

Representación de señales y sistemas

Germán Castellanos Domínguez

Universidad Nacional de Colombia, Manizales

Álvaro Ángel Orozco Gutiérrez

Universidad Tecnológica de Pereira

2007

Taller de Publicaciones- Universidad Tecnológica de Pereira

camare@utp.edu.co

*Realizado bajo el auspicio de COLCIENCIAS, Proyecto código 1110-14-17904

ISBN: 978-958-8272-33-7

Este libro está hecho con ayuda de KOMA-Script y L^AT_EX.

Notaciones

<i>Notación</i>	<i>Significado</i>
x	Escalar
$x(s)$	Función con variable s
\mathbf{x}	Vector escalar
$x^*(\cdot)$	Conjugado de x
$x(s_k)$	Valor de la función en el argumento s_k
$f_{a,b}(s), \mathbf{f}$	Función f con parámetros a, b y argumento s , función vectorial
$\{x_k : k = 1, \dots, N\}$	Serie o sucesión de valores de longitud N
$x[k]$	Señal discretizada (base normalizada k)
$\langle x, y \rangle$	Producto interno de x e y
$d(x_m, y_n), d(x, y)$	Distancia entre los elementos x_m e y_n , o entre las funciones x e y
$\ x\ $	Norma de x
$x_k(t)$	Trayectoria k de la señal $x(t)$
$\dot{x}(s), \ddot{x}(s)$	Primera, segunda derivada de la función x por s
$\text{rank}(\mathbf{x}), \text{rank}(\mathbf{X})$	Rango del vector \mathbf{x} , de la matriz \mathbf{X}
$\mathcal{E}_f, \mathcal{P}_f$	Energía de la señal f , Potencia de la señal f
$\mathbf{Z}_{m \times n}, \mathbf{\Phi}^T, \mathbf{\Phi}^H$	Matriz de orden $m \times n$, matriz transpuesta, matriz Hermitiana
$\mathbf{J}(x_1 \dots, x_n)$	Jacobiano por las variables x_1, \dots, x_n
$\text{supp}(x), \text{car}(x), \text{trace}(\mathbf{X})$	Soporte de la función x , cardinal de x , traza de \mathbf{X}
\mathbf{I}, \mathbf{i}	Matriz de identidad, vector unitario
\mathfrak{X}	Conjunto, espacio
$\mathcal{O}\{N\}$	Orden del número de operaciones
$o(x)$	Función de valores despreciables, $o(x)/x \rightarrow 0, x \rightarrow 0$
$\mathcal{K}\{x\}(s)$	Transformada (operador) sobre x con argumento s
$\mathcal{F}, \mathcal{Z}, \mathcal{L}$	T. Fourier, Zeta, Laplace
$X(s)$	Representación espectral con variable s
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Dominio de los enteros, naturales, reales y complejos
$\Re\{x\}, \Im\{x\}$	Parte real de x , parte imaginaria de x
$\xi(s)$	Señal aleatoria (alfabeto griego) de variable s
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Operador de esperanza matemática

Prefacio

La rápida evolución en la tecnología electrónica, en particular de los procesadores digitales, así como el aporte significativo de nuevos y cada vez más efectivos algoritmos de análisis han hecho del proceso digital de señales un factor importante en el desarrollo de áreas como la Instrumentación y Control, las Telecomunicaciones y la Telemática, la Electromedicina, entre otras, brindado al sector productivo e investigación una nueva y potente herramienta de trabajo, que puede expandir significativamente su capacidad y posibilidades. El objetivo del curso es dar a conocer los principales métodos de análisis aplicado de señales aleatorias con carga informativa, que puedan ser desarrollados por técnicas de proceso digital.

El material dispuesto en el presente texto describe los métodos y principios del proceso de señales, que actualmente encuentran amplio uso. Se analizan los modelos de señales, el análisis espectral generalizado, el desarrollo de algoritmos rápidos de cálculo de transformadas ortogonales, los principios de diseño de dispositivos digitales de filtración, como elemento básico de proceso, los métodos de representación de aleatoriedad y la estimación de sus respectivos valores, con especial énfasis en el caso de análisis de procesos estocásticos. Por último, se generaliza el análisis de la filtración como un proceso de estimación, acoplado se emplea a casos reales de proceso de señales aleatorias.

El contenido del texto es el siguiente: el capítulo I describe los principales métodos de representación determinística de señales y sistemas en tiempo continuo, mientras el capítulo II describe los principales métodos de representación en tiempo discreto. Por cuanto, la filtración sigue siendo uno de los procedimientos fundamentales de mayor empleo en el proceso de señales, el capítulo III describe en detalle los principios básicos de filtración digital. El capítulo IV analiza la caracterización de señales aleatorias, particularmente las estacionarias. En el Apéndice A se desarrollan los algoritmos generales de análisis de señales y sistemas sobre procesadores digitales.

El libro está orientado a los estudiantes de posgrado, que requieran profundizar en la representación espectral de señales y sistemas, orientada al procesamiento digital, sin embargo, puede ser empleado por estudiantes de pregrado, en los cursos de *Teoría de Señales y Proceso Digital de Señales*. El material teórico presentado tiene carácter de referencia, y por esto no se da la deducción de algunas expresiones, brindándose la literatura necesaria para la profundización de cada tema en particular. Así mismo, algunos de los programas, diagramas y circuitos presentados han sido probados y aunque distan de ser la única solución técnica posible, estos tienen como fin mostrar un ejemplo práctico y concreto de realización.

Por último, los autores agradecen al profesor Omar E. Ospina por sus consejos y correcciones hechos para dar mayor precisión y entendimiento del presente trabajo. Se agradece también la colaboración de los estudiantes del Programa de Posgrado (Automatización Industrial en la Universidad Nacional de Colombia e Ingeniería Eléctrica en la Universidad Tecnológica de Pereira), quienes en el curso de *Teoría de Señales*, probaron la mayoría de los algoritmos mostrados en el texto. Con especial atención, agradecemos a los estudiantes de Posgrado Eduardo Giraldo, Juliana Osorio y Victoria Eugenia Montes, así como al estudiante del Programa Curricular de Matemáticas Fernando Martínez, quienes pacientemente leyeron y siguieron la evolución de los diferentes borradores del texto.

Introducción

Actualmente, tiene amplio uso el proceso de información y, en particular, el análisis o interpretación de señales producidas por variaciones en el tiempo de procesos físicos. El proceso de información típicamente se realiza empleando las señales eléctricas, entre otras razones, porque éstas son relativamente fáciles de controlar por medio de equipos electrónicos, entre ellos los digitales, además estas trabajan a velocidades cercanas a la de la luz, lo que propicia el desarrollo de tareas en tiempo real.

Las aplicaciones del proceso de señales van desde las finanzas, industria, bienestar de la sociedad hasta la defensa, abarcando diferentes disciplinas como las comunicaciones, sistemas de control, electromedicina, física, astronomía, radar, dinámica de fluidos, sismología, etc. Muchas de estas aplicaciones están relacionadas con el aumento en el número y diversificación de los equipos de proceso digital que actualmente se siguen desarrollando. Hoy en día, los computadores personales como sistema de proceso digital se encuentran en una gran gama de precios, capacidades y tamaños. Debido a esto, el computador se ha convertido en elemento importante para el proceso de señales. Los sistemas de proceso de señales, por sus características ofrecidas, se convierten en herramientas fiables, robustas y portátiles, que pueden incluso desempeñar tareas en sitios y condiciones de difícil acceso humano.

En general, el Proceso Digital de Señales debe ser entendido como la posibilidad de emplear dispositivos digitales especializados en la solución de variadas tareas relacionadas con el análisis de señales. Así por ejemplo, está la filtración digital, que hoy en día muestra resultados teóricos bastante alentadores. Los desarrollos teóricos han avanzado desde los primeros seminarios abiertos de filtración digital realizados en el MIT (alrededor de 1955), los resultados de Kotelnikov y los obtenidos en la teoría de control (parcialmente fundada en el trabajo de Gurevich), en los que se describían profundamente los principios de la discretización de señales y sus efectos espectrales, pasando por los métodos de filtración digital, en base al empleo de operaciones lineales sobre señales con restricciones de estacionariedad, hasta los actuales métodos propuestos de representación localizada de señales con bases wavelet y los modelos complejos de representación de aleatoriedad, que incluyen los modelos de representación de la dinámica estadística y análisis de no estacionariedad, así como los métodos de filtración no lineal (filtración adaptativa e interpolación estadística) han dado un fuerte impulso a la filtración como elemento básico en el análisis y la síntesis de señales y sistemas. Tal vez esta sea la razón por la cual se observa una gran proliferación de herramientas especializadas, tanto de hardware, como de software integrados para el diseño de sistemas de proceso digital de señales en los más diversos campos de aplicación.

El primer aporte básico a la teoría del proceso digital de señales relacionado con el análisis y síntesis de filtros digitales fue realizado por Kaiser quien demostró la forma de cálculo de filtros digitales con características deseadas empleando transformadas lineales. Para la misma época, en 1965, apareció el artículo de Cooley y Tukey sobre la Transformada Discreta de Fourier, la que posteriormente fue desarrollada y se convertiría en el método de la Transformada Rápida de Fourier, cuyo mayor aporte fue la disminución sustancial del tiempo de cálculo en el análisis espectral en varios órdenes, lo que demostraba claramente en cuanto podían ser más rápidos los métodos digitales sobre los análogos. El algoritmo de la transformada rápida amplió el campo de aplicación del proceso de señales, el cual se extendió a tareas más complejas, de mayor velocidad de cambio de las magnitudes en el tiempo y con valores de energía a mayores componentes de frecuencia.

Hasta hace poco el aparato matemático básicamente empleado en el análisis de señales era el de Fourier. Las funciones trigonométricas no permiten localizar el análisis en determinados intervalos del tiempo y restringen el análisis de señales no estacionarias. La insuficiencia de estos métodos convencionales en la descripción y análisis de las señales, ha hecho que se empleen nuevas formas matemáticas y estadísticas de su representación.

Índice general

1. Representación de señales en tiempo continuo	1
1.1. Definiciones básicas	1
1.1.1. Clasificación de señales y sistemas	2
1.1.2. Proceso de señales	5
1.1.3. Señales singulares	5
1.2. Representación discreta de señales	11
1.2.1. Espacios de representación	11
1.2.2. Descomposición en funciones ortogonales	14
1.2.3. Conjunto ortogonal completo de Fourier	19
1.2.4. Otros conjuntos ortogonales	26
1.3. Representación integral de señales	39
1.3.1. Transformada de Fourier	40
1.3.2. Extensiones del análisis espectral de Fourier	47
1.3.3. Transformada de Walsh	53
1.3.4. Integral de convolución	54
1.3.5. Transformada de Hilbert	56
1.3.6. Transformada <i>wavelet</i>	58
2. Representación de sistemas en tiempo continuo	63
2.1. Representación de transformaciones lineales	63
2.1.1. Transformaciones y sistemas	63
2.1.2. Transformaciones lineales sobre espacios finitos	66
2.1.3. Operadores lineales en espacios integrables	68
2.2. Aproximación de operadores lineales	73
2.2.1. Aproximación por proyección ortogonal	73
2.2.2. Aproximación de operadores por norma	75
2.2.3. Representación espectral de operadores	77
2.3. Representación operacional de sistemas lineales	81
2.3.1. Método de la integral de superposición	81
2.3.2. Método de análisis espectral	84
2.3.3. Método de ecuaciones diferenciales	86
2.3.4. Sistemas discriminantes de frecuencia	88
2.3.5. Representación de sistemas no lineales	89
2.4. Representación matricial de sistemas	97
2.4.1. Sistemas lineales y variables de estado	97
2.4.2. Solución de la ecuación de estado	102

3. Representación de señales y sistemas en tiempo discreto	107
3.1. Discretización de señales en tiempo continuo	107
3.1.1. Discretización uniforme	107
3.1.2. Funciones discretas singulares	110
3.1.3. Transformada de Fourier de una señal discreta	111
3.2. Transformadas ortogonales discretas	115
3.2.1. Transformada discreta de Fourier	115
3.2.2. Extensiones de la transformada discreta de Fourier	118
3.2.3. Transformada generalizada discreta de Fourier	120
3.2.4. Transformada discreta de Walsh	126
3.2.5. Transformada discreta de Haar	127
3.2.6. Transformada discreta <i>wavelet</i>	128
3.3. Transformadas ortogonales discretas rápidas	137
3.3.1. Definición y restricciones de implementación	137
3.3.2. Transformada rápida de Fourier	138
3.3.3. Transformada rápida discreta de Walsh	142
3.3.4. Transformada rápida discreta de Haar	143
3.4. Representación ortogonal de sistemas en tiempo discreto	146
3.4.1. Respuesta discreta a impulso	146
3.4.2. Función de convolución discreta	147
3.4.3. Función de transferencia discreta	150
3.4.4. Filtros discretos de Walsh	152
4. Diseño de filtros digitales	157
4.1. Características de los filtros digitales	157
4.1.1. Condiciones de realización	157
4.1.2. Realización de filtros digitales	161
4.2. Síntesis de filtros recursivos	167
4.2.1. Cálculo de plantillas de filtros análogos	167
4.2.2. Síntesis de filtros recursivos en el tiempo	168
4.2.3. Síntesis de filtros recursivos en la frecuencia	173
4.3. Síntesis de filtros no recursivos	181
4.3.1. Condición de desfase lineal	181
4.3.2. Cálculo de filtros mediante series de Fourier	184
4.3.3. Discretización de la función de transferencia	197
4.3.4. Optimización de filtros no recursivos	199
4.3.5. Filtros no recursivos en el proceso de señales aleatorias	206
4.4. Filtración por descomposición lineal	213
4.4.1. Bancos de filtros	213
4.4.2. Descomposición polifásica	215
4.4.3. Estrategias de actualización	218
4.4.4. Factorización de la matriz polifásica	219
5. Estimación espectral	225
5.1. Representación espectral de procesos aleatorios	225
5.1.1. Descomposición de Karhunen-Loève	226
5.1.2. Densidad espectral de energía	229
5.1.3. Densidad espectral de potencia	231
5.1.4. Estimación de la densidad espectral de potencia	233
5.2. Estimación espectral no paramétrica	237
5.2.1. Método de los periodogramas	237
5.2.2. Algoritmo de cálculo del método de periodograma	243
5.2.3. Ventanas de estimación espectral	245
5.3. Estimación espectral paramétrica	249
5.3.1. Reacción de un sistema lineal a una señal estacionaria	249
5.3.2. Modelos paramétricos de señales aleatorias	250

5.3.3. Estimación de los parámetros a partir de la función de correlación	252
A. Algoritmos de análisis espectral de Fourier	257
A.1. Algoritmos de la transformada discreta de Fourier	257
A.1.1. Cálculo numérico de la transformada de Fourier	257
A.1.2. Cálculo numérico de la TDF	263
A.2. Cálculo de la transformada rápida de Fourier	268
A.2.1. Representación de dimensión múltiple de índices	268
A.2.2. Desarrollo teórico de la transformada rápida de Fourier	271
A.2.3. Algoritmo de Cooley-Tukey	274
A.2.4. Acomodación de datos en la TRF	280
Bibliografía	281
Índice alfabético	283

Capítulo

1

Representación de señales en tiempo continuo

Una *señal* se puede definir como una función que conlleva información, la cual se puede referir a un fenómeno físico medido o al comportamiento de un sistema físico. Aunque la información se puede representar en variadas formas, en todos los casos se busca que la información esté contenida en un patrón de variaciones de alguna forma. Las señales se representan matemáticamente por funciones de una o más variables independientes, las cuales pueden ser *continuas*, cuando se definen a lo largo de un intervalo continuo, o *discretas* cuando se definen para una malla de valores discretos del argumento, esto es, cuando la señal corresponde a una sucesión de valores.

1.1. Definiciones básicas

La *señal de entrada* $\mathbf{x}(s)$ es el enlace de interacción entre los elementos. De otra manera, es la acción llevada a activar el sistema. La *respuesta o salida* $\mathbf{y}(s)$ es la acción conjunta del sistema como resultado de una activación. El mismo sistema, que es un grupo de elementos u objetos con un fin determinado $\mathcal{K}\{\cdot\}$, se representa por una caja cerrada, o *caja negra*, con un número dado de terminales de entrada y salida, para propósitos de análisis como se ilustra en la Figura 1.1.

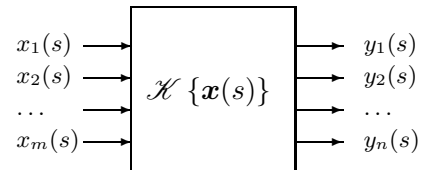


Figura 1.1. Diagrama de un sistema

En un sistema, cada señal de entrada se transforma en una única respuesta, lo que implica que actuando sobre una entrada $\mathbf{x}(s) = \{x_i(s) : i = 1, \dots, m\}$ se obtiene una única salida en la forma, $\mathbf{y}(s) = \{y_i(s) : i = 1, \dots, n\}$, cuya transformación generalizada se representa por:

$$\mathbf{y}(s) = \mathcal{K}\{\mathbf{x}(s)\}$$

donde $\mathcal{K}\{\cdot\}$ corresponde a la transformación o *transformada* de entrada-salida (o señal respuesta).

En este trabajo, para la mayoría de los casos de análisis, el parámetro s corresponderá al tiempo t .

1.1.1. Clasificación de señales y sistemas

Las señales, de acuerdo a la forma de definición de sus valores con respecto a su argumento del tiempo, se clasifican en los siguientes tipos:

- *Señales análogas o continuas (en el tiempo)*. Señales para las cuales, tanto su argumento como la misma función, pueden tomar cualquier valor del continuo de los intervalos para los que se define el argumento, $t \in [t_0, t_f]$, $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Las señales análogas pueden soportar discontinuidades de primer grado, $x(t_{k-}) \neq x(t_{k+})$, siendo $|x(t)| < \infty, \forall t$.
- *Señales discretas (en el tiempo)*. El argumento de la función (tiempo) está definido solamente sobre una malla de valores $x(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, la función toma cualquier valor del intervalo continuo $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$. En aquellos valores del tiempo sobre los cuales la señal no se define $t \neq t_k$, el valor de la función se asume igual a cero.

Cuando los valores de una señal discretizada en el tiempo, $x(t_k)$, pertenecen a un conjunto finito, $\mathbf{x}_Q \in \{x_Q(i) : i, \dots, N\}$, $N < \infty$, se habla de *señales digitales*.

Otras formas de clasificación de las señales son las siguientes:

- *Señal de energía*. Sin importar que el intervalo de tiempo sea infinito, se cumple que la energía de la señal es finita, esto es,

$$\mathcal{E}_x = \|x\|^2 = \int_T |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.1)$$

- *Señal de potencia*. Cuando la potencia media de la señal $x(t)$ durante un intervalo de tiempo T , es finita y no es igual a cero, es decir,

$$\overline{\mathcal{P}}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.2)$$

- *Señal periódica*. Cuando se cumple la condición

$$x(t+T) = x(t), \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \quad (1.3)$$

donde el valor de $\min\{T\}$ que satisfaga la condición (1.3), cuando existe, se denomina *período fundamental*. En caso de no cumplirse la anterior condición, la señal se denomina *aperiódica*.

Ejemplo 1.1. Demostrar la periodicidad de la función $x(t) = e^{j(\omega_0 t + \theta)}$, $-\infty < t < \infty$, donde $\omega_0 = cte$.

A partir de (1.3) se cumple que $x(t) = x(t+T) = x(t+nT), \forall n \in \mathbb{Z}$, con lo cual se puede demostrar la periodicidad de la función

$$x(t) = e^{j(\omega_0 t + \theta)} = e^{j(\omega_0(t+T) + \theta)} = e^{j\omega_0(t+T)} e^\theta = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} e^\theta$$

Además, la señal es periódica si $e^{j\omega_0 T} = \cos \omega_0 T + j \sin \omega_0 T = 1$, lo que equivale a decir que $\cos \omega_0 T = 1$ y $\sin \omega_0 T = 0$, entonces, $\omega_0 T = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\omega_0 = 2\pi k/T$.

Una *señal cuasiperiódica* corresponde a una función con período fundamental demasiado largo. Estas señales, generalmente, se componen por dos o más señales periódicas. Un ejemplo de señal cuasiperiódica compuesta de dos señales periódicas es la función compuesta de la forma:

$$x(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$$

- *Señal aleatoria*. Corresponde al caso de dependencias, para cuyo valor se tiene alguna incertidumbre en función de cualquier argumento.
- *Señal determinística*. Función que se puede modelar o describir analíticamente como una dependencia completamente especificada con respecto a su argumento.
- *Señal de dimensión multiple*. Función descrita a partir de un conjunto compuesto de $m \in \mathbb{Z}^+$ variables independientes. Cuando la función depende de una sola variable, se habla de *señales de dimensión única o simple*.

En cuanto a los sistemas, éstos se pueden clasificar de la siguiente forma:

- *Sistema lineal*, cuando se cumple la ley de superposición.

Sea $a_i y_i(t) = \mathcal{K} \{a_i x_i(t)\}$, donde $a_i = cte.$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \right\} &= \mathcal{K} \{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_i x_i(t) + \dots + a_n x_n(t)\} \\ &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_i y_i(t) + \dots + a_n y_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Cuando la expresión (1.4) no se cumple, el sistema se denomina *no lineal*.

Ejemplo 1.2. Sea un sistema con relación entrada-salida de la forma $y(t) = ax(t) + b$, siendo los valores $a, b = cte.$ Determinar el valor de b para el cual el sistema se puede considerar lineal.

Considerando dos señales de entrada diferentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las salidas correspondientes serían

$$y_i(t) = ax_i(t) + b, \quad i = 1, 2$$

Si se aplica la entrada $x_1(t) + x_2(t)$, la salida será $a(x_1(t) + x_2(t)) + b$. De acuerdo con la condición de linealidad (1.4), se debe cumplir que:

$$a(x_1(t) + x_2(t)) + b = a(x_1(t) + x_2(t)) + 2b,$$

luego, para $b = 0$ el sistema es lineal.

- *Sistema invariante (en el tiempo)*. Si un desplazamiento en el argumento de la función o señal de la entrada del sistema provoca respectivamente un corrimiento en el argumento de su respectiva salida. En el caso de señales que varían en el tiempo se tiene:

$$y(t - t_0) = \mathcal{K} \{x(t - t_0)\}, \quad \forall t_0 > 0 \tag{1.5}$$

En caso contrario, el sistema se denomina *variable*.

- *Sistema estable*. Si una señal de entrada $x(t)$ con amplitud finita, $\max\{|x(t)|\} < \infty$, produce una respuesta $y(t)$ de amplitud finita, o sea, $\max\{|y(t)|\} < \infty$. De otra manera, el sistema es *inestable*.
- *Sistema invertible*. Si distintas entradas producen distintas salidas, esto es, si al observar la salida del sistema se puede determinar su correspondiente entrada. En caso contrario, el sistema se considera *no invertible*.

Ejemplo 1.3. Cualquier sistema descrito por la ecuación, $y(t) = cte.$, debe ser considerado como no invertible, por cuanto genera un mismo valor a la salida, sin importar cual sea el valor de la señal de entrada.

- *Sistema realizable o causal*. Se debe tener una respuesta de salida que no suceda antes de ser aplicada al sistema una función de entrada. Esto es, si la función de entrada se aplica a partir de un tiempo, $t = t_0$, entonces, la respuesta sólo estará determinada para $t \geq t_0$. Si no se cumple esta condición el sistema es *no causal*.
- *Sistema (de tiempo) continuo*. Cuando los cambios de los valores de entrada y salida corresponden a intervalos continuos (en el tiempo).
- *Sistema (de tiempo) discreto*. Cuando las señales asociadas con el sistema son discretas, esto es, existen sobre una malla de valores puntuales (en el tiempo). En los demás valores del argumento, la señal es igual a cero.

Generalmente, los sistemas de tiempo continuo se modelan mediante ecuaciones diferenciales, mientras, los sistemas discretos, con ecuaciones iterativas.

- *Sistemas sin memoria*. Si la salida, para cualquier tiempo t_k , depende sólo de la entrada para el mismo valor de tiempo.
- *Sistemas con memoria*. Si la señal de salida, para un valor del tiempo dado t_k , depende de valores de la señal de entrada determinados dentro del intervalo $(t_k - T, t_k)$, entonces el sistema tiene memoria T .
- *Sistemas con parámetros concentrados*. Si el tiempo de proceso de la señal de entrada a través del sistema es considerablemente pequeño. Estos sistemas se modelan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. En los sistemas eléctricos, esto significa que la longitud de onda de la señal de entrada es mucho mayor con respecto a las dimensiones físicas de los elementos de proceso del sistema.
- *Sistemas con parámetros distribuidos*. La señal de entrada tarda un tiempo considerable en excitar los elementos del sistema, dependiendo el retardo de la velocidad de proceso de la señal. Estos sistemas se pueden modelar con ecuaciones diferenciales parciales.

1.1.2. Proceso de señales

El proceso, entendido como la transformación de las señales para el análisis de su información, se puede clasificar así:

- (a). *Continuo o análogo*. Cuando la transformación, que caracteriza el proceso, se realiza sobre una señal que repite la forma de la magnitud física observada, esto es, existe analogía entre ambas. El conjunto de valores sobre el cual se realiza el proceso es continuo y, por lo tanto, infinito.
- (b). *Digital*. Cuando la transformación se realiza sobre una función correspondiente a la forma de la magnitud física observada, la cual se representa por un conjunto finito (contable) y a priori conocido de estados o, inclusive, de relaciones entre los mismos. En el proceso digital, las funciones de salida no deben presentar ninguna analogía de forma con la señal de entrada.

Entre las principales ventajas de los sistemas de proceso digital con respecto a los análogos están las siguientes:

- Son realizables sobre tecnología digital lógica, por lo cual se alcanzan alta confiabilidad, estabilidad, reducido tamaño y baja potencia, adaptándose rápidamente al diseño de los circuitos integrados.
- Los dispositivos digitales son menos sensibles a las tolerancias de sus elementos y pueden ser reproducidos en grandes volúmenes con alta exactitud sin requerir un ajuste adicional, como usualmente ocurre con los elementos análogos.
- Se facilita el proceso simultáneo de varias señales mediante un solo dispositivo digital, reduciendo los costos de hardware. Además, las características de proceso pueden cambiarse y ajustarse durante el proceso realizando la sintonía necesaria sobre el respectivo algoritmo de proceso; condición importante en la adaptabilidad de los sistemas.

Los dispositivos digitales se asocian con algunas desventajas. La primera es el incremento en la complejidad del sistema de proceso, por cuanto hay necesidad de un pre y pos-proceso adicional de las señales. La segunda desventaja es el rango limitado de frecuencias disponibles de los procesadores digitales que ofrecen aún valores insuficientes para señales de muy altas frecuencias. Sin embargo, las ventajas del proceso digital compensan por mucho las desventajas en las diversas aplicaciones, sumado al hecho de la tendencia constante en la rebaja de costos del hardware de proceso digital. Como resultado el proceso digital de señales se extiende cada vez a una mayor cantidad de actividades del campo humano. Es importante tener en cuenta que el proceso digital exige la adecuación en la representación de las señales continuas, la cual en la práctica se realiza mediante su discretización. Por lo tanto, el análisis básico del proceso digital se realiza sobre la representación discretizada de señales y sistemas.

1.1.3. Señales singulares

Estas funciones son modelos ideales matemáticos y, en rigor, no aparecen en sistemas físicamente implementables. Sin embargo, son buenas aproximaciones a ciertas condiciones y restricciones de los sistemas físicos, que permiten evaluar el comportamiento asintótico de los sistemas.

Función signo. Definida por la expresión:

$$\text{sgn}(t - t_0) \triangleq \begin{cases} -1, & t < t_0 \\ 0, & t = t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

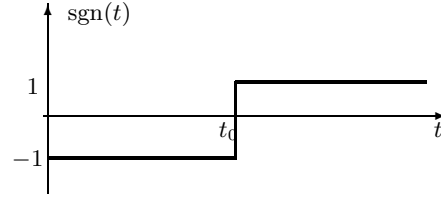


Figura 1.2. Función signo

donde la multiplicación $x(t) \text{sgn}(t - t_0)$ denota el cambio de signo de la función $x(t)$ a partir del punto $t = t_0$, (Figura 1.2).

Función delta de Dirac. La función delta $\delta(t)$ es también llamada *función impulso* o *función Kroncker*, y se puede interpretar como la acción que hace angosta una función dada, $p_\alpha(t - t_0)$, definida con área unitaria en la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(t) dt = \alpha \frac{1}{\alpha} = 1 \quad (1.6)$$

de tal manera, que su base determinada para un intervalo de tiempo $(t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2})$ tiende a 0. Esto es,

$$\delta(t - t_0) \triangleq \lim_{\alpha \rightarrow 0} p_\alpha(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Cabe anotar, que la definición completa de la función delta está dada por el par de ecuaciones (1.6) y (1.7), cuya representación gráfica, en el caso particular de un pulso rectangular se ve en la Figura 1.3(a) (parte inferior). La representación convencional de $\beta\delta(t - t_0)$ se muestra en la Figura 1.3(a) (parte superior), donde la amplitud β debe ser entendida como el área del pulso elemental.

La función $\delta(t)$ tiene las siguientes propiedades:

(a). *Simetría.*

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

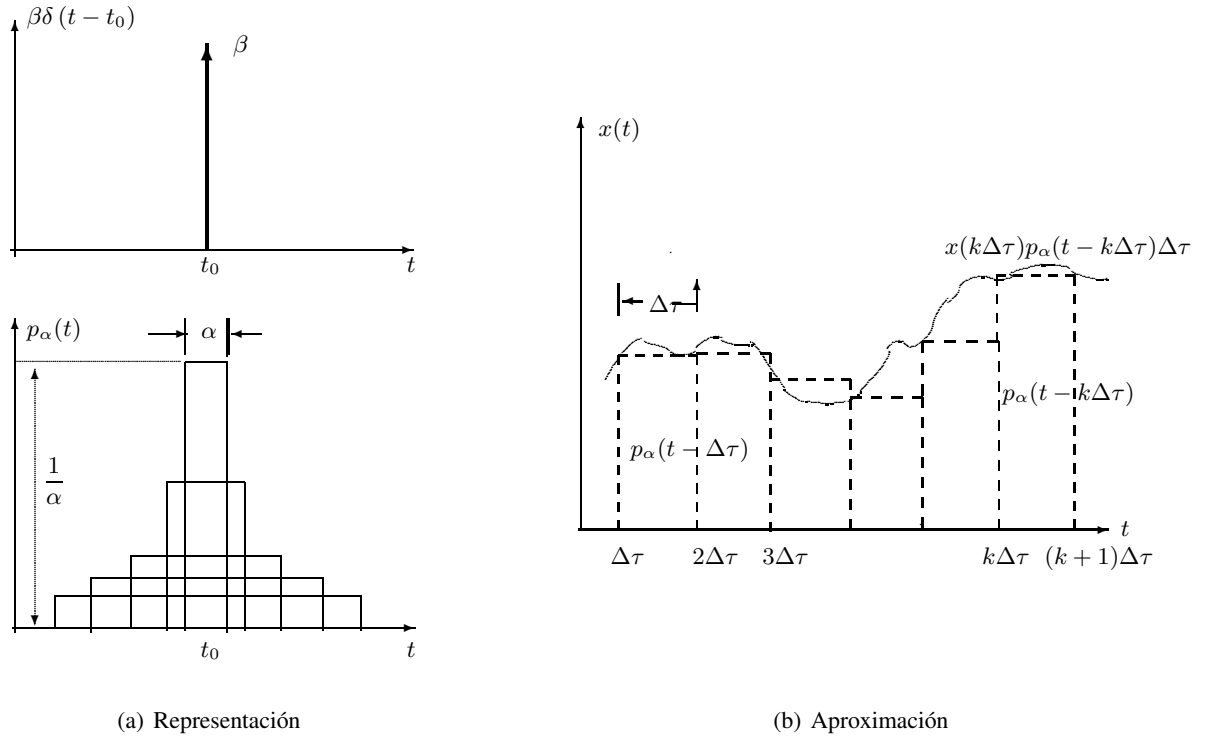
(b). *Escala de tiempo,*

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t) \quad (1.8)$$

(c). *Multiplicación, (por una función en el tiempo);*

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Realmente, la continuidad de la función $x(t)$ se restringe al intervalo $x(t_{0-}) = x(t_{0+})$, en caso contrario, es simplemente imposible encontrar el valor correspondiente de la multiplicación y preferiblemente se debe evitar tal situación.

**Figura 1.3.** Función delta

(d). *Selectividad,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1.9)$$

La función $x(t)$ debe ser continua, o al menos tener un número finito de discontinuidades de salto para un intervalo finito de tiempo, por cuanto el valor exacto de la integral en el punto de discontinuidad no tiene ningún sentido físico importante [1]. De (1.9) e intercambiando t y t_0 , y notando por τ a t_0 se obtiene la *integral de Duhamel*:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad (1.10)$$

La integral (1.10) es la representación de la función $x(t)$ mediante un continuo de funciones delta y corresponde a su aproximación en forma de un conjunto de pulsos rectangulares, $p_a(t)$, determinados dentro del intervalo de análisis, como se muestra en la Figura 1.3(b).

Haciendo $\Delta\tau \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ se obtiene la aproximación:

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N x(k\Delta\tau) p_a(k\Delta\tau - t) \Delta\tau. \quad (1.11)$$

Ejemplo 1.4. Evaluar la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\sin t} \cos 2t \delta(2t - 2\pi) dt,$$

Mediante el empleo secuencial de las propiedades, primero de escala (1.8) y luego de selectividad (1.9), se obtiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\sin t} \cos 2t \delta(2t - 2\pi) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\sin t} \cos 2t \delta(t - \pi) dt = \frac{1}{2} \pi^2.$$

Función escalón unitario. La definición matemática de esta función, representada en la Figura 1.4, es la siguiente:

$$u(t - t_0) \triangleq \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

A partir de la definición dada en (1.7) se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} p_\alpha(t) &= \frac{1}{t_0} u(t) - \frac{1}{t_0} u(t - t_0) \\ &= \frac{1}{t_0} (u(t) - u(t - t_0)) \end{aligned}$$

tomando el límite de $t_0 \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} p_\alpha(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} (u(t) - u(t - t_0)) \\ &= \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$

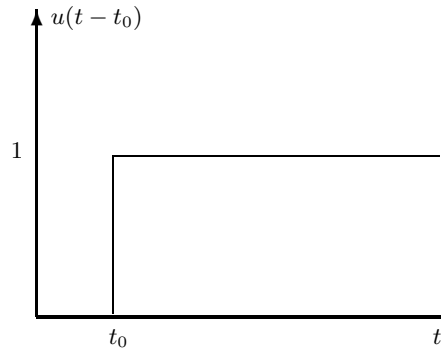


Figura 1.4. Función escalón unitario

De manera inversa, integrando la anterior expresión se obtiene

$$\int \delta(t) dt = \int \frac{du(t)}{dt} dt = u(t)$$

Ejemplo 1.5. Sea $x(t) = u(t - t_0) - u(t - nt_0) - k\delta(t - mt_0)$, siendo $m, n \geq 1$. Determinar el valor de k para el cual se cumpla que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

A partir de la anterior condición de igualdad a 0, se obtiene que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(t - t_0) - u(t - nt_0) - k\delta(t - mt_0)) dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{\infty} u(t - t_0) dt - \int_{nt_0}^{\infty} u(t - nt_0) dt - k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - mt_0) dt = 0$$

Sin embargo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_{t_0}^T u(t - t_0) dt - \int_{nt_0}^T u(t - nt_0) dt \right) - k = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} ((T - t_0) \cdot 1 - (T - nt_0) \cdot 1) - k = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T - t_0 - T + nt_0) - k = 0$$

luego,

$$nt_0 - t_0 - k = 0, \quad \Rightarrow k = (n - 1)t_0$$

Función pulso rectangular. Definida por la expresión:

$$\text{rect}_{\tau}(t - t_0) \triangleq \begin{cases} 1, & |t - t_0| \leq \tau/2 \\ 0, & |t - t_0| > \tau/2 \end{cases}$$

Por cuanto,

$$\text{rect}_{\tau}(t) = u(t) - u(t - t_0)$$

entonces se cumple la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} \text{rect}_{\tau}(t) = (\delta(t) - \delta(t - t_0))$$

Así mismo, se cumple que

$$\text{rect}_{\tau}(t - t_0) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(t - t_0) - \text{sgn}(t - t_0 - \tau))$$

Problemas

Problema 1.1. Clasificar las siguientes señales por su tipo (de potencia o de energía):

(a). $A \sin(\omega t)$. (b). $Ate^{-tk}(u(t) - u(t - t_0))$, $t_0 > 0$.

Problema 1.2. Representar la señal $x(t)$, que tiene el siguiente modelo matemático:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x_0(t/t_0), & 0 \leq t \leq t_0 \\ x_0, & t > t_0 \end{cases}$$

en forma de una suma de funciones lineales por segmentos.

Problema 1.3. Calcular la energía \mathcal{E}_x de la señal,

$$x(t) = 30 \exp(-10^5 t) u(t)$$

Problema 1.4. Determinar para la señal, $x(t) = t^2$, $0 \leq t \leq 1$, la respectiva aproximación, empleando la función de dependencia lineal $y(t) = at + b$, tal que sea la mejor en el sentido del mínimo error de distancia (métrica).

Problema 1.5. Describir mediante la función $u(t)$ las funciones representadas en la Figura 1.5

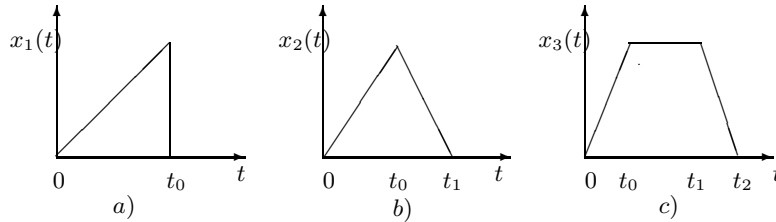


Figura 1.5.

Problema 1.6. Demostrar que haciendo $n \rightarrow \infty$, las siguientes sucesiones de funciones tienden a la delta de Dirac:

(a). $x_n(t) = (n/2) \exp(-\pi|t|)$. (b). $x_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp(-nt^2/2)$.

1.2. Representación discreta de señales

1.2.1. Espacios de representación

Cualquier espacio vectorial con dimensión n se caracteriza completamente por las proyecciones sobre sus n ejes de coordenadas. En la descomposición vectorial, es preferible el uso de ejes perpendiculares y normalizados, para los que se cumple la condición de ortogonalidad:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

donde α_i, α_j son los vectores unidades de los respectivos ejes de coordenadas. Si el vector está dado en un espacio con n dimensiones, entonces éste se puede descomponer en n componentes y, por lo tanto, expresado por la suma, $a = \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k$, siendo a_k las proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas, la dirección de los cuales está dada por el sistema de vectores coordenadas o *bases*, $\{\alpha_k : k = 1, \dots, n\}$.

Ejemplo 1.6. Considérense los siguientes casos de descomposición vectorial:

1. Sea el conjunto $\{\alpha_n(t) : n = 1, \dots, N\}$, un sistema de vectores ortogonales sobre un intervalo dado en algún espacio de Hilbert. Demostrar que el conjunto corresponde a un sistema independiente lineal.

Al analizar la igualdad

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n + \dots + k_N \alpha_N = 0$$

se observa que al multiplicar escalarmente ambos lados de la igualdad por cada uno de los vectores y teniendo en cuenta su ortogonalidad, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \alpha_n \cdot (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n + \dots + k_N \alpha_N) &= \alpha_n \cdot 0 \\ \{\alpha_n \cdot k_n \alpha_n\} &= 0, \quad n = 1, \dots, N \end{aligned}$$

con lo cual $k_n = 0, n = 1, 2, \dots, N$. Esto es, la ortogonalidad del sistema de vectores condiciona su independencia lineal.

2. Dado un sistema de vectores no nulos y no ortogonales $\{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$ en el espacio de Hilbert, construir sobre este un sistema ortonormal $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$, tal que cada vector u_k de una combinación lineal del tipo $u_k = c_{k0}g_0 + c_{k1}g_1 + \dots + c_{kn}g_n$, siendo $c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{kn}$ valores constantes.

Al normalizar el elemento g_0 y suponer que $u_0 = g_0 / \|g_0\|$, el vector $h_1 = g_1 - (g_1, u_0)u_0$ es ortogonal a u_0 . Normalizando h_1 se obtiene un nuevo elemento ortonormalizado del sistema $u_1 = h_1 / \|h_1\|$.

La operación se repite y se halla el elemento $h_2 = g_2 - (g_2, u_0)u_0 - (g_2, u_1)u_1$, por lo que se obtiene $u_2 = h_2 / \|h_2\|$ que es ortogonal tanto a u_0 como a u_1 . Repitiendo el proceso, iterativamente, en el paso $k \in \mathbb{Z}$ se obtiene la siguiente combinación lineal:

$$h_k = g_k - (g_k, u_0)u_0 - (g_k, u_1)u_1 - \dots - (g_k, u_{k-1})u_{k-1}$$

En forma general, el conjunto de las posibles señales de análisis se entenderá como el formado por todas las funciones de variable compleja definidas en forma continua sobre un eje real, por ejemplo, el del tiempo:

$$L = \{x = x(t) : x(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$$

donde $L = \{x : \mathcal{K}\}$ es el conjunto formado por todos los elementos, x , para los cuales \mathcal{K} cumple que: $\mathcal{K} \Rightarrow x \in L$. La mayoría de los espacios de funciones de señales se restringen a los espacios clásicos de Lebesgue, en los que se cumple que

$$L^p = L^p(\mathbb{R}) = \left\{ x \in L : \|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad p \geq 1 \quad (1.13)$$

$$L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x \in L : \|x\|_\infty = \sup_t |x(t)| < \infty \right\}$$

donde $\|x\|_{L^p(\mathbb{R})}$ es la *norma* definida para x en el espacio L^p .

La restricción de $p \geq 1$, implica que la clase $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio lineal normalizado y corresponde a un espacio de Banach, el cual es completo con respecto a la correspondiente norma.

De manera similar, se definen los espacios formados por las funciones de valor complejo determinadas en forma discreta (sucesión) en el tiempo:

$$\ell = \{x = x(t_n) = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Las restricciones sobre pertenencia a espacios lineales normalizados son similares a las de las señales continuas, en las cuales las operaciones de integración se cambian por operaciones de sumatoria discreta; es decir, se generan los siguientes espacios:

$$\ell^p = \left\{ x \in \ell : \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

La generación de conjuntos de señales a partir de alguna condición común con interpretación física (energía, longitud en el tiempo, transformación hacia algún espacio complejo, etc.), implica establecer el modelo matemático formal de relación \mathcal{K} entre los elementos del conjunto.

Definición 1.1. De manera general, la forma para distinguir dos elementos de un conjunto en cada pareja de elementos consiste en compararla con un número real positivo, el cual se interpreta como la *distancia* entre los elementos, tal que

$$d : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } x_n, x_m \in \mathfrak{X}, d(x_n, x_m) \geq 0$$

En este caso, los elementos x_n y x_m presentan iguales propiedades geométricas.

Un ejemplo de distancia entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ del espacio de funciones complejas en el tiempo, a lo largo de un intervalo T está dado por la siguiente expresión:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

Definición 1.2. El conjunto de funciones relacionados con la distancia (1.14), para los cuales la respectiva norma es acotada, $\|x\|_2 < \infty$, o *espacio* $L^2(\mathbb{R})$, corresponde a un espacio de Hilbert que está provisto del siguiente producto interno:

$$\langle x, y \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} x^*(t)y(t)dt \quad (1.15)$$

Un conjunto con una distancia dada en forma adecuada conforma un *conjunto de señales*. El espacio de funciones dado por la distancia (1.14) tiene aplicación amplia en la representación de señales debido a la interpretación física simple de su respectiva norma, que corresponde a la energía de las señales. Esto es, cuando $x \in L^2(T)$ se dice que

$$\|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle_{L^2(T)} \triangleq \mathcal{E}_x \quad (1.16)$$

es la *energía* de la señal. Por cierto, la señal $x(t)$ determinada sobre T , corresponde a la señal de energía, que cumple la condición (1.1).

El *soporte* de una señal continua, $\text{supp}(x)$, corresponde a la cerradura del conjunto de puntos t , tales que $x(t) \neq 0$. Si el soporte de la función se confina dentro de un intervalo finito del argumento t , entonces se habla de una función con soporte compacto.

La representación en forma discreta de cualquier señal de energía, $x \in L^2(T)$, que cumpla la condición (1.1), implica hallar la transformación del espacio $L^2(T)$ en el espacio \mathbb{C}^n , donde el valor de la dimensión n se elige a partir del compromiso entre la precisión y la economía de la representación. La forma general para hallar esta representación consiste en la selección de un subespacio de dimensión n a partir de $L^2(T)$.

Teniendo en cuenta que $L^2(T)$ es un espacio completo separable [2], la señal $x \in L^2(T)$ puede ser representada de manera aproximada con cualquier precisión, si la dimensión de representación se escoge suficientemente grande ($n \rightarrow \infty$), por medio de un conjunto de valores o coeficientes x_k , expresados en combinación lineal del siguiente espacio de funciones de coordenadas, elegido adecuadamente:

$$x(t) = \sum_k^{\infty} x_k \phi_k(t), \quad (1.17)$$

donde $\phi_k(t)$ corresponde a un conjunto de funciones elegidas a priori, que conforman una base en el espacio vectorial $L^2(T)$, las cuales son denominadas *funciones base*, siendo k el orden de la función dentro del conjunto $\{\phi_k(t)\}$. La descomposición en funciones base (1.17) corresponde a la *representación espectral generalizada*.

En forma general, las funciones base, obtenidas para la representación de señales, deben cumplir los siguientes requerimientos:

1. La serie (1.17) debe ser convergente,
2. Los coeficientes $\{x_k\}$ deben tener procedimientos simples de cálculo,
3. Sus valores no deben depender del límite superior de la suma de la representación (1.17).

1.2.2. Descomposición en funciones ortogonales

Los sistemas ortogonales son un caso particular de sistemas de funciones independientes lineales. Más aún, cualquier sistema de este último tipo puede ser transformado a un sistema ortogonal empleando, por ejemplo el método de *Gramm-Schmidt* (ver ejemplo 1.6) [3]. Un sistema de funciones complejas $\{\phi_m(t)\}$ se define como ortogonal en el intervalo de representación (t_i, t_f) , si se cumple la relación:

$$\int_{t_i}^{t_f} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \phi_m^*(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \mathcal{E}_{mn}, & m = n \end{cases} \quad (1.18)$$

siendo $\mathcal{E}_{mm} = \mathcal{E}_{nn} = \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_n$ una magnitud de energía. Mientras, para el caso de las señales de potencia, definidas en (1.2), se tendrá:

$$\frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \phi_m^*(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \mathcal{P}_{mn}, & m = n \end{cases} \quad (1.19)$$

donde $\mathcal{P}_{mm} = \mathcal{P}_{nn} = \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_n$ es la potencia media o cuadrado de la norma de la función $\phi_n(t)$.

Se dice que el conjunto de funciones base está *normalizado* si se cumple que:

$$\int_{t_i}^{t_f} |\phi_m(t)|^2 dt = \int_{t_i}^{t_f} |\phi_n(t)|^2 dt = \mathcal{E}_{mn} = 1, \quad \forall m, n$$

Si el conjunto es a la vez normalizado y ortogonal, entonces se denomina *ortonormal*.

A partir de la representación (1.17), cualquier señal de energía $x(t)$ se puede representar de forma aproximada en términos de $\phi_n(t)$:

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^N x_n \phi_n(t) \quad (1.20)$$

donde los coeficientes x_n caracterizan el peso de la correspondiente función ortogonal $\phi_n(t)$. Luego, la representación (1.20) de la función $x(t)$ corresponde a su expansión o representación ortogonal aproximada, para la cual los valores x_n se determinan de acuerdo con la condición de mínimo error tomada en la aproximación.

El tipo de error comúnmente empleado en la valoración de la aproximación (1.20) es la potencia media de error, que en el caso particular se determina como el valor cuadrático medio de la siguiente diferencia,

$$\overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \left| x(t) - \sum_{n=0}^N x_n \phi_n(t) \right|^2 dt, \text{ siendo } \overline{\varepsilon_N^2(t)} \geq 0 \quad (1.21)$$

Por cuanto, el error cuadrático medio (1.21) está dado en función de los coeficientes x_0, x_1, \dots, x_N , entonces, para su minimización, $\min \left\{ \overline{\varepsilon_N^2(t)} \right\}$, se deben hacer igual a cero todas las respectivas

derivadas parciales:

$$\frac{\partial(\overline{\varepsilon_N^2})}{\partial x_0} = \frac{\partial(\overline{\varepsilon_N^2})}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial(\overline{\varepsilon_N^2})}{\partial x_N} = 0$$

La derivada parcial de (1.21) por los coeficientes x_k será:

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon_N^2(t)}}{\partial x_k} = \frac{1}{t_f - t_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_{t_i}^{t_f} \left| x(t) - \sum_{n=0}^N x_n \phi_n(t) \right|^2 dt \right\} = 0$$

Denotando por $a = x(t)$ y $b = \sum_n x_n \phi_n(t)$, la expresión dentro del integral anterior toma la forma

$$\begin{aligned} |a - b|^2 &= (a - b)(a - b)^* = (a - b)(a^* - b^*) \\ &= (aa^* - ab^* - ba^* + bb^*) \end{aligned}$$

Luego, se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^N \left(\int_{t_i}^{t_f} x(t) x_n^* \phi_n^*(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) x_n \phi_n(t) dt - \int_{t_i}^{t_f} x_n \phi_n(t) \sum_{m=0}^N x_m^* \phi_m^*(t) dt \right) \right\} = 0$$

En virtud de la condición definida de ortogonalidad (1.18), los productos internos

$$\int \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt$$

para todo $m \neq n$, serán iguales a 0, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^N \left(\int_{t_i}^{t_f} x(t) x_n^* \phi_n^*(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) x_n \phi_n(t) dt - \int_{t_i}^{t_f} |x_n \phi_n(t)|^2 dt \right) \right\} = 0 \quad (1.22)$$

De igual manera, todas aquellas componentes que no contengan el término x_k , se deben igualar a cero.

Como resultado sólo se obtienen dos componentes diferentes de 0:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ - \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) x_k \phi_k(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} x_k \phi_k(t) x_k^* \phi_k^*(t) dt \right\} = 0$$

que al diferenciar por x_k e intercambiando los términos se obtiene:

$$\int_{t_i}^{t_f} x^*(t) \phi_k(t) dt = x_k^* \int_{t_i}^{t_f} |\phi_k(t)|^2 dt$$

Por último, cuando se generaliza en función del índice n , da como resultado:

$$x_n = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x(t) \phi_n^*(t) dt}{\int_{t_i}^{t_f} |\phi_n(t)|^2 dt} = \frac{1}{\mathcal{P}_n} \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \phi_n^*(t) dt \quad (1.23)$$

El numerador de (1.23) es la energía (o potencia) de la señal $x(t)$ y de la función base $\phi_n(t)$, mientras en el denominador aparece la energía (o la respectiva potencia) de las funciones base.

De la expresión (1.22) se obtiene que el error $\overline{\varepsilon^2(t)}$ es igual a

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_N^2(t)} &= \frac{1}{t_f - t_i} \left(\int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^N \left(\int_{t_i}^{t_f} x(t) x_n^* \phi_n^*(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} x^*(t) x_n \phi_n(t) dt - \int_{t_i}^{t_f} |x_n \phi_n(t)|^2 dt \right) \right) \end{aligned}$$

Además, de (1.23) resulta que

$$x_n \mathcal{P}_n = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \phi_n^*(t) dt$$

con lo cual, el error $\overline{\varepsilon^2(t)}$ se puede determinar como:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_N^2(t)} &= \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^N (2x_n^* x_n \mathcal{P}_n - x_n x_n^* \mathcal{P}_n) \\ &= \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^N |x_n^2| \mathcal{P}_n \\ &= \mathcal{P} - \sum_{n=0}^N |x_n^2| \mathcal{P}_n \end{aligned} \quad (1.24)$$

Por cuanto la potencia del error siempre es positiva, $\overline{\varepsilon^2(t)} \geq 0$, entonces, de la anterior expresión se deduce la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{P} \geq \sum_{k=0}^N |x_k|^2 \mathcal{P}_k, \quad (1.25)$$

conocida como la *desigualdad de Bessel*, la cual indica que la potencia de la aproximación de la señal $x(t)$ obtenida por (1.20) es menor o, en el mejor de los casos, igual a la potencia de la señal original.

De otra parte, de (1.24) se observa que al aumentar N , o sea, al aproximar la señal con conjuntos mayores ortogonales, entonces el error $\overline{\varepsilon^2(t)}$ disminuye.

Teorema 1.3. [Parseval] Por definición $\overline{\varepsilon^2} \geq 0$, por lo tanto, al hacer $N \rightarrow \infty$ en (1.24), la suma $\sum_{k=0}^N x_k^2 \mathcal{P}_k$ converge al valor del integral $\int_{t_i}^{t_f} x^2(t) dt$, luego $\overline{\varepsilon^2}$ tiende a cero. Como resultado se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{t_i}^{t_f} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \mathcal{P}_n, \quad (1.26)$$

En este caso, el conjunto ortogonal se define como completo en (t_i, t_f) .

Si en la expansión (1.20) la cantidad de términos $N \rightarrow \infty$, o sea,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \phi_n(t) \quad (1.27)$$

entonces, la serie infinita converge hacia la función $x(t)$, de tal manera que el valor cuadrático medio del error $\overline{\varepsilon^2(t)}$ de la aproximación se hace igual a 0. Por lo tanto, la representación de una función $x(t)$, dada en (1.27) por medio de un sistema base con número infinito de funciones ortogonales, se identifica con la representación generalizada de Fourier de $x(t)$ para la base $\{\phi_n(t)\}$.

Una señal de potencia (o energía) puede ser descompuesta si el conjunto de funciones base genera un sistema completo, para el cual los coeficientes x_n se determinan por (1.23). El mismo conjunto de los coeficientes $\{x_n\}$ se denomina *espectro de la señal* $x(t)$, mientras el producto $x_n \phi_n(t)$ se define como la componente espectral de la señal. Cualquiera de las dos formas: la serie generalizada de Fourier (1.27) o el espectro $\{x_n\}$ (1.23) determinan unívocamente la señal $x(t)$.

Basados en la expresión (1.27) es posible la síntesis de señales, así en la Figura 1.6 (para $\mathcal{P}_n = 1$) se muestra el diagrama de un generador de señales empleando el sistema de funciones base $\{\phi_n(t)\}$.

Por cuanto, la cantidad de sistemas ortogonales completos es inconmensurable, la elección del mejor sistema base de representación tiene un amplio sentido práctico. Las siguientes son las recomendaciones generales a tener en cuenta en este caso:

1. El sistema base debe ser descrito analíticamente de manera simple, así que las correspondientes funciones ortogonales sean sencillas de generar.
2. El sistema base debe ser una tarea con solución adecuada, de manera que se facilite la resolución de problemas, tales como la representación económica de señales, la realización de filtros espectrales y la disminución de costos computacionales en el proceso de señales, entre otros.

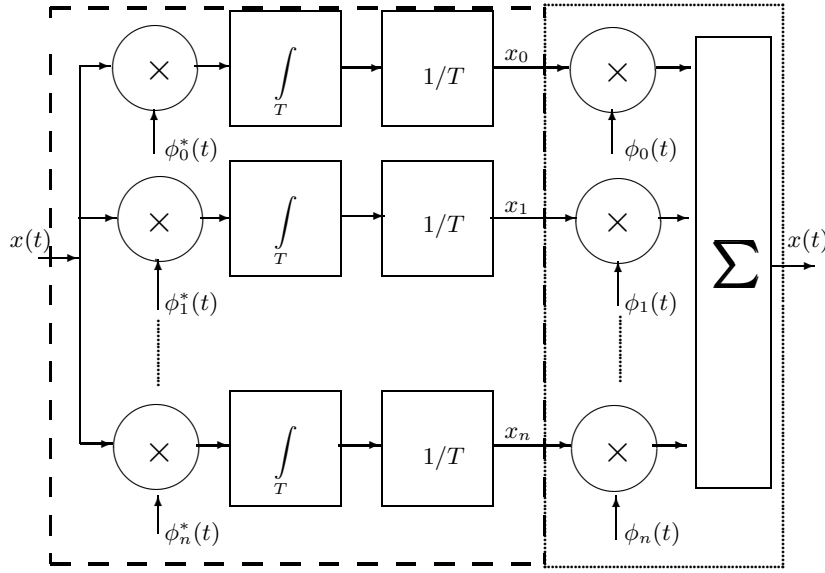


Figura 1.6. Descomposición y formación ortogonal de señales

3. Es preferible que el sistema base $\{\phi_i(t)\}$ sea multiplicativo, esto es, que se cumplan las siguientes condiciones:

Sea $\phi_n(t), \phi_m(t) \in \{\phi_i(t)\}$, si $\phi_k(t) = \phi_n(t)\phi_m(t)$, entonces, $\phi_k(t) \in \{\phi_i(t)\}$.

Sea $\phi_n(t) \in \{\phi_i(t)\}$, si $\phi_k(t) = 1/\phi_n(t)$, entonces, $\phi_k(t) \in \{\phi_i(t)\}$.

4. El sistema base debe facilitar la síntesis de algoritmos económicos (rápidos) en el sentido del costo computacional. En particular, es preferible el empleo de sistemas conformados por funciones ortogonales de estructura periódica, que permita su desarrollo mediante algoritmos de naturaleza iterativa.

La elección del sistema de funciones ortogonales más conveniente depende del objetivo con que se descompone la señal compleja original. Entre los diferentes problemas que exigen esta descomposición pueden distinguirse dos orientaciones importantes:

1. La descomposición en sistemas completos de funciones ortogonales,
2. La aproximación de las señales, de tal manera que se pueda brindar la precisión deseada con el menor número de elementos de la serie en (1.20).

En el primer caso, se difundió el empleo de las funciones exponenciales de Fourier y en particular de las funciones trigonométricas: los senos y cosenos. Sin embargo, en algunos casos se emplean otros sistemas. Por ejemplo, para la discretización de señales continuas en el tiempo se emplean bases del tipo $\text{sinc}(x)$. En el proceso digital de señales es muy frecuente el empleo de funciones constantes en segmentos de tiempo [4] (bases de *Rademacher*, *Walsh*, *Paley*, *Hadamard* y *Haar*).

Como ejemplos de conjuntos ortogonales en la segunda orientación se pueden analizar los polinomios de *Chebyshev*, *Hermite*, *Laguerre*, *Legendre*, entre otros [4,5].

1.2.3. Conjunto ortogonal completo de Fourier

Si se propone una función $x(t)$ cuyo valor esté representado en un intervalo determinado, desde $t=0$ hasta $x=T$, por la ordenada de una curva trazada arbitrariamente, se podrá desarrollar esta función en una serie que no contendrá más que los senos y cosenos de los arcos múltiples...

Fourier

Serie exponencial de Fourier. Se define a partir del conjunto ortogonal conformado por las funciones exponenciales complejas del tipo:

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad (1.28)$$

donde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ se denomina *armónico*, siendo $\omega_0 = cte \neq 0$.

En la determinación del valor de la constante ω_0 , se parte de la definición de ortogonalidad dada por la expresión (1.18), sobre el intervalo de tiempo (t_i, t_f) , por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt &= \int_{t_i}^{t_f} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \mathcal{E}_n, & n = m \end{cases} \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left[e^{j(n-m)\omega_0 t_f} - e^{j(n-m)\omega_0 t_i} \right] = 0, \quad \forall n \neq m, \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_i} \left[e^{j(n-m)\omega_0 (t_f - t_i)} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

obteniéndose los respectivos valores de

$$\omega_0 = 2\pi/\mathcal{E}_n, \quad \mathcal{E}_n = (t_f - t_i) \quad (1.29)$$

La representación exponencial de la serie Fourier para cualquier señal de energía, de (1.17), es:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t_i < t < t_f \quad (1.30)$$

donde cada uno de los coeficientes de la serie, teniendo en cuenta (1.23), se determinan por la siguiente expresión:

$$x_n = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.31)$$

Se define como *espectro de Fourier* a la representación gráfica de los coeficientes complejos de Fourier de la función en dependencia de la frecuencia. Aunque, como antes se dijo, el espectro se puede hallar para cualquier sistema base de representación, realmente, al espectro de Fourier se le ha encontrado interpretación física y, por lo tanto, uso práctico en la ingeniería. En adelante, cuando se refiera al espectro se tendrá en cuenta sólo la representación espectral de Fourier. En la Tabla 1.1 se muestran los coeficientes de Fourier para algunas señales comunes.

Señal	Definición	Coficiente x_n
Cuadrada simétrica	$\begin{cases} 1, & t < \frac{T}{4} \\ -1, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{sinc}(n\pi/2), & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$
Pulsos rectangulares	$\begin{cases} +1, & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$	$\frac{\tau}{T} \text{sinc}(n\pi\tau/T)$
Triangular simétrica	$1 - 4 t /T, t < T/2$	$\begin{cases} \text{sinc}(n\pi/2), & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$
Diente de sierra	$2t/T, t < T/2$	$\begin{cases} \frac{j(-1)^n}{n\pi}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$
Sinusoide rectificada	$ \sin \omega_0 t $	$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n)}, & n \in \text{par} \\ 0, & n \in \text{impar} \end{cases}$

Tabla 1.1. Coeficientes de descomposición espectral de Fourier

Ejemplo 1.7. Hallar la serie exponencial de Fourier, considerando $a \neq b$, para la función:

$$x(t) = \begin{cases} a, & t_1 - \frac{\tau}{2} < t < t_1 \\ b, & t_1 < t < t_1 + \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

Aplicando (1.29) se obtiene

$$\mathcal{E}_n = ((t_1 + \tau/2) - (t_1 - \tau/2)) = \tau,$$

siendo $\omega_0 = 2\pi/\mathcal{E}_n = 2\pi/\tau$.

Los coeficientes espectrales se definen a partir de (1.23):

$$x_n = \frac{1}{\tau} \int_{t_1 - \tau/2}^{t_1 + \tau/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} \left(\int_{t_1 - \tau/2}^{t_1} a e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{t_1}^{t_1 + \tau/2} b e^{-jn\omega_0 t} dt \right)$$

$$x_n = \frac{1}{\tau} \left(\left. \frac{a e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_{t_1 - \tau/2}^{t_1} + \left. \frac{b e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_{t_1}^{t_1 + \tau/2} \right)$$

Al hacer $a = -b$ y $t_1 = 0$, se tiene que

$$x_n = \frac{1}{\tau} \left(\left. \frac{a e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_{-\tau/2}^0 - \left. \frac{a e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_0^{\tau/2} \right)$$

$$= \frac{-a}{jn\omega_0 \tau} \left(e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^0 - e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{\tau/2} \right)$$

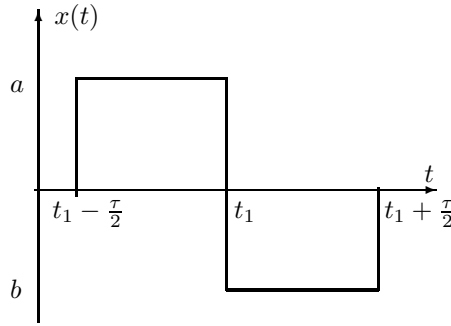
$$= \frac{-a}{jn\pi} [1 - \cos n\pi]$$

con lo cual finalmente se tiene que

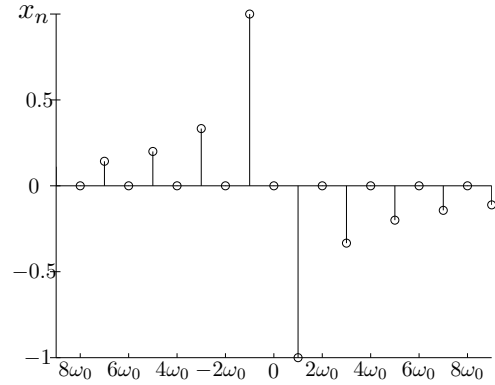
$$x_n = \begin{cases} \frac{-2a}{jn\pi}, & n \in \text{impar} \\ 0, & n \in \text{par} \end{cases}$$

En cambio, si $a = -b$, pero $t_1 = \tau/2$, el valor de los armónicos será:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{ae^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_0^{\tau/2} - \frac{ae^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_{\tau/2}^{\tau} \right) \\ &= \frac{-a}{jn\omega_0 \tau} \left(0 - e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{\tau/2}^{\tau} \right) = \frac{-a}{n\pi} \sin n\pi \\ &= 0, \quad \forall n. \end{aligned}$$



(a) Representación en el tiempo



(b) Representación espectral

Figura 1.7. Meandro simple

Finalmente, la representación completa en forma de serie exponencial de Fourier (1.20), para la función dada en el intervalo $(t_1 - \tau/2, t_1 + \tau/2)$, es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{2a}{j\pi} \left(e^{-j\pi t} + \frac{e^{-j3\pi t}}{3} + \frac{e^{-j5\pi t}}{5} + \dots - e^{j\pi t} - \frac{e^{j3\pi t}}{3} - \frac{e^{j5\pi t}}{5} - \dots \right) \end{aligned}$$

En la Figura 1.7 se muestra la señal dada en el tiempo y sus respectivos coeficientes obtenidos en la última expresión para la serie exponencial de Fourier.

El ejemplo 1.7 se puede extender a un tren de pulsos cuadrados definido de la siguiente manera:

$$x(t) = a \sum_k \text{rect}_\tau(t - kT), \quad (1.32)$$

siendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Al reemplazar la anterior relación en (1.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 x_n &= \frac{-a}{jn\omega_0 T} \left(e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2} \right) = 2 \frac{a}{n\omega_0 T} \sin \left(n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) \\
 x_n &= \frac{a\tau \sin(n\omega_0 \tau/2)}{T n\omega_0 \tau/2} = \frac{a\tau}{T} \text{sinc}(n\omega_0 \tau/2), \quad n \neq 0 \\
 x_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a dt = \frac{a\tau}{T}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

La relación (1.33), que determina el espectro de un tren de pulsos cuadrados, está representada en las Figuras 1.8(a) y 1.8(b). Para este caso, se define como el *ancho de banda del lóbulo principal del espectro* a la distancia que hay entre los dos primeros ceros de la función (1.33) e igual a $\Delta\omega = 2\pi/\tau$.

La influencia de los parámetros básicos de la función pulso cuadrado, como son la amplitud a , el período T y el ancho del pulso en el tiempo τ , sobre la forma del respectivo espectro (1.33), se da en los siguientes aspectos:

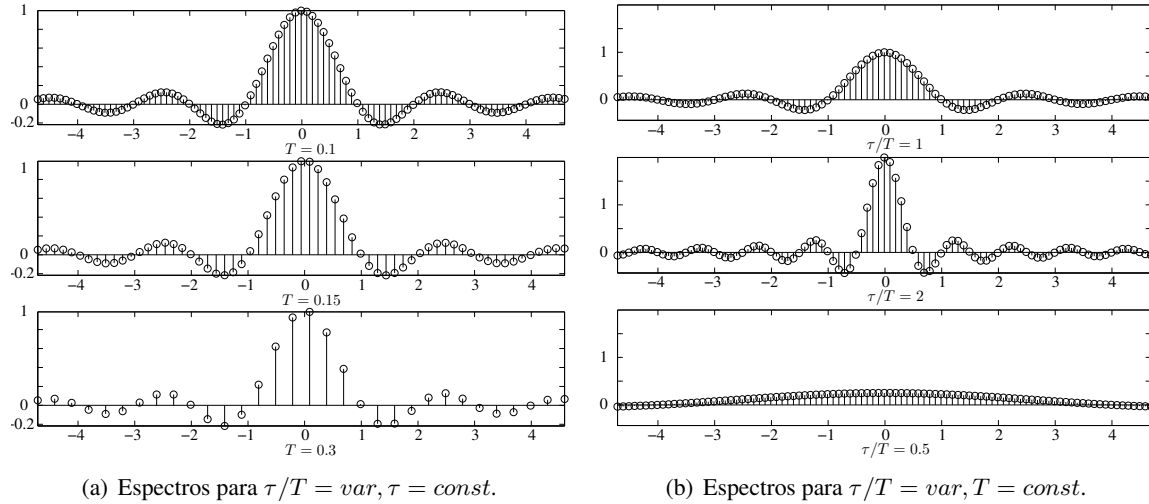


Figura 1.8. Espectro de un tren de pulsos cuadrados

- La amplitud a no influye sobre la forma de la envolvente espectral y es su factor de escala.
- Sea el período $T = \text{var}$, tal que se conserva la relación $\tau/T = \text{cte}$. Si se tienen dos señales con períodos respectivamente diferentes, tales que $T_1 = 2T_2$, para las cuales se cumple que

$$\omega_{01} = 2\pi/T_1, \quad \omega_{02} = 2\pi/T_2 = 2(2\pi/T_1)$$

entonces, $\omega_{01} = \omega_{02}/2$ y $\Delta\omega = 2\pi/\tau = \text{cte}$. Luego, la distancia entre cada una de las componentes espectrales cambia de modo inversamente proporcional al aumento del valor del período

T , sin embargo, la forma de la envolvente del espectro no cambia, mientras $\tau/T = cte$.

- Sea $\tau = var$, $\tau/T = cte$, por lo que, $\omega_0 = 2\pi/T$. Si se analizan dos señales con ancho de pulso respectivamente diferentes, para las cuales se cumple que

$$\tau_1 = 2\tau_2, \quad \Delta\omega_1 = 2\pi/\tau_1, \quad \Delta\omega_2 = 2\pi/\tau_2$$

entonces, $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2/2$. En este caso, la distancia entre las componentes espectrales es constante para cualquier valor de τ , por lo cual las respectivas formas del espectro cambian. El ancho de banda del lóbulo principal cambia de modo inversamente proporcional al valor de τ .

Los espectros correspondientes a cada uno de los casos anteriormente analizados están representados en la Figura 1.8.

Serie trigonométrica de Fourier. A partir de la igualdad de Euler,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

de manera similar, la serie exponencial de Fourier, que representa a la función $x(t)$ en el intervalo (t_i, t_f) , se puede descomponer en la suma trigonométrica del tipo:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1.34)$$

Se puede llegar de la serie exponencial de Fourier a su representación trigonométrica reemplazando:

$$a_n = 2\Re\{x_n\}, \quad b_n = -2j\Im\{x_n\}, \quad \forall n \neq 0, \quad (1.35)$$

mientras, $a_0 = x_0$, $b_0 = 0$. En cualquier caso se cumple que

$$x_n = (a_n - jb_n)/2$$

Cuando se aplica la definición (1.23) de los coeficientes x_n , notados en (1.35), se obtiene:

$$a_n = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_i}^{t_f} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_i}^{t_f} \sin^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

El coeficiente inicial se calcula como

$$a_0 = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x(t) dt}{\int_{t_i}^{t_f} dt} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) dt.$$

La serie trigonométrica de Fourier en (1.34) puede representarse de manera alterna:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad (1.36)$$

donde

$$c_n = \begin{cases} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|x_n| = 2\sqrt{x_n x_n^*}, & n \neq 0 \\ x_0, & n = 0 \end{cases} \quad (1.37a)$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im\{x_n\}}{\Re\{x_n\}} \right) \quad (1.37b)$$

La representación de una señal de energía por la serie de Fourier en un intervalo finito (t_i, t_f) se puede extender para las señales periódicas (suponiendo que el valor de la energía en cualquier intervalo o período T sea finito), para las cuales se cumple la condición,

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + 2\pi/T)}$$

Todas las expresiones anteriores son válidas para las funciones periódicas reemplazando el intervalo de definición de las señales aperiódicas $[t_i, t_f]$ por el valor del período T de las funciones periódicas.

Cabe anotar que la representación mediante las series de Fourier converge en $x(t)$, en el sentido en que el error cuadrático medio tiende a cero de manera uniforme y absoluta cuando la cantidad de términos de la aproximación tiende a infinito, siempre y cuando la función $x(t)$ cumpla *las condiciones de Dirichlet* [6]:

1. $x(t)$ es absolutamente integrable sobre cualquier intervalo de análisis T , esto es,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+T} |x(t)| dt < \infty \quad (1.38)$$

2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos sobre cualquier intervalo finito de análisis T .
3. $x(t)$ sólo tiene un número finito de discontinuidades de primer tipo sobre cualquier intervalo finito de análisis T .

Teorema 1.4. [Riemman] Si la función núcleo integral $x(t)$ cumple las condiciones de Dirichlet y, en forma general, si ésta es absolutamente integrable en el intervalo (a, b) , entonces tendrá lugar el siguiente límite [7]:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b x(\zeta) \cos(v\zeta) d\zeta = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b x(\zeta) \sin(v\zeta) d\zeta = 0.$$

Como corolario del teorema 1.4 se tiene que los coeficientes a_n , b_n y, por lo tanto, c_n tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

En puntos de discontinuidad finita (del primer tipo) en la función $x(t)$, la serie de Fourier converge en la media aritmética de los valores extremos de la discontinuidad. A medida que se aumentan los términos N de la serie, el valor del error cuadrático integral decrece excepto en la vecindad inmediata de la discontinuidad finita, en cuya cercanía la serie deja de converger, aunque el error cuadrático medio tienda a cero. Cualquiera que sea la cantidad máxima finita de términos tomados de esta serie, la representación aproximativa siempre tendrá un paso continuo entre los puntos extremos de la vecindad de la discontinuidad. Este comportamiento se conoce como *fenómeno de Gibbs* [8].

En la Figura 1.9 se muestra la aproximación de una señal rectangular (—) y su respectivo valor de error de aproximación (---).

En general, se considera que las series de Fourier tienen amplia aplicación, entre otros, por los siguientes motivos [7]:

- Éstas son oscilaciones simples y están determinadas para todo valor de t .
- Las oscilaciones armónicas seno y coseno son las únicas funciones del tiempo que conservan su forma al pasar por cualquier dispositivo lineal, variando sólo su fase y su amplitud.
- La descomposición en senos y cosenos permite aplicar el método simbólico usualmente desarrollado para el análisis de circuitos lineales.

Finalmente, se debe tener en cuenta que en la representación espectral, dada una porción de la señal sobre el intervalo finito de tiempo T , es imposible distinguir componentes de frecuencia que estén por debajo de la siguiente relación:

$$\Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (1.39)$$

El valor Δf es llamado *resolución* de frecuencia.

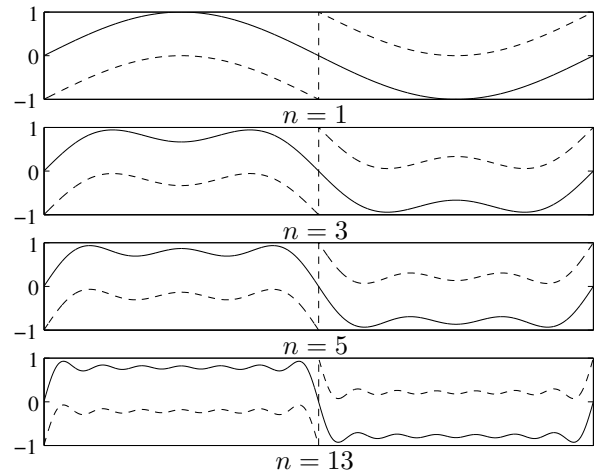


Figura 1.9. Efecto de Gibbs

1.2.4. Otros conjuntos ortogonales

En la aproximación de señales continuas se emplean diferentes polinomios y funciones especiales ortogonales. Escogiendo adecuadamente estas funciones en la descomposición ortogonal (1.20), se puede obtener la representación aproximada de la señal con un número pequeño de elementos de la expansión. Sin embargo, en la definición de las funciones base para la representación de señales, es frecuente el concepto de la *norma ponderada*. En particular, durante la estimación del error de representación usualmente se debe poner mayor énfasis en ciertos intervalos de definición de la función. Entonces, siendo $w(t)$ una función no negativa definida sobre el intervalo T , la integral

$$\left(\int_T w(t) |x(t) - x_n(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

puede servir mejor de medida para el error de aproximación, que la norma simple $\|x - x_n\|$, la cual emplea la *función de ponderación*, $w(t)$, que para $L^2(T)$ se define como:

$$d_w(x, y) = \int_T w(t) x(t) y^*(t) dt$$

En este sentido, existen funciones que conforman sistemas base completos $\{\varphi_n(t)\}$, siendo ortonormales en los intervalos indicados con valor de ponderación $\sqrt{w(t)}$, esto es, que cumplen la condición:

$$\{\varphi(t)\} = \left\{ \sqrt{w(t)} \phi_n(t) \right\} \quad (1.40)$$

donde $\psi_n(t)$ son las funciones a partir de las cuales se forman los sistemas base ortogonales. Como consecuencia de (1.40), la definición de ortogonalidad (1.19) sobre el intervalo T cambia por:

$$\int_T \phi_m(t) \phi_n^*(t) w(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \mathcal{P}_{mn}, & m = n \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{P}_{mm} = \left\| \sqrt{w(t)} \phi_n(t) \right\|^2 = \int_T \left(\sqrt{w(t)} \phi_n(t) \right)^2 dt. \quad (1.41)$$

Así mismo, cambia la definición de los coeficientes (1.23) en la serie generalizada de Fourier:

$$x_n = \frac{1}{\left\| \sqrt{w(t)} \phi_n(t) \right\|^2} \int_T x(t) \sqrt{w(t)} \phi_n^*(t) dt. \quad (1.42)$$

Teorema 1.5. Sea el conjunto simple $\{\phi_n(t)\}$, $n = 0, 1, \dots$, cuando $\phi_n(t)$ es exactamente de grado n , entonces, su condición necesaria y suficiente de ortogonalidad, dada la función de peso $w(t)$, $t \in T$, se da por la expresión:

$$\int_T w(t) t^k \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \\ \mathcal{P}_n \neq 0, & k = n \end{cases}$$

Dentro de la clase de polinomios simples ortogonales están los derivados de la ecuación diferencial hipergeométrica, por ejemplo los siguientes:

Polinomios de Legendre. Estos polinomios se obtienen resolviendo la ecuación diferencial

$$(1 - x^2) \ddot{y} - 2x\dot{y} + n(n+1)y = 0$$

En particular, si se asume $T = [-1, 1]$ y $w(t) = 1$, se obtiene un sistema ortogonal, que al emplear el procedimiento de Gram-Schmidt a la sucesión $\{t^0, t^1, t^2, \dots\}$ da como resultado los siguientes polinomios simples normalizados:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1/\sqrt{2}, & \varphi_1(t) &= \sqrt{3/2}t, & \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right), \\ \varphi_3(t) &= \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right), & \varphi_4(t) &= \sqrt{\frac{9}{2}} \left(\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \right), & \dots \\ \varphi_n(t) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \end{aligned}$$

los cuales a su vez generan el polinomio

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (1.43)$$

El polinomio (1.43) se puede calcular en la siguiente forma recurrente:

$$nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t).$$

El reemplazo por $\tau = 1 - 2e^{-pt}$ ($p > 0$, $p \in \mathbb{R}^+$ o factor de escala) transforma el intervalo $T = [-1, 1]$ para la variable τ en el intervalo $[0, \infty)$ sobre el intervalo de definición de la variable t .

De los polinomios (1.43) se puede obtener un sistema más de funciones ortonormales en $[0, \infty)$ y denominados *funciones de Legendre*:

$$\hat{P}_n(t) = [2p(2n+1)]^{1/2} e^{-pt} P_n(1 - 2e^{-2pt})$$

Ejemplo 1.8. Descomponer en polinomios de Legendre la siguiente función

$$x(t) = \text{sgn}(t), \quad -1 < t < 1.$$

Por cuanto la función $x(t)$ está dada en el intervalo de tiempo $[-1, 1]$, la descomposición se realiza empleando los respectivos polinomios, antes que las funciones ortogonales, por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_1(t) &= t, & P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, & P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \end{aligned}$$

La serie generalizada de Fourier (1.27) para el caso de los polinomios de Legendre tendrá la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P_n(t)$$

donde los respectivos coeficientes se determinan a partir de (1.42) como:

$$x_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 x(t) P_n(t) dt$$

con lo cual, los primeros coeficientes serán iguales a:

$$x_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt \right) = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x(t) t dt = \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^0 x(t) t dt - \int_0^1 x(t) t dt \right) = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x(t) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) dt = 0$$

$$x_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 x(t) \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right) dt = \frac{7}{2} \left(\int_{-1}^0 x(t) \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right) - \int_0^1 x(t) \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right) \right) dt = \frac{7}{8}$$

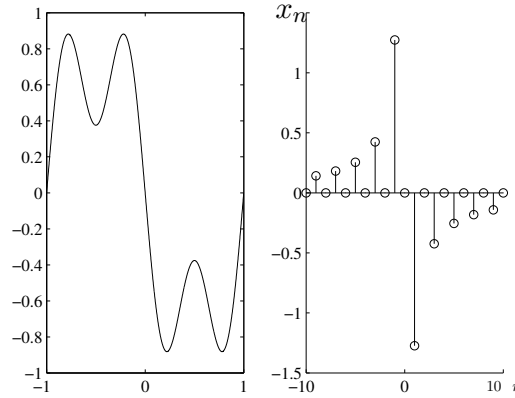


Figura 1.10. Aproximación de la función meandro en el ejemplo 1.7.

De forma similar, $x_n = 0, \forall n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Si se tienen en cuenta solamente los primeros cuatro elementos de la serie, esto es: $x(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{7}{8} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right)$, el error cuadrático medio obtenido de la aproximación es $\varepsilon^2 \approx 0.28$. Para efectos de comparación se puede tomar el ejemplo 1.7, cuando $a = -b = 1$, $t_1 = 0$ y $T = 2$, con lo que $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$, obteniéndose los siguientes coeficientes de representación:

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \in \text{par} \\ -\frac{4}{n\pi}, & n \in \text{impar} \end{cases}$$

Al restringirse al análisis de los primeros cuatro elementos de la serie se obtiene

$$x(t) = -\frac{4}{5} \sin \pi t - \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi t$$

siendo el error cuadrático medio obtenido de aproximación $\varepsilon^2 \approx 0.0675$. La Figura 1.10 ilustra en la parte izquierda una curva de la aproximación y en la parte derecha los respectivos coeficientes de representación de la serie de Fourier.

Ejemplo 1.9. Descomponer en polinomios de Legendre la siguiente función:

$$x(t) = k_1 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad -1 < t < 1$$

En este caso, los respectivos coeficientes se determinan a partir de (1.42) como:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 x(t) P_k(t) dt = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 k_1 \sin(\omega_0 t + \theta_0) P_k(t) dt \\ x_0 &= \frac{k_1}{2} \int_{-1}^1 \sin(\omega_0 t + \theta_0) dt = \frac{-k_1}{2\omega_0} (\cos(\omega_0 + \theta_0) - \cos(\theta_0 - \omega_0)) \\ x_1 &= \frac{3k_1}{2} \int_{-1}^1 \sin(\omega_0 t + \theta_0) t dt \end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ siendo } u = t, du = dt, dv = \sin(\omega_0 t + \theta_0), v = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

con lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3k_1}{2} \left(\frac{-1}{\omega_0} (\cos(\omega_0 + \theta_0) - \cos(\theta_0 - \omega_0)) + \frac{1}{\omega_0^2} (\sin(\omega_0 + \theta_0) - \sin(\theta_0 - \omega_0)) \right) \\ x_2 &= \frac{5k_1}{2} \int_{-1}^1 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{5k_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{3}{2} t^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0) dt - \frac{5k_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \theta_0) dt \end{aligned}$$

La integración del primer sumando resulta en,

$$u = \frac{3}{2} t^2, \quad du = 3t dt, \quad dv = \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad v = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_2 &= (\cos(\omega_0 + \theta_0) - \cos(\theta_0 - \omega_0)) \left(-\frac{15k_1}{4\omega_0} + \frac{15k_1}{2\omega_0^3} + \frac{5k_1}{4\omega_0} \right) \\ &\quad + \frac{15k_1}{2\omega_0^2} (\sin(\omega_0 + \theta_0) - \sin(\theta_0 - \omega_0)) \end{aligned}$$

De esta manera, haciendo $k_1 = 1$, $\omega_0 = 1$ y $\theta_0 = 0$, se obtienen los valores para los primeros 2 términos de la serie de Legendre iguales a $x_1 = 2.52$ y $x_2 = 12.62$.

Polinomios de Chebyshev. Sea $T = [-1, 1]$ y $w(t) = [1 - t^2]^{-1/2}$, entonces, los siguientes polinomios generan un sistema ortogonal:

$$\varphi_n(t) = 2^n (2\pi)^{-1/2} T_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n - 1} \cos(n \arccos t), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

que se calculan en forma recurrente (para $n > 2$):

$$T_n(t) = tT_{n-1}(t) - \frac{1}{4}T_{n-2}(t).$$

Aplicando el intercambio anterior de variables $\tau = 1 - 2e^{-pt}$, $p > 0$, $p \in \mathbb{R}^+$, de los polinomios (1.44) se obtiene el sistema ortonormal base de *funciones de Chebyshev*, definidas para $T = [0, \infty)$ y $w(t) = [e^{-2pt} - 1]^{-1/2}$:

$$\hat{T}_n(t) = 2^n \left(\frac{p}{\pi}\right)^{1/2} T_n(1 - 2e^{-pt}),$$

Polinomios de Laguerre. Los siguientes polinomios generan un sistema ortogonal, para un valor de $T = [0, \infty)$ y $w(t) = e^{-t}$:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

donde $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$, que se pueden calcular en la forma recurrente:

$$L_n(t) = (2n - 1 - t)L_{n-1}(t) - (n - 1)^2 L_{n-2}(t).$$

Las respectivas funciones ortonormales de Laguerre, para $T = [0, \infty)$ y $w(t) = 1$, tienen la forma:

$$\hat{L}_n(t) = \frac{e^{-t/2}}{n!} L_n(t).$$

Polinomios de Hermite. Se definen, para $T = (-\infty, \infty)$ y $w(t) = e^{-t^2}$, en la forma

$$\varphi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad (1.45)$$

con la respectiva forma recurrente de cálculo

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t).$$

Los polinomios (1.45) conforman el siguiente sistema ortonormal:

$$\hat{H}_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-t^2/2} H_n(t).$$

definidos en el intervalo $T = (-\infty, \infty)$ y $w(t) = 1$.

Funciones de Walsh. A diferencia de los anteriores polinomios existe una clase de funciones que se definen a partir de la solución de una ecuación de diferencias, en forma de sucesiones con valores establecidos, en particular, el sistema de Walsh es preferible definirlo a partir de las funciones elementales rectangulares de Rademascher [9]:

$$r_n(t) \triangleq \begin{cases} \text{sgn}(\sin(2^n \pi t)), & n = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

De la definición (1.46), es evidente el carácter discreto de las funciones de Rademascher, que toman dos valores únicamente: $+1$ en los subintervalos $(k/2^n, (k+1)/2^n)$, $k = 2l$, $l = 0, 1, \dots$, y el valor de -1 en los demás subintervalos. No obstante, el sistema de funciones (1.46) es ortogonal, pero no es completo al existir otras funciones ortogonales al sistema. Por lo tanto, se define un nuevo conjunto ortogonal hasta hacerlo completo, a partir del sistema (1.46) y definido para $T = [0, 1]$ y $w(t) = 1$, que se nota por $\{\text{wal}_m(t) : m = 0, 1, \dots, N-1\}$, mediante la siguiente ampliación,

$$\text{wal}_n(t) = \begin{cases} \prod_{l=1}^N (r_l(t))^{\varkappa(l,n)} & n = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

siendo $\varkappa(l, n)$ el valor del elemento l en la representación del valor n en código Gray. En la práctica, se emplean conjuntos conformados por $N = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ funciones.

Las primeras 8 funciones $\{\text{wal}_n(t), n = 0, 1, 2, \dots, 7\}$ en correspondencia con (1.47) se muestran en la Tabla 1.2. Mientras en la Figura 1.11 se representan las funciones base ortogonal $\text{wal}_n(t)$, para los valores $n = 1, 2, 3, 4$.

l	Código binario	$\varkappa(l)$	$\text{wal}_l(t)$
0	000	000	$\text{wal}_0(t) = 1$
1	001	001	$\text{wal}_1(t) = r_1(t)$
2	010	011	$\text{wal}_2(t) = r_1(t)r_2(t)$
3	011	010	$\text{wal}_3(t) = r_2(t)$
4	100	110	$\text{wal}_4(t) = r_2(t)r_3(t)$
5	101	111	$\text{wal}_5(t) = r_1(t)r_2(t)r_3(t)$
6	110	101	$\text{wal}_6(t) = r_1(t)r_3(t)$
7	111	100	$\text{wal}_7(t) = r_3(t)$

Tabla 1.2. Obtención de las funciones $\text{wal}_n(t)$

Las siguientes son las principales propiedades de las funciones de Walsh:

1. Son digitales en el sentido en que toman solamente los valores $\{1, -1\}$ con período unitario.
2. Son ortonormales en el intervalo $[-1/2, 1/2]$:

$$\int_T \text{wal}_m(t) \text{wal}_n(t) dt = \delta_{mn}$$

3. El conjunto es multiplicativo: $\text{wal}_n(t) \text{wal}_m(t) = \text{wal}_{n \oplus m}(t)$, siendo $n \oplus m$ la multiplicación por módulo 2 de las respectivas descomposiciones binarias de n y m . Por lo tanto, la multiplicación de dos funciones de Walsh también son de esta clase.
4. El sistema se compone de dos conjuntos de funciones: pares e impares, las cuales se definen respectivamente como

$$\text{cal}_k(t) = \text{wal}_{2k}(t), \quad (1.48a)$$

$$\text{sal}_k(t) = \text{wal}_{2k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.48b)$$

donde k es el orden de las funciones pares e impares, que caracterizan la cantidad de cambios de signo en el intervalo $(0, 1/2)$. Las notaciones $\text{sal}_k(t)$ y $\text{cal}_k(t)$ muestran la similitud con las funciones sin y cos, respectivamente.

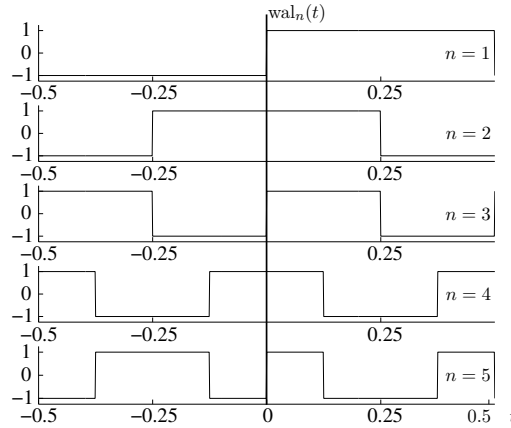


Figura 1.11. Representación de las funciones de Walsh

Teniendo en cuenta el sistema (1.48a) y (1.48b) y al asumir $-1/2 < \theta < 1/2$, se puede escribir la ecuación de diferencias de las funciones de Walsh en la siguiente forma:

$$\text{wal}_{2k+q}(\theta) = (-1)^{\lceil k/2 \rceil + q} \text{wal}_k(2\theta + 1/2) + (-1)^{k+q} \text{wal}_k(2\theta - 1/2)$$

donde $\lceil k/2 \rceil$ es el entero más grande menor o igual a $k/2$, $q = \{0, 1\}$ y con condición inicial

$$\text{wal}_0(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| < 1/2 \\ 0, & |\theta| \geq 1/2 \end{cases}$$

En general, una función $x(t) \in L^2(T)$ se puede representar por la serie generalizada de Fourier (1.27) compuesta por las funciones de Walsh:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{wal}_n(t) \quad (1.49)$$

cuyos coeficientes se determinan de acuerdo con las ecuaciones (1.23) y (1.42):

$$x_n = \int_T x(t) \text{wal}_n(t) dt \quad (1.50)$$

Al expresar el sistema $\{\text{wal}_n(t)\}$ por sus respectivas componentes, pares e impares, se obtiene la expansión:

$$x(t) = a_0 \text{wal}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{cal}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sal}_n(t)$$

en la cual, los coeficientes se determinan de acuerdo con (1.23):

$$a_n = \int_T x(t) \text{cal}_n(t) dt, \quad b_n = \int_T x(t) \text{sal}_n(t) dt$$

Los coeficientes x_n (en su defecto a_n y b_n) de la serie Fourier-Walsh en (1.49) conforman el espectro de la señal $x(t)$ por la base Walsh, el cual es denominado *s-espectro* (*sequence spectrum*).

