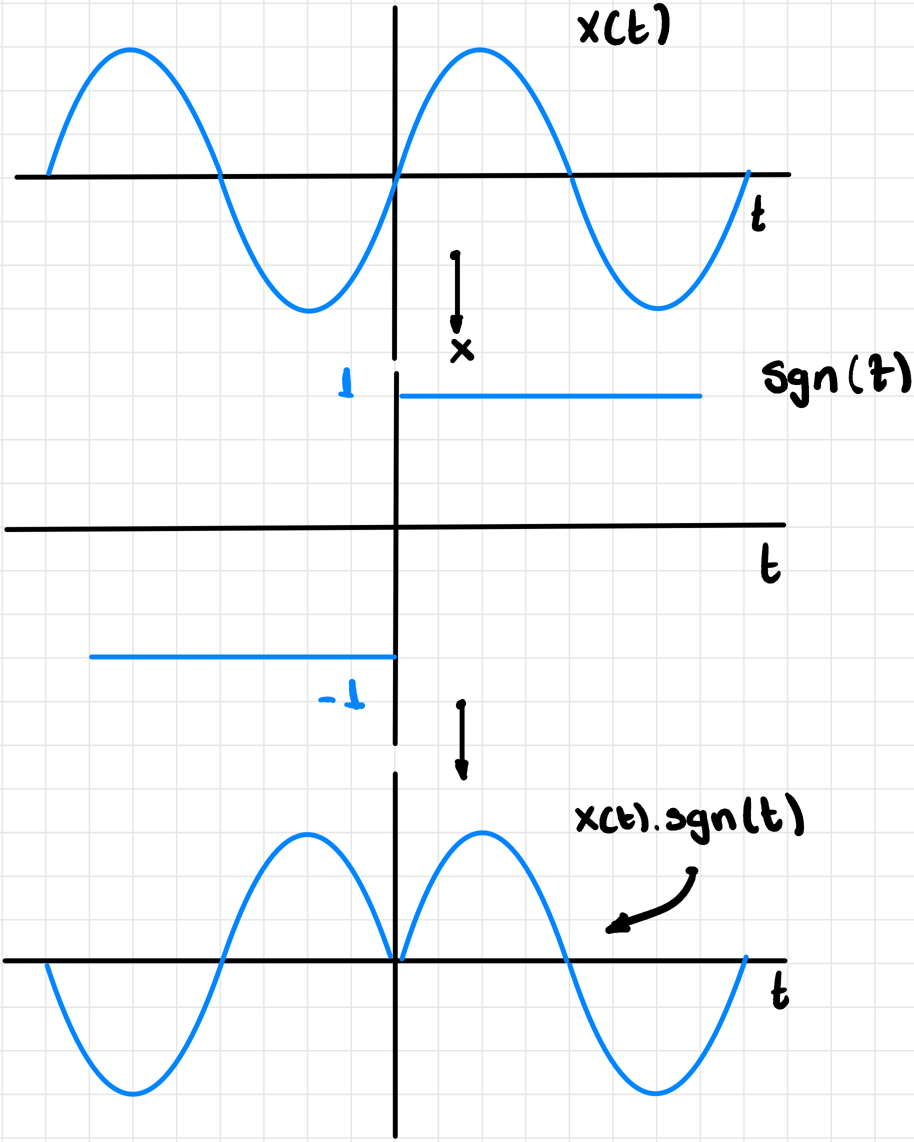
Función signo:

$$\boxed{\operatorname{Sgn}(t)}$$

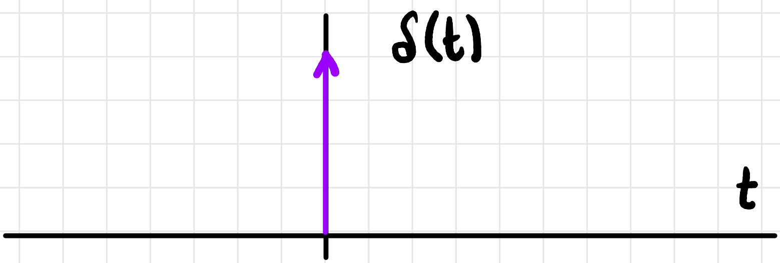
$$\operatorname{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$




Donde la Multiplicación de una señal $x(t)$ por la función $\operatorname{Sgn}(t)$, denota el Cambio de signo a partir del instante de tiempo $t=0$




Función delta dirac o función impulso.



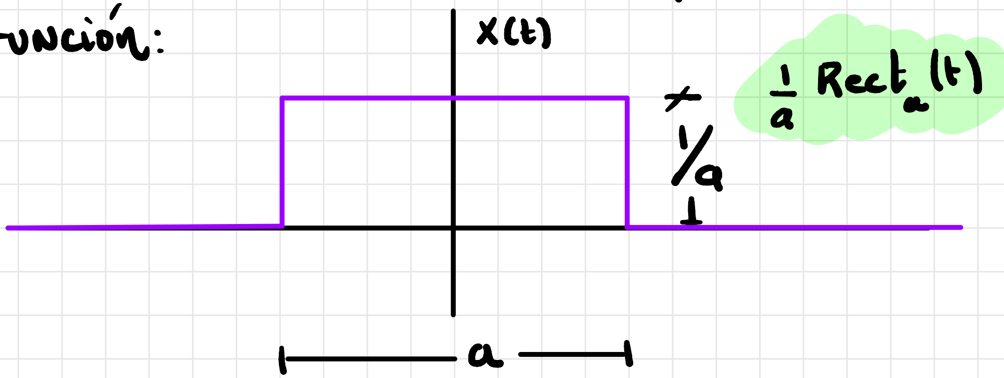
La función $\delta(t)$ se puede definir como.

