De la Serie de Fourier a la transformada de Fourier.

Hasta el momento hemos trabajado sobre la representación de señales periódicas, utilizando las Series de Representación de Fourier pero dejamos atrás la representación de señales aperiódicas.

Esta parte del curso la dedicaremos a llenar el vacío de la Representación de Señales aperiódicas.

Partimos de la expresión generalizada

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$ donde $x_T(t)$ es una señal Periódica.

y $$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

Y para observar como la representación de una señal periódica se convierte en una Representación de una señal Aperiódica

Tomaremos inicialmente los siguientes casos para los trenes de pulsos donde los anchos y sus periodos son:

Caso No. 1 $d=1$; $T=2$

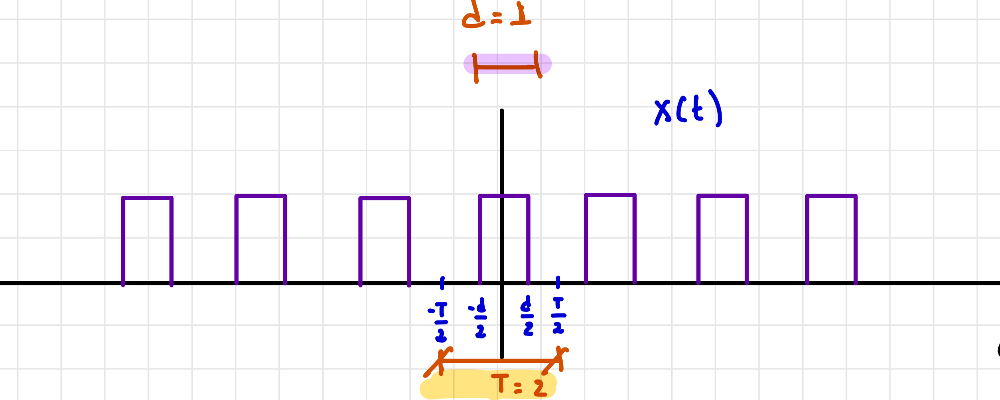
Caso No. 2 $d=1$; $T=5$

Caso No. 3. $d=1$; $T=10$

Nótese que si el periodo de la Señal la tiendo a infinito, La señal se convertirá en aperiodica.

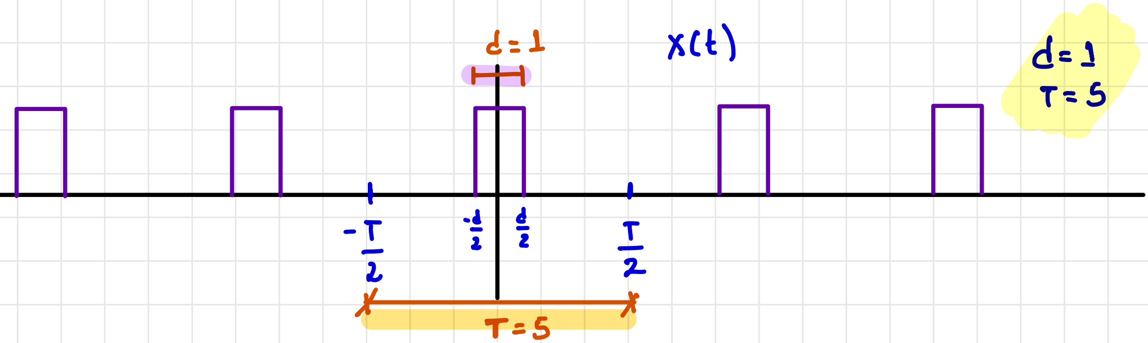
$$\underset{\text{Periodico}}{x_T(t)} \xrightarrow{T \to \infty} \underset{\text{Aperiodico}}{x(t)}$$