Ejemplo 1.10. Determinar el *s-espectro* de la señal $x(t) = \sin 2\pi t$, $-\infty < t < \infty$, empleando el sistema

$$\{\text{wal}_n(t), 0 \leq t < 1, n = 0, 1, \dots, 31\}$$

Debido a la imparidad de la función dada $x(t)$, respecto al punto $t = 1/2$, todos los coeficientes para las funciones pares son iguales a cero, $\text{wal}_{2n}(t) = 0$. También son iguales a 0 los coeficientes de las funciones impares de orden, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 y 31. Los demás coeficientes tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} x(t) \text{wal}_1(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \sin(2\pi t) \text{wal}_1(t) dt = 2 \int_0^{1/2} \sin(2\pi t) dt = \frac{2}{\pi} \approx 0.637 \\ x_5 &= \int_{-1/2}^{1/2} \sin(2\pi t) \text{wal}_5(t) dt = 4 \int_0^{1/8} \sin(2\pi t) dt - 2 \int_{1/8}^{3/8} \sin(2\pi t) dt \approx -0.264 \\ x_9 &\approx -0.052, \quad x_{13} \approx -0.127, \quad x_{17} \approx -0.012, \quad x_{21} \approx -0.005, \\ x_{25} &\approx -0.026, \quad x_{29} \approx -0.063 \end{aligned}$$

De igual manera se puede establecer el *s-espectro* de la señal $x(t) = \cos 2\pi t$, para la cual se obtienen los siguientes coeficientes:

$$x_2 \approx 0.637, \quad x_6 \approx 0.264, \quad x_{10} \approx -0.052, \quad x_{14} \approx 0.127, \quad x_{18} \approx -0.012, \quad x_{22} \approx 0.005$$

Los demás coeficientes son todos iguales a cero. En la parte izquierda de la Figura 1.12 se muestra el s -espectro de Walsh con los coeficientes obtenidos.

En general, el s -espectro de la función $x(t) = \sin(2\pi t + \theta)$ se puede obtener a partir de la relación:

$$\sin(2\pi t + \theta) = \sin(2\pi t) \cos \theta + \cos(2\pi t) \sin \theta,$$

por lo cual es claro, que cambiando la fase θ cambian los valores de los coeficientes de descomposición de la serie de Walsh.

Ejemplo 1.11. Hallar el espectro de una sucesión de pulsos cuadrados con amplitud 2^n , apertura $1/2^n$ y período unitario.

Los coeficientes de representación del sistema base de Walsh (1.50), en ese caso, se igualan a

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \\ 0, & i \neq 0, 1, \dots, 2^n - 1 \end{cases}$$

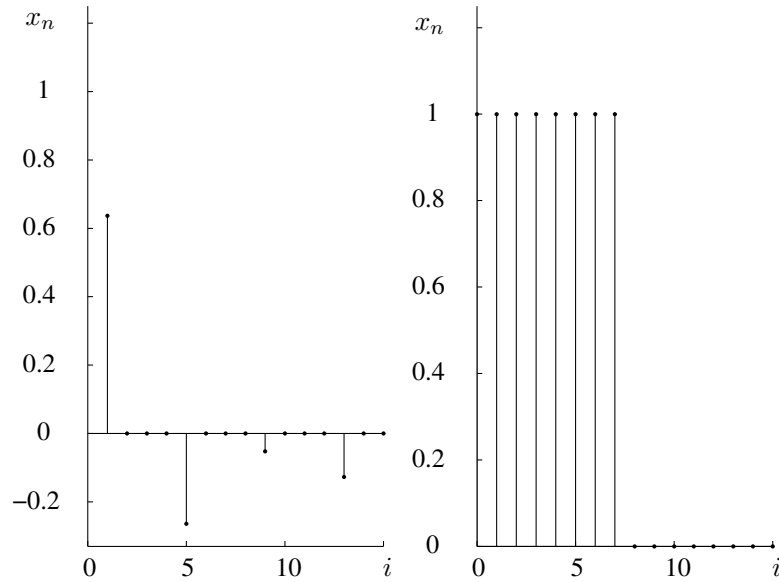


Figura 1.12. Ejemplo 1.11. s -espectro de Walsh.

En la parte derecha de la Figura 1.12 se muestra el s -espectro de Walsh con los coeficientes obtenidos en la expresión anterior. A diferencia del espectro común de Fourier, para el cual se obtuvieron los coeficientes (1.33), el s -espectro de Walsh para un tren de pulsos cuadrados es finito.

Sin embargo, como antes se dijo, el valor de los coeficientes no es invariante a la fase del tren de pulsos, así por ejemplo, si se aplica un retardo $\theta = N/2$, entonces, los coeficientes varían su posición y su valores serán:

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = -1$$

Los demás coeficientes son iguales a 0.

Funciones de Haar. El sistema está determinado para $T = [0, 1]$ y $w(t) = 1$, se nota de la forma $\{\text{har}_m^{(i)}(t)\}$ y se define como:

$$\begin{aligned} \text{har}_0^{(0)}(t) &= 1, \\ \text{har}_0^{(1)}(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 0, & t = 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \end{cases} \\ \text{har}_m^{(i)}(t) &= \begin{cases} 2^{m/2}, & (i-1)2^{-m} \leq t < (i-1/2)2^{-m} \\ -2^{m/2}, & (i-1/2)2^{-m} \leq t < i2^{-m} \\ 0, & \text{otros valores de } t \end{cases} \end{aligned} \quad (1.51)$$

para $m \geq 1$, $1 \leq i \leq 2^m$. El sistema ortonormal $\{\text{har}_m^{(i)}(t)\}$ es completo.

Por cuanto, en la representación espectral de las señales es preferible que el sistema base sea expresado en función de un solo índice ordinal, entonces, se emplea la definición para el sistema base $\{\text{har}_n^{(i)}(t)\}$ a través de las funciones de Rademascher (1.46) [4]:

$$\text{har}_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2} r_{k+1}(t) \text{rect}_T(2^k t - n(\text{mod } 2^k)), & n = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

siendo k el número del bit mayor diferente de cero en la representación binaria de n y $T = 1$.

La serie Haar-Fourier, teniendo en cuenta (1.17), se describe en la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{har}_n(t)$$

y los coeficientes de descomposición son determinados de la siguiente manera

$$x_n = \int_T x(t) \text{har}_n(t) dt$$

Ejemplo 1.12. Determinar el s -espectro de la serie Haar-Fourier para la señal $x(t) = \sin 2\pi t$, mediante el sistema

$$\{\text{har}_n(t), 0 \leq t < 1, n = 0, 1, 2, \dots, 15.\}$$

Los coeficientes resultantes, que se muestran en la parte izquierda de la Figura 1.13, son:

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_{-1/2}^{1/2} x(t) dt = 0, \\ x_n &= \int_{-1/2}^{1/2} x(t) \text{har}_n(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} x(t) 2^{k/2} r_{k+1}(t) \text{rect}_T(2^k t - n(\text{mod } 2^k)) dt, \quad n > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.637, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = -0.0091, \quad x_5 = x_6 = 0.0539, \quad x_7 = -0.0539, \\
x_8 &= -0.0208, \quad x_9 = -0.0091, \quad x_{10} = 0.0091, \quad x_{11} = x_{12} = 0.0208, \quad x_{13} = 0.0091, \\
x_{14} &= -0.0091, \quad x_{15} = -0.0208.
\end{aligned}$$

En el caso del tren de pulsos cuadrados del ejemplo 1.11, el s -espectro de Haar para $n = 3$, resulta en los coeficientes:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_4 = 2$$

Los demás coeficientes son iguales a cero, como se muestra en la parte derecha de la Figura 1.13.

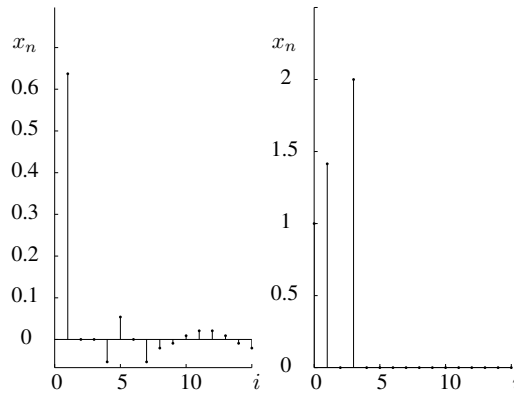


Figura 1.13. Ejemplo 1.12. s -espectro de Haar.

Problemas

Problema 1.7. Sean las señales $y(t)$ y $x(t)$ elementos de un espacio real de Hilbert, tales que sean linealmente independientes, y por lo tanto, la igualdad $y = \lambda x$ no tiene lugar para ningún valor real de λ . Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz (Cauchy-Buniakovski)

$$|\langle x, y \rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$$

Problema 1.8. Demostrar que en un espacio real de Hilbert se cumple la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Problema 1.9. En un espacio de Hilbert están dados los vectores u y v , tal que $\|v\| = 1$. En analogía con la geometría de los vectores comunes en un plano, el vector $w = (u, v)v$ se denomina *proyección ortogonal* del vector u en la dirección v . Demostrar que el vector $y = u - w$ es ortogonal al vector v .

Problema 1.10. Empleando el método Gramm-Schmidt, mostrado en el ejemplo 1.6, calcular los tres primeros vectores base α_i , $i = 0, 1, 2$, obtenidos mediante la ortonormalización del sistema de funciones $\{1, t, t^2, \dots\}$ en el intervalo de tiempo $-1 \leq t \leq 1$.

Problema 1.11. Sea el par de funciones: $x(t) = \text{rect}_\tau$ y la exponente $y(t) = y_0 \exp(\alpha t) u(t)$, tales que, $y_0, \alpha, \tau \in \mathbb{R}$. Dada la apertura τ encontrar el valor del parámetro α , para el cual la distancia $d(x, y)$ sea la mínima posible.

Problema 1.12. Encontrar los tres primeros coeficientes x_i , $i = 0, 1, 2$ de la serie generalizada de Fourier, obtenida mediante la descomposición de la señal $x(t) = e^t$ en el intervalo $-1 \leq t \leq 1$, tomando en calidad de sistema de funciones base $\{\phi_k\}$, el cual se analiza en el problema 1.10. Calcular la norma del error absoluto de aproximación en la forma,

$$\left\| x - \sum_{k=0}^2 x_k \phi_k \right\|$$

Estimar el error relativo de aproximación, en la forma

$$\left\| x - \sum_{k=0}^2 x_k \phi_k \right\| / \|x\|$$

Problema 1.13. Hallar los coeficientes del polinomio de segundo orden $y(t) = a + bt + ct^2$, de tal manera que se obtenga la aproximación, con el menor error cuadrático medio (1.21), de la función $x(t) = e^t$ en el intervalo $-1 \leq t \leq 1$.

Problema 1.14. Demostrar la ortogonalidad del conjunto formado por el principio $\text{sgn}[\sin(2^m \pi \theta)]$, donde $m \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.15. Una señal compleja periódica $x(t)$, definida en el intervalo de tiempo $-T/2 \leq t \leq T/2$, tiene la forma, $x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$. Demostrar que si la función $x_1(t)$ es par, mientras la función $x_2(t)$ es impar, entonces los coeficientes x_n de la serie de Fourier, para cualquier n , serán valores reales.

Problema 1.16. Demostrar que si p y q son enteros, para $p < q$, y $x \neq 0 \pmod{2\pi}$, entonces, se cumple que,

$$\left| \sum_{p \leq n \leq q} e^{inx} \right| \leq |\csc(1/2x)|$$

Problema 1.17. Calcular los coeficientes de la serie compleja de Fourier para las siguientes funciones periódicas dadas en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$a). x(t) = t. \quad b). x(t) = |\sin t|. \quad c). x(t) = \operatorname{sgn}(t).$$

Problema 1.18. La señal $x(s)$, que depende del argumento sin dimensión s en el intervalo determinado entre, $-1/2 \leq s \leq 1/2$, se representa por la dependencia $x(s) = 16s^2$. Calcular los tres primeros coeficientes de la serie (1.49).

Problema 1.19. Calcular los coeficientes x_i , para $i = 0, 1, 2$, de la serie generalizada de Fourier por funciones de Walsh (1.49), para la función del problema 1.12.

Problema 1.20. Hallar la expansión de la función $x(t) = t$ en serie trigonométrica en el intervalo cerrado $(0, 2)$.

Problema 1.21. Determinar el S -espectro de la sucesión periódica de pulsos rectangulares con amplitud $a = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$, apertura $\tau = 1/a$, y período unitario, empleando el sistema

$$\left\{ \operatorname{wal}_n(t), 0 \leq t < 1, n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N = 2^k - 1, k \in \mathbb{Z}, \right\}$$

siendo $k > m$.

Problema 1.22. Hallar el S -espectro de la señal pulso periódico (1.32) y demostrar que es finito (a diferencia del espectro de Fourier en (1.33)).

Problema 1.23. Determinar el espectro de la de la serie Haar-Fourier para la sucesión periódica de pulsos cuadrados con amplitud $a = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$, apertura $\tau = 1/a$, y período unitario, empleando el sistema $\{\operatorname{har}_n(t), 0 \leq t < 1, n = 0, 1, 2, \dots, N, N = 2^k - 1, k \in \mathbb{Z},\}$ siendo $m = 3$ y $k = 4$.

Ejercicio en el CP 1.1. Desarrollar un programa gráfico, puede ser en Matlab, que convierta la serie trigonométrica de Fourier utilizando desde 1 hasta 15 armónicos y 50 puntos por período.

Ejercicio en el CP 1.2. Desarrollar el código en Matlab de generación de las funciones de Walsh y obtener la representación gráfica para el caso de $m = 3$ y $k = 4$ del problema (1.22).

1.3. Representación integral de señales

La representación discreta, que se analiza en el numeral §1.2, en algunos casos, se restringe a la descomposición de señales periódicas, o bien a señales aperiódicas pero definidas sobre intervalos finitos de tiempo. Esta última restricción es superable al emplear la representación integral, que se da en forma de transformadas integrales y que se lleva a cabo para sistemas base continuos. La generalización de (1.17), en forma de representación continua, para cualquier sistema base o *transformada directa generalizada de Fourier*, se puede escribir en el dominio T como sigue:

$$v(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt, \quad s \in S \quad (1.52)$$

siendo s el parámetro generalizado del dominio S y $\theta(s, t)$ el *núcleo base dual* con respecto al *núcleo base* $\phi(s, t)$. La función $v(s)$ es una representación continua de $x(t)$ análoga a los coeficientes x_n en (1.17), que corresponde a la *densidad*, la cual caracteriza la distribución de $x(t)$ con relación a $\theta(s, t)$ en las diferentes regiones de S .

De manera recíproca, se determina la *transformada inversa generalizada de Fourier*,

$$x(t) = \int_S v(s) \phi(s, t) ds, \quad t \in T \quad (1.53)$$

Si existe la base dual $\theta(s, t)$, las ecuaciones (1.52) y (1.53) analizadas en conjunto corresponden al *par de transformadas de representación integral* de señales, las cuales, en forma general, no exigen que $\theta(s, t)$ y $\phi(s, t)$ pertenezcan a $L^2(T)$. Sin embargo, se conserva la representación de $v(s)$ para cada valor de s como un funcional lineal de $x(s)$.

Reemplazando $x(t)$ de (1.53) en (1.52) e intercambiando el orden de integración se obtiene la condición conjunta que deben cumplir los núcleos base duales:

$$x(t) = \int_S \int_T x(\tau) \theta(s, \tau) \phi(t, s) d\tau ds = \int_T K(t, \tau) x(\tau) d\tau \triangleq f_K \{x(t)\} \quad (1.54)$$

donde $K(t, \tau) = \int_S \theta(s, \tau) \phi(t, s) ds$.

En forma general, el funcional lineal $f_K \{x(t)\}$ no es acotado ni continuo, por lo tanto, no es de esperar que exista una función, perteneciente a $L^2(T)$ y definida en τ , que cumpla la condición (1.54) para cualquiera que sea la señal $x(t)$.

La solución a este problema está en la representación de la señal $x(t)$, mediante el integral de Duhamel (1.10), que emplea la función generalizada singular $\delta(t)$ de la siguiente forma:

$$f_K \{x(t)\} = x(t) = \int_T \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in T$$

Dado un núcleo base, de (1.54) se establece la restricción que debe cumplir el respectivo núcleo dual:

$$\int_S \phi(t, s) \theta(s, \tau) ds = \delta(t - \tau) \quad (1.55)$$

De la misma manera, al reemplazar (1.52) en (1.53), se tiene la condición:

$$\int_T \theta(s, t) \phi(t, \sigma) ds = \delta(s - \sigma) \quad (1.56)$$

que debe cumplir, tanto $\theta(s, t)$ como $\phi(t, \sigma)$, para conformar un par de núcleos conjugados base. Sin embargo, el análisis de (1.55) y (1.56) muestra que ambos núcleos al mismo tiempo no pueden pertenecer a $L^2(\mathbb{R})$.

Algunos núcleos base tienen la propiedad por la cual la transformada de la función en el dominio t , siendo integrable y perteneciente a $L^2(T)$, siempre genera funciones en el dominio s también integrables (pertenecientes a $L^2(S)$). La correspondencia completa entre las funciones determinadas en los dominios de t y s se provee con los *núcleos autoconjugados*, esto es [10],

$$\theta^*(s, t) = \phi(t, s) \quad (1.57)$$

Dadas dos transformaciones $v_x(s)$ y $v_y(s)$ de las señales $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, entonces,

$$\langle v_x(s), v_y(s) \rangle = \int_S v_x(s) v_y(s) ds = \int_S \int_T \int_T x(t) y^*(\tau) \theta(s, t) \theta^*(s, \tau) d\tau dt ds$$

que asumiendo la condición (1.57) sobre los núcleos autoconjugados se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle v_x(s), v_y(s) \rangle &= \int_T \int_T x(t) y^*(\tau) \delta(t - \tau) dt d\tau \\ &= \int_T x(t) y^*(t) dt = \langle x(t), y(t) \rangle \end{aligned}$$

De lo anterior se observa, que el valor del producto escalar se mantiene igual al cambiar del dominio t al dominio s .

1.3.1. Transformada de Fourier

La transformada integral de Fourier, o *transformada de Fourier* (TF), se obtiene asumiendo en calidad de funciones base las siguientes:

$$\phi(t, s) = e^{jst}, \quad \theta(t, s) = e^{-jst} \quad (1.58)$$

para $T \subset (-\infty, \infty)$ y $S \subset (-\infty, \infty)$.

Por cuanto, para la función generalizada ocurre la siguiente relación límite

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{jst} ds = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin \Omega t}{t} = \delta(t)$$

entonces, el par de funciones (1.58) cumple las restricciones (1.55) y (1.56), impuestas a los núcleos de base conjugados. El parámetro s caracteriza la frecuencia de cada función base, y usualmente, se

nota por alguna de las variables de frecuencia angular ω , o bien, de frecuencia lineal $2\pi f$.

Como se indica en el numeral §1.2.3, el conjunto de las series de Fourier permite representar, tanto la señal aperiódica en cualquiera de los puntos comprendidos en el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$ como las señales periódicas con período T . Sin embargo, para el caso en que las funciones aperiódicas extiendan su representación a todo el eje del tiempo $(-\infty, \infty)$ se obtiene, para cualquiera de los coeficientes del sistema (1.35), una indeterminación al reemplazar \mathcal{E}_n de (1.29).

La señal $x(t)$, definida en el intervalo finito de tiempo $[t_i, t_f]$, se puede representar como una suma de funciones exponenciales pero para todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ por medio de una nueva función periódica $x_T(t)$ con período T , que corresponde a la señal $x(t)$ repetida cada T segundos, como se ilustra en la Figura 1.14. La señal original puede obtenerse de nuevo haciendo $T \rightarrow \infty$, es decir,

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$$

La serie exponencial de Fourier que representa a la función $x(t)$ es:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t},$$

donde

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Debido a que $T \rightarrow \infty$, entonces, $\omega_0 \rightarrow 0$. Luego, antes de llevar al límite, deben hacerse los siguientes ajustes para que las componentes x_n no se hagan cero. En particular, se introducen las siguientes notaciones:

$$\omega_n \triangleq n\omega_0,$$

$$X(\omega_n) \triangleq T x_n$$

Entonces, las anteriores definiciones se convertirán respectivamente en:

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t},$$

$$X(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

La distancia entre las líneas adyacentes en el espectro de línea, obtenida para la señal límite $x_T(t)$,

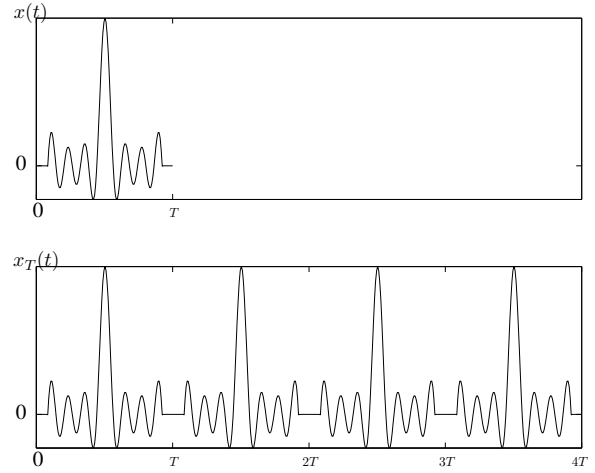


Figura 1.14. Representación periódica de funciones aperiódicas

se nota por $\Delta\omega = 2\pi/T$, la cual se puede reemplazar en la anterior serie, así:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Al realizar la operación del límite, cuando $T \rightarrow \infty$, las líneas contiguas discretas del espectro de $x_T(t)$ se acercan hasta formar un intervalo continuo de valores. La suma infinita de la anterior expresión resulta en la integral ordinaria de Riemann, así que:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) e^{j\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

que se convierte en la expresión conocida como la *Transformada Inversa de Fourier*:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \triangleq \mathcal{F}^{-1} \{X(\omega)\} \quad (1.59)$$

De igual manera, se puede obtener la *Transformada Directa de Fourier*:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \triangleq \mathcal{F} \{x(t)\} \quad (1.60)$$

El par de transformadas (1.59) y (1.60) representa la señal $x(t)$ como una suma continua de funciones exponenciales cuyas frecuencias están en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La amplitud relativa de los componentes a cualquier frecuencia ω es proporcional a $X(\omega)$.

Cabe anotar, que cuando la señal $x(t)$ representa voltaje, entonces, $X(\omega)$ tiene las dimensiones de voltaje por tiempo. Como la frecuencia tiene unidades de tiempo inverso, luego, puede considerarse a $X(\omega)$ como un espectro de densidad de voltaje o, en forma más general, como la *función densidad espectral* de $x(t)$ (o simplemente *FDE*).

A cada señal se le puede hallar su respectiva FDE por medio de la Transformada Directa de Fourier dada en (1.60), cuyo sentido físico queda claro de (1.59) para la TF inversa. En esta relación, el valor de $x(t)$ se puede calcular, aproximadamente, cambiando la integral por una sumatoria (método de los rectángulos [11]) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \\ &\approx \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) \cos(n\Delta\omega t) + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) \sin(n\Delta\omega t) \right) \end{aligned} \quad (1.61)$$

La aproximación (1.61) muestra que cualquier señal $x(t)$ se puede representar mediante un conjunto infinito de sinusoides y cosinusoides con frecuencias $n\Delta\omega$ con coeficientes complejos, en forma general. De la aproximación (1.61) se llega a la transformada de Fourier inversa haciendo $\Delta\omega \rightarrow 0$.

Al interpretar las ecuaciones (1.59) y (1.60), teniendo en cuenta la forma obtenida en (1.61) se puede decir que cada señal es la suma de funciones exponenciales complejas, cuya parte real son

cosinusoides y la parte imaginaria son sinusoides con coeficientes $x(n\Delta\omega)$ determinados por la transformada de Fourier directa.

Por último, cabe anotar que la función de densidad espectral de una señal dada $x(t)$ se puede visualizar representando gráficamente todo el conjunto de los respectivos coeficientes $X(n\Delta\omega)$, representados para el dominio ω .

Ejemplo 1.13. Determinar la FDE de la función pulso rectangular $x(t) = a \text{rect}_\tau(t)$.

Usando la TF (1.60), se obtiene:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a \text{rect}_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{a}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = \frac{a\tau \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\ X(\omega) &= a\tau \text{sinc}(\omega\tau/2). \end{aligned}$$

Existencia de la transformada de Fourier. Si una señal $x(t)$ cumple las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo de tiempo finito se puede demostrar la existencia de la Transformada de Fourier, esto es, si se cumplen las condiciones descritas en el numeral §1.2.3, a partir del análisis de la última condición, se puede decir que la transformada de Fourier se puede usar para representar unívocamente cualquier señal real de energía. Estas condiciones son también suficientes para la convergencia de las series de Fourier en la representación de cualquier señal de potencia en el intervalo de tiempo $(0, T)$.

Transformada de Fourier de señales periódicas. La función $x_T(t)$ periódica con período T puede expresarse por su serie exponencial de Fourier:

$$x_T(t) = \sum_n x_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Tomando la TF directa en la última ecuación

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_n x_n e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

Si se tiene en cuenta la linealidad (1.4) de la transformada de Fourier, entonces:

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \sum_n x_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

Además,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega \pm \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega \pm \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{\mp j\omega_0 t},$$

luego, transformando ambos lados de la última ecuación, se tiene

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ \delta(\omega \pm \omega_0) \} \} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ e^{\mp j\omega_0 t} \}$$

o intercambiando términos,

$$\mathcal{F} \{ e^{\mp j\omega_0 t} \} = 2\pi \mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ \delta(\omega \pm \omega_0) \} \} = 2\pi \delta(\omega \pm \omega_0)$$

entonces,

$$\mathcal{F} \{ x_T(t) \} = \sum_n x_n \mathcal{F} \{ e^{\mp jn\omega_0 t} \} = 2\pi \sum_n x_n \delta(\omega \pm \omega_0),$$

Es decir, la FDE de una señal periódica consiste en la sumatoria de un conjunto de funciones impulsos, multiplicados cada uno por el coeficiente 2π y localizados en las frecuencias armónicas.

Propiedades de la TF

(a). *Linealidad.* Sea $X_n(\omega) = \mathcal{F} \{ x_n(t) \}$, entonces

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_n a_n x_n(t) \right\} = \sum_n a_n X_n(\omega), \quad \forall a_n = \text{const.} \quad (1.62)$$

(b). *Conjugada compleja.*

$$\mathcal{F} \{ x^*(t) \} = X^*(-\omega)$$

(c). *Simetría.* Sea

$$x(t) = x_{\Re}(t) + jx_{\Im}(t)$$

siendo $\mathcal{F} \{ x_{\Re}(t) \} = X_{\Re}(\omega)$ y $\mathcal{F} \{ x_{\Im}(t) \} = X_{\Im}(\omega)$. Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad (1.62), se obtiene, entonces, $X(\omega) = X_{\Re}(\omega) + jX_{\Im}(\omega)$.

(d). *Dualidad.* Sea $\mathcal{F} \{ x(t) \} = X(\omega)$, entonces (Figura 1.15)

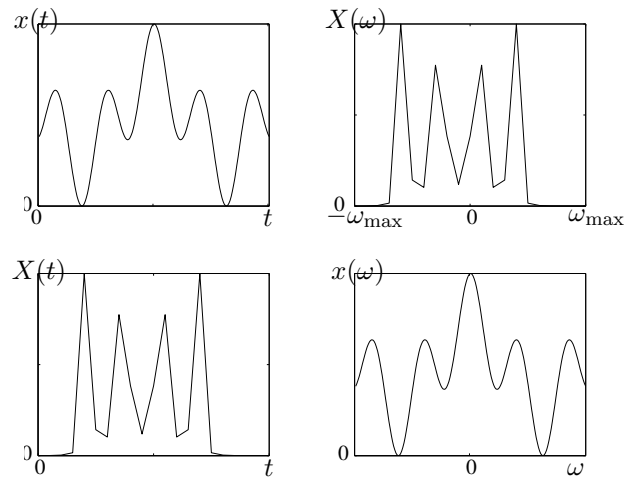
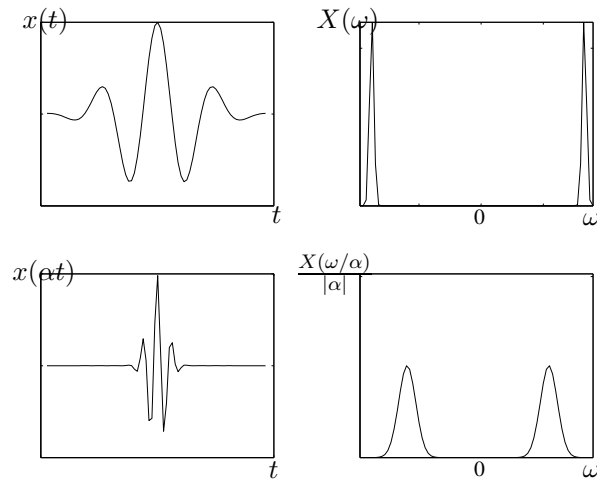
$$\mathcal{F} \{ X(t) \} = 2\pi x(-\omega)$$

(e). *Escala de coordenadas.* Figura 1.16

$$\mathcal{F} \{ x(\alpha t) \} = \frac{X(\omega/\alpha)}{|\alpha|} \quad (1.63)$$

(f). *Desplazamiento en el tiempo (retardo).*

$$\mathcal{F} \{ x(t - t_0) \} = X(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (1.64)$$

**Figura 1.15.** Propiedad de dualidad de la TF**Figura 1.16.** Propiedad de escala de la TF

(g). *Desplazamiento de frecuencia (modulación).*

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{\pm j\omega_0 t}\} = X(\omega \mp \omega_0)$$

Por cierto, a la función $\delta(t)$ desplazada en el tiempo t_0 le corresponde:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

Si $t_0 = 0$, entonces, $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$.

En caso de tener solamente la parte real,

$$\mathcal{F}\{x(t)\Re\{e^{-j\omega_0 t}\}\} = \mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)\right\},$$

usando la propiedad de desplazamiento de frecuencia se obtiene:

$$\mathcal{F}\{x(t)\Re\{e^{-j\omega_0 t}\}\} = \frac{1}{2}(X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0))$$

(h). *Diferenciación.*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega) \quad (1.65)$$

(i). *Integración.*

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (1.66)$$

$$\text{donde } X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt.$$

(j). *Relación de Parseval.* El reemplazo de (1.58) en (1.57) muestra que la base de Fourier es auto-conjugada, por lo que teniendo en cuenta el problema 1.24, se obtiene la relación,

$$\langle X, Y \rangle = \langle x, y \rangle$$

que establece la dualidad tiempo-frecuencia. En el caso, cuando $x = y$, entonces se obtiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \mathcal{E}_x \quad (1.67)$$

Función densidad espectral de potencia. Describe la distribución de la potencia en función de la frecuencia y es importante para el análisis de las señales de potencia:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \geq 0 \quad (1.68)$$

donde $x(t)$ se supondrá que es finita en el intervalo $(-T/2, T/2)$ y $X_T(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\text{rect}(t/T)\}$. Para el caso de las funciones periódicas se obtiene:

$$S_x(\omega) = 2\pi \sum_n |x_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0).$$

La densidad espectral de potencia de una función periódica es la serie de funciones impulso cuyos coeficientes de peso corresponden a la magnitud de los respectivos coeficientes de la serie de Fourier.

1.3.2. Extensiones del análisis espectral de Fourier

Espectros de mayor orden. El espectro $X(\omega)$ obtenido puede ser otra vez sometido al análisis espectral, con lo cual, se genera un nuevo espectro o *espectro de segundo orden* de $x(t)$,

$$x(t) \leftrightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \leftrightarrow \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}$$

que ha encontrado aplicación en estudios de señales que revelan rasgos de periodicidad en el espectro principal $X(\omega)$. Como ejemplos se pueden tomar los siguientes pares de funciones - imágenes:

$$\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(\omega/2\pi), \quad \Lambda(t) \leftrightarrow \text{sinc}^2(\omega/2\pi), \quad \delta(t) \leftrightarrow 1.$$

que son indefinidamente alternados, pero incrementando las respectivas ordenadas. En forma general, para cualquier función $x(t)$ se encuentra que la aplicación reiterante de la transformada de Fourier es de período 4, separada de un factor constante, así,

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \leftrightarrow 2\pi x(-t) \leftrightarrow 2\pi X(-\omega) \leftrightarrow (2\pi)^2 x(t)$$

Cuando se tiene que $x(t)$ es par, $x(t) = x(-t)$, entonces, el período es 2. Aunque, el procedimiento puede continuarse para órdenes mayores a 2, su interpretación no es fácil o útil.

Análisis cepstral. Los sistemas homomórficos, aunque son no lineales en el sentido convencional, satisfacen el principio de superposición, esto es, las señales de entrada y sus correspondientes respuestas se superponen mediante alguna operación que tiene las mismas propiedades algebraicas de la suma:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\{x_1 + x_2\} &= \mathcal{K}\{x_1\} + \mathcal{K}\{x_2\} \\ \mathcal{K}\{cx_1\} &= c\mathcal{K}\{x_1\} \end{aligned}$$

Aunque el análisis homomórfico de señales se puede generalizar a un sinnúmero de operaciones, en la práctica, se ha desarrollado la representación referida a las operaciones comunes de proceso de multiplicación y convolución. En el primer caso de homomorfismo multiplicativo, sean dos señales que se multiplican en la forma,

$$x(\lambda) = (x_1(\lambda))^\alpha (x_2(\lambda))^\beta, \quad x_i(t) = |x_i(t)| \exp(j \arg(x_i(t))) \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2 \quad (1.69)$$

tales que se cumpla la propiedad

$$\mathcal{K}\{x(\lambda)\} = \alpha \mathcal{K}\{x_1(\lambda)\} + \beta \mathcal{K}\{x_2(\lambda)\}$$

Una función que formalmente cumple esta propiedad corresponde a la logarítmica compleja,

$$\log(x(t)) = \log(x_1(t)x_2(t)) = \log(x_1(t)) + \log(x_2(t))$$

que implica

$$\begin{aligned} \log(|x(t)|) &= \log|x_1(t)| + \log|x_2(t)| \\ \arg(x(t)) &= \arg(x_1(t)) + \arg(x_2(t)) \end{aligned}$$

El cálculo del argumento en la última expresión genera ambigüedad, en la medida en que el desfase es periódico, motivo por el cual, la transformación homomórfica se restringe a señales no negativas, para las cuales se puede asumir que $\arg(x(t)) = 0$. Por lo tanto, dada la entrada en la forma (1.69), la respectiva salida de la operación de logaritmo compleja es,

$$\hat{x}(t) = \alpha \hat{x}_1(t) + \beta \hat{x}_2(t), \quad \hat{x}_i(t) = \log(x_i(t))$$

El anterior resultado de homomorfismo multiplicativo se puede emplear para la operación de convolución, teniendo en cuenta la propiedad de la transformada de Fourier (1.83),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} \mathcal{F}\{x_2(t)\} \Rightarrow \hat{X}(\omega) = \log(X_1(\omega) X_2(\omega)) \\ &= \log(X_1(\omega)) + \log(X_2(\omega)) \end{aligned}$$

La condición de transformadas positivas, $X_i(\omega) \geq 0$, se asegura al emplear no la densidad espectral de energía, sino una magnitud derivada de la densidad de potencia (1.68), a partir de la cual se define el *cepstro* para la señal $x(t)$ como [12]:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |X(\omega)| e^{j\omega t} d\omega \quad (1.70)$$

asumiendo la paridad de la función $x(t)$, entonces, ésta propiedad se extiende a la densidad $|X(\omega)|$ y, por lo tanto, a la función $\log |X(\omega)|$. De esta manera, la definición (1.70) se escribe como:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \log |X(\omega)| \cos t\omega d\omega$$

El análisis cepstral se emplea en casos en que se tenga un carácter oscilatorio significativo en el espectro, por ejemplo, el análisis de los parámetros de fuentes sísmicas (oscilaciones debidas a fuentes finitas y a múltiples eventos), el análisis de reverberación e interferencia en aplicaciones de audio.

Transformada de Hartley (TH). Se define por el par de ecuaciones [13]:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{cas}(2\pi ft) dt \quad (1.71a)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \text{cas}(2\pi ft) df \quad (1.71b)$$

donde $\text{cas}(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$.

La ecuación (1.71a) es la forma analítica de la Transformada de Hartley directa, mientras la expresión (1.71b) es la Transformada inversa, usada para representar la función de frecuencia en el tiempo. Estas ecuaciones son similares a la transformadas directa e inversa de Fourier dadas en (1.59) y (1.60). La diferencia fundamental de estas dos transformadas es que la parte real $\text{cas}(\alpha)$ reemplaza en la transformada de Hartley el respectivo término exponencial complejo $e^{\pm j2\pi ft}$ en el par de TF.

Sea $H(f) = H_p(f) + H_i(f)$, las partes par e impar, respectivamente de la TH, definidas como:

$$H_p(f) = (H(f) + H(-f))/2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt \quad (1.72a)$$

$$H_i(f) = (H(f) - H(-f))/2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt \quad (1.72b)$$

La expresión (1.72a) se conoce como la *Transformada cosenos de Fourier*, mientras la expresión (1.72b) es la *Transformada senos de Fourier*. Del par de anteriores ecuaciones se tiene que,

$$\begin{aligned} H_p(f) - H_i(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= X(\omega) \end{aligned}$$

Así mismo, se puede demostrar que $H(f) = \Re\{X(f)\} - \Im\{X(f)\}$.

Ejemplo 1.14. Hallar la Transformada de Hartley para la función $\text{rect}(t - 1/2)$.

En este caso se tiene que,

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t - 1/2) \text{cas}(2\pi f t) dt = \int_0^1 \text{cas}(2\pi f t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi f} (\sin(2\pi f t) - \cos(2\pi f t)) \Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi f} (\sin(2\pi f) - \cos(2\pi f) + 1) \end{aligned}$$

El espectro de Hartley se muestra en la Figura 1.17 (con línea continua), en la cual, para la comparación se muestra las parte real (\cdots) e imaginaria ($-\cdots$) de la TF, para la misma señal.

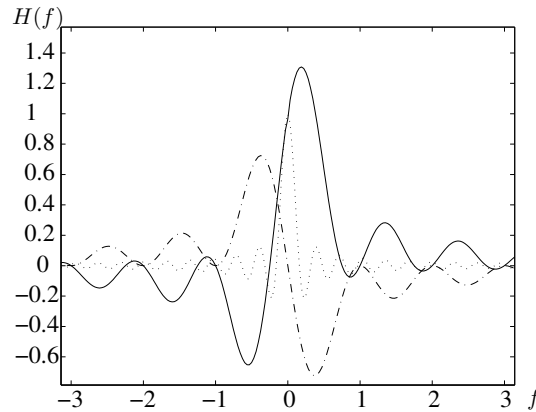


Figura 1.17. TH (línea continua), parte real de la TF (\cdots) y parte imaginaria TF ($-\cdots$)

Transformada enventanada de Fourier. En la práctica, es usual el empleo de los métodos de *análisis de intervalos cortos de tiempo*, en los cuales la señal en estudio se procesa sobre intervalos definidos de tiempo finito con longitud T_a o *apertura*, como si en cada uno de ellos tuviese propiedades estadísticas independientes:

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K} \{x(t) w(\tau - t)\} dt, \quad t \in T_a \quad (1.73)$$

donde $x(t)$ corresponde a la señal de información, $w(t)$ es la función de peso o *función ventana* que se centra respecto a la apertura T_a escogida, de tal manera, que facilite la extracción de información útil, \mathcal{K} es la transformación a la cual se somete la señal original, que comúnmente emplea la transformada de Fourier o *Análisis de Tiempo Corto* con empleo de la Transformada de Fourier (TCTF).

La transformada de Fourier entrega el contenido espectral de la señal $x(t)$, pero no puede dar información que relacione cada componente de frecuencia con su localización exacta en el tiempo. Una forma de localización en el tiempo se obtiene empleando el procedimiento de la TCTF.

En general, una ventana real y simétrica $w(t) = w(-t)$ se traslada en el valor de desplazamiento b y modula a la frecuencia s , para obtener el *átomo* de tiempo-frecuencia de la TCTF:

$$w_{s,b}(t) = w(t - b)e^{jst} \quad (1.74)$$

donde $\|w\| = 1$, tal que $\|w_{s,b}\| = 1$ para cualquier $s, b \in L^2(T)$. En la práctica, se disponen de diversas funciones ventana, entre las cuales están: *Blackman*, *Hamming*, *Gaussiana*, representadas en la Figura 1.18(a), que se analizan con detalle en el numeral §4.3.2.

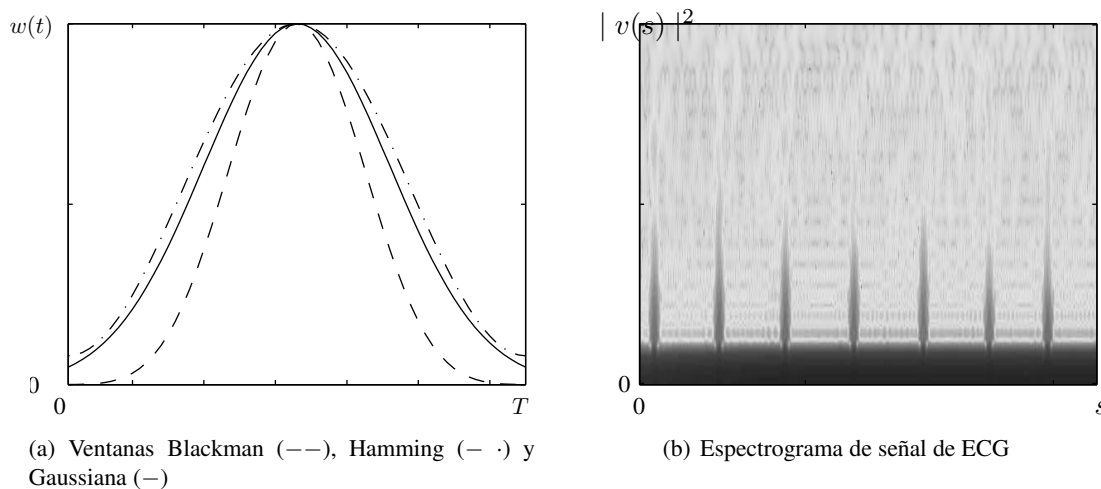


Figura 1.18. Transformada enventanada de Fourier

La transformada lineal de tiempo-frecuencia relaciona la señal con una familia de formas de onda que tienen su energía concentrada en regiones angostas, tanto en el tiempo, como en la frecuencia; éstas formas de onda son los átomos de tiempo-frecuencia [14], por lo que la transformada enventanada de Fourier de $x \in L^2(\mathbb{R})$, teniendo en cuenta (1.74), está dada por el siguiente producto interno

(1.15) definido en $L^2(\mathbb{R})$:

$$v(s) = \langle x, w_{s,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-b)e^{-jst}dt \quad (1.75)$$

La correspondiente densidad de la energía de la señal $x(t)$ en el plano tiempo-frecuencia se obtiene calculando el *espectrograma*, representado en la Figura 1.18(b):

$$|v(s)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)w(t-b)e^{-jst}|^2 dt \quad (1.76)$$

La expresión (1.76) mide la energía de la señal $x(t)$ en la vecindad de (s, b) [14].

Generalización de la TF - Transformada de Laplace. El análisis de algunas señales $x(t)$, mediante la transformada de Fourier (1.59), se dificulta en la medida en que no cumplen la condición débil de Dirichlet (1.38), esto es, no son absolutamente integrables. En este caso, se puede hallar la convergencia, si la señal se multiplica por una función que acote los valores extremos, por ejemplo, por una curva exponencial del tipo, e^{-ct} , en la cual la constante $c > 0$ se escoge de tal manera que asegure la condición de integrabilidad absoluta del producto $x(t)e^{-ct}$, entonces, la densidad espectral de potencia (1.59) toma la forma,

$$X(\omega, c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{-ct}) e^{-j\omega t} dt$$

Sin embargo, para asegurar la convergencia de la anterior integral, se debe tomar la señal ajustada sobre el dominio del tiempo, $x(t)u(t)$, tal que para valores $t < 0$, su aporte sea 0. De otra manera, el factor de multiplicación e^{-ct} puede conllevar a la divergencia de la integral. Por lo tanto, el límite inferior de la anterior densidad espectral de Fourier acotada siempre es 0, esto es,

$$X(\omega, c) = \int_0^{\infty} (x(t) e^{-ct}) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(c+j\omega)t} dt = X(c + j\omega) \quad (1.77)$$

Si se halla la TF inversa de la densidad espectral $X(c + j\omega)$ se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = x(t) e^{-ct}$$

Así mismo, si ambas partes de la integral anterior se multiplican por e^{ct} , juntando los factores de multiplicación exponencial y haciendo el cambio de variable $\omega \rightarrow c + j\omega$, entonces,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega) = x(t)$$

En la práctica, es usual el empleo de la notación $p = c + j\omega$, luego, la anterior integral y la densidad

(1.77) conforman el par de *Transformadas de Laplace* (TL),

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = X(p) \triangleq \mathcal{L}\{x(t)\} \quad (1.78a)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp = x(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} \quad (1.78b)$$

De (1.78b), se observa que la TL inversa se realiza mediante la integración en el plano complejo p sobre toda la recta vertical $c = \text{const.}$ También es claro, que el reemplazo de $p = j\omega$ conduce directamente a la transformada de Fourier. Por lo tanto, todas sus propiedades tienen lugar para la TL.

Ejemplo 1.15. Hallar la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$.

Si se analiza la FDE (1.60), entonces se obtiene,

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{j\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} \right) \end{aligned}$$

Sin embargo, $e^{-j\omega t}$, cuando $t \rightarrow \infty$ no converge a ningún valor, y por lo tanto, la densidad es indeterminada. La razón está en que la función $u(t)$ no cumple las condiciones de Dirichlet.

En el caso de la transformada de Laplace (1.78a), $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, se puede demostrar que,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = pX(p) - x(0_+) \quad (1)$$

donde $x(0_+)$ es el valor de la señal en $t \rightarrow 0$, que sea infinitamente cercano por la derecha. En ese sentido, la función escalón unitario se puede representar como la derivada de la señal rampa, tal que, $x_2(t) = ktu(t) = u(t) du/dt$, para la cual se obtiene la transformada, $X(p) = \int_0^{\infty} kte^{-pt} dt$.

Integrando por partes, haciendo $v = kt$, $dv = kdt$ y $dw = e^{-pt} dt$, entonces, $w = -\frac{e^{-pt}}{p}$:

$$X(p) = -\frac{e^{-pt}}{p} kt + \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{p} kdt = -\frac{e^{-pt}}{p} kt + \frac{k}{p} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(0 - \frac{k}{p^2} \right) = \frac{k}{p^2}$$

Luego, teniendo en cuenta la transformada de la derivada de una función (1):

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = pX_2(p) - u(0_+) = p\frac{k}{p^2} = \frac{k}{p}$$

Finalmente, la densidad espectral de energía buscada, al reemplazar p por $j\omega$, se obtiene igual a $U(\omega) = \frac{k}{j\omega}$.

1.3.3. Transformada de Walsh

Ambos conjuntos de funciones, pares (1.48b) e impares (1.48a), que componen las series de Walsh se pueden generalizar al multiplicar el ordinal k por un valor $\xi \in \mathbb{R}$, tal que exista el valor límite

$$\mu = \lim_{\xi, k \rightarrow \infty} k/\xi$$

con lo cual se obtiene el sistema base continuo $\phi(s, t)$ conformado por las funciones generalizadas de Walsh $\{\text{wal}(\mu, \theta), -\infty < \theta < \infty, -\infty < \mu < \infty\}$ [9]. En particular, asumiendo $\mu > 0$, entonces el par de transformadas Walsh-Fourier se determinan así [15]:

$$a_c(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \text{cal}(\mu, \theta) d\theta, \quad b_s(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \text{sal}(\mu, \theta) d\theta, \quad (1.79a)$$

$$x(\theta) = \int_0^{\infty} (a_c(\mu) \text{cal}(\mu, \theta) + b_s(\mu) \text{sal}(\mu, \theta)) d\mu \quad (1.79b)$$

Cabe anotar las siguientes propiedades de simetría en las funciones de Walsh:

$$\text{cal}(-\mu, \theta) = \text{cal}(\mu, \theta), \quad \text{sal}(-\mu, \theta) = -\text{sal}(\mu, \theta).$$

con lo cual, en el intervalo $-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2}$ y para $i = 1, 2, \dots$, se tienen las siguientes relaciones:

$$\text{cal}(\mu, \theta) = \text{wal}(0, \theta) = 1, \quad 0 \leq \mu < 1$$

$$\text{cal}(\mu, \theta) = \text{cal}(i, \theta), \quad i \leq \mu < i + 1$$

$$\text{sal}(\mu, \theta) = \text{sal}(i, \theta), \quad i - 1 < \mu \leq i$$

Por lo tanto, dada una función $x(\theta)$ limitada en el tiempo, tal que sea 0 fuera del intervalo definido como $-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2}$, luego, la transformada Walsh-Fourier se reduce a la siguiente forma:

$$a_c(\mu) = a_c(0) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) d\theta \quad 0 \leq \mu < 1$$

$$a_c(\mu) = a_c(i) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \text{cal}(i, \theta) d\theta, \quad i \leq \mu < i + 1$$

$$a_s(\mu) = a_s(i) = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \text{sal}(i, \theta) d\theta, \quad i - 1 < \mu \leq i$$

Mientras, la transformada inversa de Walsh-Fourier está dada por la expresión:

$$x(\theta) = a_c(0) \text{wal}(0, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_c(i) \text{cal}(i, \theta) + a_s(i) \text{sal}(i, \theta))$$

Ejemplo 1.16. Calcular el s -espectro del problema (1.21) para un pulso rectangular de altura 2^m y apertura $1/2^m$.

Del sistema (1.79a) y (1.79b), se tiene que la transformada directa Walsh-Fourier es:

$$a_c(\mu) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \mu < 2^{m-1} \\ 0, & \mu \geq 2^{m-1} \end{cases} \quad b_s(\mu) = \begin{cases} 1, & 0 < \mu \leq 2^{m-1} \\ 0, & \mu > 2^{m-1} \end{cases}$$

1.3.4. Integral de convolución

Nuevos sistemas bases se pueden formar a partir del desplazamiento en el tiempo de un sistema base original. Por ejemplo, si se analiza el siguiente caso particular,

$$\phi(s, t) = \phi(t - s) \quad (1.80)$$

de tal manera, que el sistema base es función de una sola variable, correspondiente a la diferencia $(t - s)$, además, considerando $T, S \in (-\infty, \infty)$, entonces, la señal original corresponde a la integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)\phi(s - t)ds \triangleq v(t) * \phi(t) \quad (1.81)$$

denominada la *integral de convolución*, cuyas principales propiedades son las siguientes:

(a). *Conmutación*

$$x_m(t) * x_n(t) = x_n(t) * x_m(t)$$

(b). *Distribución*

$$x_k(t) * (x_m(t) + x_n(t)) = x_k(t) * x_m(t) + x_k(t) * x_n(t)$$

(c). *Asociación*

$$x_k(t) * (x_m(t) * x_n(t)) = (x_k(t) * x_m(t)) * x_n(t)$$

(d). *Convolución en el tiempo.* Sea $\mathcal{F}\{x_i(t)\} = X_i(\omega)$;

$$\mathcal{F}\{x_m(t) * x_n(t)\} = X_m(\omega)X_n(\omega) \quad (1.82)$$

(e). *Convolución en la frecuencia*

$$\mathcal{F}\{x_m(t)x_n(t)\} = \frac{1}{2\pi} (X_m(\omega) * X_n(\omega)) \quad (1.83)$$

(f). *Convolución con la función impulso*

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$\text{Por cierto, } \alpha\delta(t - \tau_1) * \beta\delta(t - \tau_2) = \alpha\beta\delta(t - \tau_1 - \tau_2).$$

Finalmente, se puede demostrar que:

$$\frac{d}{dt}(x_m(t) * x_n(t)) = x_m(t) * \frac{d}{dt}x_n(t) = \frac{d}{dt}x_m(t) * x_n(t)$$

El núcleo conjugado, en caso de existir, se puede hallar mediante el cálculo de la transformada de Fourier para (1.81), que al tener en cuenta (1.82) se obtiene:

$$X(f) = V(f)\Phi(f)$$

luego, $V(f) = \Theta(f)X(f)$, donde $\Theta(f) = 1/\Phi(f)$. Por lo tanto, el núcleo conjugado también depende de la diferencia de argumentos

$$v_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\theta(t-s)dt \quad (1.84)$$

En calidad de ejemplo concreto, en (1.80) se puede analizar la función base

$$\phi(t-s) = \delta(t-s)$$

entonces $\Phi(f) = \Theta(f) = 1$, luego

$$v_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-s)dt = x(s) \quad (1.85)$$

En otras palabras, la función original en el tiempo puede ser representada por sí misma.

Ejemplo 1.17. Sea $v(t) = au(t) \sin \pi t$ y $\phi(t) = \delta(t) - \delta(t - t_0)$. Hallar $x(t) = v(t) * \phi(t)$.

El desarrollo de (1.81) resulta en:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (au(\tau) \sin \pi \tau) (\delta(t - \tau) - \delta(t - \tau - t_0)) d\tau \\ &= (a \sin(\pi t))u(t) - (a \sin(\pi(t - t_0)))u(t - t_0) \\ x(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \sin \pi t, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.3.5. Transformada de Hilbert

Otro caso de análisis de conformación de funciones base por desplazamiento, por el principio (1.80), corresponde al núcleo de la forma,

$$\phi(t-s) = \frac{-1}{\pi(t-s)}$$

De otra parte, sea la función determinada en f para la cual se cumple que,

$$G(f, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha f}, & f > 0 \\ -e^{-\alpha f}, & f < 0 \end{cases}$$

cuya transformada inversa de Fourier corresponde a la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{G(\alpha, f)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha f} e^{j2\pi f t} df - \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha f} e^{j2\pi f t} df = \frac{j4\pi t}{\alpha^2 + (2\pi t)^2} \\ &= g(\alpha, t) \end{aligned}$$

Si se considera el límite de $\alpha \rightarrow 0$, esto es,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha, t) = \frac{j}{\pi t}$$

luego

$$\Phi(f) = \mathcal{F} \{\phi(t)\} = j \mathcal{F} \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha, t) \right\} = j \lim_{\alpha \rightarrow 0} G(f, \alpha) = j \operatorname{sgn}(f)$$

entonces, de (1.57) la base conjugada es $\Theta(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$, que le corresponde la representación en el tiempo

$$\theta(s-t) = \frac{1}{\pi(s-t)}$$

El par que obtiene de transformadas se denomina *Transformada de Hilbert*, cuya transformada directa es notada típicamente de la forma $\hat{x}(s)$ y que se describe como

$$\hat{x}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{s-t} dt = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (1.86a)$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(s)}{s-t} ds = \hat{x}(s) * \frac{1}{\pi s} \quad (1.86b)$$

Cabe anotar que las transformadas (1.86a) y (1.86b) presentan un punto especial y exigen la definición de las respectivas integrales en el sentido del valor principal de Cauchy.

De otra parte, la relación entre el par de transformadas de Fourier y el par de transformadas de

Hilbert se determina de la siguiente manera

$$\hat{X}(f) = \mathcal{F} \{ \hat{x}(s) \} = -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \quad (1.87a)$$

$$X(f) = \mathcal{F} \{ x(s) \} = j \operatorname{sgn}(f) \hat{X}(f) \quad (1.87b)$$

En análisis de señales, se define la *señal analítica compleja* $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

que de acuerdo con (1.87a) y (1.87b), posee la transformada unilateral de Fourier

$$Z(f) = \mathcal{F}_u \{ z(t) \} = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.18. Representar una señal en el tiempo mediante un conjunto base de exponenciales desplazados en el tiempo, descritos en la forma,

$$\phi(t-s) = e^{-a|t-s|}, \quad a > 0$$

Por cuanto,

$$\Phi(f) = \frac{2a}{(2\pi f)^2 + a^2}$$

entonces, se obtiene,

$$\begin{aligned} \Theta(f) &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2} (j2\pi f)^2 \right) \\ \Rightarrow \theta(t) &= \frac{a}{2} \left(\delta(t) - \frac{1}{a^2} \ddot{\delta}(t) \right) \end{aligned}$$

De esta manera, a la base analizada le corresponde el par de transformadas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(s) e^{-a|t-s|} ds \\ v(s) &= \frac{a}{2} \left(x(s) - \frac{1}{a^2} \ddot{x}(s) \right) \end{aligned}$$

Una siguiente forma de construcción de una base, a partir de una señal dada, consiste en su continuo cambio de escala o dilatación.

Sea

$$\phi(t, s) = \phi(st) \quad (1.88)$$

siendo $s > 0$ el parámetro de escala, de tal manera que si $s > 1$, la escala se comprime mientras que para $s < 1$ la escala se expande. Si $T, S \in [0, \infty)$ se puede demostrar que el par de transformadas

generalizadas resultantes será [10]:

$$x(t) = \int_0^{\infty} v_x(s) \phi(st) ds, \quad t \geq 0$$

$$v_x(s) = \int_0^{\infty} x(t) \theta(st) dt, \quad s \geq 0$$

1.3.6. Transformada *wavelet*

Una función *wavelet* corresponde al tipo de funciones base que tienen su energía concentrada en intervalos cortos, tanto de tiempo, como de frecuencia. La función *wavelet madre* $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ es la función, para la cual sus versiones trasladadas (1.80) y escaladas (1.88) forman el conjunto de funciones base en la representación *wavelet*.

Una función *wavelet madre*, con TF $\mathcal{F}\{\psi(t)\} = \Psi(\omega)$, cumple las siguientes restricciones [16,17]:

- Valor medio igual a cero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

esto es, $\Psi(0) = 0$, lo cual implica que la *wavelet* debe tener al menos una oscilación.

- Norma energética finita, en concordancia con (1.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty, \Rightarrow \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

- Condición de *Admisibilidad*. Para las funciones cuadráticas integrables se cumple que:

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\Psi(k)|^2 |k|^{-1} dk < \infty, \quad (1.89)$$

La constante C_{ψ} se denomina *constante de admisibilidad* y depende del tipo de función *wavelet* escogida, así por ejemplo, para el caso de la función madre denominada *sombrero mexicano*, $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$, el valor de la constante es igual a π .

La condición (1.89) puede ser utilizada, tanto para analizar, como para reconstruir una señal sin pérdida de información e implica que la TF de $\psi(t)$ se desvanece en la frecuencia cero, $|\Psi(\omega)|^2|_{\omega=0} = 0$, esto es, las *wavelets* deben tener un espectro en forma pasabanda.

La densidad (1.52) para el caso de la *transformada wavelet* (Tw) se obtiene a partir de la representación de la señal tomando los átomos de tiempo-frecuencia $\psi_{a,b}$, definidos en la forma de la versión trasladada y escalada de la *wavelet madre* ψ , de la siguiente manera:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.90)$$

donde $a \in \mathbb{R}^+$ es el parámetro de *escala* y $b \in \mathbb{R}$ es el parámetro de *traslación*. El factor de multiplicación $a^{-1/2}$ es escogido de tal manera, que todas las funciones wavelet del sistema tengan una norma constante (unitaria) en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, es decir, que se cumpla $\|\psi_{a,b}\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2} = 1$, que corresponde a la norma energética definida en (1.16).

Teniendo en cuenta la densidad (1.52) y los átomos (1.90), la representación integral mediante las funciones base wavelet o *Transformada Wavelet Continua* de una función $x(t)$ se define como:

$$\mathcal{W}_{a,b}\{x(t)\} \triangleq \langle x, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1.91)$$

La señal original se reconstruye, de acuerdo a (1.53), de la forma

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle x, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} \quad (1.92)$$

Es de anotar, que el par de transformadas wavelet (1.91) y (1.92) se puede expresar mediante la TF:

$$\mathcal{W}_{a,b}\{x(t)\} = a^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \Psi^*(ak) X(k) e^{jbk} dk \quad (1.93a)$$

$$X(k) = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a^{1/2} \Psi(a, k) \mathcal{W}_{a,b}\{x(t)\} e^{-jbk} \frac{dbda}{a^2} \quad (1.93b)$$

En la Tw continua, se cumple la relación análoga a la igualdad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^\infty x_m(t) x_n^*(t) dt = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathcal{W}_{a,b}\{x_m(t)\} \mathcal{W}_{a,b}^*\{x_n(t)\} \frac{dbda}{a^2}$$

en la cual, particularmente, se muestra el principio de la conservación de la energía.

De las expresiones (1.93a) y (1.93b), se observa que la Tw continua transforma de forma isométrica el espacio de las señales, con dimensión única, al espacio wavelet de 2 dimensiones $\mathfrak{X} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{W} : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, y por lo tanto, la información contenida en los componentes (densidad) wavelet tiene carácter redundante. Como consecuencia de esta propiedad, se tiene que la Tw continua de una señal aleatoria muestra una correlación, que en la señal original no existe, pero que se presenta en la misma transformada. Esta es, tal vez sea una de las mayores desventajas de la Tw en el análisis estadístico de señales, que puede conllevar a la interpretación incorrecta de los resultados de la descomposición.

La localización espacial y de escala de una función wavelet ψ implica la conservación de la capacidad de localización en el espacio de los componentes wavelet. Sea una función ψ localizada en el intervalo de espacio Δt para $a = 1$, entonces los componentes wavelet, que corresponden a la ubicación t_0 , se concentran en el denominado *cono de incidencia*: $[t_0 - (a\Delta t)/2, t_0 + (a\Delta t)]$, que corresponde a la región espacial de localización de todas las funciones wavelet expandidas en el punto t_0 . Además, si la función ψ dada está bien localizada en el intervalo Δk del espacio de Fourier en la cercanía de k_ψ , siendo $a = 1$, entonces los componentes wavelet, que corresponden a la frecuencia (espacio de Fourier) k_0 en la señal, se contendrán en el ancho de banda $[k_\psi (k_0 + (\Delta k/2a))^{-1}, k_\psi (k_0 - (\Delta k/2a))^{-1}]$.

En analogía con el espectro de Fourier, en el cual la energía $\mathcal{E}_x(k) = ||X(k)||^2$, se puede determinar la respectiva norma energética en forma del espectro wavelet integral que pueda definirse como la energía contenida en todos los componentes wavelet de un coeficiente de escala a dado:

$$\mathcal{W}_x(a, b) = \int |\mathcal{W}_{a,b}\{x(t)\}|^2 dt \quad (1.94)$$

La expresión (1.93a) enlaza el espectro de Fourier con el espectro wavelet integral:

$$\mathcal{W}_x(a, b) \sim a \int \mathcal{E}_x(k) |\Psi(ak)|^2 dk \quad (1.95)$$

De la expresión (1.95), se deduce que el espectro wavelet es una versión suavizada del espectro de Fourier. El carácter del suavizado se deduce de la transformada de Fourier de la wavelet.

La norma (1.94) tiene el mismo comportamiento asintótico que el del respectivo espectro de Fourier. Así, si el espectro de Fourier sigue una dependencia exponencial del tipo $\mathcal{E}_x(k) \sim k^\alpha$, por cuanto $k \sim 1/a$, entonces el espectro wavelet integral tendrá la misma dependencia exponencial: $\mathcal{E}_x(a) \sim a^{-\alpha}$. Entonces, se observa que los componentes wavelet contienen la información, tanto de la señal en análisis, como de la función wavelet empleada. Por lo tanto, la selección o síntesis de la transformada y de la adecuada función wavelet madre es la tarea más importante en el empleo de la Tw, y depende del tipo de información contenida en la señal original, así como de la orientación de su proceso.

Comparación de la Tw con la Transformada de Fourier. Realmente, el análisis wavelet surge como una necesidad de suplir toda la falencia presentada en el proceso de señales con la TF. Aunque es importante conservar las posibilidades y particularidades de cada una de las transformadas.

La transformada de Fourier no pierde la información sobre la función en análisis $x(t)$. Sin embargo, debido a la falta de localización de las funciones base trigonométricas, ésta información se dispersa sobre toda la representación espectral $X(k)$. Así por ejemplo, si la perturbación tiene estructura similar a la información útil, y por lo tanto, ambas formas de representación espectral se traslapan, entonces, es prácticamente imposible diferenciar los componentes de Fourier en cada uno de los casos (perturbación o señal útil).

El análisis de las funciones suaves con la transformada de Fourier es usual, pero cuando se tienen funciones suaves, que incluyan singularidades (cambios abruptos, flancos con pendientes fuertes, etc.), al calcular la TF se tienen problemas de convergencia, por ejemplo, aparecen las oscilaciones de Gibbs descritas en el numeral §1.2.3. La dificultad en la ubicación de las singularidades está relacionada con los valores de fase de las componentes espectrales de Fourier. Por cierto, la única posibilidad de determinar la ubicación de la singularidad es mediante la reconstrucción de $x(t)$ a partir de $X(k)$. Así por ejemplo, si se considera un espectro con dependencia exponencial $k^{-\alpha}$, que muestra una irregularidad global de la función con máximo exponente de singularidad igual a α , en este caso, se pierde la información importante de que $x(t)$ es suave en casi en todo el intervalo de análisis, excepto en los puntos de singularidad. Si esos puntos de singularidad tienen carácter aleatorio (generalmente, condicionados por ciertos problemas en la medición), entonces es imposible filtrarlos, por cuanto sus valores influyen en todos los componentes espectrales.

De otra parte, la transformada de Fourier no tiene en cuenta, que cualquier componente espectral de la señal puede evolucionar en el tiempo. La TF, por ejemplo, no podría diferenciar una señal sin modular compuesta de dos componentes básicas espectrales, de una señal modulada por frecuencia y fase continua pero que varíe los mismos dos valores de frecuencia.

La diferencia básica entre la Tw y la TCTF dada en (1.73), que corresponde a la implementación práctica de la TF, radica en la forma de análisis de las respectivas funciones átomos. En el caso de la TCTF, los átomos $w_{s,b}$ (1.75) se derivan de una misma función envolvente w , trasladada adecuadamente, pero conservando las oscilaciones de alta frecuencia. Además, independiente del valor de s , éstas poseen la misma apertura de ventana. El algoritmo de cálculo discreto de la TCTF, por ser de banda constante, requiere la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia usando la transformada discreta (3.16b) para el caso de Fourier, que genera los respectivos coeficientes para frecuencias a igual separación, esto es, el ancho de banda para cada término espectral es el mismo.

La extracción de información con valores rápidos de cambio en el tiempo, que implican altos valores de frecuencia, se debe realizar sobre intervalos pequeños y muy bien focalizados de tiempo, y no sobre todo el intervalo de definición de la señal en análisis. Viceversa, las componentes bajas de frecuencia implican intervalos amplios de análisis en el tiempo. En la TCTF, este problema se resuelve parcialmente empleando la transformada enventanada dada en (1.75). Sin embargo, en este caso, la resolución espacial, para cualquiera que sea la escala a , es constante y está limitada por la apertura T_a que abarca la ventana.

En el caso de las transformadas wavelet, las funciones base tienen una resolución de espacio $\psi(t/a)$ que disminuye con el aumento del factor de escala a , y que aumenta con el valor de escala de resolución del espacio de frecuencia $\Psi(ak)$. De esta manera, la Tw brinda un compromiso óptimo, desde el punto de vista del principio de indeterminación y ajusta su resolución a la velocidad de la información, tanto para los cambios lentos, como para los cambios rápidos de la señal en el tiempo, como se muestra en la Figura 1.19, en la cual se observa la localización tiempo-frecuencia para las transformadas: a) Shannon (con función base δ y discretización uniforme), b) Fourier, c) Fourier con ventana Gabor y d) wavelet.

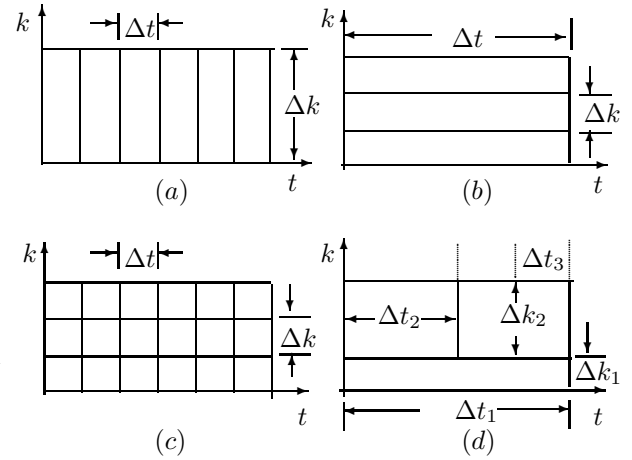


Figura 1.19. División del espacio de fase ($t - k$) para diferentes transformadas

Como resultado, en el caso de la Tw, el ancho de banda espectral se puede variar y, por lo tanto, ajustar. Esta propiedad de la transformada wavelet, es tal vez la ventaja más significativa que presentan frente a la TF en el procesamiento de señales.

A diferencia de la transformada de Fourier, la Tw conserva la capacidad de localización de las señales en su reconstrucción, lo que permite el análisis localizado de procesos en intervalos definidos de tiempo. Así mismo, se puede reconstruir una parte de la señal o extraer el aporte de alguna escala en particular. Se puede considerar que existe relación entre el comportamiento localizado de la señal y la capacidad de localización de las componentes de la Tw, entendiendo esta propiedad como el hecho de que en la reconstrucción de parte de la señal, sean necesarios las componentes Tw que pertenecen solamente a la correspondiente área del espacio de la transformada (el cono de incidencia). De esta manera, si la función $x(t)$ es localmente suave, los correspondientes componentes Tw serán relativamente pequeños, en cambio, si $x(t)$ contiene una singularidad, los respectivos componentes Tw crecerán significativamente, pero solo en la vecindad de la singularidad. En caso de tener perturbaciones que afecten los componentes Tw, la reconstrucción de la señal estará afectada de manera local en el tiempo, justo cuando se presentó la perturbación y no sobre toda la señal reconstruida, como ocurre con la TF.

Finalmente, cabe anotar que la TF presenta alta sensibilidad a errores de fase, debido a la interposición secuencial de las bases trigonométricas, lo cual no ocurre en la transformada wavelet. Más aún, en la Tw continua se pueden corregir los errores de fase por su carácter redundante.

Problemas

Problema 1.24. Sean las densidades $v_i(s)$. $i = 1, 2$, correspondientes a las señales $x_i(t)$. Demostrar la invariabilidad del producto escalar $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Problema 1.25. Demostrar que el siguiente conjunto de señales es ortogonal y calcular su TF directa: $\Phi_n(t) = \frac{\sin \Omega(t - nT)}{\Omega(t - nT)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $-\infty < t < \infty$.

Problema 1.26. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier y la TF parra la función dada en la forma, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$.

Problema 1.27. Encontrar la TF de un pulso Gaussiano $x(t) = ae^{-\pi(t/\tau)^2}$ y verificar el efecto de extensión recíproca de las gráficas para $\tau = 1$ y $\tau = 2$. Hallar la diferencia de densidades espectrales de energía en los puntos de intersección.

Problema 1.28. Sea la señal $x(t)a(e^{-\alpha t} - e^{\beta t})u(t)$. Hallar la expresión de la frecuencia límite ω_l , en la cual la magnitud de la TF se disminuye en 10 veces con relación al valor del espectro para $\omega = 0$.

Problema 1.29. Hallar la relación entre la densidad espectral $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, tal que $x \in \mathbb{R}$, y la densidad $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, asumiendo $y(t) = x(-t)$.

Problema 1.30. Las señales $x_p(t) = x_p(-t)$ y $x_i(t) = -x_i(-t)$ están relacionadas con $y(t)$ como:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= y(t) + y(-t) \\ x_i(t) &= y(t) - y(-t) \end{aligned}$$

Hallar la relación entre los respectivos espectros $X_k(\omega) = \mathcal{F}\{x_k(t)\}$, $k \in \{p, i\}$ con la densidad $Y(\omega)$.

Problema 1.31. Sea $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Hallar la señal $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$, para cada uno de los siguientes casos: a) $Y(\omega) = X^2(\omega)$, b) $Y(\omega) = X(\omega)X^*(\omega)$ y c) $Y(\omega) = X^*(\omega)$.

Problema 1.32. Hallar la densidad espectral $X(\omega)$ correspondiente a la señal $x(t)$, la cual se describe por la derivada de orden k de la función $\delta(t)$.

Problema 1.33. Calcular la siguiente expresión empleando el integral de convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t P)}{\pi t} \frac{\sin(\pi(f-t)Q)}{\pi(f-t)} dt.$$

Problema 1.34. Calcular la transformada de Hilbert de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} a) x(t) &= \cos 2\pi f_0 t, -\infty < t < \infty & b) x(t) &= \frac{1}{1+t^2}, -\infty < t < \infty \\ c) x(t) &= \text{sinc}(2\pi \nu t), -\infty < t < \infty & d) x(t) &= \text{rect}_T(t) \end{aligned}$$

Problema 1.35. Demostrar que para el par de transformadas de Hilbert (1.86a) y (1.86b) se cumple $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$.

Capítulo 2

Representación de sistemas en tiempo continuo

El estudio de cualquier sistema empieza por la formación de un modelo, que corresponda a su versión idealizada, la cual generalmente, no es la única existente. Dicho de otra manera, dependiendo de los objetivos del análisis, un sistema puede admitir más de un modelo. En el presente capítulo, se analizan los modelos descritos en términos matemáticos o *modelo matemático*.

2.1. Representación de transformaciones lineales

En general, las señales sufren cambios a su paso por los diferentes sistemas. Debido a la gran clase de señales que se usan, es preferible tener un método común para la descripción de las propiedades de transformación de los sistemas. De igual manera, debe analizarse la tarea inversa de síntesis de circuitos, que realicen una transformación específica.

En esencia, cualquier transformación debe entenderse como la imagen de un conjunto de señales en otro. En el caso de transformaciones lineales, la descripción de la relación entrada-salida en grupos de reducidos elementos se puede generalizar a todo el sistema lineal empleando la propiedad de superposición. De otra parte, la presunción de linealidad en la transformación, exige que la señal a la salida dependa estrictamente de la señal a la entrada y de ninguna manera de procesos remanentes o transitorios existentes en el sistema. Por lo tanto, el análisis de transformaciones se llevará a cabo para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

2.1.1. Transformaciones y sistemas

A su paso por los sistemas, las señales sufren cambios en cada una de las etapas del proceso. Debido a la diversidad de formas posibles de señal es preferible tener una representación común para su análisis. La transformación de la señal se puede analizar como el enlace entre la entrada y la salida de un sistema o circuito (Figura 2.1), pues en forma general corresponde a la representación de un conjunto inicial de señales \mathcal{X} sobre otro conjunto de salida \mathcal{Y} . En forma general, para la descripción de la transformación \mathcal{K} se deben conocer todas las posibles parejas ordenadas entrada - salida, $\{\mathbf{x}, \mathcal{K}\{\mathbf{x}\}\}$, lo cual en la mayoría de los casos prácticos no es realizable, entre otras razones, porque se pueden tener una alta cantidad de enlaces, además, por la dificultad en su ordenamiento.

Sin embargo, cuando se restringe el análisis a las transformadas lineales, la transformación se puede describir completamente empleando un subconjunto reducido de todas las posibles parejas entrada - salida, como consecuencia de la propiedad de superposición de las transformadas lineales. Los modelos lineales son el referente de sistemas más empleados, de hecho, es común el análisis de sistemas no lineales, a través de su linealización.

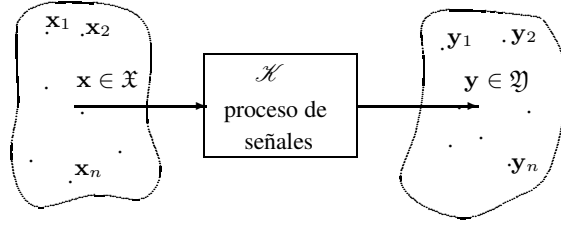


Figura 2.1. Transformación de señales

Operadores lineales en espacios integrables. El análisis de los sistemas puede llevarse a cabo a partir de las distintas formas de representación de las señales. En la forma discreta, se puede emplear la representación de transformaciones lineales sobre espacios de dimensión finita, correspondientes al modelo de señal dado en (1.17). Sin embargo, en este caso la implementación práctica de los métodos de análisis es compleja, en la medida en que se hace necesario una gran cantidad de medida de los espacios de entrada en la descripción de cada transformación, sumado al hecho de que la misma cantidad de transformaciones puede ser muy alta, razón por la cual, esta forma de análisis de sistemas es empleada en casos específicos de espacios de entrada con bajo número de dimensiones y transformaciones relativamente simples.

Definición 2.1. Una transformación \mathcal{K} , que corresponde a la imagen determinada en un espacio lineal \mathfrak{X} , se dice que es *lineal* cuando tiene las siguientes propiedades:

$$\text{aditividad, } \mathcal{K}\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\} = \mathcal{K}\{\mathbf{x}_1\} + \mathcal{K}\{\mathbf{x}_2\}, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{X},$$

$$\text{2. homogeneidad, } \mathcal{K}\{\alpha \mathbf{x}\} = \alpha \mathcal{K}\{\mathbf{x}\},$$

de las cuales se tiene la relación equivalente,

$$\mathcal{K}\{\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2\} = \alpha \mathcal{K}\{\mathbf{x}_1\} + \beta \mathcal{K}\{\mathbf{x}_2\}$$

donde $\alpha, \beta = \text{const.}$

De lo anterior resulta que $\mathcal{K}\{\mathbf{0}\} = \mathbf{0}$ y $\mathcal{K}\{-\mathbf{x}\} = -\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}$, por lo tanto, el conjunto de vectores linealmente transformados corresponde a un espacio lineal con el mismo conjunto de escalares que el conjunto de definición de la transformada.

Si los espacios de entrada y salida son normalizados, cuando se cumple (1.13), entonces también son métricos, y se puede analizar la continuidad de las transformadas lineales en cualquier punto \mathbf{x}_0 , para el cual se tiene un valor $\varepsilon > 0$, tal que existirá un $\delta(\varepsilon) > 0$, de forma que se cumple,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathcal{K}\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\}\| = \|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\} - \mathcal{K}\{\mathbf{x}_0\}\| < \varepsilon$$

Así mismo, la transformación \mathcal{K} se denomina *acotada* si existe una constante $k \in \mathbb{R}$, tal que, $\|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}\| \leq k\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}$, siendo \mathfrak{X} de dimensión finita. Por cierto, haciendo $\delta = \varepsilon/k$, se observa que cualquier transformación lineal acotada es continua, y viceversa. Además, un espacio de transformaciones lineales se puede normalizar en la forma,

$$\|\mathcal{K}\| = \sup \{\|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}\| : \|\mathbf{x}\| \leq 1\} \Rightarrow \|\mathcal{K}\| = \inf \{c : \|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}\| \leq c\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}\}$$

De otra parte, si los espacios de entrada y salida son idénticos, la transformación lineal se denomina *operador lineal*, esto es, cuando el dominio de representación original corresponde al dominio de la imagen de la transformada. La multiplicación de dos operadores se determina como:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \Rightarrow \mathcal{K}\{\mathbf{x}\} = \mathcal{K}_1\{\mathcal{K}_2\{\mathbf{x}\}\}$$

que corresponde a la composición de ambos operadores (conexión en cascada de sistemas lineales). En general, el álgebra de los operadores no es conmutativa, esto es, $\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_2 \mathcal{K}_1$, pero ella contiene un elemento unitario I , determinado de la condición, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}$. Cabe anotar que el conjunto de los $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$, para los cuales $\mathcal{K}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$ se denomina el núcleo o *kernel* ($\ker \mathcal{K}$) del operador \mathcal{K} .

Ejemplo 2.1. Sea el operador lineal \mathcal{A} que proyecta un espacio \mathbb{R}^n , que se genera por la base $\{\varphi_i : i = 1 \dots, n\}$, a un espacio \mathbb{R}^m con dimensión m de base $\{\hat{\varphi}_i : i = 1 \dots, m\}$.

Si se considera un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$$

que en concordancia con la propiedad de la linealidad del operador \mathcal{A} se tiene que

$$\mathcal{A}\{\mathbf{x}\} = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}\{\varphi_i\}$$

por lo tanto, el operador \mathcal{A} se considera dado, si se conoce en qué transforma la respectiva base $\{\varphi_i : i = 1 \dots, n\}$. En cuanto a la descomposición de los vectores $\mathcal{A}\{\varphi_i\}$ por la base $\{\hat{\varphi}_k\}$ se tiene que

$$\mathcal{A}\{\varphi_i\} = \sum_{k=1}^m a_{ki} \hat{\varphi}_k$$

entonces, $\mathcal{A}\{\mathbf{x}\} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ki} x_i \hat{\varphi}_k$, expresión de la cual se observa que el operador \mathcal{A} se determina por la matriz de coeficientes $[a_{ki}]$. La imagen del espacio \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m corresponde a un subespacio con dimensión igual al rango de la matriz $[a_{ki}]$.

Definición 2.2. Sea un espacio \mathfrak{X} sobre el cual se tiene el operador lineal $\mathcal{G} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$. Entonces, se tienen las siguientes definiciones de operadores:

conjugado \mathcal{G}^* del operador \mathcal{G} como aquel que $\forall x, y \in \mathfrak{X}$:

$$\langle \mathcal{G}\{x\}, y \rangle = \langle x, \mathcal{G}^*\{y\} \rangle$$

– *autoadjunto* o *autoconjugado* o *Hermitiano*, si se cumple que

$$\langle \mathcal{G}\{x\}, y \rangle = \langle x, \mathcal{G}\{y\} \rangle$$

esto es, cuando coincide con su conjugado, es decir $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$.

– *unitario* si es biyectivo y se cumple que $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^{-1}$.

– *normal* si se tiene que $\mathcal{G}\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*\mathcal{G}$.

Una *funcional lineal* es una transformación cuyo dominio es un espacio vectorial y cuyo recorrido es un campo de escalares que satisface las siguientes propiedades:

$$f\{\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\} = \alpha f\{\mathbf{x}\} + \beta f\{\mathbf{y}\}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}$$

2.1.2. Transformaciones lineales sobre espacios finitos

Un caso de análisis frecuente corresponde a las transformaciones lineales sobre subespacios funcionales de $L^2(T)$ cuyos resultados pueden ser generalizados a todo $L^2(T)$ [10].

Definición 2.3. Sea $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ una transformación lineal. Si $\mathcal{K}\{\mathfrak{X}\} = \text{Im}(\mathcal{K}) = \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ tiene dimensión finita, se dice que \mathcal{K} tiene rango finito y la correspondiente dimensión, $\dim(\mathcal{K}\{\mathfrak{X}\})$, se le llama *el rango* de \mathcal{K} , que se denota por $\dim(\mathcal{K}\{\mathfrak{X}\}) = \text{rank}(\mathcal{K})$.

Representación con vectores respuesta. Sea el espacio de entrada \mathfrak{X} generado por la base linealmente independiente $\{\varphi_i : i = 1, \dots, n\}$, y para la cual existe la base dual $\{\theta_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Sea el espacio imagen $\text{Im}(\mathcal{K}) = \mathfrak{Y}$ con dimensión n que contiene los valores de la transformación \mathcal{K} . Entonces, para cualquier $x \in \mathfrak{X}$ a partir de la expansión generalizada de Fourier se tiene:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \theta_i \rangle \varphi_i(t), \quad t \in T$$

al tener en cuenta la linealidad de \mathcal{K} , entonces

$$y(t) = \mathcal{K}\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \theta_i \rangle \psi_i(t) \quad (2.1)$$

donde $\{\psi_i(t) = \mathcal{K}\{\varphi_i(t), i = 1, \dots, n\}$, que corresponde a las respuestas para cada una de las funciones base del espacio \mathfrak{X} , en calidad de señales de entrada para \mathcal{K} . Por lo tanto, se puede considerar el conjunto $\{\psi_i\}$ como la representación para \mathcal{K} dada en términos de la base $\{\psi_i\}$ en \mathfrak{X} . Sin embargo, $\{\psi_i\}$ no se puede analizar como la base del espacio \mathfrak{Y} , porque no hay seguridad de que el conjunto ψ_i sea linealmente independiente. En este caso, existirá por lo menos alguna señal de entrada \mathbf{x} diferente de cero en el espacio inicial \mathfrak{X} que refleje todos los vectores en el cero en \mathfrak{Y} , lo que implica a su vez, que la transformación al no ser biyectiva no tiene transformación inversa, luego, la transformada es del tipo singular, en la cual la dimensión de espacio de salida es menor al de entrada.

Ejemplo 2.2. Hallar un ejemplo de transformación lineal, en el cual, la base transformada no corresponda a la base de transformación del espacio imagen.

Sea la transformación $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, donde $\mathfrak{X} = \{x(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n\}$, definida por $\mathcal{K}\{x(t)\} = \dot{x}(t)$. Luego, una base para \mathfrak{X} es el conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ donde $e_i = t^{i-1}, i = 1, \dots, n+1$. De otra parte, $\mathcal{K}\{e_1\} = \mathcal{K}\{t^0\} = 0$, entonces el conjunto conformado por los elementos, $A = \{\mathcal{K}\{e_1\}, \dots, \mathcal{K}\{e_n\}, \mathcal{K}\{e_{n+1}\}\}$ es linealmente dependiente, en la medida en que se tiene que $\mathcal{K}\{e_1\} = 0 \in A$. Así, A no es base para el espacio imagen de \mathcal{K} .

Representación por sucesión de funcionales lineales. Otra forma de representación de \mathcal{K} se da por la sucesión ordenada de n vectores en \mathfrak{X} . Sea $\{\widehat{\varphi}_i : i = 1, \dots, n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes que generan a \mathfrak{Y} , y a los cuales les corresponde la base dual $\{\widehat{\theta}_i : i = 1, \dots, n\}$. Entonces, cualquier vector de \mathfrak{Y} se puede representar en la forma:

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{y}, \widehat{\theta}_j \rangle \widehat{\varphi}_j(t) \quad (2.2)$$

reemplazando (2.1) en (2.2), se obtiene

$$y(t) = \mathcal{K} \{x(t)\} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \phi_j \rangle \widehat{\varphi}_j(t) \quad (2.3)$$

donde $\phi_i(t) = \sum_{j=1}^n \langle \widehat{\theta}_j, \psi_i \rangle \theta_j(t)$.

Por lo tanto, la sucesión ordenada $\{\phi_j\}$ representa a \mathcal{K} en términos de la base dada para \mathfrak{Y} . Asumiendo la independencia lineal de $\{\phi_j\}$, la representación del operador se puede entender como una sucesión ordenada, en la cual cada elemento es una transformada de rango unitario, de otra forma, la suma sobre todos los funcionales lineales elementales $f_j\{\widehat{\mathbf{x}}\} = \langle \mathbf{x}, \phi_j \rangle$, con $j = 1, \dots, n$, corresponde a toda la transformación:

$$\mathcal{K} \{x(t)\} = \sum_{j=1}^n f_j\{\mathbf{x}\} \widehat{\varphi}_j(t)$$

Representación matricial. Por cuanto los vectores ψ_i en el primer método, o bien ϕ_j en el segundo método, se pueden representar por un conjunto de n coeficientes (vector fila), entonces la transformación lineal se puede describir por una tabla de relación de $n \times n$ escalares, en forma de matriz.

Sea

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \widehat{\varphi}_j(t), \quad (2.4)$$

donde $\lambda_{ji} = \langle \psi_i, \widehat{\theta}_j \rangle = \langle \mathcal{K} \{\varphi_i\}, \widehat{\theta}_j \rangle$.

Luego, reemplazando (2.4) en (2.1), se obtiene:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \alpha_i \widehat{\varphi}_j(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{\varphi}_j(t), \quad (2.5)$$

donde $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \theta_i \rangle$, y $\beta_i = \langle \mathbf{y}, \widehat{\theta}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \alpha_j$.

La expresión (2.5) corresponde a la siguiente representación matricial, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son vectores columna con dimensión n que representan a \mathbf{x} sobre \mathfrak{X} e \mathbf{y} sobre \mathfrak{Y} por sus respectivas bases, \mathbf{K} es una matriz cuadrada de orden n con elementos

$$\lambda_{ji} = \langle \mathcal{K} \{\varphi_i\}, \widehat{\theta}_j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

que representan la respectiva transformación \mathcal{K} .

Ejemplo 2.3. Sean las transformaciones lineales

$$\mathcal{K}_1 : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}, \mathcal{K}_2 : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$$

siendo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ espacios con dimensión n . Demostrar que la transformación compuesta $\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2$ corresponde a la multiplicación de las respectivas matrices $\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1$, donde \mathbf{K}_i , $i = 1, 2$ es la matriz que representa al operador \mathcal{K}_i .

Sea la matriz \mathbf{K}_i que define a \mathcal{K}_i , $i = 1, 2$, tales que $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\beta}$, donde $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ son vectores con dimensión n que representan a \mathbf{x} sobre \mathfrak{X} , \mathbf{y} sobre \mathfrak{Y} y \mathbf{z} sobre \mathfrak{Z} por sus respectivas bases, luego, de forma directa se tiene que, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\alpha}$.

2.1.3. Operadores lineales en espacios integrables

El análisis de los sistemas, como elementos de proceso, puede llevarse a cabo a partir de las distintas formas de representación de las señales. En la representación discreta, se puede emplear la descripción de transformaciones lineales sobre espacios de dimensión finita, correspondientes al modelo de señal dado en (1.17). Sin embargo, en este caso la implementación práctica es cómoda para casos específicos de análisis, pero su generalización como transformada lineal presenta dificultades, no tanto por la dimensión limitada que se toma para la representación de los espacios, cuanto por la alta variedad que pueden tomar los dominios de las diferentes formas de transformación lineal. Por esta razón, el análisis de sistemas sobre la representación discreta se emplea en casos específicos de espacios de entrada con bajo número de dimensiones y transformaciones relativamente simples.

En general, el análisis de sistemas es preferible llevarlo a cabo basados en la representación integral de señales, empleando operadores lineales acotados y definidos en espacios integrables $L^2(T)$. La interpretación física de esta restricción tiene que ver con el cumplimiento de la condición de estabilidad de los sistemas, que implica que a una señal a la entrada de energía finita le debe corresponder una señal de energía finita a la salida.

