Actividad 3 – Método de Newton-Raphson.

Métodos Numéricos.

Ingeniería en Desarrollo de Software

Tutor: Miguel Ángel Rodríguez Vega.

Alumnos: Carlos Ariel Nicolini.

Fecha: 30/10/2023

Índice

Introducción

Los métodos numéricos son un procedimiento mediante el cual se puede obtener de manera aproximada una solución realizando cálculos aritméticos y lógicos. El procedimiento consiste en una lista de instrucciones que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y algoritmos, que resultan en una aproximación de la solución de dicho problema. El resultado dependerá del algoritmo utilizado y las herramientas con las que se resuelta. El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones aproximadas para problemas complejos.

En este ejercicio aplicaremos dos de esos métodos: El método de Bisección, el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel.

Método de Bisección:

Este método se aplica a funciones algebraicas o trascendentes y proporciona únicamente raíces reales. Tiene su origen en un popular algoritmo de búsqueda de datos en arreglos vectoriales denominado búsqueda binaria. Es un método cerrado, es decir, requiere de un intervalo en el cual este atrapada la raíz. Consiste en cortar el intervalo en dos justo por la mitad (bisectar) considerando a este punto como una aproximación de la raíz de la función. Posteriormente, debe determinarse si la raíz verdadera se encuentra a la derecha o a la izquierda de la aproximación y, según corresponda, cerrar el intervalo con la aproximación y el limite derecho o izquierdo, pero siempre manteniendo a la raíz verdadera en el intervalo. Esta operación se repite hasta que la diferencia entre las dos últimas aproximaciones sea menor que una tolerancia preestablecida.

El método de bisección es un método robusto, aunque resulta lento en su proceso por lo oneroso de los cálculos que deben realizarse, por otra parte, su convergencia puede ser inestable.

Método de jacobi:

En análisis numérico el método de Jacobi es un método iterativo, usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales del tipo Ax = b. El algoritmo toma su nombre del matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi. El método de jacobi consiste en usar fórmulas como iteración de punto fijo.

La base del método consiste en construir una sucesión convergente definida iterativamente. El límite de esta sucesión es precisamente la solución del sistema. A efectos prácticos si el algoritmo se detiene después de un número finito de pasos se llega a una aproximación al valor de x de la solución del sistema.

Método de Gauss-Seidel:

En análisis numérico es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método se llama así en honor a los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss y Philipp Ludwing von Seidel y es similar al método de Jacobi. Aunque este método puede aplicarse a cualquier sistema de ecuaciones lineales que produzca una matriz (cuadrada, naturalmente pues para que exista solución única, el sistema debe tener tantas ecuaciones como incógnitas) de coeficientes con los elementos de su diagonal no-nulos, la convergencia del método solo se garantiza si la matriz es diagonalmente dominante o si es simétrica y a la vez, definida positiva.

Es un método iterativo, lo que significa que se parte de una aproximación inicial y se repite el proceso hasta llegar a una solución con un margen de error tan pequeño como se quiera.

La diferencia entre este método y el de Jacobi es que, en este último, las mejoras a las aproximaciones no se utilizan hasta completar las iteraciones.

Descripción

En esta actividad utilizaremos el programa Rstudio para programar el método de la Bisección, además en Excel resolveremos un sistema de ecuaciones por medio del método de Jacobi y también con el método de Gauss-Seidel.

Dicho sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

Se comprobaran los resultados y una vez finalizado realizaremos una interpretación de los resultados respondiendo dos preguntas:

1.- ¿Cuál es el método que resulto más fácil de utilizar?

2.- ¿Cuál es el método más eficiente? Y ¿por qué?

Justificación

En actividad seguiremos utilizando el programa Rstudio y de los métodos numéricos, en este caso el método de la bisección para programar un código para encontrar una aproximación de la raíz de la función.

También utilizaremos el método de jacobi y Gauss-Seidel que son métodos para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones lineales.

