



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

IC639: Métodos Numéricos para Engenharia Civil

## **Lista 1**

### **Derivadas, Gradiente, Divergente e Rotacional**

**Aluno:**

Carlos Henrique Chama Puga - 195416

**Docentes:**

Porf. Dr. Philippe Devloo

Dr. Giovane Avancini

Campinas

2024

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Rotacional do Gradiente de <math>f(x, y, z)</math></b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Divergente de Rotacional de <math>\vec{f}(f_x, f_y, f_z)</math></b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Regra da Cadeia em Funções de 2 Variáveis</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Derivações em Funções Mapeamento</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Sinais de Divergente e Rotacional em Campos Vetoriais</b>	<b>10</b>
6.1	Campo Vetorial 1 . . . . .	11
6.2	Campo Vetorial 2 . . . . .	11
6.3	Campo Vetorial 3 . . . . .	11
6.4	Campo Vetorial 4 . . . . .	12
6.5	Resultados . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>12</b>
	<b>Referências</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Repositório <i>GitHub</i></b>	<b>13</b>
<b>B</b>	<b>Gradiente de <math>f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))</math></b>	<b>13</b>

## 1 Introdução

A primeira lista da disciplina de Métodos Numéricos compreende uma revisão de cálculo, abordando temas como, regra da cadeia e os operadores gradiente, divergente e rotacional. A seguir, uma breve descrição do que foi discutido em aula.

A regra da cadeia é uma técnica utilizada para diferenciar funções compostas por outras funções. O operador gradiente, quando aplicado em uma função escalar, gera um vetor que aponta para a direção de maior crescimento da função. O operador divergente representa a densidade volumétrica de fluxo que sai de um campo vetorial de um volume infinitesimal em torno de um ponto. Por fim, o operador rotacional pode ser definido como a densidade de circulação de um campo vetorial em torno de um ponto, representado pelo vetor cuja direção e magnitude denotam o eixo e a magnitude da circulação máxima.

A lista foi dividida em cinco exercícios, cada um abordando um dos temas supracitados. A seguir, serão apresentados os exercícios e suas respectivas soluções. Realça-se que, durante toda a realização dos exercícios, usou-se as referências (1) e (2) para consulta.

## 2 Rotacional do Gradiente de $f(x, y, z)$

Seja  $f(x, y, z)$  uma função escalar. O gradiente de  $f$  é dado pela Eq. (2.1)

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (2.1)$$

A partir de  $\nabla f$ , pode-se calcular o rotacional de  $\nabla f$ , dado pela Eq. (2.2)

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

em que  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são os vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Calculando o rotacional de  $\nabla f$ , tem-se que

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{k},$$

como as derivadas parciais são comutativas (Teorema de Clairaut), tem-se que

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

### 3 Divergente de Rotacional de $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$

Seja  $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$  uma função vetorial. Seu rotacional é dado pela Eq. (3.1)

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

O divergente de  $\nabla \times \vec{f}$  é dado pela Eq. (3.2)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right), \quad (3.2)$$

distribuindo as derivadas parciais obtém-se

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y},$$

como pelo Teorema de Clairut, as derivadas cruzadas são iguais

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0. \quad (3.3)$$

## 4 Regra da Cadeia em Funções de 2 Variáveis

O exercício 3 foi feito utilizando o *software* Mathematica e o código utilizado pode ser encontrado no Apêndice [A](#).

O gradiente de  $f$  em relação às coordenadas paramétricas  $\xi$  e  $\eta$  é dado pela regra da cadeia, expressa pela Eq. (4.1)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

logo, basta avaliar as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$  e depois substituir na Eq. (4.1).

Utilizando o `Mathematica` obtém-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y^3 e^{\sin(xy^3)} \cos(xy^3) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 e^{\sin(xy^3)} \cos(xy^3) \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} = -2\xi \sin(\xi^2) + 5 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos(\eta + 1) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = 3\xi^2 \cos(\xi^3) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = 2\eta \sin(\eta^2) + 7. \end{array} \right.$$

Dados a complexidade e o tamanho das funções que compõem o gradiente, optou-se por apresentar um trecho do código utilizado em que o gradiente é calculado. Dado o tamanho das equações que compõem o gradiente da função, optou-se por colocá-lo no Apêndice B.

