# Índice



## 1 ¿Qué es el arco de un ángulo?

El arco de un ángulo en una circunferencia es la porción de la circunferencia que corresponde a ese ángulo central. Si el ángulo es $\theta$ (en radianes), el arco es la longitud que abarca sobre la circunferencia, y se calcula como:

$$L = r\theta$$

donde $r$ es el radio de la circunferencia y $L$ es la longitud del arco.

En trigonometría, el concepto de arco también se usa para referirse a la función inversa de las funciones trigonométricas, como el arccoseno (arccos), el arco seno (arcsin) y el arco tangente (arctan), que devuelven el ángulo cuyo coseno, seno o tangente es un valor dado.

Por ejemplo:

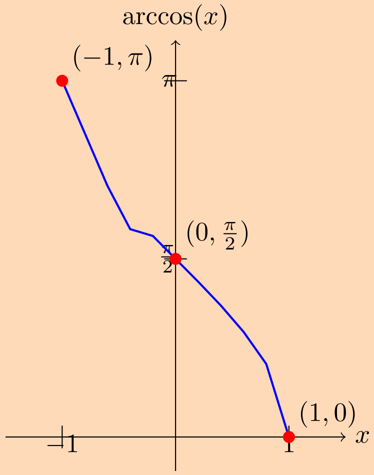
- $\arccos(x)$ es el ángulo cuyo coseno es $x$.
- $\arcsin(x)$ es el ángulo cuyo seno es $x$.
- $\arctan(x)$ es el ángulo cuya tangente es $x$.

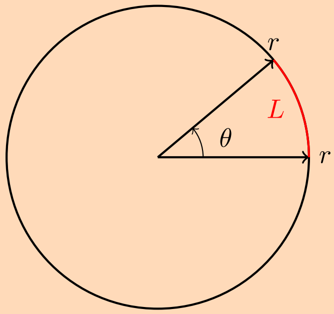
Así, el "arco de un ángulo" puede referirse tanto a la longitud sobre la circunferencia como a la función inversa en trigonometría.

## 1.1 Gráfica de la función arcocoseno

La función arcocoseno $\arccos(x)$ tiene las siguientes características:

- Dominio: $[-1, 1]$
- Rango: $[0, \pi]$
- Es una función decreciente
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$



## 2 Identidad del coseno de la suma

La identidad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos es:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

## 3 Demostración geométrica usando el círculo unitario

Consideremos dos ángulos $a$ y $b$ en el círculo unitario. Los puntos correspondientes son:

- $P_a = (\cos a, \sin a)$
- $P_b = (\cos b, \sin b)$

La rotación por $a$ seguida de una rotación por $b$ equivale a una rotación por $a + b$.

## 4 Deducción de la matriz de rotación

La matriz de rotación por un ángulo $\theta$ en el plano se deduce así:

Si rotamos el punto $(x, y)$ por un ángulo $\theta$ respecto al origen, las nuevas coordenadas $(x', y')$ son:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Esto se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

## 5 Demostración de la fórmula de cos(a+b)

Multiplicando las matrices de rotación:

$$R(a)R(b) = R(a + b)$$

Calculando el producto:

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

El elemento (1,1) del resultado es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

### Demostración alternativa usando el círculo unitario

Consideremos los puntos $A = (\cos a, \sin a)$ y $B = (\cos b, \sin b)$ en el círculo unitario. La rotación de $A$ por un ángulo $b$ produce el punto $C$:

$$C_x = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$C_y = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

El componente $x$ de $C$ corresponde a $\cos(a + b)$, por lo tanto:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración se basa en la composición de coordenadas en el círculo unitario y la definición de la suma de ángulos.

### Demostración alternativa usando la fórmula de Euler

Recordemos que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Entonces:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned}
&(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \\
&\cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b \\
&= \cos a \cos b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b) - \sin a \sin b
\end{aligned}$$

El término real es:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Por lo tanto:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Esta demostración utiliza la notación exponencial compleja y la fórmula de Euler.