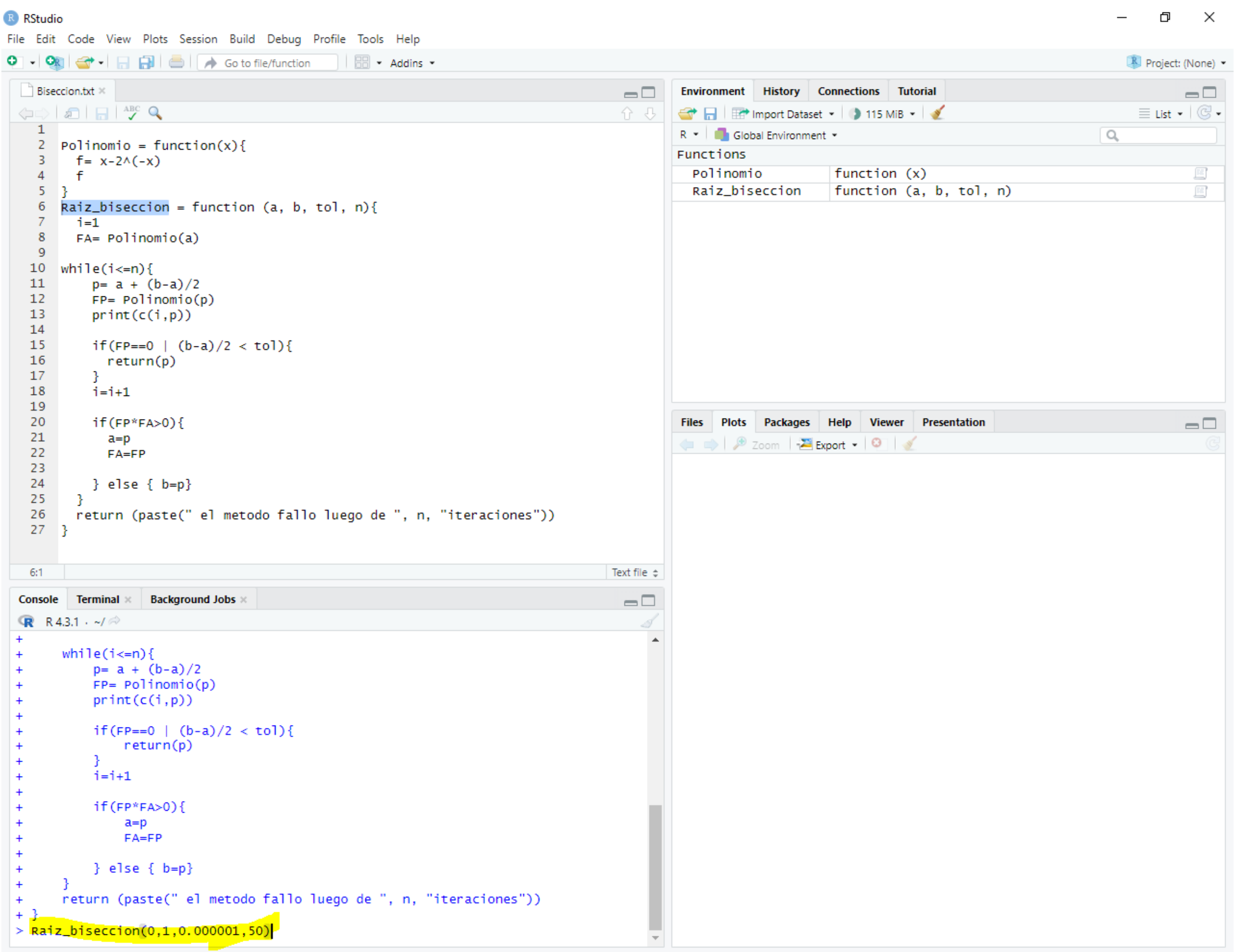
Cabe mencionar que el ejercicio de el trabajo sobre el método de Jacobi me pareció de más interesante, conjuntamente con el de Gauss-Seidel. La explicación de dichos métodos junto a los ejercicios que realice en excel fueron de mucho agrado y muy divertidos. Me encanto mucho esta parte del trabajo, a lo cual espero que en un futuro se tenga más posibilidad de poder trabajar de alguna manera parecida y tener la oportunidad de tener una clase de explicación como fue esta, ya que me llamo mucho la atención y llamo mucho mi atención.