Caso 1

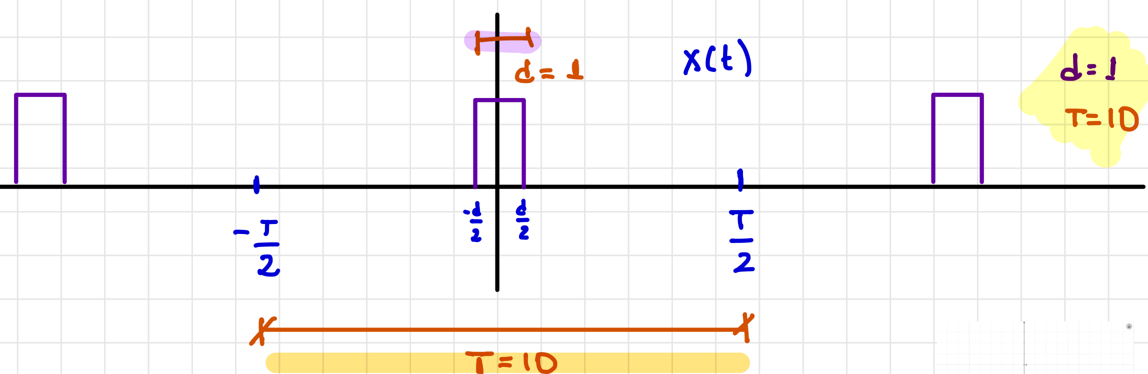


d=1
T=2

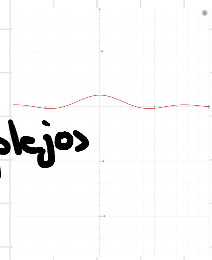
Caso 2



Caso 3

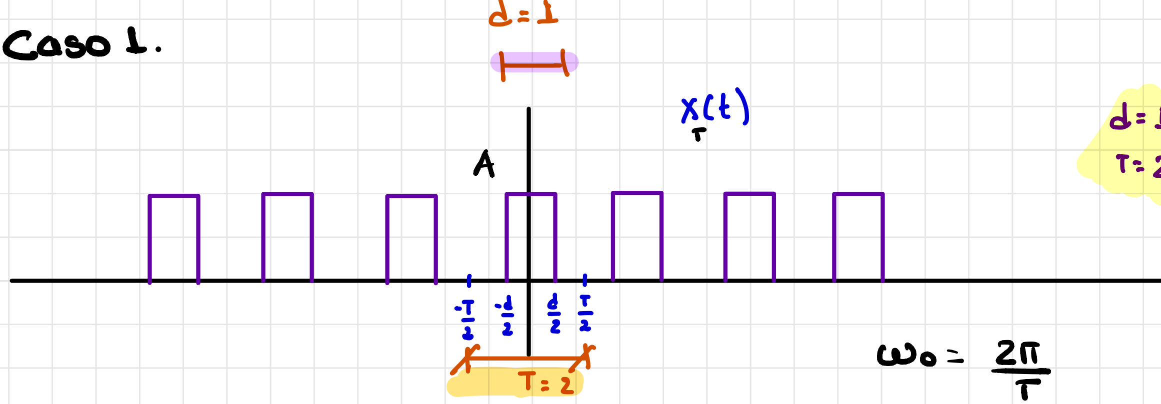


d=1
T=10



se hallaran los valores de los espectros complejos para cada caso

Caso 1.



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{-jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-d/2}^{d/2}$$

$$F_n = \frac{A}{-jTn\omega_0} \cdot \left\{ e^{-jn\omega_0 d/2} - e^{jn\omega_0 d/2} \right\}$$

$$F_n = \frac{A}{jTn\omega_0} \cdot \left\{ e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2} \right\}$$

$$F_n = \frac{2A}{Tn\omega_0} \cdot \left\{ \frac{e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}}{2} \right\}$$

$$F_n = \frac{2A}{Tn\omega_0} \cdot \left\{ \frac{e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}}{2j} \right\}$$

$$F_n = \frac{2A}{Tn\omega_0} \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)$$

$$F_n = \frac{2A}{T}\frac{d}{2} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)}{n\omega_0 d/2}$$

$$F_n = A\, d/T \, Sa(n\omega_0 d/2)$$

Para graficar la función $A d/T \, Sa(n\omega_0 d/2)$, debemos conocer cuando la función cruza por cero, lo cual se hace cuando su argumento $(n\omega_0 d/2)$ se hace igual a $\pm K\pi$ para $K = 1, 2, 3. 4 \ldots$