Cuando en la expansión generalizada de Fourier (1.52) se emplea el modelo de representación para una misma base continua, las respectivas señales de entrada y salida se describen como:

$$x(t) = \int_S v_x(s) \phi(t, s) ds, \quad S \subset \mathbb{C} \quad (2.7a)$$

$$y(t) = \int_S v_y(s) \phi(t, s) ds. \quad (2.7b)$$

Así, se define el operador \mathcal{K} , tal que

$$y(t) = \mathcal{K} \{x(t)\} = \int_S v_y(s) \psi(t, s) ds, \quad \psi(t, s) = \mathcal{K} \{\phi(t, s)\}$$

De acuerdo con (1.52), en términos de la base dual, la densidad de salida se define por la integral, $v_y(s) = \int_T y(t) \theta(s, t) dt$, que al tener en cuenta (2.7b) resulta en

$$v_y(s) = \int_T \int_S v_x(\sigma) \psi(t, \sigma) \theta(s, t) d\sigma dt = \int_S K(s, \sigma) v_x(\sigma) d\sigma,$$

donde el kernel de la anterior integral, definido como,

$$K(s, \sigma) = \int_T \psi(t, \sigma) \theta(s, t) dt \quad (2.8)$$

representa la transformación \mathcal{K} y corresponde al sentido de los índices (2.6), en los cuales los índices i y j se convierten en las variables σ y s de (2.8), mientras las representaciones de entrada y salida, mediante la base $\varphi(t, s)$, se obtienen de las respectivas representaciones integrales. Como ejemplo se puede tomar la base dada en (1.84), para la cual se tiene que $\phi(t, s) = \delta(t - s)$, $T, S \subset \mathbb{R}$. En este caso, de acuerdo con (1.85), se tiene que $v_x(s) = x(s)$ y $v_y(s) = y(s)$. La respuesta a esta función base, que especialmente se nota como $\psi(t, \sigma) \triangleq h(t, s)$ y se denomina *respuesta a impulso*, como función en el tiempo describe la reacción del operador cuando a la entrada se tiene una función delta dada en el momento de tiempo s . Luego, de (2.8) se tiene

$$K(s, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - t) h(t, \sigma) dt = h(s, \sigma) \quad (2.9)$$

Con lo cual la salida (2.7b) se determina como

$$y(t) = \int_T h(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

La expresión (2.10) es la primera forma de análisis de sistemas y corresponde al empleo en calidad de kernel de su respuesta a la función $\delta(t)$, conocido como el *método de la integral de superposición*. En otras palabras, para describir el comportamiento de un sistema en el tiempo, se aplica la función generalizada $\delta(t)$ a la entrada; la salida resultante describe la respuesta del sistema.

Otra base frecuentemente empleada corresponde a $\phi(t, s) = e^{j2\pi st}$, $T, S \in \mathbb{R}$. En este caso, se obtiene que $v_x(s) = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)$ y $v_y(s) = \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(s)$.

De acuerdo con (2.9), se tiene

$$\psi(t, s) = \int_T h(t, \tau) e^{j2\pi s\tau} d\tau \triangleq H(t, s) \quad (2.11)$$

Por consiguiente, de (2.9) y (2.10) se obtiene

$$Y(f) = \int_{\mathbb{R}} H(f, \nu) X(\nu) d\nu$$

donde

$$H(f, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(t, \tau) e^{-j2\pi ft} e^{j2\pi \nu \tau} dt d\tau \quad (2.12)$$

La función $H(f, \nu)$ en (2.11) se conoce como *la función de transferencia* y corresponde a la segunda forma de análisis de sistemas correspondiente al *método de análisis espectral*.

La relación entre la función de respuesta a impulso y la función de transferencia, así como con las

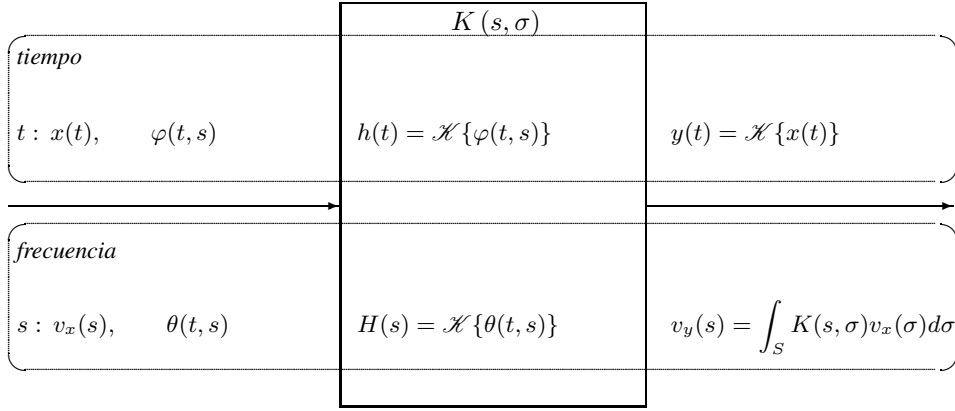


Figura 2.2. Transformación lineal e invariante de señales

respectivas bases de representación en la transformación lineal de señales se muestran en la Figura 2.2. Cabe anotar, que en algunos casos es importante representar las señales con diferentes bases, así $\varphi(t, s)$ las de entrada y $\tilde{\varphi}(t, s)$ las de salida, con lo cual la densidad de salida se define por la integral $v_y(s) = \int_S K(s, \sigma) v_x(\sigma) d\sigma$, donde

$$K(s, \sigma) = \int_T \hat{\theta}(s, t) \psi(t, \sigma) dt, \quad \psi(t, s) = \mathcal{K}\{\varphi(t, s)\}$$

En general, las propiedades de los sistemas lineales se reflejan en la estructura de los kernels funcionales que representan sus operadores. De hecho, la clasificación, dada en § 1.1.1, se formaliza empleando diferentes propiedades de los kernels, extendiendo su dominio de definición hasta $L^2(\mathbb{R})$.

Los siguientes son los operadores lineales que mayor uso tienen en el análisis de señales y sistemas:

- *Operador invariante en el tiempo.* Dados $x \in \mathfrak{X}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, si $y(t) = \mathcal{K}\{x(t)\}$, entonces, se cumple que $y(t - t_0) = \mathcal{K}\{x(t - t_0)\}$.

Un operador es invariante en el tiempo, cuando la respuesta (2.10) del sistema lineal que describe, depende solamente de la diferencia de sus argumentos, $h(t, \tau) = h(t - \tau) = h(t)$, luego,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \implies \mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$$

La descripción, en el dominio de la frecuencia, de un operador invariante se realiza a partir de la expresión (2.12),

$$\begin{aligned} H(f, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp(-j2\pi ft + j2\pi \nu \tau) dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \exp(-j2\pi f\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi(f - \nu)\tau) d\tau d\sigma = H(f) \sigma(f - \nu) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \delta(f - \nu) X(\nu) d\nu = H(f) X(f) \quad (2.13)$$

Un primer ejemplo de operadores invariantes en el tiempo, corresponde a un operador de *escala*, tal que para cada w , $\mathbf{x} = \mathcal{K}\{w\mathbf{x}\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}$, $w = \text{const.}$, en particular, cuando $w = 1$, esto es, $\mathbf{x} = \mathcal{I}\{\mathbf{x}\}$, se obtiene el operador *unitario*, para el cual, el respectivo sistema tiene respuesta a impulso $h(t) = \delta(t)$ y función de transferencia $H(f) = 1$. Otro ejemplo corresponde al operador de *desplazamiento*, descrito como $x(t - t_0) = \mathcal{K}\{x(t)\}$. En este caso, el respectivo sistema se describe por las funciones $h(t) = \delta(t - t_0)$ y $H(f) = \exp(-j2\pi t_0 f)$.

- *Operador de discretización.* El operador de escala puede definirse en forma variante en el tiempo, tal que $w(t) \neq \text{const.}$, y el sistema físico realiza entonces la siguiente transformación, $y(t) = w(t)x(t)$, al cual le corresponde la respuesta a impulso

$$h(t, \tau) = w(t)\delta(t - \tau) = w(\tau)\delta(t - \tau)$$

La respectiva función de transferencia, teniendo en cuenta (2.12), resulta en

$$\begin{aligned} H(f, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \delta(t - \tau) \exp(-j2\pi \nu t + j2\pi \nu \tau) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \exp(-2\pi(f - \nu)\tau) d\tau \\ &= W(f - \nu) \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el dominio de la frecuencia, el operador de discretización corresponde a la siguiente convolución,

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f - \nu) X(\nu) d\nu$$

Un caso particular del operador de discretización corresponde a $w(t) = u(t)$, cuando el sistema realiza la transformación, $y(t) = x(t)u(t)$, esto es, la señal de salida depende solamente de los valores anteriores de la señal de entrada. El operador obtenido, denominado de *causalidad*, impone la siguiente restricción a la respuesta a impulso, $h(t, \tau) = 0$, $\forall \tau > t$.

- *Operador diferencial de orden finito.* El método de análisis de sistemas lineales está basado en su descripción a través de ecuaciones diferenciales, también lineales, pero de orden finito,

$$\alpha_0(t)y(t) + \alpha_1(t)\frac{dy}{dt} + \cdots + \alpha_m(t)\frac{d^m y}{dt^m} = \beta_0(t)x(t) + \beta_1(t)\frac{dx}{dt} + \cdots + \beta_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}, \quad (2.14)$$

siendo continuas las respectivas funciones de entrada y salida: $\{\alpha_m(t)\}$ y $\{\beta_n(t)\}$.

En los sistemas invariantes en el tiempo los parámetros de entrada y salida son constantes con lo cual la correspondiente función respuesta a impulso se determina como [10]:

$$h(t - \tau) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{p_k(t-\tau)}, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (2.15)$$

donde p_k son las raíces del polinomio $D(p) = \sum_{k=1}^m \alpha_k p^k = 0$. Al operador diferencial de orden finito, le corresponde la función de transferencia en la forma racional,

$$H(f) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{j2\pi f - p_k} = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

para el polinomio del numerador de la forma, $N(p) = \sum_{k=1}^n \beta_k p^k$.

- *Operadores degenerados.* Corresponde a un operador acotado autoadjunto \mathcal{K} de rango finito que actúa sobre $L^2(\mathbb{R})$. En particular, existe una clase de operadores lineales que transforman un espacio de Banach E en cualquier subespacio M con rango finito, y los cuales son compactos en la medida en que el operador traduce cualquier subconjunto acotado $M \subset E$ en un subconjunto acotado de un espacio con dimensión finita. Por ejemplo, en un espacio de Hilbert el operador de proyección ortogonal a un subespacio es compacto, solamente, en el caso en que este subespacio tenga dimensión finita. Los kernels funcionales de esta clase de operadores son divisibles, y por lo tanto, son cómodos en la aproximación numérica de los operadores.

La respuesta a impulso de un operador degenerado de orden n tiene la forma,

$$h(t, \tau) = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \theta_k^*(\tau) \quad (2.17)$$

donde $\{\psi_k(t) : k = 1, \dots, n\}$ y $\{\theta_k(t) : k = 1, \dots, n\}$ son sistemas de funciones linealmente independientes definidos en $L^2(\mathbb{R})$. La imagen de \mathbf{x} , obtenida por un operador degenerado, se expresa mediante n funcionales lineales:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \theta_k \rangle \psi_k(t)$$

Problemas

Problema 2.1. Obtener la respuesta a impulso y la función de transferencia para la conexión en cascada del operador de invarianza en el tiempo y el operador de discretización. Demostrar si son o no conmutables.

Problema 2.2. Hallar el kernel $H(f, \nu)$ para el operador degenerado con respuesta a impulso (2.17).

Problema 2.3. Hallar los valores del espacio nulo para el operador degenerado con respuesta a impulso (2.17).

2.2. Aproximación de operadores lineales

En la práctica, el cálculo numérico de los operadores, representados por núcleos de transformaciones integrales en $L^2(T)$, básicamente consiste en hallar una matriz de orden n , que con suficiente precisión lo aproxime. La primera forma se puede dar truncando la serie de representación ortogonal hasta el término n , tal que se obtenga un subespacio M_n generado por $\{\varphi_i : i = 1, \dots, n\}$. Sin embargo, no se asegura que la imagen de los vectores $\mathbf{x} \in M_n$, mediante el operador \mathcal{K} , pertenezca a M_n .

2.2.1. Aproximación por proyección ortogonal

Otra forma de aproximación está en la representación ortogonal de operadores lineales. Sea \mathcal{K}_n la aproximación del operador \mathcal{K} , que refleja a \mathbf{x} en la proyección ortogonal $\mathbf{y} = \mathcal{K}\{\mathbf{x}\}$ en M_n ,

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{K}_n \{\mathbf{x}(t)\} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{y}, \theta_i \rangle \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{K} \{\mathbf{x}\}, \theta_i \rangle \varphi_i(t) \quad (2.18)$$

mientras los elementos del conjunto truncado M_n se expresan como:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t), \quad \alpha_j = \langle \mathbf{x}, \theta_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

con lo cual, reemplazando la señal de entrada (2.19) en (2.18) se obtiene,

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{K} \{\varphi_j\}, \theta_i \rangle \alpha_j \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(t)$$

entonces, $\beta_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \alpha_j \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha}$. Por lo tanto, el operador \mathcal{K} se representa por la matriz $\mathbf{K}_{n \times n}$ en la base $\{\varphi_i : i = 1, \dots, n\}$, que tiene elementos:

$$\lambda_{ij} = \langle \mathcal{K} \{\varphi_j\}, \theta_i \rangle \quad (2.20)$$

Ejemplo 2.4. Sean las señales de entrada y salida representadas por series de funciones desplazadas en el tiempo. Así mismo, sea M_n un subespacio generado por la base conformada por funciones ortonormales de interpolación $\{\varphi_i : \varphi_i(t) = \varphi(t - i\tau), i = 1, \dots, n-1\}$.

Haciendo suficientemente grande n e i suficientemente pequeño, se puede obtener con cualquier precisión la representación de la señal en el intervalo $0 < t < (n-1)\tau$. Si se asume la invarianza en el tiempo del operador \mathcal{K} , que corresponde al circuito con respuesta a impulso $h(t)$, entonces:

$$\mathcal{K} \{\varphi_j(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \sigma) \varphi(\sigma - j\tau) d\sigma = \psi(t - j\tau)$$

donde $\psi = \mathbf{h} * \varphi$ es la respuesta del circuito a la base de interpolación φ , con la cual se puede describir completamente el operador \mathcal{K}_n , por cuanto de (2.20) se tiene que,

$$\lambda_{ij} = (\mathcal{K} \{\varphi_j\}, \varphi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t - j\tau) \varphi(t - i\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) \varphi(\sigma - (i-j)\tau) d\sigma = h_{i-j}$$

Por lo tanto, la matriz \mathbf{K} se puede hallar mediante el desplazamiento sucesivo de los elementos $\{h_j = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)\}$, tal que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{1-n} \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots & h_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

El conjunto de los n elementos $\{h_j : 0, \dots, (n-1)\}$ forma cada vector fila, que representa la respuesta a impulso inicial $\psi(t)$, proyectada sobre M_n ,

$$\hat{\psi}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \varphi_i(t), \quad \|\varphi_i\| = 1$$

Si el operador \mathcal{K} corresponde a un sistema físicamente realizable, $h(t) = 0, \forall t < 0$, entonces los elementos $\{h_i : i = -1, \dots, 1-n\}$ se aceptan iguales a cero. Por lo que la matriz \mathbf{K} será triangular inferior, luego,

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij} \alpha_j = \sum_{j=0}^i h_{i-j} \alpha_j, \quad i = 0, \dots, n-1$$

donde α y β son vectores fila que representan las señales de entrada y salida, respectivamente.

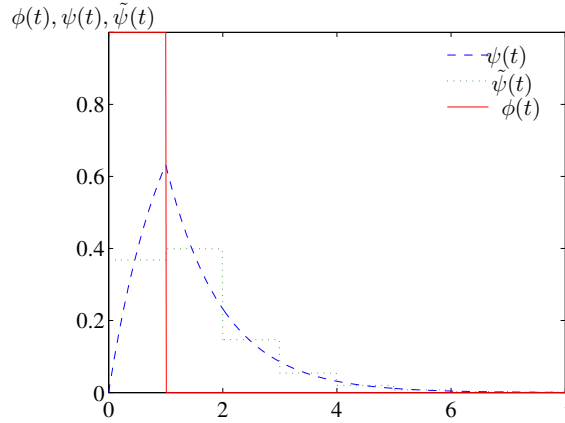


Figura 2.3. Aproximación mediante desplazamientos sucesivos en el tiempo

En la Figura 2.3 se ilustra el caso de aproximar la señal escalón, mediante un pulso rectangular, en calidad de función de interpolación φ , cuando el sistema en análisis corresponde al circuito RC del ejemplo 2.7, asumiendo $\tau = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-t} u(t) \\ \psi(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 < t \leq 1 \\ (e-1)e^{-t}, & t > 1 \end{cases} \\ h_i = (\psi, \varphi_i) &= \int_i^{i+1} \psi(t) dt = \begin{cases} 0.368, & i = 0 \\ 1.085e^{-i}, & i \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.2. Aproximación de operadores por norma

La aproximación (2.20) se restringe en la medida que en un subespacio M_n pueden existir puntos para los cuales el error $\|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\} - \mathcal{K}_n\{\mathbf{x}\}\|$ no converge. Tampoco es seguro que aumentando la cantidad de términos de aproximación n , el error disminuya. Además, no es claro el origen de la no convergencia del error: si es debido a la especificidad del operador, o más bien, a la forma como se escoge el subespacio M_n .

En este sentido, es preferible extender el dominio del operador hasta $L^2(T)$. Entonces, \mathcal{K}_n es un operador degenerado del tipo,

$$y(t) = \mathcal{K}_n\{x(t)\} = \int_T K_n(t, s)x(s)ds \quad (2.21)$$

siendo $K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t)\theta_i^*(s)$ y $\psi_i(t) = \mathcal{K}\{\varphi_i(t)\}$.

A partir de la norma del operador, definida como $\|\mathcal{K}\| = \sup\{\|\mathcal{K}\{x\}\|; \|x\| < 1\}$, se puede caracterizar la distancia entre el operador y su aproximación en la respectiva métrica,

$$d(\mathcal{K}, \mathcal{K}_n) = \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| = \sup\{\|\mathcal{K}\{\mathbf{x}\} - \mathcal{K}_n\{\mathbf{x}\}\| : \|\mathbf{x}\| < 1, \mathbf{x} \in L^2(T)\} \quad (2.22)$$

De la expresión (2.22), se observa que en vez de hallar la aproximación del operador por sistemas ortogonales completos sobre $L^2(T)$, se buscan dos sistemas de funciones $\{\psi_i(t) : i = 1, 2, \dots\}$ y $\{\theta_i(t) : i = 1, 2, \dots\}$, tales que el correspondiente operador degenerado \mathcal{K}_n en (2.21) aproxime un operador dado, de forma que el error $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\|$ pueda ser tan pequeño como se quiera, aumentando la cantidad de términos n .

Sin embargo, no cualquier operador acotado se puede representar con cualquier precisión solamente con aumentar el orden n del operador degenerado de aproximación. La dificultad está en que el operador de aproximación tiene una dimensión finita, por lo tanto, solamente se pueden representar operadores definidos sobre dominios tales que todos sus puntos sean cercanos a un subespacio finito. En particular, se exige que el conjunto de imágenes para los puntos de la esfera unitaria $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ sea cercano a un subespacio de dimensión finita. Entonces, además de que el conjunto de imágenes sea acotado, la aproximación mediante operadores degenerados, necesariamente exige de la imagen de la esfera unitaria la condición adicional de convergencia uniforme (que sea acotada uniformemente), esto es, dado un conjunto S con métrica d , para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito formado por la ε -malla de valores $\{\mathbf{x}_i(t) : i = 1, \dots, N(\varepsilon)\}$, tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < \varepsilon$ para algunos valores de i , pero para cualquier $\mathbf{x} \in S$, es decir ε es independiente de \mathbf{x} . Esta condición implica que el conjunto S es compacto y se podrá hallar dentro del mismo la ε -malla de valores con dimensión $N(\varepsilon)$, en la cual cualquier punto del conjunto se ubica a una distancia no mayor, que la distancia ε de alguno de los puntos seleccionados.

De esta manera, si un conjunto acotado uniformemente es cercano a algún subespacio con dimensión finita, se puede construir la base a partir de los puntos de la ε -malla, y el subespacio generado por esta base contendrá todos los puntos ubicados a distancias no mayores a ε de cualquier punto del conjunto.

En particular, sea el subespacio M_n , que contiene la ε -malla de valores para el conjunto dado en la forma $\{\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}, \|\mathbf{x}\| = 1\}$, generado por la base $\{\varphi_i(t) : i = 1, \dots, n\}$. En calidad de operador de

aproximación \mathcal{K}_n se puede escoger uno que proyecte $\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}$ de forma ortogonal sobre M_n ,

$$\mathcal{K}_n\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{K}\{\mathbf{x}\}, \theta_i \rangle \varphi_i(t)$$

Luego, $\mathcal{K}_n\{\mathbf{x}\}$ es un punto en M_n cercano a $\mathcal{K}\{\mathbf{x}\}$ y por cuanto M_n contiene la ε -malla de valores para las proyecciones de la esfera unitaria, entonces $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \leq \varepsilon$, donde ε puede hacerse tan pequeño como se quiera para cualquier valor suficientemente grande de n . La expresión (2.21), para obtener el núcleo funcional divisible del operador degenerado \mathcal{K}_n , se puede escribir en la forma,

$$\mathcal{K}_n\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma, s) x(s) \theta_i^*(\sigma) ds d\sigma \right) \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \phi_i^*(s) ds$$

donde $\phi_i(t) = \mathcal{K}^*\{\theta_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K^*(\sigma, t) \theta_i(\sigma) d\sigma$, siendo \mathcal{K}^* el operador conjugado de \mathcal{K} .

Como resultado, el kernel del operador degenerado \mathcal{K}_n tiene la forma,

$$K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \phi_i^*(s) \quad (2.23)$$

El operador \mathcal{K}_n es compacto, en el sentido en que envía un conjunto acotado en otro uniformemente acotado. En general, se considera que la condición suficiente, para que un operador sea compacto, está en que su kernel debe ser una función integrable en el cuadrado (operadores de *Hilbert Schmidt*),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 dt ds < \infty \quad (2.24)$$

Los kernels, que cumplen la condición (2.24), se pueden entonces representar mediante kernels divisibles $K_n(t, s)$, tal que la aproximación converge en el siguiente sentido

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 dt ds \rightarrow 0, \forall n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto, el núcleo del operador degenerado de aproximación buscado (2.23), tiene la forma:

$$K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \theta_i^*(s) \quad (2.25)$$

donde $\{\theta_i^*\}$ es la base conjugada del conjunto ortogonal $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\} \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$\psi_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) \varphi_i(s) ds$$

En general, la aproximación mediante operadores compactos consiste en hallar la ε -malla apropiada de valores, que corresponde al operador a aproximar.

2.2.3. Representación espectral de operadores

Los métodos de representación, hasta ahora analizados, se pueden entender como la generalización de la representación de los operadores lineales definidos en espacios finitos (2.1), que emplean la imagen de las funciones base. Otro método de representación generalizada dado en (2.3), que corresponde a una sucesión de funcionales lineales, se puede emplear cuando la transformación se da por algún conjunto de vectores de entrada $\{\phi_i\}$. Inicialmente, se define el subconjunto S de vectores invariantes en relación al operador \mathcal{K} , en el sentido en que sin tener en cuenta los factores de escala, estos se transforman en sí mismo,

$$S = \{\mathbf{x} : \mathcal{K} \{\mathbf{x}\} = \lambda \mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

En muchos casos, el conjunto S , junto con sus respectivos coeficientes de escala, determina de forma completa el operador. Por ejemplo, asumiendo en (2.3) que $\hat{\varphi}_i = \varphi_i$, entonces

$$\phi_j(t) = \sum_i \langle \theta_j, \psi_i \rangle \theta_i(t), \quad \psi_i(t) = \mathcal{K} \{\varphi_i(t)\} \quad (2.26)$$

Si además se asume que las funciones base $\{\varphi_i\}$ se escogen dentro de S , tales que, $\varphi_i \in S$, luego, $\psi_i(t) = \lambda_i \varphi_i(t)$, $\forall i$, entonces los valores (2.26) toman la forma: $\phi_j(t) = \lambda_j^* \theta_j(t)$, que al ser reemplazados en (2.3), se obtiene la imagen de cualquier \mathbf{x} en el espacio generado por $\{\varphi_i\}$,

$$y(t) = \mathcal{K} \{x(t)\} = \sum_j \lambda_j \langle \mathbf{x}, \theta_j \rangle \varphi_j(t) = \sum_j \beta_j \varphi_j(t)$$

luego,

$$\beta_j = \lambda_j \alpha_j, \quad \forall j \quad (2.27)$$

De la expresión (2.27) queda claro que la representación se resume a la compresión simple por coordenadas para cada componente del vector \mathbf{x} .

En la práctica, se tiene una clase amplia de operadores, en los cuales el conjunto S contiene la cantidad suficiente de elementos linealmente independientes, para que sobre ellos se pueda generar el espacio de interés, de tal manera que se implemente la aproximación (2.25). Bajo ciertas restricciones, se puede afirmar que la mejor aproximación de un operador conduce a la representación adecuada de una señal mediante proyecciones ortogonales. Un ejemplo particular, para hallar la mejor aproximación, corresponde al método de representación espectral de los operadores.

Sea el kernel K_n de un operador degenerado lineal expresado en la forma:

$$K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \theta_i^*(s) \quad (2.28)$$

donde $\{\psi_i(t) : i = 1, \dots, n\}$ son funciones linealmente independientes que generan al subespacio M_n , el cual se considera invariante con respecto al operador \mathcal{K}_n . En los operadores *simples*, en los cuales sus espacios de entrada se determinan sobre sus correspondientes vectores propios se cumple

$$K'(t, s) = K^*(t, s) \quad (2.29)$$

donde $K'(t, s)$ es el kernel del respectivo operador autoconjugado \mathcal{K}' de \mathcal{K} . En el kernel (2.28), los vectores propios también están ubicados en M_n . Si además, el correspondiente operador \mathcal{K}_n es normal, entonces de (2.29) se tiene,

$$K'_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) \psi_i^*(s)$$

Por lo tanto, M_n también se determina sobre el respectivo conjunto $\{\theta_i(t) : i = 1, \dots, n\}$, lo que implica que el espacio nulo para \mathcal{K}_n corresponde al complemento ortogonal de M_n , en la medida en que cualquier vector que sea ortogonal a todos los $\{\theta_i\}$ debe tener imagen en el valor 0. Este subespacio con dimensión infinita corresponde al espacio propio Ω_0 para $\lambda = \lambda_0 = 0$. En otras palabras, se deben hallar los elementos $\mathbf{x} \in M_n$, que son solución de la ecuación $\mathcal{K}_n \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, esto es:

$$\langle \mathcal{K}_n \{\mathbf{x}\}, \theta_i \rangle - \lambda \langle \mathbf{x}, \theta_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

El sistema $\{\varphi_i\}$ es mutuo con relación a $\{\theta_i\}$, por lo cual, si en la última expresión se reemplazan los valores de $x = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j$, entonces, se llega a la siguiente ecuación matricial:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{a} = 0 \quad (2.30)$$

siendo \mathbf{K} la matriz con elementos $\lambda_{ij} = (\varphi_i, \theta_j)$. Por cierto, la ecuación (2.30) tiene solución, si y solo si, el determinante de la matriz $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}$ es cero. Entonces, los valores propios diferentes de 0 del operador \mathcal{K}_n corresponden a las raíces del polinomio característico, con $m \leq n$ raíces diferentes,

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

El conjunto de valores propios, que en definitiva se consideran necesarios en la aproximación numérica de un operador, se denomina *espectro puntual* del operador (o simplemente espectro).

Por cuanto ambos espacios propios obtenidos son mutuamente ortogonales, el espacio total es la suma directa de los elementos de ambos espacios propios, así, generalizando para cualquier valor de $\mathbf{x} \in L^2(\mathbb{R})$ y teniendo en cuenta que $\lambda_0 = 0$, se obtiene

$$\mathcal{K}_n \{\mathbf{x}\} = \mathcal{K}_n \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i$$

donde $\mathbf{x}_i \in \Omega_i$ son las proyecciones ortogonales de \mathbf{x} en Ω_i que se pueden notar como operadores de proyección \mathcal{P}_i , tales que $\mathcal{P}_i \{\mathbf{x}\} = \mathbf{x}_i$ para cualquier $\mathbf{x} \in L^2(\mathbb{R})$, con lo cual, la representación espectral del operador se describe como $\mathcal{K}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_i$.

El kernel del operador degenerado \mathcal{K}_n , que corresponde a la representación espectral, es:

$$K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t) \phi_i^*(s)$$

De lo anterior, se puede afirmar que para un operador normal, con rango n , se puede encontrar una base ortonormal en el dominio de definición, tal que la imagen de cualquier punto de este dominio se obtiene mediante el cambio simple de escala por cada coordenada para cada uno de sus componentes. En calidad de factores de escala, se escogen los valores propios, determinados de las $m \leq n$ raíces del

polinomio característico de orden n . En general, las raíces obtenidas pueden ser complejas, aunque los operadores \mathcal{K} sean reales, siendo esta la principal razón en el empleo de espacios complejos de representación de señales.

La generalización de los anteriores resultados de representación espectral de operadores de rango n se puede dar para los operadores compactos, sobre $L^2(\mathbb{R})$, en la medida en que puedan ser aproximados por los primeros. Por lo tanto, es entendible cierta similitud en las respectivas representaciones espectrales. En general, la única diferencia está en que para el operador compacto debe considerarse una cantidad infinita de valores propios, sin embargo, se puede demostrar que el mismo valor λ_i tiende a cero, cuando i aumenta, lo cual a su vez implica que para un operador compacto, la cantidad de raíces múltiples es finita.

La representación espectral de un operador compacto normal tiene la forma:

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathcal{P}_i \quad (2.31)$$

donde $\mathcal{P}_i \{x(t)\} = \langle \mathbf{x}, \phi_i \rangle \phi_i(t)$ para todos los $\mathbf{x} \in L^2(\mathbb{R})$, y corresponde a los operadores elementales (con dimensión uno) de proyección ortogonal. En este caso, el kernel para \mathcal{K} se expresa mediante los vectores de la forma:

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \phi_i^*(s)$$

que corresponde a un kernel del tipo Hilbert-Schmidt si se cumple la condición: $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$.

En la práctica, es usual el ordenamiento en forma decreciente de los valores propios

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > \dots \quad (2.32)$$

de tal manera, que el primer valor propio se puede interpretar como la norma del operador, $\|\mathcal{K}\| = |\lambda_1|$.

Uno de los resultados prácticos de empleo de representación espectral corresponde al caso de aplicación de un operador sobre un sistema compuesto por k circuitos conectados en cascada. De (2.31) se obtiene que, $\mathcal{K}^k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k \mathcal{P}_i$, cuya generalización corresponde al *filtro transversal*, mostrado en la Figura 2.4. A partir de (2.31), que representa el operador de un circuito, se obtiene el operador para todo el filtro,

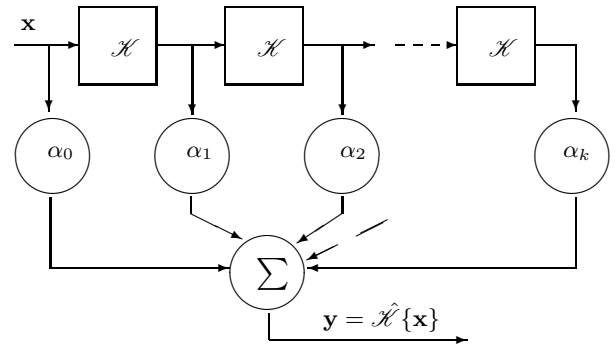


Figura 2.4. Representación espectral del filtro transversal

$$\widehat{\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{K}^j = \sum_{i=1}^{\infty} F(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

donde el polinomio $F(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j$ determina los valores propios del filtro transversal a través de los valores propios del circuito. El filtro transversal es una forma cómoda de implementar los operadores, simplemente cambiando la ganancia de cada circuito del filtro se sintoniza el valor de

cada uno de los k valores propios del operador $\widehat{\mathcal{K}}$.

Volviendo al problema de la mejor aproximación de un operador compacto mediante un operador con kernel divisible de rango n , se encuentra una clase de operadores normales, cuya representación espectral muestra de manera clara el error de aproximación. En particular, para los *operadores autoconjugados*, determinados por la relación $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$, se cumple que

$$\mathcal{K} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathcal{K}' \mathbf{x}_i = \lambda_i^* \mathbf{x}_i \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \in \mathbb{R}$$

asumiendo de (2.32), además, que los valores propios pueden ser dispuestos en orden decreciente.

Entonces, en calidad de operador de aproximación \mathcal{K}_n para el operador autoconjugado compacto \mathcal{K} se toma su representación espectral, en la cual se eliminan todos los términos de orden n ,

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{K}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_i,$$

luego, $\mathcal{K} - \mathcal{K}_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \mathcal{P}_i$. Se puede demostrar que esta es la mejor aproximación [18], en el sentido en que,

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \leq \|\mathcal{K} - \widehat{\mathcal{K}}_n\|$$

donde $\widehat{\mathcal{K}}_n$ es cualquier operador de orden n .

De otra parte, de (2.32) se tiene que $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| = |\lambda_{n+1}|$, y teniendo en cuenta que $\lambda_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, entonces, se puede determinar el orden del operador de aproximación, a objeto de obtener la precisión deseada.

Ejemplo 2.5. Un ejemplo de representación espectral, corresponde a la aproximación para el operador invariante en el tiempo (2.10), $\mathcal{K}\{x(t)\} = h(t) * x(t)$, cuyas funciones propias tienen la forma, $x_i(t) = \exp(j2\pi f_i t)$, que aunque no pertenecen a $L^2(-\infty, \infty)$, son invariantes bajo la operación de convolución,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\{x_i(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp(j2\pi f_i \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \exp(j2\pi f_i (t - \sigma)) d\sigma \\ &= H(f_i) x_i(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente, el espectro de \mathcal{K} es la función de transferencia del operador. Esta es la razón por la cual, se usa tan frecuentemente el eje de frecuencias de Fourier como representación espectral de los operadores invariantes en el tiempo.

Problemas

Problema 2.4. Demostrar que los valores propios de un operador normal con rango finito no dependen de la base de representación escogida.

Problema 2.5. Demostrar que el operador ortonormal de proyección es autoconjugado.

2.3. Representación operacional de sistemas lineales

2.3.1. Método de la integral de superposición

Si un sistema cumple la condición de linealidad (1.4) e invariabilidad en el tiempo (1.5), entonces, como se deduce de (1.10) cualquier señal $x(t)$ puede ser aproximada por una sucesión infinita de funciones delta en el tiempo, esto es, teniendo en cuenta la propiedad de selectividad de la función delta $\delta(t)$ en los instantes en que se determinen dentro de la sucesión infinita, entonces

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.33)$$

luego, la señal de salida $y(t)$ se podrá determinar para cualquier $x(t)$ dada, si se sabe la reacción del sistema cuando a la entrada se tiene la función delta $\delta(t)$ (respuesta a impulso $h(t)$).

Aplicando consecuentemente las siguientes propiedades de:

(a). *Invariabilidad en el tiempo:* $\delta(t - \tau) \implies h(t - \tau)$,

(b). *Linealidad:* $x(\tau) \delta(t - \tau) \implies x(\tau) h(t - \tau)$,

Se tiene que la señal de entrada $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ genera la salida dada por la convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

De lo anterior, se puede decir que la salida $y(t)$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo corresponde a la integral de superposición de la respuesta a impulso $h(t)$ con la entrada $x(t)$, así:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (2.34)$$

La integral de superposición (2.34) es, en general, la transformada de un sistema no causal, por cuanto la excitación del sistema en el momento t le corresponden valores de salida $y(\tau)$, para los valores de la variable de integración, definidos en $-\infty < \tau < t$.

Al ajustar el sistema a la condición de causalidad, el sistema deberá tener una respuesta a impulso $h(t) = 0, \forall t < \tau$, por lo que (2.34) se convierte en:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

En cualquier sistema invariante en el tiempo siempre se podrá tomar el origen del tiempo igual a cero, esto es, si la señal de entrada satisface la condición $x(t) = 0, \forall t < 0$, entonces, la anterior

ecuación toma la forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) x(\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.35)$$

En forma general, la ecuación (2.35) muestra que para cualquier función de entrada $x(t)$, la derivada de orden n en el tiempo de la función de salida es igual a:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{d^n x}{dt^n}(t-\tau) d\tau$$

Particularidades de la respuesta a impulso.

Sean dos sistemas lineales s_1 y s_2 con respuestas a impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$ respectivamente, cuya respuesta resultante $h_{12}(t)$ de su conexión en cascada, mostrada en la Figura 2.5, se define como:

$$h_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau, z) h_1(\tau, z) dz$$

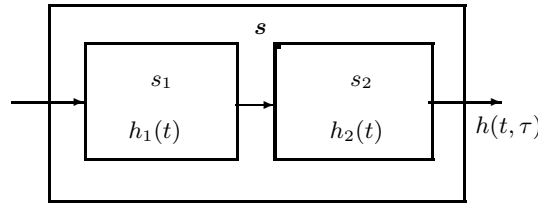


Figura 2.5. Conexión en cascada de sistemas

En forma general, la conexión cascada de s_1 y s_2 no es la misma de s_2 y s_1 , por la diferencia de argumentos de las respuestas a impulso en el núcleo de la integral de superposición, excepto cuando ambos sistemas sean invariantes en el tiempo. En este caso, entonces, se tiene

$$h_{12}(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-z) h_1(z-\tau) dz$$

reemplazando $v = z - \tau$, $dv = dz$ se encuentra la expresión

$$\begin{aligned} h_{12}(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v) h_2((t-\tau)-v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v) h_2(\lambda-v) dv, \quad \lambda = t-\tau \end{aligned}$$

Esta última integral corresponde a la función de respuesta a impulso $h_{12}(t-\tau)$ de la conexión en cascada de $s_2 s_1$. Donde se puede afirmar que para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo la conexión en cascada de los sistemas es conmutativa, esto es

$$h_{12}(t-\tau) = h_{21}(t-\tau).$$

Respuesta a escalón unitario. Se denomina a la reacción del sistema lineal cuando a la entrada existe una función del tipo escalón unitario $u(t)$ (1.12), donde:

$$p(t) \triangleq u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t - \tau) d\tau$$

entonces,

$$p(t) = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda; \text{ donde } \lambda = t - \tau \quad (2.36)$$

Este resultado proporciona un método para determinar en laboratorio la respuesta a impulso de un sistema. Aunque la función $u(t)$ existe hasta el infinito, la mayoría de los sistemas tiene una respuesta relativamente corta. Entonces, empleando un generador de ondas cuadradas de baja frecuencia con período mucho mayor al tiempo de duración de la respuesta a impulso, este prácticamente se percibirá como un escalón. De la ecuación (2.36) se deduce que la relación de la respuesta a impulso y la respuesta a escalón en un sistema lineal es $h(t) = dp/dt$.

Ejemplo 2.6. Encontrar la respuesta a impulso del sistema lineal dado por la ecuación diferencial $\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = x(t)$, $\forall t > 0$, donde $a(t)$ es una función dada a priori [19].

La función entrada-salida es preferible hallarla al resolver la ecuación para $y(t)$. Tomando $t = 0$ como el tiempo en el cual la entrada es aplicada al sistema y considerando la linealidad de este, se tiene que $y(t) = \Gamma\{0\} = 0$. Además, como $x(t) = 0$, $\forall t < 0$, entonces, también será $y(t) = 0$. Así, se podrá resolver la ecuación diferencial sujeta a esta condición inicial. Preferiblemente se tomará $t = 0$, es decir, $y(0) = 0$. Para resolver la ecuación resultante y aplicando la condición inicial se multiplican por un factor de integración, obteniéndose

$$\frac{d}{dt} \left(e^{(\alpha(t))} y(t) \right) = e^{(\alpha(t))} x(t), \quad \alpha(t) = \int_0^t a(z) dz$$

integrando ambos lados en $[0, t]$ se obtendrá:

$$e^{(\alpha(t))} y(t) = \int_0^t e^{(\alpha(\tau))} x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{(\alpha(\tau))} x(\tau) d\tau, \quad t > 0$$

que corresponde a la relación entrada/salida deseada. Teniendo en cuenta la definición para la respuesta a impulso se obtendrá

$$h(t) = e^{(\alpha(t))} u(t - \tau)$$

que corresponde a una respuesta a impulso físicamente realizable, mientras, para el caso de $a(t) = a = cte$. se tendrá que:

$$h(t) = e^{-a(t-\tau)} u(t - \tau),$$

que describe un sistema lineal e invariante en el tiempo.

2.3.2. Método de análisis espectral

En el caso del análisis de los sistemas en el dominio de la frecuencia, sea la forma de la señal a la entrada $x(t) = e^{j\omega t}$. Aceptando la linealidad del sistema, se analizará la solución particular:

$$y(t) = K(\omega)x(t) = K(\omega)e^{j\omega t}, \quad K(\omega) \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

Asumiendo que todos los parámetros que definen el sistema lineal (2.14) son invariantes en el tiempo, $\{\alpha_k(t), \beta_k(t)\} = \text{const.} \in \mathbb{R}$, entonces se tendrá

$$\beta_0 x(t) + \beta_1 \frac{dx}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n x}{dt^n} = \alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \dots + \alpha_m \frac{d^m y}{dt^m}, \quad (2.38)$$

Dado que $\frac{d^{(k)}}{dt^k} x(t) = (j\omega)^k e^{j\omega t}$, entonces,

$$\begin{aligned} \beta_0 e^{j\omega t} + j\omega \beta_1 e^{j\omega t} + \dots + (j\omega)^n \beta_n e^{j\omega t} &= \alpha_0 K(\omega) e^{j\omega t} + \dots + \alpha_m (j\omega)^m K(\omega) e^{j\omega t} \\ (\beta_0 + j\omega \beta_1 + \dots + (j\omega)^n \beta_n) e^{j\omega t} &= (\alpha_0 + \alpha_1 j\omega + \dots + \alpha_m (j\omega)^m) K(\omega) e^{j\omega t} \\ (\beta_0 + j\omega \beta_1 + \dots + (j\omega)^n \beta_n) &= (\alpha_0 + \alpha_1 j\omega + \dots + \alpha_m (j\omega)^m) K(\omega) \end{aligned}$$

Luego, entonces

$$K(\omega) = \frac{\sum_k^n \beta_k (j\omega)^k}{\sum_k^m \alpha_k (j\omega)^k} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = H(\omega), \quad (2.39)$$

De (2.39), se observa que la función $K(\omega)$ corresponde exactamente con la función de transferencia $H(\omega)$ definida en (2.33), la cual depende exclusivamente del sistema y no de la señal de entrada, además, el mismo resultado se puede obtener al hallar la transformada de Fourier de (2.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \beta_0 x(t) + \beta_1 \frac{dx}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n x}{dt^n} \right\} &= \mathcal{F} \left\{ \alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \dots + \alpha_m \frac{d^m y}{dt^m} \right\} \\ \beta_0 X(\omega) + \beta_1 j\omega X(\omega) + \dots + \beta_n (j\omega)^n X(\omega) &= \alpha_0 Y(\omega) + \alpha_1 j\omega Y(\omega) + \dots + \alpha_m (j\omega)^m Y(\omega) \\ (\beta_0 + \beta_1 j\omega + \dots + \beta_n (j\omega)^n) X(\omega) &= (\alpha_0 + \alpha_1 j\omega + \dots + \alpha_m (j\omega)^m) Y(\omega) \\ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega)^k} = H(\omega) \end{aligned}$$

Físicamente, $H(\omega)$ indica que una manera de probar la condición de linealidad de un sistema invariable en el tiempo es aplicando a la entrada una senoide con valores de amplitud, frecuencia y fase conocidos y constantes. En caso de linealidad, la salida del sistema deberá ser otra senoide con la misma frecuencia de entrada y puede tener diferentes valores de fase y amplitud:

$$Y(\omega_k) = H(j\omega_k)X(\omega_k)$$

Este proceso se hace repetitivo para el rango analizado de frecuencia. El cociente de estos dos coeficientes complejos corresponde a los valores de amplitud y fase de la función de transferencia. Por cuanto, en (2.37) la función de transferencia $H(\omega)$ se asume compleja, por lo tanto, se describe en términos del módulo (*respuesta de amplitud*) y de la fase (*desfase*), respectivamente como:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} = \Re\{H(\omega)\} + \Im\{H(\omega)\}$$

donde

$$|H(\omega)| = \sqrt{\Re\{H(\omega)\}^2 + \Im\{H(\omega)\}^2} \quad (2.40a)$$

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}}\right) \quad (2.40b)$$

Analizando (2.39) se puede llegar a la conclusión de que un sistema lineal e invariable en el tiempo actúa como dispositivo selectivo de frecuencia o *filtro* en las diferentes componentes espectrales aplicadas a un sistema, esto es, algunas componentes pueden amplificarse, otras atenuarse y algunas permanecerán inalteradas. De hecho, cada componente espectral puede tener un desfase característico al pasar por el sistema.

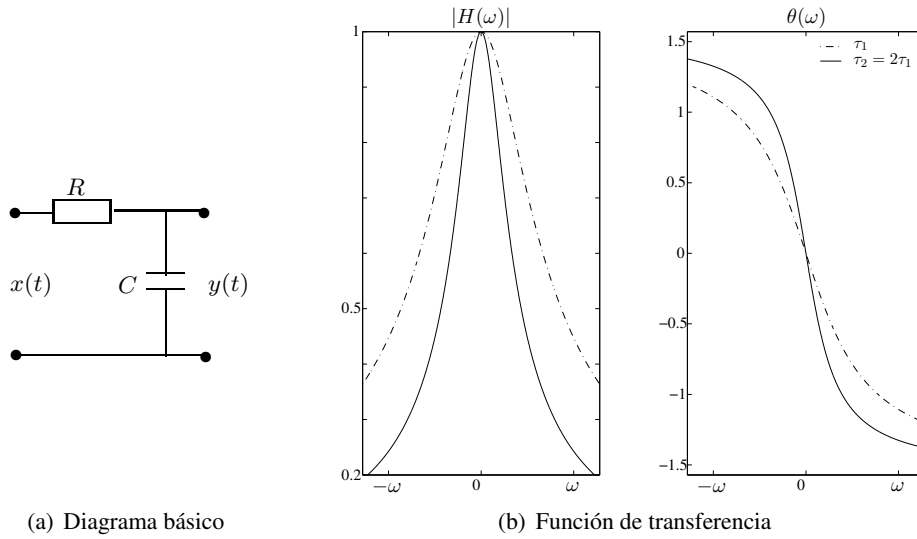


Figura 2.6. Análisis espectral del circuito RC

Ejemplo 2.7. Determinar la función de transferencia del sistema (circuito RC) mostrado en la Figura de 2.6(a).

Aplicando la relación del divisor de voltaje, se tiene:

$$y(t) = \frac{Z_c}{R + Z_c} e^{j\omega t}$$

donde la impedancia de la capacitancia es $Z_c = 1/j\omega C$. Así,

$$H(\omega) = \frac{(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

siendo $\tau = RC$. Al convertir en forma polar la anterior expresión se obtienen las respectivas *magnitud* y *desfase*: $|H(\omega)| = (1 + (\omega\tau)^2)^{-1/2}$, las cuales se muestran en la Figura 2.6(b)

Aceptando, que la señal de entrada tiene la forma $x(t) = e^{j\omega t}$, la convolución dada en (2.34) se define como:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \mathcal{F}\{h(t)\} = e^{j\omega t} H(\omega) \end{aligned}$$

Luego, la función de transferencia $H(\omega)$ corresponde a la Transformada de Fourier de la función respuesta al impulso:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Por último, aplicando la transformada inversa de Fourier a (2.13), la salida se expresa en forma alterna como

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Ejemplo 2.8. Determinar la magnitud de respuesta de un filtro pasabajos RC (Figura 2.6(a)) de la función $\text{rect}_\tau(t)$, donde $\tau = 4RC$.

Teniendo en cuenta la magnitud $|X(\omega)| = \tau \text{sinc}(\omega\tau/2)$ de la FDE del pulso cuadrado obtenida en (1.33) y la respuesta de amplitud obtenida $|H(\omega)| = |1 + j\omega RC|^{-1} = (\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2})^{-1}$ en el ejemplo 2.7, entonces, la magnitud de la salida será:

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| = \frac{\tau/T}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}} |\text{sinc}(\omega T/2)|$$

Las gráficas de la magnitud en las Figuras 2.7(a) y 2.7(b) muestran que este sistema atenúa las altas frecuencias de la FDE a la entrada y permite el paso de frecuencia relativamente más bajas con menor atenuación. Además, la transmisión desigual de todas las componentes produce una réplica distorsionada de la señal de entrada.

2.3.3. Método de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones lineales diferenciales proporcionan otra representación de las características de entrada-salida de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. El ejemplo más sencillo, tal vez, corresponda al análisis de un circuito diferenciador, cuya señal de salida está relacionada con la entrada de la forma

$$y(t) = \frac{dx}{dt},$$

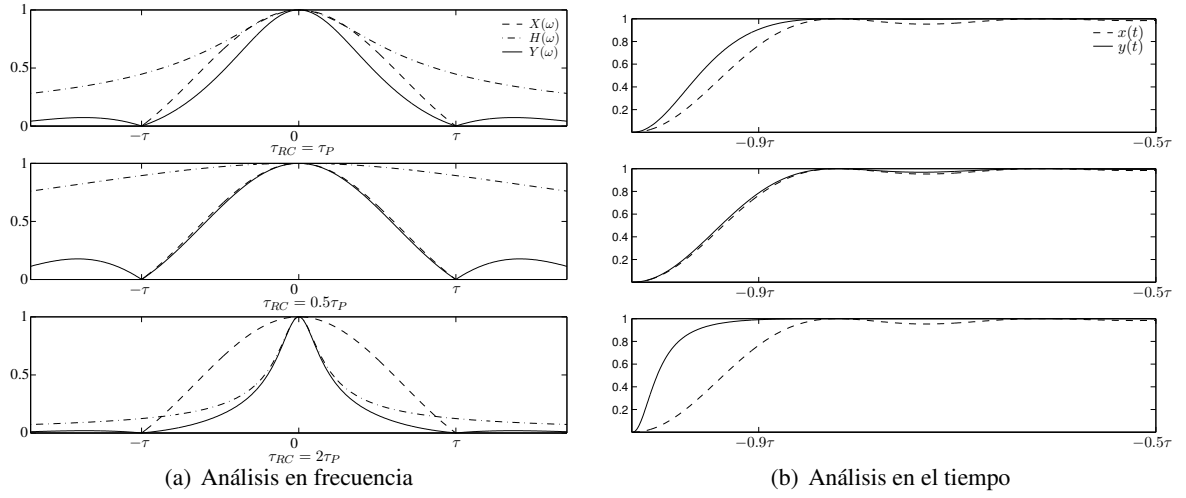


Figura 2.7. Respuesta del circuito RC a un pulso cuadrado

Basados en la propiedad de diferenciación de la TF (1.65) se tiene que

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega),$$

por lo que la función de transferencia del diferenciador ideal corresponde a

$$H(\omega) = j\omega$$

El circuito RC del ejemplo 2.7 representado en la Figura 2.6(a), cuya función de transferencia es igual a

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC$$

puede ser aproximado a un diferenciador, si se toma la condición $\omega\tau \ll 1$, con lo que la función aproximada de transferencia del circuito será:

$$H(\omega) \approx j\omega\tau$$

De manera alterna se puede calcular la función de transferencia de un circuito integrador:

$$y(t) = \int x(t)dt,$$

cuya función de transferencia, basados en (1.66), es igual a $H(\omega) = 1/j\omega$.

El circuito RC también puede ser configurado como integrador, observando la condición $\omega\tau \gg 1$, obteniéndose la siguiente función de transferencia aproximada

$$H(\omega) \approx 1/j\omega\tau$$

En forma general, el circuito RL también puede ser configurado, bien como diferenciador, bien como integrador. En la práctica es preferible la implementación sobre circuitos RC , por presentar

menores pérdidas activas que las que usualmente registran las inductancias.

2.3.4. Sistemas discriminantes de frecuencia

Se considera que la señal a su paso por un sistema no sufre distorsiones, si su forma no cambia, modificando solamente su escala o desplazamiento en el tiempo (típicamente retardo), esto es,

$$y(t) = kx(t - \tau_0)$$

siendo k el coeficiente de escala, y τ_0 el retardo inherente al tiempo de proceso del sistema. La FDE a la salida del circuito estará dada por

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = kX(\omega)e^{-j\omega\tau_0}$$

con lo cual, la función de transferencia de un circuito sin distorsiones se determina como

$$H(\omega) = ke^{-j\omega\tau_0}$$

cuyas funciones de respuesta de amplitud y desfase, representadas en la Figura 2.8, tienen respectivamente la forma,

$$|H(\omega)| = k, \quad \theta(\omega) = \omega\tau_0 \quad (2.41)$$

De otra parte, la función de *retardo de grupo* del sistema tiene uso amplio y es determinada por:

$$\tau(\omega) = \frac{d\theta}{d\omega} \quad (2.42)$$

En caso de no cumplirse alguna de las condiciones de (2.41) y (2.42), la forma de la señal de salida se diferenciará de la señal de entrada. De las condiciones de realización física, se deduce que la respuesta de amplitud y cambio de fase de los sistemas lineales con parámetros constantes poseen las cualidades de simetría:

$$H(-\omega) = H(\omega), \quad |H(-\omega)| = |H(\omega)|, \quad \theta(-\omega) = -\theta(\omega) \quad (2.43)$$

Modelos de filtración básica lineal. Basados en las condiciones (2.41), (2.42) y (2.43) se pueden establecer los siguientes modelos básicos de filtración

- Filtro pasabajos*, el cual atenúa las componentes de alta frecuencia (por encima de una frecuencia denominada de corte) de la señal de entrada, dejando pasar las componentes de baja frecuencia
- Filtro pasaaltos*, atenúa las bajas frecuencias, por debajo de valor de frecuencia mínimo establecido (frecuencia mínima) y deja pasar las frecuencias altas.

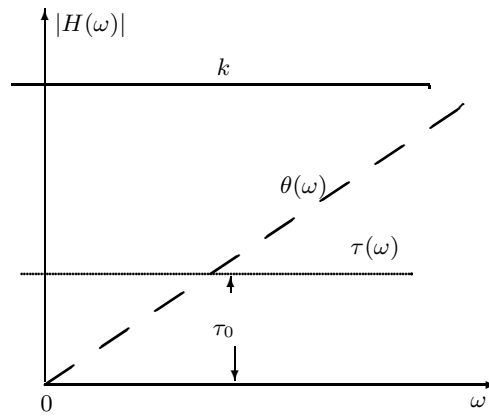


Figura 2.8. Desfase lineal

- (c). *Filtro pasabanda*, deja pasar las señales comprendidas dentro de una banda espectral (banda de paso) establecida entre un valor mínimo de frecuencia (frecuencia mínima) y un valor máximo permitido (frecuencia máxima), atenuando todas las componentes que estén fuera de la banda de paso.
- (d). *Filtro rechazabanda*, atenúan las señales comprendidas de una banda espectral (banda de rechazo) establecida entre un valor mínimo de frecuencia (frecuencia mínima de rechazo) y un valor máximo permitido (frecuencia máxima de rechazo), dejando pasar todas las componentes que estén fuera de la banda de rechazo.

La integral de convolución (2.34) en la respuesta a impulso se puede aproximar de la siguiente manera:

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$$\approx \sum_{k=0}^{t/\Delta\tau} x(t - k\Delta\tau) h(k\Delta\tau) \Delta\tau$$

Este resultado se puede realizar utilizando una línea de retardo con derivaciones cada $k\Delta\tau$, la salida de cada derivación se multiplica por el factor prefijado $h(k\Delta\tau)\Delta\tau$.

Un ejemplo de filtro construido con una línea de retardo con derivaciones ponderadas y un sumador en la forma mostrada en la Figura 2.9 se denomina *filtro transversal*.

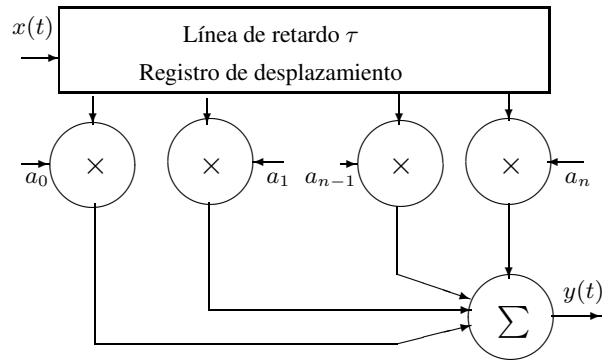


Figura 2.9. Filtro transversal

2.3.5. Representación de sistemas no lineales

Método de series funcionales. Este método, también conocido como el *método de Wiener* [20], puede ser catalogado como heurístico y está basado en la posibilidad de representar sistemas no lineales invariantes en el tiempo en forma de series.

Sea un sistema dipolo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, relacionadas por el operador del sistema \mathcal{K} , $y(t) = \mathcal{K}\{x(t)\}$, el cual en general, depende del carácter del sistema, su objeto de análisis y tipo de entradas. En el caso concreto, se escoge una clase de sistemas con memoria finita, cuando el operador es biyectivo. Esta restricción no tiene en cuenta sistemas, en los cuales existan puntos de equilibrio dependientes de las condiciones iniciales de entrada (sistemas con memoria infinita).

Una forma de representación de no linealidad en un sistema, más angosta que las correspondientes ecuaciones diferenciales no lineales, consiste en las series de Volterra [21]:

$$y(t) = h_0(t) + \sum_k \int \cdots \int h_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k) x(\lambda_1) \cdots x(\lambda_k) d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \quad (2.44)$$

En el caso particular, de ecuaciones diferenciales de primer orden [22],

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) + g(t, y(t), x(t))$$

la representación (2.44) es viable, por ejemplo, cuando la función $f(t, y(t))$ con respecto a $y(t)$ se puede aproximar por la serie de Taylor, mientras la función $g(\cdot)$ no depende de $y(t)$.

A efectos de simplificación de análisis, la representación se puede limitar hasta sistemas invariantes en el tiempo, cuando se asume que, $\mathcal{H}\{x(t + \tau)\} = y(t + \tau)$, $\forall \tau$, por lo cual las serie funcional de Volterra toma una forma más simple,

$$y(t) = h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda_1) x(t - \lambda_1) d\lambda_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \quad (2.45)$$

Las funciones $h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ son denominadas los *núcleos de Volterra*, que al igual que en los sistemas lineales representan la respuesta a la función delta. El primer término h_0 se puede tomar como componente constante de la representación, o bien, como las condiciones iniciales, por cuanto $y(t) = h_0$, cuando $x(t) = 0$. En cuanto al segundo término de la descomposición, $\int h_1(\lambda_1) x(t - \lambda_1) d\lambda_1$, si se asume la condición de realización física, $h_1(t) = 0, \forall t < 0$, entonces éste corresponde a la parte lineal del sistema. El tercer término $\int \int h_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ corresponde a la convolución doble de la señal de entrada $x(t)$ con la respuesta a impulso $h_2(\lambda_1, \lambda_2)$. Si se asume la independencia de los términos $h_2(\lambda_1 \lambda_2) = h(\lambda_1)h(\lambda_2)$, con lo que el tercer término se escribe como,

$$\begin{aligned} & \int \int h_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \int \int h(\lambda_1) h(\lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \int h(\lambda_1) x(t - \lambda_1) d\lambda_1 \int h(\lambda_2) x(t - \lambda_2) d\lambda_2 = y(t) y(t) = y^2(t) \end{aligned}$$

esto es, el tercer término puede ser entendido como la descripción de un sistema cuadrático.

En general, asumiendo que todos los núcleos de Volterra cumplen las siguientes condiciones:

- *Realización física.* $h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0, \forall \tau_k < 0, k = 1, \dots, n$
- *Simetría.* $h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = h_k(\lambda_n, \dots, \lambda_1) = \dots$, esto es, el núcleo es el mismo cualquiera que sea el orden de sus argumentos.

Entonces, un sistema no lineal dado con memoria finita puede ser representado por la serie de Volterra (2.45), en la cual cada término puede ser asociado a su respectivo operador elemental H_k

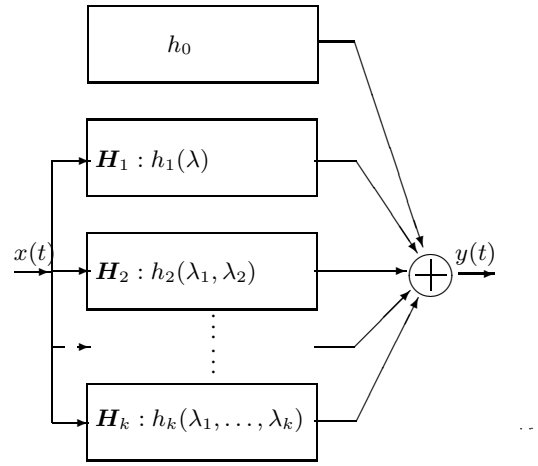


Figura 2.10. Representación por series de Volterra

(Figura 2.10),

$$y(t) = h_0 + \sum_{k>0} \mathbf{H}_k \{x(t)\} \quad (2.46)$$

donde $\mathbf{H}_k \{x(t)\} = \int \cdots \int h_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) x(\lambda_1) \cdots x(\lambda_k) d\lambda_1 \dots d\lambda_k$.

En el empleo de las series de Volterra para la representación de sistemas no lineales con memoria finita, se tienen por lo menos tres dificultades básicas [22]: Se puede o no representar un sistema dado en series de Volterra?, cómo determinar los núcleos?, y a partir de la descripción del sistema de ecuaciones diferenciales, cómo obtener la serie?.

La serie de Volterra es de la clase exponencial con memoria, así, si la excitación del sistema se cambia c veces, entonces de acuerdo con (2.46), la respectiva salida del sistema será,

$$y(t) = h_0 + \sum_{k>0} \mathbf{H}_k \{cx(t)\} = h_0 + \sum_{k>0} c^k \mathbf{H}_k \{x(t)\} \quad (2.47)$$

La memoria de la última serie es consecuencia de la definición en (2.46) de cada operador elemental en forma de convoluciones, por lo tanto, la representación (2.47) puede ser entendida como la *serie de Taylor con memoria*. En este sentido, las restricciones en la representación de sistemas no lineales mediante la serie de Volterra, corresponden también al problema de convergencia inherente a la serie de Taylor.

Ejemplo 2.9. Analizar la convergencia del sistema invariable en el tiempo con función de no linealidad dada por la expresión $y(t) = z(t) (1 + z^2(t))^{-1}$, representado en la Figura 2.11.

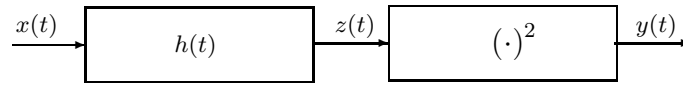


Figura 2.11. Sistema cuadrático simple

La descomposición de la función en análisis en la serie de Taylor tiene la forma

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z(t)^{2k+1} \quad (2.48)$$

Reemplazando por el núcleo básico de primer orden $z(t) = h(t) * x(t)$, se obtiene la respectiva serie de Volterra

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}_{2k+1} \{x(t)\} \quad (2.49)$$

donde los núcleos tienen la forma $h_{2k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}) = (-1)^k h(\lambda_1) \cdots h(\lambda_{2k+1})$.

Por cuanto la serie de Taylor (2.48), obtenida para el sistema cuadrático simple, converge sólo para valores de $z(t) < 1$, entonces la respectiva serie (2.49) converge en aquellos momentos del tiempo cuando $|z(t)| \geq 1$. Lo anterior implica, que en el ejemplo del sistema cuadrático simple, la serie de Volterra se puede emplear para señales de entrada, cuya salida $z(t)$ no exceda el valor de 1.

Cabe anotar que la convergencia de la serie de Taylor se exige en todo el dominio t de representación. Así por ejemplo, si en la Figura 2.11 en vez del elevador al cuadrado se tiene un limitador bilateral del tipo $y(t) = a \operatorname{sgn}(z(t))$, entonces para esta función con rompimiento en el punto $t = 0$, la serie de Taylor no existe en ese mismo punto, y por lo tanto, tampoco la representación en series de Volterra.

Sea la clase de excitaciones de un sistema en análisis, tal que converja la serie (2.45), y que además el sistema pueda ser representado por la serie truncada (2.47) hasta los primeros n términos:

$$y(t) \simeq h_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k \{x(t)\}$$

Si el número de términos n está dado, entonces aparece la tarea de identificación del sistema, que determine el núcleo de Volterra $h_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$, para lo cual se puede escoger como criterio de aproximación, el error cuadrático medio determinado en (1.21), cuya condición de minimización conlleva a un sistema de ecuaciones integrales para la determinación de los núcleos [22]. El sistema contiene términos de momentos estadísticos cruzados entre la entrada y la salida, cuyo cálculo se puede realizar prácticamente solo de manera experimental, más aun asumiendo la condición de invariabilidad de cambio de la estructura de aleatoriedad de los procesos; cálculo que se hace más difícil en la medida en que crece el número n de aproximación.

En la práctica, es frecuente asumir el conocimiento de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema, y para su solución se emplean diferentes formas del *método de aproximaciones sucesivas*, entre los cuales está el *método de iteraciones de Picard* [21].

Sea un sistema no lineal descrito por la ecuación diferencial de primer orden,

$$dy/dt + y = x(t) - f(y), \quad y(0) = 0, \quad (2.50)$$

siendo $f(y)$ alguna función de dependencia no lineal, que permite ser representada en la serie de Taylor, $f(y) = \sum_{k=1}^n a_k y^k$, donde $n \rightarrow \infty$. La suma de la serie se analiza a partir de $k > 1$, por cuanto se retiran los términos lineales de representación, que corresponden a $k = 0, 1$.

La ecuación lineal $dy/dt + y = x(t)$, obtenida de (2.50) para $f(0) = 0$, asumiendo condiciones iniciales cero, tiene solución,

$$y_1(t) = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad h(\tau) = e^{-\tau}$$

Al hallar la solución de la ecuación diferencial (2.50) en la forma,

$$y(t) = y_1(t) - \int_0^t f(t(\tau)) h(t-\tau) d\tau,$$

se puede reemplazar la expresión de función $f(y)$ por su respectiva representación en serie de Taylor,

por lo cual,

$$y(t) = y_1(t) - \sum_{k>1}^n a_k \int_0^t y^k(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

La anterior descomposición permite la representación de la solución $y(t)$ por la serie funcional de Volterra, $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) - \sum_{k>1}^n a_k \int_0^t y^k(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Empleando la relación recurrente conocida,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k \right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(n)}, \quad v_k^{(n)} = \sum_{r_k=1}^k \cdots \sum_{r_1=1}^{r_2} v_{r_1} v_{r_2-r_1+1} \cdots$$

se obtiene la solución en la forma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k>1}^{\infty} a_k \int_0^t y_i^{(k)}(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Si se considera el orden de los términos con respecto a la magnitud de la señal de entrada, en particular, cuando $y_i = o\{x^i\}$, $y_i^{(k)} = o\{x^{i+k-1}\}$, entonces en la anterior serie, igualando los términos de un mismo orden con relación a x , se obtiene en forma final,

$$y_i(t) = - \sum_{k=2}^i a_k \int_0^t y_i^{(k)}(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad i \geq 2$$

Problemas

Problema 2.6. Conformar las ecuaciones diferenciales de los circuitos representados en la Figura 2.12.

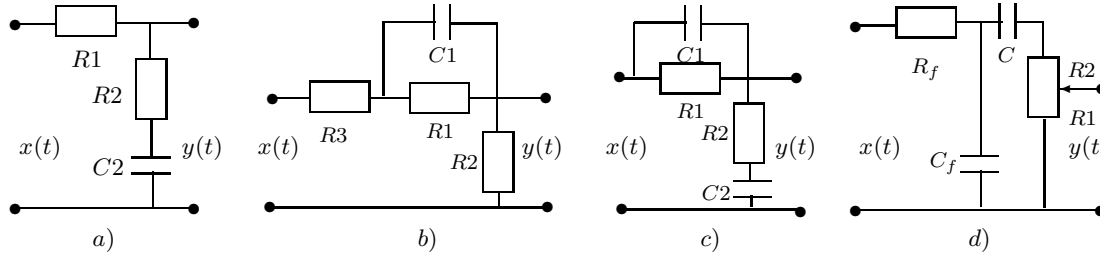


Figura 2.12. Circuitos de filtración

Problema 2.7. Determinar la respuesta a impulso para la siguiente función de entrada/salida dada

por $y(t) = \int_0^{\infty} e^{t-z} u(t-z) x(z) dz, \forall t \geq 0$.

R. $h(t) = \int_0^{\infty} e^{-(t-z)} u(t-z) \delta(z-\tau) dz = e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)$.

En este caso la respuesta como función de $t - \tau$, que de acuerdo a las definiciones (1.4) y (1.5), no depende de t y τ separadamente. Así, si el sistema es causal, entonces, la respuesta a impulso deberá ser $h(t - \tau) = 0, \forall t < \tau$, de otra manera se tendría respuesta a impulso actuando antes de la aparición de la función $\delta(t - \tau)$, lo que no corresponde a la realidad.

Problema 2.8. Hallar la respuesta al impulso para la función entrada/salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z t u(t-z) x(z) dz.$$

R. $h(t) = \tau t u(t - \tau)$.

Problema 2.9. Encontrar la respuesta a impulso del ejemplo (2.6) cuando a es constante, directamente resolviendo la ecuación con $x(t) = \delta(t)$.

Problema 2.10. Determinar la respuesta a impulso del circuito de retención mostrado en la parte derecha de la Figura 2.13.

R. $x(t) = \delta(t)$, se obtendrá, $y(t) = \delta(t) - \delta(t - t_0)$ resultando en:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\tau) - \delta(\tau - t_0)) d\tau = u(t) - u(t - t_0),$$

La respuesta a impulso del sistema analizado se muestra en la parte izquierda de la Figura 2.13.

Problema 2.11. Encontrar la respuesta a impulso $h(t)$ de la conexión en cascada de los siguientes sistemas: $z(t) = e^{-t} x(t) u(t)$, siendo

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\lambda)} z(\lambda) u(\lambda) d\lambda, t \geq 0.$$

Encontrar la respuesta a impulso del sistema obtenido intercambiando los sistemas s_1 y s_2 dados anteriormente.

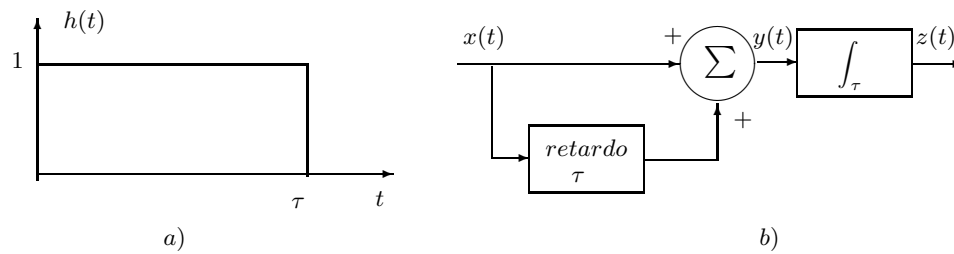


Figura 2.13. Circuito de retención

Problema 2.12. Determinar la respuesta a impulso y la respuesta al escalón unitario para cada uno de los circuitos descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 T \frac{dy}{dt} - y &= kx & y &= k \left(x + T \frac{dx}{dt} \right) \\
 y &= k \left(x + 2k_1 T \frac{dx}{dt} + T^2 \frac{d^2x}{dt^2} \right) & T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2k_1 T \frac{dy}{dt} + y &= kx \\
 T^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2k_1 T \frac{dy}{dt} + y &= kx & \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2y}{dt^2} + y &= kx
 \end{aligned}$$

Problema 2.13. Suponer que se intercambian la resistencia y el capacitor en el circuito RC de la Figura 2.6(a). Determinar la nueva función de transferencia y justificar por qué el sistema puede ser del tipo filtro pasaaltos.

Problema 2.14. Para los filtros RC pasabajos y pasaaltos mostrados anteriormente, calcular el voltaje de salida $y(t)$ correspondiente al voltaje de entrada $x(t) = |\sin 2\pi ft|$, $0 < t < 1$, asumiendo $RC = 1$.

Problema 2.15. El circuito descrito en la Figura 2.14(a) es considerado un sistema con corriente $i(t)$ como entrada y el voltaje $v(t)$ como salida. Encontrar:

- la relación de entrada/salida del sistema;
- probar las condiciones de linealidad y causalidad del sistema.

Problema 2.16. Hallar la función de transferencia y la respectiva respuesta a impulso del filtro RC de tercer orden mostrado en la Figura 2.15a). Asumiendo los nominales $R = 6.8 \text{ k}\Omega$ y $C = 0.2 \mu F$, calcular las frecuencias f_1 y f_2 [Hz] para las cuales el desfase introducido por el filtro es de $-\pi/2$ y $-\pi$ [rad], respectivamente.

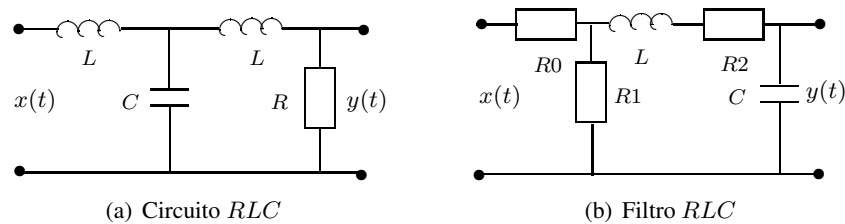


Figura 2.14.

Problema 2.17. Calcular la respuesta a impulso $h(t)$ del sistema lineal, con función de transferencia (H_0 y β son constantes),

$$H(\omega) = \begin{cases} H_0 \exp(-j\beta^2 \omega^2), & \omega \geq 0 \\ H_0 \exp(j\beta^2 \omega^2), & \omega < 0 \end{cases}$$

Problema 2.18. Hallar la función de transferencia y la respuesta a impulso del cuadripolo cruzado mostrado en la Figura 2.15b) con impedancias conocidas Z_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

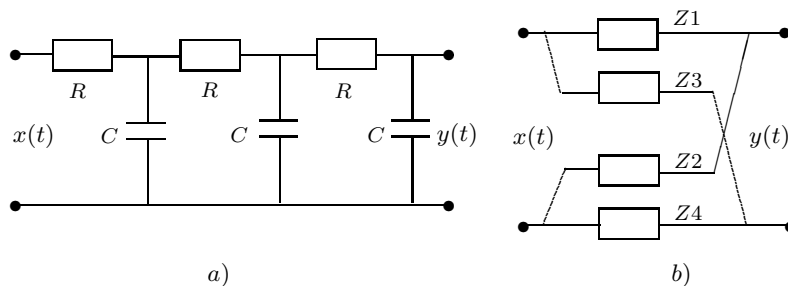


Figura 2.15.

Problema 2.19. La ecuación diferencial que relaciona la tensión de salida $y(t)$ con la de entrada $x(t)$ del sistema mostrado en la Figura 2.14(a) es

$$L^2 C \frac{d^3 y}{dt^3} + RLC \frac{d^2 y}{dt^2} + 2L \frac{dy}{dt} + Ry(t) = Rx(t)$$

- Encontrar la función de transferencia del sistema.
- Determinar la magnitud y el desplazamiento del sistema.
- Determinar $b)$ para $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Problema 2.20. Encontrar las ecuaciones diferenciales del filtro RLC de baja frecuencia representado en la Figura 2.14(b). Hallar la respectiva función de transferencia y respuesta a impulso.

Problema 2.21. Hallar la función de transferencia del sistema anterior si la función a la salida del circuito de retardo se resta de la original.

R. $|H(\omega)| = 2 \sin(\omega\tau/2)$, $\theta(\omega) = \arctan[(\sin \omega\tau) / (1 - \cos \omega\tau)]$.

Problema 2.22. Obtener la serie de salida $y(t)$ cuando en la entrada existe la señal

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sin t, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}, \quad x_2(t) = u(t)$$

Problema 2.23. Dada la respuesta a impulso $h(t) = \frac{1}{T} \exp(-\frac{t}{T})$ de un circuito lineal, hallar la respectiva salida $y(t)$, asumiendo $y(0_- = 0)$, cuando a la entrada se tiene la señal $x(t) = kt$, $k = \text{const.}$

Ejercicio en el CP 2.1. Simular la función de transferencia de los filtros RC en régimen de trabajo de integrador y diferenciador.

Ejercicio en el CP 2.2. Utilizando un mínimo de 50 puntos, calcule y dibuje la magnitud de la función de transferencia de un filtro transversal de cuatro derivaciones (con un retardo de T entre cada una de ellas) para la siguiente elección de pesos a_k del filtro:

- +1,-1,+1,-1
- 1,+1,+1,-1

Ejercicio en el CP 2.3. Simular la función de transferencia de los filtros RC (Figura 2.6(a)) en sus configuraciones de pasaaltos y pasabajos.

2.4. Representación matricial de sistemas

2.4.1. Sistemas lineales y variables de estado

A partir del método de ecuaciones diferenciales (2.14), que describe un sistema lineal con una entrada y una salida, en el numeral §2.3.1 se analiza la función de respuesta a impulso $h(t)$ como solución del sistema (2.38).

Sin embargo, el método de ecuaciones diferenciales puede emplearse directamente en la representación de los sistemas dinámicos lineales. En este segundo caso, se deben tener en cuenta los siguientes momentos:

- Las condiciones iniciales del sistema deben ser conocidas para determinar la respuesta del sistema en cualquier intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$, que deben estar en un número tal que describan completamente la influencia de la señal de entrada hasta el momento t_0 sobre la señal de salida después del momento t_0 .

El *estado del sistema* se define como la cantidad mínima de elementos de referencia sobre el sistema necesaria para la descripción completa de la señal de salida, mientras las mismas variables de referencia se denominan *variables de estado*. En la práctica, el estado del sistema se describe por un vector de orden finito y, por lo tanto, se habla de un *sistema dinámico con dimensión finita*.

- La solución de la ecuación diferencial puede ser obtenida sobre una base de operaciones básicas, compuesta por integradores, sumadores, dispositivos no lineales, amplificadores de ganancia variables etc. La conexión de estos dispositivos de operaciones básicas se considera el *modelo* del sistema dinámico.

La forma generalizada de la ecuación diferencial de orden m ,

$$\beta_0 u(t) = \alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \dots + \alpha_m \frac{d^m y}{dt^m}, \quad (2.51)$$

implica la selección de $y(t), \dots, d^{m-1}y/dt^{m-1}$ en calidad de variables de estado, y su solución se puede obtener empleando el procesador analógico equivalente representado en la Figura 2.16.

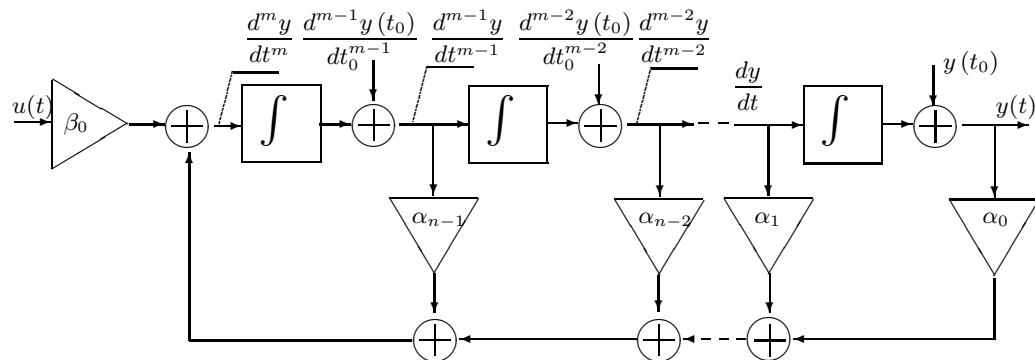


Figura 2.16. Modelo de un sistema lineal de orden m

Ejemplo 2.10. Sea el circuito RC representado en la Figura 2.7, en el cual las señales de salida $y(t)$ y entrada $u(t)$ están relacionadas por la ecuación diferencial

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t) \quad (2.52)$$

El cálculo de la señal de salida (voltaje) en el intervalo $t \geq t_0$, implica el conocimiento de la señal de entrada para $t \geq t_0$, además del voltaje inicial $y(t_0)$, presente en el condensador en el momento t_0 . De esta manera, en este caso es suficiente introducir solamente una sola variable de estado, que es la que corresponde al voltaje $y(t)$. Así mismo, la ecuación (2.52) corresponde a la ecuación de estado del circuito RC en análisis, en concordancia con la cual, se representa el respectivo modelo equivalente en la Figura 2.17.

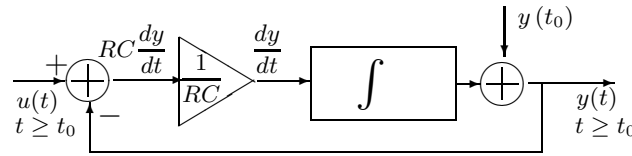


Figura 2.17. Modelo equivalente del circuito RC

Un sistema, dado por la ecuación (2.51) de orden m , puede ser descrito además por ecuaciones diferenciales de primer orden. Frecuentemente, tal sistema de ecuaciones diferenciales, que es denominado *ecuación vectorial diferencial de primer orden*, es más fácil de analizar que la ecuación inicial de orden m . Así por ejemplo, en vez de la ecuación (2.51) se puede analizar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \\ &\dots \dots \\ x_n(t) &= \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} = \frac{dx_{m-1}}{dt} \end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que

$$\frac{du^m}{dt} = \frac{d^m y}{dt^m} = \beta_0 x(t) - \sum_{k=1}^m \alpha_{k-1} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} = \beta_0 u(t) - \sum_{k=1}^m \alpha_{k-1} x_k(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.53)$$

Si introduce la función vectorial columna $\mathbf{x}(t) \in \{x_k : k = 1, \dots, m\}$, $t \geq t_0$, entonces en vez de la ecuación (2.51) de orden m , se analiza la siguiente ecuación equivalente de primer orden y con dimensión m ,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.54)$$

donde las matrices $\mathbf{A}_{m \times m}$ y $\mathbf{B}_{m \times 1}$ tienen la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & -\alpha_{m-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

cuya solución requiere el vector de condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0)$. El vector $\mathbf{x}(t)$ se denomina *vector de estado del sistema* y la ecuación (2.55) corresponde a la *ecuación de estado del sistema*. La señal de salida $y(t)$ del sistema lineal en análisis se determina por medio del vector de estado en la forma,

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.56)$$

donde la matriz $\mathbf{C}_{1 \times m}$ se define como,

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

La generalización de ecuación diferencial (2.51), para los sistemas lineales, corresponde a la ecuación (2.38) e incluye la diferenciación de la señal $x(t)$, la cual debe evitarse en el análisis de sistemas estocásticos reales, entre otras razones porque es frecuente en calidad de señal de entrada tomar el ruido blanco, cuyas derivadas en el tiempo no existen.

En este sentido, se puede representar de forma alterna la ecuación (2.38),

$$\frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} - \beta_{m-1} \frac{du}{dt^{m-1}} + \cdots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} - \beta_1 \frac{du}{dt} = \beta_0 u(t) - \alpha_0 y(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.57)$$

La integración de ambas partes de la igualdad (2.57), con condiciones iniciales cero, da como resultado,

$$\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \alpha_{m-1} \frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} - \beta_{m-2} \frac{d^{m-2} u}{dt^{m-2}} + \cdots + \alpha_1 y(t) - \beta_1 u(t) = x_m(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.58)$$

donde

$$x_m(t) = \int_{t_0}^t (-\alpha_0 y(\tau) + \beta_0 u(\tau)) d\tau \quad (2.59)$$

De la misma manera, la ecuación (2.58) se puede escribir en la forma

$$\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \alpha_{m-1} \frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} - \beta_{m-1} \frac{d^{m-2} u}{dt^{m-2}} + \cdots + \alpha_2 \frac{dy}{dt} - \beta_2 \frac{du}{dt} = x_m(t) - \alpha_1 y(t) - \beta_1 u(t), \quad t \geq t_0$$

cuya integración conlleva a la ecuación,

$$\frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} + \alpha_{m-1} \frac{d^{m-3} y}{dt^{m-3}} - \beta_{m-1} \frac{d^{m-3} u}{dt^{m-3}} + \cdots + \alpha_2 y(t) - \beta_1 u(t) = x_{m-1}(t), \quad t \geq t_0$$

donde

$$x_{m-1}(t) = \int_{t_0}^t (x_m(\tau) - \alpha_1 y(\tau) + \beta_1 u(\tau)) d\tau \quad (2.60)$$

La sucesión descrita de operaciones se puede repetir m veces, y como resultado en el último paso se tiene,

$$y(t) = x_1(t), \quad x_1(t) = \int_{t_0}^t (x_2(\tau) - \alpha_{m-1} y(\tau) + \beta_{m-1} u(\tau)) d\tau \quad (2.61)$$

El modelo del procesador analógico, que puede realizar estas transformaciones, se muestra en la Figura (2.18).

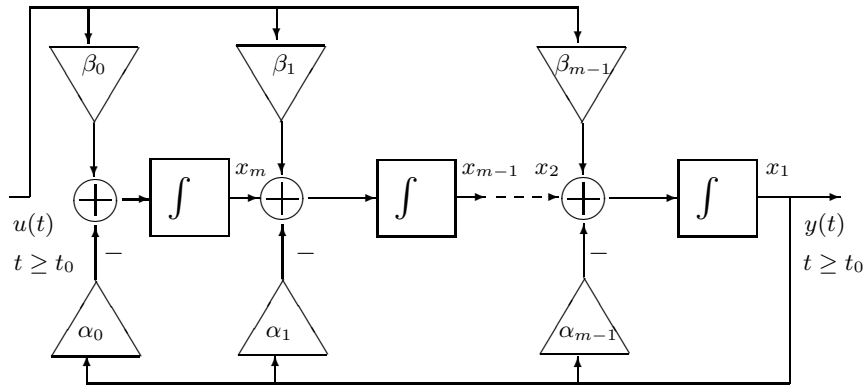


Figura 2.18. Modelo de un sistema de dimensión múltiple.

La señal de salida $y(t)$, $t \geq t_0$, se determina si además de tener la señal de entrada $u(t)$, para $t \geq t_0$, se fijan las condiciones iniciales $x_k(t_0)$, $k = 1, \dots, m$ de las correspondientes salidas de los integradores. Por lo tanto, estas señales se pueden seleccionar en calidad de variables de estado del sistema dinámico descrito por la ecuación (2.38). En correspondencia con las expresiones (2.59), (2.60) y (2.61), las respectivas ecuaciones para estas variables de estado tienen la forma,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dx_1}{dt} + \alpha_{m-1}y(t) - \beta_{m-1}u(t) \\ &\dots \dots \\ x_m(t) &= \frac{dx_{m-1}}{dt} + \alpha_1(t) - \beta_1 u(t) \\ \frac{dx_m}{dt} &= -\alpha_0 y(t) + \beta_0 u(t) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de estado obtenidas para el sistema (2.38), al ser representadas mediante la ecuación equivalente de primer orden (2.53), implica el cálculo de nuevo de las correspondientes

matrices en (2.55). En particular, se obtiene,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_{m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{m-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{m-1} \\ \beta_{m-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

La representación para la señal de salida sigue siendo la misma que se presenta en (2.56). La ilustración del modelo de sistema de dimensión múltiple mostrada en la Figura 2.18 puede ser simplificada, empleando dispositivos matriciales con varias entradas y salidas, como se observa en la Figura 2.19.

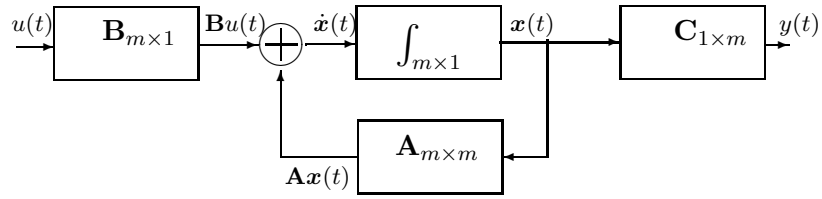


Figura 2.19. Modelo matricial de un sistema lineal con dimensión m

Las ecuaciones (2.54) y (2.56) se pueden emplear para la representación de sistemas con parámetros variables en el tiempo descritos en forma generalizada por la expresión (2.14). Sin embargo, en este caso las matrices (2.55) serán dependientes del tiempo, por lo cual la descripción del modelo se hace en la forma

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.62)$$

para $t \geq t_0$ y un vector dado de condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0)$.

Ejemplo 2.11. Sea el par de sistemas unidos, como se muestra en la Figura 2.20a), descritos por el modelo

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i(t) u_i(t) \\ y_i(t) = \mathbf{C}_i(t) \mathbf{x}_i(t), \quad \forall t \geq t_0; i \in \{1, 2\}, \end{cases}$$

donde $\mathbf{x}_{i_{r_i \times 1}}(t)$, $r_i \in \{m, n\}$. Hallar los parámetros del modelo conjunto (Figura 2.20b)).

La ecuación vectorial única del sistema conjunto tiene la misma estructura que (2.62) con los siguientes vectores únicos de estado y de las señales de entrada y salida, respectivamente,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$$

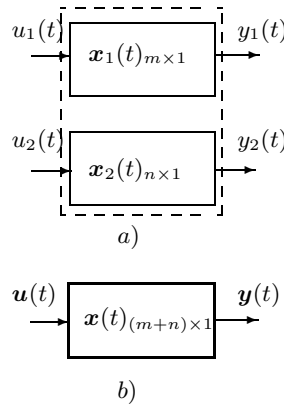


Figura 2.20. Ejemplo de sistemas conjuntos

con la correspondiente estructura de matriz de parámetros,

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}, \quad \mathbf{P}_i \in \{\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i\}, \quad i \in \{1, 2\}$$

2.4.2. Solución de la ecuación de estado

El sistema diferencial de estado (2.62) tiene solución dependiendo de la clase de ecuación que se analice. En particular, se pueden considerar los siguientes casos:

Ecuación homogénea con coeficientes constantes. En vez del modelo (2.54), se considera la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.63)$$

con condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0)$, $t \geq t_0$. Cuando $\mathbf{x}(t)$ se considera como una función escalar $x(t)$, para (2.63) se tiene la solución en la forma,

$$x(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) \quad (2.64)$$

La misma estructura de solución (2.64) se considera para el caso vectorial,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)$$

donde

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$$

Además, si la matriz \mathbf{A} es de orden $n \times n$, entonces cualquier polinomio o serie convergente de \mathbf{A} , puede ser descrita en forma de combinación lineal de los términos $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^n$.

Sea la notación de la función matricial $\Phi(t - t_0) \triangleq e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, denominada *matriz de transición de*

estado, y de la cual se necesitan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \Phi(t_0 - t_0) &= \mathbf{I} \\ \frac{d}{dt}\Phi(t - t_0) &= \mathbf{A}(t) \Phi(t - t_0) \\ \frac{d}{dt}\Phi^\top(t, t_0) &= -\mathbf{A}^\top(t_0) \Phi(t, t_0) \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial homogénea tiene forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

Ecuación homogénea con coeficientes variables. Cuando las respectivas matrices son variables del tiempo de acuerdo al modelo (2.62). En este caso, se introduce la matriz de transición de estado como función de dos variables, $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t, t_0)}$, la cual cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

con las siguientes propiedades adicionales, para $t_0 < t_1 < t_2$,

$$\begin{cases} \Phi(t_2, t_0) &= \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0), \\ \Phi^{-1}(t_1, t_0) &= \Phi(t_0, t_1) \end{cases}$$

En realidad, una expresión compacta para $\Phi(t, t_0)$ es difícil de obtener. Sin embargo, en la práctica, es más importante saber que ésta expresión existe y que posee ciertas propiedades. Si es necesario hallar la matriz de transición de estado, se recurre a métodos numéricos.

En general, la solución del caso homogéneo con parámetros variables se puede representar en la forma,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0), \quad t \geq t_0$$

Ecuación no homogénea con coeficientes variables. La solución general de (2.54) tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.65)$$

donde la matriz de transición de estado $\Phi(t, t_0)$ cumple las condiciones [23]:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_0) &= \mathbf{I}, \quad (\Phi(t, \tau))^{-1} = \Phi(\tau, t), \\ \frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) &= \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \\ \frac{d}{dt}\Phi^\top(t, \tau) &= -\mathbf{A}^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) \\ \Phi(t, \tau) \Phi(\tau, \theta) &= \Phi(t, \theta) \end{aligned}$$

La solución (2.65) contiene dos componentes: la primera, que corresponde a las oscilaciones libres,

y la segunda, que corresponde a las oscilaciones forzadas. Por cierto, para que el sistema se mantenga estable, el primer término debe atenuarse en el tiempo, de tal manera que el vector de estado se determine, más bien, por la componente forzada, la cual puede ser obtenida como solución del mismo modelo (2.54), pero con condiciones iniciales nulas.

