Análisis de Señales
La Convolución

La Convolución de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se define matemáticamente como:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau)\, d\tau}$$

Simbólicamente como:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

En general la Convolución es un operador matemático que transforma dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ en otra $f(t)$

Propiedades de la Convolución.

1) Propiedad de Conmutativa

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Demostración

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Haciendo $t-\tau = x$ $\quad$ limites $\tau \to -\infty \Rightarrow x = +\infty$

$d\tau = -dx$ $\quad$ $\tau \to +\infty \Rightarrow x = -\infty$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x) . f(x) . -dx$$

Por lo tanto

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-x) . f_2(x) . dx$$

De donde:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) . f_1(t-\tau) . d\tau$$

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)}$$

Propiedad de la ley asociativa

$$\boxed{f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = (f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t)}$$

Propiedad de la ley distributiva.

$$\boxed{f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)}$$

Convolución con la función impulso

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) . f(t-\tau) d\tau = f(t-\tau) \Big|_{\tau=0} = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t-T_1) = f(t-T_1)$$ Demostrar

$$f(t-T_1) * \delta(t-T_2) = f(t-T_1-T_2)$$ Demostrar.

Teorema de la Convolución en el tiempo.

Si $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ y.

$f_2(t) \longrightarrow F_2(\omega)$

$\Rightarrow \quad f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) . F_2(\omega)$

Demostración.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau) . d\tau$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau) d\tau \right\}$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau) . d\tau . e^{-j\omega t} . dt$$

Agrupando terminos tenemos:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau) . e^{-j\omega t} dt . d\tau$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . F_2(\omega) . e^{-j\omega \tau} . d\tau$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . e^{-j\omega \tau} . d\tau \right) . F_2(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega) . F_2(\omega)$$

De donde

$$f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) . F_2(\omega)$$

Teorema de la Convolución en la frecuencia.

Si $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$

y $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$

Entonces

$$f_1(t).f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Demostración

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y).F_2(\omega - Y)\,dY$$

$$f_1(t).f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\}$$

$$f_1(t).f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y).F_2(\omega - Y)\,dY\right\}$$

$$f_1(t).f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y).F_2(\omega - Y)\,dY . e^{J\omega t}.\,d\omega$$

Agrupando variables

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y). \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - Y). e^{J\omega t}\,d\omega.\,dY$$

y haciendo a $x = \omega - Y \Rightarrow \omega = x + Y$ y $d\omega = dx$

tenemos: $$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y). \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x). e^{J(x+Y).t}\,d\omega.dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(Y). e^{JYt}.dY. \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x). e^{jxt}.dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y).e^{jyt}.dy . \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x).e^{jxt}.dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = f_1(t). \quad \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x).e^{jxt}.dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = 2\pi \; f_1(t).f_2(t)$$

$$2\pi \; f_1(t).f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$f_1(t).f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

Ejercicio

Utilizar la Convolución para hallar la transformada inversa de: $\frac{1}{(1+j\omega)^2}$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)^2}\right\}$$