$$n\omega_0 d/2 = \pm K\pi$$

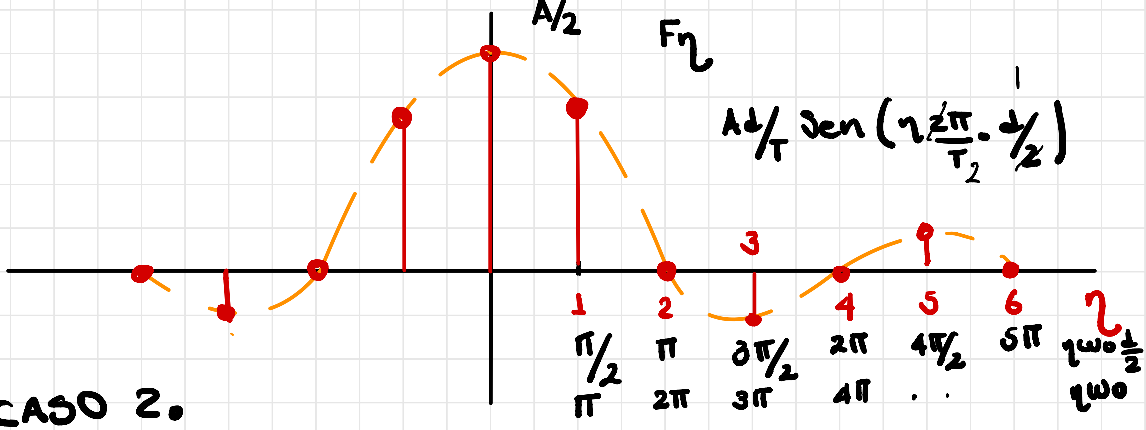
$$n \frac{2\cancel{\pi}}{T} \cdot \frac{d}{\cancel{2}} = \pm K \cancel{\pi}$$

$$n \cdot \frac{d}{T} = \pm K$$

$n = \pm K \, T/d$, Para el caso particular $d = 1 \wedge T = 2$

$n = \pm K \, 2/1$. Para $K = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8 \ldots$

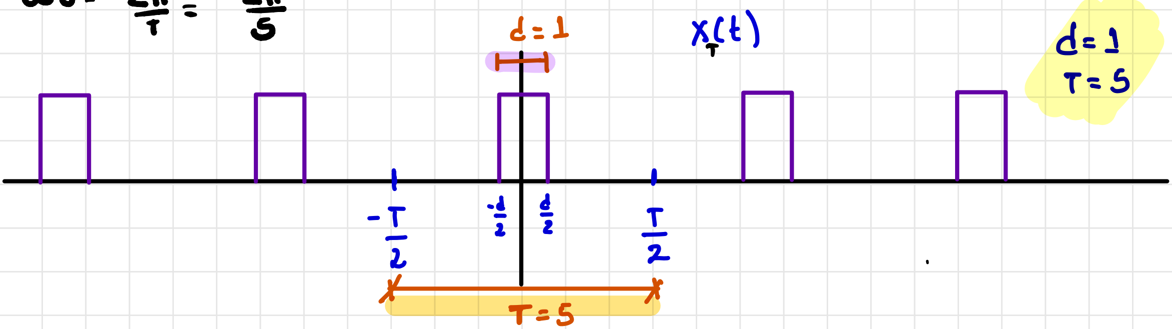
es decir cada dos muestras se hace cero F_n

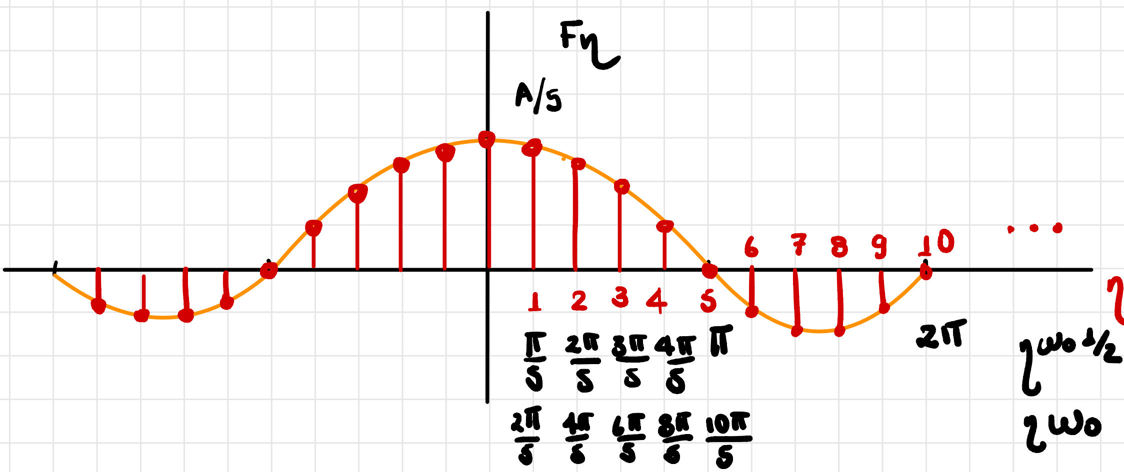


CASO 2.