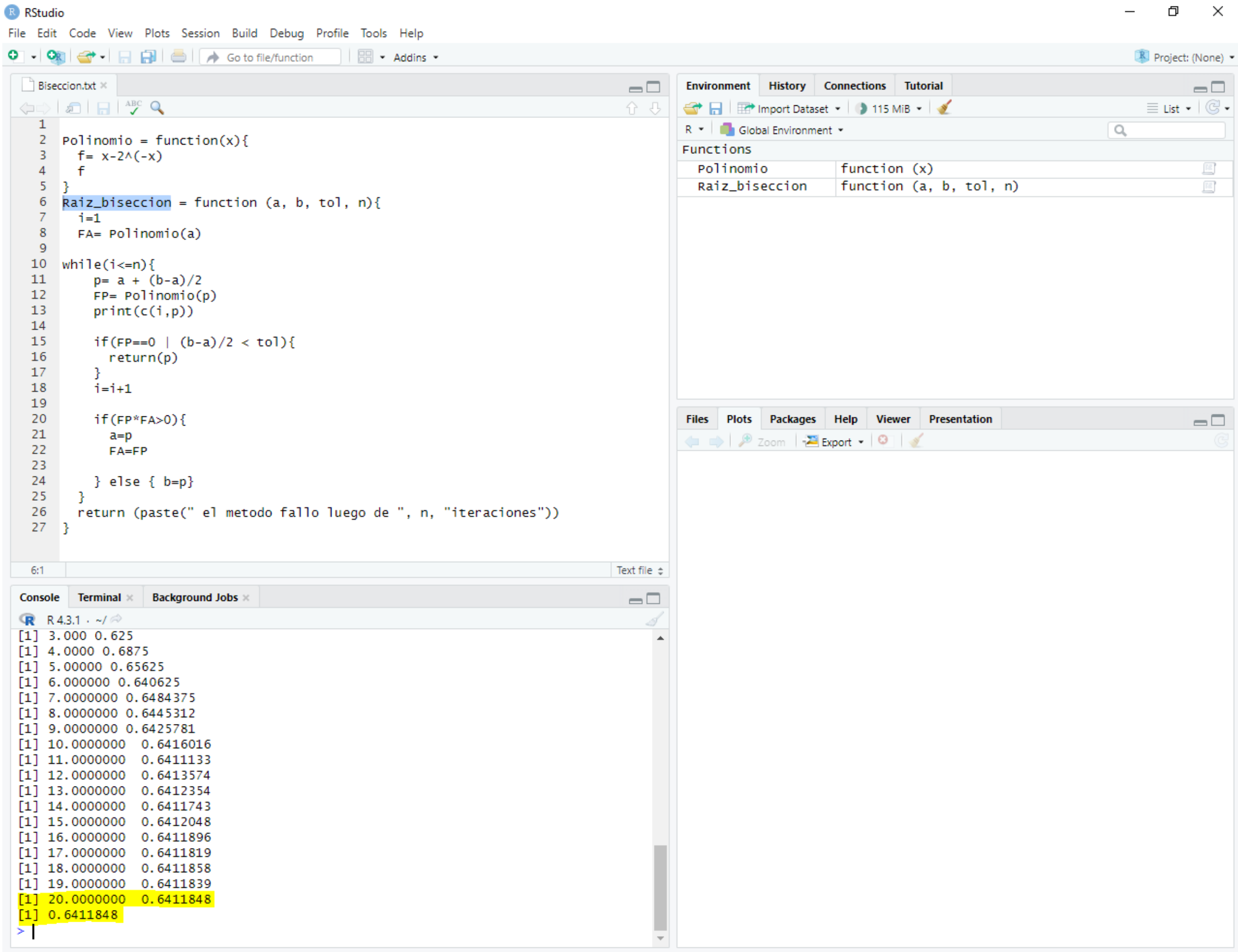
Como es costumbre, espero que el trabajo presentado sea acorde a lo solicitado y espero cubrir todas sus expectativas.

Desarrollo

Método de Bisección

En esta actividad se solicita programar el metodo de Biseccion en RStudio.