Apresenta-se a comparação entre os resultados obtidos pela regra da cadeia programada e pelas funções nativas do `Mathematica`

```
gradF = Grad[f, {ξ, η}];
% // TeXForm

gradChainF = {dfdξ, dfdη};

gradChainF - gradF // Simplify

{0, 0}
```

Figura 4.1: Comparação entre gradientes: *gradF* - `Mathematica` e *gradChainF* - Regra da Cadeia.

Como mostrado pela Fig. 4.1, os resultados alcançados pela regra da cadeia e pelo `Mathematica` são iguais, já que a diferença entre os gradientes é nula. Tal fato confirma que a implementação da regra da cadeia está correta. Por fim, plota-se os gráficos do gradiente de  $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  na Fig. 4.2.

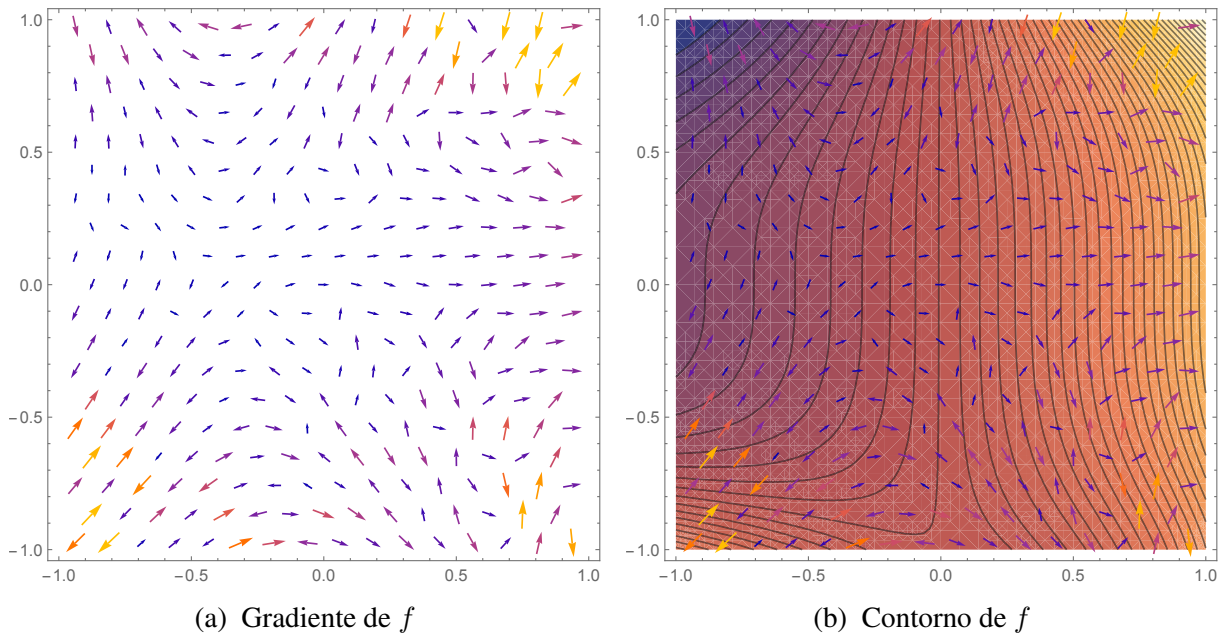


Figura 4.2: Resultados exercício 3.

## 5 Derivações em Funções Mapeamento

Para o exercício 4 também foi utilizado o *software* Mathematica para realizar os cálculos. A seguir a linha de pensamento base para o desenvolvimento do exercício.