Si $d=1$ y $T=5$ (Periodo más grande); cruce en $n=\pm k5$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}$

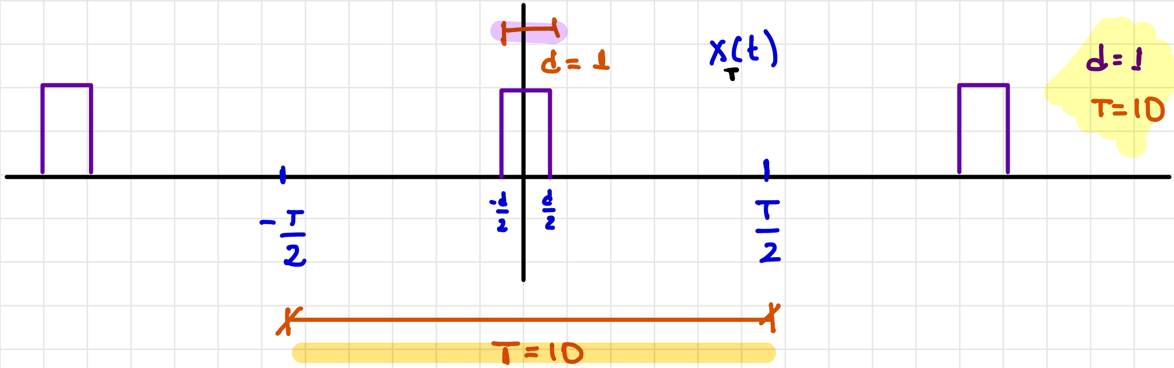




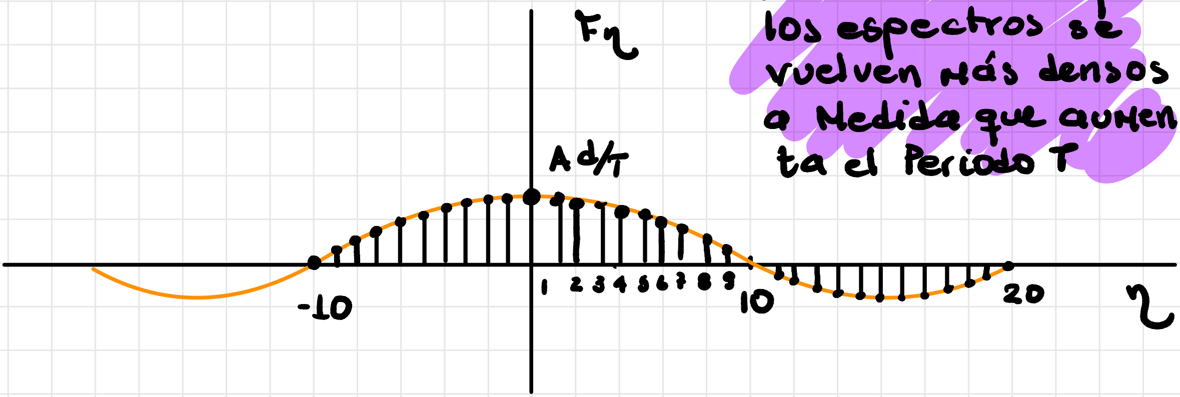
CASO 3.

$d = 1$ y $T = 10$ (Periodo más grande); cruce en $n = \pm k10$

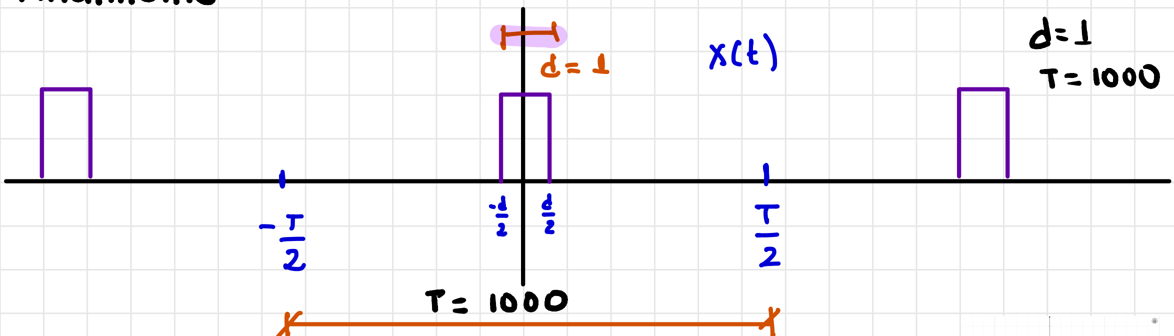
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.