RStudio
File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help
Go to file/function
Addins
Project: (None)
Biseccion.txt
Polinomio = function(x){
f= x-2^(-x)
f
}
Raiz_biseccion = function (a, b, tol, n){
i=1
FA= Polinomio(a)
while(i<=n){
p= a + (b-a)/2
FP= Polinomio(p)
print(c(i,p))
if(FP==0 | (b-a)/2 < tol){
return(p)
}
i=i+1
if(FP*FA>0){
a=p
FA=FP
} else { b=p}
}
return (paste(" el metodo fallo luego de ", n, "iteraciones"))
}
6:1
Text file
Console
Terminal
Background Jobs
R 4.3.1 · ~/
[1] 3.000 0.625
[1] 4.0000 0.6875
[1] 5.00000 0.65625
[1] 6.000000 0.640625
[1] 7.0000000 0.6484375
[1] 8.0000000 0.6445312
[1] 9.0000000 0.6425781
[1] 10.0000000 0.6416016
[1] 11.0000000 0.6411133
[1] 12.0000000 0.6413574
[1] 13.0000000 0.6412354
[1] 14.0000000 0.6411743
[1] 15.0000000 0.6412048
[1] 16.0000000 0.6411896
[1] 17.0000000 0.6411819
[1] 18.0000000 0.6411858
[1] 19.0000000 0.6411839
[1] 20.0000000 0.6411848
[1] 0.6411848
Environment
History
Connections
Tutorial
Import Dataset
115 MiB
List
Global Environment
Functions
Polinomio function (x)
Raiz_biseccion function (a, b, tol, n)
Files
Plots
Packages
Help
Viewer
Presentation
Zoom
Export

Método de Jacobi

En esta actividad se debe resolver por el metodo de jacobi el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

Se tiene que despejar los valores de X, de Y y de Z. Quedando de la siguiente forma:

$$x = \frac{\mathrm{y} + \mathrm{z} + 1}{3}$$

$$y = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{z} + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 7}{4}$$

Una vez que obtenemos los valores los utilizamos en el ejercicio en Excel donde aplicamos el método de jacobi como se demuestra en la siguiente imagen

$3x - y - z = 1$
$-x + 3y + z = 3$
$2x + y + 4z = 7$

$$x^o = 0 \; ; \; y^o = 0 \; ; \; z^o = 0 \; ;$$

Jacobi

$$x = \frac{y + z + 1}{3}$$

$$y = \frac{x - z + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2x - y + 7}{4}$$

Iteraciones	X	Y	Z	Error X	Error Y	Error Z
0	0	0	0			
1	0.333333	1	1.75	1	1	1
2	1.25	0.527778	1.333333	0.733333	0.894737	0.3125
3	0.953704	0.972222	0.993056	0.31068	0.457143	0.342657
4	0.988426	0.986883	1.030093	0.035129	0.014855	0.035955
5	1.005658	0.986111	1.009066	0.017136	0.000782	0.020837
6	0.998392	0.998864	1.000643	0.007278	0.012767	0.008418
7	0.999836	0.99925	1.001088	0.001443	0.000386	0.000444
8	1.000113	0.999583	1.00027	0.000277	0.000333	0.000818
9	0.999951	0.999948	1.000048	0.000162	0.000365	0.000222
10	0.999999	0.999968	1.000038	4.78E-05	2E-05	1.04E-05
11	1.000002	0.999987	1.000009	3.2E-06	1.94E-05	2.89E-05
12	0.999999	0.999998	1.000002	3.17E-06	1.07E-05	6.44E-06
13	1	0.999999	1.000001	1.42E-06	1.09E-06	1.09E-06
14	1	1	1	8.81E-10	8.35E-07	9.81E-07
15	1	1	1	4.86E-08	3.27E-07	2.09E-07
16	1	1	1	3.94E-08	5.36E-08	5.75E-08
17	1	1	1	1.33E-09	3.23E-08	3.31E-08
18	1	1	1	2.57E-10	1.06E-08	7.41E-09
19	1	1	1	1.06E-09	2.39E-09	2.52E-09
20	1	1	1	4.4E-11	1.19E-09	1.12E-09
21	1	1	1	2.22E-11	3.6E-10	2.76E-10
22	1	1	1	2.81E-11	9.93E-11	1.01E-10
23	1	1	1	6.04E-13	4.31E-11	3.89E-11
24	1	1	1	1.4E-12	1.28E-11	1.05E-11
25	1	1	1	7.65E-13	3.96E-12	3.89E-12
26	1	1	1	2.2E-14	1.55E-12	1.37E-12
27	1	1	1	6.02E-14	4.65E-13	3.99E-13
28	1	1	1	2.18E-14	1.53E-13	1.46E-13
29	1	1	1	2.33E-15	5.6E-14	4.93E-14
30	1	1	1	2.22E-15	1.71E-14	1.51E-14
31	1	1	1	5.55E-16	5.77E-15	5.33E-15
32	1	1	1	2.22E-16	2E-15	1.78E-15
33	1	1	1	1.11E-16	6.66E-16	4.44E-16
34	1	1	1	0	2.22E-16	4.44E-16
35	1	1	1	0	1.11E-16	0
36	1	1	1	0	0	0