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(1+j\omega)}$$

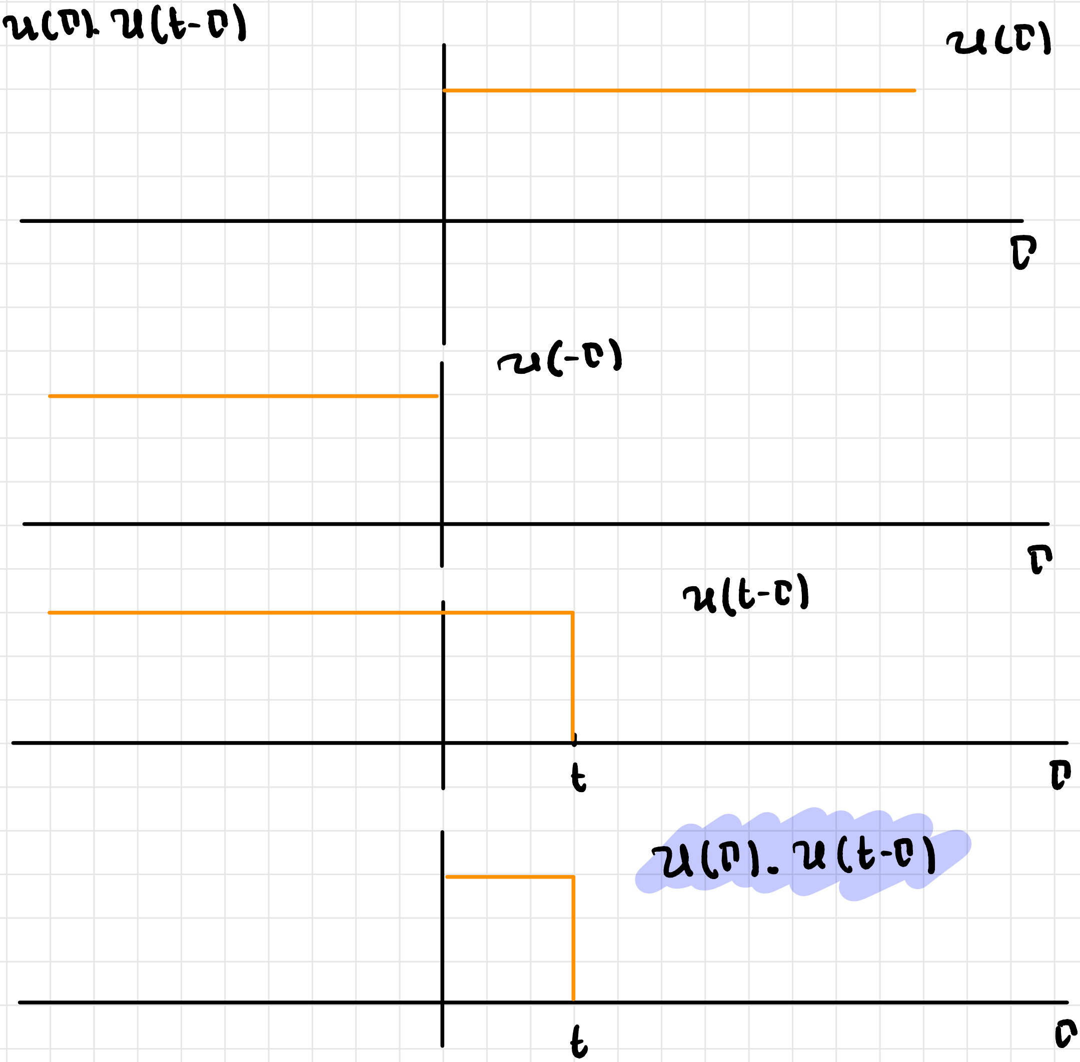
Si

$$e^{-t}.u(t) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{1+j\omega}$$

Entonces:

$$e^{-t}.u(t) * e^{-t}.u(t) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(1+j\omega)}$$

$$e^{-t}.u(t) * e^{-t}.u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}.u(\tau).\, e^{-(t-\tau)}.u(t-\tau)\, d\tau$$



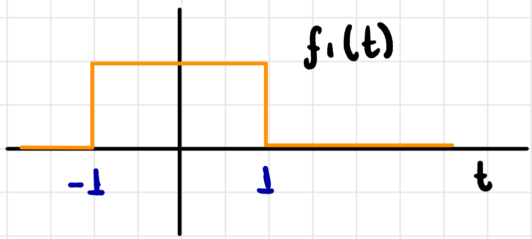
$$e^{-t}.u(t) * e^{-t}.u(t) = \int_{0}^{t} e^{-t}.e^{-\tau}.e^{\tau}.d\tau = e^{-t}.t.u(t)$$

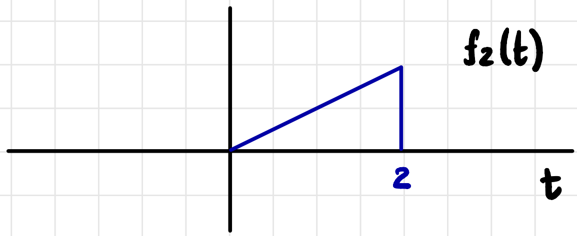
$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)^2}\right\} = t.e^{-t}.u(t)}$$

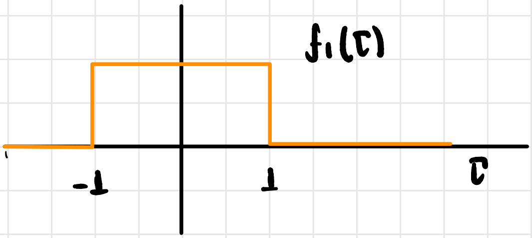
Calcular la transformada de $t \cdot e^{-t} \cdot u(t)$, utilizando la propiedad de la derivada en frecuencia.

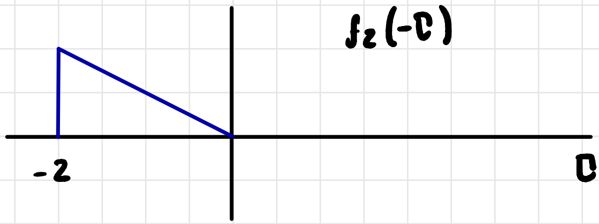
descripción de la Convolución gráficamente.