Se debe notar que los espectros se vuelven más densos a medida que aumenta el Periodo T



Finalmente



Graficar F_n

Alguna Conclusión ?

Volviendo a la Representación compleja.

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \, e^{jnw_0t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) . e^{-jnw_0t} .$$

y Reemplazando F_n en $x_T(t)$

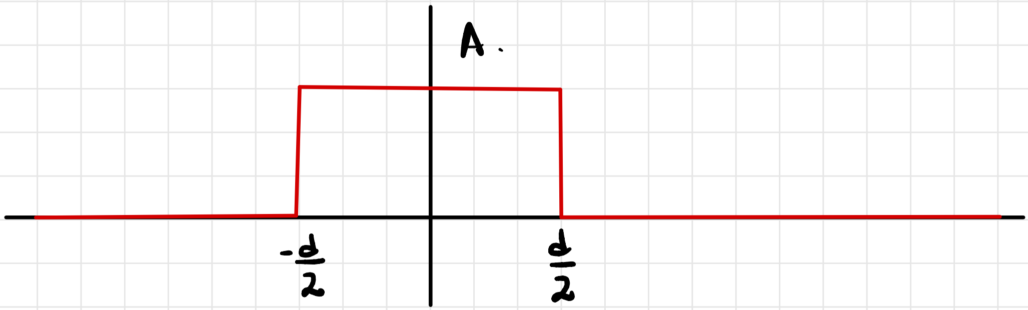
$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) . e^{-jnw_0t} dt . e^{jnw_0t}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{w_0}{2\pi}$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{w_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) . e^{-jnw_0t} dt . e^{jnw_0t}$$

Ahora si en la expresión tiendo el Periodo a Infinito. Sucede lo siguiente.

la función $x_T(t)$ deja de ser Periódica y se convierte en aperiódica.



Segundo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ tiende a $\Delta\omega_0$ (Valor Infinitesimal)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-jn\Delta\omega_0 t} . dt . e^{jn\Delta\omega_0 t} . \Delta\omega_0$$

Ahora la expresión

$n\Delta\omega_0$ converge ω cuando $n \to \infty$

y la Sumatoria sobre $\Delta\omega_0$ se representa a partir de una Integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-j\omega t} dt . e^{j\omega t} d\omega .$$

Donde:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\, e^{-j\omega t}\, dt}_{F(\omega)}.\; e^{j\omega t}\, d\omega .$$

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\, e^{-j\omega t}\, dt .}$$

Donde la expresión se denomina la transformada de Fourier.

Y $X(\omega)$ serán los espectros continuos de Fourier o la función de densidad espectral.

La transformada Inversa es por lo tanto:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).\, e^{+j\omega t}\, d\omega .}$$

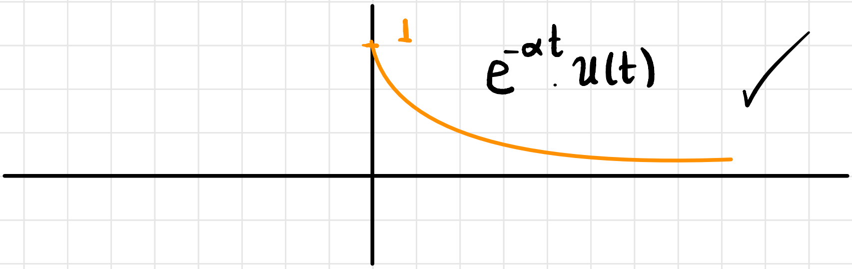
Ahora la función $X(\omega)$ es una función compleja.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\cos\omega t\, dt + j - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\operatorname{sen}\omega t\, dt .$$

$$X(\omega) = X_{Real}(\omega) + j\, X_{imag}(\omega)$$

Ejemplo:

Halle la Representación Integral de $x(t)$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} . u(t) . e^{-j\omega t} dt.$$

$$X(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} . e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega) t} dt$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{(\alpha + j\omega)} . e^{-(\alpha + j\omega) t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