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}}$$

Como $\delta(t)$ es una función simbólica se define a partir de la integral indefinida.

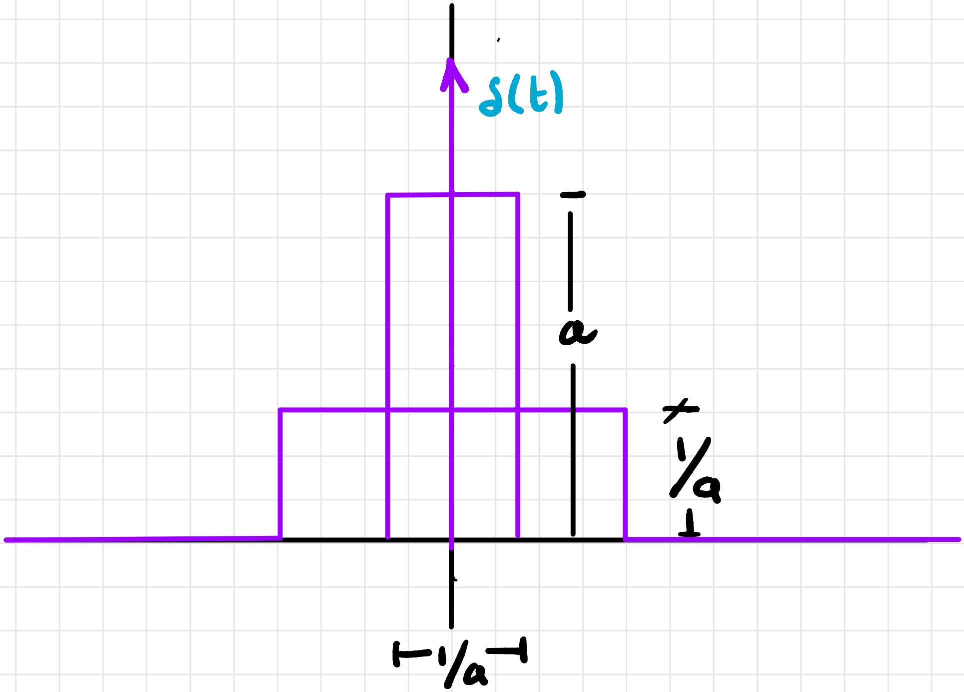
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.} \quad = \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, dt \qquad \text{para } \epsilon > 0$$

Su demostración puede hacerse a partir de la siguiente función:




La función $x(t) = \frac{1}{a} \text{Rect}_a(t)$

es una función cuya área es igual a 1. y siempre mantendrá su Area = 1 para valores diferentes de $a$, incluso cuando $a$ tienda a cero.




en el límite.

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \text{Rect}_a(t)\, dt = 1$$

que coincide con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Esta definición puede ser expandida a la siguiente integral

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) . \phi(t)\, dt = \phi(0)}$$

Donde $\phi(t)$ es una función de prueba la cual se hace cero en algún lugar finito es decir:

$$\boxed{\lim_{t\to\pm\infty} \phi(t) = 0}$$

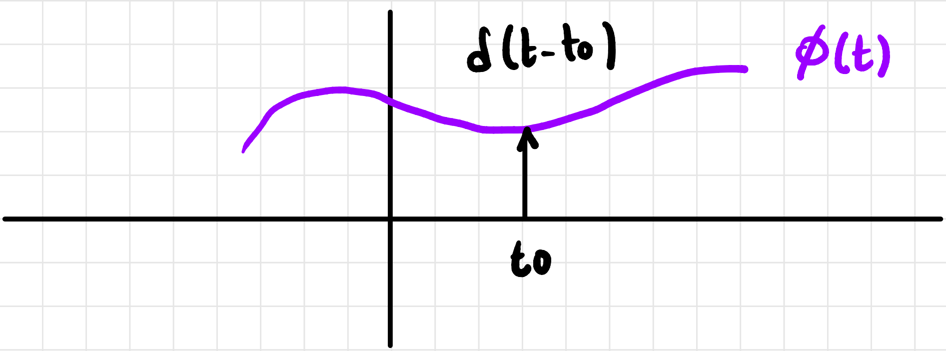
$\phi(t)$, debe ser de soporte compacto.

## Propiedades.

### 1. Propiedad de muestreo.

también llamada propiedad de selectividad y sirve entre otras aplicaciones para definir matemáticamente el efecto de un sistema de tomar en un instante de tiempo una muestra de una señal proveniente de un sistema físico.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\phi(t)\,dt = \phi(t)\Big|_{t=t_0} = \phi(t_0)$$



2. Propiedad del escalonamiento de la función $\delta(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at).\phi(t)\,dt = \frac{1}{|a|}.\phi(0)$$

donde el valor de $a \in \mathbb{R}$.