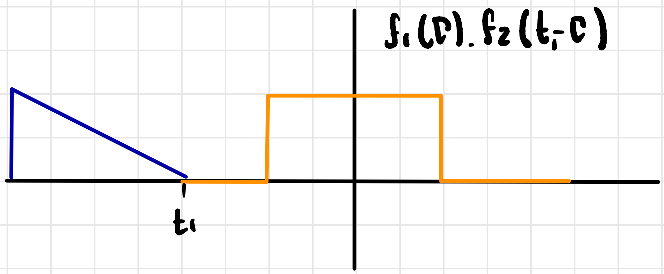
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau$$



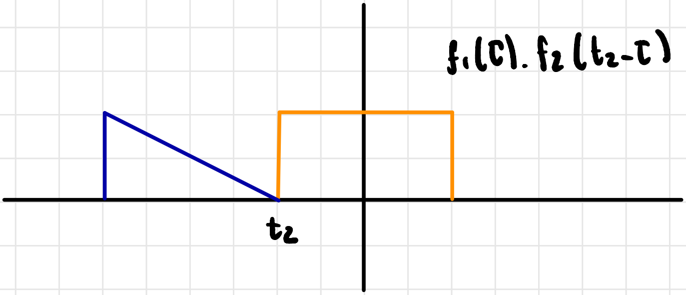




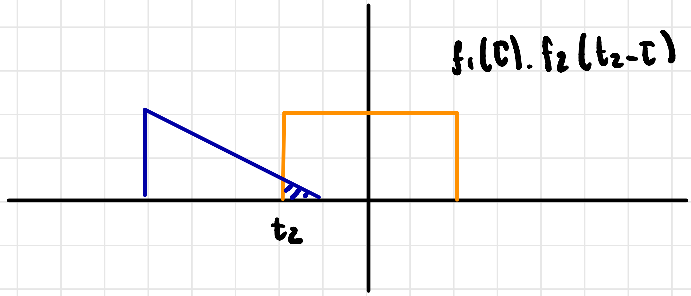


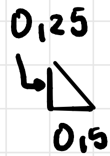


$A = 0$

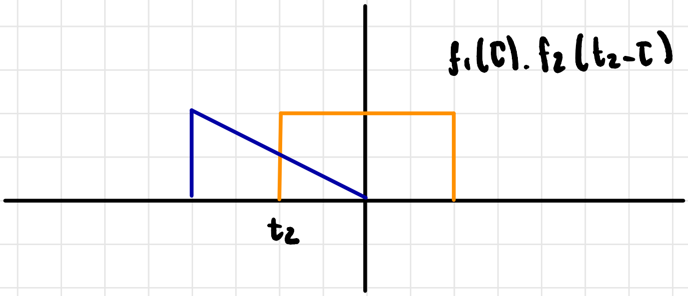


$A = 0$

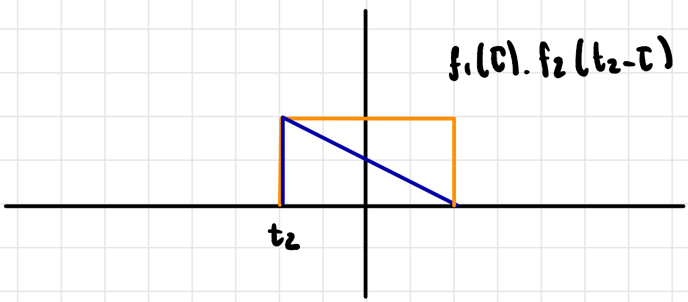


$A =$ 

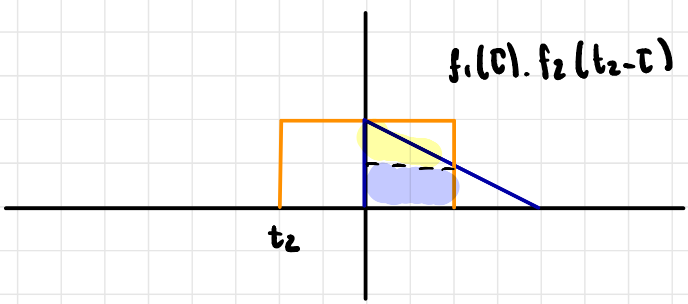
$A = 0{,}075 \cdot \frac{1}{2}$



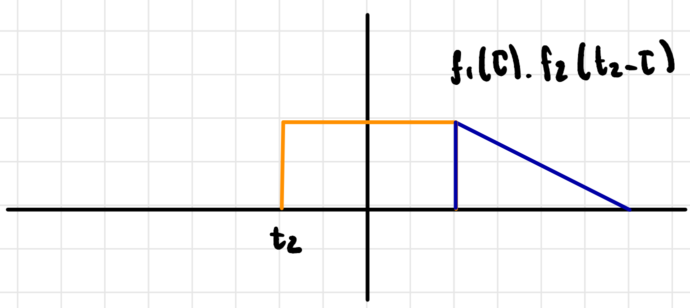
$A = 1 . 0{,}5 = 0{,}5 \times \frac{1}{2}$



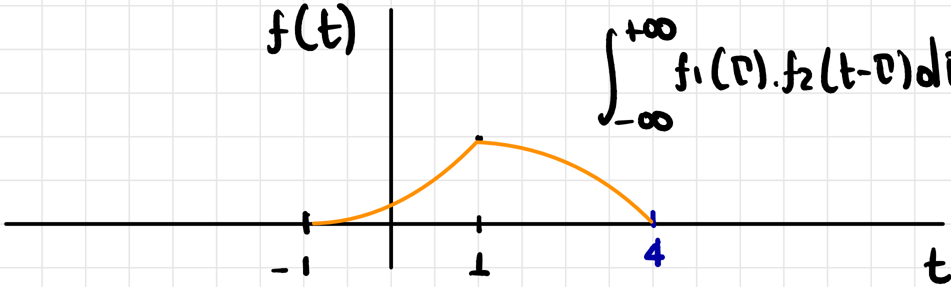
$A = \frac{1 . 2}{2} = 1$



$A = 0.5 . 1 + \frac{1 \times 0.5}{2}$



$A = 0$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) . f_2(t-\tau) d\tau .$$

Teorema Parseval.