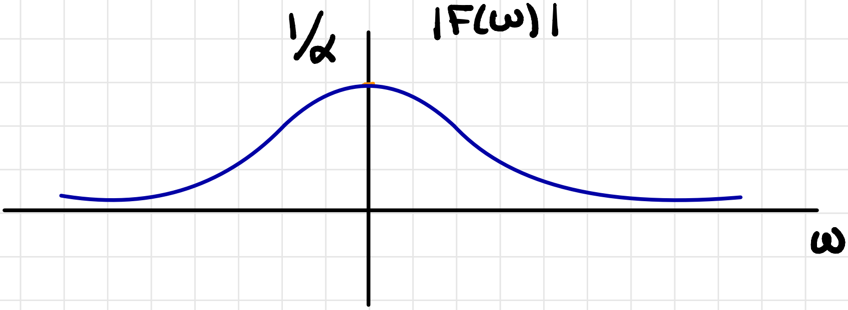
$$X(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)} . \left(e^{-(\alpha + j\omega) . 0} - e^{-(\alpha + j\omega) \infty} \right)$$

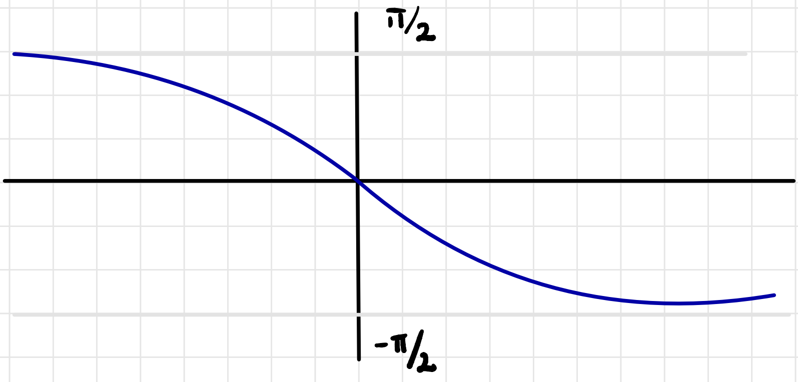
$$X(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)}$$

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$

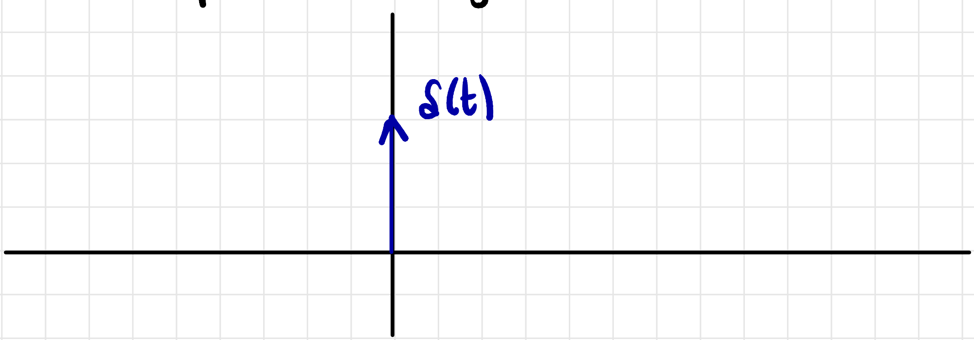
$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan(\omega/\alpha)$$

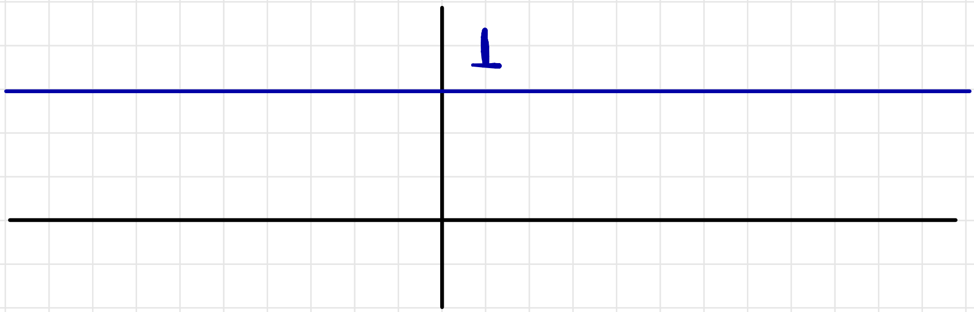




Hallar los espectros de la función $\delta(t)$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) . e^{-j\omega t} \, dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$