Demostración.

para $a>0$ y haciendo $\tau = at$, $t = \tau/a$, $dt = d\tau/a$

la integral toma la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau).\phi(\tau/a).\frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a}\,\phi(\tau/a)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \frac{1}{a}\phi(0).$$

Si $a<0$ y teniendo en cuenta $\tau = at$, $t = \tau/a$, $dt = d\tau/a$, $t \to +\infty \Rightarrow \tau = -\infty$ y $t \to -\infty \Rightarrow \tau = +\infty$

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\tau).\phi(\tau/a)\,\frac{d\tau}{a}$$

y Recordando que $a<0$ entonces la integral tomará la forma:

$$-\frac{1}{|a|}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\cdot\phi(\tau/a)\,d\tau =$$

$$\frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\cdot\phi(\tau/a)\,d\tau = \frac{1}{|a|}\cdot\phi(\tau/a)\Big|_{\tau=0}$$

$$= \frac{1}{|a|}\cdot\phi(0)$$

Por lo tanto la solución de la Integral es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\,\phi(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\cdot\phi(0)$$

De lo anterior podríamos demostrar que:

$$\boxed{f(t)\cdot\delta(t) = f(0)\cdot\delta(t)}$$

Partimos nuevamente de la integral Simbólica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t)\cdot\phi(t)\,dt = f(t)\cdot\phi(t)\Big|_{t=0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot\left(f(t)\cdot\phi(t)\right)dt = f(t)\cdot\phi(t)\Big|_{t=0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot\left(f(t)\cdot\phi(t)\right)dt = f(0)\cdot\phi(0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).(f(t).\phi(t))\,dt = f(0).\phi(0)$$

Pero como $\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\phi(t)\,dt.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).\phi(t)\,dt = f(0).\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\phi(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0).\delta(t).\phi(t)\,dt$$

Ahora, para que el par de Integrales sean iguales los factores

$$\boxed{f(t).\delta(t) = f(0).\delta(t)}$$

Ejemplo:

Evaluar el siguiente par de ecuaciones:

a) $t.\delta(t) = 0.\delta(t) = 0$

b) $e^{-at}.\cos(2\pi t)\,\delta(t) = \delta(t)$

c) $e^{-a\,\mathrm{sen}(\pi t)}.3\cos(2\pi t).\delta(t) = ?$

Demostrar que:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

Si partimos de la propiedad 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) \cdot \phi(t)\,dt = \frac{1}{|a|} \cdot \phi(0)$$

y Recordando que $\phi(0)$ es igual a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) \cdot \phi(t)\,dt = \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) \cdot dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) \cdot \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t) \cdot \phi(t) \cdot dt$$

y Para que las integrales sean iguales

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)}$$

Ejercicio: Demostrar que la función $\delta(t)$ es una función par.

$$\delta(-t) = \delta(-1 \cdot t) = \frac{1}{|-1|} \cdot \delta(t)$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

Lo que demuestra que $\delta(t)$ es una función par.

3. Propiedad de la derivada de la función $\delta(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi'(t)\,dt = -\phi'(0)}$$

Para demostrar esta propiedad, se demostrará primero que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t).\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\,\phi'(t)\,dt$$

Dividiendo por partes $\quad u.v - \int v.du.$

$u = \phi(t) \rightarrow du = \phi'(t)$

$dv = f'(t) \rightarrow v = f(t)$

$$\phi(t).\,f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\,\phi'(t)\,dt$$

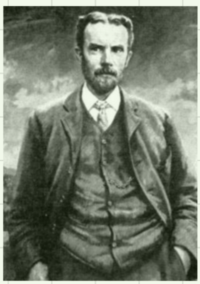
$$\phi(+\infty).\,f(t) - \phi(-\infty).\,f(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\,\phi'(t)\,dt$$

Por ser $\phi(t)$ una función de prueba que se hace cero en $\pm\infty \Rightarrow$ la integral quedará

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t).\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\phi'(t)\,dt.$$

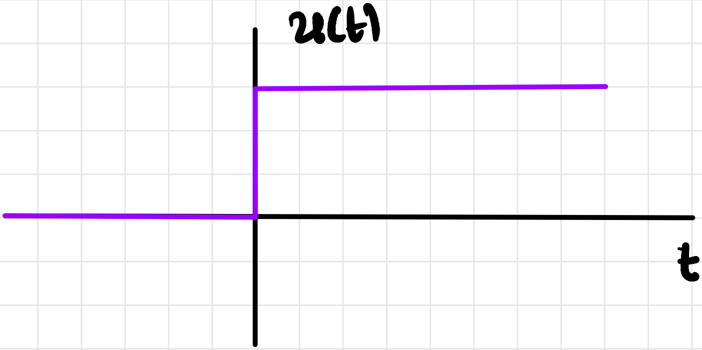
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t).\phi(t)\,dt = -\phi'(t)\Big|_{t=0} = -\phi'(0) \checkmark$$

## Función escalón unitario ó función Heaviside



Oliver Heaviside, 18 Mayo 1850. Físico Matemático, Ingeniero eléctrico radio telegrafista y matemático inglés. Introdujo los números complejos en el análisis de circuitos e introdujo una nueva técnica para solucionar ecuaciones diferenciales