Primero demostraremos que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) . f_2(t) . dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) . F_2(-\omega) d\omega}$$

Se parte de la propiedad de la Convolución en la frecuencia.

$$f_1(t) . f_2(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) . f_2(t) . e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y) . F_2(\omega - y) dy$$

Haciendo $\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) . f_2(t) . dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y) . F_2(-y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) . f_2(t) . dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) . F_2(-\omega) d\omega$$

Ahora el teorema de parseval dice.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) . f_2(t) . dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) . F_2(-\omega) d\omega$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) . \boxed{\quad ? \quad} d\omega$$

Conocemos la transformada de $f(t)$ que es $F(\omega)$ pero no conocemos la transformada $f^*(t)$ para lo cual tenemos:

$$\mathcal{F}\{ f^*(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) . e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) . e^{j\omega t})^* dt$$

$$\mathcal{F}\{ f^*(t) \} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-j(-\omega) t} dt \right)^* = (F(-\omega))^*$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) . (F(-(-\omega)))^* d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) . F^*(\omega) \, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$ ✓

Transformada de Fourier de Señales Periódicas

Se requiere $\mathcal{F}\{x_T(t)\}$, siendo $x_T(t)$ una señal periódica de periodo T. $x(t) = x(t+T)$, este representada en el espacio complejo de Fourier.

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{Donde } F_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{F_n e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{x_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - n\omega_0)}$$

Recordar que

Si $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

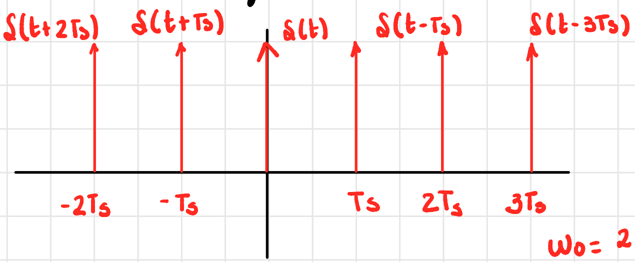
y $f(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \longrightarrow F(\omega - \omega_0)$

Si $1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

y $1 \cdot e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$

Ejemplo:

Hallar la Transformada de Fourier de la función periódica $\delta_{T_S}(t)$



$\omega_0 = 2\pi / T_S$

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_S}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot 2\pi\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_S}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot 2\pi\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

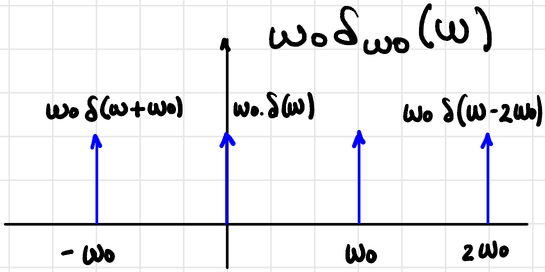
Recordar el cálculo de F_n para la función periódica $\delta_{T_s}(t)$.

$$F_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t).\, e^{-jnw_0t}\, dt = \frac{1}{T_s}.\, e^{-jnw_0t}\Big|_{t=0}$$

$$F_n = \frac{1}{T_s}$$

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}.\,2\pi\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

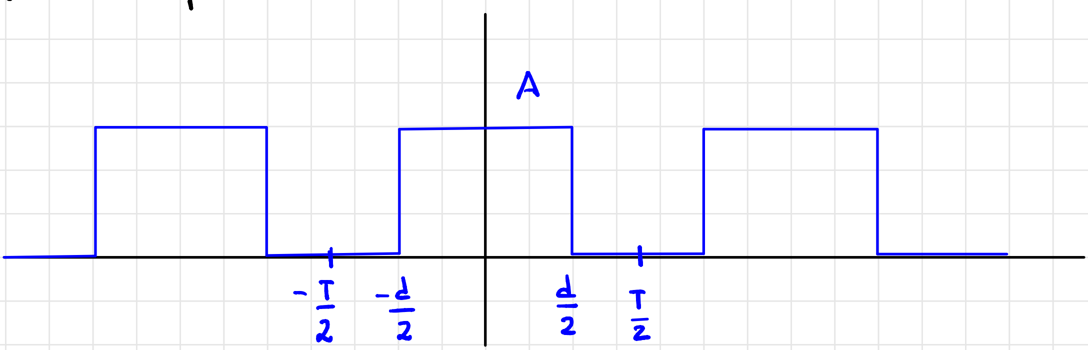
$$\mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0\, \delta(\omega - n\omega_0)$$



> La transformada de un teen de pulsos es otro tren de pulsos.