## 6 Representación de los números complejos como matrices 2x2

Un número complejo $z = a + bi$ puede representarse como la matriz:

$$M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz actúa sobre vectores en $\mathbb{R}^2$ de la misma forma que la multiplicación por el número complejo $z$.

Por ejemplo, el número complejo $i$ se representa como:

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz corresponde a una rotación de 90° en el plano.

La multiplicación de matrices de este tipo corresponde a la multiplicación de números complejos.

## 7 Ejemplo: Rotación de $\frac{2\pi}{5}$ como matriz 2x2

La matriz de rotación por un ángulo $\theta$ en el plano es:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para $\theta = \frac{2\pi}{5}$:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Aproximando los valores:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.3090, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.9511$$

Además, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo $\varphi$:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación puede escribirse como:

$$R\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi-1}{2} & -0.9511 \\ 0.9511 & \frac{\varphi-1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz realiza una rotación de $\frac{2\pi}{5}$ radianes (72 grados) en el plano.

# 8 Demostración de la relación entre cos(2pi/5) y el número áureo

Para demostrar que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ se puede expresar en términos del número áureo $\varphi$, partimos de la ecuación para el coseno de múltiplos de $\pi$:

Sabemos que las raíces de la ecuación $x^5 = 1$ en el plano complejo son los vértices del pentágono regular inscrito en el círculo unitario. Si escribimos estas raíces como $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, los valores de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ corresponden a las partes reales de estas raíces.

La suma y productos de los cosenos de los ángulos múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ están relacionados con las soluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas. En particular, usando identidades trigonométricas y simetría del pentágono, se puede demostrar que $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ satisface la ecuación:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

El polinomio ciclotómico de grado 5 es:

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Sus raíces son los números complejos $e^{2\pi ik/5}$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Si escribimos $x = e^{2\pi i/5}$, entonces $x^5 = 1$ y las partes reales de estas raíces corresponden a los cosenos de los ángulos $\frac{2\pi k}{5}$.

Para encontrar una ecuación que satisfaga $y = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, usamos la identidad:

$$2\cos(5\theta) = 2T_5(\cos\theta)$$

donde $T_5$ es el polinomio de Chebyshev de grado 5. Esto lleva a una ecuación polinómica para $y$.

Al manipular las expresiones y usando simetría, se obtiene que $y$ satisface la ecuación cuadrática:

$$4y^2 + 2y - 1 = 0$$

Así, los polinomios cuadráticos para los cosenos de los múltiplos de $\frac{2\pi}{5}$ derivan del polinomio ciclotómico de grado 5 y de las propiedades de los polinomios de Chebyshev, que relacionan las raíces de la unidad con sus partes reales.

Resolviendo para $x$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

El valor positivo corresponde a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

El número áureo es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, así que:

$$\frac{\varphi - 1}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Por lo tanto:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Esto demuestra la relación entre el coseno de $\frac{2\pi}{5}$ y el número áureo.

# 9 Demostración alternativa de la ecuación para cos(2/5)

Una segunda razón por la cual $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ satisface la ecuación $4x^2+2x-1=0$ se basa en las propiedades del pentágono regular y la teoría de números complejos.

## 9.1 Enfoque mediante las raíces quintas de la unidad

Las raíces quintas de la unidad son las soluciones de $z^5 = 1$, dadas por:

$$z_k = e^{2\pi ik/5} = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

La suma de todas las raíces quintas de la unidad es cero:

$$\sum_{k=0}^{4} z_k = 1 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

Por lo tanto: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$

## 9.2 Uso de la simetría

Observemos que:

$$z_1 = e^{2\pi i/5} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \tag{1}$$

$$z_4 = e^{8\pi i/5} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \tag{2}$$

Como $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$, tenemos:

$$z_4 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \overline{z_1}$$

Similarmente, $z_2 = \overline{z_3}$.