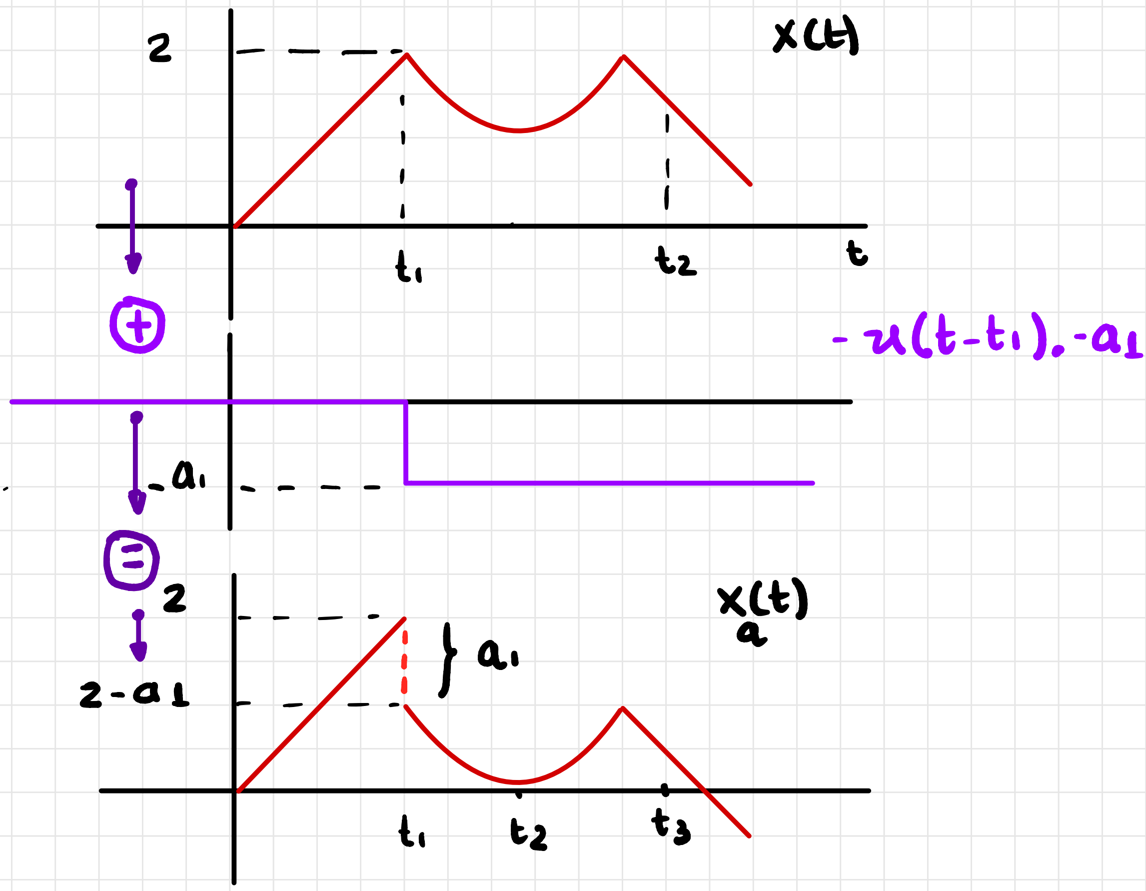
## 3. La función escalón se define como:




$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Nos servirá para modelar discontinuidades en señales.

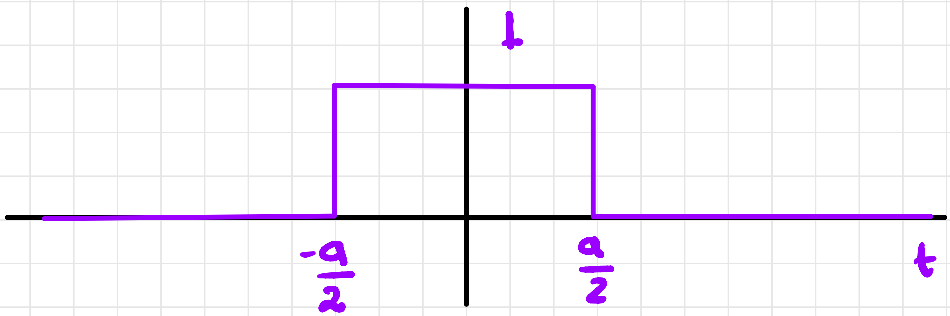
Ejemplo: dada la función $x(t)$. Genere discontinuidades en el tiempo $t_1$ en una magnitud $-a_1$




Ejercicio: genere dos discontinuidades más a la señal $x_a(t)$. Para $t_2$ en $+a_2$ y en $t_3$ en $-a_3$

## 4. Función Compuerta.

$\mathrm{Rect}_a(t)$ ó $\sqcap_a(t)$




$$\mathrm{Rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{para cualquier otro caso.} \end{cases}$$

## Derivada de la función $u(t)$

Su demostración se realiza a partir de la siguiente integral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) \cdot \phi(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) \cdot \phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot \phi'(t)\, dt = -\int_{0}^{+\infty} \phi'(t)\, dt$$

$$= -\phi(t)\Big|_{0}^{+\infty} = -(\phi(+\infty) - \phi(0))$$

$$= \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t).\phi(t)\,dt = \phi(0)$$

