

Índice

1. Definición de arco de un ángulo
2. Identidad del coseno de la suma
3. Demostración geométrica
4. Deducción de la matriz de rotación
5. Demostración de la fórmula de $\cos(a+b)$
6. Representación de los números complejos como matrices 2×2
7. Ejemplo: Rotación de $\frac{2\pi}{5}$ como matriz 2×2
8. Demostración de la relación entre $\cos(2\pi/5)$ y el número áureo
9. Polinomio de Chebyshev y relación con Fibonacci
10. Conclusión

1 ¿Qué es el arco de un ángulo?

El arco de un ángulo en una circunferencia es la porción de la circunferencia que corresponde a ese ángulo central. Si el ángulo es θ (en radianes), el arco es la longitud que abarca sobre la circunferencia, y se calcula como:

$$L = r\theta$$

donde r es el radio de la circunferencia y L es la longitud del arco.

En trigonometría, el concepto de arco también se usa para referirse a la función inversa de las funciones trigonométricas, como el arccoseno (\arccos), el arco seno (\arcsin) y el arco tangente (\arctan), que devuelven el ángulo cuyo coseno, seno o tangente es un valor dado.

Por ejemplo:

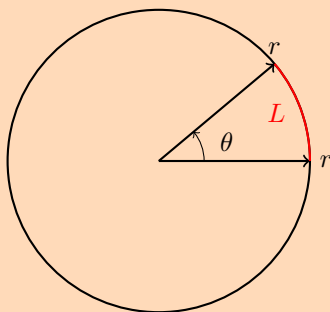
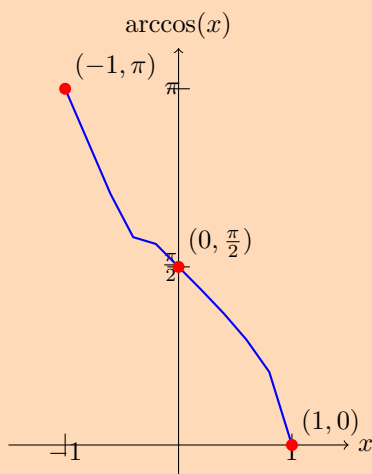
- $\arccos(x)$ es el ángulo cuyo coseno es x .
- $\arcsin(x)$ es el ángulo cuyo seno es x .
- $\arctan(x)$ es el ángulo cuya tangente es x .

Así, el "arco de un ángulo" puede referirse tanto a la longitud sobre la circunferencia como a la función inversa en trigonometría.

1.1 Gráfica de la función arcocoseno

La función arcocoseno $\arccos(x)$ tiene las siguientes características:

- Dominio: $[-1, 1]$
- Rango: $[0, \pi]$
- Es una función decreciente
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$



2 Identidad del coseno de la suma

La identidad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos es:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

3 Demostración geométrica usando el círculo unitario

Consideremos dos ángulos a y b en el círculo unitario. Los puntos correspondientes son:

- $P_a = (\cos a, \sin a)$
- $P_b = (\cos b, \sin b)$

La rotación por a seguida de una rotación por b equivale a una rotación por $a + b$.

4 Deducción de la matriz de rotación

La matriz de rotación por un ángulo θ en el plano se deduce así:

Si rotamos el punto (x, y) por un ángulo θ respecto al origen, las nuevas coordenadas (x', y') son:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\y' &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Esto se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

5 Demostración de la fórmula de $\cos(a+b)$

Multiplicando las matrices de rotación:

$$R(a)R(b) = R(a+b)$$

Calculando el producto:

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

El elemento (1,1) del resultado es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Demostración alternativa usando el círculo unitario

Consideremos los puntos $A = (\cos a, \sin a)$ y $B = (\cos b, \sin b)$ en el círculo unitario. La rotación de A por un ángulo b produce el punto C :

$$C_x = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$C_y = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

El componente x de C corresponde a $\cos(a+b)$, por lo tanto:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración se basa en la composición de coordenadas en el círculo unitario y la definición de la suma de ángulos.

Demostración alternativa usando la fórmula de Euler

Recordemos que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Entonces:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned} &(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \\ &\cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b \\ &= \cos a \cos b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b) - \sin a \sin b \end{aligned}$$

El término real es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración utiliza la notación exponencial compleja y la fórmula de Euler.

6 Representación de los números complejos como matrices 2x2

Un número complejo $z = a + bi$ puede representarse como la matriz:

$$M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz actúa sobre vectores en \mathbb{R}^2 de la misma forma que la multiplicación por el número complejo z .

Por ejemplo, el número complejo i se representa como:

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz corresponde a una rotación de 90° en el plano.

La multiplicación de matrices de este tipo corresponde a la multiplicación de números complejos.

7 Ejemplo: Rotación de $\frac{2\pi}{5}$ como matriz 2x2

La matriz de rotación por un ángulo θ en el plano es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Para $\theta = \frac{2\pi}{5}$:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Aproximando los valores:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.3090, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.9511$$

Además, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo φ :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación puede escribirse como:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi-1}{2} & -0.9511 \\ 0.9511 & \frac{\varphi-1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz realiza una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ radianes (72 grados) en el plano.