Los sistemas lineales con múltiples entradas y salidas que presenten parámetros variables, a partir de (2.10), pueden ser descritos por la matriz cuadrada de la respuesta impulso $\mathbf{h}(t, \tau)$ en la forma,

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.66)$$

En muchos casos reales, cuando $t_0 \rightarrow -\infty$, en (2.65) se puede despreciar el primer término, con lo cual de (2.54) y (2.65) se obtiene,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.67)$$

Así mismo, de las expresiones (2.66) y (2.67) se deduce que,

$$\mathbf{h}(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau), & \tau \leq t \\ \mathbf{0}, & \tau > t \end{cases} \quad (2.68)$$

Se debe tener en cuenta que las tres matrices, que hacen parte de la definición de la respuesta a impulso en (2.68), dependen del método elegido de disposición del vector de estado del sistema considerado en cada caso concreto, y por lo tanto, para un mismo sistema estas pueden ser diferentes. Sin embargo, la respuesta a impulso matricial $\mathbf{h}(t, \tau)$ para un sistema dado es única.

Relacionados con los sistemas dinámicos se tienen los tres siguientes conceptos:

1. *Controlabilidad.* El vector único de control \mathbf{u} existe sólo y únicamente cuando se cumple,

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} : \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} : \dots : \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) = n$$

2. *Observabilidad.* La única solución $\mathbf{x}(0)$ existe solo y únicamente cuando se cumple,

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : \dots : \mathbf{A}^{T(n-1)} \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \right) = n$$

3. *Identificabilidad.* La única solución \mathbf{A} existe sólo y únicamente cuando se cumple,

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) : \mathbf{A} \mathbf{x}(0) : \dots : \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0) \end{bmatrix} \right) = n$$

En general, existe una transformación lineal de las coordenadas de estado, en la forma $\mathbf{z} = \mathbf{F} \mathbf{x}$, tal

que del sistema conformado por las ecuaciones (2.54) y (2.56) se obtiene el modelo,

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{\mathbf{A}}z + \mathbf{B}u \\ y = \hat{\mathbf{C}}^T x \end{cases}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{F}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

En concordancia con los valores de las matrices en (2.69), el modelo (2.54) se puede reemplazar por la ecuación diferencial escalar del tipo,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n u, \quad b_i = \sum_{k=0}^{i-1} a_{i-k} \hat{g}_k + \hat{g}_i \quad (2.70)$$

En los sistemas lineales, cuando las matrices $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ muestran dependencia del tiempo, se puede encontrar la correspondiente representación en forma de ecuación diferencial (2.70), con los siguientes coeficientes:

$$b_i(t) = \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-k} C_{n+l-1}^{n-1} a_{i-k-l} \frac{d}{dt^l} \hat{g}_k(t) + \hat{g}_i(t)$$

La representación del sistema por las expresiones (2.69) y (2.70), frecuentemente es más cómoda para su análisis en procesadores digitales.

Problemas

Problema 2.24. Hallar el modelo equivalente de los circuitos mostrados en la Figura 2.12.

Problema 2.25. Hallar la matriz de transición de estados de los circuitos mostrados en la Figura 2.12.

Problema 2.26. Clasificar los sistemas en categorías de: linealidad, variante en el tiempo, causalidad y sin memoria en las siguientes funciones de entrada-salida:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= tx(t), 0 \leq t \leq 1. & y(t) &= \int_0^t x(\tau) d\tau, t \geq 0. \\
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} tx(t) dt, -\infty < t < \infty. & y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} \tau x(\tau) d\tau, |t| < \infty. \\
 y(t) &= x(t) + \int_0^t (t-\tau) x(\tau) d\tau, t \geq 0. & y(t) &= \frac{dx}{dt} - \int_t^{\infty} \tau^2 x(\tau) d\tau, t > 0.
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Representación de señales y sistemas en tiempo discreto

La reconstrucción completa de cualquier función continua $x_c(t)$, dada sobre un intervalo de análisis de tiempo T_a , puede realizarse cuando se dispone de un conjunto o malla de sus valores instantáneos, determinados sobre un intervalo de análisis, de tal manera que la distancia entre los mismos sea suficientemente pequeña.

3.1. Discretización de señales en tiempo continuo

3.1.1. Discretización uniforme

El empleo de sistemas discretos en aplicaciones, en las cuales las señales son de naturaleza continua (en su estado original de registro), supone la previa adaptación de las últimas, esto es, la *discretización* de las señales continuas. El modelo convencional, para el procedimiento ideal de discretización o muestreo, está dado por la multiplicación de una señal continua $x_c(t)$ con la señal periódica de discretización $x_d(t)$, a fin de obtener la señal discretizada $x(k\Delta t)$:

$$x(t) = x_c(t)x_d(t) = \sum_k x_c(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \quad (3.1)$$

donde $x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$, siendo Δt el período de discretización. A partir de la expresión (3.1) se observa que la señal discretizada $x(k\Delta t)$ se define solamente en los momentos equidistantes de tiempo $t = k\Delta t$, luego, parte de la información de la señal original $x_c(t)$ podría considerarse como perdida durante su discretización.

Teorema 3.1. [Discretización de Kotelnikov] Sea una señal continua $x_c(t)$, para la cual no se encuentran componentes espectrales de frecuencia mayores a $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}[\text{rad/s}]$, donde f_{\max} es el máximo valor de frecuencia para la cual $X(\omega) \neq 0$, entonces, toda la información de la señal continua estará enteramente contenida en la malla de valores $x_c(n\Delta t)$, asegurando que se cumpla la desigualdad:

$$\Delta t < 1/2f_{\max} \quad (3.2)$$

El teorema 3.1 permite representar la señal continua $x_c(t)$ en forma de la siguiente serie:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)} \quad (3.3)$$

Al comparar la serie (3.3) con la representación (1.27), se observa que las respectivas funciones base de descomposición serán las siguientes:

$$\phi_k(t) = \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)} \quad (3.4)$$

La descomposición (3.3), o *serie de Kotelnikov*, permite el restablecimiento de la función $x_c(t)$, en cualquier momento del tiempo t . En particular, para los momentos $t = k\Delta t$, se obtiene:

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} X(\omega) e^{jk\Delta t\omega} d\omega$$

Por cuanto la integral anterior es igual a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} X(\omega) e^{jk\Delta t\omega} d\omega = \frac{\omega_{\max}}{\pi} \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)}$$

entonces, el valor buscado de la función en el punto $t = k\Delta t$ será:

$$x_c(k\Delta t) = \frac{\omega_{\max}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)} dt \quad (3.5)$$

La comparación de los valores obtenidos en (3.5) con los valores definidos en (1.31), muestra que son los mismos coeficientes de la serie de Fourier, asumiendo que se cumple la relación de tiempos, $t_f - t_i = T_a = \omega_{\max}/\pi$, y por lo tanto, determinan la función $x_c(t)$. Sin embargo, el restablecimiento de la función inicial $x_c(t)$ exige realizar la suma de la serie (3.3), en forma general, sobre una cantidad infinita de sumandos, lo cual prácticamente es imposible. De otra manera, el empleo del teorema de discretización conlleva inevitablemente a errores de representación.

Sea la descomposición infinita (3.3) aproximada por la siguiente serie truncada:

$$\hat{x}_c(t) \approx \sum_{k=-N/2}^{N/2} x_c(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)} \quad (3.6)$$

donde \hat{x} corresponde a la versión aproximada de la señal continua original, determinada a partir de N valores de discretización, tales que

$$N = \frac{T_a}{\Delta t} + 1 = 2f_{\max}T_a + 1 \approx 2f_{\max}T_a \quad (3.7)$$

Se observa que el error de representación en la serie (3.6) es mayor en la medida en que menor sea la cantidad N de sus sumandos, y viceversa. Por cuanto, la función $\text{sinc}(\cdot) = 0$ en todos los valores $m\Delta t$, excepto en $k = m$, entonces los valores de \hat{x} y $x_c(t)$ coincidirán en los puntos $k\Delta t$. Por el contrario, en la mitad de los intervalos se observará la influencia de la mayor cantidad de elementos de la serie truncada, por lo que el error de representación será el mayor.

Otra fuente de distorsión, durante la discretización de señales está relacionada con el hecho de que las señales se definan sobre intervalos finitos de tiempo, por lo que su ancho de banda será infinito, haciendo imposible tomar un valor aceptable en (3.2). Sin embargo, las propiedades de los espectros reales son tales, que sobre un ancho de banda finito se concentra la mayoría significativa de su energía, por lo cual, las componentes espectrales que estén por fuera de este ancho de banda considerado se pueden despreciar.

El análisis detallado de las funciones base (3.4) muestra que su FDE es igual a:

$$\mathcal{F}\{\phi_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_{\max}(t - k\Delta t)}{\omega_{\max}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_{\max}} e^{-jk\omega\Delta t}, & \omega \leq \omega_{\max} \\ 0, & \omega > \omega_{\max} \end{cases}$$

cuya magnitud es constante, $|F\{\phi_k(t)\}| = \pi/\omega_{\max}, \forall \omega \in [0, \omega_{\max}]$.

Al aumentar el valor del ancho de banda de la señal continua, tal que $\omega_{\max} \rightarrow \infty$, y por lo tanto, $\Delta t = \pi/\omega_{\max} \rightarrow 0$, por lo que se puede afirmar que al discretizar una señal con espectro uniforme y ancho de banda infinito se obtiene la función delta definida en (1.7). De esta manera, el caso de análisis corresponde al integral de Duhamel (1.10), cuya aproximación (1.11) tiene como valores de descomposición los pulsos rectangulares de la forma

$$\phi_k(t) = \phi_k(t - k\Delta t) = \begin{cases} 1/\Delta t, & k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t \\ 0, & k\Delta t > t, t > (k+1)\Delta t \end{cases}$$

De acuerdo con la siguiente expresión:

$$X(\pi/\Delta t) = \int_0^{T_a} x(t) e^{j2\pi n/\Delta t} dt = \Delta t x_n,$$

teniendo los valores discretizados de la función $X(f)$ en los puntos, distanciados a intervalos $1/\Delta t$ en el dominio de la frecuencia $[-f_{\max}, f_{\max}]$, se puede encontrar el número de valores discretos necesario para la descripción de la función $x(t)$:

$$N = \frac{2f_{\max}}{1/T_a} = 2f_{\max}T_a,$$

que corresponde al mismo número obtenido en (3.7), para el caso de discretización en el tiempo.

Las señales discretas son únicamente definidas para valores discretos del tiempo y, si explícitamente no se ha dicho lo contrario, estas pueden asumir cualquier valor, o sea, no todas las veces son digitales.

Los valores sucesivos son separados por la distancia del intervalo de discretización Δt , que para algunos efectos se tomará igual a 1, esto es,

$$x_c(n\Delta t) = x_d[n]$$

3.1.2. Funciones discretas singulares

Pulso unitario discreto. Esta función, que cumple el mismo papel en los sistemas discretos que la función delta (1.7) para los sistemas continuos, se define como (Figura 3.1a)):

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (3.8)$$

Por analogía al caso de representación (2.33), por medio de la función delta para los sistemas continuos, en los sistemas discretos se puede representar una señal por medio de la función de pulso discreto unitario (3.8):

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[n - i] \quad (3.9)$$

Escalón unitaria discreta. En el caso discreto, el escalón se determina como (Figura 3.1b)):

$$u[n - k] = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geq k \end{cases} \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta (3.9) se obtiene

$$u[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \delta[n - i]$$

por lo tanto, el escalón (3.10) está relacionado con el pulso unitario discreto mediante la relación,

$$u[n] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[n - i]$$

Seno y coseno discreto. Definidas como:

$$x_s[n] = a \sin(n\Omega + \varphi) = a \sin\left(\frac{2\pi n}{p}\right) \quad (3.11a)$$

$$x_c[n] = a \cos(n\Omega + \varphi) = a \cos\left(\frac{2\pi n}{p}\right) \quad (3.11b)$$

donde a es la amplitud, Ω es la fase relativa, $\omega = \Omega/T$ es la frecuencia absoluta, φ la fase y T el período de discretización de la señal. Si $p > 0$ corresponde al número racional p_1/p_2 , entonces $x_s[n]$, $x_c[n]$ son funciones periódicas y se repetirán cada p_1 valores discretos, esto es, $x[n + mp_1] = x[n]$. Si por el contrario p_1 es irracional, entonces estas funciones discretas no serán periódicas.

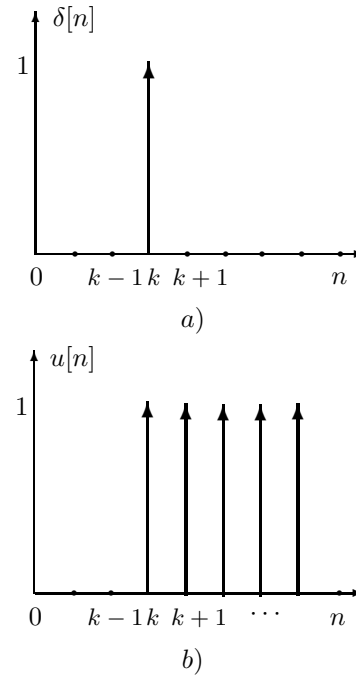


Figura 3.1. Funciones singulares

3.1.3. Transformada de Fourier de una señal discreta

En forma general, una señal discreta $x[nT]$ se representa mediante el par de TF (1.60) de la forma:

$$x[nT] = \mathcal{F}^{-1} \{X(e^{j\omega T})\} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega, \quad (3.12a)$$

$$X(e^{j\omega T}) = \mathcal{F} \{x[kT]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] e^{-jk\omega T}, \quad (3.12b)$$

donde la variable ω en el argumento de $X(\cdot)$ o espectro discreto se ha cambiado por $e^{j\omega T}$ para dar énfasis al hecho de que el espectro discreto es periódico con período $2\pi/T$.

Esta es tal vez una de las más importantes diferencias entre la TF de una señal continua y la de una señal discreta. De hecho, la ecuación (3.12b) corresponde a la representación en serie de Fourier de la señal continua periódica $X(e^{j\omega T})$, mientras la expresión (3.12a) corresponde a los valores de la sucesión $x[nT]$, dada en el integral (1.30), que se calcula mediante la serie de Fourier de la función periódica $X(e^{j\omega T})$.

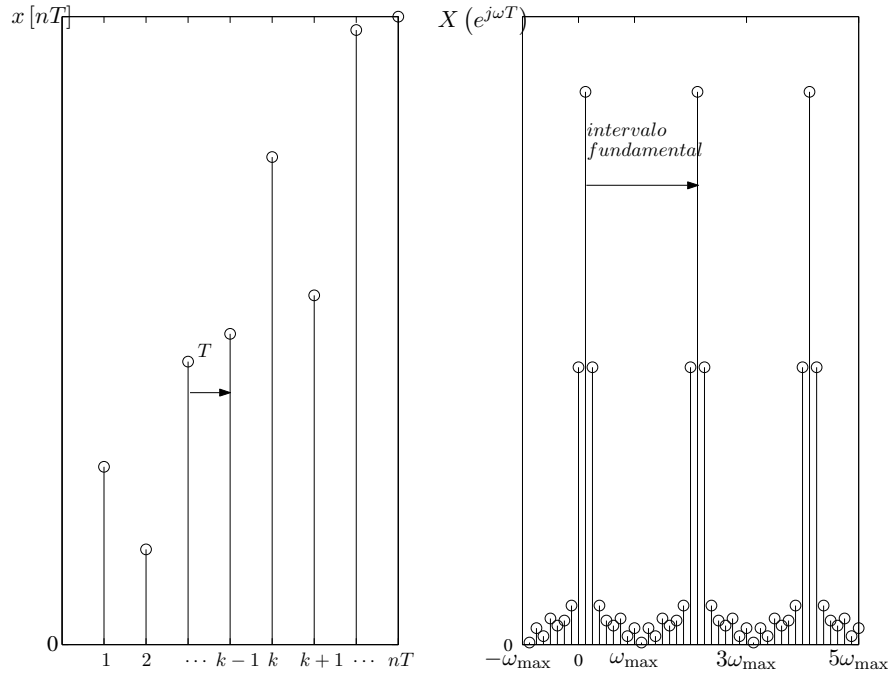


Figura 3.2. Intervalo fundamental

En (1.28), la señal descrita se representa mediante la superposición varios armónicos exponenciales $\{e^{jn\Omega}\}$. Una exponencial con frecuencia $\omega + 2\pi m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ transcurre exactamente a través de los mismos tiempos de muestreo que la función exponencial con frecuencia ω , $e^{jn\Omega} = e^{j(\Omega+2\pi m)n}$. Por esta razón, la transformada directa de Fourier de una señal discreta tiene que ser otra función periódica de la frecuencia. Así, la representación del espectro discreto se debe realizar en un solo intervalo definido con el ancho $\Delta\omega = 2\pi/T$. Debido a la simetría de los espectros, este intervalo,

generalmente se toma $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ y se denomina *intervalo fundamental* como se ilustra en la Figura 3.2.

En la representación de procesos discretos es frecuente el empleo de la *frecuencia relativa*, $\Omega = \omega T$, entonces, el par de transformadas, (3.12a) y (3.12b), toman la forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}, \quad (3.13a)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{jn\Omega} d\Omega, \quad (3.13b)$$

Ejemplo 3.1. Hallar la transformada de Fourier directa de un pulso rectangular discreto, definido como:

$$p[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N/2 \\ 0, & |n| > N/2 \end{cases}$$

Aplicando (3.13a) se obtiene:

$$P(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n]e^{jn\Omega} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{jn\Omega} = \frac{\sin[(n+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)},$$

La última suma puede ser evaluada con ayuda de la expresión

$$\sum_{n=M}^N a^n = \frac{a^M - a^{N+1}}{1 - a}$$

La función $P(e^{j\Omega})$ es llamada el *núcleo de Dirichlet* [15].

La TF (3.13a) exige la convergencia de la sumatoria infinita dada en (3.13b),

$$\begin{aligned} |X(e^{j\Omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-jn\Omega}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \end{aligned}$$

Si la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$ es finita, entonces $|X(e^{j\Omega})|$ también será finito. Así por ejemplo, en el caso concreto de $x[n] = a^n u[n]$, cuya TF se calcula como:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\Omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-jn\Omega} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n |e^{-jn\Omega}|^n \\ &= \frac{1}{1 - |a|} \end{aligned}$$

La anterior serie converge, siempre que se cumpla que $|a| < 1$.

Al utilizar el par de expresiones (3.13a) y (3.13b), es importante tener en cuenta la forma en que las propiedades de la señal discreta se manifiestan en su TF y viceversa. Las siguientes son algunas de esas propiedades:

(a). *Linealidad*: Sea $\mathcal{F}\{\alpha_i x_i[n]\} = \alpha_i X_i(e^{j\Omega})$, donde $\alpha_i = cte$, entonces

$$\mathcal{F}\left\{\sum \alpha_k x_k[n]\right\} = \sum \alpha_k X_k(e^{j\Omega}) \quad (3.14)$$

(b). *Desplazamiento en el tiempo*:

$$\mathcal{F}\{x[n-k]\} = e^{jk\Omega} X(e^{j\Omega}) \quad (3.15)$$

(c). *Desplazamiento en la frecuencia*:

$$\mathcal{F}\{x[n]e^{jn\Omega_0}\} = X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

(d). *Convolución en el tiempo*:

$$\mathcal{F}\{x_k[n] * x_l[n]\} = X_k(e^{j\Omega})X_l(e^{j\Omega}),$$

donde la convolución de dos sucesiones discretas se definirá como:

$$x_k[n] * x_l[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_k[i]x_l[n-i]$$

(e). *Convolución en la frecuencia*:

$$\mathcal{F}\{x_k[n]x_l[n]\} = \frac{1}{2\pi}X_k(e^{j\Omega}) * X_l(e^{j\Omega}),$$

$$\text{donde } X_k(e^{j\Omega}) * X_l(e^{j\Omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} X_k(e^{jv}) X_l(e^{j(\Omega-v)}) dv.$$

Problemas

Problema 3.1. La señal analógica $x(t)$ tiene espectro con frecuencia máxima $f_{\max} = 7.5 \text{ MHz}$, la cual para su proceso es registrada en un intervalo de $T = 60 \mu s$, mediante un dispositivo que discretiza la señal con un intervalo de muestreo en 4 veces menor que el establecido por la relación (3.2). La resolución de entrada del dispositivo de muestreo es configurable para los valores 8, 12 y 16 *bits* por muestra. Hallar el valor requerido de memoria en cada caso de resolución para la grabación del intervalo de señal.

Problema 3.2. Sea la señal de video $x(t) = x_0 \exp(-\alpha t) u(t)$. Seleccionar el valor del intervalo de muestreo Δ , de tal manera que la magnitud de la densidad espectral en la frecuencia límite ω_{\max} se disminuye hasta el valor de $0.01X(0)$.

Problema 3.3. Dada la señal del problema anterior, estimar el valor $X_+(0)$, correspondiente al aporte en la componente espectral cero debido a las réplicas cercanas del espectro original de la señal, que se tienen en las frecuencias $\pm 2\pi/\Delta$.

Ejercicio en el CP 3.1. [Matlab] Las funciones discretas de pulso unitario, escalón unitario y función rectangular ubicadas en la M posición de una arreglo de longitud $N > M$, respectivamente se generan de la siguiente manera:

```
N=50; M=15; % Escala de tiempo
% pulso unitario discreto
delta=[zeros(1,M-1),1,zeros(1,N-M)];
subplot(311),stem(delta)
% Funcion escalon unitario
u=[zeros(1,M-1),ones(1,N-M+1)];
subplot(312),stem(u)
% Funcion rectangular
rect=[zeros(1,M-1),ones(1,M),zeros(1,N-2*M+1)];
subplot(313),stem(rect)
```

Ejercicio en el CP 3.2. [Matlab] Representar la función discreta de pulso con diferentes formas de onda dadas por la expresión:

$$x(t) = \sum_k \phi(t - \tau_k)$$

```
% Funcion discreta de tren de pulsos de diferentes formas
t = 0 : 1/50E3 : 10E-3; % base de tiempo
tau = [0 : 1/1E3 : 10E-3 ; 0.75.^(0:10)]';
% form - forma de pulsos: 'gauspuls','rectpuls','tripuls'
form='gauspuls'; x = pulstran(t,tau,form,5E3,.5);
% Salida gráfica
plot(t,x)
```

Ejercicio en el CP 3.3. [Matlab]. Sea una señal seno $x(t)$ dada en el intervalo de tiempo $[0, 1]$. Hallar su representación discretizada a una velocidad de muestreo 0.01.

```
% Representacion continua y discretizada del Seno
t=0:.01:1; % base de tiempo
a=1; arm=2; phi=pi/8, % a - Amplitud, arm - armonico, phi - desfase
omega=2*pi*arm; % frecuencia angular
x=sin(omega*t+phi);
subplot(211),plot(t,x), % Representacion continua (interpolada)
subplot(212),stem(t,x), % Representacion discretizada
```


3.2. Transformadas ortogonales discretas

La implementación de cualquier forma de representación integral de señales, por ejemplo, la TF (3.12b), mediante sistemas reales de proceso digital para una señal discreta dada $x[n]$, se encuentra con dificultades insuperables. El problema básico es la necesidad de disponer dispositivos de almacenamiento con memoria infinita para poder guardar, tanto la infinita cantidad de valores de la serie de entrada $x[n]$, como el conjunto de valores del continuo de la respectiva representación espectral.

Empleando el modelo de las respectivas bases continuas para la representación generalizada de Fourier, dado en (1.52), y a efectos de realización práctica, se asume que el conjunto de transformadas ortogonales discretas se define estrictamente para sucesiones discretas $\{x[n] : n = 0, 1, \dots, N\}$ con longitud finita $N < \infty$, o bien sobre sucesiones periódicas con período N , de la siguiente forma:

$$x[k] = \frac{1}{P_k N} \sum_{n=0}^{N-1} v[n] \phi_k^*[n], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.16a)$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \phi_n[k], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.16b)$$

siendo P_k la potencia media de la base ϕ_k , definida en (1.41). El par de expresiones (3.16a) y (3.16b) es preferible representarlo en forma matricial:

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = \frac{1}{P_k N} \mathbf{\Phi}_{N \times N} \mathbf{v}_{N \times 1} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{v}_{N \times 1} = \mathbf{\Phi}_{N \times N}^H \mathbf{x}_{N \times 1} \quad (3.17b)$$

donde $\mathbf{a}_{n \times k}$ corresponde a la matriz con dimensión $n \times k$ y \mathbf{A}^H es la Hermitiana de la matriz \mathbf{A} , que corresponde a la transpuesta conjugada.

Entre los diferentes conjuntos ortogonales analizados en la sección §1.2.4, en el proceso digital de señales moderno encuentran aplicación las transformadas discretas de Fourier con sus respectivos casos particulares de la T. Hartley y la T. discreta de cosenos, la de Walsh y Haar, entre otras.

3.2.1. Transformada discreta de Fourier

En este caso, en calidad de sistema base se emplea la base ortogonal exponencial definida en (1.28) en su forma discreta:

$$\phi_k(n) = e^{jkn2\pi/N} \triangleq W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

El término $W_N = e^{j2\pi/N}$ se denomina *factor de pivote* y cumple la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} W_N^{-mn} = \begin{cases} N, & (k-m) = lN, \quad l \in \mathbb{Z} \\ 0, & (k-m) \neq lN \end{cases} \quad (3.19)$$

Así mismo, este factor es periódico con período N , tanto en el sentido de la variable de frecuencia n , como el de la variable de tiempo k :

$$W_N^{kn} = W_N^{(k+N)n} = W_N^{k(n+N)} \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.18), (3.19) y (3.20), se determina el par de transformadas discretas de Fourier (TDF) en función del factor de pivote de la siguiente manera:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.21a)$$

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.21b)$$

El sistema de transformadas (3.21a) y (3.21b) establece la relación mutua e unívoca entre los valores de la serie de entrada $x[k]$ y su representación discreta espectral $X[n]$. Por cuanto el factor de pivote es periódico, entonces el espectro discreto de Fourier de la señal también es periódico:

$$X[n] = X[n + mN], \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.22)$$

Las principales propiedades de la TDF se muestran en la Tabla 3.1.

Propiedad	Descripción
Linealidad	Sea $\mathcal{F}\{\alpha_i x[k]\} = \alpha_i X[n]$, $\alpha_i = cte$, entonces, $\mathcal{F}\{\sum \alpha_l x_l[k]\} = \sum \alpha_l X_l[n]$
Conjugada compleja	Sea $\mathcal{F}\{x[k]\} = X[n]$, siendo $N \in \text{par}$, $x[k] \in \mathbb{R}$ $X[N/2 + l] = X^*[N/2 - l]$, $l = 0, 1, \dots, N/2 - 1$
Retardo en el tiempo	$\mathcal{F}\{x[k - l]\} = W^{-nl} X[n]$, $l = 1, 2, \dots, N-1$
Desplazamiento espectral	$\mathcal{F}\{x[k] W^{kl}\} = X[n - l]$
Convolución en tiempo	$\mathcal{F}\{x_1[k] * x_2[k]\} = X_1[n] X_2[n]$ siendo $x_1[k] * x_2[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[l - n]$, $l = 0, 1, \dots, N-1$
Convolución en frecuencia	$\mathcal{F}\{x_1[k] x_2[k]\} = \frac{1}{2\pi} X_1[n] * X_2[k]$

Tabla 3.1. Propiedades de la TDF

La TDF se puede expandir utilizando la relación de Euler en la forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (\cos(2\pi/N)nk - j \sin(2\pi/N)nk)$$

El análisis de la anterior expresión da como resultado las propiedades sobre paridad e imparidad de la transformada discreta de Fourier, mostradas en la Tabla 3.2. De otra parte, si $x[n]$ es real pero no es ni par ni impar, se podrá demostrar que la respectiva transformada discreta de Fourier tendrá partes real par e imaginaria impar diferentes de cero. Además, para una sucesión compleja $x[n]$ de longitud N , se tienen $2N$ grados de libertad, una $x[n]$ real tiene N grados y una $x[n]$ real par posee solo $N/2$.

Sea dada la señal continua $x(t)$ con base finita $N = 2f_{\max}T_c$, siendo el valor de frecuencia máxima

$u[n]$ <i>parte real</i> $x[n]$	$v[n]$ <i>parte imaginaria</i> $x[n]$	$U(k)$ <i>parte real</i> $X(k)$	$V(k)$ <i>parte imaginaria</i> $X(k)$
par	0	par	0
impar	0	0	par
0	par	0	impar
0	impar	impar	0

Tabla 3.2. Paridad e imparidad en la TDF

f_{\max} en el intervalo de análisis T_a . La relación entre su transformada de Fourier (1.60) con la respectiva TDF en (3.21b), puede ser obtenida a partir de la representación para la señal continua en forma de la siguiente serie truncada (3.3):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)}{2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)}$$

cuya densidad espectral es igual a:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)}{2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)}{2\pi f_{\max}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

La integral (3.23) corresponde a la densidad espectral de la función desplazada en el tiempo de los valores discretos y que da como resultado $\Delta t e^{-jk\Delta t\omega}$. De esta manera, se tiene que

$$X(e^{j\omega}) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jk\Delta t\omega}, \quad -2\pi f_{\max} \leq \omega \leq 2\pi f_{\max}$$

El espectro en los puntos $\omega = k\Omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$, $\Omega = 2\pi/T_a$ se obtiene como

$$X(e^{jl\Omega}) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jk\Delta tl\Omega} = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jkl2\pi/N} \quad (3.24)$$

Al comparar (3.21a) y (3.24), y teniendo en cuenta la propiedad de conjugada compleja (Tabla 3.1) se obtiene

$$x[k] = \begin{cases} \frac{1}{T_a} X[e^{jk\Omega}] & k = 0, 1, \dots, N/2 \\ \frac{1}{T_a} X[e^{j(l-N/2)\Omega}] & k = l + N/2, l = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$

La relación entre la TDF y la serie de Fourier, teniendo en cuenta que tanto los coeficientes de la serie de descomposición como los valores discretos de la densidad espectral cumplen la relación en la

forma, $x[k] = X[e^{jk\Omega}] / T_a$, por lo tanto

$$x[k] = \begin{cases} x_k, & k = 0, 1, \dots, N/2 \\ x_{-N/2+l}, & k = N/2 + l, \quad l = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$

De esta manera, cuando se tienen señales descompuestas por una base finita de longitud N , entonces, los respectivos valores la malla de discretización $\{x[k], k = 0, 1, \dots, N/2\}$ coinciden con los coeficientes de la serie de Fourier.

En la Figura 3.3, se muestran respectivamente la señal continua original en el tiempo (a), su correspondiente espectro (b), la señal discretizada (c) y su espectro (d).

En el desarrollo de algoritmos de implementación práctica de la TDF es preferible emplear su descripción matricial:

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{X}_{N \times 1} \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{X}_{N \times 1} = \mathbf{W}_N^H \mathbf{x}_{N \times 1} \quad (3.25b)$$

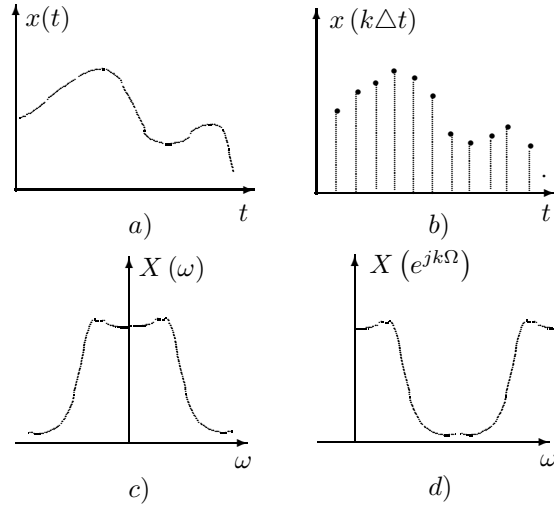


Figura 3.3. Discretización de señales

3.2.2. Extensiones de la transformada discreta de Fourier

Existen diferentes transformadas derivadas de la transformada discreta de Fourier, que han servido a la solución de diferentes problemas, entre las cuales están las siguientes:

TDF de datos reales. Sea la TDF de una sucesión real de datos con longitud $2N$, entonces, se pueden formar las siguientes dos sucesiones de longitud N , correspondientemente para los índices de muestreo pares e impares: $u[n] = x[2n]$, $v[n] = x[2n + 1]$.

Las dos TDF de longitud N se pueden calcular simultáneamente, empleando otra transformada discreta de Fourier, pero compleja y de longitud N , formada artificialmente a partir de las señales reales en la forma: $h[n] = u[n] + jv[n]$.

Las respectivas TDF de $u[n]$ y $v[n]$ se calculan a partir de la TDF $h[n]$, usando las propiedades de la Tabla 3.2 que aseguran la existencia de las partes real e imaginaria en la TDF de $u[n]$ y $v[n]$. Luego, la TDF de la señal original $x[n]$ se halla de las TDF de $u[n]$ y $v[n]$ empleando la propiedad de periodicidad (3.22):

$$U(k) = \mathcal{F}\{u[n]\} = (X(k) + X(k + N/2)) / 2$$

Además, aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo mostrada en la Tabla 3.1:

$$V(k) = \mathcal{F}\{v[n]\} = (X(k)W^k + X(k + N/2)W^{k+N/2}) / 2$$

y al resolver ambas ecuaciones para $X(k)$, entonces, se obtiene

$$X(k) = U(k) + V(k)W_{2N}^k \quad (3.26)$$

De las propiedades de la Tabla 3.2 se observa que si $x[n] \in \mathbb{R}$, entonces, los valores de $X(k)$, $k = N, \dots, 2N - 1$ son los mismos que los dados por (3.26), por lo tanto, la TDF de $x[n]$ de longitud $2N$ se puede hallar de dos TDF de longitud N , así, $H(k) = \mathcal{F}\{h[n]\} = R(k) + jI(k)$, entonces $U(k)$ es la parte par de $R + j$ (parte impar de I), mientras $V(k)$ es la parte par de $I - j$ (parte impar de R). Ambas partes $U(k)$ y $V(k)$, combinadas en (3.26), conforman la TDF de la señal real $x[n]$. La ventaja de esta representación consiste en menores exigencias de memoria a costa de unas cuantas operaciones de cálculo extra [17].

Transformada discreta de cosenos (TDC). Se define en la forma:

$$y(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

y su inversa es definida como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) y(k) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{donde } \alpha(k) = \begin{cases} (1/N)^{-1/2}, & k = 0 \\ (2/N)^{-1/2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

En forma vectorial, la transformada corresponde a la multiplicación, $\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$, donde los elementos de la matriz \mathbf{C} están dados por:

$$C(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k = 0, 0 \leq n \leq N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), & 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

El par correspondiente para la TDC bidimensional es:

$$Y(k, l) = \alpha(k) \alpha(l) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m, n) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)k}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)l}{2N}\right)$$

$$X(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha(k) \alpha(l) C(k, l) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)k}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)l}{2N}\right)$$

Transformada discreta de Hartley. La forma discreta de la Transformada de Hartley (1.71b) se da por el respectivo par de expresiones:

$$H[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cos(2\pi nk/N) \quad (3.27a)$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} H[n] \cos(2\pi nk/N) \quad (3.27b)$$

La obtención de la TH discreta está basada en su propiedad de ortogonalidad:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi nk/N) \cos(2\pi nl/N) = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

con lo cual, al reemplazar el valor $H[n]$, (3.27a), en la expresión alterna (3.27b), entonces, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} H[n] \cos(2\pi nk/N) &= \sum_{n=0}^{N-1} N^{-1} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] \cos(2\pi nl/N) \cos(2\pi nk/N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi nl/N) \cos(2\pi nk/N) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] N = x[k], & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

que confirma la validez en la relación de la transformada inversa.

El coeficiente N^{-1} en la TH discreta se toma por analogía con la TDF. De la anterior relación se observa que la TH discreta es de los reales, por cuanto se considera que $x[k]$ es solamente de los reales.

3.2.3. Transformada generalizada discreta de Fourier

Uno de los principales métodos de análisis de los sistemas discretos es la transformada \mathcal{Z} , que permite reemplazar la solución de las ecuaciones iterativas lineales por la solución de ecuaciones algebraicas. El empleo de estas transformadas en las ecuaciones iterativas es análogo al empleo de las transformadas de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales [19].

La transformada \mathcal{Z} de una sucesión $\mathbf{x} = \{x[n] : n \in \mathbb{Z}\}$, que pertenece al espacio de las funciones cuadrado sumables ℓ^2 , se define como

$$\mathcal{Z} \{x[n]\} \triangleq X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (3.28)$$

En general, la transformada \mathcal{Z} es un polinomio de Laurent en las variables z y z^{-1} , definido sobre todo el plano complejo, excepto en el origen. donde puede existir un polo.

Definición 3.2. *Polinomio de Laurent.* Sea $X(z)$ una función de variable compleja con un polo de orden n en $z = a$, que es analítica en cualquier otro punto de un círculo de \mathbb{C} con centro en a . Entonces $(z - a)^n X(z)$ es analítica en todos los puntos de \mathbb{C} y tiene serie de Taylor alrededor de $z = a$ de manera que

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] (z - a)^n$$

donde los términos con $n < 0$ constituyen la *parte principal* y los términos con $n \geq 0$ son la *parte analítica*

En la práctica, se tiene $x[n] = 0$ y $n \leq 0$, entonces, la transformada \mathcal{Z} se convierte en lateral:

$$X_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (3.29)$$

Ejemplo 3.2. Hallar la transformada \mathcal{Z} de la función dada por la malla de valores $x[n] = a^n$. En correspondencia con la definición (3.29) se tiene que:

$$X(z) = \mathcal{Z} \{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Al expresar la variable compleja z como $z = re^{j\theta}$, entonces la transformada \mathcal{Z} toma la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-jn\theta} \quad (3.30)$$

que se determina en los puntos donde la serie (3.30) converge, cuando se cumple la condición:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (3.31)$$

La región en el plano complejo z sobre la cual se cumple la condición (3.31) se denomina *región de convergencia* de la transformada \mathcal{Z} , en caso contrario, *región de divergencia*.

La serie (3.28) se puede dividir en dos partes así:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

La primera serie converge cuando $|z| < R_{x+}$, y la segunda cuando $|z| < R_{x-}$. De esta manera, la región de convergencia de la transformada \mathcal{Z} se determina por las desigualdades:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.32)$$

que conforma un anillo en el plano de la variable compleja z . La serie de potencia (3.28) definida en el anillo (3.32) corresponde a la serie de Laurent, por lo que, para el estudio de la Transformada \mathcal{Z} se pueden emplear los métodos convencionales de la Teoría de Variable Compleja [24].

En forma general, la relación entre la transformada \mathcal{Z} y la TDF puede verse, por ejemplo, al evaluar la ecuación (3.13a), para una sucesión discreta de longitud N , en el punto $z = e^{j\theta}$, o sea, en el punto circunscrito dentro del círculo unitario con ángulo igual a la frecuencia relativa θ :

$$X_L(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} \quad (3.33)$$

De la relación (3.33), se observa que la TDF de $x[n]$ se puede obtener al evaluar la transformada \mathcal{Z} en los valores $z = e^{j2\pi k/N} = e^{j\theta}$, esto es,

$$X(z)|_{z=e^{j\theta}} = X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}$$

De la última expresión, resulta que los coeficientes de la TDF para una sucesión finita son los valores de la transformada \mathcal{Z} de la misma sucesión, pero de N puntos que sean igualmente espaciados alrededor de un círculo unitario en el plano z , y lo que es más importante, los coeficientes de la TDF directa de una sucesión, definida con longitud finita, son la única representación de esa sucesión, por cuanto la TDF en forma inversa puede ser usada para reconstruir exactamente la sucesión deseada, a partir de los coeficientes de la respectiva forma directa de la TDF.

Propiedades de la transformada \mathcal{Z}

(a). *Linealidad*: Sea $\mathcal{Z}\{x_i[n]\} = X_i(z)$, para $\alpha_i = \text{const}$, entonces

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_i \alpha_i x_i[x]\right\} = \sum_i \alpha_i X_i(z)$$

(b). *Desplazamiento*:

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]z^{-n} = z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]z^{-(n+m)} = z^m X(z) \quad (3.34)$$

(c). *Multiplicación por una sucesión exponencial*

$$\mathcal{Z}\{\omega^{-n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega^{-n}x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\omega^{-n}z^{-n} = X(z+\omega)$$

(d). *Convolución discreta*: Sea la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo dada por la convolución $y[k] = \sum_n x[k] h[n-k]$, entonces,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-(n-k)}$$

Por lo cual se obtiene

$$Y(z) = X(z) \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

que teniendo en cuenta la definición de la transformada \mathcal{Z} para la sumatoria del término de la derecha, la última resulta en

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.35)$$

(e). *Multiplicación.* Sea $\mathcal{Z} \{x_i[n]\} = X_i(z)$, entonces,

$$\mathcal{Z} \{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X_2\left(\frac{z}{v}\right) X_1(v)v^{-1}dv$$

donde Γ es el contorno hasta donde se extiende el radio de convergencia.

(f). *Diferenciación*

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n-1} = -\frac{1}{z}X(z)$$

(g). *Decimación en el tiempo.* Dada una sucesión $\mathbf{x} = \{x[n] : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces sus términos se dice que se deciman cuando se altera su cantidad por un factor dado $k > 0$, esto es, $\mathbf{x} = \{x[kn]\}$. Cuando $k > 1$ la sucesión se submuestra y se denota como $\mathbf{x}_{\downarrow k}$. En caso contrario, cuando $0 < k < 1$, la sucesión se sobremuestra y se denota como $\mathbf{x}_{\uparrow k}$.

En el caso particular de $k = 2$, la decimación implica que se eliminan las muestras impares y le corresponde la transformada \mathcal{Z} ,

$$\begin{aligned} X_{\downarrow 2}(z) &= \sum_n x[2n]z^{-n} = \sum_k \frac{1}{2} \left(x[k](z^{1/2})^{-k} + x[k](-z^{1/2})^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Así mismo, cuando $k = 1/2$, la decimación implica que se agregan las muestras impares

$$x_{\uparrow 2}[n] = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ x[n/2], & n \text{ par} \end{cases}$$

con lo cual se obtiene la respectiva \mathcal{Z} :

$$X_{\uparrow 2}(z) = \sum_n x_{\uparrow 2}[n]z^{-n} = \sum_k x[k]z^{-2k} = X(z^2)$$

De igual manera, se pueden obtener las mismas propiedades para la transformada \mathcal{Z} lateral, excepto las propiedades de convolución y de multiplicación por una sucesión exponencial. En particular, si $x[n] = 0$ cuando $n < 0$, entonces para una sucesión desplazada se obtiene que:

$$\mathcal{Z}_L \{x[n+m]\} = z^m \left(X_L(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k} \right)$$

Frecuentemente, se hace necesario determinar la sucesión $x[n]$ por su transformada \mathcal{Z} , esto es, hallar su transformada inversa \mathcal{Z} que se define por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz$$

donde Γ es el contorno cerrado que abarca todos los polos de la función $X(z)$, donde la integración se lleva a cabo en sentido contrario al de las manecillas del reloj [2].

Se definen como *polos*, aquellos puntos donde la función $X(z)$ tiende a infinito. Si el núcleo de la integral tiene la forma

$$X_0(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{M(z)}{\prod_{i=1}^k (z - p_i)^{m_i}}$$

donde $k, m_i \in \mathbb{Z}^+$. Los valores de la sucesión $x[n]$ se calcula mediante la teoría de residuos [2]:

$$x[n] = \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{z=p_i} \{X_0(z)\}$$

Para un polo p_i de orden m_i , el residuo $\operatorname{res}\{\cdot\}$ de la función $X_0(z)$ en el punto p_i , se define como:

$$\operatorname{res}_{z=p_i} \{X_0(z)\} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} ((z - p_i)^{m_i} X_0(z))$$

En particular, si $m_i = 1$, entonces:

$$\operatorname{res}_{z=p_i} \{X_0(z)\} = \lim_{z \rightarrow p_i} ((z - p_i) X_0(z))$$

La función de transferencia discreta de un filtro digital dada en (3.73) se puede representar en función de la transformada \mathcal{Z} :

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

siendo $X(z)$ y $Y(z)$ las respectivas transformadas \mathcal{Z} de las sucesiones de entrada y salida del filtro. La función de transferencia $H(z)$ corresponde a la transformada \mathcal{Z} de la respuesta a impulso en (3.60).

La transformada \mathcal{Z} de las formas no recursiva y recursiva de (3.59), respectivamente es la siguiente

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} = X(z) \sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}$$

Por lo cual, las respectivas funciones de transferencia son:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} \tag{3.37a}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}} \tag{3.37b}$$

Los coeficientes de las respectivas funciones de transferencia (3.37a) y (3.37b), de forma unívoca, determinan las estructuras de proceso no recursivas y recursivas.

Descomponiendo los polinomios del numerador y denominador de (3.37b) en múltiplos elementales, se obtiene (para $M \leq N$)

$$H(z) = H_0 \frac{z^{N-M} \prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad (3.38)$$

donde z_i son los ceros y p_i son los respectivos polos de la función (3.37b). La función de transferencia del filtro no recursivo (3.37a) no tiene polos.

En forma general, un filtro digital se puede representar empleando los diagramas de polos y ceros. Si los ceros, o los respectivos polos, son valores complejos, estos se encuentran en pares de complejos conjugados en numerador (denominador) de la descomposición (3.38). Conociendo la disposición de los polos en el plano complejo z , se puede determinar la estabilidad del filtro.

Se puede demostrar que cualquier filtro recursivo es estable si el valor absoluto de sus polos es menor que uno [1]. Los filtros no recursivos siempre serán estables.

La respuesta a impulso, de acuerdo a su definición para filtros recursivos, se expresa por la relación:

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}}{\sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}} \mathcal{Z} \{ \delta(t) \} = z^{-1} + Y_1 z^{-2} + Y_2 z^{-3} + \dots +$$

La serie de potencia del lado derecho de la última expresión, en forma general, es infinita. La función de peso en el caso de los filtros no recursivos es finita. La respuesta a impulso se puede relacionar a través de la transformada \mathcal{Z} con la función de transferencia en la forma, $h[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{ H(z) \}$.

La función de transferencia del filtro digital también se puede representar en la forma:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

que, a su vez, es equivalente a

$$H(z^{-1}) = N(z) D(z^{-1}) = A + jB, \quad H(z) = N(z^{-1}) D(z) = A - jB$$

donde A y B son las partes real e imaginaria del producto.

El desfase del sistema, acorde con la definición de (2.40b), es igual a [1, 24]:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left\{ \frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right\} = \frac{1}{2j} \ln \left\{ \frac{A - jB}{A + jB} \right\}$$

que genera un retardo de grupo (2.42) del tipo (donde \dot{x} denota $d/d\omega$):

$$\tau(e^{j\omega}) = - \left\{ \frac{\dot{A} - j\dot{B}}{A^2 + B^2} \right\}$$

3.2.4. Transformada discreta de Walsh

La transformada discreta de Walsh (TDW) toma como sistema base $\{\mathbf{Wal}\}$ la versión discretizada de las funciones de Walsh dadas en (1.47) $\{\text{wal}_k[n] : k = 0, 1, \dots, N-1, \text{ y } n = 0, 1, \dots, N-1\}$, siendo $N = 2^m, m \in \mathbb{Z}$, con período de discretización uniforme igual a $\Delta t = 1/2^m$. Las funciones discretas de Walsh $\{\text{wal}_k[n]\}$ forman un sistema ortogonal:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \text{wal}_n[k] \text{wal}_l[k] = \begin{cases} N, & n = l \\ 0, & n \neq l \end{cases}$$

Además cumplen la propiedad multiplicativa $\text{wal}_k[n] \text{wal}_l[n] = \text{wal}_{k \oplus l}[n]$, donde $x[m \oplus n]$ corresponde al corrimiento diádico de la sucesión $x[m]$ en n elementos. El respectivo par de transformadas TDW, en correspondencia con (3.16a) y (3.16b), se determina mediante las expresiones:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2^m-1} v[n] \text{wal}_k[n], \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (3.39a)$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^{2^m-1} x[k] \text{wal}_k[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (3.39b)$$

De manera similar, a como ocurre con el espectro de la TDF, el espectro de la TDW también es periódico: $v[k] = v[k + lN], l \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, ambas transformadas discretas guardan diferencias, en particular, en cuanto a las propiedades de retardo y convolución. En el caso de la TDF, la operación de multiplicación de los coeficientes espectrales por la función de pivote W^{-kl} conlleva al desplazamiento de la serie discreta de tiempo en l intervalos discretos, mientras en la TDW, la multiplicación por el núcleo $\text{wal}_k[l]$ conlleva al desplazamiento diádico de la señal en el tiempo:

$$\begin{aligned} x[k] \text{wal}_k[l] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2^m-1} v[n] \text{wal}_k[n] \text{wal}_k[l] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2^m-1} v[n] \text{wal}_k[n \oplus l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2^m-1} v[n \oplus l] \text{wal}_k[n] \end{aligned}$$

siendo $l = 0, 1, \dots, N, N = 2^m - 1$, por lo que cualquier desplazamiento que ocurre en el marco de la sucesión original, está condicionado por la operación lógica de suma por módulo 2.

En general, la propiedad de multiplicación de sucesiones en la TDW (\mathcal{F}_W) se describe de la forma:

$$x_1[k] x_2[k] = \mathcal{F}_W^{-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_1[n] v_2[l \oplus n] \right\}$$

Al igual que en la TDF, la descripción matricial de la TDW es importante en el desarrollo de los respectivos algoritmos de implementación sobre procesadores digitales y corresponde a la siguiente:

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \mathbf{v}_N \mathbf{Wal}_{N \times 1} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{v}_{N \times 1} = \mathbf{Wal}_{N \times 1}^T \mathbf{x}_{N \times 1} \quad (3.40b)$$

donde \mathbf{Wal}_N es la matriz cuadrada de la transformación de Walsh de orden N , cuya fila k corresponde a la función $\text{wal}_k[n]$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Esta matriz es de naturaleza simétrica: $\mathbf{Wal}_N^T = \mathbf{Wal}_N$, por lo que la expresión (3.40b) puede ser simplificada hasta

$$\mathbf{v}_{N \times 1} = \mathbf{Wal}_N \mathbf{x}_{N \times 1}$$

Los elementos de la matriz de transformación de Walsh solamente pueden tomar los valores restringidos de $\text{wal}_k[n] = \pm 1$, por lo que en el cálculo de las TDW (3.40a) y (3.40b) estrictamente se realizan operaciones de suma y resta, esto es, no existen las operaciones más exigentes de realización como la multiplicación, que es lo que ocurre en el desarrollo matricial de la TDF, en la cual además, los valores del factor de pivote, en forma general, son de representación compleja. Por lo anterior, se deduce que hay ventaja en los costos computacionales de desarrollo de la TDW sobre la TDF.

3.2.5. Transformada discreta de Haar

La Transformada Discreta de Haar (TDH) emplea, en correspondencia con los casos anteriores, el sistema base $\{\mathbf{Har}\}$, que es la versión discretizada de las funciones de Haar dadas en (1.51) $\{\text{har}_k[n]\}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, siendo $N = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$, con período de discretización uniforme igual a $\Delta t = 1/2^m$. Las funciones discretas de Haar $\text{har}_k[n]$, forman un sistema ortogonal:

$$\sum_{n=0}^{2^m-1} \text{har}_k[n] \text{har}_l[n] = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

La descripción matemática de las funciones discretas de Haar se pueden obtener de (1.51):

$$\text{har}_n[l] = \begin{cases} 2^{k/2} r_{k+1}[l] \text{rect}_T \left(\frac{l 2^k}{2^m} - n(\text{mod } 2^k) \right), & n = 1, \dots, 2^m - 1 \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

El respectivo par de transformadas TDH se determina como:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2^m-1} v[n] \text{har}_k[n], \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (3.41)$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^{2^m-1} x[k] \text{har}_k[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (3.42)$$

La descripción matricial de la TDH, importante en el desarrollo de los respectivos algoritmos de implementación sobre procesadores digitales, corresponde a la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{N \times 1} &= \frac{1}{N} \mathbf{v}_N \mathbf{Har}_{N \times 1} \\ \mathbf{v}_{N \times 1} &= \mathbf{Har}_N^T \mathbf{x}_{N \times 1} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Har}_{N \times 1}$ es la matriz cuadrada de orden N , con elementos $\text{har}_k[n]$.

3.2.6. Transformada discreta wavelet

La representación discreta de la señal $x(t)$ mediante la serie (1.17), empleando la definición de los respectivos átomos en (1.90), requiere los parámetros asociados a la operaciones de traslación y escala, respectivamente [17]:

$$x(t) = \sum_n \sum_m x_{m,n} \phi_{m,n}(t)$$

donde $x_{m,n}$ son los coeficientes de la representación discreta de la señal.

En el análisis de funciones con estructura compleja y variada, es conveniente usar átomos de representación $\phi_{m,n}(t)$ cuya forma sea igualmente flexible. La primera clase de funciones wavelets son las funciones ortogonales, cuyas ventajas de empleo se explican en el numeral § 1.2. Sin embargo, existen casos en los cuales no se requieren bases ortogonales. Entonces, la representación se puede ampliar a los conjuntos que incluyan los núcleos base conjugados o *conjuntos base duales* cuya condición (1.55), en este caso corresponde a la expresión:

$$\langle \phi_l(t), \theta_k(t) \rangle = \delta(l - k)$$

El empleo de pares de núcleos autoconjugados hace que se cumpla la condición (1.57), que para las bases discretas implica la ortonormalidad entre los respectivos núcleos. Por lo tanto, las expansiones mediante funciones wavelets que emplean los núcleos autoconjugados se denominan *biortogonales* y que para la función $x(t)$ tienen la forma,

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \theta_k(t) \rangle \phi_k(t) \quad (3.43)$$

Los filtros wavelet asociados a las bases ortogonales generalmente tienen desfase no lineal, pero al debilitar tal condición en el proceso de información, se pueden conseguir filtros de fase lineal, tanto para el análisis como para la reconstrucción de señales [25]. En el caso de los sistemas biortogonales, siendo estos más complejos en su desarrollo, se requiere el análisis adicional mediante el conjunto dual, con lo cual se obtiene mayor capacidad de generalización. Además, las funciones wavelets biortogonales generan filtros wavelet de longitud más corta y con desfase lineal, lo cual en el caso de las expansiones wavelet ortogonales, difícilmente podría conseguirse sin relajar la misma condición de ortogonalidad.

Como se indicaba en el análisis de la TwC, el conjunto de funciones $\psi_{a,b}$, de forma inherente, presenta amplia redundancia. En este sentido, es importante extraer un cierto subconjunto discreto $\{\psi_{a,b}\} \in \mathcal{F}$, tal que caracterice completamente el espacio $L^2(\mathbb{R})$. En general, la familia de funciones $\{\phi_l : l \in L^2\}$ dadas en cualquier espacio de Hilbert \mathcal{H} se denomina *marco*, si existen las constantes $c_{min} > 0, c_{max} < \infty$, denominadas *extremos* de los marcos, tales que para todas las funciones x en \mathcal{H} se cumpla la desigualdad, análoga a (1.25):

$$c_{min} \|x\|^2 \leq \sum_{l \in L} |\langle x, \phi_l \rangle|^2 \leq c_{max} \|x\|^2, \quad c_{min} \in \mathbb{R}^+, c_{max} \in \mathbb{R}$$

El conjunto de las funciones $\{\phi_l\} \in \mathcal{H}$, que conforman el marco caracteriza el espacio \mathcal{H} de manera completa, y por lo tanto permite reconstruir la función $x \in \mathcal{H}$, por métodos numéricos estables a partir de los coeficientes $\langle x, \phi_l \rangle$.

Sin embargo, es de resaltar que en forma general, un marco no corresponde a un conjunto base, y entonces las funciones que lo conforman pueden ser linealmente dependientes. Si el conjunto de funciones $\{\phi_l\} \in \mathcal{H}$ que conforman un marco, son independientemente lineales, entonces el conjunto corresponde a un conjunto base (aunque no siempre ortogonal) y se denomina *base de Riesz*.

En el caso de las wavelet, los marcos están formados por una familia de vectores $\{\phi_k : k \in \mathbf{k}\}$ que representan la señal $x(t)$ a partir de sus productos internos $\{\langle x, \phi_k \rangle : k \in \mathbf{k}\}$, donde \mathbf{k} es un conjunto de índices que puede ser de tamaño finito o infinito [14]. En este sentido, una familia de funciones wavelet $\{\psi_{m,n}(t) \in L^2(\mathbb{R}) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ constituye un marco, para toda función $x \in L^2(\mathbb{R})$ si se cumple que:

$$c_{min} \leq \frac{\sum_{m,n} |\langle x(t), \psi_{m,n}(t) \rangle|^2}{\|x(t)\|^2} \leq c_{max} \quad (3.44)$$

Esto es, la energía normalizada de los coeficientes en (3.44) está acotada por los valores de c_{min} y c_{max} , respectivamente.

En forma general, los parámetros a y b que determinan, de manera correspondiente la escala y el desplazamiento de la función wavelet, toman valores discretos. El valor de a se selecciona igual al exponente entero (positivo o negativo) del parámetro fijo de expansión de la escala $a_0 > 1$, esto es, $a = a_0^m, m \in \mathbb{Z}$. El parámetro de desplazamiento debe cambiar en sincronía con la escala y, por lo tanto, también depende de m : $b = nb_0 a_0^m, n \in \mathbb{Z}$, siendo $b_0 > 0$ un valor a priori fijo. De esta manera, la familia de funciones discretas wavelet tiene la forma:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}(t - nb_0 a_0^m)) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

La implementación sobre sistemas reales de proceso digital que se presenta en la sección §3.3, implica el uso de sistemas de conteo numérico binario, por lo que en el caso de la transformada wavelet discreta, la base exponencial de amplio uso es $a_0 = 2$, con $b_0 = 1$. El conjunto base wavelet resultado es denominado *diádico*: $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)$. Entonces, el conjunto de funciones wavelet $\{\psi_{m,n}(t) : m, n \in \mathbb{Z}\}$, algunas veces conforma un sistema base ortonormalizado en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Análisis de resolución variable. La resolución de una señal dada en (1.39), corresponde a la descripción cualitativa asociada con su contenido espectral. Por cuanto se considera que la mayor parte de la información de la señal está en los cambios lentos, su versión submuestreada, que corresponde a la salida de un filtro pasabajas, es usualmente una aproximación aceptable para el análisis de las señales.

El *análisis de resolución variable* (ARV) consiste en la representación de la señal $x(t)$ dada en forma de aproximaciones sucesivas, cada una de las cuales es una versión más fina de la función $x(t)$, que corresponden a diferentes niveles de resolución. El análisis ARV está fundamentado en la aproximación del espacio $L^2(\mathbb{R})$ por una serie de subespacios anidados secuencialmente, como se muestra en la Figura 3.4, $V_l \in L^2(\mathbb{R})$: $\dots, \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$, tales que cumplan

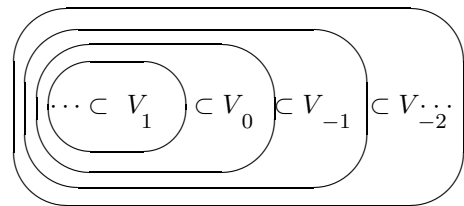


Figura 3.4. ARV: espacios anidados

las condiciones:

$$\overline{\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} V_l} = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} V_l = \{0\} \quad (3.45)$$

Una exigencia adicional que se impone, que está relacionada con el concepto de resolución variable, consiste en que todos los espacios sean versiones escala del espacio central V_0 , esto es,

$$x(t) \in V_l \Leftrightarrow x(2^j t) \in V_0 \quad (3.46)$$

Otra particularidad que se exige al ARV está en la propiedad de invariabilidad de V_0 en caso de desplazamiento de la función sobre una malla de valores enteros:

$$x(t) \in V_0 \Leftrightarrow x(t - n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por último, se exige la existencia de una función $\gamma \in V_0$, tal que el conjunto conformado por los elementos $\{\gamma_n = \gamma(t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ sea del tipo base Riesz del espacio V_0 .

Si se tiene una sucesión V_l que cumpla las anteriores restricciones, entonces existirá la función $\phi \in V_0$, tal que el conjunto de sus respectivas funciones réplica

$$\left\{ \phi_{m,n}(t) = 2^{-l/2} \phi(2^{-l}t - n) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

conforman una base ortonormal del espacio V_l . La función ϕ es denominada *función de escala* y cumple la condición, $\int \phi(t) dt = 1$.

De esta manera, V_l es un espacio que aproxima $L^2(\mathbb{R})$ con resolución 2^{-l} :

$$\mathcal{P}_{V_l} \{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, \phi_{l,n} \rangle \phi_{l,n}(t) \quad (3.47)$$

siendo \mathcal{P}_{V_l} el operador de proyección ortogonal en el espacio V_l . El cambio de un espacio al contiguo, $V_l \rightarrow V_{l-1}$, corresponde a un cambio con mayor escala (menor resolución), esto es, se llega a una versión más gruesa que representa la señal con la pérdida de cierta información. Esta particularidad orienta la implementación del análisis ARV, que en la práctica consiste en construir bases wavelet, empleando la diferencia de información entre los diferentes niveles de escala. Para cualquier $l \in \mathbb{Z}$ se define el subespacio W_l que sea ortogonal al complemento de V_l en V_{l-1} . Entonces,

$$V_{l-1} = V_l \oplus W_l, \quad V_l \perp W_l \text{ y } W_l \perp W_k, \quad \forall l \neq k$$

Si se nota con \mathcal{P}_{W_l} la proyección ortogonal en W_l , entonces de (3.47) resulta que

$$\mathcal{P}_{V_{l-1}} x(t) = \mathcal{P}_{V_l} x(t) + \mathcal{P}_{W_l} x(t)$$

La anterior relación muestra claramente que la aproximación con resolución 2^{l-1} puede ser descompuesta en dos términos: la aproximación con menos resolución 2^{-l} y los detalles de la resolución $2^{-(l-1)}$, dados por $\mathcal{P}_{W_l} x(t)$.

Se puede demostrar que para cualquier sucesión de espacios, que cumplan con las condiciones del ARV, existirá una función wavelet $\psi(t)$, tal que la familia de funciones definida por el conjunto

$\{\psi_{l,n}(t) = 2^{-l/2}\psi(2^{-l}t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal del espacio W_l para cualquier resolución 2^{-l} . De las condiciones (3.45) y (3.46) se deduce que $L^2(R) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} W_l$, por lo que se concluye que se tiene una descomposición del espacio $L^2(R)$ en un conjunto de subespacios ortogonales. Lo anterior implica que cuando el índice de la resolución toma valores desde $-\infty$ hasta ∞ , la familia de funciones $\{\psi_{l,n}(t) = 2^{-l/2}\psi(2^{-l}t - n) : l, n \in \mathbb{Z}\}$ conforma una base ortonormal de todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

La forma de anidado de los espacios $V_0 \subset V_{-1}$ antes descrita, además del hecho de que $\phi_{-1,n}$ es una base ortonormal del espacio V_{-1} , conllevan a la siguiente relación:

$$\phi = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n} \quad (3.48)$$

donde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$. Los coeficientes h_n corresponden al filtro de la transformada wavelet y de manera completa caracterizan la misma función ϕ . Dicho de otra manera, la función ϕ se puede obtener con cualquier precisión por medio de la iteración consecutiva del filtro h_n .

La ortonormalidad del sistema de funciones $\phi(t - n)$ implica el cumplimiento de la siguiente restricción, por parte de los coeficientes de filtración h_n :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n h_{n+2k}^* = \delta_{0,k}$$

De manera similar, los espacio anidados $W_0 \subset V_{-1}$ sugieren la existencia de un filtro g_n , que corresponde a la función wavelet ψ :

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi_{-1,n}, \quad g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle \quad (3.49)$$

Por cierto, ambos filtros g_n y h_n se relacionan por la expresión simple: $g_n = (-1)^n h_{-n+1}$.

El análisis de resolución variable conlleva al desarrollo jerárquico para el cálculo de los coeficientes wavelet de la señal $x(t)$ en consideración. Así, de las ecuaciones (3.48) y (3.49) se obtienen las siguientes ecuaciones iterativas:

$$\begin{aligned} c_k^l &= \langle x, \phi_{l,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \langle x, \phi_{l-1,n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_n^{l-1} \\ d_k^l &= \langle x, \psi_{l,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \langle x, \phi_{l-1,n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} c_n^{l-1} \end{aligned}$$

Sean conocidos los productos escalares de una función dada $x(t)$ con las funciones escala $\phi_{l,k}$, para un valor suficientemente pequeño de resolución $\langle x, \phi_{l,k} \rangle$. A este nivel de escala (espacio V_l) se le puede notar de manera condicional como $l = 0$, V_0 , al cual le corresponde el coeficiente $c_k^0 = \langle x, \phi_{0,k} \rangle$, desde donde se empezará el cálculo iterativo de los demás coeficientes dados por $\{c_k^l = \langle x, \phi_{l,k} \rangle : l = 1, 2, 3, \dots\}$, empleando la expresión (3.48).

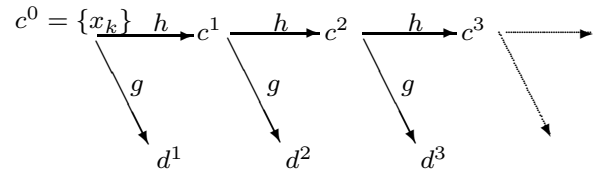


Figura 3.5. Diagrama de cálculo ARV

Mientras que empleando (3.49) se hallan los coeficientes $\{d_k^l = \langle x, \psi_{l,k} \rangle : l = 1, 2, 3, \dots\}$, como se ilustra en la Figura 3.5.

El algoritmo de análisis de resolución variable se puede considerar como el cálculo secuencial de aproximaciones gruesas de x , determinadas por los coeficientes c_k^l , teniendo en cuenta la información perdida al pasar a escalas mayores, la cual se refleja en los coeficientes d_k^l . En la práctica el menor de los posibles valores de escala de resolución se determina por la cantidad de valores discretos I de la señal de análisis, preferiblemente que cumpla la condición $I = 2^L$, $L \in \mathbb{Z}$.

Al realizar el cambio de un valor dado de resolución al siguiente, la cantidad de coeficientes wavelet se disminuye en dos veces y el proceso se detiene hasta alcanzar una cantidad finita de niveles. Debido a la ortogonalidad de la transformada wavelet se obtiene un número de coeficientes wavelet igual al número de valores discretos de la función. En este caso el algoritmo tiene un costo computacional del orden de $\mathcal{O}\{I \log_2 I\}$ operaciones. Por cuanto la función de resolución, generalmente, está muy bien localizada en el espacio, entonces en calidad de coeficientes $c_k^0 = \langle x, \phi_{0,k} \rangle$ se pueden tomar los mismos valores discretizados $\{x_k\}$ de la función original de análisis.

Desde el punto de vista de los espacios de funciones, este algoritmo corresponde a la descomposición del espacio V_0 en una suma de subespacios ortogonales de funciones wavelet que en forma secuencial aumentan la escala de resolución: $V_0 = W_1 \oplus \dots \oplus W_{L-1} \oplus W_L \oplus V_L$.

La operación inversa de reconstrucción de la señal original a partir de los coeficientes wavelet se da por la expresión:

$$c_n^{l-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(h_{n-2k} c_k^l + g_{n-2k} d_k^l \right) \quad (3.50)$$

El proceso en (3.50) va de las escalas más gruesas hacia las más finas.

En general, no todas las funciones wavelet pueden ser empleadas en el análisis de resolución variable. Por ejemplo, la wavelet ortogonal *meyer*, cumple con las condiciones del ARV, y muestra una buena regularidad C^∞ , sin embargo, no es suficientemente localizada en el espacio. Otro ejemplo puede ser la wavelet basada en funciones de ajuste (*spline*) de orden m , que presenta mejor localización en el espacio (con un comportamiento exponencial de caída a cero), pero con menor regularidad C^{m-1} . Un caso especial corresponde a las wavelet tipo *Daubechies* con soporte compacto (Figura 3.6(a)), las cuales para un orden N dado son diferentes de cero en el intervalo con longitud $2N - 1$ y presentan de manera correspondiente $2N$ coeficientes de filtración h_n y g_n diferentes de cero. Además, sin contar el caso $N = 1$ (que corresponde a la base *Haar*, que no es regular), las funciones ϕ_N y ψ_N son continuas y diferenciables (para $N \geq 3$), por lo menos hasta el orden $m \geq N/5$. La implementación de los algoritmos de análisis y reconstrucción empleando las wavelet *Daubechies* exige solamente una cantidad de operaciones del orden I , que inclusive es más rápido que el algoritmo de la transformada rápida de Fourier, el cual exige $\mathcal{O}\{N\} = I \log_2 I$ operaciones.

Por último, una de las propiedades más peculiares de las wavelet *Daubechies* está relacionada con los momentos de desvanecimiento. Los polinomios $1, t, t^2, \dots, t^{N-1}$ pueden ser representados de forma exacta por la combinación lineal de funciones de resolución

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(t - n) = 1, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n + \alpha_1) \phi(t - n) = t, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 + \alpha_2 n + \alpha_3) \phi(t - n) = t^2, \dots$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ son constantes.

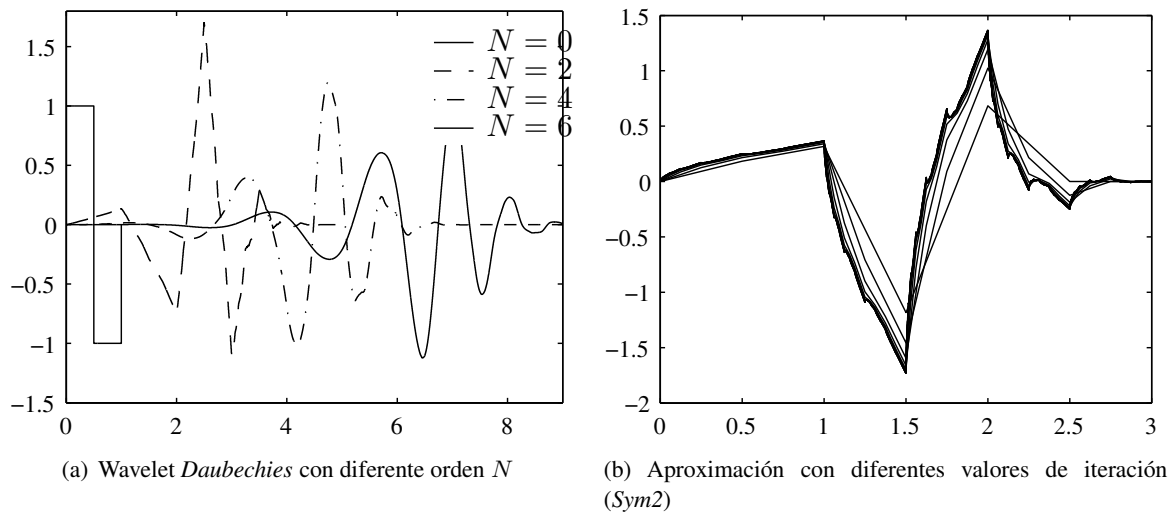


Figura 3.6. Formación de las wavelet

Propiedades del análisis *wavelet*

Las siguientes son las principales propiedades de las funciones wavelet empleadas en el proceso de señales:

Regularidad. Corresponde a una forma de medir la suavidad en las señales; un alto grado de regularidad indica la suavidad en la vecindad del punto donde se calcula. Una primera forma de medir la regularidad consiste en verificar la existencia de sus derivadas hasta orden k .

La regularidad de ψ tiene influencia en el error inducido durante la umbralización de los coeficientes wavelet. Cuando se reconstruye la señal a partir de sus coeficientes, se induce un error ϵ que perturba cada coeficiente $\langle x, \psi_{m,n} \rangle$ generando una componente adicional wavelet $\epsilon \psi_{m,n}$ a la señal reconstruida. Si ψ es suave, entonces $\epsilon \psi_{m,n}$ será un error que varía suavemente a lo largo de la reconstrucción de la señal [14].

La propiedad de regularidad en la Tw está directamente relacionada con sus *momentos de desvanecimiento*, definidos como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (3.51)$$

Si la wavelet tiene n momentos de desvanecimiento, se puede demostrar que la transformada wavelet puede ser interpretada como un operador diferencial de escala múltiple y orden n [14].

La expresión (3.51), cuando $k = 0$, corresponde a la condición de valor medio de las funciones wavelets, según la cual dos señales, que difieren únicamente por una constante, les corresponden los mismos coeficientes wavelet de refinamiento.

En general, la Tw se puede hacer insensible a los comportamientos polinomiales de mayor orden k , variando el respectivo momento de desvanecimiento. Sea la señal x a analizar que presenta varias singularidades, de tal manera que entre los valores singulares contiguos su comportamiento sea suave, justamente, donde la señal puede ser aproximada adecuadamente de forma local mediante alguna ex-

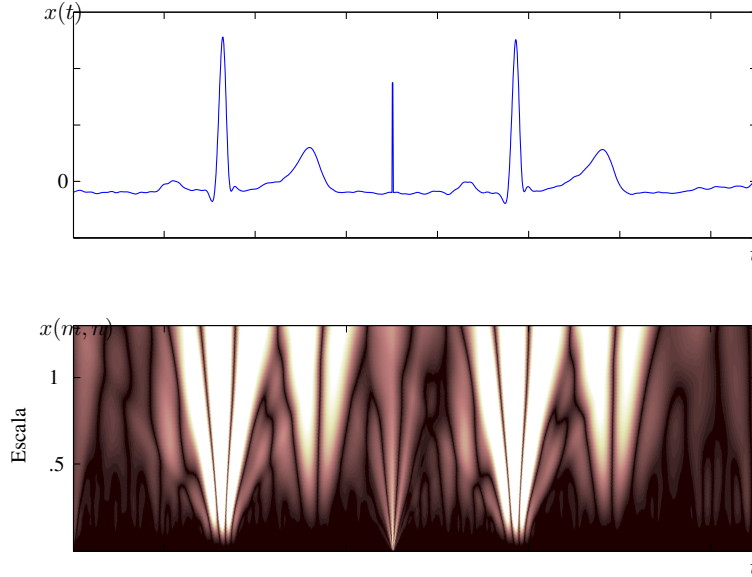


Figura 3.7. Análisis de regularidad empleando transformada wavelet

pansión polinomial, por ejemplo la de Taylor que relaciona la diferenciabilidad de la señal con su aproximación local. De esta manera, se puede aproximar x a un polinomio p_v en la vecindad de v de la forma, $x(t) = p_v(t) + \epsilon_v(t)$, donde $\epsilon_v(t)$ corresponde a los términos residuales de descomposición [14]. La transformada wavelet ignora el polinomio p_v si existen sus primeros K momentos de desvanecimiento, por lo que para los monomios de grado menor o igual a K se cumple que,

$$\langle x^k, \psi_{m,n} \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, K$$

Así los primeros K términos en la aproximación de Taylor de una función analítica no contribuyen a la formación de los coeficientes wavelet.

Se puede demostrar que, $\mathcal{W}\{x(m,n)\} = \mathcal{W}\{\epsilon_v(m,n)\}$, por lo cual la transformada wavelet entrega máximos locales en aquellos instantes donde exista alguna singularidad. En la Figura 3.7 se observan los cambios en las escalas de descomposición de la wavelet asociados a una discontinuidad presentada en la detección de valores anómalos en señales electrocardiográficas.

Soporte compacto. El soporte de una función $x(t)$, corresponde a todos los valores del intervalo de tiempo, tales que $\text{supp}(x) = \{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq 0\}$. Una función posee soporte acotado si existen dos números $\{t_{\min}, t_{\max}\} \in \mathbb{R}$, tales que $\text{supp}(x) \subset (t_{\min}, t_{\max})$. Si el soporte acotado es del tipo cerrado $|t_{\max} - t_{\min}| < \infty$, se denomina *soporte compacto*. La función de escalamiento φ tiene soporte compacto, si y solo si, el filtro h también tiene soporte compacto. Además, ambos soportes son iguales. Sea el valor del soporte de h y φ igual a $[N_1, N_2]$, entonces el de ψ es [14],

$$[(N_1 - N_2 + 1)/2, (N_2 - N_1 + 1)/2]$$

El soporte compacto de las funciones wavelet facilita la representación localizada de las señales

por medio de la Tw, importante en aplicaciones tales como la compresión, la detección de señales y la reducción de perturbaciones.

El tamaño del soporte de una función y el número de sus momentos de desvanecimiento son *a priori* independientes. Sin embargo, las restricciones impuestas sobre las wavelets ortogonales implican que para una función ψ con m momentos de desvanecimiento, su soporte es al menos de tamaño $2m - 1$. Además, si x tiene pocas singularidades aisladas y es regular entre estas, se debe seleccionar una wavelet con muchos momentos de desvanecimiento para producir un número alto de coeficientes wavelet pequeños, de tal forma que la energía se concentre en unos pocos coeficientes. Al incrementarse la densidad de las singularidades es mejor reducir el tamaño de su soporte a costa de un menor número de momentos de desvanecimiento. De hecho, las wavelets que solapan las singularidades crean coeficientes de amplitud alta.

Simetría. Las funciones de escalamiento simétricas se utilizan para construir una base wavelet regular sobre un intervalo dado, en lugar del eje real. En el caso ortogonal, solo la wavelet *Haar* tiene soporte compacto y es simétrica. Mientras en el caso de la estructura biortogonal (3.43), es posible sintetizar una función wavelet con sus respectivas funciones de escalamiento que sean simétricas o antisimétricas con soporte compacto, propiedad que es empleada en el procesamiento de imágenes.

Desfase lineal. En forma general, un filtro h es llamado con desfase lineal si se cumple que:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\} = H_R(\omega)e^{j\tau_0\omega}$$

donde $\tau_0 \in \mathbb{R}$ es la constante de desfase y H_R es una función real de ω .

Los filtros con respuesta de desfase lineal evitan la distorsión producida por el desfase no lineal y mantienen la forma de la señal, lo cual es usualmente importante en aplicaciones de voz, electrocardiografía e imágenes, entre otras. La ortogonalidad de las bases y la linealidad de la fase de los filtros son propiedades incompatibles, excepto para la wavelet *Haar* [14]. Sin embargo, se pueden usar las wavelets bi-ortogonales, que presentan desfase lineal similar al caso de los filtros con respuesta a impulso infinita. El desfase lineal en los filtros simplifica la implementación del algoritmo piramidal al no exigir la respectiva compensación de fase.

Localización en el plano tiempo-frecuencia. La Tw presenta alta capacidad de representación en tiempo-frecuencia de señales, con buenas propiedades de localización en ambas variables. Si ψ está suficientemente localizada en tiempo y frecuencia, entonces el marco generado por ψ tendrá esa misma propiedad [26]. Si ψ está bien localizada en tiempo y frecuencia, entonces $\psi_{m,n}$ estará bien localizada alrededor de $a_0^m n b_0$ en tiempo y alrededor de $a_0^{-m} w_0$ en frecuencia.

Se ha encontrado que la representación en tiempo-frecuencia $\rho_x(t, \omega)$ de cualquier señal $x(t)$ debe cumplir las siguientes propiedades [25]:

- La distribución de tiempo-frecuencia debe ser real, y su integración sobre todo el dominio de tiempo-frecuencia es igual a la energía de la señal $x(t)$.
- La energía de la señal en una determinada región R del plano (t, ω) , es igual a la obtenida por integración de $\rho_x(t, \omega)$ sobre los límites de $(\Delta t, \Delta \omega)$ de la región R :

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta \omega} \rho_x(t, \omega) d\omega dt = \mathcal{E}_x(\Delta t, \Delta \omega)$$

donde $\mathcal{E}_x(\Delta t, \Delta\omega)$ es la porción de la energía de la señal comprendida en la banda de frecuencia $\Delta\omega$ y en el intervalo de tiempo Δt .

- El pico de la representación de tiempo-frecuencia de una señal de frecuencia modulada, que contiene una sola componente espectral, se refleja por la frecuencia intermedia de la señal:

$$\left. \frac{\partial \rho_x(t, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_i(t)} = 0$$

Problemas

Problema 3.4. Demostrar la ortogonalidad del factor de pivote $W_N = e^{j2\pi/N}$.

Problema 3.5. Demostrar que para la siguiente función existe la transformada de Hartley

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

Problema 3.6. Hallar la transformada de Hartley de las siguientes funciones

$$\begin{array}{ll} \cos(\pi t/2)(u(t+1) - u(t-1)) & t \exp(-\pi t^2) u(t) \\ \operatorname{sgn}(t) & 1/(t^2 + 2) \end{array}$$

Problema 3.7. Obtener la transformada \mathcal{Z} de la señal discreta $\{x_k\}$ con término común, dado en la forma, $x_n = \alpha^n/n!$, $n \geq 0$.

Problema 3.8. Hallar la respectiva señal discreta a la cual le corresponde cada una de las siguientes Transformadas \mathcal{Z} :

$$\begin{array}{ll} X(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} & X(z) = z^{-2} \\ X(z) = 25/(1 - 0.9z^{-1}) & 1/(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.6z^{-1}) \end{array}$$

3.3. Transformadas ortogonales discretas rápidas

3.3.1. Definición y restricciones de implementación

En las técnicas de proceso digital de señales, es frecuente la necesidad de intercambio entre la representación espectral y la respectiva representación de valores en el tiempo, y viceversa. En este caso, se deberían emplear las respectivas TDF, TDW y TDH, sin embargo, su cálculo directo acorde a las expresiones (3.21a), (3.21b), (3.39a), (3.39b), (3.41) y (3.42) implica la realización de un volumen muy grande de operaciones, generando altas exigencias en los recursos de proceso digital.

Las anteriores restricciones estimularon la búsqueda de algoritmos de cálculo con mínimos costos computacionales para el desarrollo de las transformadas ortogonales discretas; estos algoritmos reciben el nombre de *transformadas rápidas*, cuyo uso disminuye, de manera significativa, la cantidad de operaciones aritméticas en la implementación de las transformadas ortogonales discretas, disminuyendo, tanto el respectivo tiempo de cálculo, como la cantidad de memoria de los sistemas de proceso digital.

La mayoría de los algoritmos de transformadas rápidas se desarrollan basados en dos principios: la descomposición de arreglos de dimensión simple en arreglos de dos dimensiones, o en la factorización de las respectivas matrices de las transformadas, expresadas en (3.17a) y (3.17b), en matrices ralas.

El primer método consiste en descomponer la sucesión inicial en dos sucesiones más cortas, luego, se realiza el cálculo de sus respectivos espectros y, a partir de estos, se realiza la composición del espectro de la sucesión original. El método está basado en la suposición de que la cantidad total de operaciones necesaria para el cálculo del espectro de las sucesiones secundarias es menor que el cálculo directo sobre la sucesión original de (3.16b), de la cual se observa que para una sucesión original de longitud N -par se requieren N^2 multiplicaciones y $N(N - 1)$ adiciones. Al desdoblar la sucesión original en dos sucesiones secundarias de longitud $N/2$, sus espectros requerirán $N^2/2$ sumas y $N(N/2 - 1)$ adiciones, por lo que se reduce el volumen inicial de operaciones prácticamente en dos. Por cuanto, el cálculo del espectro de la sucesión original a partir de las secundarias, no exige mayor costo computacional, el método se puede replicar desdoblando consecutivamente las sucesiones secundarias, con lo que se reduce el volumen inicial de operaciones significativamente.

El segundo método, por factorización, consiste en la representación de las matrices de las transformadas Φ_N en forma de multiplicación de dos más sencillas que contienen principalmente elementos nulos: $\Phi_N^{(1)}, \Phi_N^{(2)}, \dots, \Phi_N^{(k)}$ siendo k el orden de factorización. De esta manera, los coeficientes se calculan por la ecuación matricial:

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \Phi_N^{(1)} \Phi_N^{(2)} \cdots \Phi_N^{(k)} \mathbf{v}_{N \times 1}$$

que debe ser implementada en varias etapas: inicialmente se calcula $\tilde{\mathbf{v}}_{N \times 1}^{(1)} = \Phi_N^{(k)} \mathbf{v}_{N \times 1}$, luego, $\tilde{\mathbf{v}}_{N \times 1}^{(2)} = \Phi_N^{(k-1)} \tilde{\mathbf{v}}_{N \times 1}^{(1)}$, y así sucesivamente hasta

$$\tilde{\mathbf{v}}_{N \times 1}^{(k)} = \mathbf{x}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \Phi_N^{(1)} \tilde{\mathbf{v}}_{N \times 1}^{(k-1)}$$

La economía en la cantidad de operaciones se obtiene por cuanto en cada etapa se realiza un volumen pequeño de operaciones, debido a que cada $\Phi_N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, es del tipo matriz rala.

3.3.2. Transformada rápida de Fourier

Uno de los métodos más efectivos en la reducción del cálculo numérico de la TDF consiste en el cambio de variables, descomponiendo su representación de dimensión simple en dimensión múltiple, en otras palabras, representar un problema complejo por varios más simples.

Sea la sucesión inicial de representación $\{X[n]\}$, $n = 0, 1, \dots, N$, tal que se cumpla la condición $N = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$. La sucesión primaria se desdobra en las secundarias $\{X_1[n]\}$ y $\{X_2[n]\}$, de manera que se tengan los elementos pares, $X_1[n] = X[2n]$, $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ y los elementos impares, $X_2[n] = X[2n + 1]$, $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. Tomando en cuenta (3.21a), la respectiva TDF se puede representar en la forma:

$$x[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X[2n] W_N^{2kn} + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X[2n+1] W_N^{(2n+1)k}$$

Además, por cuanto para el factor de pivote, (3.18), se cumple que

$$W_N^2 = \left(e^{-j2\pi/N} \right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}$$

entonces, los coeficientes de representación inicial pueden escribirse como:

$$x[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X_1[n] W_{N/2}^{2kn} + \frac{2}{N} W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} X_2[n] W_{N/2}^{kn}$$

Sin embargo, $x_l[k] = \mathcal{F}^{-1} \{X_l[n]\}$, por lo que se puede deducir que

$$x[k] = x_1[k] + W_N^k x_2[k], \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (3.52)$$

En la expresión (3.52), se determina solamente la primera mitad de los coeficientes. De otra parte, el factor de pivote cumple las propiedades de periodicidad,

$$W_{N/2}^{l+N/2} = W_{N/2}^l \quad (3.53)$$

y antisimetría

$$\begin{aligned} W_N^{l+N/2} &= e^{-j2\pi \frac{l+N/2}{N}} = e^{-j2\pi \frac{l}{N}} e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi \frac{l}{N}} \\ &= -W_N^l \end{aligned} \quad (3.54)$$

entonces, la descripción completa del arreglo de coeficientes (3.52) es la siguiente:

$$x[k] = \begin{cases} x_1[k] + W_N^k x_2[k], & 0 \leq k \leq N/2 - 1 \\ x_1[k - N/2] + W_N^{k-N/2} x_2[k - N/2], & N/2 \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

El procedimiento analizado se puede replicar sobre ambas sucesiones secundarias, $X_1[k]$ y $X_2[k]$, cada una de las cuales se subdividen en las respectivas sucesiones derivadas $x_{mn}[k]$, para los valores $m = 0, 1, \dots, N/4 - 1$, $n = 1, 2$ (conservando los elementos pares en unas sucesiones y los impares en las alternas), de tal manera que los respectivos elementos de representación estarán dados por

$x[k]_n = x_{m1}[k] + W_{N/2}^k x_{n2}[k]$, $0 \leq k \leq N - 1$. Este proceso de desdoblamiento de las series se continúa hasta que la longitud de la serie derivada disminuya hasta $N = 2$.

En la Figura 3.8 se muestra el diagrama de grafos que indica la dirección de las operaciones, para el caso de $N = 8$, en la cual se observa que los elementos de salida no están dispuestos de forma correcta acordes al ordinal de la serie. En particular, los elementos internos de cada serie, están invertidos en su orden.

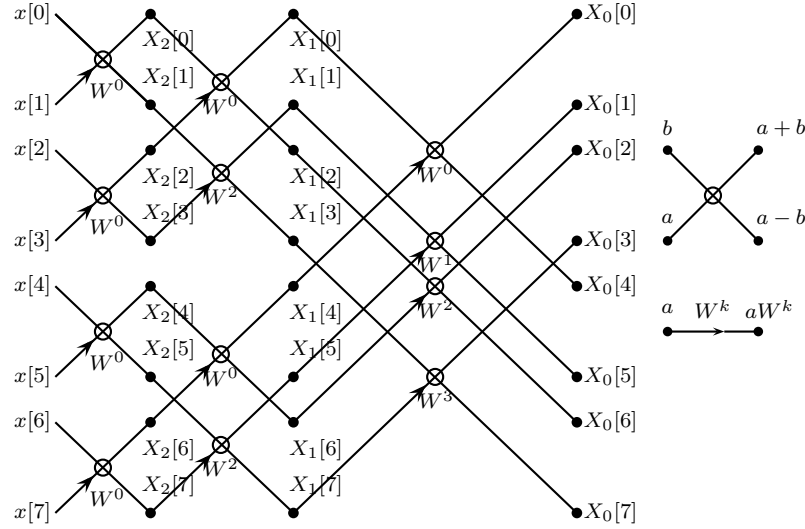


Figura 3.8. Secuencia de operaciones de la transformada rápida de Fourier ($N = 8$)

El algoritmo mostrado en el desarrollo de la Transformada rápida de Fourier (TRF) (3.25a), se emplea para el cálculo de la transformada en el sentido inverso (3.25b)

$$X^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x^*[k] W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.55)$$

La expresión (3.55) corresponde al algoritmo de la TDF, vista sin tener en cuenta la constante $1/N$. Si se conoce el conjugado $X^*[n]$, es relativamente simple determinar la sucesión $\{X[n]\}$.

Una forma alterna del desdoblamiento de las sucesiones originales consiste en subdividir la sucesión inicial en las mismas dos sucesiones secundarias, pero de la siguiente manera:

$$X_1[n] = X[n], \quad n = 0, \dots, N/2 - 1 \quad \text{y} \quad X_2[n] = X[n + N/2], \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

En otras palabras, la primera sucesión recoge los primeros $N/2$ elementos de $X[n]$, mientras la segunda recoge los últimos $N/2$ términos.

La transformada de Fourier de la sucesión $\{X[n]\}$, teniendo en cuenta la forma de subdivisión ante-

rior propuesta, es la siguiente:

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X[n] W_N^{nk} + \frac{2}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} X[n] W_N^{nk} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X_1[n] W_N^{nk} + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} X_2[n] W_N^{(n+N/2)k} \end{aligned}$$

luego

$$x[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(X_1[n] + X_2[n] e^{-j\pi k} \right) W_N^{nk}$$

Los coeficientes pares se determinan como:

$$\begin{aligned} x[2k] &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} (X_1[n] + X_2[n]) W_N^{2nk} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} (X_1[n] + X_2[n]) W_{N/2}^{nk} \end{aligned}$$

Mientras, los impares se determinan de la siguiente forma:

$$x[2k+1] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} (X_1[n] - X_2[n]) W_N^n W_{N/2}^{nk}$$

De manera similar al primer método expuesto, la transformada de cada una de las sucesiones secundarias puede ser calculada replicando el desdoblamiento, y así sucesivamente, hasta obtener finalmente la última sucesión de longitud mínima $N = 2$. La cantidad de operaciones en ambos métodos expuestos es igual a $N \log N$. El desarrollo de diferentes algoritmos de análisis espectral de Fourier se muestra en el apéndice A.

Transformada rápida de Hartley. El cálculo de la TDH presenta un problema análogo al de la TDF, debido a que se tienen que desarrollar N^2 operaciones aritméticas para un conjunto de datos compuesto de N elementos. La TRF usa el proceso de permutación que permite rápidamente calcular la transformada de los pares de datos (reales e imaginario), además, los combina de nuevo para hacer la transformada completa en vez de hacer el cálculo de un conjunto de datos complejos. La permutación es particularmente rápida cuando la cantidad de datos es grande. Al suponer los 2 elementos pares semejantes, usando el proceso de *mariposa*, se puede calcular la TF en aproximadamente $N \log N$ operaciones para un conjunto de N datos.