Pero como $\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\phi(t)\,dt$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t).\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\phi(t)\,dt$$

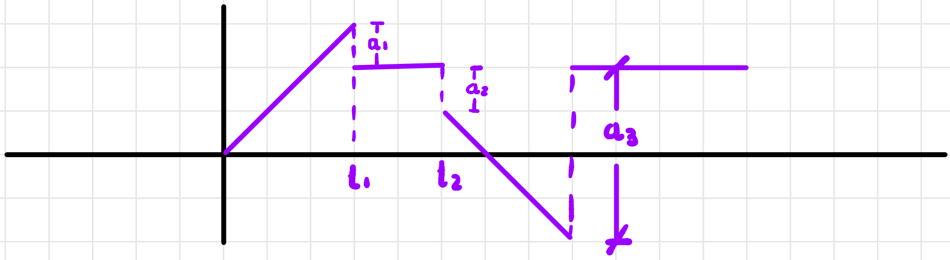
Para que las integrales sean iguales, debe:

$$u'(t) = \delta(t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

Ejemplo:

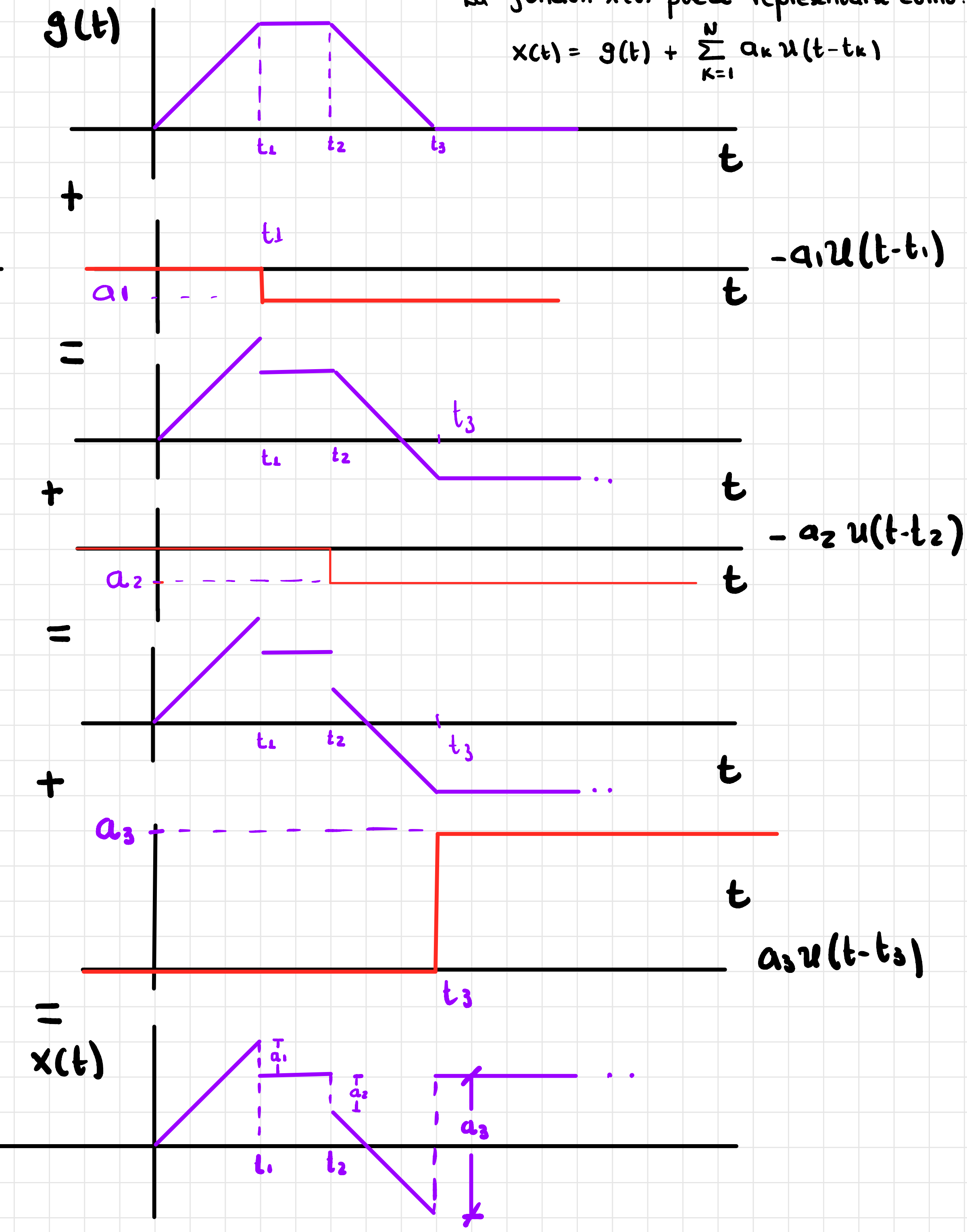
Sea la función $x(t)$




Hallar su derivada.