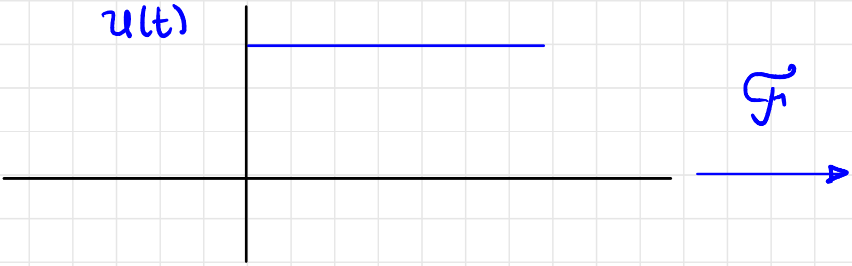
Ejercicio.

Calcular la transformada de Fourier. de la siguiente función periódica.



Cálculo de la Transformada de Fourier de funciones especiales.

Cálculo de la Transformada de Fourier de $u(t)$.



Asumamos que:

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

$$u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega)$$

La suma de $u(t) + u(-t) = 1$ excepto en $t=0$

Entonces la suma de sus transformadas estará en función de la función $\delta(t)$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} + \mathcal{F}\{u(-t)\} = \mathcal{F}\{1\}$$

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

Supongamos ahora que en general que la transformada de $u(t)$ es

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = F(\omega) = K.\delta(\omega) + B(\omega) \qquad ①$$

y $\mathcal{F}\{u(-t)\} = F(-\omega) = K\,\delta(-\omega) + B(-\omega)$ ②

Sumando los terminos ① y ②

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = F(\omega) = K.\delta(\omega) + B(\omega) \quad ①$$

$$y \ \mathcal{F}\{u(-t)\} = F(-\omega) = K\delta(-\omega) + B(-\omega) \quad ②$$

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi.\delta(\omega)$$

De donde se deduce que $K = \pi$ y $B(\omega)$ es impar $-B(\omega) = B(-\omega)$

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + B(\omega)$$

Para Conocer $B(\omega)$, recurriremos a la propiedad de la derivada

$$\text{Si} \quad u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

$$u'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} J\omega F(\omega)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} J\omega F(\omega)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

Ahora

$$1 = J\omega F(\omega)$$

$$1 = J\omega\left(\pi\delta(\omega) + J\omega B(\omega)\right)$$

$$1 = J\pi\omega\delta(\omega) + J\omega B(\omega)$$

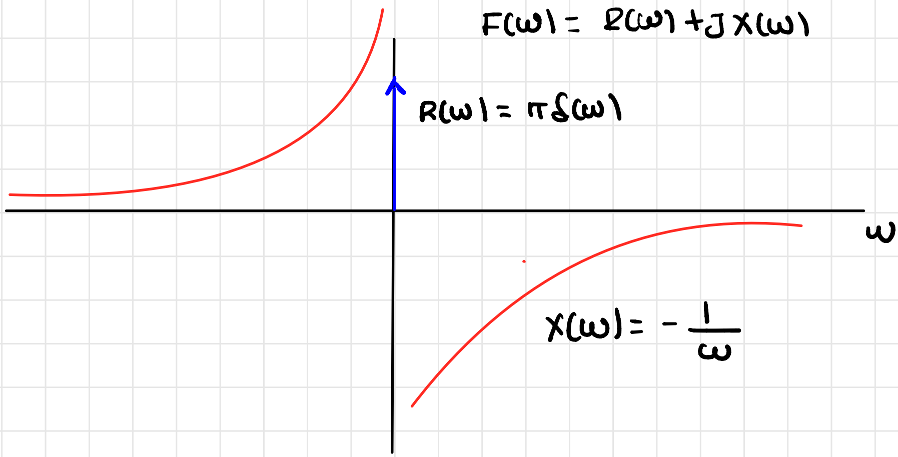
$$1 = J\omega B(\omega)$$

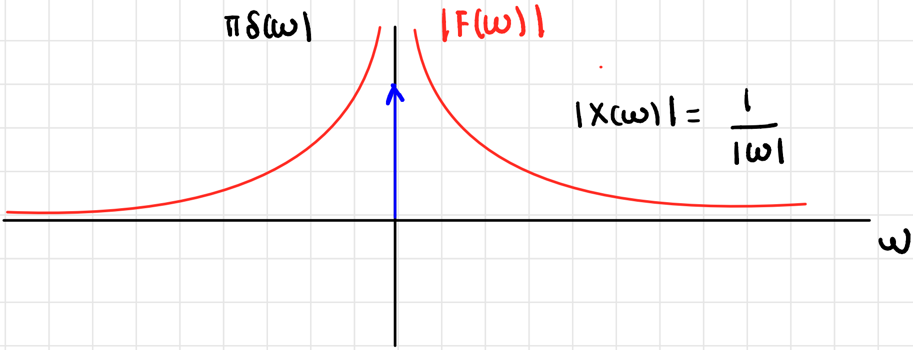
$$B(\omega) = 1/J\omega$$

De lo anterior se concluye que la transformada de $u(t)$ es:

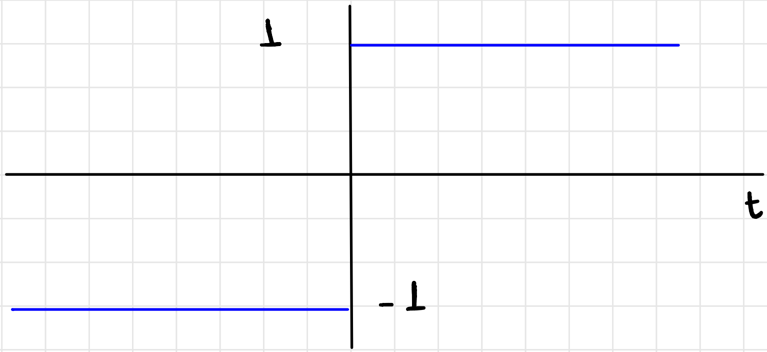
$$\boxed{F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{J\omega}}$$

Como se observa $u(t)$ es una señal que no cuenta con ningún tipo de paridad, por lo tanto cuenta con armonícos con parte Real e Imaginaria, como se observa en $F(\omega)$.





Calcular la transformada de $sgn(t)$



La función $sgn(t)$ se expresa en función de $u(t)$ así:

$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = \mathcal{F}\{u(t) - u(-t)\}$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} - \mathcal{F}\{u(-t)\}$$

Ahora

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{u(-t)\} = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \left(\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right)$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = \pi\cancel{\delta(\omega)} + \frac{1}{j\omega} - \pi\cancel{\delta(\omega)} + \frac{1}{j\omega}$$

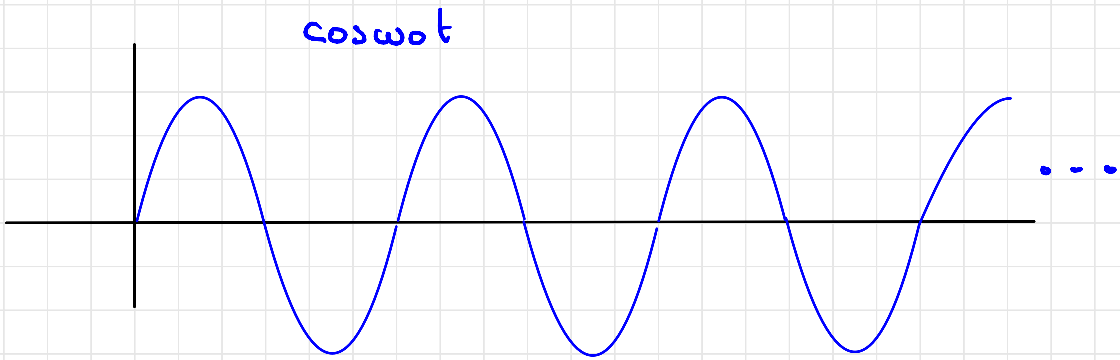
Por lo tanto la transformada de Sgn(t) es.

$$\boxed{\mathcal{F}\{Sgn(t)\} = \frac{2}{jw}}$$

Señal que es impar y tendrá ármonicos imaginarios puros.

Ejercicio

Hallar la transformada de un coseno causal



$x(t) = \cos w_0 t \cdot u(t)$

Aplicando la propiedad de la convolución en frecuencia tenemos.

$f_1(t) = \cos w_0 t$ y $F_1(w) = \pi\delta(w+w_0) + \pi\delta(w-w_0)$

$f_2(t) = u(t)$ y $F_2(w) = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$

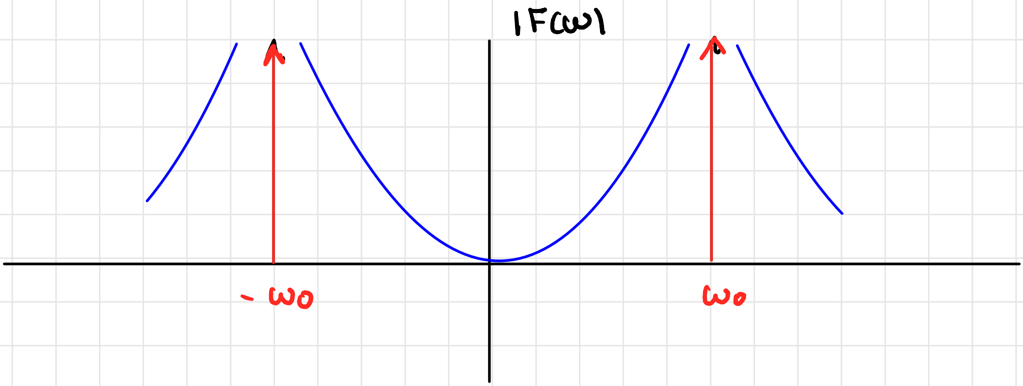
$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2\pi}\left(\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right) * \left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega+\omega_0) * \left(\pi\delta(\omega)+1/j\omega\right) + \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega-\omega_0) * \left(\pi\delta(\omega)+1/j\omega\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega+\omega_0) * \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega+\omega_0) * \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega-\omega_0) * \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}\pi\delta(\omega-\omega_0) * \frac{1}{j\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\pi\delta(\omega+\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2j}\frac{1}{(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{2j}\frac{1}{(\omega-\omega_0)}$$