8 Demostración de la relación entre $\cos(2\pi/5)$ y el número áureo

Para demostrar que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo φ , partimos de la ecuación para el coseno de múltiplos de π :

Sabemos que las raíces de la ecuación $x^5 = 1$ en el plano complejo son los vértices del pentágono regular inscrito en el círculo unitario. Si escribimos estas raíces como $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, los valores de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ corresponden a las partes reales de estas raíces.

La suma y productos de los cosenos de los ángulos múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ están relacionados con las soluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas. En particular, usando identidades trigonométricas y simetría del pentágono, se puede demostrar que $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ satisface la ecuación:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

El polinomio ciclotómico de grado 5 es:

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Sus raíces son los números complejos $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Si escribimos $x = e^{2\pi i/5}$, entonces $x^5 = 1$ y las partes reales de estas raíces corresponden a los cosenos de los ángulos $\frac{2\pi k}{5}$.

Para encontrar una ecuación que satisfaga $y = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, usamos la identidad:

$$2\cos(5\theta) = 2T_5(\cos\theta)$$

donde T_5 es el polinomio de Chebyshev de grado 5. Esto lleva a una ecuación polinómica para y .

Al manipular las expresiones y usando simetría, se obtiene que y satisface la ecuación cuadrática:

$$4y^2 + 2y - 1 = 0$$

Así, los polinomios cuadráticos para los cosenos de los múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ derivan del polinomio ciclotómico de grado 5 y de las propiedades de los polinomios de Chebyshev, que relacionan las raíces de la unidad con sus partes reales.

Resolviendo para x :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

El valor positivo corresponde a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

El número áureo es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, así que:

$$\frac{\varphi - 1}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Por lo tanto:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Esto demuestra la relación entre el coseno de $\frac{2\pi}{5}$ y el número áureo.

9 Polinomio de Chebyshev y relacion con Fibonacci

9.1 Puntos por hacer

- ☐ Agregar ejemplos adicionales de polinomios de Chebyshev
- ☐ Relacionar con otras funciones trigonométricas

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son una familia de polinomios definidos por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Son útiles porque relacionan los cosenos de múltiplos de un ángulo con potencias de $x = \cos \theta$. Por ejemplo, para $n = 5$:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

La identidad $\cos(5\theta) = T_5(\cos \theta)$ permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

9.2 Demostracion de los polinomios de Chebyshev

9.3 Puntos por hacer

- ☐ Incluir demostración gráfica
- ☐ Agregar ejercicios de recurrencia

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ se definen recursivamente:

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\T_1(x) &= x \\T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\end{aligned}$$

Estos polinomios cumplen la identidad:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Por eso, si $x = \cos \theta$, entonces $T_5(x) = \cos(5\theta)$, lo que permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

9.4 Relacion entre Chebyshev y Fibonacci

9.5 Puntos por hacer

- ☐ Profundizar en la relación con la sucesión de Fibonacci
- ☐ Ejemplos numéricos

Existe una relación entre los polinomios de Chebyshev y la sucesión de Fibonacci. Si evaluamos el polinomio de Chebyshev de segundo tipo $U_n(x)$ en $x = \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$U_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_{n+1}$$

donde F_{n+1} es el número de Fibonacci de orden $n + 1$.

Además, para el polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$, existe la relación:

$$T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F_n$$

Esto se debe a que ambos cumplen relaciones de recurrencia similares y están conectados a través de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_5\left(\frac{1}{2}\right) &= 16\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

que corresponde a $\frac{1}{2}F_5$ ya que $F_5 = 5$.

9.6 Polinomios de Chebyshev y su relacion trigonometrica

9.7 Puntos por hacer

- ☐ Agregar ejemplos con valores específicos de theta
- ☐ Incluir aplicaciones en física y matemáticas

Sea $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y para $n > 1$:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

Estos son los polinomios de Chebyshev de primer tipo, definidos por recurrencia.

Ahora, demostraremos que:

$$P_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

Demostración:

Consideremos la recurrencia para $P_n(x)$ y tomemos $x = 2 \cos \theta$.

Definimos $S_n = \sin(n\theta)$.

Sabemos que:

$$S_{n+1} = 2 \cos \theta S_n - S_{n-1}$$

Esto es la misma recurrencia que para $P_n(x)$ con $x = 2 \cos \theta$.

9.8 Puntos por hacer

- ☐ Verificar casos base
- ☐ Completar demostración por inducción
- ☐ Agregar ejemplos numéricos

Por inducción:

- Para $n = 0$: $P_0(2 \cos \theta) = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin \theta}$
- Para $n = 1$: $P_1(2 \cos \theta) = 2 \cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}$

Supongamos que $P_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ y $P_{n-1}(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$.
Entonces:

$$P_{n+1}(2 \cos \theta) = 2 \cos \theta P_n(2 \cos \theta) - P_{n-1}(2 \cos \theta) \quad (1)$$

$$= 2 \cos \theta \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (2)$$

$$= \frac{2 \cos \theta \sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (3)$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$2 \cos \theta \sin((n+1)\theta) = \sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta)$$

Por lo tanto:

$$P_{n+1}(2 \cos \theta) = \frac{\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) - \sin(n\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin \theta}$$

Esto completa la inducción y la demostración.

9.9 Puntos por hacer

- ☐ Agregar conexión con Fibonacci
- ☐ Incluir gráficas comparativas
- ☐ Verificar con ejemplos específicos

10 Conclusión

La fórmula se demuestra usando la composición de rotaciones en el plano, y se verifica algebraicamente con matrices de rotación.