Sabe-se que  $x$  e  $y$  são funções diferenciáveis em  $\xi$  e  $\eta$ . Com isso, os infinitesimais  $d\xi$  e  $d\eta$  podem ser transformado em  $dx$  e  $dy$  pela Eq. (5.1).

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

A matriz contendo as derivadas parciais da transformação de coordenadas é chamada de matriz jacobiana ( $Jac$ ). Invertendo o sistema de equações (5.1) tem-se a Eq. (5.2), usada para encontrar as derivadas parciais de  $\xi$  e  $\eta$  em função

de  $x$  e  $y$ .

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = Jac^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

sendo que o inverso da Jacobiana pode ser obtido conforme Eq. (5.3).

$$Jac^{-1} = \frac{1}{|Jac|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

com  $|Jac|$  sendo o determinante da matriz jacobiana dado pela Eq. (5.4).

$$|Jac| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (5.4)$$

Analogamente à Eq. (5.1), pode-se escrever  $d\xi$  e  $d\eta$  como

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Comparando as eqs. (5.1), (5.2) e (5.3) obtém-se as definições das derivadas parciais, mostradas na Eq. (5.6)

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{|Jac|} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{|Jac|} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{d\xi}{dy} = -\frac{1}{|Jac|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{|Jac|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{cases}. \quad (5.6)$$

Finalmente, pode-se aplicar a regra da cadeia para encontrar o gradiente de



$f$  com relação a  $\xi$  e  $\eta$  em função de  $x$  e  $y$  conforme Eq. (5.7).

$$\nabla \hat{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

A partir da Eq. (5.7) pode-se calcular o gradiente de  $\hat{f}$  em função de  $\xi$  e  $\eta$ . A seguir, os resultados obtidos pelo código em Mathematica. Realça-se que o código na íntegra pode ser encontrado no Apêndice A.

Primeiramente, apresentam-se as derivadas parciais de  $\hat{f}$  com relação a  $\xi$  e  $\eta$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{f}}{d\xi} = \frac{1}{4}(\eta - 1)(-\eta - \xi - 1) - \frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi - 1) \\ \frac{d\hat{f}}{d\eta} = \frac{1}{4}(\xi - 1)(-\eta - \xi - 1) - \frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi - 1) \end{cases},$$

as derivadas parciais de  $x$  e  $y$  com relação a  $\xi$  e  $\eta$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(-2\eta\xi + 2\xi + 4) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi^2) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta^2) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(4 - 2\eta(\xi - 1)) \end{cases}.$$

e o determinante da matriz jacobiana

$$|Jac| = \frac{1}{16} (\eta^2 (3\xi^2 - 4\xi + 1) - 4\eta (\xi^2 + 3\xi - 2) + \xi^2 + 8\xi + 15)$$

Com os resultados das derivadas parciais, calcula-se o gradiente de  $\hat{f}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{dx} &= \frac{2(\eta - 1)(\eta(\xi - 1) - 2)(\eta + 2\xi)}{\eta^2 (3\xi^2 - 4\xi + 1) - 4\eta (\xi^2 + 3\xi - 2) + \xi^2 + 8\xi + 15} + \\ &+ \frac{1}{16}(\xi - 1)(\xi^2 - 1)(2\eta + \xi) \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{f}}{dy} = \frac{(\xi - 1)(\eta^2(3\xi - 1) - \eta(5\xi + 7) - 2\xi)}{\eta^2(3\xi^2 - 4\xi + 1) - 4\eta(\xi^2 + 3\xi - 2) + \xi^2 + 8\xi + 15}$$

Por fim, apresenta-se na Fig. 5.1 o gráfico do gradiente de  $\hat{f}$  em função de  $x$  e  $y$  e seu contorno no domínio.