Método de Gauss-Seidel

En esta actividad se debe resolver por el metodo de Gauss-Seidel el siguiente sistema de ecuaciones, cabe mencionar que es importante en este metodo que antes de despejar las incognitas la diagonal principal debe ser dominante. Una vez que se cumpla esto, se puede empezar a despejar.

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

Se tiene que despejar los valores de X, de Y y de Z. Quedando de la siguiente forma:

$$x = \frac{y + z + 1}{3}$$

$$y = \frac{x - z + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2x - y + 7}{4}$$

Una vez que obtenemos los valores los utilizamos en el ejercicio en Excel donde aplicamos el método de Gauss-Seidel como se demuestra en la siguiente imagen

3x − y − z = 1

-x + 3y + z = 3

2x + y + 4z = 7

$$x = \frac{y + z + 1}{3}$$

$$y = \frac{x - z + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2x - y + 7}{4}$$

3x − y − z = 1

-x + 3y + z = 3

2x + y + 4z = 7

$x^0 = 0$

$y^0 = 0$

$z^0 = 0$

Gauss-Seidel

Iteraciones	X	Y	Z	Error X	Error Y	Error Z
0	0	0	0			
1	0.33333333	1.11111111	1.30555556	1	1	1
2	1.13888889	0.94444444	0.94444444	0.70731707	-0.17647059	-0.38235294
3	0.96296296	1.00617284	1.01697531	-0.18269231	0.06134969	0.07132018
4	1.00771605	0.99691358	0.99691358	0.04441041	-0.00928793	-0.02012384
5	0.99794239	1.00034294	1.00094307	-0.00979381	0.00342818	0.0040257
6	1.00042867	0.99982853	0.99982853	0.00248522	-0.00051449	-0.00111473
7	0.99988569	1.00001905	1.00005239	-0.00054304	0.00019052	0.00022385
8	1.00002381	0.99999047	0.99999047	0.00013812	-2.8578E-05	-6.192E-05
9	0.99999365	1.00000106	1.00000291	-3.0166E-05	1.0584E-05	1.2437E-05
10	1.00000132	0.99999947	0.99999947	7.6737E-06	-1.5877E-06	-3.4399E-06
11	0.99999965	1.00000006	1.00000016	-1.6759E-06	5.8802E-07	6.9093E-07
12	1.00000007	0.99999997	0.99999997	4.2632E-07	-8.8204E-08	-1.9111E-07
13	0.99999998	1	1.00000001	-9.3104E-08	3.2668E-08	3.8385E-08
14	1	1	1	2.3684E-08	-4.9002E-09	-1.0617E-08
15	1	1	1	-5.1724E-09	1.8149E-09	2.1325E-09
16	1	1	1	1.3158E-09	-2.7223E-10	-5.8984E-10
17	1	1	1	-2.8736E-10	1.0083E-10	1.1847E-10
18	1	1	1	7.31E-11	-1.5124E-11	-3.2769E-11
19	1	1	1	-1.5964E-11	5.6015E-12	6.5817E-12
20	1	1	1	4.061E-12	-8.4033E-13	-1.8203E-12
21	1	1	1	-8.8674E-13	3.112E-13	3.6549E-13
22	1	1	1	2.2549E-13	-4.6629E-14	-1.0103E-13
23	1	1	1	-4.9183E-14	1.7319E-14	2.0206E-14
24	1	1	1	1.2323E-14	-2.6645E-15	-5.4401E-15
25	1	1	1	-2.5535E-15	8.8818E-16	9.992E-16
26	1	1	1	5.5511E-16	0	-2.2204E-16
27	1	1	1	0	0	0

Interpretación de resultados

Pasaremos a realizar una interpretación de los resultados de ambos métodos.