Demostrar que si $x(t)$ es real. su espectro real es par y su espectro imaginario es impar.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-j\omega t} \, dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

$$X(\omega) = X_{real}(\omega) + j X_{imag}(\omega)$$

$$X_{real}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \cos \omega t \, dt$$

$$X_{imag}(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

$X_{real}(\omega) = X_{real}(-\omega) \longrightarrow X_{real}(\omega)$: PAR

$X_{imag}(\omega) = - X_{imag}(-\omega)$ $\quad X_{im}(\omega)$: IMPAR.

$$X_{real}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \cos(-\omega t) dt$$

$$X_{real}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \cos(\omega t) dt$$

$$\boxed{X_{real}(-\omega) = X_{real}(\omega)}$$

$$X_{imag}(-\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \operatorname{sen}(-\omega t) dt$$

como el $\operatorname{sen}(-\omega t) = -\operatorname{sen}\omega t$ por ser impar

$$X_{imag}(-\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} -x(t) . \operatorname{sen}\omega t \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \operatorname{sen}\omega t \, dt$$

$$\boxed{X_{imag}(-\omega) = X_{imag}(\omega)}$$

$$X(-\omega) = X_{real}(-\omega) + j X_{imag}(-\omega)$$

$$\boxed{X(-\omega) = X_{real}(\omega) - j X_{imag}(\omega)}$$

donde $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Ahora demostrar que su magnitud es PAR y su fase IMPAR.

$$X(\omega) = |X(\omega)| . e^{j\phi(\omega)}$$

$$X(-\omega) = |X(-\omega)| . e^{j\phi(-\omega)}$$

$$X^*(\omega) = |X(\omega)| . e^{-j\phi(\omega)} .$$

como

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

Se tiene

$$|F(-\omega)|e^{+j\phi(-\omega)} = |F(\omega)| \cdot e^{-j\phi(\omega)}$$

Donde se deduce que.

la Magnitud es par

$$\boxed{|F(\omega)| = |F(-\omega)|} \checkmark$$

y su fase.

$$\boxed{-\phi(\omega) = \phi(-\omega)} \checkmark$$

Existencia de la transformada de Fourier.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$ esta integral existe

si la Integral de la magnitud de x(t) existe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

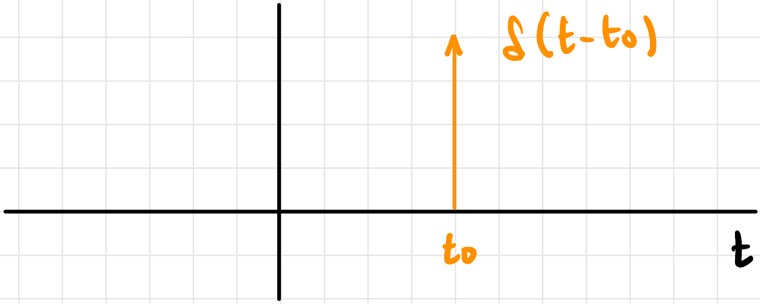
Dado $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot e^{-j\omega t}| dt$$

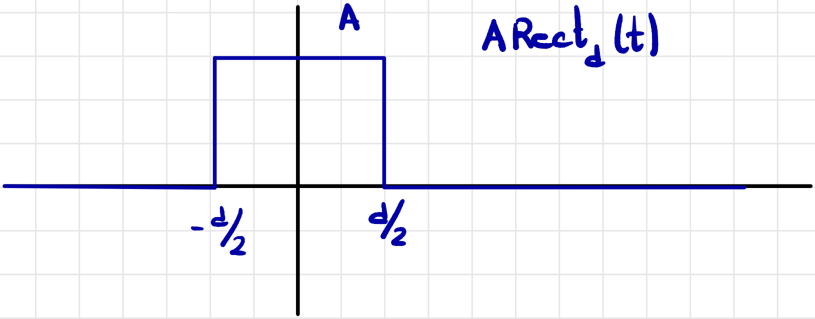
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$$

$$|e^{j\omega t}| = \sqrt{\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t} = 1.$$

Entonces con que exista $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt$ es condición suficiente para que exista $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}\,dt$.

Ejercicio





Hallar para las señales mostradas, las densidades espectrales correspondientes