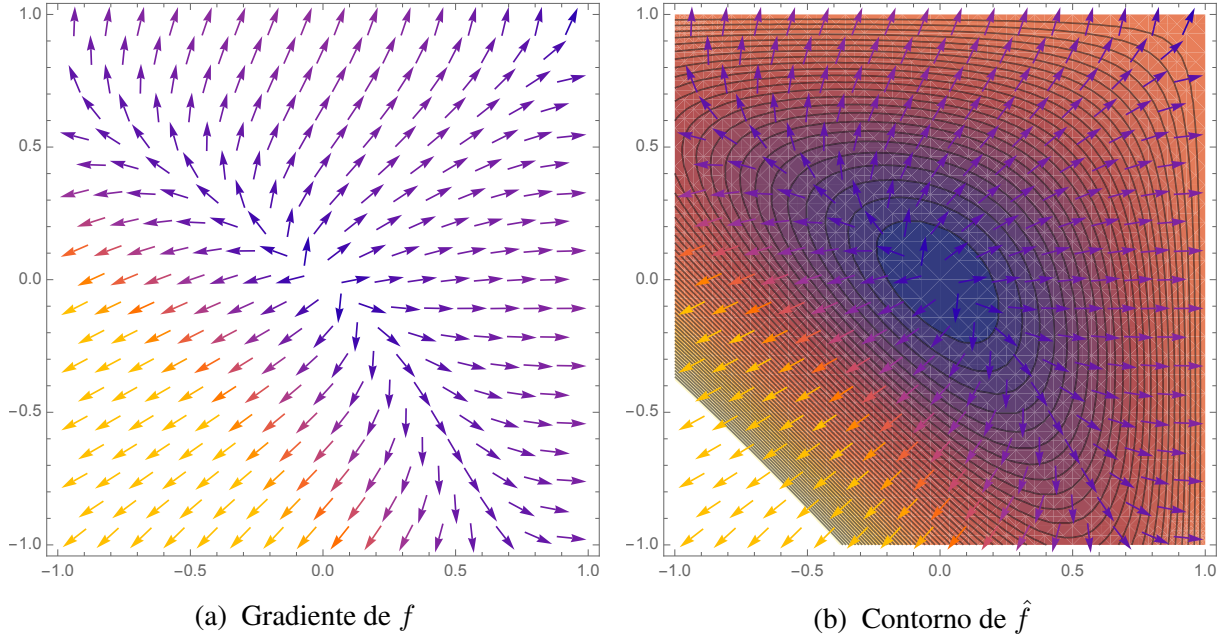


Figura 5.1: Resultados exercício 4.

## 6 Sinais de Divergente e Rotacional em Campos Vetoriais

Os sinais do divergente e do rotacional de cada campo vetorial foi estimado visualmente, já que não foram passadas as equações dos campos vetoriais. Utilizando o Teorema de Gauss, pode-se transformar a integral do divergente do campo vetorial no volume, na integral do campo vetorial no contorno, conforme Eq. (6.1)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\hat{n}} \, dS. \quad (6.1)$$

em que  $\vec{u}$  é o campo vetorial,  $\Omega$  é o domínio,  $\partial\Omega$  é o contorno do domínio e  $\vec{\hat{n}}$  é o vetor normal unitário que aponta para fora do contorno.

Com o Teorema de Gauss, pode-se avaliar o sinal do divergente no contorno

para todos os casos propostos. O rotacional será analisado no domínio como um todo, a partir da aparência do campo vetorial. Os campos são individualmente analisados nas seções 6.1 - 6.4 e os resultados são sumarizados na Seção 6.5.

### 6.1 Campo Vetorial 1

O primeiro campo possui vetores paralelos ao eixo  $x$ , em  $y = 0$  e ao eixo  $y$ , em  $x = 0$ . Em adição, nas fronteiras,  $x = 3$  e  $y = 3$ , os vetores estão saindo do domínio, resultando em um divergente positivo.

O paralelismo observado anteriormente aponta que o campo provavelmente é composto por vetores da família  $\vec{u} = (\alpha x, \beta y, 0)$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. O rotacional de um campo dessa família é nulo, já que  $\nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\alpha x, \beta y, 0) = 0$ . Ainda leva-se em consideração que o campo não apresenta rotação aparente.

### 6.2 Campo Vetorial 2

Como as equações dos vetores do segundo campo não são de fácil suposição, as discussões são feitas de maneira qualitativa.