La función x(t) puede representarse como:

$$x(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k u(t - t_k)$$

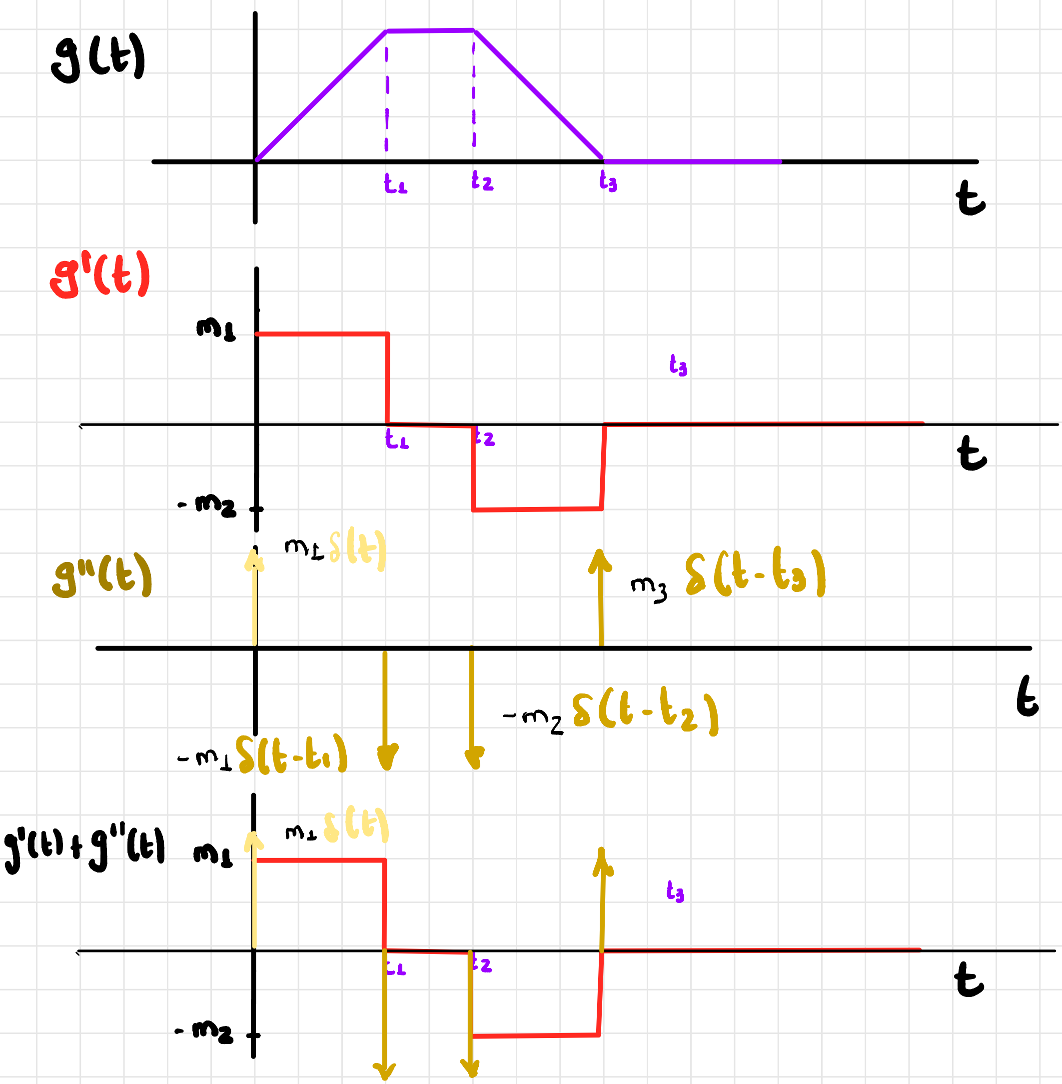


Por lo tanto $x(t)$, se puede representar como:

$$x(t) = g(t) - a_1 u(t-t_1) - a_2 u(t-t_2) + a_3 u(t-t_3)$$

y su derivada para $t>0$ es:

$$x'(t) = g'(t) - a_1 \delta(t-t_1) - a_2 \delta(t-t_2) + a_3 \delta(t-t_3)$$



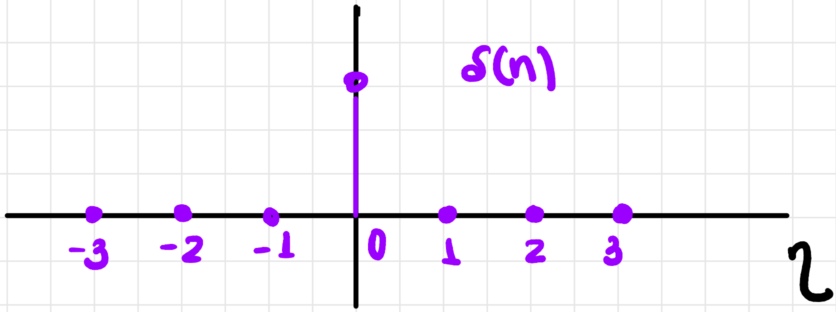
# Algunas señales singulares discretas en el tiempo

## 1) Impulso unitario ó muestra unitaria

Se denota por $\delta(n)$ y se define como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