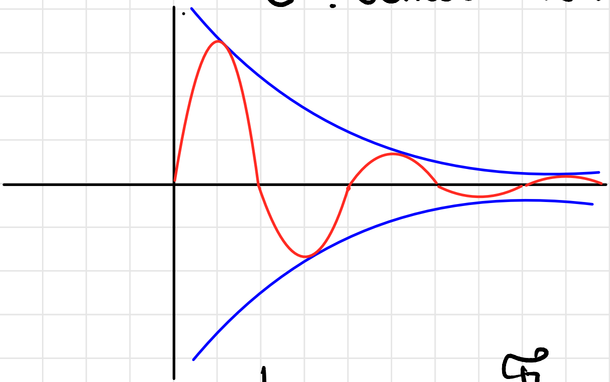
$$\boxed{F(\omega) = \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$



Hallar la transformada de la función:

$$f(t) = e^{-at}\,\mathrm{Sen}\,w_0 t\; u(t)$$

$e^{-at} \cdot \mathrm{Sen}\,w_0 t \cdot u(t)$



$$f_1(t) = e^{-at} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{a + jw}$$

$$f_2(t) = \mathrm{Sen}\,w_0 t \xrightarrow{\mathfrak{F}} j\pi\{\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)\}$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = e^{-at} \cdot u(t) \cdot \mathrm{Sen}\,w_0 t$$

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = F(w) = \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w)$$

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{a + jw} * (j\pi\,\delta(w + w_0) - j\pi\,\delta(w - w_0))\right\}$$

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{j\pi}{a + j(w + w_0)} - \frac{j\pi}{a + j(w - w_0)}\right\}$$

$$F(w) = \frac{j}{2} \cdot \left\{\frac{a + j(w - w_0) - (a + j(w + w_0))}{a^2 + aj(w + w_0) + aj(w - w_0) + j^2(w + w_0)(w - w_0)}\right\}$$

$$F(\omega) = \frac{j}{2} \cdot \left\{ \frac{a + j(\omega - \omega_0) - (a + j(\omega + \omega_0))}{a^2 + aj(\omega + \omega_0) + aj(\omega - \omega_0) + j^2(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} \right\}$$

$$F(\omega) = \frac{j^2}{2} \left\{ \frac{\omega - \omega_0 - \omega - \omega_0}{a^2 + 2aj\omega - (\omega^2 - \omega\omega_0 + \omega_0\omega - \omega_0^2)} \right\}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\omega_0}{a^2 + 2aj\omega - \omega^2 + \omega_0^2} \right\}$$

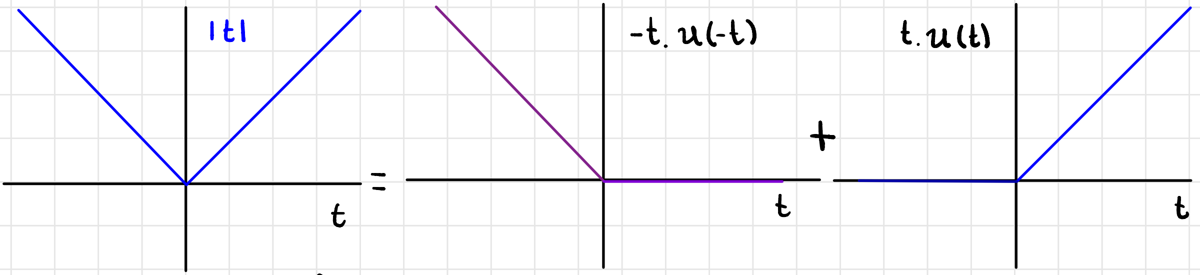
$$\boxed{F(\omega) = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}}$$

Hallar la transformada de Fourier de:

$x(t) = e^{-a|t|}$?

$x(t) = |t|$

La función $f(t) = |t|$ puede representarse como la suma de $t.u(t) - t.u(-t)$ como se observa en los gráficos



Por lo tanto la $\mathcal{F}\{|t|\}$ se puede expresar como la transformada de su representación así:

$$\mathcal{F}\{|t|\} = \mathcal{F}\{t.u(t) - t.u(-t)\}$$

Aplicando la propiedad de linealidad tenemos:

$$\mathcal{F}\{|t|\} = \underbrace{\mathcal{F}\{t.u(t)\}}_{A} - \underbrace{\mathcal{F}\{t.u(-t)\}}_{B.}$$

Existen Ahora dos transformadas que debemos Conocer para hallar la transformada de $f(t) = |t|$

La transformada A y B se calcularán a partir de la Propiedad de la derivada que dice