O campo possui apenas vetores saindo de todos os contornos do domínio, o que resulta em um divergente positivo. O campo apresenta rotação no sentido horário, indicando um rotacional negativo.

### 6.3 Campo Vetorial 3

O terceiro campo possui campos vetoriais entrando e saindo do domínio, o que, a princípio, resultaria em um divergente nulo. No entanto, nota-se que a magnitude dos vetores que entram é menor que a magnitude dos vetores que saem, resultando em um divergente positivo.

O campo apresenta rotações iguais, mas opostas ao longo de seu domínio, resultando em um rotacional nulo.

#### 6.4 Campo Vetorial 4

O quarto e último campo apresenta vetores de mesma magnitude entrando e saindo pelos contornos, o que resulta em um divergente nulo. Também nota-se rotações iguais, mas opostas ao longo do domínio, resultando em um rotacional nulo.

#### 6.5 Resultados

Os resultados são apresentados resumidamente na Tabela 1.

Tabela 1: Sinais do divergente e do rotacional para cada campo vetorial.

Campo Vetorial	Divergente	Rotacional
1	Positivo	Nulo
2	Positivo	Negativo
3	Positivo	Nulo
4	Nulo	Nulo

### 7 Conclusão

Para o primeiro módulo de métodos numéricos foi realizado uma breve revisão de derivadas, regra da cadeia e dos operadores gradiente, divergente e rotacional. Esses temas são de suma importância por comporem, na maioria das vezes, as equações diferenciais que se deseja resolver.

Com os exercícios 1 e 2, pôde-se provar e compreender propriedades fundamentais entre os operadores gradiente, divergente e rotacional. Os exercícios 3 e 4 foram responsáveis por abordarem a regra da cadeia em funções com mais de

uma variável. Em especial, o exercício 4 se assemelha muito com funções mapeamento, que são amplamente utilizadas em integração numérica e problemas de elementos finitos, temas que ainda serão abordados no curso.

O exercício 5 treina uma visão mais prática dos conceitos de divergente e rotacional. Ao não passar as equações dos campos vetoriais, o exercício se torna mais desafiador, já que é esperada a capacidade de identificar o comportamento do campo vetorial apenas visualmente. Por fim, conclui-se que o módulo foi de grande valia para a compreensão dos conceitos fundamentais de cálculo vetorial e que serão de grande importância para o desenvolvimento do curso.

## Referências

- 1 STEWART, J. Essential calculus: Early transcendentals. Brooks/Cole, a part of the Thomson Corporation, 2007.
- 2 BECKER, E.; CAREY, G.; ODEN, J. Finite elements: An introduction. Prentice-Hall, n. v. 1, 1981.

## A Repositório *GitHub*

O código fonte deste relatório e dos programas utilizados para a resolução dos problemas propostos estão disponíveis no repositório *GitHub* do autor. O repositório pode ser acessado através do link [CarlosPuga14/MetodosNumericos\\_-2024S1](#).

## B Gradiente de $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$

A seguir apresenta-se o gradiente de  $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$

$$\nabla f = \left( \frac{df}{d\xi}, \frac{df}{d\eta} \right), \text{ em que:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\xi} = & 9e^{\sin\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)}\xi^2\cos(\xi^3)\cos\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right) \\
& \left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^2+\left(5-2\xi\sin(\xi^2)\right) \\
& \left(e^{5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)}+e^{\sin\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)}\cos\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)\right) \\
& \left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)^3\right)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\xi} = & 3e^{\sin\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)} \\
& \cos\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right) \\
& \left(7+2\eta\sin(\eta^2)\right)\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^2+\cos(1+\eta) \\
& \left(e^{5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)}+e^{\sin\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)}\cos\left(\left(5\xi+\cos(\xi^2)+\sin(1+\eta)\right)\left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)\right)^3\right)\right) \\
& \left(7\eta-\cos(\eta^2)+\sin(\xi^3)^3\right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$