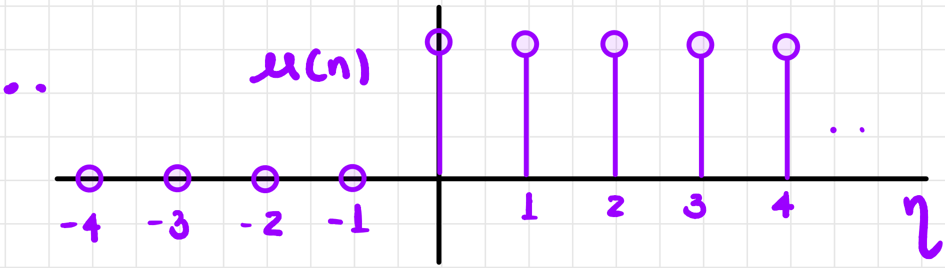
Esta señal al igual que la función $\delta(t)$ que también es igual a cero excepto en $t=0$, donde su área es igual a la unidad. La secuencia muestra unitaria es mucho menos complicada matemáticamente. Su representación gráfica se enseña.



## 2. Señal escalón unidad.

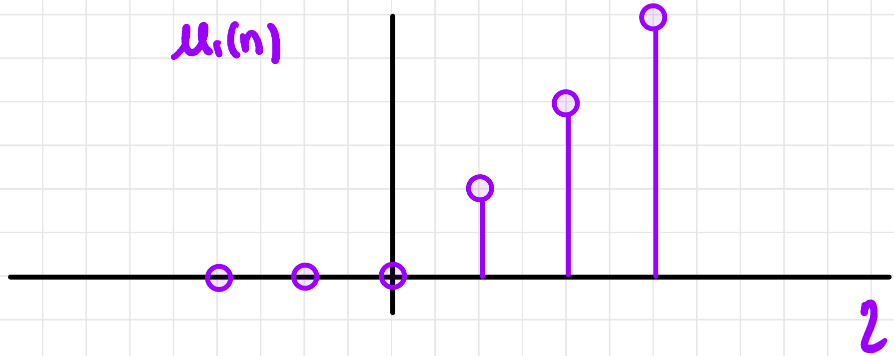
Se denota como $u(n)$ y se define como:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



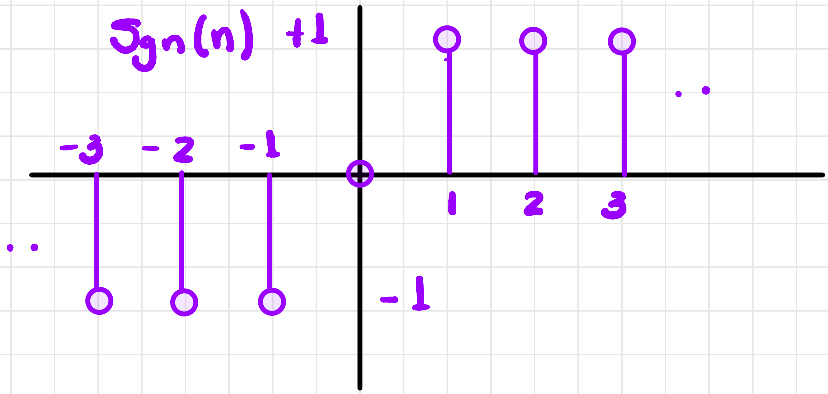

## 3. Señal rampa unidad se denota como $u_r(n)$ y se define como.

$$u_r(n) = \begin{cases} n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$



**4. Señal Signo:** se denota como $Sgn(t)$ y se define como

$$
\boxed{Sgn(n) = \begin{cases} +1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}}
$$




**5. Señal exponencial:** se denota como $x(n) = a^n$ $\forall n$.

Donde $a \in \mathbb{R}$, por lo tanto $x(n)$ será una señal real.

Si el parámetro $a$ es un complejo, se expresa como:

$a = re^{j\theta}$ $\qquad x(n) = a^n \qquad x(n) = (re^{j\theta})^n$

Por lo tanto x(n) puede expresarse de la siguiente manera

$$x(n) = r^n \cdot e^{j\theta n} = r^n(\cos\theta n + j\operatorname{sen}\theta n)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_R(n) = r^n \cos\theta n & \text{Parte Real de } x(n) \\ x_i(n) = r^n \operatorname{sen}\theta . n & \text{Parte Imaginaria de } x(n) \end{array}}$$

Además x(n) se puede expresar en su Magnitud y fase así:

$$\boxed{\begin{array}{l} |x(n)| = r^n \\ \angle x(n) = \theta n \end{array}}$$

Ejercicio:

Graficar x(n) para un valor real de a

1) $0 < a < 1$ ; 2) $a = 1$ 3) $a > 1$

Graficar $x(n)$, parte Real e Imaginaria; Magnitud y Fase; para $r = 0{,}9$ y $\theta = \pi/10$