## 9.3 Derivación de la ecuación cuadrática

Sean $\alpha = z_1 + z_4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ y $\beta = z_2 + z_3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

De la suma de raíces: $\alpha + \beta = -1$

Para el producto $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = (z_1 + z_4)(z_2 + z_3) \tag{3}$$

$$= z_1z_2 + z_1z_3 + z_4z_2 + z_4z_3 \tag{4}$$

$$= z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1 \tag{5}$$

Por lo tanto, $\alpha$ y $\beta$ son raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^2 + t - 1 = 0$$

Como $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, si hacemos $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, entonces $2x$ satisface:

$$(2x)^2 + (2x) - 1 = 0$$

Simplificando:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

Esta es otra demostración de por qué $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ satisface exactamente esta ecuación cuadrática.

# 10 Polinomio de Chebyshev y relacion con Fibonacci

## 10.1 Puntos por hacer

- ☐ Agregar ejemplos adicionales de polinomios de Chebyshev
- ☐ Relacionar con otras funciones trigonométricas

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son una familia de polinomios definidos por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Son útiles porque relacionan los cosenos de múltiplos de un ángulo con potencias de $x = \cos\theta$. Por ejemplo, para $n = 5$:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

La identidad $\cos(5\theta) = T_5(\cos\theta)$ permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

## 10.2 Demostracion de los polinomios de Chebyshev

## 10.3 Puntos por hacer

- ☐ Incluir demostración gráfica
- ☐ Agregar ejercicios de recurrencia

Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ se definen recursivamente:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

Estos polinomios cumplen la identidad:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Por eso, si $x = \cos\theta$, entonces $T_5(x) = \cos(5\theta)$, lo que permite obtener ecuaciones polinómicas para los cosenos de múltiplos de un ángulo.

## 10.4 Relacion entre Chebyshev y Fibonacci

## 10.5 Puntos por hacer

- ☐ Profundizar en la relación con la sucesión de Fibonacci
- ☐ Ejemplos numéricos

Existe una relación entre los polinomios de Chebyshev y la sucesión de Fibonacci. Si evaluamos el polinomio de Chebyshev de segundo tipo $U_n(x)$ en $x = \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$U_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_{n+1}$$

donde $F_{n+1}$ es el número de Fibonacci de orden $n+1$.

Además, para el polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$, existe la relación:

$$T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F_n$$

Esto se debe a que ambos cumplen relaciones de recurrencia similares y están conectados a través de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_5\left(\frac{1}{2}\right) &= 16\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

que corresponde a $\frac{1}{2}F_5$ ya que $F_5 = 5$.

## 10.6 Polinomios de Chebyshev y su relacion trigonometrica

## 10.7 Puntos por hacer

- ☐ Agregar ejemplos con valores específicos de theta
- ☐ Incluir aplicaciones en física y matemáticas

Sea $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y para $n > 1$:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

Estos son los polinomios de Chebyshev de primer tipo, definidos por recurrencia.

Ahora, demostraremos que:

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

**Demostración:**

Consideremos la recurrencia para $P_n(x)$ y tomemos $x = 2\cos\theta$.
Definimos $S_n = \sin(n\theta)$.
Sabemos que:

$$S_{n+1} = 2\cos\theta S_n - S_{n-1}$$

Esto es la misma recurrencia que para $P_n(x)$ con $x = 2\cos\theta$.

## 10.8 Puntos por hacer

- ☐ Verificar casos base
- ☐ Completar demostración por inducción
- ☐ Agregar ejemplos numéricos

Por inducción:

- Para $n = 0$: $P_0(2\cos\theta) = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin\theta}$
- Para $n = 1$: $P_1(2\cos\theta) = 2\cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$

Supongamos que $P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ y $P_{n-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
Entonces:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta P_n(2\cos\theta) - P_{n-1}(2\cos\theta) && (6) \\ &= 2\cos\theta\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} && (7) \\ &= \frac{2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin\theta} && (8) \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$2\cos\theta\sin((n+1)\theta) = \sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta)$$

Por lo tanto:

$$P_{n+1}(2\cos\theta) = \frac{\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) - \sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}$$

Esto completa la inducción y la demostración.

## 10.9 Puntos por hacer

- ☐ Agregar conexión con Fibonacci
- ☐ Incluir gráficas comparativas
- ☐ Verificar con ejemplos específicos

## 11 Conclusión

La fórmula se demuestra usando la composición de rotaciones en el plano, y se verifica algebraicamente con matrices de rotación.