UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Lista 1

Derivadas, Gradiente, Divergente e Rotacional

Aluno: Carlos Henrique Chama Puga

RA: 195416

Docentes:

Porf. Dr. Philippe Devloo

Dr. Giovane Avancini

Campinas

2024

Sumário

1 Introdução

A primeira lista da disciplina de Métodos Numéricos compreende uma revisão de cálculo, abordando temas como, regra da cadeia e os operadores gradiente, divergente e rotacional. A seguir, uma breve descrição do que foi discutido em aula.

A regra da cadeia é uma técnica utilizada para diferenciar funções compostas por outras funções. O operador gradiente, quando aplicado em uma função escalar, gera um vetor que aponta para a direção de maior crescimento da função. O operador divergente representa a densidade volumétrica de fluxo que sai de um campo vetorial de um volume infinitesimal em torno de um ponto. Por fim, o operador roatcional pode ser definido como a densidade de circulação de um campo vetorial em torno de um ponto, representado pelo vetor cuja direção e magnitude denotam o eixo e a magnitude da circulação máxima.

A lista foi dividida em cinco exercícios, cada um abordando um dos temas supracitados. A seguir, serão apresentados os exercícios e suas respectivas soluções. Realça-se que, durante toda a realização dos exercícios, usou-se as referências (1) e (2) para consulta.

2 Rotacional do Gradiente de f(x,y,z)

Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar. O gradiente de f é dado pela Eq. (2.1)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \tag{2.1}$$

A partir de ∇f, pode-se calcular o rotacional de ∇f, dado pela Eq. (2.2)

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

em que $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente.

Calculando o rotacional de ∇f, tem-se que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{k},$$

como as derivadas parciais são comutativas (Teorema de Clairaut), tem-se que

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

3 Divergente de Rotacional de f(x,y,z)

Assumindo que a função $f(x, y, z)$ é um campo vetorial na forma $f(x, y, z) = (P, Q, R)$ e que as funções $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ são funções escalares, o divergente do rotacional de $f(x, y, z)$ é dado pela Eq. (3.1)

$$\nabla \times f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

O divergente de $\nabla \times f(x, y, z)$ é dado pela Eq. (3.2)

$$\nabla \cdot \nabla \times f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{3.2}$$

Distribuindo as derivadas parciais obtém-se

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y},$$

como pelo Teorema de Clairut, as derivadas cruzadas são iguais

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0. \tag{3.3}$$

4 Regra da Cadeia em Funções de 2 Variáveis

O exercício 3 foi feito utilizando o *software* `Mathematica` e o código utilizado pode ser encontrado no Apêndice A.

O gradiente de f em relação às coordenadas paramétricas ξ e η é dado pela regra da cadeia, expressa pela Eq. (4.1)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

logo, basta evaluar as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ e depois substituir na Eq. (4.1).

Utilizando o `Mathematica` obtém-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y^3 e^{\sin\left(xy^3\right)} \cos\left(xy^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{\sin\left(xy^3\right)} \cos\left(xy^3\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -2\xi \sin\left(\xi^2\right) + 5$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos\left(\eta + 1\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 3\xi^2 \cos\left(\xi^3\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -2\eta \sin\left(\eta^2\right) + 7.$$

Dados a complexidade e o tamanho das funções que compõem o gradiente, optou-se por apresentar um trecho do código utilizado em que o gradiente é calculado. As figuras 4.1 e 4.2 mostram o cálculo das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, respectivamente.

$$\mathtt{dfd\xi = dfdx\ dxd\xi + dfdy\ dyd\xi}$$

$$9\, e^{\mathtt{Sin}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\, \xi^2\, \mathtt{Cos}\left[\xi^3\right]\, \mathtt{Cos}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]$$
$$\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^2 + \left(5-2\xi\,\mathtt{Sin}\left[\xi^2\right]\right)\Big(e^{5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]} +$$
$$e^{\mathtt{Sin}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\, \mathtt{Cos}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\Big)$$

Figura 4.1: Cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \xi}$.

$$\mathtt{dfd\eta = dfdx\ dxd\eta + dfdy\ dyd\eta}$$

$$3\, e^{\mathtt{Sin}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\, \mathtt{Cos}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]$$
$$\left(7+2\eta\,\mathtt{Sin}\left[\eta^2\right]\right)\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^2 + \mathtt{Cos}[1+\eta]\Big(e^{5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]} +$$
$$e^{\mathtt{Sin}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\, \mathtt{Cos}\left[\left(5\xi+\mathtt{Cos}\left[\xi^2\right]+\mathtt{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]\left(7\eta-\mathtt{Cos}\left[\eta^2\right]+\mathtt{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\Big)$$