La transformada de Hartley para datos pares (a, b) es $\frac{1}{2}(a + b, a - b)$, cuyo cálculo es simple, entonces, se puede proponer esta sucesión de 2 elementos para calcular la transformada de Hartley. Sin embargo, se requiere de la expresión que relacione la TDH en términos de longitudes medias subsecuentes.

Las expresiones de descomposición general de la TDH se basan en el apareamiento de datos:

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f) \cos(2\pi f/N_g) + H_2(N_g - f) \sin(2\pi f/N_g)$$

De forma análoga, el mismo método de descomposición puede ser empleado en la TF:

$$X(f) = F_1(f) + F_2(f)e^{(2\pi f/N_g)}$$

donde $N_g = N/2$ es el número de elementos en la sucesión de media longitud.

La descomposición de la transformada rápida de Hartley (TRH) difiere de la TRF en que los elementos multiplicados por el término trigonométrico no son simétricos en la expresión de descomposición para TRH. El término multiplicado por los coeficientes trigonométricos involucra solo a $X(f)$ en la descomposición de TRH, en la cual ambos $H(f)$ y $H(N_g)$ tienen coeficientes de senos; esta simetría se vuelve aparente cuando se expresa la transformada discreta como una operación de matrices.

Los términos de la matriz TRF son simétricos, mientras, los términos correspondientes a la TRH son asimétricos. Esto genera problemas de cálculo, porque el procesamiento de la matriz asimétrica es difícil de implementar; se puede trabajar con esta asimetría utilizando un término independiente, por ejemplo, introduciendo un índice para los elementos multiplicados por los coeficientes del senos, tal que decrezca, mientras que los otros índices aumentan (*índice de regresión*).

Comparación de los algoritmos de TRF y TRH. La transformada de Fourier se puede obtener a partir de la transformada de Hartley. De hecho, frecuentemente es más rápido generar la transformada de Fourier y el espectro de potencia a partir de la TRH que con la TRF, debido a que en el cálculo del procedimiento de mariposa se emplean cantidades reales y no imaginarias, que requieren de operaciones de punto flotante.

Las partes imaginarias y reales de la TRF al final del cálculo se relacionan mediante las ecuaciones:

$$F_n(f) = H(f) + H(N - f)$$

$$F_g(f) = H(f) - H(N - f)$$

donde $F_n(f)$ es la parte real de la transformada compleja de Fourier y $F_g(f)$ es la parte imaginaria.

El cálculo del espectro de potencia directamente de la TRH se realiza mediante la relación:

$$S(f) = [H(f)^2 + H(N - f)^2] / 2$$

El cálculo de la convolución de un par de funciones se puede realizar empleando las transformadas de Hartley ó Fourier. Sin embargo el empleo de la TRH resulta ser superior a la TRF en términos de velocidad para cualquier implementación dada. Las ecuaciones siguientes resumen la función de convolución para las transformadas de Hartley y Fourier, respectivamente:

$$f_1(t) * f_2(t) = H_1(f)H_{2p}(f) + H(-f)H_{2i}(f), \quad (\text{Hartley})$$

$$f_1(t) * f_2(t) = F_1(f) F_2(f), \quad (\text{Fourier})$$

Los subíndices p e i en la ecuación de Hartley denotan las partes pares e impares de la transformada. Si la función es par o impar, entonces la convolución para la transformada de Hartley se reduce a:

$$f_m(t) * x_n(t) = H_m(f)H_n(-f)$$

3.3.3. Transformada rápida discreta de Walsh

Los algoritmos de la transformada rápida de Walsh existen para cualquier forma de ordenamiento de las funciones. En este caso se analiza el método basado en la transformada rápida de Hadamar, cuyo algoritmo puede ser obtenido, bien por factorización de la matriz de Hadamar \mathbf{A}_N , o bien por su división. Sin embargo, es preferible analizar el segundo algoritmo por su simplicidad.

La matriz de Hadamar de orden N , definido como un número par, se denomina la matriz cuadrada \mathbf{A}_N con elementos

$$a_{mn} = \{1, -1\}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1$$

de tal manera, que $\mathbf{A}_N \mathbf{A}_N^T = N \mathbf{I}_N$, siendo \mathbf{I}_N la matriz de identidad. De la definición de la matriz de Hadamar, se deduce la ortogonalidad de sus filas, esto es,

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_{nm} a_{kn} = 0, \quad n \neq k$$

La matriz de Hadamar de orden 2^m se puede obtener a partir de una matriz de Hadamar de menor orden, empleando la siguiente expresión recurrente:

$$\mathbf{A}_{2^n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2^{n-1}} & \mathbf{A}_{2^{n-1}} \\ \mathbf{A}_{2^{n-1}} & -\mathbf{A}_{2^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Sea la señal $x[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Entonces

$$\mathbf{v}_{N \times 1} = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_{N \times 1} \quad (3.57)$$

Empleando la propiedad (3.56), la transformada (3.57) se representa como:

$$\begin{bmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ v[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N/2} & \mathbf{A}_{N/2} \\ \mathbf{A}_{N/2} & -\mathbf{A}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

la cual, a su vez, se puede dividir en las dos siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ v[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_{N/2} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v[\frac{N}{2}] \\ v[\frac{N}{2}+1] \\ \vdots \\ v[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_{N/2} \begin{bmatrix} x_1[\frac{N}{2}] \\ x_1[\frac{N}{2}+1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde

$$\begin{aligned} x_1[k] &= x[k] + x[k + N/2 - 1], \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ x_1[k] &= x[k - N/2] - x[k], \quad k = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la misma división sobre el último par de matrices se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ v[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N/4} & \mathbf{A}_{N/4} \\ \mathbf{A}_{N/4} & -\mathbf{A}_{N/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v[\frac{N}{2}] \\ v[\frac{N}{2}+1] \\ \vdots \\ v[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N/4} & \mathbf{A}_{N/4} \\ \mathbf{A}_{N/4} & -\mathbf{A}_{N/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[\frac{N}{2}] \\ x_1[\frac{N}{2}+1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}$$

Cada una de estas matrices puede ser dividida de manera consecutiva en otras dos matrices como se muestra en (3.58). En el caso de la primera matriz se tiene

$$\begin{bmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ v[\frac{N}{4}-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_{N/4} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ \vdots \\ x_2[\frac{N}{4}-1] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v[\frac{N}{4}] \\ v[\frac{N}{4}+1] \\ \vdots \\ v[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_{N/4} \begin{bmatrix} x_2[\frac{N}{4}] \\ x_2[\frac{N}{4}+1] \\ \vdots \\ x_2[\frac{N}{2}-1] \end{bmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} x_2[k] &= x_1[k] + x_1[k + N/4 - 1], \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \\ x_2[k] &= x_1[k - N/4] - x_1[k], \quad k = N/4, N/4 + 1, \dots, N/2 - 1 \end{aligned}$$

La segunda matriz se divide de manera similar. En consecuencia, el procedimiento de división puede realizarse consecutivamente hasta la longitud $N/(N-1) = 2$, para la cual se tiene la siguiente matriz base:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En la Figura 3.9(a) se muestra el diagrama de grafos correspondiente al algoritmo presentado para la transformada rápida de Hadamar, el cual requiere $N \log_2 N$ operaciones, para el cálculo de una sucesión de longitud $N = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$. El algoritmo presentado también es aplicable a la transformada rápida de Hadamar-Walsh en sentido inverso.

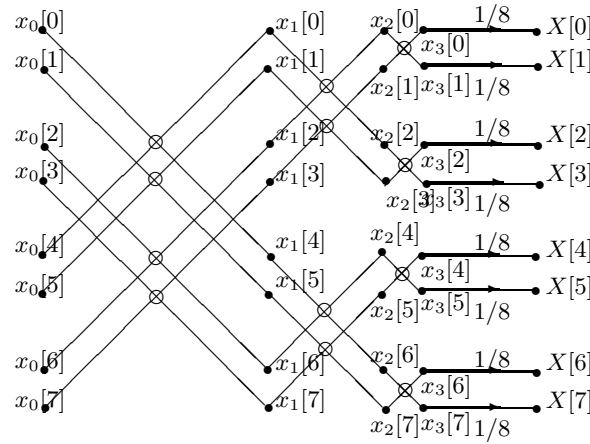
3.3.4. Transformada rápida discreta de Haar

En este caso, la implementación de la transformada rápida, usualmente, se lleva a cabo empleando la transformada modificada de Hadamar [27]:

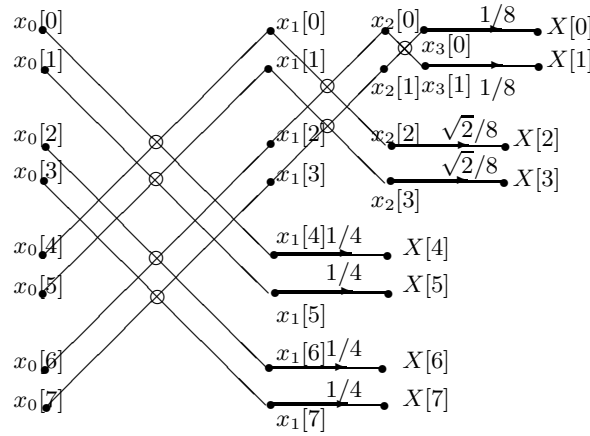
$$\mathbf{v}_{N \times 1} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_N^M \mathbf{x}_{N \times 1}, \quad N = 2^m, m \in \mathbb{Z}$$

donde \mathbf{A}_N^M es la matriz ortogonal, definida por la relación recurrente:

$$\mathbf{A}_{2^k}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2^{k-1}}^M & \mathbf{A}_{2^{k-1}}^M \\ 2^{(k-1)/2} \mathbf{I}_{2^{k-1}} & -2^{(k-1)/2} \mathbf{I}_{2^{k-1}} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$



(a) Transformada rápida de Hadamar



(b) Transformada rápida modificada de Hadamar

Figura 3.9. Diagrama de implementación de la transformada de Hadamar ($N = 8$)

siendo $\mathbf{I}_{2^{k-1}}$ la matriz unitaria de orden 2^{k-1} , con condición inicial, $\mathbf{A}_1^M = \mathbf{I}$.

En calidad de ejemplo se analiza la matriz ortogonal para $N = 8$:

$$\mathbf{A}_8^M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El algoritmo de la transformada modificada de Hadamar, que es similar al analizado para el caso de la TDW rápida, tiene la estructura mostrada en la Figura 3.9(b). La cantidad de operaciones es de $2(N-1)$ sumas (o restas), N multiplicaciones y $\log_2(N-1)$ inversiones binarias, por lo que de los algoritmos rápidos, vistos para las transformadas ortogonales discretas, el algoritmo de la transformada

de Haar es el más económico en cuanto a costo computacional.

El cálculo de la transformada modificada de Hadamar en sentido inverso se determina de la relación:

$$\mathbf{x}_{N \times 1} = [\mathbf{A}_N^M]^{-1} \mathbf{v}_{N \times 1}$$

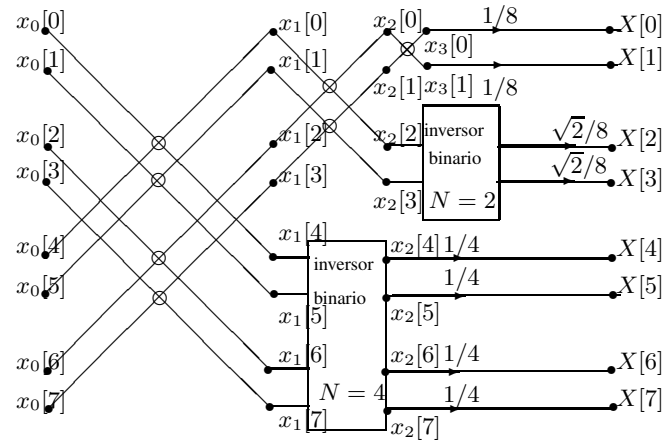


Figura 3.10. Diagrama de la transformada rápida de Haar ($N = 8$)

Debido a que la matriz ortogonal \mathbf{A}_N^M no es simétrica, entonces

$$\mathbf{A}_N^M \neq [\mathbf{A}_N^M]^{-1}$$

y por lo tanto, los respectivos grafos del par de transformadas rápidas de Hadamar, en los sentidos inverso y directo, no coincidirán. En otras palabras, es necesario sintetizar un algoritmo diferente de cálculo para cada uno de los sentidos de la transformada rápida de Hadamar. En la Figura 3.10, se muestra la secuencia de operaciones en el cálculo de la transformada de Haar, basado en los algoritmos de la transformada rápida modificada de Hadamar antes explicada.

Problemas

Ejercicio en el CP 3.4. [Matlab] Analizar la periodicidad del factor de pivote, (3.53), mediante el siguiente código:

```
N=2,3,4,5,6,7,8; % Escala de tiempo
for n = 1:5*N
    m(n)=exp(-j*2*pi*n/N);
end
m % valores del factor de pivote
```

Ejercicio en el CP 3.5. [Matlab] Realizar el código que analice la propiedad de antisimetría del factor de pivote, (3.54).

Problema 3.9. Calcular la convolución lineal de las siguientes dos sucesiones finitas: $\mathbf{x} = [2 \ -2 \ 1]^T$ y $\mathbf{h} = [1 \ 2]^T$.

Problema 3.10. Calcular la convolución circular de las siguientes dos sucesiones finitas: $\mathbf{x} = [2 \ -2 \ 1]^T$ y $\mathbf{h} = [1 \ 2 \ 0]^T$.

3.4. Representación ortogonal de sistemas en tiempo discreto

3.4.1. Respuesta discreta a impulso

Los sistemas lineales en tiempo discreto se describen por medio de ecuaciones de diferencias lineales, pero usualmente, con parámetros constantes:

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = \sum_{n=0}^M b_n x[k-n] \quad (3.59)$$

donde $a_0 = 1$, $y[k-n]$, $x[k-n]$, corresponden a los valores de las señales discretizadas de salida y entrada, respectivamente.

Cuando se cumple que $a_n \neq 0$, para cualquier $n \neq 0$, entonces el sistema se denomina *recursivo*. La señal a la salida de tal sistema depende no solamente de las señales de entrada, sino de valores de la señal de salida en momentos anteriores. En cambio, si los coeficientes $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, entonces se habla de sistemas *no recursivos*, cuya señal de salida se determina solamente por la acción de entrada hasta el momento actual de tiempo.

La respuesta a impulso de un sistema discreto $h[n]$ corresponde a la señal de salida cuando la entrada es la función delta, (3.8), esto es, $x[n] = \delta[n]$. En concordancia con la definición (2.34), la señal a la salida de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo se define como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n, k] x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] x[k], \quad (3.60)$$

Teniendo en cuenta que la condición de realización física del sistema implica que se cumpla,

$$h[n, k] = 0, \quad \forall k > n$$

entonces se obtiene que:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k], \quad n = 0, 1, \dots$$

En los filtros no recursivos, la respuesta a impulso contiene una cantidad finita de elementos, que no excede el valor de $M + 1$, donde M es el límite superior de la suma en (3.60), correspondiente a los elementos de la entrada; estos sistemas se denominan de *respuesta a impulso finita (RIF)*:

$$h_{RIF}[n] = \sum_{i=n_0}^N \alpha_i \delta[n-i], \quad \forall n_0, N < \infty \quad (3.61)$$

Por el contrario, los sistemas discretos recursivos poseen respuesta a impulso infinita y se denominan de *respuesta a impulso infinita (RII)*:

$$h_{RII} = \sum_{i=n_0}^N \alpha_i \delta[n-i], \quad \forall |N - n_0| \rightarrow \infty \quad (3.62)$$

3.4.2. Función de convolución discreta

Cualquier sucesión discreta, correspondiente a la señal de entrada, en la forma

$$\{x[k]\} = \cdots + x[-2]\{\delta[k+2]\} + x[-1]\{\delta[k+1]\} + x[0]\{\delta[k]\} + x[1]\{\delta[k-1]\} \cdots$$

se podrá representar en términos de la función de impulso unitario (3.8):

$$\{x[k]\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\{\delta[k-i]\}$$

La respectiva sucesión de salida $\{y[n]\}$ empleando la propiedad de linealidad (3.14) tiene la forma, $\{y[k]\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\{h[k-i]\}$, donde el término k de la sucesión de salida se define como

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[k-i] \quad (3.63)$$

La sumatoria (3.63) se conoce como la *convolución discreta* y se representa por la expresión:

$$\{y[k]\} = \{x[k]\} * \{h[k]\} = \{h[k]\} * \{x[k]\}$$

La sumatoria (3.63), generalmente, se conoce como *acíclica* o *aperiódica*. Si la señal de entrada $x[n]$ es de longitud M y la respuesta a impulso $h[n]$ es de longitud N , entonces la respuesta $y[n]$ es de longitud $N + M - 1$. en el caso de la convolución cíclica, que se define como:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]h[k-i]$$

las sucesiones de entrada se consideran de igual longitud N . Además, $x[n]$ y $h[n]$ se asumen periódicamente extendidas fuera del rango $[0, N-1]$, que resulta también en una salida $y[n]$ periódica. Una notación alterna empleada durante el desarrollo de los algoritmos de cálculo, basada en la operación de módulo, corresponde a la siguiente:

$$y[\langle k \rangle_N] = \sum_{i=0}^{N-1} x[\langle i \rangle_N]h[\langle k-i \rangle_N]$$

donde $\langle n \rangle_N$ es el residuo de n módulo N (cuando la base es obvia, su valor se omitirá).

La convolución discreta en (3.63) se define como *lineal* si está determinada para todos los valores de i dentro del intervalo $(-\infty, \infty)$. Cuando se tiene que la señal $x[i] = 0$, para todo i fuera del intervalo $[N_1, N_2]$, entonces, se denominará señal de longitud $(N = N_2 - N_1 + 1)$, que por conveniencia se nota por N . De igual manera, si la respuesta $h[v] = 0$ fuera de $[M_1, M_2]$ se denomina de longitud $(M = M_2 - M_1 + 1)$. Para el caso de dos señales finitas, los términos de la suma (3.63), comprendidos entre $M_2 + N_2 < I < M_1 + N_1$, resultan ser cero, por lo que la señal de salida será de longitud $(M_2 + N_2 - N_1 - M_1 + 1)$ que corresponde a la menor suma de las longitudes de las señales que conforman la convolución. En este caso, la primera componente diferente de cero ocurre cuando $i - M_1 = N_1$ ó $i = M_1 + N_1$ y el último cuando $i - M_2 = N_2$ ó $i = M_2 + N_2$.

Ejemplo 3.3. Determinar la convolución $y[n]$ para las funciones discretas dadas $h[n] = a^n u[n]$ y $x[n] = b^n u[n]$.

Empleando (3.63) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i u[i] b^{n-i} u[n-i] \\
 &= \left\{ \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} u[n] \right\} = \left\{ b^n \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^i \right\} u[n] \\
 &= b^n \frac{1 - (a/b)^{n+1}}{1 - a/b} u[n] = \frac{b^{n+1}(1 - (a/b)^{n+1})}{b - a} u[n] \\
 y[n] &= \frac{b}{b-a} b^n u[n] - \frac{a}{b-a} a^n u[n].
 \end{aligned}$$

Cálculo de la convolución discreta

Convolución lineal. La convolución discreta, definida en (3.63), en su forma lineal se puede escribir por medio de la multiplicación de matrices, en la cual las señales de entrada y salida corresponden a vectores columnas, mientras la matriz de respuesta a impulso tiene filas que corresponden a sus versiones desplazadas en el tiempo. Asumiendo $N_1 = M_1 = 0$, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N_2 + M_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h[1] & h[0] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & h[M_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N_2] \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Análisis de tiempo corto de la señal de entrada. Frecuentemente, es necesario trabajar con secciones cortas de una señal de entrada de longitud larga. Existen 2 métodos de cálculo de la convolución en este caso. El primero denominado de *traslapo aditivo de salida* [28], en el cual la señal de entrada es representada por una suma de bloques con longitud L , de la forma:

$$x_m[n] = \begin{cases} x[n], & mL \leq n \leq mL + L - 1 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} \quad (3.65)$$

La sustitución de (3.65) en (2.34) da como resultado

$$y[n] = h[n] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m[n], \quad (3.66)$$

definiendo la convolución elemental, $y_m[n] \triangleq h[n] * x_m[n]$, entonces, la ecuación (3.66) será

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m[n] \quad (3.67)$$

Cada una de las convoluciones, definidas en (3.67), corresponde a una entrada de longitud f_{\max} y a una respuesta h de longitud M , dando una salida y_m de longitud $f_{\max} + M - 1$. Estos segmentos de salida se traslapan y adicionan de acuerdo a (3.67).

El método de traslapeo aditivo de salida puede ser descrito empleando la notación matricial de (3.64), donde los bloques de salida corresponden al seccionamiento de la matriz \mathbf{h} .

El segundo método de seccionamiento se denomina de *traslapeo selectivo*, en el cual los segmentos de entrada se convolucionan con $h[\cdot]$ y los apropiados valores de salida son escogidos. En el algoritmo, se toma en cuenta que la respuesta de una señal de longitud M con la respuesta a impulso $h[n]$ sólo dura $M - 1$ tiempos como se ilustra en la matriz (3.68).

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

La transformada de la convolución lineal discreta, teniendo en cuenta (3.35), es el producto de las transformadas \mathcal{Z} de la entrada x y la respuesta h , así

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.69)$$

Convolución circular. Se define como la convolución de las señales $x[n]$ en la forma

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} h \langle n - m \rangle x[m], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ y[n] &= h \langle n \rangle \otimes x[n] \end{aligned} \quad (3.70)$$

En (3.70), los índices son evaluados por módulo N . La convolución circular se nota por el símbolo \otimes . Cabe anotar, que mientras la convolución circular de dos señales de longitud N da una salida de longitud también N , en la convolución lineal la salida es de $2N - 1$.

La representación matricial de la convolución circular corresponde a reemplazar los valores cero en las columnas de (3.68) por los valores de la señal cíclicamente desplazados, razón por la cual se denomina circular:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[7] & h[6] & h[5] & h[4] & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[7] & h[6] & h[5] & h[4] & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & h[7] & h[6] & h[5] & h[4] & h[3] \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & h[7] & h[6] & h[5] & h[4] \\ h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & h[7] & h[6] & h[5] \\ h[5] & h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & h[7] & h[6] \\ h[6] & h[5] & h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & h[7] \\ h[7] & h[6] & h[5] & h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

La transformada de la convolución circular, determinada en (3.67), corresponde a

$$\mathcal{F}\{\mathbf{y}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{h}\}\mathcal{F}\{\mathbf{x}\} \quad (3.72)$$

Debido a la relación de la convolución circular con la TDF en (3.72), mientras la lineal ocurre con la transformada \mathcal{L} en (3.69), y por cuanto preferentemente se desarrollan algoritmos discretos para el cálculo de la TDF, se hace necesario obtener la relación entre ambos tipos de convolución. Del análisis de las matrices (3.64) y (3.71) se puede deducir que para el cálculo de la convolución lineal a partir de la circular para una entrada de longitud N y respuesta a impulso de longitud M , se deberá agregar $M - 1$ ceros a la entrada y $N - 1$ a la respuesta h , con lo cual las señales, que forman la convolución, tendrán igual longitud $M + N - 1$, lo mismo que la salida y , que corresponde a la convolución lineal. Esta operación se muestra en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & h[1] \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[1] & h[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3. Función de transferencia discreta

Como en los sistemas continuos, en los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo, descritos por la respuesta a impulso $h[n]$, se determina la señal de salida $y[n]$, para el caso en que se tiene una señal de entrada de la forma $x[n] = \exp[jn\Omega]$, esto es,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]e^{j(n-i)\Omega} \\ &= e^{jn\Omega} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]e^{-ji\Omega} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (2.11), entonces,

$$y[n] = e^{jn\Omega} H(e^{j\Omega}),$$

donde $H(e^{j\Omega})$ es la respuesta de frecuencia o *función de transferencia discreta*, que en forma general, puede ser compleja como se demostró en el caso de los sistemas continuos, así,

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}), \quad (3.73)$$

entonces,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Los métodos de análisis de sistemas discretos, básicamente, corresponden a los mismos métodos de los continuos, los cuales están representados en la Figura 3.11. De acuerdo al desarrollo matemático descrito de la función de transferencia pueden existir varios métodos para su determinación. El primer método emplea la función de impulso unitario $\delta[n]$ como señal de entrada, un segundo método emplea

la función exponencial $e^{jn\Omega}$ en correspondencia con la definición y, por último, sin especificar la señal de entrada se puede analizar la ecuación de diferencias que describe el sistema lineal [28].

De otra parte, el método matricial es común en la descripción de sistemas discretos, en el cual el operador \mathcal{H} se representa en forma de matriz.

Sean en calidad de funciones propias del operador, las siguientes dependencias discretas $\phi_m[k]$, $m, k = 0, 1, \dots, N-1$, esto es,

$$\mathcal{H} \{ \phi_m[k] \} = H(m) \phi_m[k],$$

El proceso de filtración discreta puede ser entendido como la multiplicación de los coeficientes $v[n]$ obtenidos de la representación de la señal de entrada en base $\phi_m[k]$ por los respectivos coeficientes de la función de transferencia $H(m)$. La multiplicación corresponde a los coeficientes espectrales de la señal de entrada.

Las restricciones de implementación práctica hacen que en el proceso de señales se utilicen solamente bases discretas del tipo ortogonal, para los cuales la señal de salida puede ser representada por la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{Y}_{N \times 1} = \frac{1}{\mathcal{P}_k N} \mathbf{\Phi}_N^H \mathbf{H}_N \mathbf{\Phi}_N \mathbf{X}_N$$

donde \mathbf{Y} y \mathbf{X} se forman de las respectivas señales discretizadas de salida y entrada, $\mathbf{\Phi}$ matriz ortogonal, con filas determinadas por el conjunto ortogonal de funciones discretas $\phi_m[k]$, $i, k = 0, 1, \dots, N-1$, donde N es el conjunto de la base y \mathbf{H} es la matriz diagonal compuesta por los coeficientes $H(m)$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H(N-1) \end{bmatrix}$$

Por lo anterior, la transformación lineal de filtración discreta se representa mediante la matriz:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{N} \mathbf{\Phi}^H \mathbf{H} \mathbf{\Phi} \quad (3.74)$$

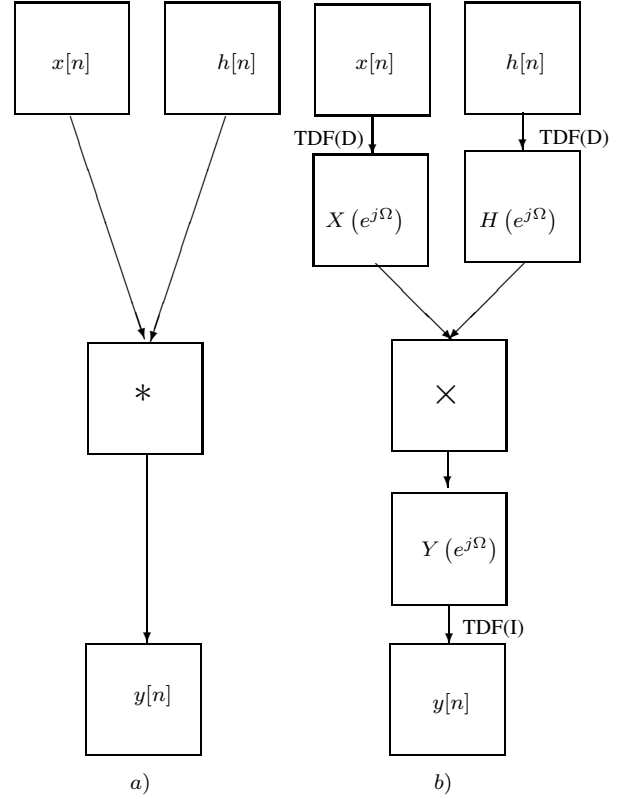


Figura 3.11. Análisis de sistemas discretos

3.4.4. Filtros discretos de Walsh

La ecuación representativa del sistema (3.59), en este caso, tiene la forma

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k \oplus n] = \sum_{m=0}^M b_m x[k \oplus m]$$

donde $a_0 = 1$, $a_n \neq 0$, $x[k]$ y $y[k]$ son las versiones discretizadas de entrada y salida, respectivamente. El diagrama estructural de los filtros de Walsh, corresponde al diagrama 4.2(a), en el cual, las líneas de retardo corresponden al desplazamiento diádico en una unidad de tiempo ($N + M + 1$).

La respuesta a impulso de los filtros de Walsh se halla por definición excitando el sistema con la señal singular:

$$\delta[n \oplus k] = \begin{cases} 1, & n \oplus k = 0 \\ 0, & 0 \leq n \oplus k \leq N - 1 \end{cases}$$

La salida del filtro se representa mediante el correspondiente operador lineal de filtración discreta:

$$y[n] = \mathcal{H} \{x[n]\} = \mathcal{H} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \delta[n \oplus k] \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \mathcal{H} \{ \delta[n \oplus k] \}$$

luego,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n \oplus k]$$

La función de transferencia se halla a partir de los valores propios del filtro de Walsh, descritos en (1.48b) y (1.48a):

$$\mathcal{H} \{ \text{cal}_l[k] \} = H_c(l) \text{cal}_l[k] \quad (3.75)$$

$$\mathcal{H} \{ \text{sal}_l[k] \} = H_s(l) \text{sal}_l[k] \quad (3.76)$$

Reemplazando en (3.59), la señal de entrada por las funciones $\text{cal}_l[k]$ y $\text{sal}_l[k]$, el anterior sistema toma la forma:

$$H_c(l) = \sum_{m=0}^M b_m \text{cal}_l[m] \Bigg/ \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \text{cal}_l[n] \right)$$

$$H_s(l) = \sum_{m=0}^M b_m \text{sal}_l[m] \Bigg/ \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \text{sal}_l[n] \right)$$

Si se conocen los coeficientes de transferencia $H_c(l)$, $H_s(l)$ y el espectro $a_x(l) + b_x(l)$ de la señal de entrada $x[k]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ se puede hallar el espectro de salida

$$a_y(l) + b_y(l) = H_c(l) a_x(l) + H_s(l) b_x(l)$$

cuya transformada de Fourier-Walsh, resulta en la señal de salida del filtro:

$$y[k] = \sum_{l=0}^{N-1} (H_c(l)a_x(l)\text{cal}_l[k] + H_s(l)b_x(l)\text{sal}_l[k])$$

La relación entre los coeficientes de transferencia $H_{c,s}(l)$ y la respuesta a impulso $h[n]$, se establece hallando la transformada directa de Fourier-Walsh de la expresión general del filtro (3.59):

$$\begin{aligned} a_y(l) &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n \oplus k) \text{cal}_l[n] \\ b_y(l) &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n \oplus k) \text{sal}_l[n] \end{aligned}$$

Sea $m = n \oplus k$. Por cuanto $\text{cal}_l[m \oplus k] = \text{cal}_l[m] \text{cal}_l[k]$, así mismo, teniendo en cuenta que $\text{sal}_l[m \oplus k] = \text{sal}_l[m] \text{sal}_l[k]$, se encuentra

$$\begin{aligned} a_y(l) &= a_h(l)a_x(l)N \\ b_y(l) &= b_h(l)b_x(l)N \end{aligned}$$

donde $a_h(l) + b_h(l)$ es el espectro de la respuesta a impulso.

De lo anterior, se puede inferir que los respectivos coeficientes de transferencia $H_{c,s}(l)$ están relacionados con la respuesta a impulso por las expresiones:

$$\begin{aligned} H_c(l) &= \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \text{cal}_l[m] \\ H_s(l) &= \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \text{sal}_l[m] \end{aligned}$$

De las relaciones (3.75) y (3.76) se puede generalizar el operador para el filtro de Walsh, dado por $H\{w_l\} = H(l)w_l[k]$, $l, k = 0, 1, \dots, N-1$, siendo $w_l[k] = N^{-1/2} \text{wal}_k[k]$ el sistema de funciones ortonormales discretas, que corresponde a los vectores propios del operador de filtración, el cual puede ser representado por la matriz de orden N , acorde con la expresión (3.74):

$$\mathcal{H} = \mathbf{W}^T \mathbf{H} \mathbf{W}$$

Por cuanto la matriz \mathbf{W} es simétrica, el operador de filtración de Walsh tiene la forma:

$$\mathcal{H} = \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{W}$$

Del par de anteriores relaciones, resulta entonces, que la síntesis del respectivo filtro de Walsh, se puede realizar en correspondencia con la siguiente expresión:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{W} \mathbf{X}$$

de la cual resulta que para la implementación del filtro, cuya estructura se muestra en la Figura 3.12, se requieren tres diferentes dispositivos: el primero que calcule los coeficientes espectrales $c_x[i]$ de la señal de entrada y derivados de la siguiente operación:

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{W}\mathbf{X}$$

Un segundo dispositivo que efectúe la multiplicación de los coeficientes obtenidos $c_x[i]$ por los valores de la función de transferencia $H(i)$, que corresponde a la operación $\mathbf{C}_y = \mathbf{H}\mathbf{C}_x$, y por último, se encuentra el dispositivo que forma el arreglo de la señal de salida $y[i]$ y que corresponde a la operación, $\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{C}_y$.

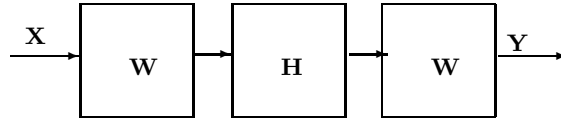


Figura 3.12. Filtro discretos de Walsh

Ejemplo 3.4. Determinar la función de transferencia $H(e^{j\Omega})$ del sistema representado en la Figura 3.13(a), donde $|\alpha| < 1$.

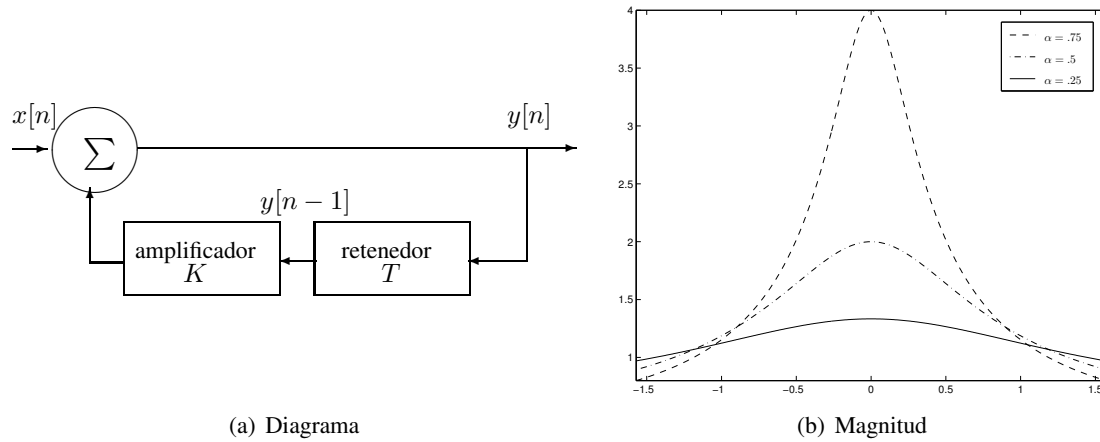


Figura 3.13. Sistema recursivo de primer orden

Método 1. De acuerdo al sistema presentado, la respuesta a impulso dada será $h[n] = \alpha^n u[n]$, luego, la función de transferencia se determina como:

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

Método 2. Sea $x[n] = e^{jn\Omega}$ la señal de entrada, con lo cual, la señal a la salida del sistema corresponde a $y[n] = H(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}$, cuyo versión con retardo en un tiempo de discretización, aplicando (3.15), resulta en $y[n-1] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega(n-1)}$.

La ecuación recurrente del filtro está dada por la expresión iterativa simple de primer orden:

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

Reemplazando

$$H(e^{j\Omega})e^{jn\Omega} = e^{jn\Omega} + \alpha H(e^{j\Omega})e^{j\Omega(n-1)} = \frac{e^{jn\Omega}}{e^{jn\Omega} - \alpha e^{j\Omega(n-1)}} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

A partir de la ecuación recurrente obtenida y empleando las expresiones (3.15) y (3.73) se obtiene

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + \alpha e^{j\Omega} Y(e^{j\Omega}).$$

Debido a que $Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$, entonces

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\Omega}}$$

Finalmente, se puede demostrar que el módulo y la fase de $H(e^{j\Omega})$ respectivamente serán (Figura 3.13(b)):

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$$

mientras

$$\Omega(e^{j\Omega}) = \arctan\left(\frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}\right).$$

Problemas

Problema 3.11. Calcular la TDF directa del pulso discreto $\delta[n]$: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-jn\Omega}$.

Problema 3.12. Determinar la respuesta del filtro recursivo empleado en la detección de señales periódicas (previo conocimiento de T), ilustrado en la Figura 3.14 para los siguientes casos: a) $K = 1$, b) $K < 1$.

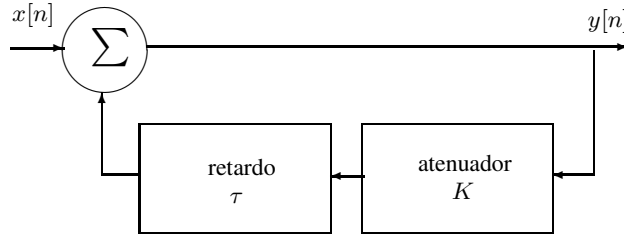


Figura 3.14.

Problema 3.13. Demostrar que el sistema discreto con respuesta a impulso $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{n-i} \delta[n-i]$ es del tipo RII.

$$h[n] = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{n-i} \delta[n-i] = \sum_{i=0}^{\infty} u[i] \alpha^{n-i} \delta[n-i] = \alpha^n u[n].$$

Problema 3.14. Hallar la respuesta a escalón unitario discreta $p[n]$, que corresponde a la respuesta de un dispositivo discreto cuando la sucesión de entrada es la función escalón unitaria discreta dada en (3.10), aplicado al ejemplo (3.4), suponiendo $\alpha < 1$.

Problema 3.15. Demostrar que la respuesta a escalón unitario de un filtro digital es:

$$p(t) = y[z]_{x[t]=1} = H(z) \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Ejercicio en el CP 3.6. [Matlab] Representar las siguientes señales:

- $x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \exp(-bt)$, $b > 0$,
- $x(t) = \text{rect}_T(t) \Lambda(t, T/4) \cos(a\Omega_0 t + \varphi)$, $a > 1$, siendo $\Lambda(t, T)$ la función triangular con periodo T .

Ejercicio en el CP 3.7. [Matlab] Hallar la convolución de las funciones $\text{sinc}(t)$ y Dirichlet:

$$\text{diric}(t, n) = \begin{cases} -1^{\frac{t}{2\pi}(n-1)}, & t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ \frac{\sin(nt/2)}{n \sin(t/2)}, & t \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

```

%Convolucion discreta
N=200; n=0:pi/N:2*pi; h=sinc(n); x=diric(n,16)/max(diric(n,16));
subplot(211), plot(n,x,n,h)
y=conv(x,h); n=-2*pi:pi/N:2*pi; subplot(212), plot(n,y)

```

Capítulo 4

Diseño de filtros digitales

El filtro digital es el sistema que realiza la transformación selectiva de componentes espectrales y comprende tanto los algoritmos como los dispositivos que permiten transformar una señal digital en otra. Los filtros digitales poseen una serie de ventajas con respecto a los análogos: sus funciones de transferencia son más estables y flexibles para su cambio y para ellos se puede obtener el desfase lineal en un amplio ancho de banda, además, brindan un alto factor de calidad y, por último, son preferibles en las frecuencias más bajas, donde el volumen físico de los filtros análogos es muy grande. Aunque, para los filtros digitales son conocidas algunas restricciones, entre ellas la superposición de frecuencias, el error de cuantificación y redondeo, etc. Todos estos problemas pueden ser llevados a su mínima expresión realizando el adecuado diseño de los dispositivos de proceso.

4.1. Características de los filtros digitales

4.1.1. Condiciones de realización

Las siguientes propiedades aplican a los filtros digitales lineales:

- (a). *Superposición.* Dado el operador de filtración \mathcal{K} , la condición de linealidad (1.4) se transcribe de la siguiente manera

$$\mathcal{K} \{ (b_1 x_1 [n] + b_2 x_2 [n]) \} = b_1 \mathcal{K} \{ x_1 [n] \} + b_2 \mathcal{K} \{ x_2 [n] \}$$

- (b). *Invariabilidad.* Se cumple la condición dada en (1.5),

$$\mathcal{K} \{ x [n - k] \} = y [n - k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

- (c). *Causalidad.* Se denomina físicamente realizable si de la condición:

$$\begin{cases} x_1 [n] = x_2 [n], & n \leq k \\ x_1 [n] \neq x_2 [n], & n > k \end{cases}$$

resulta que, $\mathcal{K} \{ x_1 [n] \} = \mathcal{K} \{ x_2 [n] \}, n \leq k$.

- (d). *Estabilidad.* Un filtro digital se denomina *estable* si su salida, dada cualquier señal de entrada acotada, es también limitada o acotada:

$$\sum_{k=-\infty}^N |h[k]| < \infty \quad (4.1)$$

Sea la sucesión de entrada finita y acotada $\{x[n]\}$, tal que $x[n] \leq \mu < \infty, \forall n$. Entonces, la respuesta a impulso del sistema definida en (3.60) con la condición (4.1) es igual a:

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^N |h[k]| |x[n-k]| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] < \infty \end{aligned}$$

esto es, la sucesión de salida también será acotada.

Por cuanto, $x[nT] = 0$ cuando $x[nT] = \delta[nT]$, se puede demostrar que (4.1) siempre se cumplirá. En este sentido, cuando se representa la respuesta a impulso de un filtro recursivo en forma quebrada racional de potencias z^{-1} , entonces, para su realización física se exige que el orden del polinomio del numerador sea menor o igual al orden del polinomio del denominador.

En el análisis de la estabilidad de los algoritmos de filtración digital, es necesario tener en cuenta que el proceso de señales mediante filtros digitales pertenece a la clase de tareas matemáticamente incorrectas [1], esto es, problemas cuya solución posee alta sensibilidad y que al menor cambio en los valores de entrada, el algoritmo se torna inestable. Si los datos de entrada (los parámetros de los filtros, la estructura de las señales, etc.) son conocidos aproximadamente, entonces, esta inestabilidad conlleva prácticamente a la ambigüedad (a veces inexistencia) de una solución dentro de los intervalos de precisión dados y, además, a la dificultad de interpretación de los resultados obtenidos. Esta particularidad se hace evidente cuando se resuelven tareas que tienen que ver con el control de sistemas óptimos, optimización del tiempo de cálculo, sistemas automáticos de medición y otros.

Ejemplo 4.1. Demostrar la invariabilidad en el tiempo del filtro con señal de salida

$$y[n] = \mathcal{K} \{x[n] - x[n-1]\}, \quad n > 0$$

En la práctica, para la extracción de las componentes de baja frecuencia de los procesos, se emplea esta clase de filtros de primer orden de iteración, cuya respuesta a una entrada con retardo en k tiempos será

$$\mathcal{K} \{x[n-k]\} = x[n-k] - x[n-k-1].$$

Mientras, la salida al mismo valor de retardo tiene la forma,

$$y[n-k] = \mathcal{K} \{x[n-k] - x[n-k-1]\}$$

De donde se observa, que

$$y[n-k] = \mathcal{K} \{x[n-k]\},$$

luego, el filtro es invariante en el tiempo.

Sin embargo, en el caso del siguiente filtro

$$y[n] = \alpha[n]x^2[n] + 2x[n-1], \alpha > 0$$

se obtiene que la respuesta a una entrada con retardo k será

$$\mathcal{K}\{x[n-k]\} = \alpha[n]x^2[n-k] + 2x[n-k-1],$$

que, entonces, es diferente de la salida con el mismo valor de retardo:

$$y[n-k] = \alpha[n-k]x^2[n-k] + 2x[n-k-1]$$

por lo que se puede afirmar que el filtro no es invariante en el tiempo.

De acuerdo a la definición dada en (3.59), para los filtros no recursivos se cumple que su salida se determina solamente por los valores de entrada del proceso:

$$y[n] = \mathcal{K}\{\dots, x[n-1], x[n], x[n+1]\}$$

Mientras, en el cálculo de los valores de la señal de salida $y[n]$, para los filtros recursivos, se emplean sus valores pasados, así como los valores pasados y actuales de la señal de entrada:

$$y[n] = \mathcal{K}\{y[n-1], \dots, y[n-N], x[n], \dots, x[n-M]\}$$

Sea un filtro digital recursivo con función de transferencia (3.37b):

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = \frac{\left(\sum_{m=0}^M b_m z^{M-m}\right) z^{N-M}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{N-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

tal que $a_0 > 0$. De los coeficientes del polinomio $A(z)$ se construye la Tabla 4.1.

Las dos primeras filas de esta matriz se forman directamente de los coeficientes $A(z)$: $a_{0n} = a_n$, mientras, los elementos de la tercera y cuarta filas se calculan por la expresión:

$$a_{1n} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0N-n} \\ a_{0N} & a_{0n} \end{vmatrix} = a_{00}a_{0n} - a_{0N}a_{0(N-n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

De igual manera, se calculan las quinta y sexta filas

$$a_{2n} = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{1(N-n-1)} \\ a_{1(N-1)} & a_{1n} \end{vmatrix} = a_{10}a_{1n} - a_{1(N-1)}a_{1(N-n-1)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-2$$

y así sucesivamente, hasta la última fila, la cual contendrá solamente 3 elementos.

Se dice que un filtro recursivo es *estable*, si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A(1) > 0$; $(-1)^N A(-1) > 0$;
2. $a_{00} > |a_{0N}|$, $|a_{10}| > |a_{1(N-1)}|$, $|a_{20}| > |a_{2(N-2)}|, \dots, |a_{(2N-3)0}| > |a_{(2N-3)2}|$.

Filas	Coeficientes						
1	a_{00}	a_{01}	a_{02}	\cdots	a_{0N-2}	a_{0N-1}	a_{0N}
2	a_{0N}	a_{0N-1}	a_{0N-2}	\cdots	a_{02}	a_{01}	a_{00}
3	a_{10}	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1N-2}	a_{1N-1}	
4	a_{1N-1}	a_{1N-2}	a_{1N-3}	\cdots	a_{11}	a_{10}	
5	a_{20}	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2N-2}		
6	a_{2N-2}	a_{2N-3}	a_{2N-4}	\cdots	a_{20}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
$k-1$	$a_{((k+1)/2-1)0}$	\cdots	$a_{((k+1)/2-1)N}$				
k	$a_{(k/2-1)N}$	\cdots	$a_{(k/2-1)0}$				
\vdots	\vdots	\vdots					
\vdots	\vdots	\vdots					
$2N-3$	$a_{(2N-3)0}$	$a_{(2N-3)1}$	$a_{(2N-3)2}$				

Tabla 4.1. Coeficientes $A(z)$

Ancho de banda espectral. De forma ideal, un filtro debe tener el flanco agudo entre sus bandas de paso y de rechazo o supresión, con lo cual el ancho de banda del filtro se mediría sin ninguna ambigüedad como la banda de paso o selectividad de frecuencia. Sin embargo, la envolvente de la respuesta de amplitud no tiene tales puntos de demarcación pronunciados llevando a la incertidumbre en la ubicación de los extremos tanto de la banda de paso como de la banda de supresión como se muestra en la Figura 4.1.

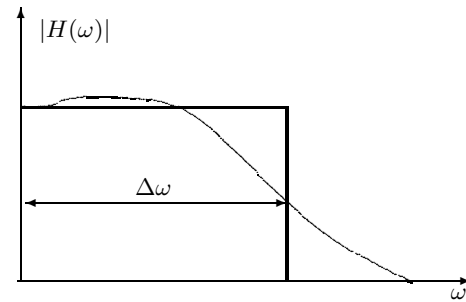


Figura 4.1. Ancho de banda

En la práctica, el ancho de banda se toma en el intervalo de frecuencias, en el cual la respuesta de amplitud $H(\omega)$ no decrece a valores menores a $1/\sqrt{2}$ veces de su valor máximo.

De manera adicional, es frecuente que en la banda de paso, la magnitud de la función de transferencia oscile alrededor de su valor máximo, mientras en la banda de rechazo, también lo haga cerca del cero. Por lo tanto, en el cálculo de filtros se deben fijar los siguientes parámetros básicos de diseño: valor máximo de las pulsaciones H_p en la banda de paso, valor mínimo de supresión en la banda de rechazo H_r y las frecuencias límites de corte ω_c que determinan los extremos de las bandas. Otro parámetro importante es la pendiente de caída de la respuesta de frecuencia, que determina la velocidad de cambio del módulo de la función de transferencia, desde la banda de paso hasta la banda de supresión.

En general, se denomina *filtro pasabajos* aquel que deja pasar a su salida componentes espectrales relativamente bajas en el sentido de que su relación de amplitudes $H(\omega)$ es mucho mayor a frecuencias bajas que a las altas. De manera similar, se definen en la práctica los demás tipos básicos de filtración: filtros *pasaaltos*, filtros *pasabandas* y filtros *rechazabandas*.

4.1.2. Realización de filtros digitales

El diseño de los filtros digitales consiste de varias etapas. La primera, corresponde a la síntesis, durante la cual se realiza el desarrollo del esquema del filtro para obtener la respuesta requerida, asumiendo que las señales de entrada también están dadas.

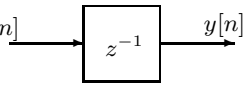
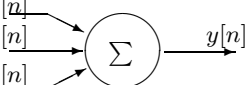
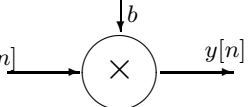
Elemento	Modelo	Notación simbólica
Retardo	$y[n] = x[n - 1]$	
Sumador	$y[n] = \sum_{i=1}^k x_i[n]$	
Multiplicador	$y[n] = bx[n]$	

Tabla 4.2. Notaciones simbólicas

El proceso de cálculo de la señal de salida, dependiendo de las señales de entrada dadas, se denomina *análisis del filtro digital*. Durante la síntesis del filtro se escoge su forma de realización e implementación en correspondencia con su algoritmo de funcionamiento. La selección de la misma forma de realización depende de varios factores, pero principalmente de la naturaleza del trabajo al que esté destinado el filtro.

De acuerdo a la descripción en (3.59) para la filtración lineal, dada en forma de ecuaciones de diferencias con parámetros constantes, los elementos principales de diseño de los filtros digitales corresponden a los siguientes: elementos de retardo en un intervalo de discretización, sumadores y multiplicadores por valores constantes. Las notaciones simbólicas de estos elementos, así como su formulación matemática, se muestran en la Tabla (4.2).

Las formas básicas de realización de los filtros recursivos son las siguientes:

Forma directa. La descripción general de la función de transferencia en la forma (3.37b):

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N b_n z^{-n}}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

es la forma directa de realización de los filtros digitales, cuya estructura en el caso de los filtros recursivos, para la realización sobre procesadores digitales, se muestra en la Figura 4.2(a), la cual consta de $M + N$ líneas de retardo (con tiempo de retardo T que es el tiempo de discretización del sistema), $M + 1$ amplificadores con ganancia $b_m, m = 0, 1, \dots, M$, N amplificadores con ganancia $a_n, n = 1, 2, \dots, N$ y un sumador. En cuanto a los filtros no recursivos, la respectiva estructura de implementación se muestra en la Figura 4.2(b), en la cual se observan M líneas de retardo, $M + 1$ amplificadores con ganancia $b_m, m = 0, 1, \dots, M$ y un sumador.

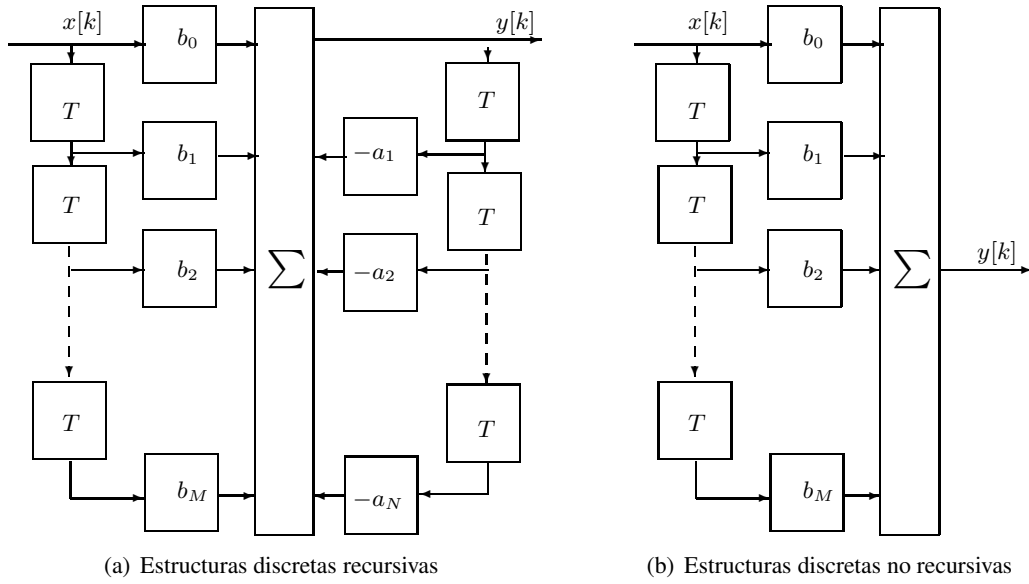


Figura 4.2. Forma directa de realización

Forma directa canónica. Acorde con la función de transferencia del filtro digital en (2.16), y teniendo en cuenta (3.37b), se tiene que:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (4.2)$$

donde

$$N(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}},$$

$$D(z) = B(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

De la notación (4.2), se observa que un filtro recursivo se representa por la multiplicación secuencial de dos filtros, dados por las relaciones:

$$w[k] = x[k] - \sum_{n=0}^N a_n w[k - n]$$

$$y[k] = \sum_{m=0}^M b_m w[k - m]$$

donde $w[k]$ es la salida del primer filtro, que entra al segundo, mientras $y[k]$ es la salida del segundo filtro. En este caso, se observa que las líneas de retardo en ambos polinomios se hacen comunes, por

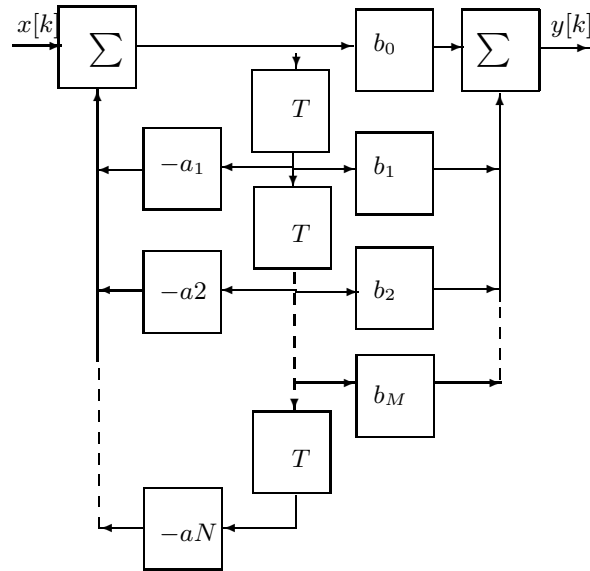


Figura 4.3. Estructura canónica directa

lo que el total de dispositivos de retardo es N , considerando que $M \leq N$ (ver Figura 4.3).

Forma paralela. La estructura del filtro recursivo en forma paralela se muestra en la Figura 4.4. Por cuanto, tanto el numerador, como el denominador de la función de transferencia (3.37b) de un filtro digital corresponde a polinomios algebraicos con coeficientes reales, entonces su función de transferencia se puede descomponer en fracciones simples:

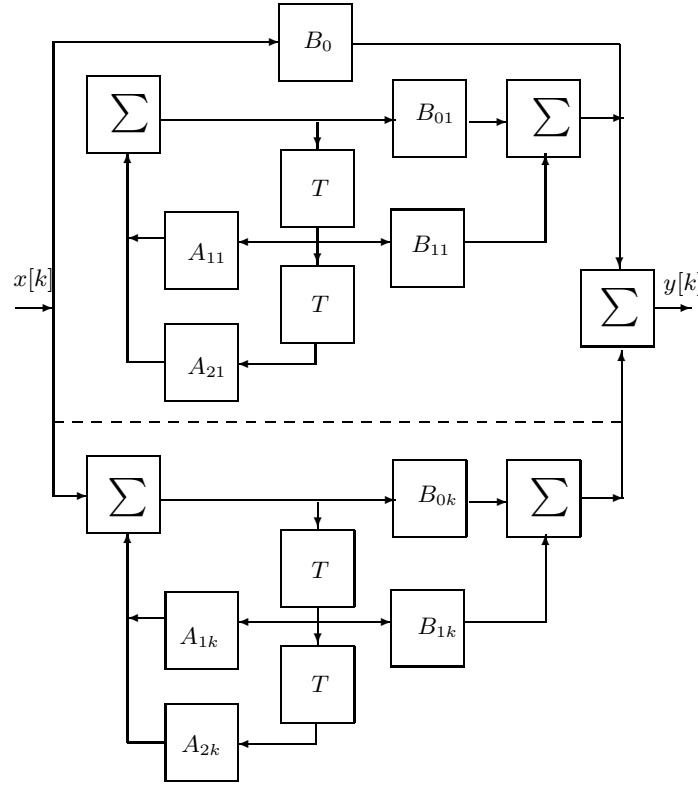


Figura 4.4. Forma paralela de realización

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_k^{K_1} H_{1k}(z^{-1}) + \sum_k^{K_2} H_{2k}(z^{-1}) \\
 &= b_0 + \sum_k^{K_1} \frac{D_{0k}}{C_{0k} + C_{1k}z^{-1}} + \sum_k^{K_2} \frac{B_{0k} + B_{1k}z^{-1}}{A_{0k} + A_{1k}z^{-1} + A_{2k}z^{-2}}
 \end{aligned}$$

donde K_1 y K_2 , respectivamente, son los números que determinan la cantidad de componentes singulares de primer orden (para el caso de las raíces reales) y las del segundo (para las raíces complejas), en las que se descompone la función inicial.

En el caso de la notación paralela, el retardo de grupo definido en (2.42) será:

$$\tau(z) = \sum_{m=0}^M \Re \left\{ z \frac{d}{dz} \ln P_k(z) \right\} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2j} \Re \left\{ z \frac{d}{dz} \ln Q_k(z) \right\}$$

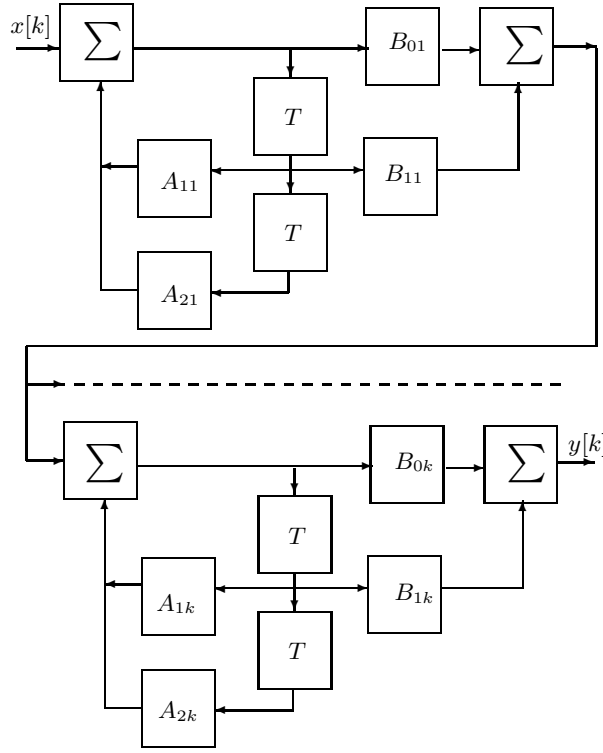


Figura 4.5. Forma secuencial

Forma secuencial. Al descomponer los polinomios del numerador y denominador de (4.2) en multiplicandos elementales se obtendrá (para $M \leq N$):

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_{0i})}{\prod_{i=1}^N (z - p_{0i})} = \prod_{k=1}^{L_1} H_{1k}(z^{-1}) \prod_{k=1}^{L_2} H_{2k}(z^{-1}) \\
 &= \prod_k \frac{B_{0k} + B_{1k}z^{-1} + B_{2k}z^{-2}}{1 + A_{1k}z^{-1} + A_{2k}z^{-2}} \prod_k \frac{D_{0k} + D_{1k}z^{-1}}{1 + C_{1k}z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde z_{0i} son los ceros y p_{0i} son los polos de la función (2.15). La notación para la función de transferencia en la forma (4.3) se denomina de *cascada* o *secuencial*, que corresponde a la forma más efectiva de realización de un filtro recursivo, desde el punto de vista del mínimo valor del error cuadrático medio de representación (cuantificación) y su estructura se muestra en la Figura 4.5.

El término $H_{1k}(z^{-1})$ corresponde a funciones de primer orden de z^{-1} con pares simples de polos y ceros, ambos reales, mientras $H_{2k}(z^{-1})$ corresponde a funciones racionales de segundo orden z^{-2} con pares de polos y ceros de carácter complejo. Los coeficientes $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}$ son constantes, algunos de los cuales pueden ser cero; L_1, L_2 son números enteros que determinan la cantidad de polos y ceros.

Las funciones $H_{1k}(z^{-1})$ y $H_{2k}(z^{-1})$ se pueden considerar como circuitos básicos de transferencia de sistemas lineales discretos de primer y segundo orden, respectivamente; funciones que en conjunto conforman el sistema inicial (4.3).

Cada uno de los circuitos básicos, presentes la estructura (4.3), se puede implementar mediante la

Problemas

Problema 4.1. Mediante el análisis de los polos de las respectivas funciones de transferencia $H(z)$ comprobar para que valores de $k \in [0, 1]$ que se cumpla la condición de estabilidad del filtro,

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - kz^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - kz^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{50 - 76.5z^{-1} - 10.575z^{-2} + 26.581z^{-3} - 5.882z^{-4}}{1 + 0.8z^{-1} - 0.9z^{-2} - kz^{-3} + 0.9144z^{-4} + 0.5184z^{-5}}$$

$$H(z) = \frac{1 - kz^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.8z^{-1} + kz^{-2}}$$

Problema 4.2. Empleando la forma canónica (4.2), hallar la respuesta de frecuencia, desfase y retardo de grupo de los siguientes filtros,

$$H(z) = 2 + 0.5z^{-1} - z^{-2}, \quad H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1}, \quad H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1}}$$

$$H(z) = 1 + z^{-1}$$

Problema 4.3. En el problema 4.2, empleando la transformada inversa \mathcal{Z} , hallar las respectivas funciones respuesta a impulso.

Ejercicio en el CP 4.1. Realizar un programa en `Matlab`, que dada la forma directa de los filtros recursivos indicados en el problema 4.2, calcule los respectivos coeficientes de la forma paralela y secuencial

4.2. Síntesis de filtros recursivos

La aproximación durante la síntesis de filtros digitales en principio, no se diferencia del procedimiento de similar naturaleza para los filtros análogos. Por esto, la teoría de aproximación de los filtros digitales está basada (por lo menos, en lo concerniente a los métodos y algoritmos) en su similar para la filtración análoga. El diseño de filtros lineales, a partir de su función de transferencia, se divide en dos etapas:

1. La *aproximación*, en la cual se conforma la función de transferencia del filtro análogo, que contenga las mismas características dinámicas que se aproximen a las requeridas con cierto grado de precisión.
2. La *síntesis* propiamente dicha, en la que se determinan los valores de los coeficientes de la respectiva función de transferencia.

4.2.1. Cálculo de plantillas de filtros análogos

Debido a la amplia experiencia obtenida durante el desarrollo de la teoría de síntesis de filtros análogos, es natural que sus métodos básicos de cálculo sean empleados en la síntesis de filtros digitales.

Un filtro análogo tiene función generalizada de transferencia, definida en (2.33), de la forma:

$$H_a(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N_a(s)}{D_a(s)},$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, siendo \mathcal{L} la transformada de Laplace, (1.78a), con variable compleja de la forma $s = \sigma + j\omega$.

Un filtro análogo con función de transferencia $H_a(s)$ es físicamente realizable y estable si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $H_a(s)$ debe corresponder a una función quebrada racional.
2. El orden del polinomio numerador no debe exceder el orden del polinomio divisor.
3. Los polos de la función $H_a(s)$ deben estar ubicados en el semiplano complejo izquierdo.

El diseño de filtros recursivos a partir de plantillas de filtros análogos implica la transformación de la función de transferencia análoga $H_a(s)$ a la función de transferencia $H(z)$ del filtro digital, que se realiza en dos etapas: inicialmente se escoge la función de transferencia físicamente realizable que sea similar por las características exigidas, luego se realiza el cambio de la plantilla escogida a la función de transferencia del filtro discreto, conservando la similitud con la plantilla del filtro análogo. Este paso debe cumplir las siguientes condiciones:

1. El eje imaginario $s = j\omega$ del plano s se refleja en el límite del círculo unitario $|z| = 1$ del plano z .
2. El semiplano $\Re\{s\} < 0$ del plano s se refleja en la parte interior del círculo unitario de convergencia $|z| < 1$ en el plano complejo z .

El cálculo de la función de transferencia análoga se realiza sobre una plantilla dada para la función de transferencia, normalizada para un modelo dado de filtro ideal pasabajos, con frecuencia de corte $\omega_c = 1$. Usualmente, entre las diversas plantillas normalizadas pasabajos de aproximación de filtros análogos están las de *Butterworth*, *Chebyshev* y *elípticos*, las cuales se representan en la Figura 4.7, calculadas para un caso particular de valores de orden $N = 4$, oscilación de 3 dB en la banda de paso y un rechazo de 40 dB en la banda de supresión. Luego, utilizando las transformaciones respectivas se obtiene cualquiera de las funciones de transferencia de los filtros buscada: pasabajos, pasabandas, rechazabandas o pasaaaltos.

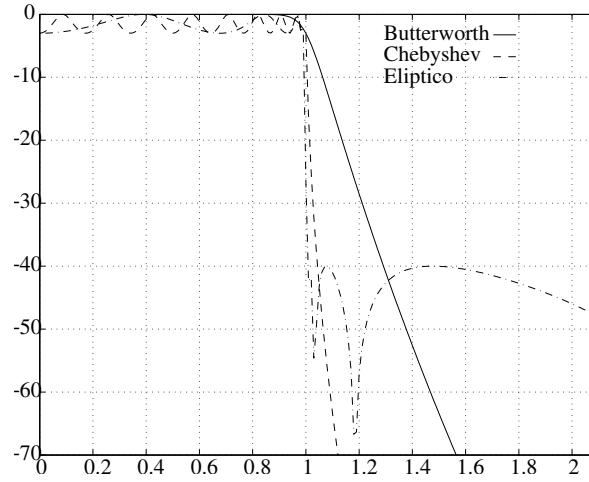


Figura 4.7. Respuesta de frecuencia de filtros análogos

La síntesis de los filtros digitales se puede realizar, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

4.2.2. Síntesis de filtros recursivos en el tiempo

Método de la invariabilidad de la respuesta a impulso. Este método se basa en que los valores discretos de la respuesta a impulso del filtro digital, $h[nT]$, se toman igual a los valores de la función homóloga de un filtro análogo con la respuesta a impulso, determinada en los mismos valores correspondientes de tiempo. La respuesta a impulso del filtro, escogido como prototipo análogo, se halla experimental o analíticamente, con base en la función de transferencia dada. Si esta función se determina en la forma (3.37b), donde N es la potencia del polinomio del denominador de la función racional quebrada, entonces, se podrá descomponer en forma de quebrados comunes [29]:

$$H_a(s) = H_{a0} + \sum_{p=1}^P \frac{Rr_p}{s - \beta_p} + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^L \frac{(Rr_k + jIr_k)}{(s - \beta_k - j\gamma_k)} \right\} \quad (4.4)$$

donde $H_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H_a(s)$, $N = P + 2L$, $(P + L) = \lfloor (N + 1) / 2 \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x , los valores $Rr_p = \Re \{ \text{res}_p \}$, $Rr_k = \Re \{ \text{res}_k \}$ corresponden a la parte real del residuo con relación al p polo y al k cero.

De la misma manera, $Ir_k = \Im \{ \text{res}_k \}$, es la parte imaginaria del residuo con relación al k cero. La constante β_p es el valor del p polo simple de la función $H(s)$, β_k e γ_k corresponden a la parte real e imaginaria del k polo complejo de $H_a(s)$. De la expresión para el filtro análogo (4.4) se puede obtener la siguiente función de respuesta a impulso [29]:

$$h(t) = \sum_{p=1}^P Rr_p + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^L (Rr_k + jIr_k) \exp((\beta_k + j\gamma_k)t) \right\} \quad (4.5)$$

En correspondencia con el principio de invariabilidad, es necesario que se cumpla la condición:

$$h[nT] = h(t_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

Entonces, la respuesta a impulso discreta de las componentes de la primera suma de (4.5) corresponde a la expresión $h_p(t_n) = Rr_p \exp(\beta_p nT)$, que se interpreta como un filtro digital con función de transferencia:

$$H_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[nT] z^{-n} = \frac{Rr_p}{1 - z^{-1} \exp(\beta_p T)}.$$

De igual manera, se obtendrán las funciones de transferencia de la segunda suma

$$H_k(z) = \frac{Rr_k + jIr_k}{1 - z^{-1} \exp(\beta_k T + j\gamma_k T)},$$

$$2\Re \left\{ \frac{Rr_k + jIr_k}{1 - z^{-1} \exp(\beta_k T + j\gamma_k T)} \right\} = \frac{A_{1k} z^{-1} + A_{0k}}{B_{2k} z^{-2} + B_{1k} z^{-1} + 1}$$

donde,

$$\begin{aligned} A_{1k} &= 2 \exp(\beta_k T) (Rr_k \cos \gamma_k T + Ir_k \sin \gamma_k T), & A_{0k} &= 2Rr_k, \\ B_{1k} &= 2 \exp(\beta_k T) \cos \gamma_k T, & B_{2k} &= \exp(2\beta_k T) \end{aligned}$$

La función de transferencia discreta del filtro digital a diseñar toma la forma:

$$H(z) = H_p(z) + H_k(z) = \frac{Rr_p}{1 - z^{-1} \exp(\beta_p T)} + \frac{Rr_k + jIr_k}{1 - z^{-1} \exp(\beta_k T + j\gamma_k T)}$$

El correspondiente diagrama del filtro digital, que realiza la función de transferencia del tipo descrito, resulta ser la conexión paralela de 2 filtros digitales, con las respectivas funciones de transferencia $H_p(z)$ y $H_k(z)$, como se representa en la Figura 4.8. Cabe anotar, que este método analizado de síntesis ofrece resultados adecuados, pero en aquellos casos, cuando se diseñan filtros digitales cuyas funciones de transferencia no tengan ceros.

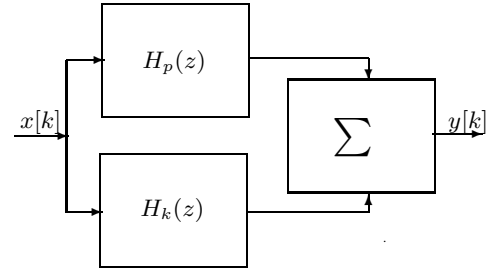


Figura 4.8. Diagrama de un sistema

Método de la transformada ζ bilineal. La aplicación del método de síntesis de filtración digital en base a la invariabilidad de la respuesta a impulso discreta de los filtros análogo y digital tiene una serie de inconvenientes: primero, es necesario determinar la respuesta a impulso discreta del filtro análogo, que no es tarea fácil cuando se sintetizan filtros de alto orden, segundo, la diferencia sustancial de las respuestas de frecuencia entre los filtros sintetizado y análogo; si la respuesta del último tiene una gran amplitud en frecuencias $\omega > \omega_2/2$, donde ω_2 es la frecuencia de discretización y, tercero, la dependencia del coeficiente de amplificación del filtro digital de la frecuencia de discretización. Las particularidades descritas introducen errores apreciables en las características de los filtros digitales y prácticamente limitan su aplicación.

A fin de evitar que tales errores aparezcan, cuando se emplea la transformada \mathcal{Z} estándar, se intro-

duce la transformación del tipo [29];

$$s = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{s_1 T}{2}\right)$$

la cual, después de realizar el reemplazo de s por su valor, a partir de la correspondiente relación inversa $z^{-1} = \exp(-s_1 T)$ toma la forma:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (4.6)$$

La anterior transformación algebraica se denomina *transformada z -bilineal*, que corresponde a la representación del plano complejo s en el plano complejo z de círculo unitario de convergencia, donde, por cierto, la parte izquierda del plano s se representa en la parte interior con respecto al círculo unitario del plano z .

La función de transferencia $H(\omega)$ para el filtro digital se obtiene como resultado de reemplazar (4.6) en la expresión para la función de transferencia del correspondiente filtro análogo $H_a(s)$, o sea:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Por cuanto la transformación de (4.6) es algebraica, la implementación del filtro digital cuya función de transferencia es obtenida mediante la transformada bilineal, se puede realizar empleando las estructuras paralelo o serial del diagrama funcional. En general, se considera que con este método se puede realizar la síntesis de algoritmos de filtros discretos de cualquier tipo.

Método de las z -plantillas. La transformación $z = \exp(sT)$, es de carácter no lineal y para su aproximación, con el objeto de obtener realizaciones linealizadas entre los operadores z y s fueron obtenidas expresiones analíticas aproximativas denominadas de los z -plantillas. Este método se desarrolla a partir de la transformación $z = \exp(sT)$ con lo cual, se obtiene la relación:

$$s^{-1} = T / \ln z \quad (4.7)$$

Representado la función $\ln z$ en forma de serie, se obtiene

$$\ln z = 2 \left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \cdots + \frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)(z+1)^{2n+1}} \right) + \cdots \quad (4.8)$$

Teniendo en cuenta (4.8), la relación (4.7) se amplía en:

$$\begin{aligned} s^{-1} &= \frac{T}{2} \frac{1}{u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}u^{2n+1} + \cdots} \\ &= \frac{T}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3}u - \frac{4}{45}u^3 - \frac{44}{945}u^5 + \cdots \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $u = (z-1)/(z+1)$.

Tomando el hecho de que (4.9) converge de manera rápida, se puede limitar su análisis al primer

término. Así:

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{1}{u} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

De esta manera, se puede obtener una z -plantilla para cualquier orden del operador s^{-1} .

La respectiva z -plantilla, para el operador s^{-2} , se obtiene elevando al cuadrado ambas partes de la expresión (4.9):

$$\begin{aligned} s^{-2} &= \frac{T^2}{4} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \left(\frac{u}{3} + \frac{4u^3}{45} + \frac{44u^5}{945} + \dots \right) + \dots \right) \\ &= \frac{T^2}{4} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{3} - \frac{8u^2}{45} - \frac{88u^4}{945} - \dots \right) \end{aligned}$$

De igual manera, que en el caso anterior, la serie se limita a los dos primeros términos, por lo que se obtiene la siguiente aproximación:

$$s^{-2} \approx \frac{T^2}{4} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{3} \right) \approx \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}$$

De manera similar, se pueden obtener las z -plantillas para cualquier orden del operador s^{-k} . En la Tabla 4.9 se muestran las respectivas z -plantillas hasta el orden 5. En [29], se demuestra que para la k potencia de la z -plantilla se obtiene la relación:

$$s^{-k} = \frac{N_k(z)}{(z-1)^k}$$

donde $N_k(z)$ es un polinomio de z .

El siguiente paso de diseño consiste en que la función de transferencia del filtro análogo conocido se describe por potencias de s^{-1} en vez de s . Luego, cada potencia tomada individualmente se reemplaza por la respectiva expresión de la z -plantilla de la Tabla (4.9). Al tener estos miembros, se tiene la expresión para z^{-1} que básicamente es la función de transferencia del filtro digital buscado.

Como en el caso de los dos métodos de síntesis analizados anteriormente, el orden de la función de transferencia $H(z)$ del filtro digital sintetizado con respecto a la potencia de z^{-1} es idéntico al orden de la función de transferencia del filtro análogo tomado inicialmente $H_a(s)$.

Debido a que el carácter del reemplazo de la z -plantilla es enteramente algebraico, entonces, no hay necesidad en darse la función de transferencia del filtro análogo en forma de operaciones de multiplicación o su descomposición en quebrados elementales. La interpretación física de este método en el dominio de las frecuencias se complica, por cuanto cada mayor potencia del operador s^{-1} se aproxima por otra función cada vez más exacta de z . Debido a que la transformada basada en las

Operador en plano s	z -Plantilla
s^{-1}	$\frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$
s^{-2}	$\frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}$
s^{-3}	$\frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
s^{-4}	$\frac{T^4}{6} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4} - \frac{T^4}{120}$
s^{-5}	$\frac{T^5}{24} \frac{z(z^3 + 11z^2 + 11z + 1)}{(z-1)^5}$

Figura 4.9. z -Plantillas

plantillas tiene carácter no lineal y, por lo tanto en general, es cierta la desigualdad:

$$\mathcal{K}\{\omega_1, \omega_2\} \neq \mathcal{K}\{\omega_1\}\mathcal{K}\{\omega_2\}$$

donde \mathcal{K} es la transformación para el método de las z -plantillas, entonces, el carácter de exactitud para la aproximación dependerá de las z -plantillas s^{-1} y de la expresión general para $H_a(s)$.

De otra parte, la función de transferencia resultante del filtro digital, obtenida por medio de las z -plantillas, corresponde a la expresión (3.37b), entonces, es mejor realizar estos filtros en forma directa.

Por último, el método de z -plantillas se suele emplear para la síntesis de prototipos análogos de orden bajo.

Método de acople con la transformada \mathcal{Z} . El método consiste en que los polos y ceros, derivados de la función de transferencia del filtro digital, se acoplan a los respectivos polos y ceros del prototipo análogo inicial. En particular, la representación de la transformada para los polos y ceros del filtro análogo se da por la transformación:

$$s \rightarrow \exp(sT) = z$$

donde los polos o ceros reales se transforman por la expresión:

$$s - \beta \rightarrow 1 - z^{-1} \exp(\beta T)$$

$$s - \alpha \rightarrow 1 - z^{-1} \exp(\alpha T)$$

mientras los polos o ceros complejos se encuentran de las relaciones:

$$(s - \beta)^2 + \gamma^2 \rightarrow 1 - 2z^{-1} \exp(\beta T) + z^{-2} \exp(2\beta T)$$

$$(s - \alpha_k)^2 + \gamma_k^2 \rightarrow 1 - 2z^{-1} \exp(\alpha_k T) + z^{-2} \exp(2\alpha_k T)$$

Después de realizar transformaciones algebraicas, la función de transferencia del filtro digital puede ser escrita en la forma:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^I (1 + A_{1i}z^{-1}) \prod_{k=1}^K (1 + A_{1k}z^{-1} + A_{2k}z^{-2})}{\prod_{p=1}^P (1 + B_{1p}z^{-1}) \prod_{l=1}^L (1 + B_{1l}z^{-1} + B_{2l}z^{-2})}, \quad (4.10)$$

donde

$$A_{1l} = -\exp(\alpha_l T), \quad A_{1k} = -2\exp(\alpha_k T) \cos(\gamma_k T) \quad A_{2k} = \exp(2\alpha_k T)$$

$$B_{1p} = \exp(\beta_p T), \quad B_{1l} = -2\exp(\beta_l T) \cos(\gamma_l T), \quad B_{2l} = \exp(2\beta_l T)$$

Los polos de la función de transferencia (4.10) son similares a los que se obtienen cuando se emplea la transformada \mathcal{Z} estándar. De la relación (4.10), se deduce que la relación, del filtro digital sintetizado por el método de la transformada \mathcal{Z} acoplada es posible tanto para los algoritmos de funcionamiento con notación paralela, al descomponer (4.10) en quebrados simples, como para la secuencial. Este método se puede emplear para la síntesis de los filtros digitales de todos los tipos.

4.2.3. Síntesis de filtros recursivos en la frecuencia

El diseño de filtros digitales en el dominio de frecuencia, también comprende las tareas de aproximación y de síntesis propiamente dicha. En el primer caso, es necesario resolver la tarea de aproximación de las características reales de un filtro análogo a las características de un filtro ideal. Cabe anotar que las respuestas de frecuencia, para la síntesis de filtros de baja frecuencia, se toman de acuerdo a las definiciones dadas en (2.41), tal y como se representa en la Figura 2.8. Como criterio de estimación de calidad de la aproximación se asume el de máxima uniformidad de la respuesta de frecuencia del filtro, el cual se caracteriza porque los valores de sus derivadas de $|H_a(j\omega)|$ son cero cuando $\omega \rightarrow 0$.

Dado el modelo de los filtros ideales de (2.41), todas las derivadas de su respuesta de frecuencia $|H_a(j\omega)|$ son cero en las frecuencias $\omega < \omega_0$. El empleo de este criterio para la síntesis de filtros análogos se puede ilustrar, por ejemplo, para los casos conocidos y ampliamente usados de los filtros de Butterworth y Chebyshev. Estos filtros se distinguen por satisfacer las respuestas de frecuencia con suficiente grado de aproximación a los parámetros de los filtros ideales. El filtro de Butterworth tiene una ganancia constante en la banda de paso y decrece de forma monótona en la banda de supresión. Mientras, el filtro de Chebyshev tiene una respuesta de frecuencia uniformemente ondulada en la banda de paso y decreciente en forma monótona en la banda de supresión.

Método de aproximación de Butterworth. Sea la representación de la respuesta a frecuencia y desfase de un filtro ideal definida de la siguiente manera:

$$H_a(j\omega) = \begin{cases} \exp(-jk\omega/\omega_n), & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} \leq 1 \\ 0, & \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \end{cases}$$

donde k/ω_n es el retardo introducido por el filtro, ω_n es la frecuencia propia del filtro. Este filtro podrá ser realizado por una cantidad finita de sumadores elementales que provean el cálculo de la exponente, para esto, usando la representación de $H_a(\omega)$ en la forma [29]:

$$H_a(j\omega) = \exp(\alpha(\omega^2) + j\phi(\omega))$$

donde $\alpha(\omega^2)$ es la ganancia del filtro que es función par, $\phi(\omega)$ es la función del desfase e impar. Luego, se halla el cuadrado de la respuesta de frecuencia en la forma:

$$\begin{aligned} (H_a(j\omega))^2 &= H_a(j\omega)H_a(-j\omega) \frac{H_a(j\omega)}{H_a(-j\omega)} \\ &= H_a(\omega^2)A(j\omega) \end{aligned}$$

donde

$$H_2(\omega^2) = H_a(j\omega)H_a(-j\omega) = |H_a(j\omega)|^2 = \exp(2\alpha(\omega^2))$$

es el cuadrado de la ganancia del filtro y corresponde a una función racional de ω^2 . Además, se tiene que

$$A(j\omega) = H_a(j\omega)/H_a(-j\omega)$$

Seguidamente, se aproxima la función $H_a(\omega^2)$ por la relación de tipo

$$H_a(\omega^2) = \frac{1 + A_1\omega^2 + \dots + A_r\omega^{2r}}{1 + C_1\omega^2 + \dots + C_q\omega^{2q}} \quad (4.11)$$

para la cual se cumplen las siguientes condiciones:

1. $H_a(0) = 1$;
2. Todas las primeras n derivadas de la función $H_a(\omega^2)$ son cero para $\omega = 0$.

Diferenciando (4.11) n veces e igualando cada resultado obtenido a cero de acuerdo con la segunda condición, se podrán determinar los valores de los coeficientes en la expresión (4.11). En definitiva, la función aproximativa será

$$H_a(\omega^2) = \frac{1 + A_n\omega^{2n} + A_{n+1}\omega^{2n+2} + \dots}{1 + C_n\omega^{2n} + C_{n+1}\omega^{2n+1} + \dots}$$

Generalmente, se seleccionan varios de los coeficientes de la siguiente manera:

$$A_n = 0, \quad A_{n+1} = 0, \quad C_{n+1} = 0, \quad i \geq 1$$

El coeficiente C_n determina la ganancia deseada en la frecuencia de corte ω_c .

Como resultado la función de aproximación para la respuesta de frecuencia del filtro tendrá forma:

$$H_a(\omega^2) = \frac{1}{1 + C_n\omega^{2n}} \quad (4.12)$$

El polinomio característico de (4.12) puede ser representado por diferentes funciones, entre ellos los polinomios de Butterworth, para los cuales las raíces están ubicadas en la parte izquierda del plano complejo s . Los primeros 10 polinomios de este tipo se muestran en la Tabla 4.3 con los valores de sus raíces correspondientes.

La función, que provee el máximo nivel de uniformidad de aproximación entre las respuestas de frecuencia requeridas, se representa por medio de los polinomios de Butterworth $B_n(s)$ mediante la siguiente expresión:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + B_n(s)},$$

La forma como cambia el coeficiente de supresión (cantidad inversa a la ganancia), el desfase y el retardo de un filtro Butterworth de cualquier orden en función de ω , en forma general, se puede considerar lineal a trazos.

Después de seleccionado el filtro correspondiente análogo de Butterworth se debe realizar la transformación de la función de transferencia del filtro análogo a la del filtro digital. Si el denominador de (4.12) se escoge en forma de polinomio de funciones trigonométricas, entonces, para la obtención de la función de transferencia del filtro digital es recomendable emplear la relación entre estas funciones y polinomios de potencia z mostrados en la Tabla 4.4.

La función de transferencia del filtro digital obtenida por este método corresponde al algoritmo de funcionamiento con notación directa. Este método es usado básicamente para la síntesis de filtros de baja frecuencia y pasabandas.

Orden	Polinomio de Butterworth	Valores de las Raíces
1	$1 + s$	-1
2	$1 + 1.4142s + s^2$	$-.707107 \pm j.707107$
3	$1 + 2.0s + 2.0s^2 + s^3$	-1 $-5.000 \pm j0.866025$
4	$1 + 2.6131s + 3.4142s^2 + 2.6131s^3 + s^4$	$-.38268 \pm j0.923880$ $-0.92388 \pm j0.38268$
5	$1 + 3.2361s + 5.2361s^2 + 5.2361s^3 + 3.2361s^4 + s^5$	-1 $-.80901 \pm j0.951057$ $-.80901 \pm j0.587785$
6	$1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6$	$-.258819, j0.965926$ $-.707107, j0.707107$ $-0.96592, j0.258819$
7	$1 + 4.494s + 10.0978s^2 + 14.592s^3 + 14.592s^4 + 10.097s^5 + 4.494s^6 + s^7$	-1 $-.222521 \pm j0.944928$ $-.62349 \pm j0.781832$ $-0.90096 \pm j0.19509$
8	$1 + 5.1528s + 13.1371s^2 + 21.8462s^3 + 25.6884s^4 + 21.8462s^5 + 13.1371s^6 + 5.1528s^7 + s^8$	$-0.19509 \pm j0.980785$ $-.55557 \pm j0.83147$ $-.0707107 \pm j0.707107$ $-0.83147 \pm j0.55557$ $-0.980785 \pm j0.19509$
9	$1 + 5.7588s + 16.5817s^2 + 31.1634s^3 + 41.9864s^4 + 41.9864s^5 + 31.1634s^6 + 16.5817s^7 + 5.7588s^8 + s^9$	-1 $-0.173648 \pm j0.98480$ $-.0500000 \pm j0.86602$ $-0.766044 \pm j0.64278$ $-0.939693 \pm j0.342020$
10	$1 + 6.3925s + 20.4317s^2 + 42.8021s^3 + 64.8824s^4 + 74.2334s^5 + 64.8824s^6 + 42.8021s^7 + 20.4317s^8 + 6.3925s^9 + s^{10}$	$-0.156435 \pm j0.98768$ $-.0453991 \pm j0.89100$ $-.0707107 \pm j0.70710$ $-0.891007 \pm j0.45399$ $-0.987688 \pm j0.15643$

Tabla 4.3. Aproximación de Butterworth

Ejemplo 4.2. Sea la respuesta de frecuencia de filtros pasabajos Butterworth, aproximadas por las siguientes expresiones (siendo ω_c la frecuencia de corte requerida):

1. $|H_a(\omega)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \omega T/2}{\sin \omega_c T/2} \right)^{2n}}$.
2. $|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan \frac{\omega T}{2}}{\tan \frac{\omega_c T}{2}} \right)^{2n}}$
3. $|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cot \frac{\omega T}{2}}{\cot \frac{\omega_c T}{2}} \right)^{2n} + \left(\frac{\tan \frac{\omega T}{2}}{\tan \frac{\omega_c T}{2}} \right)^{2n}}$

<i>Función Racional Trigonométrica</i>	<i>Polinomio en Potencias z</i>
$\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$-\frac{(z-1)^2}{4z}$
$\sec^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$\frac{4z}{(z+1)^2}$
$\tan^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}$
$\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$\frac{(z+1)^2}{4z}$
$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$-\frac{4z}{(z-1)^2}$
$\cot^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$-\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$

Tabla 4.4. Polinomios de potencia

Caso 1. Inicialmente, se emplea la relación entre la función $\sin^2(\cdot)$ con el polinomio en el plano z , que luego de despejar se halla:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(-4z)^{2n}}{\gamma_1(z-1)^{2n} + (-4z)^{2n}}$$

$$\text{siendo } \gamma_1 = \sin^2\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)^{-1}.$$

Caso 2. Al llevar a cabo los cambios algebraicos anteriores, se obtendrá:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\gamma_2(z+1)^{2n}}{\gamma_2(z+1)^{2n} + (-1)^n(z-1)^{2n}}$$

$$\text{donde } \gamma_2 = \tan^{2n}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right).$$

Caso 3. Se utilizan las relaciones de la Tabla 4.4, con lo que la transformación da como resultado:

$$|H(z)|^2 = \frac{(z-1)^{2n}(z+1)^{2n}}{(z-1)^{2n}(z+1)^{2n} + (-1)^n\gamma_3(z+1)^{4n} + (-1)^n\gamma_4(z-1)^{4n}}$$

donde $\gamma_3 = \tan^{2n}\left(\frac{\omega_{c1}T}{2}\right)$, $\gamma_4 = \cot^{2n}\left(\frac{\omega_{c2}T}{2}\right)$, y ω_{c1}, ω_{c2} son las frecuencias inferior y superior respectivamente del filtro pasabanda.

Método de los polinomios de Chebyshev. El empleo de la aproximación por Chebyshev, en la síntesis de filtros análogos, se basa en la siguiente representación de la respuesta de frecuencia:

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

siendo $T_n(\omega)$ el polinomio de Chebyshev de orden n y ε^2 es el coeficiente de pérdida en la banda de paso. Los primeros 10 polinomios de Chebyshev se muestran en la Tabla 4.5.

Orden	Polinomio de Chebyshev
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$
9	$256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 - 9\omega$
10	$512\omega^{10} - 1280\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 - 1$

Tabla 4.5. Polinomios de Chebyshev

El procedimiento de obtención de la función de transferencia de un filtro digital empleando la aproximación de Chebyshev es similar al caso antes analizado para el método de Butterworth. Inicialmente, se determina el cuadrado de la magnitud del filtro pasabajos análogo de Chebyshev, $|H_a(\omega)|^2$, en forma de un polinomio trigonométrico, después, empleando los datos de la Tabla 4.5 se encuentra la función respectiva del filtro digital de Chebyshev.

Ejemplo 4.3. Sea el filtro pasabajos de Chebyshev

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\tan \frac{(\omega T)}{2}}{\tan \frac{\omega_c T}{2}} \right)^{2n}}$$

donde ε^2 es el coeficiente de pérdidas en la banda de paso del filtro y $T_n^2(\cdot)$ es el polinomio de Chebyshev de n potencia y primer orden. El cuadrado de la magnitud del filtro digital se obtiene en la forma:

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{z - 1}{j\gamma_5(z + 1)} \right)}$$

donde $\gamma_5 = \tan(\omega_c T/2)$. Determinando las raíces del polinomio de Chebyshev $T_n^2(\cdot)$, en la función de transferencia obtenida, se hallan sus polos con lo que después se podrá pasar a la etapa de realización del filtro digital.

