Índice

1 Identidad del coseno de la suma

La identidad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos es:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2 Demostración geométrica usando el círculo unitario

Consideremos dos ángulos a y b en el círculo unitario. Los puntos correspondientes son:

- $P_a = (\cos a, \sin a)$
- $P_b = (\cos b, \sin b)$

La rotación por a seguida de una rotación por b equivale a una rotación por $a + b$.

3 Deducción de la matriz de rotación

La matriz de rotación por un ángulo θ en el plano se deduce así:

Si rotamos el punto (x, y) por un ángulo θ respecto al origen, las nuevas coordenadas (x', y') son:

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$
$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$

Esto se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4 Demostración de la fórmula de cos(a+b)

Multiplicando las matrices de rotación:

$$R(a)R(b) = R(a+b)$$

Calculando el producto:

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

El elemento (1,1) del resultado es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Demostración alternativa usando el círculo unitario

Consideremos los puntos $A = (\cos a, \sin a)$ y $B = (\cos b, \sin b)$ en el círculo unitario. La rotación de A por un ángulo b produce el punto C:

$$C_x = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$C_y = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

El componente x de C corresponde a $\cos(a+b)$, por lo tanto:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración se basa en la composición de coordenadas en el círculo unitario y la definición de la suma de ángulos.

Demostración alternativa usando la fórmula de Euler

Recordemos que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Entonces:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned}
&(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \\
&\cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b \\
&= \cos a \cos b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b) - \sin a \sin b
\end{aligned}$$

El término real es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración utiliza la notación exponencial compleja y la fórmula de Euler.

5 Representación de los números complejos como matrices 2x2

Un número complejo $z = a + bi$ puede representarse como la matriz:

$$M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz actúa sobre vectores en $\mathbb{R}^2$ de la misma forma que la multiplicación por el número complejo z.

Por ejemplo, el número complejo i se representa como:

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz corresponde a una rotación de 90° en el plano.

La multiplicación de matrices de este tipo corresponde a la multiplicación de números complejos.

6 Ejemplo: Rotación de 2 pi quintos como matriz 2x2

La matriz de rotación por un ángulo θ en el plano es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para $\theta = \frac{2\pi}{5}$:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Aproximando los valores:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.3090, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.9511$$

Además, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo φ:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación puede escribirse como:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi-1}{2} & -0.9511 \\ 0.9511 & \frac{\varphi-1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz realiza una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ radianes (72 grados) en el plano.

7 Demostración de la relación entre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ y el número áureo

Para demostrar que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo φ, partimos de la ecuación para el coseno de múltiplos de π:

Sabemos que las raíces de la ecuación $x^5 = 1$ en el plano complejo son los vértices del pentágono regular inscrito en el círculo unitario. Si escribimos estas raíces como $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, los valores de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ corresponden a las partes reales de estas raíces.

La suma y productos de los cosenos de los ángulos múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ están relacionados con las soluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas. En particular, usando identidades trigonométricas y simetría del pentágono, se puede demostrar que $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ satisface la ecuación:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

El polinomio ciclotómico de grado 5 es:

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Sus raíces son los números complejos $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Si escribimos $x = e^{2\pi i/5}$, entonces $x^5 = 1$ y las partes reales de estas raíces corresponden a los cosenos de los ángulos $\frac{2\pi k}{5}$.

Para encontrar una ecuación que satisfaga $y = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, usamos la identidad:

$$2\cos(5\theta) = 2T_5(\cos\theta)$$

donde T_5 es el polinomio de Chebyshev de grado 5. Esto lleva a una ecuación polinómica para y.

Al manipular las expresiones y usando simetría, se obtiene que y satisface la ecuación cuadrática:

$$4y^2 + 2y - 1 = 0$$

Así, los polinomios cuadráticos para los cosenos de los múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ derivan del polinomio ciclotómico de grado 5 y de las propiedades de los polinomios de Chebyshev, que relacionan las raíces de la unidad con sus partes reales.

Resolviendo para x:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

El valor positivo corresponde a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

El número áureo es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, así que:

$$\frac{\varphi - 1}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Por lo tanto:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Esto demuestra la relación entre el coseno de $\frac{2\pi}{5}$ y el número áureo.

Polinomio de Chebyshev y relación con Fibonacci

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son una familia de polinomios definidos por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Son útiles porque relacionan los cosenos de múltiplos de un ángulo con potencias de $x = \cos\theta$. Por ejemplo, para $n = 5$:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

La identidad $\cos(5\theta) = T_5(\cos\theta)$ permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

Demostración de los polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ se definen recursivamente:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

Estos polinomios cumplen la identidad:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Por eso, si $x = \cos\theta$, entonces $T_5(x) = \cos(5\theta)$, lo que permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

Relación entre Chebyshev y Fibonacci

Existe una relación entre los polinomios de Chebyshev y la sucesión de Fibonacci. Si evaluamos el polinomio de Chebyshev de segundo tipo $U_n(x)$ en $x = \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$U_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_{n+1}$$

donde F_{n+1} es el número de Fibonacci de orden $n+1$.

Además, para el polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$, existe la relación:

$$T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F_n$$

Esto se debe a que ambos cumplen relaciones de recurrencia similares y están conectados a través de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_5\left(\frac{1}{2}\right) &= 16\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

que corresponde a $\frac{1}{2}F_5$ ya que $F_5 = 5$.

8 Conclusión

La fórmula se demuestra usando la composición de rotaciones en el plano, y se verifica algebraicamente con matrices de rotación.