$$\boxed{x(n) = a^n \quad y \quad a = re^{j\theta}}$$

$$x(n) = (re^{j\theta})^n$$

$$x(n) = r^n e^{j\theta n}$$

$$x(n) = r^n e^{j(\theta . n)}$$

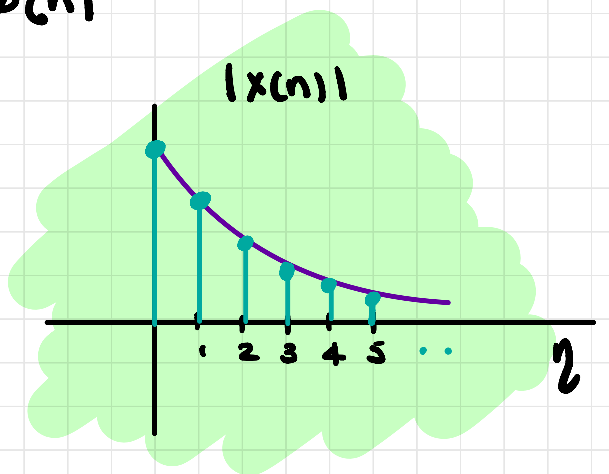
$$x(n) = |x(n)| . e^{j\phi(n)}$$

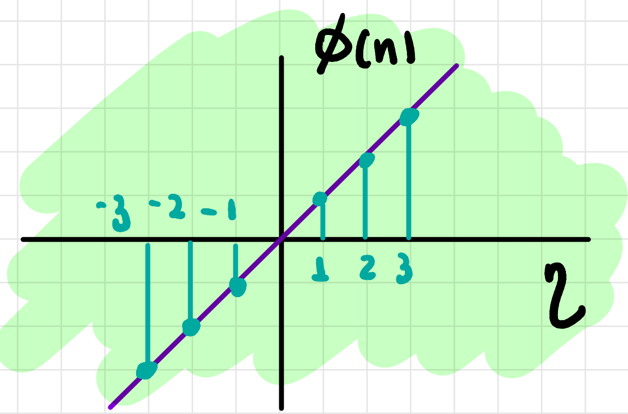
$$|x(n)| = r^n$$

$$\phi(n) = \theta . n$$

$$|x(n)| = 0.9^n$$

$$\phi(n) = \frac{\pi}{10} . n$$



Nicolas Maquiavelo – El Peincipe.


fue un diplomático, funcionario, filósofo político y escritor, considerado el padre de la ciencia política; Nació en 1492.

El principe de Maquiavelo es un Libro Contraversial escrito en 1513.

Comparaciones, idealismos, NQ ralidad y gobernantes de la época llenos de poder, son algunos de los escenarios políticos. Las ideas principales del principe de Maquiavelo son:

En el Peincipe se trata de Plasmar cuáles son los principales ideales políticos para gobernar una nación, esto mediante comparaciones históeicas.

En los primeros capitulos Maquiavelo destaca los diferentes gobernantes, los estilos de reinar y todo lo que conlleva esto.

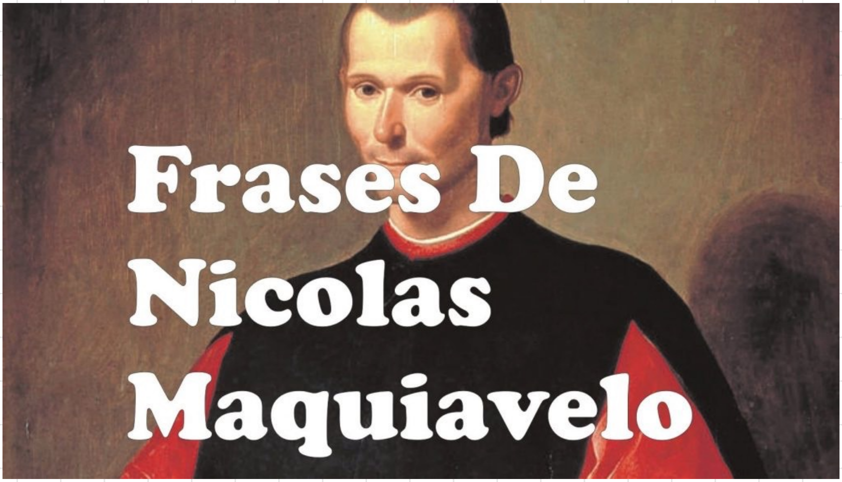
Las ideas principales de Maquiavelo, se basan en cómo gobernar de forma exitosa una nación siguiendo cierto tipo de conductas.

El qué hacer cuando se llega al poder y que decisiones son las mejores a tomar.

Qué hacer el gobernante en tiempos de paz y cómo mantener a un pueblo satisfecho

Además Maquiavelo manifiesta que el poder no viene de la opresión y que el idealismo no debe ser venerado.

idealismo: tendencia a considerar al mundo y la vida de acuerdo a unos modelos de armonía. y perfección ideal.




"tienes por enemigos a todos los que has ofendido al ocupar el principado, y no puedes conservar como amigos a los que te han ayudado a conquistarlo."

" A los hombres hay que conquistarlos o eliminarlos, porque si se vengan de las ofensas leves, de las graves no puedan; así que la ofensa que se haga al hombre debe ser tal, que le resulte imposible vengarse"

" El que menos ha confiado en el azar es siempre el que más tiempo se ha conservado en su conquista."

" Los cimientos indispensables a todos los Estados, nuevos, antiguos o mixtos, son las buenas leyes y las buenas tropas"

" Las armas ajenas o se caen de los hombros del principe, o le pesan o le opriman"

" Un principe jamás debe dejar de ocuparse del arte militar, y durante los tiempos de paz debe ejercitarse más que en los de guerra."


https://youtu.be/V_wVuYel_Sc