Método de funciones elípticas. En calidad de criterio de aproximación con las características del filtro ideal, se puede emplear el ajuste en la banda de supresión, en particular, se puede fijar un valor máximo de supresión que el filtro real no debe exceder, o bien, que la banda de paso tenga el menor ancho posible cuando sea dado el valor de supresión.

Los mejores resultados, para esta aproximación, se pueden obtener empleando los denominados filtros elípticos [1]. El cálculo simplificado de estos filtros se puede llevar a cabo partiendo de la

expresión de la respuesta de frecuencia exigida:

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R^2(\omega)}$$

donde la función $R^2(\omega)$ cumple las siguientes condiciones:

- es racional y el número de polos corresponde al de ceros,
- los ceros determinan la banda de paso,
- es función par o impar con respecto a la frecuencia ω .

La relación entre los parámetros de diseño de los filtros (r , s y ε) se establece por las expresiones:

$$\varepsilon^2 = r^2 - 1, \quad M^2 = \frac{1 - s^2}{s^2(r^2 - 1)}$$

donde r y s son la amplitud pico a pico de las desviaciones de la magnitud del filtro con respecto a su valor medio en la banda de paso y de supresión, respectivamente. El valor M es el coeficiente que determina el valor de rechazo en la banda de supresión.

Las expresiones para la función característica del filtro digital elíptico son del tipo:

$$R_k^2(\omega) = M \frac{(x^2 - s_{01}^2)(x^2 - s_{02}^2) \cdots (x^2 - s_{0k}^2)}{(x^2 - s_{p1}^2)(x^2 - s_{p2}^2) \cdots (x^2 - s_{pk}^2)}, \quad \forall k \in \text{par},$$

$$R_k^2(\omega) = Mx \frac{(x^2 - s_{01}^2)(x^2 - s_{02}^2) \cdots (x^2 - s_{0k}^2)}{(x^2 - s_{p1}^2)(x^2 - s_{p2}^2) \cdots (x^2 - s_{pk}^2)}, \quad \forall k \in \text{impar},$$

donde

$$x = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) / \tan\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)$$

El valor de ω_c es la frecuencia de corte del filtro pasabajos, mientras s_{0k} , s_{pk} son los ceros y polos de la función característica. Los respectivos valores de los parámetros de diseño, $(n, r, s, \omega_c, \omega_1, \dots, \omega_k)$, para un filtro de este tipo se pueden calcular por medio de integrales elípticas empleando métodos numéricos.

Particularidades de los métodos de síntesis de filtros recursivos. Durante la síntesis de filtros es necesario determinar principalmente dos parámetros: el tipo de filtro (pasabajos, pasaaltos, etc.) y la forma de realización del filtro (hardware o software). En la síntesis de filtros digitales, mediante métodos numéricos, se puede emplear el método directo de síntesis que traduce los algoritmos de un filtro pasabajos dado su valor de frecuencia de corte ω_c a los algoritmos de los filtros digitales de baja frecuencia, pasabandas o de alta frecuencia con las frecuencias exigidas de corte ω_{req} , como se muestra en la Tabla 4.6.

En este caso, para la realización práctica de las funciones de transferencia, que son obtenidas de los filtros digitales después de su descomposición en fracciones simples, se puede emplear cualquiera de los diagramas funcionales: directo o secuencial. El procedimiento de síntesis del filtro digital requerido, que se basa en el traspaso directo del filtro pasabajos, es el siguiente:

<i>Filtro</i>	<i>Operador del filtro requerido</i>	<i>Parámetros</i>
Pasabajos	$(z^{-1} - \alpha) / (1 - \alpha z^{-1})$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{(\omega_{req} - \omega_c)T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega_{req} + \omega_c)T}{2}\right)}$
Pasaaltos	$(z^{-1} + \alpha) / (1 + \alpha z^{-1})$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{(\omega_{req} - \omega_c)T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(\omega_{req} + \omega_c)T}{2}\right)}$
Pasabanda	$-\left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}\right)$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{(\omega_2 + \omega_1)T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2}\right)},$ $k = \frac{\cot\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(\omega_{req})T}{2}\right)}$
Supresor	$\left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1}\right)$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(\omega_2 + \omega_1)T}{2}\right)},$ $k = \frac{\tan\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2}\right)}{\tan\left(\frac{(\omega_{req})T}{2}\right)}$

Tabla 4.6. Operadores de filtración

1. Se escoge la función de transferencia del filtro digital pasabajos con frecuencia de corte ω_c ,
2. Se fija la frecuencia de corte requerida del pasabajos o del pasaaltos, o bien se fijan las frecuencias baja ω_1 y alta ω_2 de corte del filtro pasabandas,
3. Se calculan los parámetros α y k del filtro por las relaciones de la Tabla 4.6,
4. El operador z^{-1} del filtro inicial pasabajos se cambia por el correspondiente operador del filtro que está siendo sintetizado a partir de la Tabla 4.6.

Ejemplo 4.4. En el caso 2 del ejemplo 4.2 se muestra cómo, por medio de un prototipo análogo de filtro pasabanda $|H_a(\omega)|^2$, se puede sintetizar el filtro pasabajos digital con el cuadrado de la respuesta a impulso del tipo $|H(z)|^2$. Sin embargo, empleando los datos de la Tabla 4.6 se puede efectuar el cambio a un pasabandas, por lo cual se obtiene que,

$$|H_{nn}(z)|^2 = \frac{\gamma_3(z^2 + 1)^{2n}}{\gamma_3(z^2 + 1)^{2n} + (-1)^n(z^2 - 2\alpha z + 1)^{2n}}$$

donde

$$\gamma_3 = \tan^{2n} \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2} \right)$$

Este método de cambio directo del algoritmo de filtro pasabajo recursivo digital a los algoritmos de otro tipo son muy cómodos de emplear, más aun cuando se realiza a nivel de software.

Problemas

Problema 4.4. Dado el método de la invariabilidad de respuesta a impulso, hallar la función de transferencia del respectivo filtro digital para el caso de las siguientes funciones de transferencia análogas,

$$H_a(s) = \frac{a}{s + \alpha}, \quad H_a(s) = \frac{\lambda}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}, \quad H_a(s) = \frac{Cs + D}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}$$

Problema 4.5. En el problema 4.4, diseñar un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\Omega = \alpha = \pi[\text{rad/s}]$ y una ganancia $H(0) = 0 \text{ dB}$.

Problema 4.6. Dadas las condiciones del problema anterior, resolver la síntesis mediante los métodos de la transformación bilineal, las z -plantillas y de acople con la transformada \mathcal{Z} .

Problema 4.7. Demostrar la condición de estabilidad de los métodos de invariabilidad de respuesta a impulso, transformación bilineal, las z -plantillas y de acople con la transformada \mathcal{Z} .

Ejercicio en el CP 4.2. Realizar un programa en `Matlab`, que permita la comparación de las respuestas de frecuencias y desfases, respectivas para dos filtros de tercer orden: de Butterworth, Chebyshev y elípticos.

4.3. Síntesis de filtros no recursivos

4.3.1. Condición de desfase lineal

En el proceso digital de señales, es importante conservar la linealidad del desfase, tal como se determina en (2.41), por ejemplo, en casos tales como el análisis cruzado de espectros, el análisis de señales con estructuras sensibles a cualquier distorsión de forma, etc.

A diferencia de los filtros recursivos, los no recursivos pueden ser construidos con desfase lineal. En particular, a partir de la definición de no recursividad dada en (3.37a), se determina la respectiva salida del filtro como:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

De tal manera, que la función de transferencia del filtro no recursivo se puede expresar en términos de su respuesta a impulso como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]z^{-k}$$

que en términos de descomposición espectral se describe como

$$H(e^{j\omega T}) = |H(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]e^{-j\omega kT} \quad (4.13)$$

Los filtros no recursivos mantienen la condición de linealidad de fase cuando cumplen la condición (2.41), esto es, a partir de la definición (2.40b) se tiene que:

$$\theta(\omega) = \arctan \left(\frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}} \right) \triangleq -\tau\omega, \quad \tau = \text{const.}$$

La función de transferencia (4.13) se puede representar en términos de la serie trigonométrica:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cos(k\omega T) - j \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \sin(k\omega T)$$

Por lo que se tiene que

$$\frac{\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cos(k\omega T)} = \tan(\omega\tau)$$

que resulta en la siguiente igualdad

$$\sum_{k=0}^{M-1} h[k] \sin(\omega\tau - k\omega T) = 0$$

La solución de la anterior igualdad cumple las siguientes condiciones:

$$\tau = (M-1)\frac{T}{2}, \quad h[k] = h[M-1-k], \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.14)$$

De la expresión (4.14), se concluye que para que un filtro no recursivo tenga desfase lineal (y por lo tanto, retardo de grupo constante), entonces, su respuesta a impulso discreta debe ser simétrica con relación a su punto medio, esto es, con relación al punto $(M-1)T/2$, para las funciones $h[k]$ definidas sobre arreglos impares, y $MT/2$ para el caso de los arreglos pares.

En algunos casos, es suficiente solamente la condición de constancia del retardo de grupo (2.42), entonces, los filtros de este tipo tienen desfase determinado por la relación:

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega$$

La solución de (4.13), para $\theta_0 = \pm\pi/2$, cumple las siguientes condiciones:

$$\tau = (M-1)\frac{T}{2}, \quad h[k] = -h[M-1-k], \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

esto es, la respuesta a impulso discreta es antisimétrica con relación a su punto medio: $(M-1)T/2$ para las funciones $h[k]$ definida sobre arreglos impares (obligatoriamente $h[(M-1)/2] = 0$), y $MT/2$ para el caso de los pares.

De lo anterior, se deduce que existen cuatro diferentes variantes de realización de los filtros no recursivos con desfase lineal: de acuerdo a la cantidad de valores que definen la respuesta impulso (par o impar) y de acuerdo a la condición de simetría o asimetría del respectivo arreglo de $h[k]$. Los cuatro anteriores casos se representan en la Figura 4.10, para valores concretos de M y θ .

Precisamente, el empleo de las condiciones de simetría o antisimetría en la respuesta a impulso, conduce a la simplificación del proceso de síntesis de las respectivas funciones de transferencia de los filtros digitales. Particularmente, en el caso en que la función respuesta a impulso $h[k]$ sea simétrica e impar, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \sum_{k=0}^{(M-3)/2} h[k] \exp(-j\omega kT) + h\left(\frac{M-1}{2}\right) \exp\left(-j\omega\left(\frac{M-1}{2}\right)T\right) + \\ &+ \sum_{k=(M+1)/2}^{M-1} h[k] \exp(-j\omega kT) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la solución (4.14), y realizando el cambio de índices $M-1-k = m$, la segunda sumatoria se puede representar en la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=(M+1)/2}^{M-1} h[k] \exp(-j\omega kT) &= \sum_{k=(M+1)/2}^{M-1} h[M-1-k] \exp(-j\omega kT) \\ &= \sum_{m=0}^{(M-3)/2} h[m] \exp(-j(M-m-1)\omega T) \end{aligned}$$

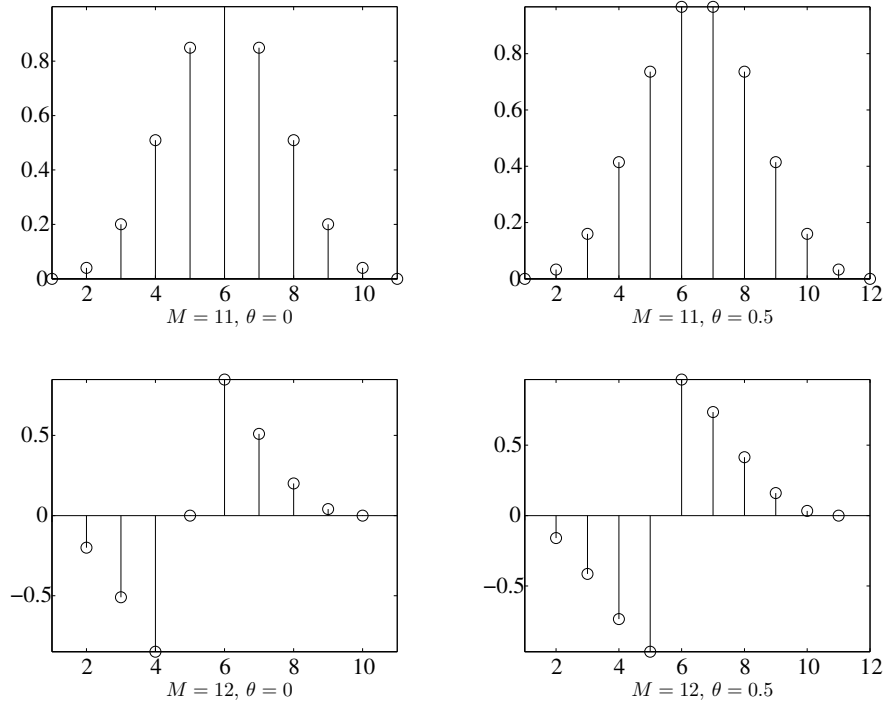


Figura 4.10. Casos de respuesta a impulso para los filtros no recursivos

factorizando el término $\exp(-j(M-1)\omega T/2)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega T}) &= e^{-j(\frac{M-1}{2})\omega T} \left(\sum_{k=0}^{(M-3)/2} h[k] e^{j[(M-1)/2-k]\omega T} + h\left[\frac{M-1}{2}\right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{(M-3)/2} h[k] e^{-j[(M-1)/2-k]\omega T} \right) \\
 &= \left(e^{-j(\frac{M-1}{2})\omega T} \right) \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_n \cos(k\omega T)
 \end{aligned}$$

donde los respectivos coeficientes se determinan como:

$$a_0 = h[(M-1)/2], \quad a_k = 2h[(M-1)/2 - k]$$

Similares relaciones se obtienen para las tres otras variantes de filtros no recursivos lineales, las cuales se muestran en la Tabla 4.7, en la que los coeficientes b_k se determinan por la relación:

$$b_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots$$

Respuesta	orden	Función de transferencia
simétrica	impar	$\exp\left(-j\frac{M-1}{2}\omega T\right) \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos(k\omega T)$
	par	$\exp\left(-j\frac{M-1}{2}\omega T\right) \sum_{k=1}^{M/2} b_k \cos\left(\frac{2k-1}{2}\omega T\right)$
antisimétrica	impar	$\exp\left(-j\left(\frac{M-1}{2}\omega T - \frac{k}{2}\right)\right) \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin(k\omega T)$
	par	$\exp\left(-j\left(\frac{M-1}{2}\omega T - \frac{k}{2}\right)\right) \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\left(\frac{2k-1}{2}\omega T\right)$

Tabla 4.7. Funciones de transferencia en filtros no recursivos lineales

4.3.2. Cálculo de filtros mediante series de Fourier

La definición de la función de transferencia de filtro digital, teniendo en cuenta (3.12b), implica su periodicidad con frecuencia $\omega_d = 2\pi/T$, por lo cual su respectiva descomposición en series de Fourier da como resultado:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega T} \quad (4.15)$$

donde

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} H(e^{j\omega T}) e^{jk\omega T} d\omega \quad (4.16)$$

para una frecuencia de corte ω_s .

De las anteriores expresiones, se observa que los coeficientes de la serie de Fourier pueden ser tomados en calidad de valores de la respuesta a impulso del filtro no recursivo, por lo cual las ecuaciones (4.15) y (4.16) pueden ser empleadas como base para la síntesis de filtros no recursivos. Sin embargo, la función de transferencia (4.15) tiene orden infinito, por lo que su implementación física es imposible. El desarrollo de la función (4.15), sobre un procesador real, exige que la cantidad de términos de la sumatoria sea truncada hasta un valor M , tal que $h[k] = 0, \forall |k| > (M-1)/2$, entonces:

$$H(z) = \sum_{k=-(M-2)/2}^{(M-1)/2} h[k]z^{-k}$$

El retardo propio de los dispositivos de proceso reales se puede tener en cuenta multiplicando la función de transferencia por el correspondiente factor de desplazamiento de tiempo:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{k=-(M-2)/2}^{(M-1)/2} h[k]z^{-k} \quad (4.17)$$

Los filtros con función de transferencia (4.17) les corresponden la magnitud de la forma:

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos(k\omega T) \right| \quad (4.18)$$

Ejemplo 4.5. Sintetizar el filtro pasabajos con magnitud:

$$|H(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \omega_d/2 \end{cases} \quad (1)$$

siendo ω_c y ω_d los valores de la frecuencia de corte y discretización, respectivamente.

Los valores de la función de respuesta a impulso de este filtro se calculan a partir de (4.16):

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega kT} d\omega = \omega_c \text{sinc}(\omega_c kT) \quad (2)$$

Cuando $k = 0$, el correspondiente valor de la respuesta a impulso es igual a:

$$\begin{aligned} h[0] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_c \varepsilon T)}{\varepsilon \pi} = \frac{\omega_c T}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_c \varepsilon T)}{\omega_c \varepsilon T} = \frac{\omega_c T}{\pi} \\ &= \frac{2\omega_c}{\omega_d} \end{aligned}$$

La expresión (4.16) también puede ser empleada en el caso de síntesis de filtros pasaaltos, pasabanda y rechazabandas. Sea por ejemplo, el caso de síntesis del siguiente filtro pasaaltos:

$$|H(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \omega_c \\ 1, & \omega_c \leq \omega \leq \omega_d/2 \end{cases} \quad (3)$$

Con lo que los valores de su respuesta a impulso serán:

$$\begin{aligned} h[k] &= \frac{1}{\omega_d} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} |H(e^{j\omega T})| e^{j\omega kT} d\omega = \frac{1}{\omega_d} \left(\int_{-\omega_c/2}^{-\omega_c} e^{j\omega kT} d\omega + \int_{\omega_c}^{\omega_d/2} e^{j\omega kT} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{\omega_c}^{\omega_d/2} (e^{jk\omega T} + e^{-jk\omega T}) d\omega = \frac{2}{\omega_d} \int_{\omega_c}^{\omega_d/2} \cos(k\omega T) d\omega = \frac{2}{k\omega_d T} \sin(k\omega T) \Big|_{\omega_c}^{\omega_d/2} \\ &= \frac{1}{k\pi} (\sin(k\pi) - \sin(k\omega_c T)) = \frac{\sin(k\omega_c T)}{k\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

Cuando $k = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} h[0] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \pi} (\sin(\varepsilon \pi) - \sin(\varepsilon \omega_c T)) = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon \omega_c T)}{\varepsilon \pi} = 1 - \frac{\omega_c T}{T} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\varepsilon \omega_c T)}{\varepsilon \omega_c T} \\ &= 1 - \frac{\omega_c T}{\pi} = 1 - \frac{2\omega_c}{\omega_d} \end{aligned}$$

De lo anterior resulta que, para $k \geq 1$, los valores de las respectivas funciones de respuesta impulso, tanto para los filtros pasabajos, como para los pasaaltos, que tengan los mismos valores de frecuencia de corte y discretización, se diferencian solamente por el signo del valor discreto.

Así mismo, se observa que la respuesta a impulso de un filtro pasaaltos se puede obtener al restar del valor unitario la respuesta a impulso del filtro complementario pasabajos.

De manera similar, se calculan los valores de la respuesta a impulso de un filtro pasabandas descrito por la magnitud:

$$|H(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \omega_{c1} \\ 1, & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0, & \omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_d/2 \end{cases} \quad (5)$$

de acuerdo a la siguiente expresión:

$$h[k] = \begin{cases} \frac{1}{k\pi} (\sin(\omega_{c2}kT) - \sin(\omega_{c1}kT)), & k \geq 1 \\ \frac{2(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\omega_d}, & k = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Mientras para el filtro complementario rechazabanda con magnitud

$$|H(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ 0, & \omega_{c1} < \omega < \omega_{c2} \\ 1, & \omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_d/2 \end{cases}$$

cuyos valores de respuesta a impulso serán

$$h[k] = \begin{cases} \frac{1}{k\pi} (\sin(\omega_{c1}kT) - \sin(\omega_{c2}kT)), & k \geq 1 \\ 1 - \frac{2(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\omega_d}, & k = 0 \end{cases}$$

Los anteriores resultados muestran que entre los filtros rechazabanda y los pasabanda existe la misma relación complementaria que la que hay entre los pasabandas y los pasaaltos.

Fenómeno de Gibbs en la implementación de filtros digitales. En la implementación real de los filtros no recursivos, al emplear la magnitud (4.18) se presenta el fenómeno de Gibbs, que consiste en la aparición de fluctuaciones en la cercanía inmediata del punto de discontinuidad; la misma amplitud de las fluctuaciones no depende del orden de truncamiento M , mas sí su frecuencia.

El fenómeno de Gibbs se puede explicar al describir la función de respuesta a impulso truncada $h_M[k]$ como la multiplicación de su versión infinita $h[k]$ por una función definida $w[k]$, sobre un intervalo finito de tiempo:

$$h_M[k] = h[k]w[k]$$

tal que, la función ventana $w[k]$ cumple la siguiente restricción:

$$w[k] = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq k \leq M-1 \\ 0, & 0 > k > M-1 \end{cases}$$

A partir de la propiedad de convolución de la transformada \mathcal{Z} , la respectiva función de transferencia

truncada corresponde a:

$$H_M(e^{j\omega T}) = \mathcal{Z}\{h[k]w[k]\} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) W(e^{-j(\omega-\theta)T}) d\omega$$

El caso más simple de análisis de función *ventana* $w[k]$, que encuentra mayor aplicación en la práctica, corresponde a la ventana rectangular definida como:

$$w[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq M-1 \\ 0, & 0 > k > M-1 \end{cases}$$

cuya transformada de Fourier es igual a:

$$W(e^{j\omega T}) = e^{j\omega(M-1)T/2} \frac{\sin(M\omega T/2)}{M\omega T/2} = e^{j\omega(M-1)T/2} \text{sinc}(M\omega T/2)$$

En la parte superior de la Figura 4.11(a), se observa el efecto Gibbs en el tiempo para diferentes longitudes de ventana ($M = 64$ y $M = 320$), al cual le corresponde el espectro mostrado en la parte inferior, que contiene el lóbulo principal y los lóbulos laterales de la magnitud del espectro de la ventana. Las oscilaciones de los lóbulos laterales condiciona las fluctuaciones del fenómeno de Gibbs.

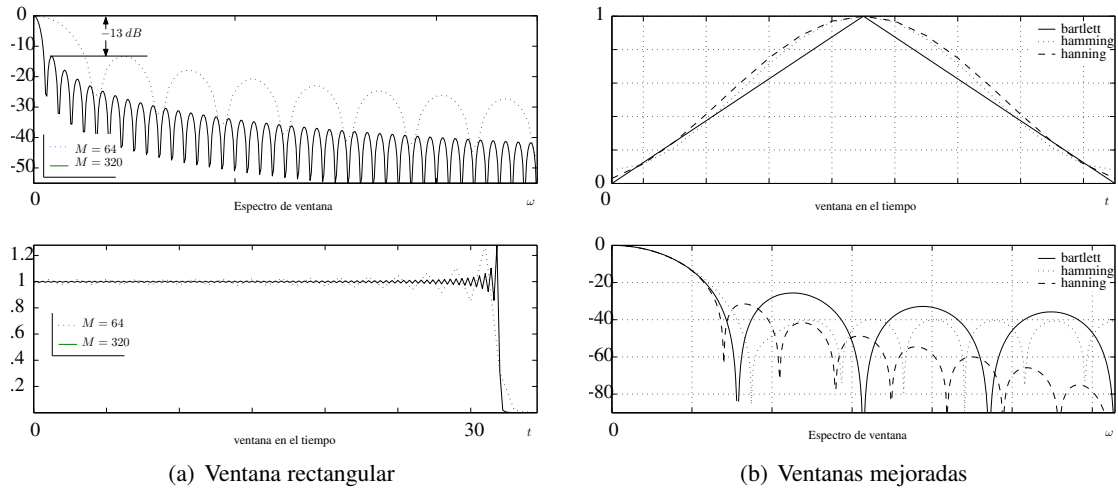


Figura 4.11. Ventanas de proceso

Las simulaciones presentadas en la Figura 4.11(a), muestran que al aumentar la cantidad de elementos discretos de la ventana, disminuyen los lóbulos laterales y el lóbulo principal se hace más agudo, mientras las fluctuaciones en el tiempo se atenúan mucho más rápido en el tiempo. Sin embargo, el exagerado aumento del número de elementos de discretización M conlleva al incremento significativo del costo computacional. En la síntesis de filtros digitales, mediante las series de Fourier, se emplean funciones ventanas, que sean mucho más efectivas que la rectangular, entre las cuales se encuentran las de *Bartlett*, *Hamming* y *Hanning*, mostradas en la Figura 4.11(b).

Funciones mejoradas de ventana

El valor de la distorsión espectral se puede mantener dentro de un mínimo, si se cumplen las siguientes propiedades:

- (a). Alta concentración en el lóbulo central (principal), que requiere una ventana amplia de tiempo.
- (b). Pequeños o insignificantes lóbulos laterales, que requieren una ventana de tiempo alisada sin cortes abruptos de los flancos.

La ventana rectangular en el tiempo implica una ventana espectral del tipo sinc, la cual cumple el punto *a*), pero no es efectiva en el punto *b*), teniendo oscilaciones de alta frecuencia, y además con lóbulos laterales negativos. Aunque la ventana rectangular deja la función de tiempo sin distorsión, esto puede llevar a severas distorsiones en el dominio de la frecuencia. El efecto indeseable es debido a los cortes abruptos de los flancos de la ventana rectangular, que introduce altas frecuencias. Por esto un cierto compromiso debe ser conseguido en el diseño de una ventana que disminuya gradualmente hacia ambos flancos del intervalo del registro; realmente se realiza una cierta distorsión de la señal en el tiempo, pero al mismo tiempo se evitan las oscilaciones de alta frecuencia en el dominio espectral. Una ventana que mantenga ambos dominios sin distorsión es imposible de sintetizar.

No hay un procedimiento directo para derivar la forma de la mejor ventana en todos los sentidos, en vez de esto, la aproximación se basa en un compromiso entre diferentes factores e, inclusive, el procedimiento puede emplear el mecanismo de prueba y error.

La mayoría de las ventanas, $w(t)$, son reales y pares, por lo que su transformada de Fourier, $W(\omega)$, es también real y par. Una condición adicional aplicada sobre forma de las ventanas está en su simetría o antisimetría con respecto al valor medio de su intervalo de definición T o *apertura*. Estas condiciones se hacen necesarias en la implementación de filtros no recursivos lineales.

Se distinguen los siguientes tipos de ventanas:

Ventanas trigonométricas

1. Ventana Rectangular.

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

a la cual le corresponde la siguiente transformada de Fourier

$$W(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = 2 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)$$

El proceso de señales con longitud finita sin realizar ninguna operación sobre el contenido de los datos originales equivale al empleo de la función ventana rectangular. En este caso, aunque su implementación es la más simple, el término sinc en $W(\omega)$ genera amplios lóbulos laterales, que genera distorsión adicional en las componentes espectrales.

La ventana rectangular es la más usada comúnmente, aunque presenta efectos espectrales indeseables. Una versión modificada de la ventana rectangular es la ventana trapezoidal, que presenta menores lóbulos laterales espectrales que la ventana rectangular.

2. *Ventanas tipo sinc.* Basadas en el empleo de la función sinc como función de alisamiento de los datos; entre las principales están:

– *Ventana Fourier - Kernel o Ventana Daniell*

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

La respectiva transformada de Fourier, para el caso de una ventana truncada en el tiempo $0 \leq t \leq T$, no puede ser expresada en forma cerrada, pero en cambio, se puede describir en forma de una serie infinita convergente:

$$W(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \left((\pi - \omega T)^{2n+1} + (\pi + \omega T)^{2n+1} \right)$$

que se aproxima a la función rectangular, en el caso de hacer infinita su apertura.

– *Ventana de Fejér.*

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \text{sinc}^2(t/T), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Dados valores finitos para la apertura de ventana, la correspondiente transformada de Fourier $W(\omega)$ conlleva a series infinitas convergentes, las cuales se aproximan a la función triangular:

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \left((2\pi + \omega T)^{2n+2} + (2\pi - \omega T)^{2n+2} - 2(\omega T)^{2n+2} \right)$$

3. *Ventanas tipo coseno.* Basadas en las propiedades envolventes de la función coseno, son las ventanas que más uso tienen en el proceso de señales, entre ellas se tienen:

Ventana Hanning. Conocida como ventana Tukey o simplemente ventana *coseno*.

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (1 + \cos(\pi t/T)), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

cuya transformada de Fourier se expresa como:

$$W(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) + \frac{1}{2} \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} + 1\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} - 1\right) \right)$$

A diferencia de la ventana rectangular, la transformada de la ventana tipo coseno $W(\omega)$ se representa por la suma de tres funciones sinc, desplazadas una de otra. De la ecuación anterior, se observa que los lóbulos laterales de las tres funciones sinc, al ensancharse, se cancelan unos con otros. Así mismo, se observa que si la apertura T puede llegar a ser muy pequeña, el espectro

de la ventana se puede aproximar a una constante. Este caso corresponde a baja resolución y alta estabilidad del espectro. El caso contrario de análisis, cuando la apertura T se amplía, significa alta resolución pero baja estabilidad. La ventana Hanning es equivalente a la ventana coseno cuadrado:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Algunas veces es usada la *media ventana coseno*, que es llamada *Ventana Hanning Modificada*.

Ventana Hamming

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

$$W(\omega) = 1.08 \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) + 0.46 \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} + 1\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} - 1\right) \right)$$

En general, Las ventanas Hanning y Hamming pueden escribirse como:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(1 - 2a + 2a \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

donde $a = 0.25$ para la ventana de Hanning y $a = 0.23$ para la ventana de Hamming. Una pequeña modificación en los factores de peso conlleva a la adecuada eliminación de los efectos de los lóbulos laterales. Las ventanas espectrales Hanning y Hamming corresponden al promedio sobre tres valores consecutivos de la función espectral de la ventana rectangular, el cual tiene como consecuencia que estas ventanas espectrales tengan muchos lóbulos laterales pequeños, pero con un lóbulo principal más amplio que para la ventana rectangular. La ventana Hamming es considerada como una de las de mejor comportamiento y, por tal razón, es ampliamente usada.

Ventana rectangular coseno envolvente. A menudo se busca ventana que sea suficientemente plana sobre la mayor parte de duración de la señal (semejante a la ventana rectangular), pero que alise fuertemente sus dos extremos (semejante a una ventana coseno). Tal efecto se obtiene al combinar las ventanas rectangular y Hanning, de tal manera que la ventana comienza a la izquierda con la ventana coseno, seguida por una ventana rectangular sobre la mayor parte de la señal y al final con el lado derecho de la ventana coseno:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} \left(1 + \cos\left(\frac{5\pi t}{T}\right) \right), & -T \leq |t| \leq -\frac{4T}{5} \\ \frac{1}{T}, & -\frac{4T}{5} \leq |t| \leq \frac{4T}{5} \\ \frac{1}{2T} \left(1 + \cos\left(\frac{5\pi t}{T}\right) \right), & \frac{4T}{5} \leq |t| \leq T \end{cases}$$

La correspondiente ventana espectral es:

$$W(\omega) = \frac{\sin(\omega T) + \sin(4\omega T/5)}{\omega T \left(1 - (\omega T/5\pi)^2\right)}$$

Ventanas de potencia. Estas están asociadas a alguna función de potencia de t , entre las cuales están las siguientes:

1. *Ventana Triangular.* Conocida también como ventana Bartlett:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(1 - \left(\frac{|t|}{T}\right)\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

que le corresponde la transformada de Fourier

$$W(\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

Esta ventana, a diferencia de otras, no tiene lóbulos laterales negativos.

Otro caso especial de la ventana de potencia se obtiene haciendo $m = 2$, de lo cual resulta la ventana parabólica.

2. *Ventana de Parzen.* Corresponde a la generalización de la ventana triangular,

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(1 - \left(\frac{|t|^m}{T^m}\right)\right), & 0 \leq t \leq T, m \in \mathbb{Z}^+ \\ 0, & t > T \end{cases}$$

El número de términos en la respectiva transformada de Fourier depende del exponente m :

$$W(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega T} - \frac{2}{(\omega T)^{m+1}} \int_0^{\omega T} t^m \cos t dt$$

La integral puede simplificarse, si se lleva fuera la integración sucesiva:

$$\int_0^{\omega T} t^m \cos t dt = f(\omega T) \sin \omega T + f'(\omega T) \cos \omega T - f'(0)$$

donde

$$f(t) = m! \sum_0^N (-1)^n \frac{t^{m-2n}}{(m-2n)!}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N = \begin{cases} m/2, & m \in \text{par} \\ (m-1)/2, & m \in \text{impar} \end{cases}$$

La ventana de Parzen aparece frecuentemente con la siguiente descripción:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(1 - 6 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 6 \left(\frac{|t|}{T} \right)^3 \right), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2}{T} \left(1 - \frac{|t|}{T} \right), & \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0, & 0 < t > T \end{cases}$$

3. *Ventana de Cappelini.* Corresponde a una de las ventanas más cercanas al óptimo potencial en la minimización de las pulsaciones de Gibbs, y se determina como:

$$w(n) = \begin{cases} w_c \left(\frac{3n}{N-1} \right), & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

donde

$$w_c(t) = \begin{cases} 0.828217t^3 - 1.67363t^2 + 0.041186t + 0.99938, & 0 \leq t < 0.75 \\ 0.065062t^3 + 0.372793t^2 - 1.701521t + 1.496611, & 0.75 \leq t \leq 1.5 \end{cases}$$

Ventanas exponenciales. Contienen la variable tiempo en el exponente.

1. *Ventana de Gauss.*

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-at^2}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

donde a es una constante positiva. En el caso de análisis de aperturas de tiempo infinito, la curva gaussiana es auto-recíproca. Para un intervalo de tiempo finito la TF es:

$$W(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \operatorname{erf}(T\sqrt{a}), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Esta ventana espectral no tiene lóbulos laterales negativos y no presenta oscilaciones, lo cual puede conducir a máximos y mínimos espurios en el espectro calculado.

2. *Ventana de Kaiser.* Una de las ventanas más efectivas empleadas en la síntesis de filtros no recursivos:

$$w(n) = \begin{cases} I_0(\beta)/I_0(\alpha), & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (4.19)$$

donde $I_0(\beta)$ es la función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero, con argumento, $\beta = \alpha \sqrt{1 - (2n/(N-1))^2}$, α es un parámetro independiente. El valor de esta función se

puede calcular empleando la serie convergente:

$$I_0(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^k \right)^2$$

En la práctica, el cálculo se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$I_0(\lambda) = \begin{cases} 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4 + 1.2067492t^6 \\ + 0.2659732t^8 + 0.03600768t^{10} + 0.0045813t^{12}, & t = \frac{\lambda}{3.75}, \lambda \leq 3.75 \\ \frac{e^{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} (0.39894228 + 0.01328592t_1 + 0.00225319t_1^2 \\ - 0.00157565t_1^3 + 0.00916281t_1^4 - 0.2057706t_1^5 \\ + 0.02635537t_1^6 - 0.01647633t_1^7 + 0.00392377t_1^8), & t_1 = 3.75/\lambda, \lambda > 3.75 \end{cases}$$

A diferencia de las demás ventanas, cuya forma solamente se determina por el parámetro tiempo t (o tiempo normalizado t/T), la ventana de Kaiser cuenta con un parámetro adicional α . Combinando adecuadamente ambos parámetros se obtiene mucho mayor flexibilidad en el diseño de filtros con cualquier respuesta de frecuencia realmente implementable, como se muestra en la Figura 4.12.

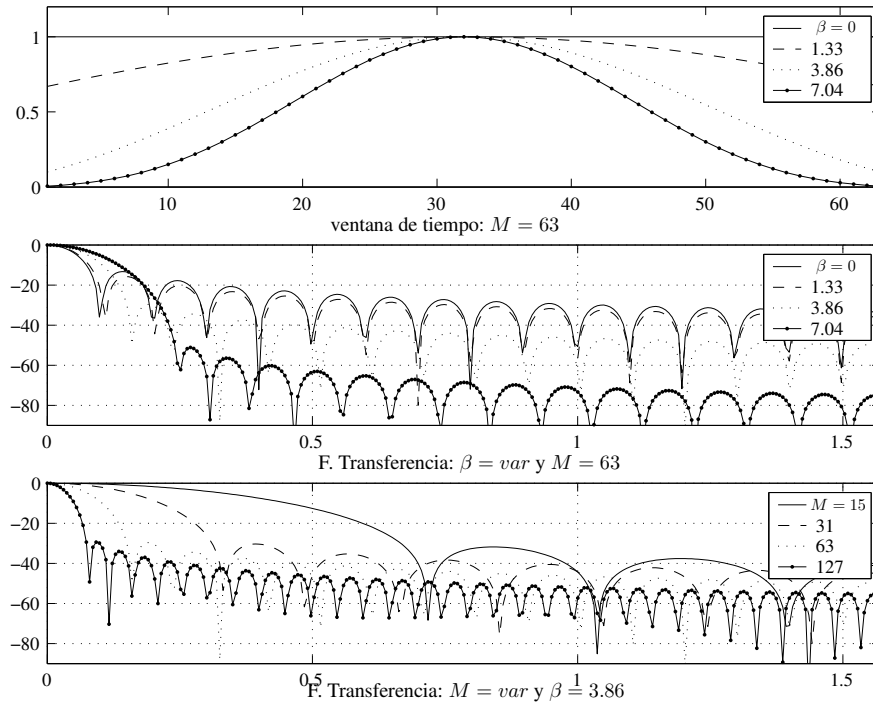


Figura 4.12. Ventana de Kaiser

Sin embargo, el empleo de la ventana de Kaiser está limitado por la selección de los parámetros β y el tiempo normalizado N , para lo cual se ha propuesto el siguiente algoritmo:

Sea dado un filtro pasabajos, para el cual las pulsaciones de la respuesta de frecuencia en la

banda de paso $(0, \omega_p)$ no excede el valor A_p (dado en $[dB]$), con rechazo no menor a A_z $[dB]$ en la banda de rechazo $(\omega_z, \omega_d/2)$ y con ancho de banda de transición $B_t = \omega_z - \omega_p$. Los respectivos coeficientes del filtro Kaiser se calculan de la siguiente manera:

- a) Empleando la expresión (2), dada en el ejemplo 4.5, se calcula la respuesta a impulso $\hat{h}[n]$, que corresponde a la función de transferencia de un filtro ideal pasabajos (1), donde $\omega_c = (\omega_p + \omega_z)/2$ es la frecuencia de corte condicional.
- b) De los valores dados A_p y A_z , se calculan los respectivos coeficientes en veces:

$$\delta_1 = 10^{-0.05A_z}, \quad \delta_2 = \frac{10^{0.05A_p} - 1}{10^{0.05A_p} + 1}$$

de los cuales se halla el menor $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

- c) Obtenido el valor δ , que caracteriza la desviación de la aproximación para la respuesta de frecuencia ideal, se calcula el valor que caracteriza la banda de rechazo:

$$A_z = -20 \lg \delta$$

- d) Se determina el parámetro α de acuerdo con la expresión:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & A_p < 21 \\ 0.5842(A_p - 21)^{0.4} + 0.07886(A_p - 21), & 21 \leq A_p \leq 50 \\ 0.1102(A_p - 8.7), & A_p > 50 \end{cases}$$

- e) Del valor dado A_p se obtiene el parámetro D , e igual a:

$$D = \begin{cases} 0.9222, & A_p \leq 21 \\ (A_p - 7.95)/14.36, & A_p > 21 \end{cases}$$

- f) Se estima el orden del filtro Kaiser de la condición:

$$N = 2 \lfloor \omega_d D / 2B_t \rfloor + 1,$$

siendo $\lfloor \lambda \rfloor$ la parte entera de λ .

- g) De acuerdo con (4.19), se calculan los valores de la función ventana de Kaiser, a partir de los cuales se calculan los coeficientes del filtro:

$$h[n] = w \left(\left| \frac{N-1}{2} - i \right| \right) \hat{h} \left(\left| \frac{N-1}{2} - i \right| \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

La función de transferencia del filtro real de Kaiser tiene la forma:

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{a'[n]}{2} (z^n + z^{-n})$$

donde $a'[0] = h[0]$ y $a'[n] = 2h[n]$, $n = 1, \dots, N-1$.

El anterior algoritmo es aplicable a los diferentes tipos básicos de filtros. En el caso de los pasaaltos, los coeficientes de la respuesta a impulso se calculan empleando las expresiones (3) y (4), dadas en el ejemplo 4.5, ajustando los valores de los parámetros en la forma: $\omega_c = (\omega_p + \omega_z)/2$ y $B_t = (\omega_p - \omega_z)$. En el diseño de los pasabandas y rechazabandas, los coeficientes de la respuesta a impulso se calculan empleando las expresiones (5) y (6) del ejemplo 4.5. Sin embargo, en el primer caso, el ajuste de los valores es el siguiente: $\omega_{c1} = \omega_{p1} - B_t/2$, $\omega_{c2} = \omega_{p2} + B_t/2$, donde $B_t = \min\{\omega_{p1} - \omega_{z1}, \omega_{z2} - \omega_{p2}\}$, mientras para el rechazabanda el ajuste es: $\omega_{c1} = \omega_{p1} + B_t/2$, $\omega_{c2} = \omega_{p2} - B_t/2$ y $B_t = \min\{\omega_{z1} - \omega_{p1}, \omega_{p2} - \omega_{z2}\}$.

Métodos de empleo de ventanas

Los procedimientos prácticos aplicando ventanas pueden resumirse en dos métodos alternativos:

1. *Método 1.* La señal de entrada se multiplica por la función ventana seleccionada. La transformada de Fourier de la serie ponderada es suavizada debido al efecto de la convolución compleja con el espectro de la ventana apropiada.
2. *Método 2.* La señal discretizada de entrada se multiplica por la ventana rectangular con peso 1, esto es, no se altera el contenido de la serie de entrada en la apertura de ventana, luego se realiza el suavizado o alisamiento de las componentes espectrales obtenidas. Por ejemplo, se puede aplicar la ventana espectral Hamming (este alisamiento es hecho para contrarrestar las altas frecuencias introducidas por la ventana de tiempo rectangular) sobre tres puntos con pesos:

$$w[k-1] = 0.23, w[k] = 0.54, w[k+1] = 0.23$$

Ambos métodos son equivalentes, aunque que se desarrollan en orden diferente.

En cuanto a la selección de la ventana concreta a ser aplicada, la solución corresponde a un compromiso entre varios factores, de los cuales los más significativos son, primero, el ancho de banda del lóbulo principal del espectro y, luego, la energía de los lóbulos laterales espectrales.

La ventana espectral debe concentrarse en el lóbulo central alrededor de $\omega = 0$ y tener únicamente pequeños lóbulos laterales. Los lóbulos laterales negativos deben preferiblemente ser lo más pequeños posibles. Esa condición es clara cuando se considera que la ventana espectral por su convolución con el espectro de la señal útil toma el papel de una función de peso. Desde este punto de vista la ventana rectangular se puede considerar angosta; el problema en su uso está en las altas frecuencias que introduce debido al fenómeno de Gibbs.

De forma heurística, se considera que el ancho de banda de la ventana espectral es un parámetro con mayor importancia que el tipo de ventana usado. El ancho de banda puede ser del mismo orden o tan preciso como se quiera para analizar el espectro. Aunque el ancho de banda pequeño podría disminuir la estabilidad de la estimación espectral. Es aconsejable iniciar con un pequeño T e incrementarlo mientras que el espectro no se afecte en su longitud. A objeto de obtener una buena resolución espectral se tienen dos alternativas: conservar un T constante y buscar entre diferentes tipos de ventana, o bien, dejar un T variable y mantener un tipo de ventana constante. El último procedimiento, se considera, es el más eficiente.

Ejercicio en el CP 4.3. [Matlab] El diseño de un filtro Butterworth de cuarto orden, la determinación de los respectivos coeficientes de función de transferencia y el cálculo de función de la transferencia misma, se realiza de acuerdo al siguiente programa:

```
%Hallar un filtro Butterworth de cuarto orden
[z,p,k]=buttap(4);
disp('polos');disp(p)
% Determinación de coeficientes de función de transferencia
[pz,pp]=zp2tf(z,p,k);
disp('Coeficientes del numerador'); disp(pz)
disp('Coeficientes del denominador'); disp(pp)
%Frecuencias normalizadas, donde 1 es la frecuencia de corte
omega=[0:0.01:5];
%Cálculo de función de transferencia
H=freqs(pz,pp,omega); gain=20*log10(abs(H));
plot(omega,gain); grid;
```

La siguiente respuesta se obtiene, incluyendo en módulo de la función de transferencia mostrado en la Figura 4.13:

```
polos
-0.3827 + 0.9239i
-0.3827 - 0.9239i
-0.9239 + 0.3827i
-0.9239 - 0.3827i

Coeficientes del numerador
    0    0    0    0    1

Coeficientes del denominador
    1.0000    2.6131    3.4142    2.6131    1.0000
```

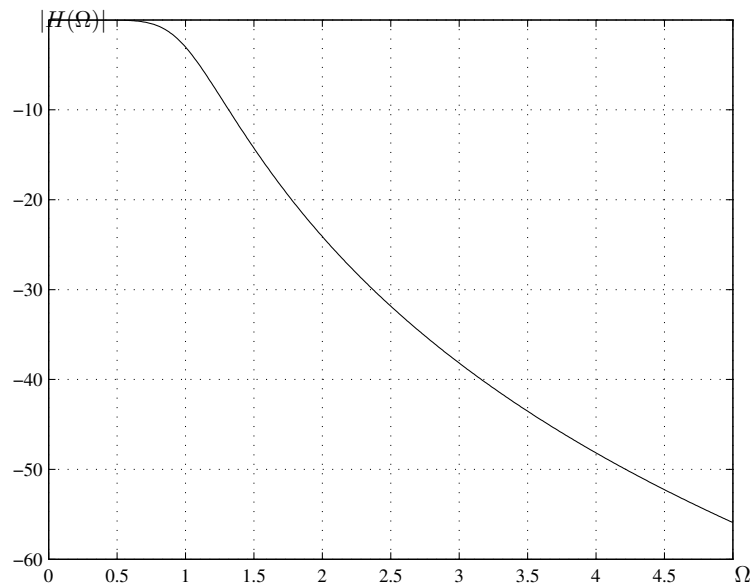


Figura 4.13. Módulo de la función de transferencia obtenida

4.3.3. Discretización de la función de transferencia

La respuesta de frecuencia de un filtro pasabanda, con frecuencia de corte ω_c y desfase de frecuencia cero, $\phi(j\omega) = 0$, tiene la forma:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

En este caso, la respuesta a impulso del filtro se describe como:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega = \text{sinc} \left(\frac{\omega_c t}{\pi T} \right) \quad (4.20)$$

Cuando a la entrada del filtro se aplica la señal $x(t)$, entonces, se cumple:

$$Y(j\omega) = \begin{cases} X(j\omega) H(j\omega), & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Asumiendo que la función de entrada está limitada dentro de un rango finito de frecuencias, esto es, $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_\beta < \infty$, luego, $X(j\omega) H(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_\beta$. Además, cuando la función $H_N(j\omega)$ corresponde una componente periódica de $H(j\omega)$ con período $T = 2\pi/\omega_d$, donde, $\omega_d \geq 2\omega_\beta$ entonces, la TF de la señal de salida tiene la forma:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) = H_N(j\omega) X(j\omega), \forall \omega$$

Si la función $H(j\omega)$ permite representar $H_N(j\omega)$ en forma de la siguiente serie exponencial

$$H_N(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi\omega n/\omega_d}$$

donde $h_n = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces, la respectiva respuesta a impulso será:

$$h_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \delta \left(t + \frac{2\pi n}{\omega_d} \right)$$

La señal de salida $y(t)$ se obtiene de calcular la convolución de las funciones $x(t) * h_N(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x \left(t + \frac{2\pi n}{\omega_d} \right)$$

cuando $t = 2\pi m/\omega_d$, en el plano discreto, se obtiene

$$y \left[\frac{2\pi m}{\omega_d} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x \left[\frac{2\pi (m+n)}{\omega_d} \right]$$

Con esta relación es difícil trabajar en el desarrollo de algoritmos de proceso digital, por cuanto se

necesita una cantidad infinita de muestras discretas.

Sea la función aproximativa de $H(j\omega)$ en la forma de la siguiente serie exponencial truncada:

$$H_N(j\omega) = \sum_{n=-N}^N h_n \exp(-\frac{2\pi j\omega n}{\omega_d}) \quad (4.21)$$

entonces

$$h_N(t) = \sum_{n=-N}^N h_n \delta\left(t + \frac{2\pi n}{\omega_d}\right) \quad (4.22)$$

determinando la convolución de las dos funciones $x(t) * h_N(t)$, se halla $y(t)$ en la forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h_N(t) = \sum_{n=-N}^N h_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta\left(t - \tau + \frac{2\pi n}{\omega_d}\right) dt \\ &= \sum_{n=-N}^N h_n x\left(t + \frac{2\pi n}{\omega_d}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $t = 2\pi m/\omega_d$, en el plano discreto, finalmente se obtiene que

$$y\left[\frac{2\pi m}{\omega_d}\right] = \sum_{n=-N}^N h_n x\left[\frac{2\pi(m+n)}{\omega_d}\right] \quad (4.23)$$

La relación (4.23) es la expresión básica de filtración digital no recursiva, mientras las relaciones (4.21) y (4.22) describen sus características de frecuencia y tiempo, respectivamente. Analizando (4.21), es importante anotar que debido a que la función de transferencia del filtro ideal en la práctica se escoge en forma de función par o impar, entonces la función aproximativa $H_N(j\omega)$ se puede representar para las funciones pares como

$$H_N(\omega) = h_0 + 2 \sum_{n=-N}^N h_n \cos\left(\frac{2\pi n f}{f_d}\right)$$

mientras, para las impares

$$H_N(\omega) = 2j \sum_{n=-N}^N h_n \cos\left(\frac{2\pi n f}{f_d}\right)$$

Los siguientes son los aspectos básicos a tener en cuenta en la síntesis de filtros no recursivos:

- El método de selección de los coeficientes h_n para el tipo dado de la función $H(\omega)$ y el carácter de las señales a procesar;
- La estimación de los errores de aproximación de $H(\omega)$ por $H_N(\omega)$.
- Proveer la condición de eliminación del efecto de traslapo de las señales a la salida del filtro.

4.3.4. Optimización de filtros no recursivos

El cálculo de los filtros no recursivos empleando las series de Fourier conlleva a que, en los puntos de corte abrupto en la función de transferencia resultante, aparezcan las pulsaciones de Gibbs, en cuya disminución se emplean diferentes tipos de ventanas. Sin embargo, estas oscilaciones se distribuyen de manera no homogénea a lo largo del espectro, con lo cual, en algunos puntos la compensación con las ventanas es adecuada, pero en otras regiones, puede ocurrir que de forma parcial se cumplan las exigencias de atenuación. La redistribución de las pulsaciones de la respuesta de frecuencia se puede realizar directamente sobre una malla dada de frecuencias discretas de la función de transferencia, utilizando diferentes métodos numéricos de optimización.

El primer método básico de optimización consiste en la implementación directa de una malla de N valores discretos $H[k]$ de la función de transferencia (4.21), relacionada con la respectiva función respuesta a impulso de la forma:

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \exp(-j(2\pi/N)nk),$$

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] W^{kn}, \quad W = e^{j2\pi/N}$$

Por lo que los valores de la respuesta a impulso se pueden hallar calculando la transformada discreta inversa de Fourier de la función de transferencia del filtro:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} \Big|_{z=W^n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] W^{kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \sum_{n=0}^{N-1} (W^{kn} z^{-n}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] (W^k z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{1 - W^{Nk} z^{-N}}{1 - W^k z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - (e^{j2\pi k/N}) z^{-1}} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{-j\omega T} e^{j2\pi k/N}} = \frac{e^{-jN\omega T/2} (e^{jN\omega T/2} - e^{-jN\omega T/2})}{N} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{e^{-j\omega T/2} e^{j\pi k/N} [e^{j\omega T/2} e^{-j\pi k/N} - e^{-j\omega T/2}]} \\ &= e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}T)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k] e^{-j\pi k/N} \sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que si $H[k]$ son los valores de la función de transferencia en los puntos W^k ,

entonces se obtiene

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{|H(0)|}{N} \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2} + \sum_{k=1}^M \frac{|H[k]|}{N} \left(\frac{\sin \left(N \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{k\pi}{N} \right)} + \frac{\sin \left(N \left(\frac{\omega T}{2} + \frac{k\pi}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} + \frac{k\pi}{N} \right)} \right) \quad (4.24)$$

donde $M = (N - 1)/2$ para valores impares de N y $M = N/2 - 1$ para valores pares de N .

Los valores de la función de transferencia $H(e^{j\omega T})$ del filtro no recursivo, calculado por el método de la discretización de la función de transferencia, coinciden con los valores de la función de transferencia exigida $H_d[k]$, solamente en los puntos ω^k . En los demás puntos, ambas funciones no convergen. Debido a esto, en la práctica se emplean modificaciones del método de discretización de la función de transferencia, que disminuyan las pulsaciones de la función de aproximación $H(e^{j\omega})$.

Disminución de las pulsaciones de Gibbs. Estas oscilaciones están directamente relacionadas con el cambio abrupto en la definición de la función de transferencia. Si se genera una banda de transición más suave y extendida, entonces, las fluctuaciones disminuirán en los valores intermedios entre la malla discreta de frecuencias. Los diferentes métodos se diferencian por el criterio de error dado en la optimización de esta tarea.

La expresión (4.24), que aproxima la función de transferencia exigida $H_d[k]$, es una función lineal respecto de $H[k]$ y para la selección de sus valores óptimos, en la banda de transición, se emplean métodos lineales de optimización.

En general, la función de transferencia (4.24) puede ser representada de la forma:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^M |H[k]| S_k(e^{j\omega T}) \quad (4.25)$$

donde

$$S_k(e^{j\omega T}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2}, & k = 0 \\ \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \left(N \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{k\pi}{N} \right)} + \frac{\sin \left(N \left(\frac{\omega T}{2} + \frac{k\pi}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\omega T}{2} + \frac{k\pi}{N} \right)} \right), & k \geq 1 \end{cases}$$

Sea $B(e^{j\omega T})$, la componente de la suma (4.25), que corresponde a los discretos fijos de frecuencia:

$$H(e^{j\omega T}) = B(e^{j\omega T}) + \sum_{k=M_1}^{M_2} |H[k]| S_k(e^{j\omega T})$$

donde $|H[k]|$, $k = M_1, M_1 + 1, \dots, M_2$ es la componente flexible de la banda de transición, cuyos valores cambian acordes al criterio de optimización.

Además, sea $W[\omega]$ la función de peso, que caracteriza el error de aproximación, siendo $\delta > 0$ su máximo valor en las bandas de paso y rechazo. Entonces, se necesita seleccionar aquellos valores de los parámetros $x_i = |H[M_1 - 1 + i]|$, $i = 1, 2, \dots, L = (M_2 - M_1 + 1)$, con las siguientes restricciones:

$$|W(\omega_l) (H(e^{j\omega_l T}) - H_d(e^{j\omega_l T}))| \leq \delta, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.26)$$

tal que se cumpla que δ sea la mínima posible. Las restricciones (4.26) se pueden replantear de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W(\omega_l) (H(e^{j\omega_l T}) - H_d(e^{j\omega_l T})) &\leq \delta, \\ W(\omega_l) (H(e^{j\omega_l T}) - H_d(e^{j\omega_l T})) &\geq -\delta \end{aligned}$$

Los valores x_1, \dots, x_L de la función de transferencia discreta se pueden encontrar empleando técnicas de programación lineal con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L (W(\omega_l) S_{M_1+1+i}(e^{j\omega_l T})) x_i - \delta &\leq W(\omega_l) (H_d(e^{j\omega_l T}) - B(e^{j\omega_l T})) \\ - \sum_{i=1}^L (W(\omega_l) S_{M_1+1+i}(e^{j\omega_l T})) x_i - \delta &\leq W(\omega_l) (H_d(e^{j\omega_l T}) + B(e^{j\omega_l T})) \end{aligned}$$

siendo $\omega_l = 2\pi l/N$, $l = 0, 1, \dots, N - 1$, $0 < x_i < 1$, $i = 1, \dots, L$, tal que el máximo valor del error de aproximación δ , en las bandas de paso y rechazo, sea el mínimo posible.

Medidas de distancia de error. Se pueden construir diferentes clases de filtros óptimos no recursivos, de acuerdo al criterio de error escogido, determinado por la medida de distancia entre la función de aproximación $H(e^{j\omega_l T})$ y la función aproximada $H_d(e^{j\omega_l T})$, definida sobre espacios p -integrables como:

$$\|H - H_d\|_{L_p} = \frac{1}{\omega_d} \int_0^{\omega_d} (H(e^{j\omega T}) - H_d(e^{j\omega T}))^p d\omega \quad (4.27)$$

La solución generalizada de (4.27) es una tarea compleja de programación no lineal. En el caso de $p = 2$ la norma corresponde al criterio del error cuadrático medio y los respectivos coeficientes se hallan resolviendo el respectivo sistema lineal de ecuaciones algebraicas. El filtro que minimiza el máximo valor del error de aproximación en las bandas de paso y rechazo corresponde a la aproximación de Chebyshev [1].

Sea $H_d(e^{j\omega T})$ la función de transferencia ideal, que hay que aproximar por medio de la función $H(e^{j\omega T}, \theta)$ sobre un subconjunto cerrado ϖ de intervalo $(0, \omega_{d/2})$, y $W(\omega)$ una función positiva de medición ponderada, que caracteriza el valor absoluto del error en todas las bandas de frecuencia. Entonces, el error ponderado de aproximación se puede representar en la forma:

$$\varepsilon(\omega, \theta) = |W(\omega) (H(e^{j\omega T}, \theta) - H_d(e^{j\omega T}))|$$

donde θ es un vector de parámetros desconocidos.

La aproximación de Chebyshev consiste en la selección de los valores del vector θ en la función $H(e^{j\omega T}, \theta)$, tales que el máximo valor del error,

$$\delta(\theta) = \max_{\omega \in \overline{\omega}} |W(\omega) (H(e^{j\omega T}, \theta) - H_d(e^{j\omega T}))| \quad (4.28)$$

sea el mínimo posible.

La función $H(e^{j\omega T}, \theta)$ se puede representar en forma de multiplicación de las siguientes componentes:

$$H(e^{j\omega T}, \theta) = P(e^{j\omega T}) Q(e^{j\omega T}, \theta)$$

donde $P(e^{j\omega T})$ es alguna función de medida ponderada, y $Q(e^{j\omega T}, \theta)$ corresponde a las 4 distintas estructuras de funciones de transferencia obtenidas para los filtros recursivos y mostradas en la Tabla 4.7, que en general, se puede representar en forma de una combinación lineal de cosenos:

$$Q(e^{j\omega T}, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \theta_n \cos(n\omega T), \quad 0 \leq \omega \leq \omega_d/2 \quad (4.29)$$

Cuando se dispone de una respuesta impulso $h[n]$ simétrica y en caso de tener un valor N impar, entonces, $P(e^{j\omega T}) = 1$, $\theta_n = a_n$, mientras, para el caso de N par, se tiene:

$$Q(e^{j\omega T}, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} b(n) \cos\left(\omega \left(n - \frac{1}{2}\right) T\right) = \cos \frac{\omega T}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{b}_n \cos n\omega T$$

donde los coeficientes b_n y \tilde{b}_n se relacionan de la forma:

$$b_1 = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1/2, \dots, \quad b_n = (\tilde{b}_{n-1} + \tilde{b}_n)/2, \dots, \quad b_N = \tilde{b}_{N-1}/2$$

con función de medida ponderada $P(e^{j\omega T}) = \cos \omega T/2$.

Si, por el contrario, la respuesta a impulso es antisimétrica, en el caso de N impar se tiene:

$$H(e^{j\omega T}, \theta) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(n\omega T) = \sin(\omega T) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \cos(n\omega T)$$

donde $c_1 = \tilde{c}_0 - \tilde{c}_2/2, \dots, \quad c_n = (\tilde{c}_{n-1} - \tilde{c}_{n+1})/2, \dots, \quad c_N = \tilde{c}_{N-1}/2$, con lo cual se obtiene que $P(e^{j\omega T}) = \sin \omega T/2$.

De manera similar, para el caso N par, se obtiene que:

$$H(e^{j\omega T}, \theta) = \sum_{n=1}^N d_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \omega T = \sin \frac{\omega T}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{d}_n \cos(n\omega T)$$

donde $d_1 = \tilde{d}_0 - \tilde{d}_1/2, \dots, d_n = (\tilde{d}_{n-1} - \tilde{d}_n)/2, \dots, d_N = \tilde{d}_{N-1}/2$, por lo tanto, la función de peso es $P(e^{j\omega T}) = \sin \omega T/2$.

A efectos de simpleza, se introducen las siguientes notaciones:

$$\widetilde{W}(\omega) \triangleq W(\omega)P(e^{j\omega T}) \quad (4.30a)$$

$$\widetilde{H}_d(e^{j\omega T}) \triangleq H_d(e^{j\omega T}) / P(e^{j\omega T}) \quad (4.30b)$$

A partir de (4.30b), el error ponderado de aproximación (4.28) tiene la forma:

$$\varepsilon(\omega, \theta) = \widetilde{W}(\omega) \left(\widetilde{H}(e^{j\omega T}, \theta) - \widetilde{H}_d(e^{j\omega T}, \theta) \right)$$

El principal algoritmo de solución de la tarea de aproximación de Chebyshev es el segundo algoritmo de Remez, que se basa en el *teorema de la alternancia de Chebyshev*, cuya modificación en la aproximación de una función con un polinomio trigonométrico se formula de la siguiente manera:

Sea la función $Q(e^{j\omega T}, \theta)$ una combinación lineal de N funciones coseno del tipo (4.29). Para que esta aproximación sea la mejor, por el método de Chebyshev, para la función $\widetilde{H}_d(e^{j\omega T})$ dentro del espacio cerrado ϖ , es necesario y suficiente, que exista por lo menos $N + 1$ puntos $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$, para los cuales

$$\varepsilon(\omega_{i+1}, \theta) = -\varepsilon(\omega_i, \theta), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1$$

donde

$$|\varepsilon(\omega_i, \theta)| = \max_{\omega \in \varpi} \varepsilon(\omega, \theta), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Las frecuencias $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ son los *puntos de la alternancia de Chebyshev*.

El teorema de alternancia se considera básico para la realización de diferentes algoritmos efectivos de cálculo de solución de la aproximación de Chebyshev.

Cuando una malla de valores ordenados

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$$

conforman un conjunto de puntos de alternancia entonces, para un valor desconocido δ , en cada punto ω_k se deben cumplir las siguientes restricciones:

$$W(\omega_k) (H(e^{j\omega_k T}, \theta) - H_d(e^{j\omega_k T})) = (-1)^k \delta, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (4.31)$$

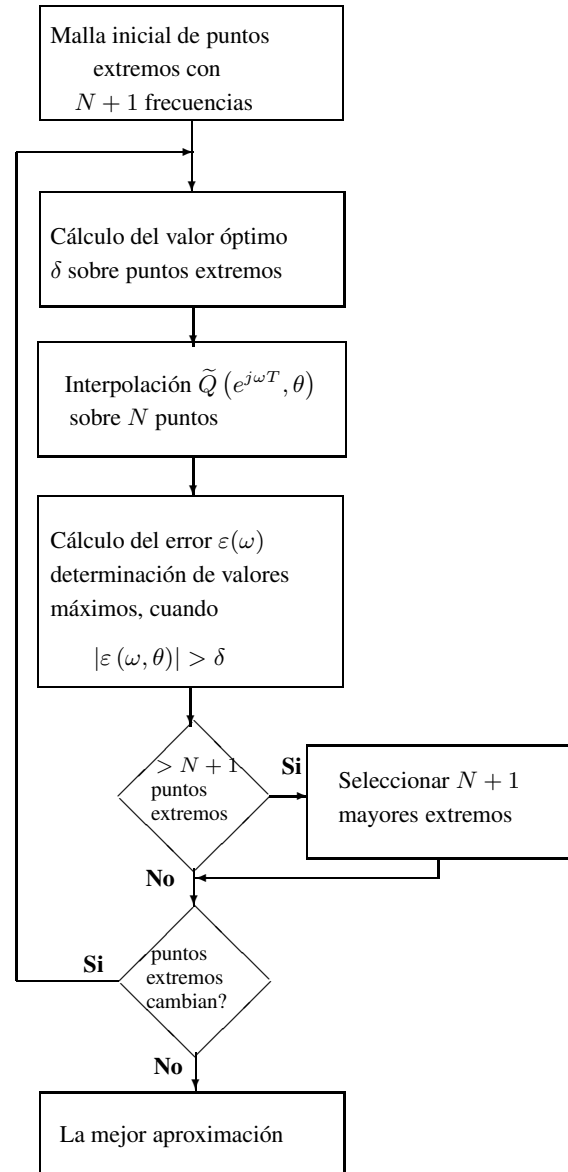


Figura 4.14. Diagrama del algoritmo Remez

las cuales conforman un sistema de $N + 1$ ecuaciones lineales y $N + 1$ variables desconocidas: $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \delta$. El sistema lineal obtenido, se puede demostrar que tiene una única solución.

El algoritmo de cálculo del filtro óptimo basado en el segundo algoritmo de Remez se realiza por el siguiente procedimiento:

1. En el intervalo $(0, \omega_{d/2})$, se conforman las funciones de transferencia deseada $H_d(e^{j\omega T})$ y la de ponderación $W(\omega)$, además, se determina el orden N del filtro.
2. A partir del sistema (4.30a), se determinan las funciones $\tilde{H}_d(e^{j\omega T})$, $\tilde{W}(\omega)$ y $P(\omega)$, que hacen parte de la tarea equivalente de aproximación.
3. Se establece un proceso iterativo, que da como resultado los puntos de alternancia de Chebyshev. Inicialmente, de manera arbitraria, se escoge la malla constituida por $N + 1$ valores extremos: $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, que están ubicados sobre el intervalo $(0, \omega_{d/2})$, con los cuales se resuelve el sistema de ecuaciones (4.31), que tiene la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 T & \cdots & \cos(N-1)\omega_0 T & \frac{1}{\tilde{W}(e^{j\omega_0 T})} \\ 1 & \cos \omega_1 T & \cdots & \cos(N-1)\omega_1 T & -\frac{1}{\tilde{W}(e^{j\omega_1 T})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_N T & \cdots & \cos(N-1)\omega_N T & \frac{(-1)^N}{\tilde{W}(e^{j\omega_N T})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{N-1} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_d(e^{j\omega_0 T}) \\ \tilde{H}_d(e^{j\omega_1 T}) \\ \vdots \\ \tilde{H}_d(e^{j\omega_N T}) \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema, empleando métodos de cálculo de álgebra lineal, es bastante compleja. En la práctica, el valor de δ se calcula de la expresión:

$$\delta = \frac{a_0 \tilde{H}_d(e^{j\omega_0 T}) + a_1 \tilde{H}_d(e^{j\omega_1 T}) + \cdots + a_N \tilde{H}_d(e^{j\omega_N T})}{a_0 / \tilde{W}(\omega_0) - a_1 / \tilde{W}(\omega_1) + \cdots + (-1)^N a_N / \tilde{W}(\omega_N)}$$

donde $a_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{1}{(x_k - x_i)}$, $k = 0, 1, \dots, N$, $x_i = \cos \omega_i$

A partir del valor obtenido de δ , se determinan los valores de la función de aproximación $\tilde{Q}(e^{j\omega T}, \theta)$, e iguales a:

$$\tilde{Q}_k = \tilde{H}_d(e^{j\omega_k T}) - \frac{(-1)^k \delta}{\tilde{W}(\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Empleando la relación para la interpolación de Lagrange en forma baricéntrica, se obtiene

$$\tilde{Q}(e^{j\omega_k T}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\beta_k}{x - x_k} \tilde{Q}_k}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\beta_k}{x - x_k}}$$

donde $\beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{1}{(x_k - x_i)}$, $k = 0, 1, \dots, N$, $x = \cos \omega$,

Sobre el intervalo $(0, \omega_{d/2})$, se selecciona una malla densa de puntos, en cada uno de los cuales se calcula el valor de error $\varepsilon(\omega, \theta)$. Si para todas las frecuencias de la malla se cumple que: $\varepsilon(\omega, \theta) \leq \delta$ se considera hallada la función óptima de aproximación. Si por el contrario, existen puntos de la malla, para los cuales $\varepsilon(\omega, \theta) > \delta$, se escogen una nueva malla de $N + 1$ puntos. Las nuevas frecuencias $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, se seleccionan en los puntos extremos de la función $|\varepsilon(\omega, \theta)|$. En cada iteración del algoritmo de Remez, el valor de δ se incrementa hasta un valor que no exceda el límite superior. El diagrama del algoritmo de Remez se muestra en la Figura 4.14.

4. De los coeficientes obtenidos para la función de aproximación (4.29) se determina la respuesta al impulso del filtro $h[n]$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Ejercicio en el CP 4.4. [Matlab] Diseñar un filtro pasabajos de mínimo orden con frecuencia de corte igual a $500Hz$, frecuencia de rechazo $600Hz$, frecuencia de discretización $2000Hz$, atenuación en banda de rechazo de por lo menos $60dB$ y rizado menor a $3dB$ en la banda de paso.

En Matlab se contempla el comando `firpmord` que implementa el algoritmo de sugerido en [30]. Sin embargo, el algoritmo presenta problemas de inexactitud para valores de frecuencias extremas cercanas a 0, o bien a la frecuencia de discretización $fs/2$.

```
rp = 3;           % Rizado
rs = 60;          % atenuación en banda de rechazo
fs = 2000;         % Frecuencia de discretización
f = [540 600];     % frecuencias extremas de banda de transición
a = [1 0];         % Amplitudes deseadas
% Cálculo de las desviaciones
dev = [(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1)  10^(-rs/20)];
[n,fo,ao,w] = firpmord(f,a,dev,fs);
b = firpm(n,fo,ao,w); freqz(b,1,1024,fs);
```

En general, los parámetros de los filtros están fuertemente relacionados entre sí. Por ejemplo, su orden influye en las frecuencias de corte y rechazo, así como en las variaciones de amplitud de la respuesta de frecuencia. En particular, el orden de un filtro ideal pasabajos se puede calcular mediante la aproximación de Kaiser:

$$N \approx \frac{-20 \log \sqrt{\delta_1 \delta_2} - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad (4.32)$$

donde Δf es el ancho de banda de transición, δ_1 y δ_2 son las variaciones permitidas en las bandas de paso y rechazo, respectivamente.

Otra expresión empleada corresponde a la planteada en [30]:

$$N \approx \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2) (\Delta f)^2}{\Delta f} + 1$$

siendo

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_1, \delta_2) &= \left(0.005309 (\log \delta_1)^2 + 0.07114 \log \delta_1 - 0.4761 \right) \log \delta_2 - \\ &\quad - \left(0.00266 (\log \delta_1)^2 + 0.5941 \log \delta_1 + 0.4278 \right) \\ f(\delta_1, \delta_2) &= 11.012 + 0.51244 (\log \delta_1 - \log \delta_2) \end{aligned}$$

Ejercicio en el CP 4.5. [Matlab] El siguiente program calcula la longitud de un filtro RIF pasa banda empleando la expresión de Kaiser (4.32).

```
% expresión de Kaiser
Rp = input('rizado en banda de paso = ');
Rs = input('atenuación en banda de rechazo = ');
Fp = input('frecuencia de corte [Hz] = ');
Fs = input('frecuencia inicial de banda de rechazo [Hz] = ');
FT = input('frecuencia de discretización [Hz] = ');
num = -20*log10(sqrt(Rp*Rs))-13; den = 14.6*(Fs - Fp)/FT;
N = ceil(num/den);
fprintf('La longitud del filtro es %f \n',N);
```

4.3.5. Filtros no recursivos en el proceso de señales aleatorias

Sin perder el sentido de generalidad y para facilitar los procedimientos matemáticos se asumen las siguientes consideraciones:

- La señal discreta en el tiempo de entrada $x[t]$ del filtro se caracteriza por ser una función generalizada;
- El espectro de la señal de entrada es limitado a un ancho de banda finito;
- Los espectros de la señal útil y de la perturbación no se traslapan.

En gran cantidad de casos prácticos, el espectro de la señal de entrada $X(f)$ se puede considerar que consiste del espectro de la señal de entrada en el intervalo $(-f_c, -f_c)$, mientras para la perturbación está dado en $((-f_\beta, f_c), (f_c, f_\beta))$, adicionalmente $X(f) = 0$, para $|f_c| > f_\beta$ donde $|f_c| > f_c$. Se supone, que al pasar la señal de entrada por el filtro pasabajas digital, la interferencia se suprime. Consecuentemente en el caso ideal, la función de transferencia de este filtro para las frecuencias $f > f_c$ es $H(f) = 0$. No obstante, debido a que $H(f_c) \neq 0$ entonces, en la frecuencia infinitamente cercana a f_c , la función $H(f)$ tendrá un rompimiento, lo que conlleva a la formación de oscilaciones inestables a la salida del filtro.

Con este fin, para eliminar cualquier tipo de estas oscilaciones, en la frecuencia cercana a la frecuencia de corte f_c , se debe escoger la función aproximativa $H_N(f_c)$, de tal manera, que $H_N(f_c) \neq 0$ en el intervalo de frecuencias $(f_c, f_c + \Delta f)$, donde $\Delta f > 0$, el cual depende de la cantidad N . Algunas componentes indeseables del espectro de frecuencia $(f_c, f_c + \Delta f)$ pueden aparecer en la salida.

La última consideración hecha sirve para eliminar este factor de la etapa de diseño del filtro, o sea, existe tal valor $\Delta f > 0$, en el cual, el espectro de la señal a la entrada del filtro en las frecuencias $[-f_c - \Delta f, -f_c]$ y $[f_c, f_c + \Delta f]$ es igual a: $X(f) = 0$. Escogiendo apropiadamente la función $H_N(f)$ que no tenga discontinuidades, se provee la estabilidad necesaria en el trabajo del filtro.

El método de síntesis de un filtro no recursivo comienza escogiendo el tipo ideal de función de transferencia, $H(f)$, dentro del ancho de banda $(-f_c, f_c)$, seleccionando, luego, el carácter de la pendiente de inclinación de la función aproximativa $H_N(f)$. Después, basados en la descripción analítica de la función $H_N(f)$, se calcula la respuesta a impulso del filtro $h(t)$, teniendo en cuenta (4.20). La señal de salida del filtro se determina de la expresión (2.34). Sin embargo, el cálculo $h(t)$ a partir de (4.20) dificulta el empleo de este método en la práctica; dificultad que se puede disminuir de la siguiente manera:

Sea la representación de la función $h_N(t)$ del filtro a sintetizar en la forma:

$$h_N(t) = k(t) x(t) \quad (4.33)$$

donde $k(t)$ es una función de ayuda dada analíticamente, $x(t)$ es la función generalizada de entrada del filtro.

Cuando ambas funciones, $k(t)$ y $x(t)$, cumplen las condiciones de Dirichlet en la cualquier intervalo de tiempo (ver sección §1.3.1) y, por lo tanto, se pueden hallar sus respectivas TF, entonces, empleando Parsevall (1.26):

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(f) X(f) df = H(f) \quad (4.34)$$

se encuentra que la función de transferencia exigida del filtro a sintetizar se determina escogiendo apropiadamente las funciones $K(f)$ y $X(f)$, en el intervalo de frecuencias en análisis. Se puede demostrar que la función de transferencia $H(f)$ del filtro fuera del intervalo se determina completamente por el carácter de la función de ayuda $K(f)$. Así, sea la función $X(f)$ determinada como:

$$X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq (f_{req} + f_c)/20 \\ 0, & |f| > (f_{req} + f_c)/20 \end{cases} \quad (4.35)$$

para la cual, $x(t)$ toma la forma $\text{sinc}(\pi(f_{req} + f_c)t)$.

Teniendo en cuenta (4.35), se encuentra que $x(f) = 0$ para todo $|f| > (f_{req} + f_c)/2$, entonces, de (4.34) se obtiene:

$$H(f) = \int_{f-(f_{req}+f_c)/2}^{f+(f_{req}+f_c)/2} K(f) df$$

De esta manera, la síntesis del filtro digital no recursivo se cumple por el siguiente procedimiento:

1. Se parte de la expresión analítica (4.35), obtenida para la densidad espectral de potencia de forma generalizada de la señal de entrada $X(f)$;
2. Se escoge la función de ayuda $K(f)$, teniendo en cuenta la pendiente de caída que se exige para la respuesta de frecuencia del filtro a sintetizar;
3. Se determinan las componentes de la respuesta a impulso (4.33) del filtro a sintetizar a partir de la $\mathcal{F}^{-1}\{K(f)\}$ y $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$;
4. Se determina la función $h(t) = k(t)x(t)$;
5. Se determina la función de transferencia $H_N(f)$ del filtro sintetizado;
6. Se obtiene la función de transferencia $H(z)$ del filtro digital.

Para evitar la aparición de oscilaciones en el trabajo del filtro se exige que en las frecuencias cercanas a la frecuencia de corte, la función sea suave, esto es, que sea absolutamente diferenciable:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f < f_c \\ \text{decreciente monótona} & f_c \leq f < f_{req} \\ 0, & f \geq f_{req} \\ H(-f), & f < 0 \end{cases}$$

El cumplimiento de tal exigencia se hace escogiendo, de forma aproximada, la función de ayuda $K(f)$. De lo anterior, en la síntesis de filtros pasabandas, se puede emplear el procedimiento:

1. Se escoge la función de transferencia de un filtro ideal pasabanda en la forma:

$$H(f_c, \bar{f}_c) = \begin{cases} 1, & f_{c1} \leq f < f_{c2} \\ 0, & f \leq f_{c1}, f > f_{c2} \\ H(-f_1, f_2), & f < 0 \end{cases}$$

2. La función $H(f)$ se aproxima por la diferencia de las funciones de transferencia de dos filtros pasabajos: $H_1(f)$ y $H_2(f)$, con las respectivas frecuencias de corte: f_{c1} y f_{c2} .
3. Se determina la respuesta a impulso del filtro pasabanda en la forma

$$h(f) = h_2(f) - h_1(f), \text{ donde } h_i(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_i(f)\}, i = 1, 2$$

4. Se calculan los coeficientes de paso de los filtros pasabandas

$$h_n = \frac{1}{f_c} h\left(\frac{-n}{f_s}\right) = f_s \left(h_2\left(\frac{-n}{f_s}\right) - h_1\left(\frac{-n}{f_s}\right) \right)$$

Ejemplo 4.6. Sintetizar un filtro pasabandas con frecuencia central $\pm f_0$, ancho de banda Δf y ancho de banda de transición Δf_T .

Como base, en la síntesis de este filtro pasabandas, se escoge un filtro pasabajos del tipo:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f < \Delta f \\ \left(1 + \cos \frac{(f - \Delta f)\pi}{\Delta f}\right) / 2, & \Delta f \leq f \leq \Delta f + \Delta f_T \\ 0, & f > \Delta f + \Delta f_T \\ |H(-f)|, & f < 0 \end{cases}$$

entonces, de acuerdo con (4.20) se tendrá

$$h_{PB}(t) = \frac{\sin(2\pi\Delta f t) + \sin(2\pi(\Delta f + \Delta f_T)t)}{2\pi t (1 - 4(\Delta f_T)^2 t^2)}$$

luego, $H(f, f_0) = H(f - f_0)$ para $f \geq 0$, $H(f, f_0) = H(f + f_0)$ para $f \leq 0$. Entonces

$$H(f, f_0) = H(f - f_0) + H(f + f_0) \quad (1)$$

Para determinar $h(t)$, se halla la transformada inversa de cada uno de los miembros de (1), que empleando la propiedad de desplazamiento de (1.64) resulta en:

$$h(t) = h_{PB}(t) (\exp(2\pi j f_0 t) + \exp(-2\pi j f_0 t)) = 2h_n(t) \cos 2\pi j f_0 t \quad (2)$$

Los coeficientes de peso para el filtro pasabandas se determinan por la relación

$$h_n = 2h_{PB} \cos 2\pi \frac{f_0}{f_s}, \quad \text{donde } h_{PB} = \frac{1}{f_s} h\left(\frac{-n}{f_s}\right) \quad (3)$$

Durante la síntesis de un filtro pasabanda con varias bandas de paso de igual ancho de banda e igual pendiente de caída, la función de transferencia se puede fácilmente encontrar con ayuda de la relación (2). Suponiendo que las frecuencias centrales $(\pm f_1, \pm f_2, \dots, \pm f_k)$ de las bandas del filtro buscado, están dispuestas, de tal manera que no haya traslapo, su respuesta a impulso se representa en la forma:

$$h(t, t_1, t_2, \dots, t_k) = 2h_{PB}(t) \left(\sum_{i=1}^k \cos 2\pi f_i t \right)$$

luego, los valores discretos de los coeficientes del filtro se determinan por la relación:

$$h_n = \frac{1}{f_s} h\left(\frac{-n}{f_s}, f_1, f_2, \dots, f_k\right) = 2h_{PB}(t) \left(\sum_{i=1}^k \cos 2\pi \frac{f_i}{f_s} \right)$$

El método de síntesis de los algoritmos de los filtros no recursivos de alta frecuencia se diferencia de los filtros pasabanda, en que la respuesta a impulso del filtro pasaaltos h_{PA} se determina como la diferencia entre las respuestas a impulso generalizadas de la señal de entrada $x(t)$ y la de un filtro pasabajos hipotético, así, $H_{PA}(t) = x(t) - h_1(t)$.

Ejemplo 4.7. Realizar la síntesis de filtros digitales no recursivos en los siguientes casos:

1. Sea la función $k(t)$ en (4.33) con función de transferencia:

$$|K(f)| = |K_1(f)| = \begin{cases} \frac{1}{\Delta f}, & |f| \leq \Delta f/2 \\ 0, & |f| > \Delta f/2 \end{cases}$$

entonces, se puede escribir la expresión

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} \frac{1}{\Delta f} \exp(2\pi j f t) df = \frac{2}{\Delta f} \int_0^{\Delta f/2} \cos(2\pi \Delta f t) df \\ &= \frac{1}{\pi \Delta f t} (\sin 2\pi f t) \Big|_0^{\Delta f/2} = \text{sinc}(\pi \Delta f t) \end{aligned}$$

Si la función espectral generalizada, que representa la señal a procesar, está dada en forma de la relación (4.35), entonces, la respuesta a impulso del filtro digital es:

$$h_1(t) = k_1(t) x(t) = \frac{\sin \pi \Delta f t \sin \pi (f_c + f_T)}{\pi^2 \Delta f t^2}$$

o, pasando a frecuencia angular, $\Delta \omega = 2\pi \Delta f t$, $\omega_T = 2\pi f_T$:

$$h_1(t) = \frac{2 \sin \frac{\Delta \omega_T}{2} \sin \frac{(\omega_c + \omega_T)}{2} t}{\pi \Delta \omega t^2} = \frac{\cos \omega_c t - \cos \omega_T t}{\pi \Delta \omega t^2}$$

Luego, la función de transferencia del filtro sintetizado resulta en $(|H_1(f)| = 0, \forall |f| > f_T)$:

$$|H_1(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ \frac{f + f_T}{\Delta f}, & -f_T \leq f - f_c \\ \frac{f_c - f}{\Delta f}, & f_c < f \leq f_T \end{cases}$$

2. Sea la función $k(t)$, escogida de tal manera, que su función de transferencia tiene la forma:

$$|K(f)| = |K_2(f)| = \begin{cases} \frac{\pi}{2\Delta f} \cos \frac{\pi f}{\Delta f}, & |f| \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, & |f| > \frac{\Delta f}{2} \end{cases}$$

La función de peso para la anterior expresión resulta en:

$$k_2(t) = \int_{-\frac{\Delta f}{2}}^{\frac{\Delta f}{2}} \frac{\pi}{2\Delta f} \cos \frac{\pi f}{\Delta f} \exp(2\pi j f t) df = \frac{\cos \pi \Delta f t}{1 - 4\Delta f^2 t^2}$$

suponiendo que la función espectral generalizada de la señal de entrada sea similar a (4.35), entonces, la respuesta a impulso del filtro sintetizado es del tipo:

$$h_2(t) = k_2(t) x(t) = \frac{\cos \pi \Delta f t \sin \pi (f_c + f_T) t}{\pi t (1 - 4\Delta f^2 t^2)}$$

o pasando a frecuencia angular se halla que:

$$h_2(t) = \frac{\pi (\sin \omega_c t + \sin \omega_T t)}{2t (\pi^2 - \Delta \omega^2 t^2)}$$

El cálculo de los coeficientes de peso del filtro dado se lleva a cabo de acuerdo con (3). Como resultado se obtiene que:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{f_s} h_2\left(\frac{-n}{f_s}\right) = \frac{1}{f_s} \frac{\cos \pi \Delta f \left(\frac{-n}{f_s}\right) \sin \pi (f_c + f_T) \left(\frac{-n}{f_s}\right)}{\pi \left(\frac{-n}{f_s}\right) \left(1 - 4\Delta f^2 \left(\frac{-n}{f_s}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\cos n\pi \tau_d \sin n\pi (2\tau_c + \tau_T) \left(\frac{-n}{f_s}\right)}{n\pi (1 - 4\tau_d^2 n^2)} \end{aligned}$$

donde

$$\tau = f/f_s, \quad \tau_c = f_c/f_s, \quad \tau_T = f_T/f_s, \quad \tau_d = \Delta f/f_s$$

La indeterminación en el cálculo del valor de h_n se resuelve mediante la regla de L'Hopital, de la cual se obtiene que $h_0 = 2\tau_c + \tau_d = (f_T + f_c)/f_s$. Como resultado, la función de transferencia $H_2(f)$ del filtro sintetizado se determina por la relación:

$$|H_2(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| \leq f_T \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi (f + f_c)}{\Delta f}\right), & f_c \leq f \leq f_T \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi (f + f_c)}{\Delta f}\right), & f_T \leq f \leq -f_c \end{cases}$$

3. Sea la función

$$|K_3(f)| = \begin{cases} \frac{2}{\Delta f} \cos^2 \frac{\pi f}{\Delta f}, & f \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, & f > \frac{\Delta f}{2} \end{cases}$$

Al emplear el método de síntesis dado y, como en los ejemplos anteriores, teniendo en cuenta la función espectral generalizada de la señal de entrada, se obtiene

$$K_3(t) = \frac{1}{1 - \Delta f^2 t^2} \operatorname{sinc} \pi \Delta f t$$

$$h_3(t) = k_3(t) x(t) = \frac{1}{1 - \Delta f^2 t^2} \frac{\operatorname{sinc} \pi \Delta f t \sin \pi (f_c + f_T) t}{\pi^2 \Delta f t^2} = \frac{1}{1 - \Delta f^2 t^2} h_1(t)$$

donde $h_1(t)$ es la respuesta a impulso del ejemplo del caso 1.

La función de transferencia $H_3(f)$ del filtro se obtiene en la forma:

$$|H_3(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq \Delta f \\ 0, & |f| > \Delta f \\ \frac{1}{2\pi} \sin \left(\left(2\pi \frac{f - f_c}{\Delta f} \right) + \frac{f_T - f}{\Delta f} \right), & f_c < f \leq f_T \\ \frac{1}{2\pi} \sin \left(\left(2\pi \frac{f + f_c}{\Delta f} \right) + \frac{f_T - f}{\Delta f} \right), & -f_T < f \leq -f_c \end{cases}$$

4. Sea la función $k(f)$ con función de transferencia del tipo:

$$K_4(f) = \begin{cases} \frac{3\pi}{4\Delta f} \cos^3 \frac{\pi f}{\Delta f}, & |f| \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, & |f| > \frac{\Delta f}{2} \end{cases}$$

realizando transformaciones similares a las llevadas a cabo antes, se encuentra que

$$k_4(t) = \frac{9}{(9 - 4\Delta f^2 t^2)} \frac{\cos \pi \Delta f t}{(1 - 4\Delta f^2 t^2)}$$

$$h_4(t) = k_4(t) x(t) = \frac{9}{(9 - 4\Delta f^2 t^2)} \left(\frac{\cos \pi \Delta f t \sin \pi (f_c + f_T) t}{(1 - 4\Delta f^2 t^2) \pi t} \right)$$

$$= \frac{9}{(9 - 4\Delta f^2 t^2)} h_2(t)$$

donde la función $h_2(t)$ es del mismo tipo a la obtenida en el punto 2.

5. Sea la transformada de la función en la forma:

$$|K_5(f)| = \begin{cases} \frac{3}{2\Delta f} \left(1 - \frac{4\pi f^2}{\Delta f^2} \right), & |f| \leq \frac{\Delta f}{2} \\ 0, & |f| > \frac{\Delta f}{2} \end{cases}$$

La función de peso para el filtro sintetizado, teniendo en cuenta la señal de entrada dada en los anteriores ejemplos, es de la forma

$$h_5(t) = k_5(t) x(t) = \frac{3}{2\pi^4 \Delta f^4} (\sin \pi (f_c + f_T) t (2 \sin \pi \Delta f t - 2\pi \Delta f t \cos \pi \Delta f t))$$

La pendiente de caída de la respuesta de frecuencia de este filtro, en la banda de frecuencia $f_c \leq f \leq f_T$, se determina por el polinomio de tercer orden y resulta ser cercana a la pendiente de caída de la función del filtro $H_2(f)$.

Problemas

Problema 4.8. Sintetizar, mediante el método de series de Fourier, el filtro pasabajos con magnitud:

$$\left| H(e^{j\omega T}) \right| = \begin{cases} \omega, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \omega_d/2 \end{cases} \quad (4.36)$$

siendo ω_c y ω_d los valores de la frecuencia de corte y discretización, respectivamente.

Ejercicio en el CP 4.6. Realizar una aplicación que de forma automática determine los parámetros de la ventana de kaiser (4.19) dados los requerimientos del filtro pasabajos.

4.4. Filtración por descomposición lineal

4.4.1. Bancos de filtros

Un banco de filtros de dos canales consta de un par de filtros de síntesis o *reconstrucción* (h el pasabajo y g el pasaalto), y otro par de filtros de análisis o *descomposición* (\hat{h} el pasabajo y \hat{g} el pasaalto), como se muestra en la Figura 4.15. La salida de la etapa de análisis se obtiene al descomponer la entrada en dos canales, realizando las operaciones de convolución y submuestreo ($k = 2$) para cada canal. El proceso se invierte en la etapa de síntesis, realizando el sobremuestreo ($k = 1/2$) convolución de cada canal y, luego, sumando ambos canales. Los filtros h y g se asumen del tipo con respuesta finita a impulso (3.61). La estructura se dice que es un *banco de filtros con reconstrucción perfecta* si los filtros son escogidos de forma que la salida de la etapa de síntesis es igual a la entrada en la etapa de análisis [31].

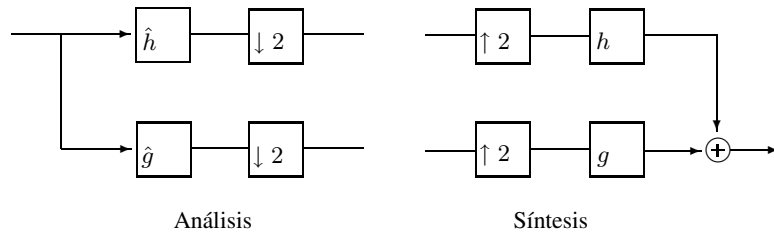


Figura 4.15. Forma directa de un banco de filtros de dos canales.