Jacobi:

En el metodo de jacobi, en la iterasion 13 tenemos que los valores cumplen con la condicion de que el error sea de 10^{-6} y los valores de aproximacion serian:

X= 1; **Y**=0.999999; **Z**=1.000001;

Pero en la iterasion 36 los errores llegan a 0, lo cual nos comprueba que los valores son los siguientes:

X= 1; **Y**=1; **Z**=1;

Gauss-Seidel:

En el metodo de Gauss-Seidel en la iterasion 10 tenemos que los valores cumplen con la condicion de que el error sea de 10^{-6} y los valores de aproximacion serian:

X= 1.00000132; **Y**=0.99999947; **Z**=0.99999947;

Pero en la iterasion 27 los errores llegan a 0, lo cual nos comprueba que los valores son los siguientes:

X= 1; **Y**=1; **Z**=1;

¿Cuál es el metodo de que resulto mas facil de utilizar?.

En mi experiencia con estos ejercicios me resulto mas facil el metodo de Gauss-Seidel, aunque tiene que cumplir unas condiciones de que la diagonal principal debe ser dominante, este metodo es una forma resumida de resolver el sistema de ecuaciones.

¿Cuál es el metodo mas eficiente? ¿Por qué?

Para mi punto de vista el metodo mas eficiente es el de Gauss-Seidel. El por que es, aunque como mencione anteriormente debe cumplir con ciertas condiciones, realiza menos iteraciones para encontrar un resultado aproximado, lo cual, si no tuvieramos metodos actuales como en este caso el excel, deberia realizarse el calculo de manera tradicional y llevaria mucho mas esfuerzo para llegar a su solucion, aunado a que seria esfuerzo humano y toda interaccion humana no esta excenta de errores. Por tal motivo creo que es mas eficiente.

El ejercicio realizado fue subido al repositorio de github en el siguiente enlance

https://github.com/CarlosNico/M-todos-Num-ricos

Conclusión

El uso del método de Jacobi y de Gauss-Seidel son muy efectivos a la hora de resolver sistemas de ecuaciones de tipo lineal realizando numerosas iteraciones para encontrar una aproximación muy fina, lo cual en conjunto con aplicaciones como Excel o RStudio nos ayudan a escatimar esfuerzo y tiempo.

En diversas situaciones se necesitan resolver problemáticas con la ayuda de métodos numéricos, por la imposibilidad de solucionarlos directamente mediante herramientas algebraicas o de cálculo. En la evaluación de proyectos es necesario a veces averiguar el momento en donde se produce el punto de equilibrio entre dos proyectos diferentes, en física, en estadística, en mecánica estos métodos estudiados son de vital necesidad y cuya soluciones solo es posible obtener utilizando técnicas de aproximación.

Este ejercicio fue muy divertido de estudiar, comprender y realizar. Tanto las clases como los ejercicios fueron de mucho agrado. Muchas gracias por todo su apoyo y enseñanzas.

.

Referencias

Rosas, C., Javier, J., Cárdenas, G., Pinilla, M. E., Damián, M. V., Moreno, S., Tovar Pérez, A., & Hugo, V. (n.d.). *M ´etodos cerrados para la soluci ´on num ´erica de ecuaciones algebraicas y trascendentes*. Unam.Mx. Retrieved November 6, 2023, from https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema2/2-1_metodos_cerrados.pdf

Wikipedia contributors. (n.d.-a). *Método de Gauss-Seidel*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9todo_de_Gauss-Seidel&oldid=148703477

Wikipedia contributors. (n.d.-b). *Método de Jacobi*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9todo_de_Jacobi&oldid=128145246

MACROPROCESO: DOCENCIA PROCESO: LINEAMIENTOS CURRICULARES PROCEDIMIENTO: APROBACIÓN Y REVISIÓN DEL PLAN ACADÉMICO EDUCATIVO CONTENIDOS PROGRAMATICOS Código: D-LC-P02-F01 Versión: 03 Página 1 de 3. (n.d.). Edu.Co. Retrieved November 6, 2023, from https://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_duitama/pregrado/matematicas/documentos/7/metodos_numericos7.pdf