Si $\quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$\Rightarrow \quad -jt.f(t) \longrightarrow F'(\omega)$

Para la transformada A ; $\mathcal{F}\{t\,u(t)\}$

Si conocemos:

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Entonces

$$-jt.\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)$$

$$-jt\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta'(\omega) + \frac{1}{j}\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

Multiplicando por (j) a ambos lados tenemos:

$$j.(-jt)\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\delta'(\omega) + \frac{j}{j}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

Por lo tanto la expresión quedará

$$t.\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \qquad A$$

Para la transformada B ; $\mathcal{F}\{t.\,u(-t)\}$

Primero aplicaremos la propiedad de escalonamiento para hallar $\mathcal{F}\{u(-t)\}$

Así si $u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$\Rightarrow u(-t) \longrightarrow \pi\delta(-\omega) + \frac{1}{j(-\omega)}$$

Entonces

Recordar que: $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$

$$u(-t) \longrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

Ahora ya podemos aplicar esta transformada $\mathcal{F}\{u(-t)\} = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$ para Hallar $\mathcal{F}\{t.u(-t)\}$

Podemos aplicar la propiedad de la derivada en frecuencia para resolverla

Si $\quad u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) - \dfrac{1}{j\omega}$

$$\Rightarrow -jt\,u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}\left(\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right)$$

$$-jt\,u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{j}\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

Múltiplicando por j a ambos lados, tenemos

$$j(-jt)\,u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\delta'(\omega) - \frac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$t.u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\delta'(\omega) + \frac{1}{\omega^2} \qquad B$$

Ahora, retomando:

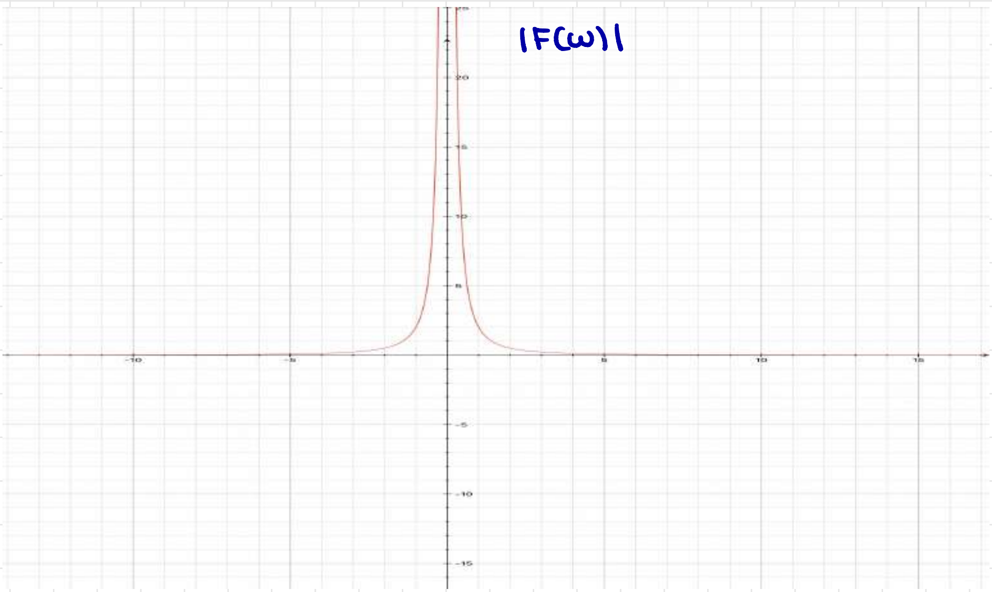
$$\mathcal{F}\{|t|\} = \underbrace{\mathcal{F}\{t.u(t)\}}_{A} - \underbrace{\mathcal{F}\{t.u(-t)\}}_{B.}$$

La respuesta será:

$$\mathcal{F}\{|t|\} = \underbrace{\left(j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}\right)}_{A} - \underbrace{\left(j\pi\delta'(\omega) + \frac{1}{\omega^2}\right)}_{B}$$

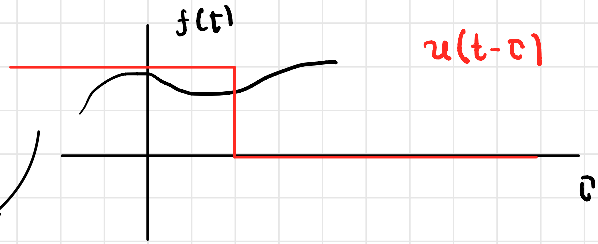
$$\boxed{\mathcal{F}\{|t|\} = -\frac{2}{\omega^2}}$$

$$F(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$$



Hallar la transformada de $f(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$ utilizando la Convolución.

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau).d\tau$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau).u(t-\tau)\,d\tau$$

$$f(t) * u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau).d\tau = f(t) * u(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{F}\left\{f(t) * u(t)\right\}$$

$$f(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega).\,\mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$f(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$f(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi F(\omega).\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

$$f(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi f(0).\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.F(\omega)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau).d\tau\right\} = \pi f(0).\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)}$$