Banco ortogonal de filtros. Sea un filtro de respuesta a impulso finita, que se descompone en las sucesiones: componente de frecuencias bajas, $\{h[n] : n = 0, \dots, L-1\}$, y componente de frecuencias altas, $\{g[n] : n = 0, \dots, L-1\}$, tales que sean ortogonales a sus propias traslaciones,

$$\begin{aligned}\langle h[n-2k], h[n-2l] \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle g[n-2k], g[n-2l] \rangle &= \delta_{kl}\end{aligned}$$

además, se cumple para h y g , que sus respectivas traslaciones sean mutuamente ortogonales,

$$\langle h[n-2k], g[n-2l] \rangle = 0$$

Entonces, el conjunto ortonormal $\{h[n-2k], g[n-2l]\}_{k,l \in \mathbb{Z}}$ es una base para el espacio ℓ^2 , el cual es completo, es decir, se cumple la relación de Parseval (1.26)

$$\|x[n]\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle x[n], h[n-2k] \rangle|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\langle x[n], g[n-2l] \rangle|^2$$

Por lo tanto, cualquier sucesión de ℓ^2 puede ser escrita como

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k h[n-2k] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l g[n-2l] \quad (4.37)$$

donde los coeficientes se determinan, respectivamente como,

$$\alpha_k = \langle h[n-2k], x[n] \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta_l = \langle g[n-2l], x[n] \rangle, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (4.38)$$

Los coeficientes α_k corresponden a la proyección ortogonal del espacio de entrada ℓ^2 sobre el subespacio generado por $\{h[n - 2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y notado como \mathfrak{V}_0 , para el cual $\{h[n - 2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal. De manera similar, β_l es la proyección ortogonal del espacio de entrada ℓ^2 en el subespacio \mathfrak{W}_0 generado por $\{g[n - 2l]\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Los espacios \mathfrak{V}_0 y \mathfrak{W}_0 son ortogonales y la suma directa forma el espacio ℓ^2 , así

$$\ell^2 = \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \oplus \mathfrak{W}_0 \quad (4.39)$$

Entonces, un banco ortogonal de filtros divide el espacio de entrada en el espacio de aproximación \mathfrak{V}_0 (pasabajo), y su complemento ortogonal \mathfrak{W}_0 (pasaalto). De forma iterativa, se obtiene a a partir de (4.39) se tiene que, $\mathfrak{V}_{j+1} = \mathfrak{V}_j \oplus \mathfrak{W}_j$, y por lo tanto,

$$\mathfrak{V}_{j+1} = \mathfrak{V}_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^j \mathfrak{W}_l \quad (4.40)$$

La representación (4.40) se conoce como *análisis de resolución múltiple*, y se consigue al conectar en cascada varios bancos de filtros en la etapa pasabajo como se muestra en la Figura 4.16.

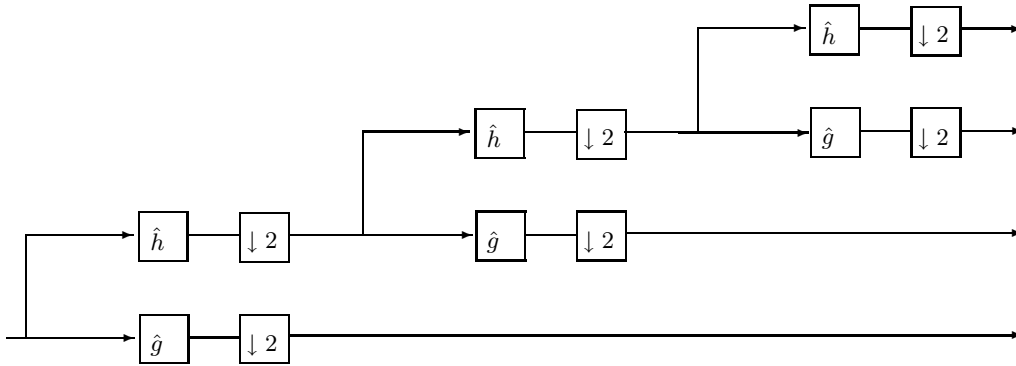


Figura 4.16. Construcción de tres niveles de resolución con un banco de filtros.

La representación gráfica de la ecuación (4.37) se hace a través del esquema mostrado en la Figura 4.15, donde los filtros de análisis \hat{h} y \hat{g} son versiones invertidas en el tiempo de h y g respectivamente, así, $\hat{H}(z) = H(z^{-1})$, $\hat{G}(z) = G(z^{-1})$.

De forma general, para el caso de banco ortogonal de filtros, las componentes h y g tienen igual longitud de proceso. De hecho, una forma de obtener el filtro g a partir de h es mediante la respectiva transformada, así

$$G(z) = z^{-L+1} H(-z^{-1})$$

Así por ejemplo, sea $h[n] = \{a, b, c, d\}$, luego, $g[n] = \{-d, c, -b, a\}$. Esta forma especial de obtener el filtro pasaalto a partir del pasabajo se conoce como *filtro espejo en cuadratura*. En general, el empleo de los bancos ortogonales limita la selección de los filtros, en la medida en que h y g deben tener el mismo orden.

Banco biortogonal de filtros. De manera similar al banco ortogonal de filtros, se define el par de componentes de filtración pasabajo h y pasaalto g que sean ortogonales a sus propias traslaciones,

pero que no sean mutuamente ortogonales. Además, se define un filtro pasabajo \tilde{h} y un filtro pasaalto \tilde{g} que sean ortogonales a sus propias traslaciones, pero que no sean mutuamente ortogonales, tal que cumplen las siguientes condiciones [32]:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{h}[n-2k], h[n-2l] \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle \tilde{g}[n-2k], g[n-2l] \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle \tilde{h}[n-2k], g[n-2l] \rangle &= \langle \tilde{g}[n-2k], h[n-2l] \rangle = 0\end{aligned}$$

En el banco biortogonal de filtros se puede tener un par de expresiones similares a (4.37) y a (4.38), usando el conjunto de bases duales \tilde{h} y \tilde{g} y las bases h y g . Entonces, cualquier sucesión de ℓ^2 se escribe como

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \tilde{h}[n-2k] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \tilde{g}[n-2l]$$

donde $\alpha_k = \langle h[n-2k], x[n] \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta_l = \langle g[n-2l], x[n] \rangle$, $l \in \mathbb{Z}$. Esto es, cualquier sucesión de ℓ^2 puede ser escrita como

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_k h[n-2k] + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_l g[n-2l] \quad (4.41)$$

donde

$$\tilde{\alpha}_k = \langle \tilde{h}[n-2k], x[n] \rangle, k \in \mathbb{Z} \quad (4.42a)$$

$$\tilde{\beta}_l = \langle \tilde{g}[n-2l], x[n] \rangle, l \in \mathbb{Z} \quad (4.42b)$$

La representación de las ecuaciones (4.41), (4.42a) y (4.42b) se muestra en la Figura 4.15 haciendo $\hat{H}(z) = \tilde{H}(z)$ y $\hat{G}(z) = \tilde{G}(z)$. Al igual que en el caso del banco ortogonal de filtros se puede generar el análisis de resolución múltiple en (4.40). Así, sean los espacios: \mathfrak{V}_0 generado por $\{h[n-2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$, \mathfrak{W}_0 por $\{g[n-2l]\}_{l \in \mathbb{Z}}$, $\tilde{\mathfrak{V}}_0$ por $\{\tilde{h}[n-2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\tilde{\mathfrak{W}}_0$ generado por $\{\tilde{g}[n-2l]\}_{l \in \mathbb{Z}}$, entonces, se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_j &\perp \tilde{\mathfrak{W}}_j, & \mathfrak{W}_j &\perp \tilde{\mathfrak{V}}_j \\ \mathfrak{V}_{j+1} &= \mathfrak{V}_j + \mathfrak{W}_j, & \tilde{\mathfrak{V}}_{j+1} &= \tilde{\mathfrak{V}}_j + \tilde{\mathfrak{W}}_j\end{aligned}$$

donde $+$ es la suma directa.

4.4.2. Descomposición polifásica

El desarrollo directo de un banco de filtros como se ilustra en la Figura 4.15 es ineficiente, puesto que la mitad de las muestras calculadas por la convolución en la etapa de análisis son descartadas por las operaciones de submuestreo, así mismo, existen deficiencias similares en la etapa de síntesis.

En la descomposición *polifásica*, la operación equivalente conjunta de filtración y submuestreo se obtiene al sumar las contribuciones de las convoluciones de los términos pares de la sucesión de entrada con los términos pares más los términos impares de la entrada con los términos impares del filtro [33], tal como se observa en la Figura 4.17.

El primer paso de esta representación es dividir la señal en componentes pares X_P e impares X_I .

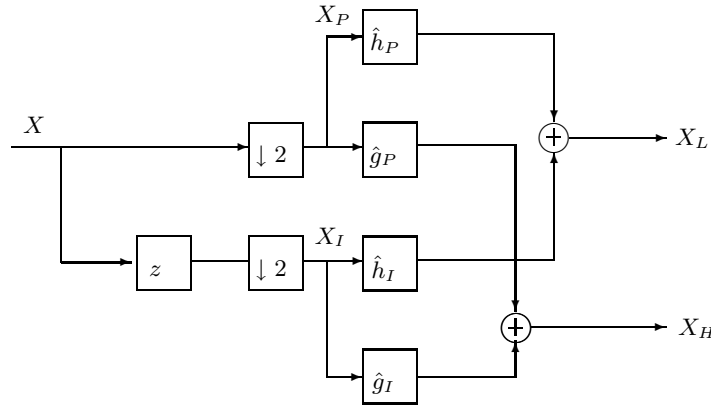


Figura 4.17. Estructura polifásica de un banco de filtros de dos canales.

En la representación de la transformada z esta división se logra al escribir,

$$X(z) = X_P(z^2) + z^{-1}X_I(z^2). \quad (4.43)$$

donde $X_P(z) = \sum_n x[2n]z^{-n}$ y $X_I(z) = \sum_n x[2n+1]z^{-n}$.

La descomposición (4.43) se puede escribir de forma vectorial,

$$\mathbf{X}(z) = \begin{bmatrix} X_P(z) \\ X_I(z) \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (3.36), la componente X_P se obtiene submuestreando por 2, mientras, la componente X_I es obtenida de la señal original al desplazarla primero una unidad de tiempo a la izquierda, y luego submuestreando por 2. Usando las relaciones (3.34) y (3.36), se tiene que

$$X_P(z) = \frac{1}{2} \left(X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right), \quad (4.44a)$$

$$X_I(z) = \frac{z^{1/2}}{2} \left(X(z^{1/2}) - X(-z^{1/2}) \right) \quad (4.44b)$$

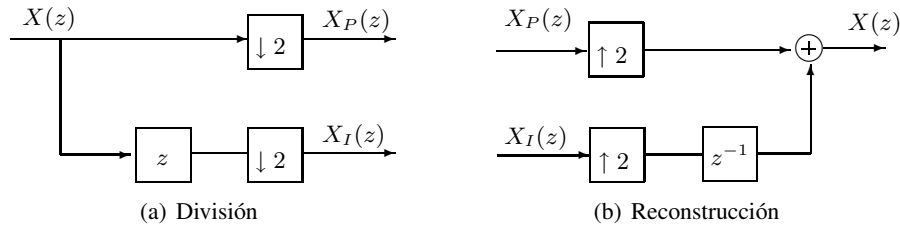


Figura 4.18. Descomposición $X(z)$ a de partir de las componentes pares e impares

La operación inversa se obtiene al leer la ecuación (4.43) de derecha a izquierda. Esta ecuación muestra que se puede obtener $X(z)$ de $X_P(z)$ y $X_I(z)$ primero sobremuestreando las dos componentes por 2, y luego desplazando X_I una unidad de tiempo hacia la derecha (al multiplicar por z^{-1}), y finalmente sumando las dos componentes. La descomposición (4.44a) y (4.44b) en términos de

$X(z)$ se muestra en la Figura 4.18(a), mientras la reconstrucción se muestra en la Figura 4.18(b).

La representación polifásica de un filtro H está dada por $H(z) = H_P(z^2) + z^{-1}H_I(z^2)$, donde H_P contiene los coeficientes pares y H_I contiene los coeficientes impares. La representación matricial de H tiene la forma,

$$\mathbf{H}(z) = [H_P(z) \ H_I(z)] = \begin{bmatrix} \sum_k h[2k]z^{-k} & \sum_k h(2k+1)z^{-k} \end{bmatrix}$$

por lo que las matrices polifásicas de análisis y síntesis se definen como

$$\mathbf{P}_a(z) = \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}_I(z) \\ \hat{G}_P(z) & \hat{G}_I(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_s(z) = \begin{bmatrix} H_P(z) & G_P(z) \\ H_I(z) & G_I(z) \end{bmatrix}.$$

y las etapas de análisis y síntesis (ver Figura 4.19) se expresan como

$$\begin{bmatrix} X_L(z) \\ X_H(z) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_a(z) \begin{bmatrix} X_P(z) \\ X_I(z) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_P(z) \\ X_I(z) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_s(z) \begin{bmatrix} X_L(z) \\ X_H(z) \end{bmatrix}$$

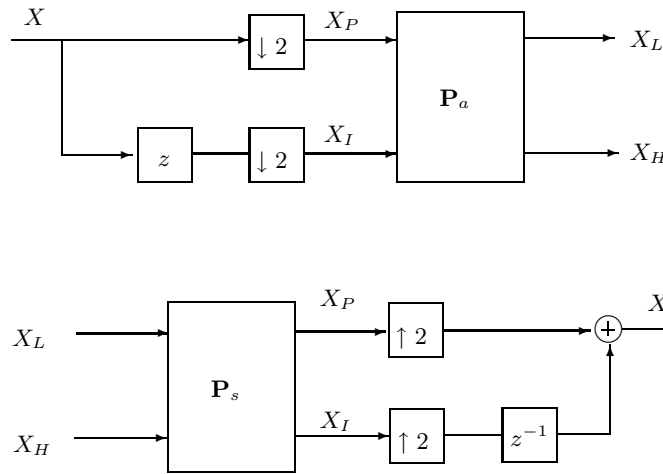


Figura 4.19. Forma polifásica de un banco de filtros de dos canales.

La condición de reconstrucción perfecta, para la representación polifásica, está dada por el producto, $\mathbf{P}_s(z)\mathbf{P}_a(z) = \mathbf{I}$, por lo que $\mathbf{P}_a(z) = \mathbf{P}_s(z)^{-1}$, así

$$\mathbf{P}_a(z) = \mathbf{P}_s(z)^{-1} = \frac{1}{(H_P(z)G_I(z) - H_I(z)G_P(z))} \begin{bmatrix} G_I(z) & -G_P(z) \\ -H_I(z) & H_P(z) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.8. El ejemplo más trivial de una matriz polifásica es $\mathbf{P}_s(z) = \mathbf{I}$. En este caso,

$$H(z) = \hat{H}(z) = 1, \quad G(z) = \hat{G}(z) = z^{-1}$$

La aplicación de la matriz identidad divide la señal en muestras pares e impares, que se conoce como *transformada polifásica*.

4.4.3. Estrategias de actualización

Los esquemas de actualización son una modificación al par de filtros con reconstrucción perfecta, (h, g) , que pueden ser usados para cambiar las propiedades de los filtros [34, 35, 36]. Tomando como base inicial la transformada polifásica, se utilizan actualizaciones sucesivas para construir de forma gradual un banco de filtros con propiedades particulares; estructura que puede ser extendida para obtener el análisis resolución múltiple.

Definición 4.1. Se dice que un par de filtros h, g son *complementarios* cuando la matriz $\mathbf{P}_s(z)$ tiene determinante 1. Si h, g son complementarios, entonces \hat{h}, \hat{g} también lo son. De esta manera, se determinan los esquemas de actualización.

Actualización primaria. Sean h, g complementarios, entonces la transformada \mathcal{Z} de cualquier otro filtro finito \hat{h}' complementario a \hat{g} es de la forma

$$\hat{H}'(z) = \hat{H}(z) - \hat{G}(z)S(z^2),$$

donde $S(z)$ es un polinomio de Laurent. Los componentes polifásicos de $\hat{G}(z)S(z^2)$ son $\hat{G}_P(z)S(z)$ para los pares, y $\hat{G}_I(z)S(z)$ para los impares. Usando la representación polifásica, se tiene que la respectiva matriz en la etapa de análisis es

$$\mathbf{P}'_a(z) = \begin{bmatrix} \hat{H}'_P(z) & \hat{H}'_I(z) \\ \hat{G}'_P(z) & \hat{G}'_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}_I(z) \\ \hat{G}_P(z) & \hat{G}_I(z) \end{bmatrix}$$

Esta operación no cambia el determinante de la matriz polifásica.

De manera similar, en la etapa de síntesis, se tiene

$$G'(z) = G(z) + H(z)S(z^2),$$

donde los componentes polifásicos de $H(z)S(z^2)$ son $H_P(z)S(z)$ para los pares, mientras $H_I(z)S(z)$ para los impares. En la etapa de síntesis, la matriz polifásica toma la forma

$$\mathbf{P}'_s(z) = \begin{bmatrix} H_P(z) & G'_P(z) \\ H_I(z) & G'_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_P(z) & G_P(z) \\ H_I(z) & G_I(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Actualización dual. Sean h, g complementarios. Entonces la transformada \mathcal{Z} , para cualquier otro filtro finito \hat{g}' complementario a \hat{h} , es de la forma

$$\hat{G}'(z) = \hat{G}(z) - \hat{H}(z)T(z^2),$$

donde $T(z)$ es un polinomio de Laurent. Usando la representación polifásica se tiene

$$\mathbf{P}'_a(z) = \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}_I(z) \\ \hat{G}'_P(z) & \hat{G}'_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}_I(z) \\ \hat{G}_P(z) & \hat{G}_I(z) \end{bmatrix}$$

De otra parte, para la etapa de síntesis, es cierta la relación

$$H'(z) = H(z) + G(z)T(z^2)$$

por lo que la matriz polifásica en la etapa de síntesis es

$$\mathbf{P}'_s(z) = \begin{bmatrix} H'_P(z) & G_P(z) \\ H'_I(z) & G_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_P(z) & G_P(z) \\ H_I(z) & G_I(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{bmatrix}$$

La Figura 4.20(b) muestra la representación esquemática de la actualización primaria, mientras la Figura 4.20(a) muestra la representación esquemática de la actualización dual. En la práctica, la actualización primaria se conoce simplemente como *actualización* y se representa por la función U , mientras que a la actualización dual se le conoce como *predicción* y es representada por la función P .

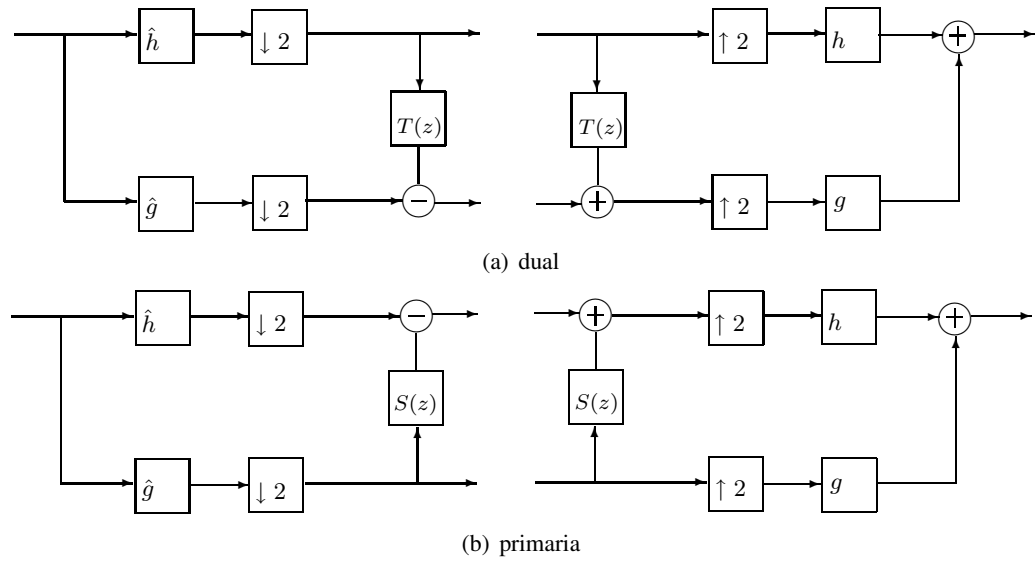


Figura 4.20. Esquemas de actualización

4.4.4. Factorización de la matriz polifásica

En general, cualquier par de filtros finitos (banco de filtros) puede ser obtenido a partir de la transformada polifásica seguida por un número finito m de pasos alternantes de actualización y predicción, además de una etapa de escalamiento o *normalización* [33,37].

Sea un par de filtros complementarios h y g , entonces existen los polinomios de Laurent $S_I(z)$ y $T_I(z)$ para $1 \leq i \leq m$ y con la constante de normalización K diferente de cero, tales que

$$\mathbf{P}_a(z) = \overbrace{\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}}^{\text{Normalización}} \prod_{i=m}^1 \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -S_I(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Actualización}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T_I(z) & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Predicción}} \right\}$$

De manera similar, la matriz polifásica para la etapa de síntesis está dada por

$$\mathbf{P}_s(z) = \prod_{i=1}^m \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_I(z) & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Predicción}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & S_I(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Actualización}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}}_{\text{Normalización}} \right\}$$

La matriz polifásica, para encontrar $S_I(z)$ y $T_I(z)$ se descompone, utilizando la actualización primaria en la forma

$$\mathbf{P}_a(z) = \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}_I(z) \\ \hat{G}_P(z) & \hat{G}_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_P(z) & \hat{H}'_I(z) \\ \hat{G}_P(z) & \hat{G}'_I(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

por lo que se tienen que encontrar los polinomios de Laurent $S(z)$, $\hat{H}'_I(z)$ y $\hat{G}'_I(z)$, tales que

$$\hat{H}_I(z) = \hat{H}'_I(z) - S(z)\hat{H}_P(z), \quad (4.46a)$$

$$\hat{G}_I(z) = \hat{G}'_I(z) - S(z)\hat{G}_P(z), \quad (4.46b)$$

por lo cual, los grados de respectivos polinomios cumplen la condición,

$$\deg(\hat{H}'_I(z)) < \deg(\hat{H}_I(z)),$$

$$\deg(\hat{G}'_I(z)) < \deg(\hat{G}_I(z)).$$

Las ecuaciones (4.46a) y (4.46b) corresponden al *esquema de división con residuo* para polinomios de Laurent, con cociente común $S(z)$, es decir, el algoritmo Euclídeo aplicado a $\hat{H}'_I(z)$ y $\hat{H}_P(z)$. El mismo algoritmo Euclídeo puede ser aplicado a $\hat{G}_I(z)$ y $\hat{G}_P(z)$, como consecuencia de la condición de reconstrucción perfecta.

Las Figuras 4.21(a) y 4.21(b) representan las diferentes etapas de la transformada directa e inversa polifásica. La reconstrucción perfecta se obtiene inmediatamente, en la medida en que las operaciones realizadas durante la transformada inversa se consiguen de forma simple realizando la transformada directa en dirección contraria. Esta factorización también se puede realizar utilizando los operadores P (actualización dual) y U (actualización primaria) como se muestra en la Figura 4.22. De manera similar, se aplica para la transformada inversa. Cabe anotar que para la construcción de la etapa de análisis de un banco de filtros, usando esquemas de actualización con las funciones U y P , se utiliza la suma en vez de la resta, $U = -S(z)$.

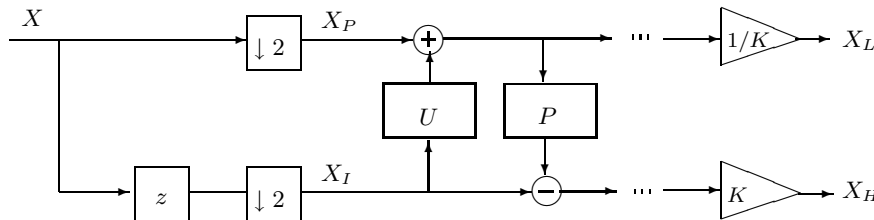


Figura 4.22. Implementación de los esquemas de actualización con las funciones U y P .

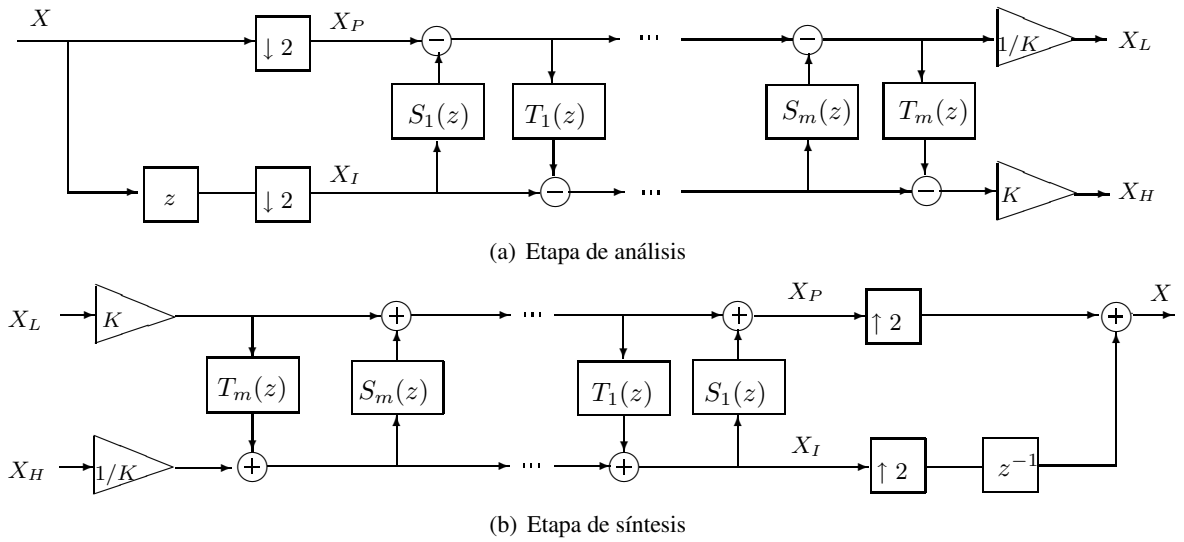


Figura 4.21. Banco de filtros usando esquemas de actualización.

Construcción de la transformada wavelet. La selección adecuada de los filtros h y g permite la construcción de la transformada wavelet. De hecho cualquier transformada wavelet ortogonal o biortogonal puede ser construida a través de esquemas de actualización, donde el orden del filtro está relacionado con el número de momentos de desvanecimiento de las wavelets. Esto no solamente mejora los tiempos de cálculo para la transformada wavelet, sino que mostrará su utilidad en los esquemas adaptativos pues cambiando los parámetros de los filtros es posible modificar los parámetros de las wavelets (momentos de desvanecimiento, soporte).

Ejemplo 4.9. Construir la transformada wavelet a partir de esquemas de actualización para función madre de Haar.

El par de filtros de análisis para la transformada wavelet Haar son

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{G}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La correspondiente matriz polifásica es

$$\mathbf{P}_a(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

cuya descomposición, usando la actualización dual es

$$\mathbf{P}_a(z) = \begin{bmatrix} \hat{H}'_P(z) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hat{G}'_P(z) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T(z) & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que se deben encontrar los polinomios de Laurent $T(z)$, $\hat{H}'_P(z)$ y $\hat{G}'_P(z)$, tales que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \hat{H}'_P(z) + T(z) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} &= \hat{G}'_P(z) + T(z) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se calcula el cociente $T(z)$ y el residuo $\hat{H}'_P(z)$ de la división. Como resultado, se tiene que $T(z) = 1$, $\hat{H}'_P(z) = 2/\sqrt{2}$, entonces, $\hat{G}'_P(z) = 0$, con lo cual,

$$\mathbf{P}_a(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, teniendo en cuenta la ecuación (4.45) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \hat{H}'_I(z) - S(z) \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \hat{G}'_I(z) - S(z)(0),\end{aligned}$$

De lo anterior, se observa que $S(z) = -1/2$, $\hat{H}'_I(z) = 0$ y $\hat{G}'_I(z) = 1/\sqrt{2}$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_a(z) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, K = \sqrt{2}\end{aligned}\tag{1}$$

De la ecuación (1), se tiene que para la implementación de la Tw Haar el operador de predicción es $P = T(z) = 1$ (*Dual lifting*), mientras que el polinomio que actualiza las muestras pares es $U = -S(z) = 1/2$ (*Primal lifting*). La normalización se hace asignando $K = \sqrt{2}$. En la Figura 4.23 se observa la implementación de la Tw Haar por esquemas de actualización.

La implementación de la Tw Haar directa, dada la señal discreta $x[n]$, entonces, toma la forma

$$\begin{aligned}x_P[n] &= x[2n] \\ x_I[n] &= x[2n+1] \\ x_I^{(1)}[n] &= x_I[n] - P(x_P[n]) = x_I[n] - x_P[n] \\ x_P^{(1)}[n] &= x_P[n] + U(x_I^{(1)}[n]) = x_P[n] + \frac{1}{2}x_I^{(1)}[n]\end{aligned}$$

Como resultado se tiene que

$$\begin{aligned}x_L[n] &= Kx_P^{(1)}[n] = \sqrt{2}x_P^{(1)}[n] \\ x_H[n] &= \frac{1}{K}x_I^{(1)}[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}x_I^{(1)}[n]\end{aligned}$$

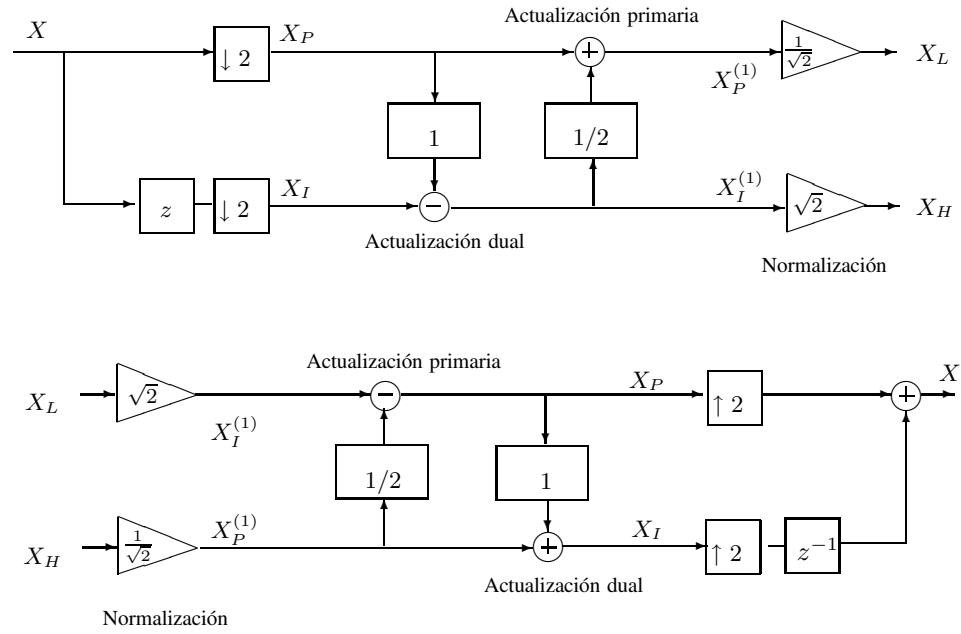


Figura 4.23. Transformada wavelet Haar directa e inversa usando esquemas de actualización.

que muestra como el esquema de actualización cumple con la reconstrucción perfecta. Así

$$\begin{aligned}
 x_I^{(1)}[n] &= K x_H[n] = \sqrt{2} x_H[n] \\
 x_P^{(1)}[n] &= \frac{1}{K} x_L[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} x_L[n] \\
 x_P[n] &= x_P^{(1)}[n] - U(x_I^{(1)}[n]) = x_P^{(1)}[n] - \frac{1}{2} x_I^{(1)}[n] \\
 x_I[n] &= x_I^{(1)}[n] + P(x_P[n]) = x_I^{(1)}[n] + x_P[n] \\
 x[2n+1] &= x_I[n] \\
 x[2n] &= x_P[n]
 \end{aligned}$$

Esta factorización ofrece un gran número de ventajas tales como su baja complejidad computacional y presenta una gran facilidad para incluir esquemas adaptativos.

Capítulo 5

Estimación espectral

Ricardo Henao Giraldo

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

El principal objetivo del análisis espectral consiste en la estimación de la densidad espectral de potencia de algún proceso aleatorio, así como en la detección de la presencia, en un determinado intervalo de tiempo, de algún proceso aleatorio cíclico con parámetros determinados [38]. La estimación espectral, mediante técnicas de proceso digital, se realiza de forma secuencial, usando técnicas de análisis corto en el tiempo. En general, se considera que la precisión en la estimación espectral, depende básicamente de dos factores: el intervalo de observación y la información a priori que se pueda disponer sobre el proceso aleatorio.

5.1. Representación espectral de procesos aleatorios

Las definiciones de las diferentes características de aleatoriedad, en general, suponen que la cantidad de información dispuesta sobre cualquier señal aleatoria es completa. No obstante, debido a restricciones de costos, tiempo y posibilidad de tomar toda la información sobre los objetos pertenecientes a la señal aleatoria en análisis, en realidad, se tiene alguna trayectoria x o conjunto de segmentos $\{x_i\}$ tomados de la variable observada ξ . Por esto, es necesario calcular, de manera aproximada, cada característica a partir de la trayectoria en disposición. En particular, a partir del análisis mediante un funcional $g_\theta(x_i)$ sobre los resultados experimentales de una observación dada con longitud n , $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ se obtiene la característica estadística o *estimación* $\tilde{\theta}$ del valor aleatorio θ :

$$\tilde{\theta} = g_\theta(x_1, \dots, x_n)$$

Las propiedades probabilísticas de $\tilde{\theta}$ dependen de la estructura de aleatoriedad de cada variable $\{x \in \xi : x_1, \dots, x_n\}$, de la longitud de la observación n y del tipo del operador funcional $g_\theta(x_i)$ empleado para el análisis de las trayectorias. En este sentido, usualmente, la precisión en la aproximación del cálculo de la característica se describe por la *potencia del error* definida como

$$\varepsilon^2 = \mathcal{E} \left\{ (\tilde{\theta} - \theta)^2 \right\} \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{E}\{\cdot\}$ es el operador de valor medio.

5.1.1. Descomposición de Karhunen-Loève

Sea $\xi(t)$ un proceso estacionario, dado en el intervalo $(0, T)$, con descomposición ortogonal, (1.17):

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \phi_n(t) \quad (5.2)$$

donde los coeficientes de descomposición, en concordancia con (1.23), se determinan como:

$$\xi_n = \frac{1}{\mathcal{E}_n} \int_0^T \xi(t) \phi_n^*(t) dt, \quad \mathcal{E}_n = \int_0^T \phi_n^2(t) dt \quad (5.3)$$

Sin embargo, a diferencia de la representación (1.20), los coeficientes de (5.3) son aleatorios, por lo que la convergencia de la suma en (5.2) se debe entender en el sentido del valor medio cuadrático:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \left| \xi(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \phi_n(t) \right|^2 \right\} = 0$$

El valor de la esperanza del error cuadrático medio integral (potencia media de error, (5.1)), en la representación (1.20), está dado por:

$$\mathcal{E} \left\{ \int_0^T \left(\xi(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n \phi_n(t) \right)^2 dt \right\} \quad (5.4)$$

En general, se plantea la búsqueda de un conjunto óptimo de funciones base con dimensión p , dado en $L^2(T)$, para la representación discreta finita de la forma (1.20) a partir de diversas observaciones de un proceso aleatorio $\xi(t)$, $t \in T$, de tal manera que la norma del error en $L^2(T)$, promediada sobre el conjunto de observaciones, sea la menor posible. En particular, de (5.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_T^2 &= \int_T \mathcal{E} \{ \xi(t) \xi^*(t) \} dt - \sum_{i=1}^p \int_T \int_T \mathcal{E} \{ \xi(t) \xi^*(t) \} \phi_i^*(t) \phi_i(\tau) dt d\tau \\ &= \int_T R_\xi(t, \tau) dt - \sum_{i=1}^p \int_T \int_T R_\xi(t, \tau) \phi_i^*(t) \phi_i(\tau) dt d\tau \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $R_\xi(\tau)$ corresponde a la función de correlación propia y definida como

$$R_\xi(\tau) = \mathcal{E} \{ \xi(t) \xi^*(t + \tau) \} \quad (5.6)$$

El primer término de (5.5) no depende del conjunto base $\phi = \{\phi_i\}$, por lo que la tarea se resume a

hallar las p funciones ortogonales que maximizan la cantidad

$$\sum_{i=1}^p \int_T \int_T R_\xi(t, \tau) \phi_i^*(t) \phi_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^p \langle \mathcal{A}_\xi \{ \phi_i(t) \}, \phi_i(t) \rangle$$

que corresponde a una suma de funcionales cuadráticos. La condición de valor máximo se puede encontrar, al tener en cuenta que el núcleo del operador integral \mathcal{A}_ξ , definido como,

$$\mathcal{A}_\xi \{ \phi(t) \} = \int_T R_\xi(t, \tau) \phi(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

el cual corresponde a la función de correlación propia, (5.6), de un proceso con valor medio cuadrático finito. El operador (5.7) tiene las siguientes propiedades:

- (a). Integración cuadrática del núcleo, $\int_T \int_T |\mathcal{A}(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty$
- (b). Simetría, $\mathcal{A}(t, \tau) = \mathcal{A}^*(t, \tau)$, que resulta de las propiedades de la función de correlación propia, $R_\xi(t, \tau) = R_\xi^*(\tau, t)$.
- (c). Naturaleza positiva definida, $\langle \mathcal{A} \{ \phi \}, \phi \rangle = E \{ \|\xi, \phi\|^2 \} \geq 0$.

De las anteriores propiedades resulta lo siguiente:

1. Los valores propios de la solución (5.7) conforman una sucesión cuadrática sumatoria de términos reales positivos y los cuales se pueden disponer en su orden de decrecimiento:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \geq \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq \dots$$

2. El núcleo se puede representar por una serie monótona convergente por las funciones propias $\psi = \{ \psi_i \}$ del operador \mathcal{A}_ξ , de la forma:

$$R_\xi(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \psi_i(t) \psi_i^*(\tau) \quad (5.8)$$

3. Las funciones propias pueden ser ortonormales, de tal forma que se cumpla (1.18):

$$\langle \mathcal{A}_\xi \{ \psi_i \}, \psi_k \rangle = \langle \lambda_i \psi_i, \psi_k \rangle = \lambda_i \delta_{ik} \quad (5.9)$$

En general, en [39] se demuestra que al emplear el operador \mathcal{A}_ξ para cualquier conjunto base $\{ \phi_i \}$, es cierto que,

$$\sum_{i=1}^p \langle \mathcal{A}_\xi \{ \phi_i \}, \phi_i \rangle \leq \sum_{i=1}^p \langle \mathcal{A}_\xi \{ \psi_i \}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

La expresión (5.5) para el conjunto base óptimo hallado toma la forma,

$$\bar{\varepsilon}_T^2 = \int_T R_\xi(t, \tau) dt - \sum_{i=1}^p \langle \mathcal{A}_\xi \{ \psi_i \}, \psi_i \rangle \quad (5.10)$$

en la cual, al reemplazar (5.8) y (5.9) se obtiene que:

$$\bar{\varepsilon}_T^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \psi_i, \psi_i \rangle - \sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=p+1}^{\infty} \lambda_i \quad (5.11)$$

De lo anterior, se concluye que el subespacio con dimensión p en $L^2(T)$, que sea óptimo para la representación de un proceso aleatorio en $t \in T$, se da por las p funciones propias de la ecuación

$$\int_T R_{\xi}(t, \tau) \psi_i(\tau) d\tau = \lambda_i \psi_i(t) \quad (5.12)$$

las cuales corresponden a los p mayores valores de λ_i . Por cierto, debido a que el error cuadrático medio de representación $\bar{\varepsilon}_T^2$ corresponde a la suma residual de los valores propios, entonces el error de aproximación se puede variar aumentando o disminuyendo el índice inferior p de la respectiva suma en (5.11). Así, aumentando el valor de T también aumenta los valores propios en general, luego es necesario mayor cantidad p de términos de la descomposición para obtener la precisión deseada.

La descomposición de señales aleatorias con función de correlación continua en la serie (5.2), $\xi(t) \approx \sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i(t)$, $t \in T$, en la cual el conjunto base óptimo de representación (5.10) son las funciones propias, corresponde a la descomposición de *Karhunen-Loève* (K-L).

Los coeficientes (5.3) $\{\xi_i\}$ son ortogonales, por cuanto

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \xi_m \xi_l^* \} &= E \{ \langle \xi(t), \psi_m(t) \rangle \langle \xi(t), \psi_l(t) \rangle^* \} = \int_T \int_T R_{\xi}(t, \tau) \psi_m^*(t) \psi_l(t) dt d\tau \\ &= \lambda_l \delta_{ml} \end{aligned}$$

De otra parte, si se tiene un proceso aleatorio con valor medio $\overline{\xi(t)} = 0$, entonces los coeficientes, también tendrán valor medio $\{\bar{\xi}_i = 0, \forall i\}$ y correlación nula (son linealmente independientes).

Aunque la descomposición K-L brinda la menor cantidad de elementos en la representación de procesos aleatorios por medio de la serie (1.17), para un valor dado de error $\bar{\varepsilon}_T^2$, sin embargo, su empleo está limitado, principalmente por las siguientes razones: la función de correlación de cualquier proceso aleatorio, generalmente es desconocida y el procedimiento de solución de (5.12) no es conocido en forma general. Usualmente, en calidad de funciones base se emplean las funciones ortogonales del tipo Fourier, polinomios de Chebyshev, Lagrange, Funciones de Walsh y Haar, entre otras.

Las funciones base exponenciales de Fourier (1.28), $\psi_i(t) = e^{ji\omega_0 t}$, son óptimas para la representación de procesos aleatorios estacionarios cíclicos $\xi(t)$, para los cuales se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \xi(t + kT) \} &= \mathcal{E} \{ \xi(t) \} = m_{1\xi}(t), \\ R_{\xi}(t_1 + kT, t_2 + mT) &= R_{\xi}(t_m, t_2) \end{aligned}$$

En este caso, los coeficientes de descomposición $\{\xi_i\}$ tienen correlación nula y su varianza, teniendo en cuenta las expresiones (5.10) y (5.12) está dada como:

$$\sigma_{\xi_i}^2 = \int_T R_{\xi}(\tau) \exp(-ji\omega_0 \tau) d\tau$$

Las funciones base de Fourier no son óptimas para señales aleatorias no cíclicas estacionarias y sus coeficientes de descomposición son correlacionados. Aunque, para procesos ergódicos, si $T \rightarrow \infty$, los coeficientes de Fourier tienen correlación nula y la TF se aproxima a la descomposición K-L.

Ejercicio en el CP 5.1. Dados el vector señal $\mathbf{u} = \{u[l] : l = 1, \dots, L\}$, perturbado con ruido blanco, y el filtro RIF de orden M , la transformada K-L consiste en calcular la matriz de correlación propia y sus vectores propios:

```
L=4096; % longitud de la señal
M=16; % longitud del filtro RIF
n=1:L; u=sin(2*pi*n/L);
r = random('Normal',0,.1,1,L); % ruido
u=u+r; plot(u); % señal de análisis
ruu=xcorr(u,u)/L;
Ruu=toeplitz(ruu(L:L+M-1)); % matriz de correlación
[V,lambda]=eig(Ruu);
H=V*diag(sqrt(diag(lambda.^(-1))))*V' % matriz de transformación
```

5.1.2. Densidad espectral de energía

Sea $\xi_c(t)$ una señal aleatoria de energía, es decir, que cumple la desigualdad (1.1), para la cual se define el par de transformadas de Fourier, (1.59) y (1.60), entonces, a partir del teorema de Parseval (1.67), se tiene

$$\mathcal{E}_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_c(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Xi_c(f)|^2 df$$

La cantidad $|\Xi_c(f)|^2$ representa la distribución de energía de la señal aleatoria en función de la frecuencia, y por consiguiente, corresponde a su *densidad espectral de energía*,

$$s_x(f) \triangleq |\Xi_c(f)|^2$$

esto es, la energía total de la señal resulta ser la integral de $s_x(f)$ sobre todo el dominio de f .

La estimación del espectro de una señal aleatoria continua $\xi_c(t)$ se puede realizar a partir de una sucesión de valores $\{\xi[n]\}$, obtenidos como resultado de su discretización uniforme con frecuencia f_d . Además, para asegurar que no se presenta el fenómeno de transposición espectral como resultado del proceso de muestreo, se asume que la señal se filtra previamente, así que, con propósitos prácticos su ancho de banda se limita a f_{\max} [Hz], luego, la frecuencia de muestreo f_d , acordes al teorema 3.1, se selecciona de tal forma que $f_d \leq 2f_{\max}$.

La transformada de Fourier de la sucesión $\{x[n]\}$ tiene la forma,

$$\Xi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi[n] e^{-j2\pi f n}$$

que se relaciona con el espectro de la señal aleatoria analógica $\xi_c(t)$ como

$$\Xi\left(\frac{f}{f_d}\right) = f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Xi_c(f - k f_d)$$

donde $n = f/f_d$ es la frecuencia normalizada. Por cierto, en ausencia de transposición de frecuencias,

dentro del rango fundamental de espectro, $|f| \leq f_d/2$, se tiene

$$\Xi\left(\frac{f}{f_d}\right) = f_d \Xi_c(f), \quad |f| \leq f_d/2$$

Por lo tanto, el espectro de la señal aleatoria discretizada es similar al de su homólogo analógico. Como consecuencia, el espectro de la densidad de energía de la señal aleatoria discretizada es

$$s_x\left(\frac{f}{f_d}\right) = \left|\Xi\left(\frac{f}{f_d}\right)\right|^2 = f_d^2 |\Xi_c(f)|^2$$

Teorema 5.1. [Wiener-Jinchin] Sea la señal aleatoria de energía $\xi_c(t)$ y estacionaria, tal que se define la función de correlación propia $R_\xi(\tau)$, en la forma

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_c^*(t) \xi_c(t + \tau) dt$$

Entonces, la función $s_\xi(f)$ corresponde a la transformada de Fourier de la función de correlación propia $R_\xi(\tau)$, esto es,

$$s_\xi(f) = \mathcal{F}\{R_\xi(\tau)\} \quad (5.13)$$

De manera inversa, se puede obtener que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{s_\xi(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{R_\xi(\tau)\}\} = R_\xi(\tau) \quad (5.14)$$

La correspondiente función de correlación propia, en general para la sucesión $\xi[n]$, se calcula como,

$$r_\xi[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi^*[m] \xi[m+k] \quad (5.15)$$

Luego, teniendo en cuenta (5.13), la densidad espectral de energía se puede estimar a partir de

$$s_\xi[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_\xi[k] e^{-j2\pi kn} \quad (5.16)$$

La ecuaciones (5.15) y (5.16) corresponden a dos métodos diferentes para la estimación de la densidad espectral de energía de una señal $\xi_c(t)$ a partir de su versión discretizada uniformemente $\xi[m]$. El primer método, denominado *directo*, implica el cálculo de la TF de $\{\xi[m]\}$ en la forma

$$s_\xi[n] = |\Xi(f)|^2 = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi[k] e^{-j2\pi kn} \right|^2 \quad (5.17)$$

El segundo método, denominado *indirecto*, requiere dos pasos. Inicialmente, dada la sucesión $\{\xi[m]\}$, se estima la función de correlación propia $r_\xi[k]$, luego, en concordancia con (5.16), se halla la respectiva transformada de Fourier para obtener la densidad espectral de energía.

Sin embargo, en cualquiera de los métodos de estimación, (5.16) o (5.17), surge la restricción en cuanto a la cantidad de valores que componen la sucesión a tomar en cuenta, que en la práctica debe

ser necesariamente de longitud finita, esto es, $\{\xi[m] : 0 \leq m \leq N-1\}$. Como resultado, se tiene que el limitar la duración de la sucesión $\xi(n)$ a N puntos, es equivalente a multiplicar la sucesión inicial $\xi[m]$ por una ventana rectangular, con lo cual se obtiene la sucesión truncada $\hat{\xi}[m]$,

$$\hat{\xi}[m] = \xi[m]w[m] = \begin{cases} \xi[m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con representación espectral;

$$\hat{\Xi}(f) = \Xi(f) * W(f) = \int_{-1/2}^{1/2} \Xi(\alpha)W(f - \alpha)d\alpha$$

Asumiendo que para la ventana $w(n)$, la apertura N es suficientemente grande, entonces, el espectro de $W(f)$ es relativamente estrecho comparado con $\Xi(f)$, y como resultado de la convolución de la función ventana $W(f)$ con $\Xi(f)$ se obtiene un espectro suavizado $\hat{\Xi}(f)$. Incluso, si $W(f)$ es estrecha comparada con $\Xi(f)$, la convolución de $\Xi(f)$ con los lóbulos laterales de $W(f)$ produce energía de lóbulos laterales en $\hat{\Xi}(f)$ sobre bandas de frecuencia donde $\Xi(f) = 0$. Tal energía, que es consecuencia de los lóbulos laterales de la ventana, se denomina derrame o *pérdida* espectral.

5.1.3. Densidad espectral de potencia

En general, una alta cantidad de señales aleatorias, $\xi(t)$, aún siendo estacionarias, no tienen energía finita y, por lo tanto, es imposible de realizar su descripción directa en el dominio de la frecuencia, mediante la transformada de Fourier, principalmente, porque la integral (1.60) implica cumplir las condiciones de Dirichlet dadas en la sección §1.3.1, las cuales no pueden ser cumplidas por cualquier observación de proceso estacionario en el sentido amplio, particularmente, la condición de convergencia exige que el proceso sea absolutamente integrable, condición que sólo se alcanzaría para señales aleatorias de contenido cero.

El empleo de la transformada de Fourier exige el cambio en la representación para las observaciones de la señal estacionaria, de tal manera que la integral (1.60) converja, para lo cual, la forma más sencilla consiste en el truncamiento de la trayectoria $\xi(t)$, empleado en el cálculo de sus momentos de una observación sobre un intervalo de tiempo $(-T, T)$, mediante la función de ponderación $w(t)$ de forma rectangular:

$$\xi_T(t) = w(t, T) \xi(t) = \text{rect}_T(t) \xi(t) \quad (5.18)$$

La trayectoria de la señal aleatoria truncada de (5.18) es válida, mientras la varianza del proceso σ_ξ^2 sea finita. Así, se asegura la convergencia de la integral (1.60). En este sentido, el análisis espectral se realiza como señales de potencia, acorde con la definición (1.2), y por consiguiente, tales señales aleatorias se caracterizan mediante la respectiva densidad espectral de potencia, $S_\xi(f)$, definida en (1.68), que para el caso de los procesos estacionarios se determina como:

$$S_\xi(\omega) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E} \left\{ |\Xi_T(\omega)|^2 \right\}}{2T} \quad (5.19)$$

Atendiendo a las condiciones de realización físicas de los procesos aleatorios, la densidad espectral

de potencia tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- (a). $S_{\xi}(\omega) \in \mathbb{R}$, está determinada en el espacio de los reales,
- (b). $0 \leq S_{\xi}(\omega) < \infty$, es definida positiva, además, acotada,
- (c). $S_{\xi}(\omega) = S_{\xi}(-\omega)$, es par. En consecuencia, la representación de $S_{\xi}(\omega)$ en forma de funciones racionales debe contener estrictamente polinomios de potencias pares:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{s_0(\omega^{2n} + a_{2n-2} + \cdots + a_2\omega^2 + a_0)}{\omega^{2m} + b_{2m-2} + \cdots + b_2\omega^2 + b_0}$$

La expresión (5.19) es obtenida suponiendo el valor medio igual a cero del proceso aleatorio. Sin embargo, se puede demostrar que la relación puede ser generalizada, obteniéndose que:

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega \quad (5.20)$$

Cabe anotar, que el par conjugado de expresiones (5.13) y (5.14), correspondientes a la Transformada de Winner-Jinchin también se cumple para el caso de señales aleatorias de potencia y tiene un valor fundamental, debido a que establecen la relación de la representación del proceso aleatorio entre el plano del tiempo (expresado por la función de correlación) y el plano de la frecuencia (expresado mediante la densidad espectral de potencia).

Ejemplo 5.1. Sea la función de correlación $R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Hallar la respectiva densidad espectral de potencia.

En caso de cumplirse la paridad de la función de correlación, las expresiones (5.13) y (5.14) se pueden llevar a las respectivas formas:

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (1)$$

$$R_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (1a)$$

Luego, empleando la relación (1), se tiene que:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau d\tau = \frac{2\sigma_{\xi}^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau \cos \omega\tau d\tau$$

La anterior integral se puede resolver por tabla:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{2\sigma_{\xi}^2}{\pi} \left(\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos \omega\tau + \omega \sin \omega\tau) \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2\sigma_{\xi}^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

En la Figura 5.1, se presentan la función de correlación (parte superior) y la respectiva densidad espectral de potencia (parte inferior), calculadas ambas para los casos de $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.25$ y asumiendo un valor de varianza unitario.

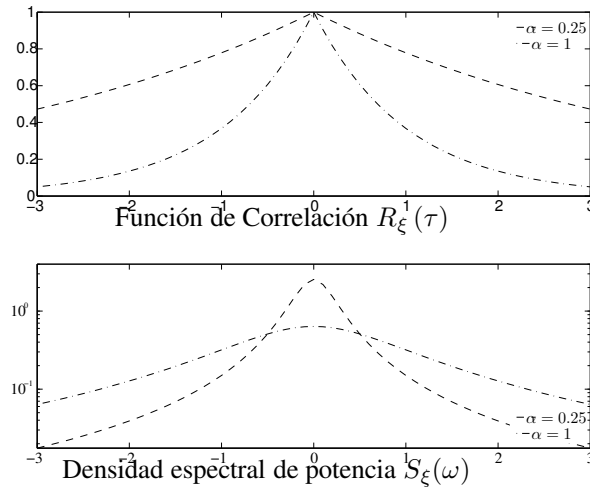


Figura 5.1. Resultados del ejemplo 5.1.

5.1.4. Estimación de la densidad espectral de potencia

De una parte, la densidad espectral de potencia $S_\xi(\omega)$ se identifica con la varianza de la descomposición espectral del proceso estacionario, tal y como se muestra en (5.20). Pero de otra parte, la DEP corresponde a la transformada inversa de la función de correlación (5.13). Por lo tanto, la estimación de la DEP se puede realizar mediante ambas formas de representación.

En el primer caso, al analizar la DEP como la densidad de la varianza espectral, la estimación sobre una trayectoria de longitud finita del proceso se hace a través de la descomposición en la serie de Fourier (5.2) de la señal aleatoria para $\omega = \omega_k$, esto es,

$$\tilde{S}_\xi(\omega) = \frac{1}{2T} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \xi(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (5.22)$$

donde

$$\alpha_k = \int_0^T \xi(t) \cos 2\pi kt/T dt,$$

$$\beta_k = \int_0^T \xi(t) \sin 2\pi kt/T dt$$

Debido a la ortogonalidad de la representación y al hacer $T \rightarrow \infty$, entonces, ambos valores α_k y β_k no son correlacionados. Además, en los procesos con estructura gaussiana, los valores α_k y β_k también tienen distribución gaussiana y, por ende, la estimación de $\tilde{S}_\xi(\omega)$, haciendo $T \rightarrow \infty$, corresponde a la distribución χ^2 con dos grados de libertad, con lo cual se demuestra que la media y

la varianza de la estimación corresponden a:

$$\mathcal{E} \left\{ \tilde{S}_\xi(\omega_k) \right\} = S_\xi(\omega_k) \quad (5.23a)$$

$$\sigma_{\tilde{S}}^2 = S_\xi^2(\omega_k) \quad (5.23b)$$

Mientras, el valor de la media muestra ausencia de sesgo, la varianza no tiende a cero, razón por la cual, la estimación (5.22) no se considera consistente.

La segunda forma de representación, a partir de (5.13), cuando se realiza empleando una ventana similar a (5.18) [40], implica la siguiente estimación para la DEP:

$$\tilde{S}_\xi(\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega\tau} \tilde{R}_\xi(\tau) d\tau = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_\xi e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.24)$$

Sin embargo, el valor medio de (5.24) muestra un sesgo en la respectiva estimación:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \tilde{S}_\xi(\omega) \right\} &= \mathcal{E} \left\{ \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \tilde{R}_\xi e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\ &= \tilde{S}_\xi(\omega) - 2 \int_T^\infty \cos \omega\tau R_\xi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Por cuanto [4],

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b x(\zeta) \cos(v\zeta) d\zeta = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b x(\zeta) \sin(v\zeta) d\zeta = 0$$

entonces, para valores pequeño de T , la estimación propuesta tiene distorsiones significativas.

Sea la observación $\{\xi(t), T \in [a, b]\}$ del proceso estacionario. De ambos métodos de estimación de la densidad espectral de potencia (5.22) y (5.24), se establece la estadística común denominada *periodograma*, definida por la relación:

$$s(\lambda; a, b) = \frac{1}{2\pi(b-a)} \left| \int_a^b \xi(t) e^{j t \lambda} dt \right|^2$$

que en el caso discreto, cuando $\{\xi_k \in T : t_k, k = 1, \dots, n\}$, toma la forma:

$$s(\lambda; n) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t \in T} \xi(t) e^{j t \lambda} \right|^2 \quad (5.25)$$

Sin embargo, la estadística en (5.25) presenta las misma limitaciones de inconsistencia dadas en (5.23a) y (5.23b), motivo por el cual el periodograma se convierte en un proceso aleatorio y, para valores grandes de n presenta fuertes fluctuaciones de trayectoria (realizaciones con alto grado de

disimilitud). La ausencia de consistencia en las estimaciones propuestas de densidad espectral de potencia ha generado la necesidad de empleo de diferentes métodos orientados a aumentar la efectividad de estimación por medio de diversas funciones de peso, que implican su alisamiento.

En general, para una observación dada $\{\xi(t_k) : t_k \in T, k = 1, \dots, n\}$ se emplea la estadística,

$$\tilde{S}_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_S(\lambda - \nu) s(\nu; n) d\nu \quad (5.26)$$

La función de peso $W_S(\lambda)$, introducida en frecuencia, en (5.26) es similar a la función ventana propuesta para la estimación en el tiempo en (5.18), y por lo tanto, se denomina *ventana espectral*, las cual se escoge de tal manera que cumpla los siguientes requerimientos:

- (a). *Localización*. $W_S(\lambda)$ debe tener un valor máximo en $\lambda = 0$,
- (b). *Ausencia de sesgo*.

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_S(\lambda) d\lambda = 1$$

- (c). *Consistencia*. $\sigma_S^2 \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. En particular, se considera el valor asintótico,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_S^2(\lambda) d\lambda = 0$$

Aunque existe una gran cantidad de ventanas propuestas, en la práctica es común el empleo de aquellas funciones de peso que se puedan representar en la clase:

$$W_n(\lambda) = 2 \sum_{-n+1}^{n+1} k_n(l) e^{-j\lambda l}$$

donde

$$k_n(l) = k(l/m_n)$$

siendo $\{m_n\}$ cierta sucesión creciente no acotada de valores enteros, tales que $m_n/n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Además, $k(x)$ es una función par acotada, para la cual se cumplen las siguientes restricciones:

- (a). $k(0) = 1$, $|k(\nu)| < 1$, $\forall \nu < 1$,
- (b). La función es cuadrado integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2(\nu) d\nu < \infty$$

En la Tabla 5.1, se muestran ejemplos de ventanas espectrales empleadas en la estimación de la densidad espectral de potencia.

Ventana	Modelo
Transformada finita de Fourier (Estimación de Daniell)	$W_S(\lambda) = \begin{cases} m_n, & \lambda \leq \pi/m_n \\ 0, & \lambda > \pi/m_n \end{cases}$ $\tilde{S}_\xi(\lambda) = \frac{m_n}{2\pi} \sum_{t=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{ t }{n}\right) \tilde{R}_\xi(t) \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{m_n} e^{jt\lambda}$ $k(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu)$
Estimación truncada	$W_S(\lambda) = 2 \sin \left(\frac{2m_n + 1}{2} \lambda \right) \left(\sin \frac{\lambda}{2} \right)^{-1}$ $\tilde{S}_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-m_n}^{m_n} \left(1 - \frac{ t }{n}\right) \tilde{R}_\xi(t) e^{jt\lambda}$ $k(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu \leq 1 \\ 0, & \nu > 1 \end{cases}$
Estimación de Bartlett	$W_S(\lambda) = \frac{\sin^2 \frac{m_n \lambda}{2}}{m_n \sin^2 \frac{\lambda}{2}}$ $\tilde{S}_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-m_n}^{m_n} \left(1 - \frac{ t }{n}\right) \left(1 - \frac{ t }{m_n}\right) \tilde{R}_\xi(t) e^{jt\lambda}$ $k(\nu) = \begin{cases} 1 - \nu , & \nu \leq 1 \\ 0, & \nu > 1 \end{cases}$
Estimación de Tukey-Hamming	(ver estimación truncada) $\tilde{S}_\xi(\lambda) = \frac{1}{2} \tilde{S}_{\xi F}(\lambda) + \frac{1}{n} \tilde{S}_{\xi F} \left(\lambda - \frac{\pi}{m_n} \right) + \frac{1}{n} \tilde{S}_{\xi F} \left(\lambda + \frac{\pi}{m_n} \right)$ $k(\nu) = \begin{cases} (1 + \cos \pi\nu)/2, & \nu \leq 1 \\ 0, & \nu > 1 \end{cases}$

Tabla 5.1. Ventanas de estimación de densidad espectral de potencia

Problemas

Problema 5.1. Demostrar que para un proceso estacionario dado, el cambio de escala a en el argumento de la función de correlación, corresponde al siguiente cambio de escala en la densidad espectral,

$$R_\xi(a\tau) \Leftrightarrow \frac{1}{a} S_\xi \left(\frac{\omega}{a} \right)$$

Problema 5.2. Calcular la transformada K-L de la señal $\mathbf{u} = \{u[l] = \text{sinc}(2\pi l/L) : l = 1, \dots, L\}$, con $L = 4096$ que es perturbada con ruido blanco con media 0 y varianza 0.1.

Problema 5.3. Mostrar por qué la densidad espectral de potencia es definida positiva y acotada, esto es $0 \leq S_\xi(\omega) \leq \infty$.

Problema 5.4. Demostrar que la estimación $\tilde{S}_\xi(\omega)$ es no sesgada (ver ecuación (5.23a)).

5.2. Estimación espectral no paramétrica

5.2.1. Método de los periodogramas

Dada una sucesión inicial de valores discretos de la trayectoria de señal aleatoria $\{x[k] : x \in \xi\}$ con longitud N , a partir de la expresión (5.25), el cálculo del periodograma, mediante técnicas de proceso digital, se puede escribir como:

$$s_x[k] = \frac{1}{N} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jnk} \right|^2 \quad (5.27)$$

donde

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jnk}$$

Luego, el periodograma se puede calcular empleando la TRF, como se muestra en el procedimiento `Periodograma`. La expresión (5.27) corresponde a la forma no modificada de cálculo del periodograma. Sin embargo, como se observa de (5.23b), la operación (5.27) no corresponde a una estimación consistente. Con el fin de obtener estimaciones consistentes de la DEP, sobre observaciones discretas de longitud finita, se emplea el suavizado de la estimación (5.27) en la frecuencia o en el tiempo.

Así, la expresión (5.27) se escribe como

$$s_x[k] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_s[n] x[n] e^{-jnk} \right|^2$$

donde $w_s[n]$ es la función ventana rectangular.

No obstante, como antes se dijo, es posible el empleo de ventanas diferentes a la rectangular. El periodograma, calculado con una función ventana diferente a la rectangular, se denomina *modificado*, el cual se describe por la expresión

$$s_x[w; k] = \frac{1}{NV} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] x[n] e^{-jnk} \right|^2$$

donde $V = \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right|^2 / N$ es un factor de normalización que asegura que la estimación del histograma, asintóticamente, no tenga sesgo. El

```
% Periodograma
function sx = periodogram(x,n1,n2)
    if nargin == 1,
        n1 = 1; n2 = length(x);
    end;
    sx = abs(fft(x(n1:n2),1024)).^ 2;
    sx = sx/(n2 - n1 + 1);
    sx(1) = sx(2);
end;
```

```
%Periodograma modificado
function sx = mper(x,win,n1,n2)
    if nargin == 2,
        n1 = 1; n2 = length(x);
    end;
    N = n2-n1+1;
    w = ones(N,1);
    if win==2, w = hamming(N);
    elseif win==3, w = hanning(N);
    elseif win==4, w = bartlett(N);
    elseif win==5, w = blackman(N);
    end;
    xw = x(n1:n2).*w/norm(w);
    sx = N*periodogram(xw);
```

procedimiento Periodograma modificado realiza el periodograma para diferentes ventanas.

Como se explicó para la expresión (5.26), la introducción de la función ventana genera el alisamiento en la frecuencia del histograma, con lo cual, la estimación de la DEP es,

$$\mathcal{E}\{s_x[w; k]\} = \frac{1}{2\pi NV} |s[k] * W[k]|^2 \quad (5.28)$$

donde $W[k]$ es la TF de la función ventana $w[n]$. De la expresión (5.28), se observa que el nivel de alisamiento en el periodograma depende de la forma de la función $w[n]$ empleada en el preproceso de la sucesión de entrada. Así, por ejemplo la ventana rectangular tiene el lóbulo principal muy angosto, con relación a la mayoría de ventanas conocidas, lo cual genera menor grado de alisamiento espectral, pero en cambio, esta ventana presenta el mayor nivel de lóbulos laterales, que pueden llevar al enmascaramiento de componentes espectrales de poca amplitud. Cabe anotar que la estimación mediante el histograma modificado presenta las mismas limitaciones, descritas en (5.23a) y (5.23b), sin embargo, el empleo de las ventanas permite establecer un cierto balance entre la resolución espectral (ancho de banda del lóbulo principal) y la pérdida espectral (área de los lóbulos laterales).

Promedio de histogramas. Como consecuencia de la ausencia de sesgo en la estimación

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{s_x[k]\} = S_x[k]$$

se puede suponer que al hallar una estimación consistente para $\mathcal{E}\{s_x[k]\}$, la misma se mantiene consistente para $S_x[k]$.

Partiendo del hecho de que la operación de promediado, para un conjunto de observaciones no correladas de la señal aleatoria, conlleva a la estimación consistente del promedio de la variable aleatoria $\mathcal{E}\{\xi\}$, entonces, se analiza la estimación de la DEP mediante el promedio de los periodogramas o *método de Bartlett*.

Sea $x_i[n] \in \xi$, $n = 0, \dots, L-1$, $i = 1, 2, \dots, K$, un conjunto de observaciones no correlacionadas de la señal aleatoria $\xi(t)$. Si a la trayectoria i le corresponde el histograma $s_x[i, k]$, entonces el valor medio del conjunto de histogramas será

$$\tilde{S}_x[k] = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K s_x[i, k]$$

cuya esperanza matemática es igual a

$$\mathcal{E}\{\tilde{S}_x[k]\} = \mathcal{E}\{s_x[i, k]\} = \frac{1}{2\pi} S_x[k] * W_B[k]$$

donde $W_B(\lambda)$ es la TF de la ventana de Bartlett $w[n]$, $-L < m < L$. Por lo tanto, como en el caso del periodograma, el valor medio $\tilde{S}_x[k]$, asintóticamente no presenta sesgo. Además, asumiendo la correlación nula de las trayectorias $x_i[n]$, la varianza de la estimación $\tilde{S}_x[k]$ se describe como

$$\text{var}\{\tilde{S}_x[k]\} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \text{var}\{s_x[i, k]\} \approx \frac{1}{K} S_x^2[k]$$

que tiende a cero, cuando $K \rightarrow \infty$. Luego, la estimación $\tilde{S}_x[k]$ es consistente.

En la práctica, disponer de una cantidad amplia de trayectorias de un mismo proceso es muy difícil, sin embargo, es más frecuente disponer de una trayectoria de longitud suficientemente larga N . Entonces se puede generar un conjunto de periodogramas obtenidos de la división de la trayectoria inicial en K segmentos sin traslapo, empleando técnicas de análisis en tiempo corto, cada uno de ellos de longitud L , de tal manera que $K < L < N$.

El procedimiento Periodograma de Bartlett ilustra el cálculo de los periodogramas de Bartlett. En general, la estimación promediada de histogramas tiene la forma

$$\tilde{S}_{xB}[k] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K \left| \sum_{n=0}^{L-1} x[iL + n] e^{-jnk} \right|^2$$

Se puede considerar que la estabilidad de la estimación $\tilde{S}_{xB}[k]$ mejora, al disminuir la cantidad de segmentos de análisis de tiempo corto. Dado el valor $N = KL$ se observa la relación de compromiso entre una alta resolución (cuando se tiene el máximo valor de L) y de mínima varianza de la estimación (para el máximo valor posible de K).

Promedio de histograma modificado. El análisis de tiempo corto mediante segmentos sin traslapo puede generar discontinuidades en los valores contiguos de estimación. Por esta razón, es preferible el empleo de segmentos de traslapo que aseguren la suavidad en la estimación. De otra parte, el empleo de funciones ventana puede atenuar el efecto de la pérdida espectral, así como disminuir el sesgo de la estimación, sin embargo, a costa de una pérdida en la resolución espectral. Así, sea el valor de traslapo D , para segmentos de análisis de tiempo corto con longitud L , luego la trayectoria i tiene la forma

$$x[i, n] = x[n + iD], \quad n = 0, 1, \dots, L - 1$$

Al tomar K segmentos que cubran la totalidad del registro de longitud N , entonces

$$N = L + D(K - 1)$$

La estimación del periodograma por Welch se puede escribir en la forma:

$$\tilde{S}_{xW}[w; k] = \frac{1}{KLV} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w[n] x[n + Di] e^{-jnk} \right|^2$$

```
%Periodograma de Bartlett
function sx = bart(x,nsect)
L = floor(length(x)/nsect);
sx = 0; n1 = 1;
for i=1:nsect,
    pe = periodogram(x(n1:n1+L-1));
    sx = sx + pe/nsect;
    n1 = n1 + L;
end;
```

```
%Periodograma de Welch
function sx = welch(x,L,over,win)
if (over>=1) | (over<0),
    error('Valor traslapo inválido');
end;
n1 = 1; n0 = (1-over)*L;
nsect = 1 + floor((length(x)-L)/n0);
sx = 0;
for i=1:nsect,
    mp = mper(x,win,n1,n1+L-1)/nsect;
    sx = sx + mp;
    n1 = n1 + n0;
end;
```

que en términos del histograma modificado es igual a:

$$\tilde{S}_{xW}[w; k] = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} s[w; i, k]$$

con lo cual, el valor esperado del periodograma de Welch resulta en:

$$\mathcal{E} \left\{ \tilde{S}_{xW}[k] \right\} = \mathcal{E} \left\{ s_x[w; k] \right\} = \frac{1}{2\pi LV} S_x[k] |W[k, L]|^2$$

donde $W[k, L]$ es la TDF de la función ventana con longitud L , usada en la estimación del periodograma de Welch. Por cuanto, el factor de normalización es

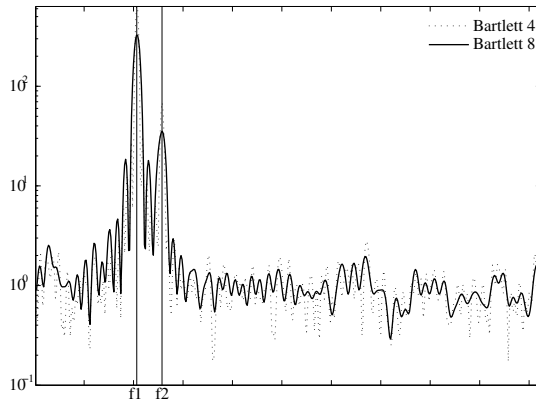
$$V = \left| \sum_{n=0}^{L-1} w[n] \right|^2 / L$$

entonces, el periodograma de Welch también resulta una estimación sin sesgo.

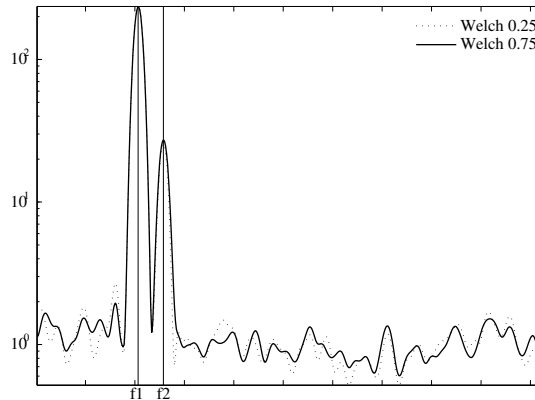
Ejemplo 5.2. Sea la señal compuesta de dos armónicos y ruido blanco gaussiano

$$x[n] = a_1 \sin(nk_1) + a_2 \sin(nk_2) + w[n]$$

dados los valores, $k_1 = 0.2\pi$, $k_2 = 0.25\pi$, $a_1 = \sqrt{10}$, $a_2 = 1$. Hallar la estimación por Bartlett de la DEP.



(a) Bartlett



(b) Welch

Figura 5.2. Ejemplo de los periodogramas

En la Figura 5.2(a) se muestran los resultados obtenidos asumiendo $N = 512$ y $L = 64$ para dos casos de análisis $K = 4$ y $K = 8$. Como se observa, aunque la varianza de la estimación disminuye, al aumentar la longitud del segmento de tiempo corto K , empeora la resolución, condicionada por el aumento del lóbulo principal.

Ejemplo 5.3. Del ejemplo 5.2, analizar el efecto del traslapo, dados los valores de 50 y 75 %, en la varianza y resolución espectral del periodograma de Welch. (Ver Figura 5.2(b))

El cálculo de la varianza en la estimación de Welch es más complejo, en la medida, en que no se puede asegurar la ausencia de correlación entre las trayectorias con traslapo, caso en el cual debe aumentar la dispersión de los valores de la estimación. Por lo tanto, el empleo del traslapo aumenta la cantidad de segmentos de análisis corto, que en un principio debe disminuir la varianza del histograma. No obstante al aumentar el valor del traslapo, aumenta el costo computacional en un valor proporcional a K . Además, el consiguiente aumento del traslapo aumenta el valor de correlación entre los segmentos que puede neutralizar el efecto de aumento en la cantidad K . En la práctica, el valor de traslapo se escoge entre un 50 y 75 % [41].

Suavizado de periodogramas en frecuencia. A partir de la expresión (5.24), se tiene que el periodograma se calcula empleando la TF de la función de correlación propia, en particular:

$$\tilde{S}_x[k] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_x[m] \exp[-jmk] \quad (5.29)$$

donde

$$r_x[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]x[n], & -(N-1) \leq m \leq -1 \end{cases} \quad (5.30)$$

es el *correlograma* de la sucesión aleatoria $x[n]$ con longitud N .

De la expresión (5.29), se observa que se emplea un número diferente de operaciones dependiendo del intervalo de correlación. Así, en los extremos se tiene una sola operación. Cuando el intervalo de análisis es $N-1$, entonces $r_x[N-1] = x[N-1]x^*[0]/N$. Luego, la varianza de la estimación de la función de correlación tendrá valores muy altos en la medida en que crece hacia el valor extremo N del intervalo de correlación.

La estimación del correlograma, (5.30), implica el empleo de una ventana rectangular, no obstante, se puede variar el tipo de función ventana, w_r , tal que compense el efecto de las estimaciones no confiables en los extremos del intervalo de correlación, aunque esto implique la disminución del intervalo de proceso útil, y de esta forma, la disminución de la resolución. Además, se aumenta el fenómeno de pérdida espectral, debido a la aparición de lóbulos laterales, con lo cual la estimación tiende a presentar sesgo. Con el objeto de disminuir la pérdida espectral, se puede emplear el suavizado del periodograma, mediante su convolución con una ventana espectral adecuada o *método de Blackman-Tukey*, que corresponde a la generalización del método de estimación por correlograma para la función de correlación propia, sopesado por una ventana. En este caso, la estimación de la DEP se puede describir como:

$$\tilde{S}_{xBT}[k] = \sum_{m=-M}^M w_r[m] r_x[m] e^{-jmk}$$

que en la frecuencia tiene la forma

$$\tilde{S}_{xBT}[k] = \frac{1}{2\pi} s_x[k] * W[k] \quad (5.31)$$

De la anterior expresión, se observa que la estimación de Blackman-Tukey realiza el suavizado del periodograma mediante su convolución con la TDF de la ventana de correlación $w_r[m]$, la cual en la estimación de los correlogramas, debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. $0 \leq w_r[m] \leq w_r[0] = 1$
2. $w_r[-m] = w_r[m]$
3. $w_r[m] = 0$, para $|m| > M$, $M \leq N - 1$

De la expresión (5.31), se observa que es suficiente, mas no necesaria, la condición de que el periodograma tenga un valor semidefinido positivo, que corresponde a la restricción $W(\lambda) \geq 0$, con $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

La ventana triangular de Bartlett cumple esta condición, mas no ocurre con las ventanas de Hamming y rectangulares, comunes en el proceso de señales. En la Figura 5.3 se muestra un ejemplo del cálculo del periodograma mediante el método de Blackman-Tukey, que presenta una varianza mucho menor, aunque empeore su resolución de frecuencia.

```
% Periodograma de Blackman-Tukey
function sx = per_smooth(x,win,M,n1,n2)
if nargin==3, n1=1;
    n2 = length(x);
end;
R = cov(x(n1:n2),M);
r = fliplr[R(1,2:M),R(1,1),R(1,2:M)];
M = 2*M-1;
if win==2 w = hamming(N);
    elseif win==3
        w = hanning(N);
    elseif win==4 w = bartlett(N);
    elseif win==5 w = blackman(N);
end;
r = r'.*w;
sx = abs(fft(r,1024));
sx(1) = sx(2);
```

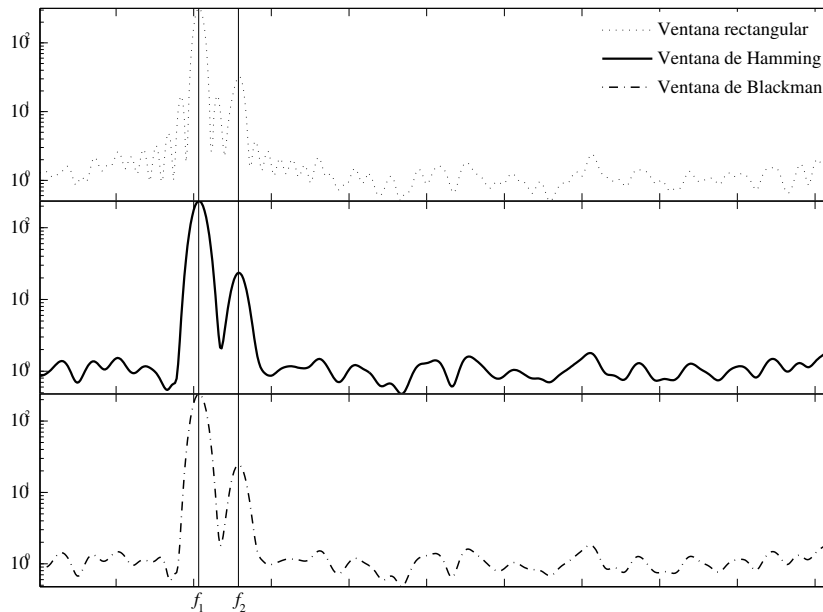


Figura 5.3. Ejemplo de periodograma de Blackman-Tukey

En general se puede considerar que la estimación de la densidad espectral de potencia mediante cualquiera de los métodos de histograma, antes analizados, debe cumplir un compromiso entre la resolución espectral y la varianza de la estimación, por esto, la comparación de los mismos se realiza empleando las siguientes características estadísticas [41]:

$$(a). \nu = \frac{\text{var}\{\tilde{S}_x(\lambda)\}}{\mathcal{E}^2\{\tilde{S}_x(\lambda)\}}$$

el cual corresponde al nivel de dispersión de la estimación y caracteriza la estabilidad estadística de la estimación.

$$(b). \mu = \nu \Delta f$$

donde Δf es la capacidad de resolución del método. El parámetro μ permite determinar la resolución del DEP obtenida a partir de una trayectoria de longitud finita de la señal aleatoria, por cierto, a menor μ , mayor calidad de la estimación.

Método	Estabilidad ν	Resolución Δf	Índice $\mu = \nu \Delta f$
Periodograma	1	$0.89(2\pi/N)$	$0.89(2\pi/N)$
Bartlett	$1/K$	$0.89(2\pi/N)$	$0.89(2\pi/N)$
Welch	$(9/8)(1/K)$	$1.282(\pi/L)$	$0.72(2\pi/N)$
Blackman-Tukey	$(2/3)(M/N)$	$0.64(2\pi/M)$	$0.43(2\pi/N)$

Tabla 5.2. Comparación de los métodos de periodograma de estimación de DEP

En la Tabla 5.2 [41], se muestran las características estadísticas para los métodos del periodograma, descritos anteriormente. Se observa que cada uno de los métodos tiene más o menos el mismo valor compromiso de estabilidad y resolución, el cual es inversamente proporcional a la longitud N de la sucesión de valores discretos de la señal aleatoria. En general, sin importar que métodos se tengan, que ofrezcan mejor resolución o menor dispersión en la estimación, se cumple que el compromiso entre la resolución espectral y la estabilidad, básicamente, depende de la longitud, N , de los valores discretos disponibles para el análisis de la sucesión aleatoria $x[n]$.

5.2.2. Algoritmo de cálculo del método de periodograma

Sean conocidos, para el proceso aleatorio en análisis, los valores del intervalo de discretización Δt y la resolución espectral necesaria Δf de análisis. Entonces, el intervalo de observación T y la respectiva cantidad N de valores discretizados de la señal se relacionan por la expresión [38]:

$$T = \frac{k_w}{\Delta f}, \quad N = \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor \quad (5.32)$$

donde k_w es un coeficiente que se determina de acuerdo al tipo de ventana empleada en la estimación.

El algoritmo del método de periodogramas se divide en dos etapas:

- el preproceso de la señal en el intervalo de observación,
- el promedio de los resultados durante varios intervalos de aproximación, con el fin de disminuir la dispersión de la estimación.

La primera etapa comprende los siguientes procedimientos:

1. Cálculo del valor N , a partir de (5.32). Por cuanto la TF se calcula mediante el algoritmo TRF, entonces, cuando $N \neq 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$, en cada una de las trayectorias, se realiza el relleno de ceros hasta el primer entero m , para el cual se cumpla la igualdad.

- Selección de la función ventana $w_s[n]$ y cálculo de la TRF, por cualquiera de los algoritmos expuestos en el apéndice A, para cada una de las l trayectorias, $x \in \xi$ disponibles $\{x[n, k] : n = 0, \dots, N-1; k = l, \dots, L\}$, que son alisadas por la respectiva ventana:

$$X[k, l] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n, l] w_s[n] \exp(-j2\pi kn/N) \quad (5.33)$$

- Cálculo del periodograma $s[l, \lambda, N]$, definido en (5.25), para cada una de las trayectorias l :

$$s[l, k, N] = \frac{|X[k, l]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} w_s[n]} \quad (5.34)$$

- Dado un criterio de convergencia, si el valor $s[l, k, N]$ no lo cumple, entonces, se deben repetir los pasos 1 y 2, sobremuestreando la sucesión de cada trayectoria en 2, 4, 8, ... veces, mientras no se disminuya adecuadamente la incertidumbre en la estimación del periodograma.

Una forma alterna de disminuir la incertidumbre está en realizar el procedimiento de rellenos de ceros aumentando también la longitud N de cada trayectoria en 2, 4, 8, ..., 2^m veces. En este caso, el arreglo de entrada de la TRF se modifica en la forma:

$$X[m; k, l] = \sum_{n=0}^{2^m N-1} x[m; n, l] w_s[n] \exp\left(-j \frac{2\pi kn}{N 2^m}\right) \quad (5.35)$$

donde

$$x[m; n, l] = \begin{cases} x[n, l], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases}$$

Al comparar las expresiones (5.33) y (5.35), se observa que $X[m; k, l] = X[2^m k, l]$, luego, la operación de compresión de escala de tiempo, en concordancia con (1.63), expande la envolvente espectral, pero no le cambia de forma. En la práctica, el relleno de ceros conlleva a la aparición de componentes adicionales entre los armónicos originales.

La segunda etapa comprende los siguientes procedimientos:

- Selección de factor de traslapo Δ entre los intervalos contiguos de observación. Usualmente, se toma un valor entre $\Delta \in [0.5, 0.75]$.
- Cálculo del número total de intervalos de observación, N_i :

$$N_i = \lfloor ((N_T - \Delta N)) / (N - \Delta N) \rfloor$$

donde N_T es la longitud total del registro de la señal aleatoria en análisis.

- Estimación de la DEP promediada:

$$\tilde{S}[k] = \frac{1}{N_i} \sum_{l=1}^{N_i} s[l, k, N] \quad (5.36)$$

4. Cálculo del coeficiente k_σ , que muestra la disminución en la varianza de la estimación de la DEP, debido a la operación de promediado, en cada uno de los intervalos de observación.

$$k_\sigma = \begin{cases} \left(\frac{1}{N_i} (1 + 2c^2(0.5)) - \frac{2}{N_i^2} c^2(0.5) \right)^{-1}, & \Delta = 0.5 \\ \left(\frac{1}{N_i} (1 + 2c^2(.75) + 2c^2(0.5)) - \frac{2}{N_i^2} (c^2(0.75) + 2c^2(0.5)) \right)^{-1}, & \Delta = 0.75 \end{cases}$$

donde los valores de $c(\Delta)$ se determinan de acuerdo al tipo de ventana $w_s[n]$ empleada en la estimación espectral [30].

5.2.3. Ventanas de estimación espectral

La multiplicación de los valores discretizados de la señal aleatoria $x[n]$ por la función ventana, $w_s[n]$, de acuerdo la Tabla 3.1, corresponde a la convolución en frecuencia de los respectivos espectros. Entre las principales propiedades y características de las funciones ventana, empleadas en la estimación espectral, están las siguientes:

1. Simetría

$$w[n] = w[N - n] \quad n = 1, \dots, N - 1$$

2. Ancho de banda equivalente de ruido, que se determina como

$$\Delta f_R(N) = \frac{N \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right]^2}$$

a menor valor de Δf_R , menor es la potencia del ruido, y por lo tanto, menor distorsión que se puede causar sobre el proceso en análisis.

Ejemplo 5.4. Hallar el ancho de banda equivalente de ruido por la ventana triangular, cuando $N = 2K$, asumiendo que $w[0] = 0$.

La ventana triangular se determina como

$$w[n] = \begin{cases} n/K, & n = 1, \dots, K \\ (2K - n)/K, & n = K + 1, \dots, 2K - 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\Delta f_R(N) = 2(2K^2 + 1)/(3K^2)$$

En la práctica, $N \gg 1$, luego en lugar de $\Delta f_R(N)$ se emplea su valor asintótico, cuando $N \rightarrow \infty$

$$\Delta f_R = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta f_R(N)$$

En el caso de la ventana triangular $\Delta f_R = 1.33$.

3. Ancho de banda del lóbulo principal $\Delta f_{LP}(N, g)$ de la magnitud del espectro, que típicamente se determina para un nivel fijo de atenuación g , dado en dB , con relación al valor máximo del módulo espectral

$$\Delta f_{LP}(N, g) = \gamma(N)N/\pi$$

donde $\gamma(N)$ es la menor de todas las raíces por módulo absoluto, de la ecuación

$$|W(N)| = \frac{\max |W(N)|}{10^{g/20}}$$

En la práctica, es usual el empleo del valor asintótico, dado el nivel g , para el ancho de banda del lóbulo principal

$$\Delta f_{LP}(g) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\gamma(N)N/\pi)$$

Se considera que el valor $\Delta f_{LP}(g)$ caracteriza la resolución del algoritmo de la TRF, para una función ventana dada, en particular, se asume que [42]

$$\kappa_o = \Delta f_{LP}(g)$$

4. Ganancia coherente

$$G_c(N) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w[n]}{\max |W(N)|}$$

con valor asintótico $G_c = \lim_{N \rightarrow \infty} G_c(N)$, que corresponde a la amplificación relativa del armónico de una señal, cuya frecuencia coincide con una de las frecuencias del conjunto base de la TRF.

5. Máximo nivel de cualquiera de los lóbulos laterales, m_{LL} , obtenido para el método de TRF de la función ventana, medido en dB con relación al valor máximo del lóbulo principal. En este sentido, también se considera la velocidad de caída v_{LL} de los lóbulos laterales, medida en dB por octava (o década), que muestra qué tan rápido decrece la energía contenida en los lóbulos laterales. A mayor velocidad de caída, menor pérdida espectral presenta la función ventana.
6. Modulación de amplitud parásita, a_P , que caracteriza la amplitud relativa del armónico de la señal, después de su proceso mediante la función ventana y cálculo de la TRF, en el peor de los casos, cuando la frecuencia de la señal se encuentra exactamente en la mitad de un par de frecuencias base de la TRF.

El valor a_P se mide en dB y se define como

$$a_P = 20 \log |W(\omega)| / \max(W(\omega))$$

Los siguientes factores confluyen en la elección del tipo de función ventana:

- aplicación concreta del proceso de señales

- exigencias de costo computacional (recursos de proceso y tiempo de cómputo) en la solución de la aplicación

Ejemplo 5.5. Sea la sucesión

$$x[n] = \sum_k a_k \sin(2\pi nk/N + \phi_k), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.37)$$

donde a_k y ϕ_k son los valores desconocidos para la amplitud y fase de los armónicos, respectivamente, los cuales coinciden en la frecuencia base de la TRF.

En este caso, el cálculo de a_k y ϕ_k se puede realizar, simplemente empleando la función ventana rectangular. En particular, de (5.33) se tiene que

$$a_k = |X[k]|, \quad \phi_k = \arg(X[k])$$

Sin necesidad de recurrir al procedimiento de promedio, (5.36), en la medida en que no hay incertidumbre de medida.

Si en la expresión (5.37), asumiendo que se tiene un solo armónico, se agrega la perturbación $\{r[n]\}$, en forma de ruido blanco gaussiano, entonces la estimación de los valores de a_k y ϕ_k es necesario procesar la sucesión inicial con una función ventana, que provea el menor valor de Δf_R , por ejemplo, la ventana rectangular, y luego, se realiza el procedimiento de promediado (5.36).

Ejemplo 5.6. Sea la sucesión

$$x[n] = a_1 \sin(n\omega_1 + \phi_1) + a_2 \sin(n\omega_2 + \phi_2) \quad (5.38)$$

donde $\omega_{11} \leq \omega_1 \leq \omega_{12}$, $\omega_{21} \leq \omega_2 \leq \omega_{22}$, siendo ω_{ij} , las frecuencias base dadas inicialmente de la TRF. Hallar los valores de ω_1 , ω_2 , a_1 y a_2 , conocido que $a_1 \approx a_2$.

En este caso, el preproceso de la sucesión inicial se puede realizar mediante la función ventana rectangular. Asumiendo en (5.32) $\Delta f = (\omega_{21} - \omega_{12})/2\pi$ y $\kappa_o = \Delta_{LP}(g)$, entonces se puede determinar el intervalo de observación T , con lo que conocido el intervalo de discretización Δt , se puede hallar la longitud N_i de observación.

Sin embargo, el cálculo del espectro en correspondencia con (5.33) y (5.34), para $k = 0, \dots, N-1$, puede tener lugar una indeterminación que haga imposible calcular cada armónico debido a la presencia de varios valores iguales de $S(k)$.

La forma directa para disminuir esta incertidumbre consisten en aumentar la longitud de la sucesión inicial agregando $N(2^m - 1)$ ceros, con lo cual el espectro $X[k]$ se calcula por la expresión (5.35). Inicialmente se prueba con $m = 1$. En caso de que la incertidumbre no permite aún el cálculo confiable de los armónicos, se aumenta sucesivamente $m = 2, 3, \dots$ hasta que se obtenga un valor adecuado del armónico.

Debido a que la sucesión inicial se considera que no está perturbada, entonces, no hay necesidad de la operación de promedio (5.36).

Problemas

Problema 5.5. Demostrar que la estimación de Bartlett para la densidad espectral de potencia no presenta sesgo.

Problema 5.6. Demostrar que la función $k(\nu)$ de la estimación de Tukey-Hamming para la densidad espectral de potencia es cuadrado integrable.

Problema 5.7. Demostrar que $E\{\tilde{S}_x[k]\} = \frac{1}{2\pi} S_x[k] * W_B[k]$.

Problema 5.8. Repetir el ejemplo 5.2 para la señal $x[n] = 2 \sin(0.4\pi n) + 2 \cos(4.5\pi n + 0.5) + w[n]$, con ruido blanco gaussiano con media 0 y varianza 0.2.

Problema 5.9. Demostrar que $\tilde{S}_{x_{BT}}[k] = \frac{1}{2\pi} s_x[k] * W[k]$.

Problema 5.10. Considérese una sucesión aleatoria de longitud N , la cual ha de ser dividida en K segmentos, cada uno con $M = N/K$ puntos. Si se conoce que la DEP tiene dos picos separados a una distancia de $2[\text{rad/s}]$, cual debe ser el mínimo valor de M para poder detectar correctamente la presencia de ambos picos?

Problema 5.11. Sea la sucesión aleatoria, cuya función de correlación propia se da por la expresión $R[k] = 0.8^{|k|}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si se emplean 10 valores discretos para estimar la función de correlación, mediante el correlogramas (5.30). Hallar el sesgo de la estimación para todo los k .

5.3. Estimación espectral paramétrica

En los métodos paramétricos, la señal aleatoria medida se analiza como la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo, al cual se aplica una entrada con características de aleatoriedad definidas a priori. En la práctica, el modelo más usado corresponde al excitado por ruido blanco gaussiano y que presenta función de transferencia racional. Los procesos de salida de los modelos de esta clase tienen DEP que se describe completamente, mediante los coeficientes de la respectiva función de transferencia y la varianza del ruido blanco de entrada.

En esencia, los métodos paramétricos incluyen la información sobre los procesos analizados, que tiene en cuenta sus propiedades y su naturaleza interna; información que se desprecia en los métodos no paramétricos. Como resultado, los métodos paramétricos permiten obtener estimaciones con mayor precisión y mayor resolución.

La estimación espectral paramétrica consta de tres etapas:

1. Selección del modelo paramétrico de la señal aleatoria analizada
2. Estimación de los parámetros del modelo seleccionado de la señal aleatoria de acuerdo a las trayectorias conocidas
3. Cálculo de la DEP mediante la sustitución en el modelo teórico, de los parámetros estimados

5.3.1. Reacción de un sistema lineal a una señal estacionaria

Sea $x[n]$ la señal de entrada una sucesión estacionaria con valor medio igual a cero, entonces $y[n]$ representa la salida del sistema lineal e invariante en el tiempo, la cual también es estacionaria y se describe matemáticamente como

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$$

La función de correlación propia de la respuesta se determina mediante la convolución [41]:

$$r_y[m] = r_x[m] * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k+m]h^*[k] \right)$$

que empleando la transformada \mathcal{Z} se obtiene

$$S_y(z) = S_x H(z) H^*(1/z^*) \quad (5.39)$$

donde $S_x(z) = \mathcal{Z}\{r_x[m]\}$, $S_y(z) = \mathcal{Z}\{r_y[m]\}$, $H(z) = \mathcal{Z}\{h[m]\}$.

Sea la señal de entrada ruido blanco gaussiano, con valor medio igual a cero y potencia σ_η^2 , tal que

$$S_x(z) = \mathcal{Z}\{\sigma_\eta^2 \delta[m]\} = \sigma_\eta^2$$

entonces, la salida y la entrada del respectivo sistema lineal e invariante en el tiempo tiene la forma:

$$S_y(z) = \sigma_\eta^2 H(z) H^*(1/z^*)$$

La última ecuación muestra la relación de proporcionalidad que hay entre la función de transferencia del filtro del modelo y la señal aleatoria analizada.

5.3.2. Modelos paramétricos de señales aleatorias

La descripción paramétrica de las estadísticas de segundo orden también aplica a las sucesiones de discretización de las señales aleatorias. En este sentido, el modelo es adecuado para la aproximación de señales aleatorias discretas. Se describe mediante la señal de salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo, expresada por la ecuación de diferencias en coeficientes complejos

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^q b_k u[n-k] \quad (5.40a)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (5.40b)$$

donde $u[n]$ es la sucesión de excitación o la entrada del sistema, $x[n]$ es la sucesión a la salida del filtro causal ($h[k] = 0, \forall k < 0$), el cual conforma los datos observados. Se asume que el sistema lineal tiene función de transferencia racional

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

en la cual los polinomios se determinan como

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$$

$$B(z) = 1 + \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}, \quad b_0 = 1$$

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^{-k}$$

Se asume además que los ceros de los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ se encuentran ubicados dentro del círculo unitario de convergencia del plano \mathcal{Z} , con el fin de garantizar la estabilidad del filtro.

En concordancia con (5.39) los espectros de entrada y salida en un sistema lineal e invariante en el tiempo se relacionan como:

$$S_x(z) = S_u(z) H(z) H^*(1/z^*) = S_u(z) \frac{B(z) B^*(1/z^*)}{A(z) A^*(1/z^*)} \quad (5.41)$$

La sucesión de entrada $u[n]$, usualmente, no es observable, y por lo tanto, no se puede emplear en el análisis espectral. Los modelos paramétricos, como se muestra en la Figura 5.4 emplean en calidad de señal de excitación una sucesión de ruido blanco gaussiano con valor medio cero y varianza σ^2 , entonces, $S_u(z) = \sigma^2$.

En general, las propiedades de la señal aleatoria modelada, dependen de la estructura y valores de los parámetros del filtro formante, además de las propiedades de la señal de entrada.

En caso de ser necesario, el modelado de datos de medición en formas de una mezcla aditiva del modelo paramétrico más alguna perturbación $\eta[n]$, entonces, la perturbación se agrega a la salida del filtro formante, como se muestra en la Figura 5.4.

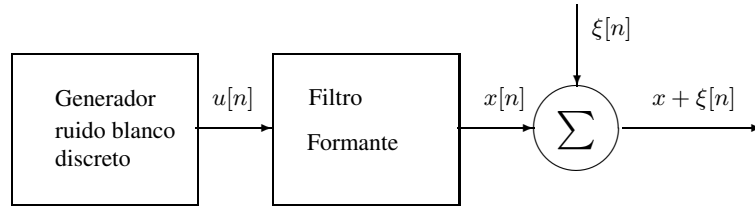


Figura 5.4. Diagrama de formación de un modelo paramétrico de un proceso aleatorio

En la estimación de la DEP, se emplean modelos excitados por ruido blanco gaussiano los cuales se clasifican en tres clases

1. modelos de procesos autorregresivos (AR)
2. modelos de procesos de media deslizante (MA)
3. modelos de procesos autorregresivos y media deslizante (ARMA)

Las diferentes clases, que se muestran en la Tabla 5.3, se diferencian por el tipo de función de transferencia discreta del filtro formante, y en consecuencia, por el tipo de ecuación lineal de diferencia que describe la sucesión de salida aleatoria.

<i>Modelo paramétrico</i>	<i>Ecuación iterativa</i>	<i>Función de transferencia</i>
AR	$x[n] = - \sum_{k=1}^p x[n-k] + u[n]$	$\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$
MA	$x[n] = u[n] + \sum_{k=1}^q b_k u[n-k]$	$1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}$
ARMA	$x[n] = \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + u[n] + \sum_{k=1}^q b_k u[n-k]$	$\frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$

Tabla 5.3. Características de los modelos paramétricos

Modelos ARMA. Se describen por la ecuación de diferencias generalizada (5.40a), en la cual como se observa de la Tabla 5.3, se tienen polos y ceros. La DEP para un modelo ARMA se obtiene al sustituir en (5.41), $z = e^{j\Omega}$:

$$S(\Omega) = \sigma^2 \left| \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)} \right|^2 = \frac{\sigma^2 \mathbf{e}_q^H(\Omega) \mathbf{b} \mathbf{b}^H \mathbf{e}_q^H(\Omega)}{\mathbf{e}_p^H(\Omega) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}_p^H(\Omega)} \quad (5.42)$$

donde los vectores columna de los exponentes complejos \mathbf{e}_p y \mathbf{e}_q , mas los coeficientes \mathbf{a} y \mathbf{b} son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p^T &= (1, e^{j\Omega}, \dots, e^{jp\Omega}), & \mathbf{e}_q^T &= (1, e^{j\Omega}, \dots, e^{jq\Omega}) \\ \mathbf{a}^T &= (1, a, \dots, a_p), & \mathbf{b}^T &= (1, b, \dots, b_q) \end{aligned}$$

Cabe anotar que la DEP se calcula en el rango de las frecuencias normalizadas $\Omega \in [-\pi, \pi]$.

De la expresión (5.42), es claro que el modelo ARMA se caracteriza por los parámetros a , b y la varianza del ruido blanco σ^2 .

Modelo MA. De acuerdo con la función de transferencia mostrada en la Tabla 5.3, la respuesta a impulso en este caso es

$$x[k] = \begin{cases} b_k, & k = 0, 1, \dots, q; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que tiene longitud finita y, por lo tanto, en concordancia con la expresión (3.62), los filtros formantes de los modelos MA pertenecen a la clase de los no recursivos. La DEP del proceso se calcula haciendo en (5.42) $p = 0$, de acuerdo a la expresión:

$$S(\Omega) = \sigma^2 |B(\Omega)|^2 = \sigma^2 \mathbf{e}_q^H(\Omega) \mathbf{b} \mathbf{b}^H \mathbf{e}_q(\Omega)$$

Modelo AR. De la Tabla 5.3, se observa que la respectiva función de transferencia no tiene ceros ($q = 0$), y presenta solamente polos (todo polos), los cuales tienen respuesta a impulso con longitud infinita, estos pertenecen a la clase de los recursivos. La densidad espectral de potencia de un proceso AR, haciendo $q = 0$ resulta en

$$S(\Omega) = \frac{\sigma^2}{|A(\Omega)|^2} = \frac{\sigma^2}{\mathbf{e}_p^H(\Omega) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}_p(\Omega)}$$

5.3.3. Estimación de los parámetros a partir de la función de correlación

Sea conocida la función de correlación propia de la sucesión aleatoria en análisis. Entonces, al multiplicar ambas partes de la ecuación (5.40a) por el factor $x^*[n-m]$ y calculando la esperanza matemática se obtiene

$$\mathcal{E}\{x[n]x^*[n-k]\} = - \sum_{l=1}^p a_l \mathcal{E}\{x[n-l]x^*[n-k]\} + \sum_{l=0}^q b_l \mathcal{E}\{u[n-l]x^*[n-k]\}$$

que en términos de la función de correlación se escribe como

$$r_x[k] = - \sum_{l=1}^p a_l r_x[k-l] + \sum_{l=0}^q b_l r_{ux}[k-l]$$

la función de correlación mutua $r_{ux}[k]$ entre las secuencias de entrada y salida se pueden expresar mediante los parámetros de la respuesta impulso $h[m]$:

$$\begin{aligned} r_{ux}[k] &= \mathcal{E}\{u[n+k]x^*[n]\} = \mathcal{E}\left\{u[n+k]u^*[n] + \sum_{m=1}^{\infty} h^*[m]u^*[n-m]\right\} \\ &= r_u[k] + \sum_{m=1}^{\infty} h^*[m]r_u[k+m] \end{aligned}$$

por cuanto $u[n]$ es una sucesión de ruido blanco gaussiano con varianza σ^2 , entonces,

$$r_{ux}[k] = \begin{cases} 0, & k > 0; \\ \sigma^2, & k = 0; \\ \sigma^2 h^*[-k], & k < 0. \end{cases}$$

De lo cual se obtiene la expresión que relaciona los coeficientes del modelo ARMA con la función de correlación propia de la señal discretizada aleatoria $x[n]$

$$r_x[k] = \begin{cases} r_x[-k], & k < 0; \\ -\sum_{l=1}^p a_l r_x[k-l] + \sigma^2 \sum_{l=k}^q b_l h^*[l-k], & 0 \leq k \leq q; \\ -\sum_{l=1}^p a_l r_x[k-l], & k > q. \end{cases} \quad (5.43)$$

donde $h[0] = 1$, por definición, además con el fin de cumplir la condición de causalidad, el filtro debe tener respuesta a impulso $h[k] = 0, \forall k < 0$.

Cabe anotar que la relación en los parámetros del modelo ARMA y la función de correlación es no lineal, en particular, el sistema de ecuaciones (5.43) es no lineal, debido a la presencia del término $\sum_{l=k}^q b_l h^*[l-k]$. Sin embargo, cuando el modelo paramétrico es del tipo AR, el modelo tiene carácter lineal. Así, asumiendo en (5.43) $b_l = \delta[l]$, entonces se obtiene

$$r_x[k] = -\sum_{l=1}^p a_l r_x[k-l] + \sigma^2 h^*[-k], \quad 0 \leq k \leq q$$

Debido a que $h^*[-k] = 0, \forall k > 0$, $h^*[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$, entonces de (5.43) se tiene que

$$r_x[k] = \begin{cases} -\sum_{l=1}^p a_l r_x[k-l], & k > 0; \\ -\sum_{l=1}^p a_l r_x[-l] + \sigma^2, & k = 0; \\ r_x^*[-k], & k < q. \end{cases} \quad (5.44)$$

Las expresiones (5.44) corresponden a las ecuaciones normales de Yule–Walker para un proceso AR [43]. Estas ecuaciones, en general, caracterizan la relación no lineal entre los parámetros del proceso AR y la función de correlación propia de la señal aleatoria analizada. Sin embargo, conocida la función de correlación propia se pueden determinar los parámetros del modelo AR al resolver un sistema de ecuaciones lineales lo cual se puede observar al plantear (5.44) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[-1] & \cdots & r_x[-(p-1)] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_x[-(p-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x[p-1] & r_x[p-2] & \cdots & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x[1] \\ r_x[2] \\ \vdots \\ r_x[p] \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

De esta manera, conocida la sucesión de valores $r_x[k]$, $-p \leq k \leq p$, para la función de correlación propia, entonces los parámetros del modelo AR se pueden hallar como la solución del sistema de

ecuaciones lineales (5.45). Cabe anotar que la matriz de función de correlación en (5.45) es Toeplitz y Hermitiana, debido a $r_x[-k] = r_x^*[k]$, por lo que la obtención de los valores $\sigma^2, a_1, a_2, \dots, a_p$ se puede hacer empleando el algoritmo de Levinson-Durbin [43].

En cuanto a la relación de los valores entre la función de correlación propia y los parámetros del modelo MA, este se puede obtener de (5.43) asumiendo $p = 0$ y teniendo en cuenta que para los sistemas no recursivos se cumple que $h[k] = b_k, \forall 1 \leq k \leq q$, entonces,

$$r_x[k] = \begin{cases} 0, & k > q; \\ \sigma^2 \sum_{l=k}^q b_l b_{l-k}^*, & 0 \leq k \leq q \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

Luego, la relación entre los parámetros MA y la función de correlación tiene carácter no lineal, condicionado por la convolución en (5.46). Otra forma de estimar los parámetros del modelo AR, consiste en hallar directamente la solución del sistema de ecuaciones lineales, que se obtiene de la relación (5.43) para los p valores del índice k , ubicados en el intervalo $q \leq k \leq q + p - 1$. Los valores de los parámetros AR se encuentran de la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} r_x[q] & r_x[q-1] & \cdots & r_x[q-p+1] \\ r_x[q+1] & r_x[q] & \cdots & r_x[q-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x[q+p-1] & r_x[q+p-2] & \cdots & r_x[q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x[1] \\ r_x[2] \\ \vdots \\ r_x[p] \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

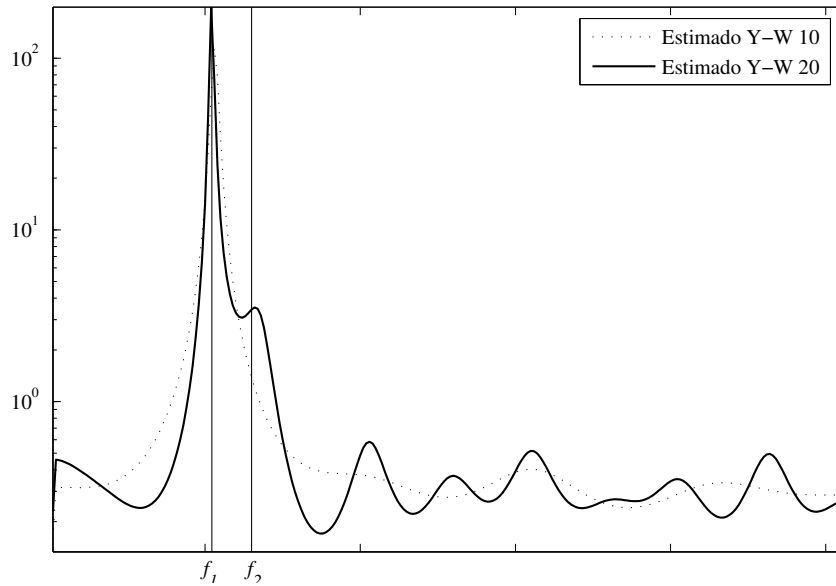


Figura 5.5. Ejemplo 5.2 calculado mediante el sistema modificado de Yule–Walker

El sistema (5.47) se denomina sistema de *ecuaciones normales de Yule–Walker* para modelos AR-MA o *sistema modificado de Yule–Walker*. En la Figura 5.5, se muestra el ejemplo 5.2, calculado mediante el sistema modificado de Yule–Walker para diferentes órdenes del modelo.

Problemas

Problema 5.12. Demostrar la igualdad de la ecuación (5.42).

Problema 5.13. Implementar el algoritmo de Levinson-Durbin para las ecuaciones normales de Yule-Walker para un proceso AR.

Problema 5.14. Determinar la media y la autocorrelación de la secuencia $x[n]$, que es salida de un proceso MA descrito por la ecuación en diferencias

$$x[n] = w[n] - 2w[n-1] + w[n-2]$$

donde $w[n]$ es un proceso de ruido blanco gaussiano con varianza σ_w^2 .

Problema 5.15. Considerar un proceso MA descrito por la ecuación en diferencias

$$x[n] = w[n] + 0.81w[n-2]$$

donde $w[n]$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_w^2 . Determinar los parámetros de los modelos AR de órdenes $p = 2, 4, 8$.

Problema 5.16. Hallar el correlograma y la DEP de la estimación del valor medio de longitud q :

$$x[n] = \frac{1}{q} (u[n] + u[n-1] \cdots + u[n-q+1])$$

Problema 5.17. Hallar la DEP, expresada mediante la respectiva función de correlación propia, para los procesos generados mediante un filtro formante con las siguientes funciones de transferencia

$$(a). H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}. \quad (b). H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}.$$

Problema 5.18. Hallar el valor medio de la sucesión aleatoria descrita por la siguiente ecuación de diferencias:

$$x[n] = \alpha x[n-1] + u[n], \quad n \geq 0, \quad x[-1] = 0$$

donde $u[n]$ es ruido blanco gaussiano discreto con media m_u y función de correlación $r_u = \sigma_u^2 \delta[k]$

Apéndice A

Algoritmos de análisis espectral de Fourier

El criterio básico de optimización de los algoritmos analizados será el tiempo de cálculo. En general, se pueden obtener soluciones dependientes del hardware empleado. Por este motivo, las características específicas del hardware tienen que ser tenidas en cuenta cuando se evalúa algún algoritmo de implementación sobre procesadores digitales. Los parámetros como el número de operaciones de multiplicación y adiciones, complejidad de indexación, empleo de registros de memoria y el tiempo de realización de operaciones condicionales deben ser también analizados.

A efectos de ilustrar los algoritmos desarrollados en este capítulo, se brinda el diagrama de flujo de cálculo y la implementación de sus subrutinas en `Matlab`.

A.1. Algoritmos de la transformada discreta de Fourier

A.1.1. Cálculo numérico de la transformada de Fourier

El espectro de una función $x(t)$ corresponde al conjunto los coeficientes a_k y b_k que conforman la serie trigonométrica de Fourier (1.34), los cuales pueden ser calculados numéricamente, a partir de la aproximación del respectivo integral (1.61), que en forma trigonométrica se expresa como:

$$\begin{aligned} a_n &\approx \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K x(k\Delta t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} k\Delta t\right) \Delta t \\ &\approx \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K x(k\Delta t) \cos\left(2n\pi \frac{k}{K}\right), \forall n \neq 0, \end{aligned}$$

en el caso de $n = 0$ se tiene $a_0 \approx \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K x(k\Delta t)$, donde $\Delta t = T/K$, siendo $\omega_0 = 2\pi/T$. El parámetro k corresponde al tiempo, mientras n al eje de las frecuencias.

De la misma forma se puede obtener para b_n :

$$b_n \approx \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K x(k\Delta t) \sin\left(2n\pi \frac{k}{K}\right)$$

siendo $n \geq K$, teniendo en cuenta la condición del error de transposición de frecuencias.

La forma alterna de la serie compleja de Fourier dada en las expresiones de (1.36) puede ser empleada y se describe como:

$$x(t) = a_0 \sum_{k=1}^K M_k \cos(2\pi k t_o + \varphi_k)$$

donde

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (\text{A.1a})$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (\text{A.1b})$$

El valor de M_k corresponde al módulo (1.37a) y φ_k a la fase (1.37b) de los armónicos.

El análisis espectral de las funciones aperiódicas (finitas), esto es, de las funciones completamente determinadas en el intervalo $[0, t_0]$ consiste en el cálculo de las componentes de su densidad espectral, que en forma general puede ser compleja:

$$X(j\omega) = X_c(j\omega) + jX_s(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

siendo $M(\omega)$ y $\varphi(\omega)$ respectivamente el módulo y la fase del sistema, donde:

$$X_c(\omega) = \int_0^{t_0} x(t) \cos(2\pi f_0 t) dt \quad (\text{A.2a})$$

$$X_s(\omega) = \int_0^{t_0} x(t) \sin(2\pi f_0 t) dt \quad (\text{A.2b})$$

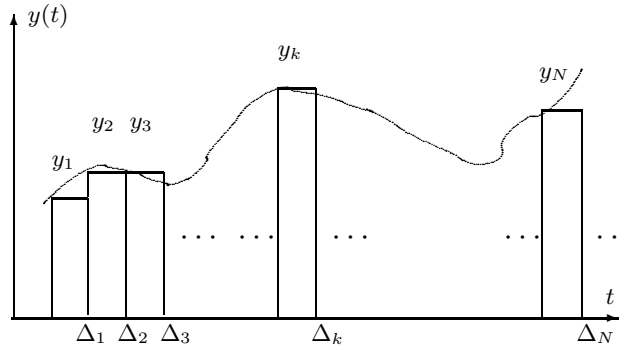


Figura A.1. Señal discretizada

El algoritmo del análisis espectral numérico consiste en encontrar los coeficientes a_k y b_k (ó M_k y φ_k en (A.1a) y (A.1b)), donde $k = 1, \dots, K$, para la función periódica $y(t)$ dada en el intervalo $[0, T]$ a partir de un conjunto de valores discretos dados como se muestra en la Figura A.1. Esto es equivalente al cálculo de los integrales de a_k y b_k con métodos de cálculo numérico (por ejemplo, por el método de Simpson):

$$a_k = \frac{2}{K} \sum_{i=1}^{K-1} x_i \cos(2\pi k f_0 i \Delta t)$$

$$b_k = \frac{2}{K} \sum_{i=1}^{K-1} x_i \sin(2\pi k f_0 i \Delta t)$$

donde $\Delta t = T/K$ es el paso de integración correspondiente a la disposición de la señal discretizada.

En caso de tener funciones finitas, entonces para (A.2a) y (A.2b) se tiene la siguiente aproximación:

$$X_c = \Delta t \sum_{i=0}^{K-1} x_i \cos(2\pi f i \Delta t) \quad (\text{A.3a})$$

$$X_s = \Delta t \sum_{i=0}^{K-1} x_i \sin(2\pi f i \Delta t) \quad (\text{A.3b})$$

Análisis numérico generalizado del espectro. Se basa en la relación que puede establecerse entre las funciones periódicas y las funciones finitas. Para esto suponiendo que $t_0 = T$ y haciendo $f = k f_0$ (en las funciones finitas $f \in \mathbb{R}$, mientras para las funciones periódicas se limita el dominio de $k \in \mathbb{Z}$) a partir de (A.3a)-(A.3b) se obtiene:

$$A_{k0} = \frac{X_c}{\Delta t} = \frac{a_k K}{2} = \sum_{i=1}^{K-1} x_i \cos(2\pi i f \Delta t) \quad (\text{A.4a})$$

$$B_{k0} = \frac{X_s}{\Delta t} = \frac{b_k K}{2} = \sum_{i=1}^{K-1} x_i \sin(2\pi i f \Delta t) \quad (\text{A.4b})$$

El análisis espectral con precisión mejorada está basado en la representación a priori de $x(t)$ en los intervalos entre los nodos. Si esta representación es imposible de obtener, se pueden utilizar las fórmulas (A.4a) y (A.4b), que dan el menor error medio cuadrático. Si se toma $x(t) = \text{const.}$ en los intervalos entre los valores discretizados, entonces se puede obtener para A_k y B_k los valores con precisión mejorada:

$$A_{K1} = K_f A_{k0}, B_{K1} = K_f B_{k0} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$K_f = \begin{cases} \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = \text{sinc}(\pi f \Delta t), & \forall f \neq 0 \\ 1, & f = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Las expresiones en (A.5), teniendo en cuenta el coeficiente K_f de (A.6), se obtienen como resultado de la integración de (A.1a) y (A.1b). Si en los intervalos entre los nodos la función $x(t)$ se aproxima linealmente, entonces, los valores obtenidos de A y B serán:

$$A_{k2} = K_f^2 A_{k0} \quad (\text{A.7a})$$

$$B_{k2} = K_f^2 B_{k0} \quad (\text{A.7b})$$

El análisis espectral secuencial se cumple de acuerdo al siguiente algoritmo:

1. Se introduce la cantidad N de intervalos de división de $x(t)$, los valores $N1$ de la primera muestra diferente de cero y M de la última muestra de la señal $x(t)$ diferente de cero.
2. Se organiza un ciclo de entrada de todos los valores discretizados de la señal x_i donde $i = N1, \dots, M$. El empleo de valores discretos diferentes de cero permite disminuir el tiempo de

cálculo, si la función tomar el valor $x(T) = 0$ en el punto inicial o final del intervalo $[0, T]$ ó $[0, t_0]$. Sin embargo, los discretos $x_i = 0$ cuando $N1 \leq i \leq M$ deberán ser introducidos.

3. Se introduce el paso Δt .
4. A las variables C y S se le asigna un valor de cero, luego, se asigna un valor a f , para encontrar $p = \pi f \Delta t$.
5. Se halla A_0 y B_0 por medio de un ciclo en el cual se calculan

$$C = C + x_i \cos(2ip), \quad S = S + x_i \sin(2ip)$$

donde $i = N1, N1 + 1, \dots, M$, a la salida del ciclo $A_0 = C$ y $B_0 = S$.

6. Para el valor dado de f se encuentran los parámetros necesarios $a_k, b_k, M_k, j_k, X_C, X_S$ ó X y φ . Por ejemplo, para el cálculo de X y φ se pueden emplear las siguientes expresiones:

$$\frac{X}{\Delta t} = M = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}, \quad \phi = -Q = \arccos\left(\frac{A_0}{K}\right) [rad]$$

para $B_0 > 0$, y $f = Q[rad]$, para $B_0 < 0$. Con las expresiones (A.6) y (A.7b) pueden calcularse los valores de $A_1, B_1, S_1 = K_f S$ y $A_2, B_2, S_2 = K_f^2 S$ para el caso de la aproximación por segmentos lineales.

7. Se retorna al punto 4 para repetir los cálculos de un nuevo valor de frecuencia f .

De esta manera, el cálculo secuencial del espectro permite encontrar la frecuencia y fase de cualquier armónico. En este caso es necesario almacenar en memoria todos los valores de la señal discretizada $x(t)$ con su respectiva malla de valores de tiempo. El programa del método secuencial de cálculo numérico del espectro es el siguiente:

Algoritmo A.1. Analisis espectral secuencial

```

N=input('introducir cantidad de intervalos de division: ')
N1=input('introducir el numero de la primera muestra: ')
M=input('introducir el numero de la ultima muestra diferente de cero: ')
X= [zeros(1,M)];
for i=N1:M
    X(i)=input('introducir la muestra: ')
end
t=input('introducir el paso: ') f=1;
f=input('introduzca la frecuencia:')
while f > 0
    C=0; S=0;
    p=pi*t*f; w=2*p;
    end
    for i = N1:M
        Z = w * i; C = C + X(i) * cos(Z);
        S = S + X(i) * sin(Z);
    end
    R = power(C * C + S * S,0.5);
    f =-abs(C / R)-pi * t * f; if S < 0
        f = -f;
    k = sin(p) / p; R1 = k * R; R2 = k * R1;
    disp('en caso muestras equidistantes s(f)= '), R * t;
    disp('en caso de aproximacion rectangular '), R1 * t;
    disp('en caso de aproximacion lineal quebrada '), R2 * t;
    disp('fase [rad]'), f;
end

```

Ejercicio en el CP A.1. (control). Encontrar la función densidad espectral del pulso cuadrado dado por los valores $x_i = 1, i = 0, \dots, 7$ y $x_i = 0$, cuando $i = 8, \dots, 31$ para $\Delta t = 0.12510^{-6}s$, y valor de la frecuencia $f = 250000Hz$.

Se introducen los valores ($N1 = 0, M = 7$) y se obtiene

$S_0 = 9.0176419510E - 7, S_1 = 9.00316316210E - 7, S_2 = 8.9887076210E - 7, f = -39.375$.

Aunque, hoy en día, la capacidad de memoria de los CP aumenta notablemente, de todas maneras, la cantidad de valores discretos a procesar puede llegar al orden de unos cientos y hasta unidades de miles. Sin embargo, al aumentar significativamente su número, el tiempo de cálculo hace que prácticamente no tenga sentido utilizar el algoritmo A.1, cuando la cantidad de discretos excede las decenas.

Método paralelo de análisis espectral. Consiste en el cálculo simultáneo (paralelo) de los M armónicos. En este caso, es necesario introducir al CP los coeficientes a_i y b_i (ó A_i y B_i , respectivamente). Sin embargo, no es necesario almacenar todos los valores de la señal discretizada x_i , por cuanto cada muestra se emplea para el cálculo de todos los armónicos a medida que este se vaya introduciendo. El método paralelo de análisis espectral se realiza de acuerdo al siguiente algoritmo:

1. Se introduce la cantidad necesaria de armónicos M , el número del armónico inicial kS , la cantidad total N de valores discretos de $x(t)$ y el número del primer, IS , y último, IF , discretos con valores diferentes a cero.
2. Todos los elementos de los arreglos $A(k)$ y $B(k)$ se igualan a cero y se calcula $R = 2B/N$.
3. Se organiza el ciclo de introducción de $x_i = X$ con la variable iterativa I , que cambia con un paso unitario desde el valor de IS hasta IF . En este ciclo, se introduce x_i , se calcula $Z = RI$ y se realiza el siguiente ciclo interno.
4. Se organiza un ciclo de cálculo de A_i y B_i con la variable iterativa k , la cual cambia con un paso dado igual a 1, desde 0 hasta $M - 1$. Al principio del ciclo se calcula $W = Z(k + S)$, donde $S = IS$ y, luego:

$$A(K) = A(K) + X * \cos(W) \quad B(K) = B(K) + X * \sin(W)$$

Los valores de A_k corresponden a las variable de los arreglos $A(k)$, mientras B_k a los de $B(k)$ después de la salida de los ciclos. Para el armónico número cero, se hace $k + S = 0$ y se calcula solamente A_0 sumando todos los x_i .

5. Se realiza el ciclo de salida de A_k, B_k, M_k y $\varphi_k = Q_k, k = 0, \dots, M - 1$ teniendo en cuenta el desplazamiento del índice en la cantidad S , o sea, de la salida en vez del índice k los valores $k + S$. A medida que se efectúa la salida de los valores se calcula

$$M2 = \sum_{i=k+S}^{M+S} M_i^2$$

6. Si $M_1 = 0$, cuando los cálculos se comienzan desde el primer armónico, se halla el coeficiente de no linealidad con respecto al primer armónico:

$$K_A = \frac{\sqrt{M_2^2 + M_3^2 + \dots + M_M^2}}{M_1} = \frac{\sqrt{M2 - M_1^2}}{M_1}$$

7. Haciendo $S = 1$ se realiza la interpolación geométrica o extrapolación, o sea, por los valores dados de t calcular

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{2}{N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k \Delta t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f \Delta t) \right)$$

empleando la serie truncada de Fourier con M armónicos.

En caso de calcular, mediante este algoritmo, una nueva serie de armónicos, entonces, hay necesidad de repetir la entrada de los nuevos valores discretizados de x_i . Si la memoria del CP es suficiente, se puede prever la disposición en la memoria de x_i dentro del arreglo $X(i)$ que contenga solamente las muestras diferentes de cero ($y_i \neq 0$). En este caso, en el punto 3 se puede prever un ciclo adicional para la entrada del sucesión de entrada mediante el arreglo $X(i)$. Esta variante de realización correspondería al método secuencial-paralelo de análisis espectral. El programa correspondiente al método secuencial-paralelo de cálculo numérico del espectro es el siguiente:

Algoritmo A.2. Análisis secuencial-paralelo espectral

```
% interpolacion/extrapolacion trigonometrica
N = input('cantidad total de muestras N = ');
V = input('numero de muestras inicial IS = ');
G = input('numero de muestras final IF = ');
G = G-V; Y = zeros(1,G); A = zeros(1,N/2); B = zeros(1,N/2);
R = 2 * pi / N; for i =1:G
    i = i+V;
    X(i) = input('introduzca x = ');
end S = 0; d = 0; while d=1
    while S=1
        M = input('numero de componentes del espectro M = ');
        S = input('numero de la primera componente ks = ');
        f = input('frecuencia FO = ');
        a = 0; b = 0; c = 0;
        for k = 1:M
            A(k) = 0;
            B(k) = 0;
        end
        for i = 1:G
            a = a + X(i);
            Z(i) = R * (i + V);
            for k = 1:M
                w = Z(i) * (k + S - 1);
                A(k) = A(k) + X(i) * cos(w);
                B(k) = B(k) + X(i) * sin(w);
            end
        end
        m0 = a / N; s0 = m0 / f;
        disp('componente constante M0 = '), disp(m0)
        disp('densidad espectral en el punto cero S0 = '), disp(s0)
        for k = 1:M
            u = sqrt((A(k)*A(k))+(B(k)*B(k)));
            Q = -abs(A(k)/u);
            if B(k) < 0
                Q =-Q;
            end
            o = k + S - 1; b = b + u * u;
            if k + S == 2
                c = u;
            end
            am(k) = (u*2/N);
            de(k) = (u/N/f);
            q(k) = (Q);
        end
    end
end
```

```

disp('Amplitud M'), am
disp('Densidad espectral s'), de
disp('Desplazamiento de fase q'), q
end
S = 0;
disp('Coeficiente de armonicos kr'), disp(sqrt(b-c*c)/c)
d = input('1 - Calcular x(t), 0 - no hay necesidad')
end
t = input('tiempo T = '); x = 0; p = 2 * pi * t * f;
for k = 1:M
    w = p * k;
    x = x + A(k)*cos(w)+B(k)*sin(w);
end x = m0 + x*2/N
disp('valor de x(t) = '), disp(x)

```

Ejercicio en el CP A.2. (control): En el caso del ejemplo dado en el anterior programa, se toman los valores $x_i = 1, i = 0, \dots, 7$ y $x_i = 0, i = 8, \dots, 31$ para $\Delta t = 0.125 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ y $f = 250000 \text{ Hz}$, fijando $M = 5$ y $MS = 1$, con lo cual se obtiene:

$M0 = 0.25$	$S0 = 1.10E - 6$	$KR = 0.81369$
$M1 = 0.45088$	$S1 = 9.0176 \cdot 10E - 7$	$Q1 = -39.375$
$M2 = 0.32036$	$S2 = 6.40729 \cdot 10E - 7$	$Q2 = -78.75$
$M3 = 0.15224$	$S3 = 3.0449 \cdot 10E - 7$	$Q3 = -118.125$
$M4 = 2.23345 \cdot 10E - 12$	$S4 = 4.466892 \cdot 10E - 18$	
$M5 = 0.09375$	$S5 = 1.87503 \cdot 10E - 7$	$Q5 = -16.875$

En el programa A.2 se puede prever la entrada del valor de frecuencia de discretización $f_0 = F1$ para las señales periódicas, el cual determina la distancia entre las diferentes componentes espectrales $k f_0$.

A.1.2. Cálculo numérico de la TDF

Si la sucesión de datos de entrada dada $x[n]$ tiene longitud N , entonces, existirán máximo N términos en su TDF $X(k)$. Sin embargo, existen aplicaciones donde no todos los N valores de la TDF son necesarios, o bien, varios de sus valores son cero, por lo que se pueden no tener en cuenta. Para obtener un cálculo eficiente, los requerimientos al algoritmo deben ser muy concretos. Si el número completo de frecuencias es L , pero solamente M son requeridas y se tienen N datos de entrada diferentes de cero, entonces la TDF puede ser descrita como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{nk}, \quad W = e^{-j2\pi/2}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (\text{A.8})$$

De esta manera, el número de multiplicaciones complejas requeridas es igual a N^2 . En la mayoría de los casos $M = L$, pero hay situaciones donde $M < L$. En casos muy especiales, todos los tres valores son diferentes. En [2], se muestra que los algoritmos eficientes para $N = L = M$ no son generalmente, los más eficientes para el caso de $M \ll N$.

Cálculo directo de la TDF. Una forma obvia de calcular la TDF es directamente implementando su integral de definición, computando los valores deseados de $X(k)$ de acuerdo con la expresión (A.8). En el caso en que $x[n]$ sea complejo, se notan sus partes real $X[n]$ e imaginaria $Y[n]$, a las cuales les

corresponde la transformada con los respectivos términos $A[k]$ y $B[k]$, así:

$$x[n] = X[n] + jY[n] \quad (\text{A.9a})$$

$$X[K] = A[K] + jB[K] \quad (\text{A.9b})$$

donde X , Y , A y B son función de valor real y argumentos de variables enteras. Reemplazando (A.9b) en la suma (A.8) se obtiene

$$A[K] + jB[K] = \sum_{n=0}^{N-1} [X[n] + Y[n]] [\cos(Qnk) + j \sin(Qnk)] \quad (\text{A.10})$$

donde

$$A[K] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cos(Qnk) + Y[n] \sin(Qnk)$$

$$B[K] = \sum_{n=0}^{N-1} Y[n] \cos(Qnk) - X[n] \sin(Qnk)$$

mientras, $Q = 2B/N$, $0 < k < N - 1$.

El programa que implementa la expresión de la TDF en (A.10) es el siguiente:

Algoritmo A.3. Cálculo directo de TDF

```
N = input('Ingrese el valor de N = '); n=1:N;
harm = input('Ingrese el valor de armónicos = ');
dc = input('Ingrese el valor de dc = ');
Q=6.2832/N;
X(n)=sin(2*pi*harm*n/N)+dc; Y(1:N)=0; % X y Y son vectores de entrada
figure(1) subplot(3,2,1),stem(X),xlabel('Vector de entrada X');
subplot(3,2,2),stem(Y),xlabel('Vector de entrada Y');
% Procedimiento TDF
for k = 1:N
    A(k) = 0; B(k) = 0; % A y B son vectores de salida
    for j = 1:N
        A(k)=A(k)+X(j)*cos(Q*(j-1)*(k-1))\ldots
        +Y(j)*sin(Q*(j-1)*(k-1));
        B(k)=B(k)+Y(j)*cos(Q*(j-1)*(k-1))\ldots
        -X(j)*sin(Q*(j-1)*(k-1));
    end
    M(k)=sqrt(A(k)^2+B(k)^2); % Magnitud de la salida
    P(k)=atan(B(k)/A(k)); % Fase de la salida
end
% Representacion de datos de salida
subplot(3,2,5),stem(M),xlabel('Magnitud');
subplot(3,2,6),stem(P),xlabel('Fase');
AR=real(A);BR=real(B);
subplot(3,2,3),stem(AR),xlabel('Parte real de A');
subplot(3,2,4),stem(BR),xlabel('Parte real de B');
```

Ejercicio en el CP A.3. Realizar el programa anterior y comparar los tiempos de ejecución en el caso del algoritmo que implementa la expresión de la TDF en (A.10).

El cálculo de todos los N valores de A y B para las sucesiones complejas requiere de $4N^2$ multiplicaciones de punto flotante, $4N^2$ adiciones algebraicas de punto flotante y $4N^2$ operaciones con funciones trigonométricas, además, de numerosas multiplicaciones y adiciones con enteros. Un primer

paso para aumentar la velocidad de este algoritmo consiste en calcular por aparte los argumentos de las funciones trigonométricas y de los arreglos como muestra el siguiente procedimiento:

```
% Procedimiento TDF
for k=1:N
    W=Q*(k-1);
    AT=X(1);
    BT=Y(1);
    for J=2:N
        D=W*(J-1);
        C=cos(D);
        S=-sin(D);
        AT=AT+C*X(J)-S*Y(J);
        BT=BT+C*Y(J)+S*X(J);
    end
    A(k)=AT;B(k)=BT;
end
A,B % Arreglos de salida
```

Sin embargo, el procedimiento desarrollado sigue siendo ineficiente, por cuanto, en J se evalúan las funciones trigonométricas $2N^2$ cuando realmente se tienen solamente N diferentes valores. Una solución alterna consiste en formar una tabla de ayuda con los valores de las funciones trigonométricas, previamente calculadas, como se muestra a continuación (cuando se tiene solamente N diferentes valores):

```
% Procedimiento TDF - Tabla de ayuda
for K=1:N
    C(K)=cos(Q*(K-1));
    S(K)=-sin(Q*(K-1));
end for K=1:N
    AT=X(1);
    BT=Y(1);
    I=K;
    for J=2:N
        AT = AT + C(I) * X(J) - S(I) * Y(J);
        BT = BT + C(I) * Y(J) + S(I) * X(J);
        I=I+K-1;
        if I>N
            I=I-N; % Evaluacion del modulo N
        end
    end
    A(K)=AT;
    B(K)=BT;
    M(K)=sqrt(A(K)^2+B(K)^2);% Magnitud de la salida
    P(K)=atan(B(K)/A(K)); % Fase de la salida
end
```

En el anterior procedimiento, existe el problema de indexación con los argumentos de los senos y cosenos. Para utilizar una tabla de tamaño razonable y con poca redundancia el índice debe de ser evaluado por módulo N , lo cual se realiza en la operación condicional dentro del segundo ciclo interior, aumentando ligeramente el tiempo de cálculo del programa. Una siguiente reducción del tamaño de la tabla puede ser realizada, aunque a expensas de una mayor complicación de indexación.

Cuando la operación condicional consume, relativamente, mucho más tiempo que las operaciones matemáticas del ciclo, entonces, se puede mejorar la velocidad simplemente determinando concretamente las N operaciones incrementando así el código del programa, por lo que esta limitación hace posible su empleo para valores muy pequeños de N . Esta solución empieza a ser aceptable en varios sistemas modernos con alta velocidad de operación matemática.

Una versión modificada del ejemplo de operaciones concretas es la siguiente:

```

% Procedimiento TDF -indexación
for K=1:N
    W=Q*(K-1);
    AT=0;BT=0;J=0;
    while J<N,
        D=W*J;
        C=cos(D); S=-sin(D);
        J=J+1;
        AT=AT+C*X(J)-S*Y(J);
        BT=BT+C*Y(J)+S*X(J);
    end
    A(K)=AT; B(K)=BT;
    M(K)=sqrt(A(K)^2+B(K)^2); % Magnitud de la salida
    P(K)=atan(B(K)/A(K)); % Fase de la salida
end

```

Algoritmo de Goertzel. A fin de obtener un mayor desempeño de la TDF, se deben buscar diferentes soluciones al cálculo directo, en particular, la solución polinomial basada en que la TDF misma es la transformada \mathcal{Z} de $x[n]$ evaluada sobre un ciclo unitario. La transformada \mathcal{Z} modificada de $x[n]$ dada por $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^n$, puede evaluar (A.8) para z^k , lo que se puede escribir como

$$X(z) = Z(z)_{z=W_N^k} = \mathcal{F}\{x[n]\}, W_N^k = e^{-2\pi k/N}$$

El método más eficiente de cálculo polinomial es el de Horner [3], según el cual una sucesión de operaciones puede ser escrita en la forma de la ecuación diferencial lineal

$$y[m] = zy[m-1] + x[N-m] \quad (\text{A.11})$$

con condicional inicial $y[-1] = 0$, que obtiene como resultado final para $m = N$, el arreglo

$$X[z] = y[N]$$

reemplazando $z = W_N^k$, el anterior algoritmo de cálculo se conoce como el *Algoritmo de Goertzel* [4], el cual se puede analizar como un filtro de primer orden que tiene como entrada la sucesión de datos en orden invertido y con solución completa para $n = N$. El diagrama del filtro recursivo se muestra en la Figura A.2 y el siguiente procedimiento corresponde a su realización:

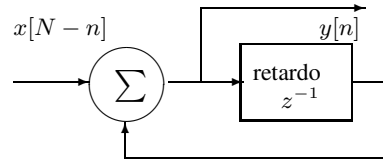


Figura A.2. Algoritmo de Goertzel

Algoritmo A.4. Algoritmo de Goertzel (Primer orden)

```

N = input('Ingrese el valor de N = ');
Q=pi/N;
% X e Y, vectores entrada
for K=1:N
    S=sin(Q*(K-1));
    C=cos(Q*(K-1));
    AT=0;BT=0;
    for J=1:N
        T=C*AT+S*BT+X(N-J+1);
        BT=-S*AT+C*BT+Y(N-J+1);
        AT=T;
    end
    A(K)=AT; B(K)=BT;
end
A,B % Vectores de salida

```


La comparación del algoritmo A.4 con el procedimiento de cálculo directo A.3 muestra que la cantidad de operaciones de multiplicación y adiciones de punto flotante son las mismas. Sin embargo, las funciones trigonométricas son evaluadas para cada frecuencia una sola vez en el algoritmo de Goertzel, por lo que la cantidad total de operaciones es $2N$ menor que $2N^2$ para el cálculo directo, disminuyendo así mismo los errores de discretización.

De todas maneras, el algoritmo de Goertzel no mejora substancialmente la eficiencia de cálculo para la TDF, debido a que la constante de retroalimentación es compleja y se requieren por lo tanto para cada dato 4 operaciones de multiplicación reales.

De otra parte, usando la igualdad de Euler, $W^k = e^{-j2\pi k/N} = \cos(2\pi k/N) - j \sin(2\pi k/N)$, la expresión (A.11) se lleva a la forma,

$$Y[m] = W^k Y[m-1] + X[N-m] = (\cos - j \sin) Y[m-1] + X[N-m]$$

que se puede ampliar en

$$\begin{aligned} Y[m] &= 2 \cos Y[m-1] - Y[m-2] + X[N-m] - (\cos + j \sin) X[N+1-m] \\ &= q[m] - (\cos + j \sin) q[m-1] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$q[m] = (2 \cos) q[m-1] - q[m-2] + X[N-m] \quad (\text{A.13})$$

La expresión (A.13) tiene coeficientes expresados en forma más simple que requieren solo una multiplicación por iteración. Los demás pasos de cálculo han sido evacuados en (A.12), que se evalúan solamente una vez después que m sea igual a N , lo que se demuestra de:

$$X(k) = Y[n] = q[N] - (\cos + j \sin) q[N-1]$$

con condiciones iniciales igual a cero para (A.13): $q[0] = q[1] = 0$. Se puede demostrar que la sucesión de entrada de la ecuación iterativa puede entrar en orden natural sin ser invertida, y las ecuaciones (A.12) y (A.13) se convertirán respectivamente en:

$$\begin{aligned} q[m] &= (2 \cos) q[m-1] - q[m-2] + X[m] \\ Y[m] &= q[m] - (\cos - j \sin) q[m-1] \end{aligned}$$

El algoritmo de cálculo de la TDF basado en el último par de expresiones se denomina *algoritmo de Goertzel de segundo orden* y le corresponde el siguiente procedimiento:

Algoritmo A.5. Algoritmo de Goertzel (Segundo orden)

```
x = input('\nIngrese el vector de coeficientes X = ');
y = input('\nIngrese el vector de coeficientes Y = ');
n = length(x); q = 6.2832
/ n ; for k = 1 : n
s = sin( q * (k-1) );
c = cos( q * (k-1) );
cc = 2 * c;
a2 = 0;
a1 = x(1);
b2 = 0;
b1 = y(1);
for j = 2 : n
t = a1;
```

```

a1 = cc * a1 - a2 + x(j);
a2 = t;
t = b1;
b1 = cc * b1 - b2 + y(j);
b2 = t;
end
a(k) = c * a1 - a2 - s * b1;
b(k) = s * a1 + c * b1 - b2;
end
disp('Los vectores resultado son :');
a,b % Vectores de salida

```

El proceso de la parte real e imaginaria de la sucesión de entrada, en A.5, es paralelo por lo que en caso de tener sucesiones reales el tiempo prácticamente se reduce a la mitad. En comparación con el algoritmo de Goertzel de primer orden, el programa A.5 reduce a la mitad el número de multiplicaciones, tiene el mismo número de sumas y solo $2N$ evaluaciones trigonométricas que pueden ser calculadas previamente y almacenadas en un arreglo o tabla si existe espacio disponible.

A.2. Cálculo de la transformada rápida de Fourier

A.2.1. Representación de dimensión múltiple de índices

Uno de los métodos más efectivos en la reducción del tiempo de cálculo numérico en la TDF es el cambio de variables, descomponiendo su representación unidimensional en multidimensional, en otras palabras, representar un problema complejo por varios más simples, lo que en este caso es posible, teniendo en cuenta la estructura de la TDF, cuya notación es la siguiente:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_0[k] e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_0[k] W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.14})$$

Por conveniencia se han realizado los siguientes reemplazos: $k \rightarrow kT$ y $n \rightarrow NT$. La notación (A.14) implica un sistema de ecuaciones de orden N . Así, por ejemplo para $N = 4$ se tendrá el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
X[0] &= x_0[0] W_4^0 + x_0[1] W_4^0 + x_0[2] W_4^0 + x_0[3] W_4^0 \\
X[1] &= x_0[0] W_4^1 + x_0[1] W_4^1 + x_0[2] W_4^1 + x_0[3] W_4^1 \\
X[2] &= x_0[0] W_4^2 + x_0[1] W_4^2 + x_0[2] W_4^2 + x_0[3] W_4^2 \\
X[3] &= x_0[0] W_4^3 + x_0[1] W_4^3 + x_0[2] W_4^3 + x_0[3] W_4^3
\end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

El análisis de (A.15) indica que es necesario realizar $N(N-1)$ sumas y N^2 multiplicaciones (en forma general, todas operaciones complejas), el cual puede ser representado en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0[0] \\ x_0[1] \\ x_0[2] \\ x_0[3] \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

que en forma compacta, describe el siguiente sistema matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

La matriz \mathbf{W} está compuesta por los términos $W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk/N}$ o *factor de pivote*, el cual posee las propiedades:

$$W_N^{nk} = W_N^{nk \bmod(N)}, \quad \text{periodicidad} \quad (\text{A.17a})$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k, \quad \text{antisimetría} \quad (\text{A.17b})$$

Ejercicio en el CP A.4. En el caso analizado de $N = 4$, aplicando (A.17a) se obtiene el respectivo

$$\text{valor } W_4^6 = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}6\right) = \exp(-j3\pi) = \exp(-j\pi) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}2\right) = W_4^2.$$

El siguiente algoritmo permite analizar la periodicidad en N para el factor de pivote:

```
% Periodicidad del factor de pivote
N=4; % Base de análisis
for n=1:3*N
    m(n)=exp(-j*2*pi*n/N);
end
m % round(real(m)) formato de salida

>>
ans =

    0  -1  0  1  0  -1  0  1  0  -1  0  1
```

A efectos de ilustrar el algoritmo de la TRF, es conveniente escoger la longitud del arreglo de entrada $x_0[k]$, en la forma $N = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$. A continuación se presenta el desarrollo de la FFT, para $N = 4$ ó $m = 2$.

La primera reducción de operaciones se obtiene utilizando la propiedad de periodicidad (A.17a) del factor de pivote. Por lo que la matriz (A.16) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0[0] \\ x_0[1] \\ x_0[2] \\ x_0[3] \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

que reduce la cantidad de argumentos a calcular hasta $N - 1$.

El segundo paso en el desarrollo consiste en factorizar la matriz cuadrada (A.18), mediante el método explicado en el literal §A.2.2, de la siguiente manera [44]:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_4^0 & 0 & 0 \\ 1 & W_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^1 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^0 \\ 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0[0] \\ x_0[1] \\ x_0[2] \\ x_0[3] \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Cabe anotar, que la operación de factorización en (A.19) no coincide exactamente con (A.18), en la medida en que los términos internos del vector $\hat{\mathbf{X}}$: $X[2]$ y $X[1]$, están interpuestos con relación al orden de los mismos en \mathbf{X} , aunque su ordenamiento no presenta mayor dificultad. Por lo tanto, se puede aceptar la operación de factorización (A.19) como correcta, restando analizar en cuanto se disminuye el costo computacional en el cálculo de la TDF.

Sea el siguiente arreglo intermedio en (A.19):

$$\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ x_1[2] \\ x_1[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^0 \\ 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0[0] \\ x_0[1] \\ x_0[2] \\ x_0[3] \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Las dos primeras operaciones en (A.20) son las siguientes:

$$x_1[0] = x_0[0] + W^0 x_0[2]$$

$$x_1[1] = x_0[1] + W^0 x_0[3]$$

de lo cual se deduce que para el cálculo de cada elemento se necesita realizar una suma y una multiplicación; ambas operaciones complejas. En cuanto a los restantes dos elementos se obtiene:

$$x_1[2] = x_0[0] + W^2 x_0[2]$$

$$x_1[3] = x_0[1] + W^2 x_0[3]$$

que al tener en cuenta la propiedad de antisimetría (A.17b), entonces, $W^0 = -W^2$, y por lo tanto,

$$x_1[2] = x_0[0] - W^0 x_0[2]$$

$$x_1[3] = x_0[1] - W^0 x_0[3]$$

Luego, para el cálculo del tercer elemento de (A.20) se necesita tan solo una suma compleja, en la medida en que la multiplicación compleja $W^0 x_0[2]$ ya fue realizada en el cálculo de $x_1[0]$. Así mismo, ocurre con el cuarto elemento. Como resultado, el cálculo del vector intermedio \mathbf{x}_1 demanda cuatro sumas complejas y dos multiplicaciones complejas.

El cálculo del vector $\hat{\mathbf{X}}$ se completa con la siguiente operación intermedia:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_4^0 & 0 & 0 \\ 1 & W_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^1 \\ 0 & 0 & 1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ x_1[2] \\ x_1[3] \end{bmatrix}$$

El primer término que se calcula como $x_2[0] = x_1[0] + W^0 x_1[1]$, que exige una multiplicación y una adición; ambas operaciones complejas. Igual ocurre con el término $x_2[2]$. Mientras, el segundo término $x_2[1]$ se calcula con una suma, por cuanto $W^0 = -W^2$. El término $x_2[3]$ también exige solo una adición compleja.

Finalmente, se obtiene que para el cálculo del vector $\hat{\mathbf{X}}$, mediante (A.19), se requieren un total de cuatro operaciones complejas de multiplicación y ocho operaciones complejas de adición contra las 16 multiplicaciones y 12 sumas (todas operaciones complejas) necesarias en (A.15).

En general, se puede demostrar que la ganancia en la reducción del número de operaciones es:

$$\kappa = \frac{N^2}{\frac{Nm}{2}} \approx \frac{2N}{m} \quad \forall m \gg 1$$

A.2.2. Desarrollo teórico de la transformada rápida de Fourier

En general, para la descomposición de la matriz (A.18), empleando la factorización del término W^k , se puede encontrar un método compacto de representación binaria de los índices de la exponente k y n , tales que

$$\nu = 2^{m-1}\nu_{m-1} + 2^{m-2}\nu_{m-2} + \dots + \nu_0, \nu \in k, n, \forall(k, n) \in \mathbb{Z}, \nu_1, \nu_0 \in 0, 1, \quad (\text{A.21})$$

donde $m = (2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-1}k_{m-1} + 2^{m-2}k_{m-2} + \dots + k_0)$.

La representación binaria en (A.21) impone inicialmente, la restricción sobre la longitud de la TDF, que deberá cumplir la condición $N = 2^m, m \in \mathbb{Z}$.

La expresión de la TDF obtenida a partir de (A.21) se define como:

$$X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=1}^1 \sum_{k_1=1}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=1}^1 x(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) W_N^p \quad (\text{A.22})$$

Por cuanto, se cumple que $W^{a+b} = W^a W^b$ el factor de pivote W_N^p se descompone en

$$\begin{aligned} W_N^p &= W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-1}k_{m-1} + 2^{m-2}k_{m-2} + \dots + k_0)} \\ &= W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-1}k_{m-1})} W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-2}k_{m-2})} \dots \\ &\dots W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)k_0} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

A su vez, teniendo en cuenta que $W_N^{2^m} = W_N^N = 1$, el primer término de (A.23) se simplifica en

$$\begin{aligned} W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-1}k_{m-1})} &= W_N^{2^m(2^{m-2}n_{m-2}k_{m-1})} W_N^{2^m(2^{m-3}n_{m-2}k_{m-1})} \dots \\ &\dots W_N^{2^m(n_1k_{m-1})} W_N^{2^{m-1}(n_0k_{m-1})} \\ &= W_N^{2^{m-1}(n_0k_{m-1})} \end{aligned}$$

De manera similar, el segundo término de (A.23) se reduce a

$$\begin{aligned} W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)(2^{m-2}k_{m-2})} &= W_N^{2^m(2^{m-3}n_{m-1}k_{m-2})} W_N^{2^m(2^{m-4}n_{m-2}k_{m-2})} \dots \\ &\dots W_N^{2^{m-1}(n_1k_{m-2})} W_N^{2^{m-2}(n_0k_{m-2})} \\ &= W_N^{(2n_1+n_0)2^{m-2}(n_0k_{m-2})} \end{aligned}$$

y así sucesivamente, se encontrará que cada factor de descomposición agrega un término que no se cancela, por lo que la expresión TDF en (A.22) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=1}^1 x(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{2^{m-1}(n_0k_{m-1})} W^{(2n_1+n_0)2^{m-2}k_{m-2}} \dots \\ &\dots W^{(2^{m-1}n_{m-1} + 2^{m-2}n_{m-2} + \dots + n_0)k_0} \end{aligned}$$

Realizando cada una de las sumatorias separadamente y etiquetando cada uno de los resultados

intermedios se obtiene la siguiente ecuación recursiva:

$$\begin{aligned}
 x_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{m-1}=0}^1 x_0(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{2^{m-1}(n_0 k_{m-1})} \\
 x_2(n_0, n_1, k_{m-3}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{m-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{(2n_1+n_0)2^{m-2}k_{m-2}} \\
 \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\
 x_m(n_0, n_1, \dots, n_{m-1}) &= \sum_{k_0=0}^1 x_{m-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{m-1}n_{m-1}+2^{m-2}n_{m-2}+\dots+n_0)k_0} \\
 X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0) &= x_m(n_0, n_1, \dots, n_{m-1})
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ es el vector original de entrada. La expresión (A.24) representa la formulación del algoritmo básico de TRF en base binaria.

Como ejemplo de ilustración, se desarrolla el algoritmo concreto para $N = 4$, que de acuerdo a (A.21) le corresponde la representación $v = 2v_1 + v_0, v \in \{k, n\}$, con la siguiente descomposición:

$$X(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \tag{A.25}$$

El factor de pivote se puede descomponer de acuerdo a (A.23) como:

$$\begin{aligned}
 W^{(2n_1+n_0)} W^{(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\
 &= (W^{4n_1k_1}) W^{2n_1k_0} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\
 &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0}
 \end{aligned}$$

por lo que se puede escribir la TDF (A.25) en la forma:

$$X(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 \left(\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right) W^{(2n_1+n_0)k_0}$$

En forma general, cuando la longitud de la TDF no sea prima, N puede ser factorizado como $N = N_1 N_2$. Los dos nuevos índices de las variables $n_i = 0, \dots, N_i - 1; i \in \{1, 2\}$ podrán ser representadas linealmente en la variable inicial n , si;

$$n = \langle \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \rangle_N \tag{A.26}$$

De la expresión (A.26), no queda claro si todos los valores de n están representados, o más bien si la representación es única, esto es, uno a uno. En [5] se demuestra que existirá siempre un α_i , tal que la representación (A.26) sea biyectiva. Sin embargo, se analizan dos casos:

Caso 1. N_1 y N_2 son relativamente primos, esto es, $(N_1, N_2) = 1$ (donde $(M, L) = L$ es la notación del máximo común divisor entre M y N). La representación entera de (A.26) será única solamente si se cumple

$$(\alpha_1 = aN_2) \text{ y/o } (\alpha_2 = bN_1) \text{ y } (a, N_1) = (\alpha_2, N_2) = 1 \tag{A.27}$$

Caso 2. N_1 y N_2 ($N_1, N_2 > 1$) no son números primos, entonces, se deberá cumplir:

$$(\alpha_1 = aN_2) \text{ y } (\alpha_2 \neq bN_1) \text{ y } (a, N_1) = (K_2, N_2) = 1 \quad (\text{A.28})$$

Para el primer caso, la representación (A.26) es denominada *factor de representación prima (FRP)* cuando $K_1 = aN_2$ y $K_2 = bN_1$, mientras, para el segundo caso se denomina *factor de representación común (FRC)*, cuando:

$$K_1 = aN_2 \text{ ó } K_2 = bN_1, \text{ pero no ambos} \quad (\text{A.29})$$

De hecho, el FRC puede ser empleado siempre. De igual manera, se pueden definir los índices de representación α_3 y α_4 en el eje de las frecuencias:

$$k = \langle \alpha_3 K_1 + \alpha_4 K_2 \rangle N \quad (\text{A.30})$$

con las mismas condiciones definidas en (A.27) y (A.28).

El siguiente paso, teniendo definidos los índices de representación consiste en la definición de TDF por medio de arreglos bidimensionales a la entrada y salida del sistema

$$\hat{x}(n_1, n_2) = x[\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2] \quad (\text{A.31a})$$

$$\hat{X}(k_1, k_2) = X(\alpha_3 k_1, \alpha_4 k_2) \quad (\text{A.31b})$$

que aplicados a la definición de TDF (A.8) resulta en

$$\hat{X} = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \hat{x} W^{\alpha_1 \alpha_3 n_1 k_1} W^{\alpha_1 \alpha_4 n_1 k_2} W^{\alpha_2 \alpha_3 n_2 k_1} W^{\alpha_2 \alpha_4 n_2 k_2} \quad (\text{A.32})$$

Aunque todos los multiplicandos exponenciales tienen una misma base, permitiendo reducir así a un solo término, el análisis del algoritmo de la TDF por (A.32) muestra que requiere la misma cantidad de operaciones que el segundo algoritmo directo en (A.9b). Sin embargo, para reducir los cálculos las constantes α_i pueden ser escogidas de tal manera que se cumpla la condición [5]:

$$\langle \alpha_1 \alpha_4 \rangle_N = 0 \text{ ó } \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle_N = 0 \quad (\text{A.33})$$

Cuando N_i son relativamente primos, ambos términos de (A.33) se pueden tomar iguales a cero. Un ejemplo de FRC es usado en el algoritmo de Cooley-Tukey (con factores comunes $N = 2^M$), en particular, el algoritmo de base 4 de la TRF para una longitud de $N = 16$ de la TDF:

n_1	0	1	2	3
0	0	4	8	12
1	1	5	9	13
2	2	6	10	14
3	3	7	11	15

K_1

k_1	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	4	5	6	7
2	8	9	10	11
3	12	13	14	15

K_2

Figura A.3. Arreglos de índices

$$n = 4n_1 + n_2$$

$$k = \alpha_1 + 4\alpha_2$$

Los arreglos correspondientes de los índices son se muestran en la Figura A.3. En este caso, debido a que los factores N son comunes, solamente una de las condiciones de (A.33) pueden ser escogidos,

luego, (A.31b) será

$$\hat{X} = \sum_{n_2=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \hat{x} W_4^{n_1 k_1} W^{n_2 k_1} W_{16}^{n_2 k_1} W_4^{n_2 k_2}$$

donde $W_N = e^{-j2\pi/N}$. La suma interior por n_1 representa las 4 TDF de longitud $N = 4$, W_{16} representa las 16 operaciones de multiplicación complejas y la suma exterior por n_2 representa otras 4 TDF de longitud 4.

A.2.3. Algoritmo de Cooley-Tukey

Este algoritmo de cálculo de la TDF, comúnmente conocido como *Fast Fourier Transform* (FFT), emplea el principio de representación sucesiva y se caracteriza por su alta velocidad de cálculo. En el algoritmo de TRF se emplea el FRC en los índices de frecuencia y tiempo dados en (A.26) y (A.30) con las condiciones (A.29) resultando en los siguientes índices de representación [6]:

$$\begin{aligned} n &= N_2 n_1 + n_2 \\ k &= k_1 + N_1 k_2 \end{aligned} \quad (\text{A.34a})$$

que reemplazando en (A.32) da como resultado

$$\hat{X} = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \hat{x} W_{N_1}^{n_1 k_1} W^{N n_2 k_2} W_{N_2}^{n_2 k_2} \quad (\text{A.35})$$

La representación (A.34a) y la TDF en la forma (A.35) son los fundamentos para el desarrollo del algoritmo de la TRF.

Decimación en frecuencia. La manera más común y eficiente de implementación de la TRF emplea todas las M , denominadas *base raíz del sistema*, que se encuentran relacionadas con la longitud total de la TDF, $N = R^M$. Las bases raíz $R = 2$ y $R = 4$ son las más comunes debido a que no se requieren operaciones de multiplicación. Ocasionalmente, se emplean otras de orden superior 2^R .

Para el caso de la TRF de base 2 los índices de representación (A.34a) son:

$$n = (N/2)n_1 + n_2 \quad (\text{A.36a})$$

$$k = k_1 + 2k_2 \quad (\text{A.36b})$$

la primera suma por n_1 de (A.35) tiene la forma,

$$x(k_1, n_2) = \sum_{n_1=0}^l \hat{x}(n_1, n_2) (-1)^{n_1 k_1} \quad (\text{A.37})$$

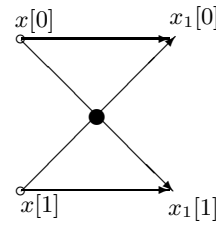


Figura A.4. Diagrama mariposa

la cual se ilustra en la Figura A.4. La suma exterior dada para k_2 y n_2 será

$$\hat{X}(k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N/2-1} y(k_1, n_2) W_{N/2}^{n_2 k_2} \quad (\text{A.38})$$

donde $y(K_1, n_2) = x(K_1, n_2) W_N^{K_1 n_2}$ corresponde a una función mixta que entrevera términos entre una y otra suma.

Las ecuaciones (A.36b) y (A.37) se ilustran en la Figura A.5a) y muestran cómo una TDF de longitud N puede ser calculada por medio de dos TDF de longitud $N/2$. Esta es la idea básica contenida en el algoritmo de base 2 de la FFT y al proceso de obtención se le denomina *decimación en frecuencia (DEF)* por cuanto las dos TDF de longitud $N/2$ dan el total de la TDF como se ilustra en la Figura A.5b). Una de ellas da los términos pares y la otra los impares.

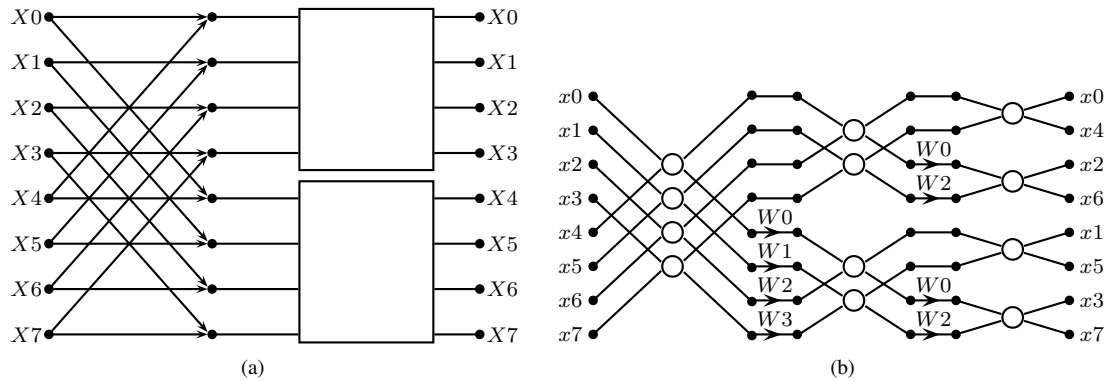


Figura A.5. diagrama de flujo de la TDF para $N = 8$

El diagrama de flujo de la TDF de longitud $N = 2$ en (A.37) se muestra en la Figura A.4, por su forma es llamado de *mariposa*. La implementación en `Matlab` del procedimiento de mariposa para la TDF de longitud 2 es la siguiente:

```
% % Mariposa
T=x(1)+x(2)
x(2)=x(1)+x(2) % parte real
x(1)=T
T=y(1)+y(2)
y(2)=y(1)-y(2) % parte imaginaria
y(1)=T
```

La variable `T` es denominada de almacenamiento temporal y tiene como fin evitar el uso de arreglos de memorias auxiliares mayores. El algoritmo de base 2 de la TRF, que puede ser implementado para cualquier longitud $N = 2^M$, prevé un ciclo exterior para M dimensiones o etapas de desmembramiento de la longitud total (el ciclo por k del siguiente programa). El siguiente ciclo por j se lleva a cabo para las N_2 TDF de longitud 2. El ciclo interior por i contiene las TDF de longitud 2 (mariposas) y el cálculo concreto del término de entreveración.

El algoritmo, además, contempla un desplazamiento en las direcciones de acuerdo a los índices de representación en (A.38).

Algoritmo A.6. Transformada Rápida de Fourier

```

N2 = N;
for k = 1 : M
    N1 = N2; N2 = N2 / 2;
    e = 2 * pi / N1; A = 0.;
    for j = 1 : N2;
        S = - sin(A);
        C = cos(A);
        A = j * e;
        for i = j : N1 : N
            L = i + N2;
            xt = x(i) - x(L);
            x(i) = x(i) + x(L);
            yt = y(i) - y(L);
            y(i) = y(i) + y(L);
            x(L) = xt * C + yt * S;
            y(L) = yt * C - xt * S;
        end
    end
end

```

El algoritmo A.6 contiene $M = \log_2 N$ etapas cada una con $N/2$ multiplicaciones que da un total de multiplicaciones complejas para la FFT de $(N/2) \log_2 N$. A partir de la aparición de la FFT algunos mejoramientos han sido realizados. El primero y, tal vez, el más importante consiste en el empleo de otras bases. El algoritmo de base 4 de la FFT no exige multiplicaciones. En particular, su implementación es la siguiente:

Donde el arreglo x contiene la parte real, mientras el arreglo y contiene la parte compleja de los datos. El número de multiplicaciones para las FFT de base 2 y 4 corresponde al número del término de entreveración, esto es, N en cada M etapas. Como se tiene el doble de etapas para la base 2 con relación al de base 4 el número de multiplicaciones de la FFT de base dos tiene que aumentar al doble. Aunque realmente varias multiplicaciones en el algoritmo de base 2 son por 1 y no se llevan a cabo, con lo que el factor de aumento es menor que dos.

El número de sumas también es menor para el algoritmo de base 4 A.7. Por cuanto se tienen menos etapas, la cantidad de datos por transferir es menor también.

El programa, para el caso de la base 4, consiste en adaptar la correspondiente mariposa del siguiente programa con algunos otros cambios menores.

Algoritmo A.8. TRF - base 4

```

x = input('\n Introduzca el vector X : ... ');
y = input('\n Introduzca el vector Y : ... ');
n = length(x); m = log2(n); n2 = n;
for k = 1 : m % ciclo 1
    n1 = n2; n2 = round(n2/2);
    e = pi * 2/n1; a = 0;
    for j = 1 : n2 % ciclo 1
        b = a + e; c = a + b;
        co1 = cos(a); co2 = cos(b); co3 = cos(c);
    end
end

```

Algoritmo A.7. mariposa base 4

```

R1=x(1)+x(3)
R2=x(1)-x(3)
R3=x(2)+x(4)
R4=x(2)-x(4)
S1=y(1)+y(3)
S2=y(1)-y(3)
S3=y(2)+y(4)
S4=y(2)-y(4)
x(1)=R1+R3
x(3)=R1-R3
x(2)=R2+S4
x(4)=R2-S4
y(1)=S1+S3
y(3)=S1-S3
y(2)=S2-R4
y(4)=S2+R4

```

```

si1 = sin(a); si2 = sin(b); si3 = sin(c);
a = j * e;
for i = j : n1 : n % ciclo 1
i1 = i + n2; i2 = i1 + n2; i3 = i2 + n2;
if (i1 > n)
i1 = n ;
end
if (i2 > n)
i2 = n ;
end
if (i3 > n)
i3 = n ;
end
r1 = x(i) + x(i2); r3 = x(i) - x(i2);
s1 = y(i) + y(i2); s3 = y(i) - y(i2);
r2 = x(i1) + x(i3); r4 = x(i1) - x(i3);
s2 = y(i1) + y(i3); s4 = y(i1) - y(i3);
x(i) = r1 + r2; r2 = r1 - r2;
r1 = r3 - s4; r3 = r3 + s4;
y(i) = s1 + s2; s2 = s1 - s2;
s1 = s3 + s4; s3 = s3 - r4;
x(i1) = co1 * r3 + si1 * s3;
y(i1) = co1 * s3 - si1 * r3;
x(i2) = co2 * r2 + si2 * s2;
y(i2) = co2 * s2 - si2 * r2;
x(i3) = co3 * r1 + si3 * s1;
y(i3) = co3 * s1 - si3 * r1;
end
end
end disp('Los vectores resultado son : .....'); x,y

```

La TRF de longitud 8 también puede ser desarrollada para obtener menores multiplicaciones. Sin embargo, la reducción de las etapas no es proporcional al factor y la reducción en el número de adiciones es casi inexistente. Para el caso de la base 16 el decremento en el número de multiplicaciones es neutralizado por el incremento en un código muy largo de programación y del número de adiciones. En general, el empleo de mayores bases raíz es poco frecuente, por cuanto generalmente se requieren substancialmente muchas más multiplicaciones en las mariposas y no llevan a la reducción en las multiplicaciones del término de entreveración.

La segunda forma de reducción de cálculo de la TRF es evitar la multiplicación innecesaria en el término de entreveración por ± 1 , o por $\pm j$, que ocurre cuando el exponente de W_N es cero o múltiplo de $N/4$. Esto se puede realizar haciendo una mariposa aparte para los casos especiales como se muestra en el siguiente programa.

Algoritmo A.9. TRF - mariposa interna

```

x = input('\nIntroduzca el vector X : ... ');
y = input('\nIntroduzca el vector Y : ... ');
n = length(x); m = log2(n); n2 = n;
for k = 1 : m % Ciclo 1
n1 = n2;
n2 = round(n2 / 2);
for i = 1 : n1 : n % Mariposa aparte
l = i + n2 ;
if (l > n)
l = n ;
end
xt = x(i) - x(l);
x(i) = x(i) + x(l);
yt = y(i) - y(l);
y(i) = y(i) + y(l);
x(l) = xt;
y(l) = yt;
end
end

```

```

while (k == m)
e = $ $ 2 * pi / n1;
a = e;
for w = 2 : n2 % ciclo 2
s = -1 * sin (a);
c = cos (a);
a = w * e;
for i = w : n1 : n % Ciclo 3
l = i + n ;
if (l > n)
l = n ;
end
xt = x(i) - x(l);
x(i) = x(i) + x(l);
yt = y(i) - y(l);
y(i) = y(i) + y(l);
x(l) = xt * c - yt * s;
y(l) = xt * s + yt * c;
end
end
end
disp('Los vectores resultado son : .....');x,y

```

Cuando el exponente de W_N es $N/8$ o algún múltiplo, una pequeña reducción adicional es posible. Puesto que las partes real e imaginaria de W a la $N/8$ potencia son iguales entonces se puede hacer lo siguiente: Sea C la parte real de W y S la imaginaria, la parte real de los datos X y Y la imaginaria. El producto de W veces los datos es entonces

$$\begin{aligned}
(C + jS)(X + jY) &= R + jI \\
R &= CX - SY \\
I &= CY + SX
\end{aligned} \tag{A.39}$$

que requiere cuatro multiplicaciones y dos adiciones todas reales. Si la W tiene exponente $N/8$ o algún múltiplo y $C = S = 1/\sqrt{2}$. En este caso, el anterior producto toma la forma:

$$\begin{aligned}
(C + jC)(X + jY) &= R + jI \\
R &= C(X - Y) \\
I &= C(X + Y)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

que requiere solamente dos multiplicaciones y dos adiciones todas reales. Este es uno de los algoritmos más efectivos cuando se poseen procesadores de propósito general.

El tercer método para la reducción de multiplicaciones consiste en disminuir el número de multiplicaciones a expensas del aumento de adiciones en (A.39) de la siguiente manera (4 multiplicaciones y 2 sumas reales):

$$\begin{aligned}
Z &= C(X - Y) \\
D &= C + S \\
E &= C - S
\end{aligned}$$

luego la parte real e imaginaria del producto se puede escribir como (3 multiplicaciones y 5 sumas

reales)

$$\begin{aligned} R &= DY + Z \\ I &= EX - Z \end{aligned} \tag{A.41}$$

una especie de tabla de ayuda puede ser calculada previamente para C , D y E . En este caso, se requerirán tres multiplicaciones y tres sumas todas reales para cada multiplicación compleja. Si la multiplicación es mucho más lenta este algoritmo será más rápido [5]. La implementación se presenta en el siguiente programa:

Algoritmo A.10. TRF con tabla de ayuda

```
% Inicializacion de la tabla de senos y cosenos
x = input('\nIntroduzca el vector X : ... ')
y = input('\nIntroduzca el vector Y : ... ')
n = length(x); m = log2(n); p = pi / n ;
for k = 1 :
    round(n/2) % tabla de ayuda
    a = (k - 1) * p ;
    wr(k)= cos(a) ;
    wi(k)= -1 * sin(a);
end
% Transf. rapida de Fourier de base 2
n2 = n ;
for k = 1 : m % ciclo 1
    n1 = n2 ;
    n2 = round(n2 / 2) ;
    ie = n / n1 ; ia = 1 ;
    for j = 1 : n2 % ciclo 2
        a = round(a);
        s = wi(a) ;
        c = wr(a) ;
        ia = ia + ie ;
        for i = j : n1 : n % ciclo 3
            l = i + n2 ;
            if ( l > n )
                l = n ;
            end
            xt = x(i) - x(l) ;
            x(i) = x(i) + x(l) ;
            yt = y(i) - y(l) ;
            y(i) = y(i) + y(l) ;
            x(l) = xt * c - yt * s ;
            y(l) = xt * s + yt * c ;
        end
    end
end
disp('Los vectores resultado son : .....');x,y
```

Realmente, esta última forma de reducción debe de llevar a la reducción del tiempo de cálculo cuando no se analizan operaciones extras de hardware.

En algunos procesadores digitales especializados, puede ocurrir que las operaciones de multiplicación y suma estén acopladas entre ellas, de tal manera que la reducción de una multiplicación para agregar una suma puede no conllevar a la disminución de velocidad, ante este hecho, la presencia del comando condicional, más bien puede reducir el desempeño del algoritmo.

Existen varias formas de mejorar la velocidad de ejecución y versatilidad del programa A.10. En particular, para este último caso, la longitud de los datos muchas veces es diferente a la condición de múltiplo de 2, por lo que se requerirá la mezcla de dimensiones de longitud diferente, sin embargo, esto generalmente conlleva a la pérdida de eficiencia. Otra solución consiste en que si hay valores

innecesarios, o muchos de ellos son cero, cierta ventaja se puede tomar recortando varias operaciones innecesarias [7].

Una alternativa que puede ser empleada consiste en la representación de los elementos de salida en vez de los de entrada como hasta ahora se ha hecho. Este algoritmo es llamado *Decimación en el tiempo* (DET). Sin embargo el desempeño es básicamente el mismo que el del DEF [4,8].

En general, el número de multiplicaciones siempre decrece con el aumento de la base. Además, la reducción debida al cambio de dos a tres mariposas no es tan notoria como de 1 a 2 y más aún esta decrece con el aumento de las bases.

A.2.4. Acomodación de datos en la TRF

La selección del valor de N dentro de la serie 2^M , $M \in \mathbb{Z}^+$, trae, de por sí, cierta incomodidad en la realización de la TRF. Existen varias maneras de salvar este momento y una de ellas consiste en su cálculo aproximado rellenando de ceros simétricamente los puntos que hagan falta hasta la cantidad inmediatamente superior múltiplo de 2^M . Los procedimientos de TRF, por lo general, permiten efectuar la TDF en sus formas directa e inversa de los arreglos $u = X_i + jY_i$ y $v_k = X_k + jY_k$, brindando así la transformación de $X_i \rightarrow X_k$, $Y_i \rightarrow Y_k$ y viceversa. El mejoramiento de la precisión de la TRF se puede alcanzar con un proceso especial de los datos de entrada o salida. El proceso en los datos de entrada consiste en la multiplicación de cada una de las muestras por los coeficientes de peso W_i , escogidos de tal manera, que puedan brindar una aproximación dada a $y(t)$ durante su integración. Los valores de $W_i = 1$ corresponden a la aproximación escalonada y, por lo tanto, a la integración por el método de rectángulos. Si $W_i = 1/2, 1, 1, \dots, 1, 1, 1/2$, entonces la integración es efectuada por el método de los trapecios. Cuando $W_i = 1/3, 4/3, 2/3, 4/3, 2/3, \dots, 4/3, 1/3$, la aproximación de $y(t)$ será parabólica, esto es, el método de integración empleado será el de Simpson. En sí, se puede efectuar cualquier tipo de aproximación polinomial de más alto grado escogiendo la serie de valores de W_i correspondientes. De manera análoga, para el aumento de precisión de la TRF por medio del proceso de los datos de salida, se lleva a cabo multiplicando X_k y Y_k por el coeficiente $K_k = \sin(\pi k/N)/(\pi k/N)$ e introduciendo la corrección de desplazamiento de fase $\Delta\varphi_k = \pi k/N$. Es importante anotar que no se podrán utilizar ambos tipos de aproximación (a la entrada y salida simultáneamente) por cuanto ellos son variantes alternativas de mejoramiento de la aproximación de $y(t)$. El *efecto de Gibbs*, que se observa en la interpolación geométrica de la serie de Fourier de las funciones quebradas o con rompimientos, disminuye significativamente en caso de utilizar cualquiera de los métodos de aumento de precisión antes descritos de la TRF.

Bibliografía

- [1] V. I. Kupreev and V. V. Nosach, *Algoritmos y programas de Filtración digital en el proceso de información de vuelo (Rus)*. Kiev: Vozdushnyi transport, 1988.
- [2] I. I. Privalov, *Vvedenie v teoriju funktsii kompleksnogo peremennogo*. Moskva: Nauka, 1977.
- [3] A. M. Trakhman and V. A. Trakhman, *Fundamentos de teoría de señales discretas en intervalos finitos (Rus)*. Moscú: Soviestkoe Radio, 1975.
- [4] L. A. Zalmanson, *Fourier, Haar, Walsh Transforms and their application in Control, Communications and other Fields*. Moscú: Nauka, 1989.
- [5] K. A. Samoylo, *Sistemas y señales radiotécnicos (Rus)*. Moscú: Radio i Svyaz, 1982.
- [6] R. E. Edwards, *Fourier Series: A Modern Introduction*. Camberra: SV, 1979, vol. I, II.
- [7] I. S. Gonorovskiy, *Circuitos y señales radiotécnicos*. Moscú: Progress, 1972.
- [8] E. A. Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis*. New York: John Wiley, 1949.
- [9] P. S. Akimov, A. I. Senin, and V. I. Solenov, *Proceso de señales en sistemas de información (Rus)*. Moscú: Radio i Svyaz, 1994.
- [10] L. E. Franks, *Signal Theory*. New Jersey: PH. Englewood Cliffs, 1969.
- [11] N. Zajarchenko and P. Nudelman, *Fundamentos de la transmisión de señales discretas (Rus)*. Moscú: Radio i Svyaz, 1990.
- [12] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. New Jersey: Prentice Hall, 1975.
- [13] R. Bracewell, *The Hartley Transform*. New York: Oxford University Press, 1986.
- [14] M. S. A. *Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [15] S. G. Tzafestas, *Walsh Functions in Signal and Systems Analysis and Design*. New York: Van Nostrand Reinhold Co, 1985.
- [16] L. Cohen, *Wavelets and Signal Processing*. BirkHauser, 2003.
- [17] C. Burrus and T. Parks, *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. New York: Wiley, 1985.
- [18] F. Riesz and B. Nagy, *Functional Analysis*. New York: Dover, 1990.
- [19] N. Levan, *Systems and signals*.
- [20] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory*, 1st ed. Cambridge, Mass: MIT Press, 1958.
- [21] L. V. Danilov, *Series de Volterra-Picard en Sistemas No Lineales (Rus)*. Moscú: Radio i Svyaz, 1987.
- [22] V. I. Tijonov, *Nieliniyenye prjeobrazovanija sluchaynyj protsessov*. Moskva: Radio i Svjaz, 1986.
- [23] V. Bolnokin and P. Chinaev, *Analiz i Sintez Sistem Avtomaticheskogo Upravlenija v EBM*. Moskva: Radio i Svjaz, 1991.
- [24] A. Antonio, *Digital Filters: Analysis and Design*, 1983.
- [25] M. V. Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis: From Theory to Software*. IEEE Press, 1994.

- [26] D. I. Ten *Lectures on Wavelets*. Lowell, MA, 1992.
- [27] N Akhmed and P. Rao, *Ortogonal Transformations in Digital Signal Processing*, 1980.
- [28] V. D. Enden and N A Verhoeckx, *Discrete-Time Signal Processing. An Introduction*. Cambrige: PHI, 1989.
- [29] I. A. Mizin and A. A. Matveev, *Filtros digitales (Rus)*. Moscú: Svyaz, 1979.
- [30] L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and application of digital signal processing*. Prentice Hall, 1975.
- [31] A. Jensen and A. Cour-Harbo, *Ripples in Mathematics: The discrete wavelet transform*. Springer, 2001.
- [32] S. Mallat, *A Wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [33] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley, MA, USA: Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [34] W. Sweldens, "The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 3, no. 2, pp. 186–200, 1996.
- [35] —, "The lifting scheme: A construction of second generation wavelets," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 29, no. 2, pp. 511–546, 1997.
- [36] R. Claypoole, R. Baraniuk, and R. Nowak, "Adaptive wavelet transforms via lifting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp. 171–199, May, 1999.
- [37] I. Daubechies and W. Sweldens, "Factoring wavelet transforms into lifting steps," *Journal Of Fourier Analysis And Applications*, vol. 4, pp. 247–269, 1998.
- [38] J. Bendat and A. Piersol, *Random data: analysis and measurement procedures*. New York, USA: John Wiley and Sons, 1971.
- [39] D. Hilbert and R. Kurant, *Métody matematicheskoi fiziki. T.1 (Rus)*. Moscú: Gostechizdat, 1951.
- [40] S. Vilenkin, *Statisticheskije metody issledovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya*. Moskva: Sovetskoe Radio, 1967.
- [41] B. Shajtarin and V. Kovrigin, *Metody spektralnogo otsenivaniya sluchaiynyj proytssessov*. Moskva: Geliyus ARV, 2005.
- [42] L. Goldemberg and B. Matiyushkin, *Tsifrovaja Obrabotka signalov*. Moskva: Radio i Svajz, 1985.
- [43] L. Marple, *Digital Spectral Anaylisis with Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [44] O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1974.

Índice alfabético

- actualización
 - dual, 218
 - estrategias, 218
 - primaria, 218
- ARV, 129, 214
- Bessel
 - desigualdad, 17
- espectro, 47
- Chebyshev
 - aproximación, 201
- convolución
 - circular, 149
 - discreta, 147
 - integral, 54
- Cooley-Tukey
 - algoritmo, 274
- correlograma, 241
- decimación, 123
 - frecuencia, 274
- densidad
 - espectral energía, 229
 - espectral potencia, 231
- DEP
 - definición, 46
 - estimación, 233
- descomposición
 - K-L, 226
 - polifásica, 215
- Dirichlet
 - condiciones, 24
- distancia, 12
- error
 - distancia, 201
 - potencia, 225
- espectro
 - definición, 17
- Espectrograma, 51
- factor
 - pivote, 116
- filtración
 - Walsh, 152
- filtro
 - análogo, 167
 - bancos, 213
 - Butterworth, 173
 - Chebyshev, 176
 - elíptico, 177
 - formante, 250
 - modelos, 88
- forma
 - canónica, 162
 - escalera, 165
 - paralela, 163
 - secuencial, 164
- Fourier
 - espectro, 19
 - series, 19
 - TCTF, 50
 - transformada, 39, 40
- función
 - base, 13
 - delta, 6
 - escalón, 8
 - ortogonal, 14
 - ponderación, 26
 - ventana, 188
 - Walsh, 31
- funcional, 66
- Gibbs
 - efecto, 280
 - fenómeno, 186
 - pulsaciones, 200
- Gibbs
 - fenómeno, 25
- Goertzel
 - algoritmo, 266
- Hadamard
 - matriz, 142
- Kotelnikov
 - serie, 108
 - teorema, 107
- método
 - paralelo, 261

- secuencial, 260
- matrix
 - estado, 103
- modelo
 - AR, 252
 - ARMA, 251
 - MA, 252
 - paramétrico, 251
- norma, 12
- operador
 - aproximación, 73
 - degenerado, 72
 - discretización, 71
 - espectro, 77
 - invariante, 70
 - lineal, 64
- Parseval
 - relación, 46
 - teorema, 17
- periodograma
 - algoritmo, 243
 - Bartlett, 238
 - Blackman-Tukey, 241
 - definición, 234
 - método, 237
 - Welch, 239
- polinomio
 - Laurent, 218
- polinomios
 - Chebyshev, 29
 - Legendre, 27
- Remez
 - algoritmo, 205
- señales
 - clasificación, 2
- series
 - trigonométrica, 23
- transformada
 - bilineal, 169
 - discreta, 115
 - discreta cosenos, 119
 - discreta Haar, 127
 - discreta Hartley, 119
 - discreta Walsh, 126
 - enventanada, 50
 - Fourier, 40
 - generalizada, 39
 - Hartley, 48
 - Hilbert, 56
 - Laplace, 51
 - lineal, 63
 - polifásica, 217
 - rápida, 137
 - rápida Fourier, 138
 - rápida Haar, 143
 - rápida Hartley, 140
 - rápida Walsh, 142
 - Walsh, 53
 - wavelet, 58
 - wavelet discreta, 128
 - Z, 120
 - Z método, 172
- ventana
 - empleo, 195
 - espectral, 235, 245
 - función, 188
- Volterra
 - series, 89
- Wavelet
 - ARV, 129
 - biortogonales, 128
 - marcos, 129
 - propiedades, 133
 - transformada continua, 59
- Wiener
 - método, 89
- Wiener-Jinchin
 - teorema, 230
- Yule-Walker
 - ecuaciones, 253