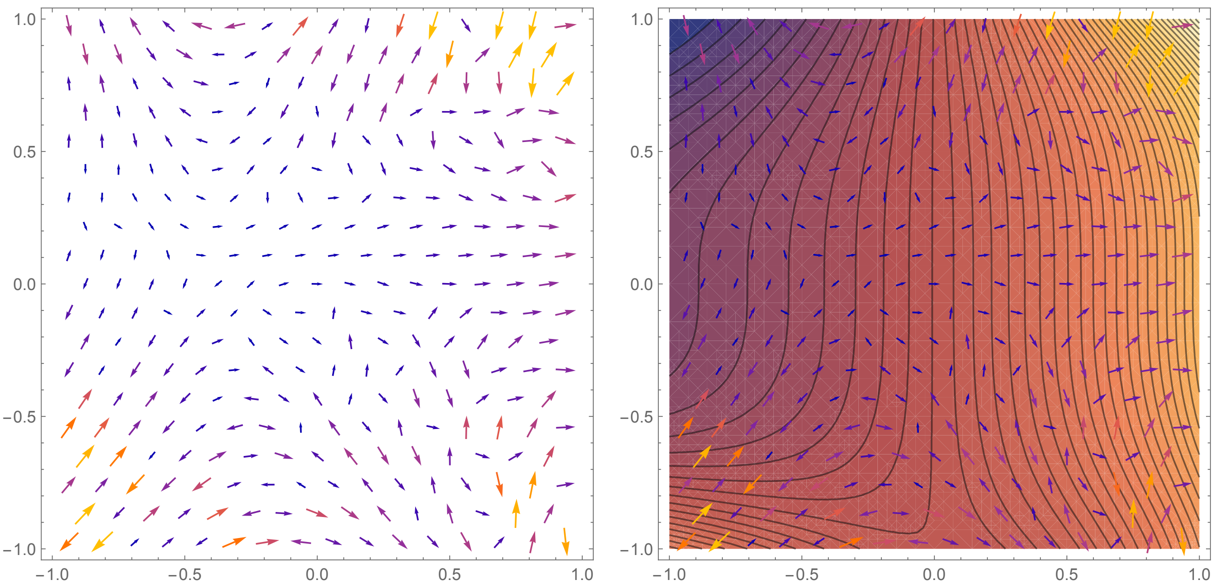
Figura 4.2: Cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \eta}$.

Apresenta-se também a comparação entre os resultados obtidos pela regra da cadeia programada e pelas funções nativas do `Mathematica`

```
gradF = Grad[f, {ξ, η}];
% // TeXForm

gradChainF = {dfdξ, dfdη};

gradChainF - gradF // Simplify

{0, 0}
```

Figura 4.3: Comparação entre gradientes: $gradF$ - `Mathematica` e $gradChainF$ - Regra da Cadeia.

Como mostrado pela Fig. 4.3, os resultados alcançados pela regra da cadeia e pelo `Mathematica` são iguais, já que a diferença entre os gradientes é nula. Tal fato confirma que a implementação da regra da cadeia está correta. Por fim, plota-se os gráficos do gradiente de $f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ na Fig. 4.4.



(a) (b)

Figura 4.4: Resultados: a) gradiente de f. b) Contorno de f.

5 Derivações em Funções Mapeamento

Para o exercício 4 também foi utilizado o *software* `Mathematica` para realizar os cálculos. A seguir a linha de pensamento base para o desenvolvimento do exercício.

Sabe-se que x e y são funções diferenciáveis em ξ e η. Com isso, os infinitesimais $d\xi$ e podem ser $d\eta$ transformado em dx e dy pela Eq. (5.1).

$$\begin{bmatrix} dx \\ \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ \\ d\eta \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

A matriz contendo as derivadas parciais da transformação de coordenadas é chamada de matriz jacobiana (Jac). Invertendo o sistema de equações da Eq. (5.1) tem-se a Eq. (5.2), usada para encontrar as derivadas parciais de ξ e η em função de x e y.

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ \\ d\eta \end{bmatrix} = Jac^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ \\ dy \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

sendo q o inverso da Jacobiana pode ser obtido conforme Eq. (5.3).

$$Jac^{-1} = \frac{1}{|Jac|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

com $|Jac|$ sendo o determinante da matriz jacobiana dado pela Eq. (5.4).

$$|Jac| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}. \tag{5.4}$$

Plugando as eqs. (5.3) e (5.4) na Eq. (5.2) tem-se a Eq. (5.5)

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{|Jac|}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{|Jac|}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{d\xi}{dy} = -\frac{1}{|Jac|}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{|Jac|}\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{cases} \tag{5.5}$$

Finalmente, pode-se aplicar a regra da cadeia para encontrar o gradiente de f com relação a

ξ e η em função de x e y conforme Eq. (5.6).

$$\nabla \hat{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{dx} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{dx} \\ \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{dy} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{dy} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

A partir da Eq. (5.6) pode-se calcular o gradiente de $\hat{f}$ em função de ξ e η. A seguir, os resultados obtidos pelo código em `Mathematica`. Realça-se novamente que o código na íntegra pode ser encontrado no Apêndice A.

Primeiramente, apresentam-se as derivadas parciais de $\hat{f}$ com relação a ξ e η

$$\begin{cases} \frac{d\hat{f}}{d\xi} = \frac{1}{4}(\eta-1)(-\eta-\xi-1) - \frac{1}{4}(\eta-1)(\xi-1) \\ \frac{d\hat{f}}{d\eta} = \frac{1}{4}(\xi-1)(-\eta-\xi-1) - \frac{1}{4}(\eta-1)(\xi-1) \end{cases},$$

as derivadas parciais de x e y com relação a ξ e η

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(-2\eta\xi + 2\xi + 4) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\left(1-\xi^2\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\left(1-\eta^2\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(4 - 2\eta(\xi-1)) \end{cases}.$$

e o determinante da matriz jacobiana

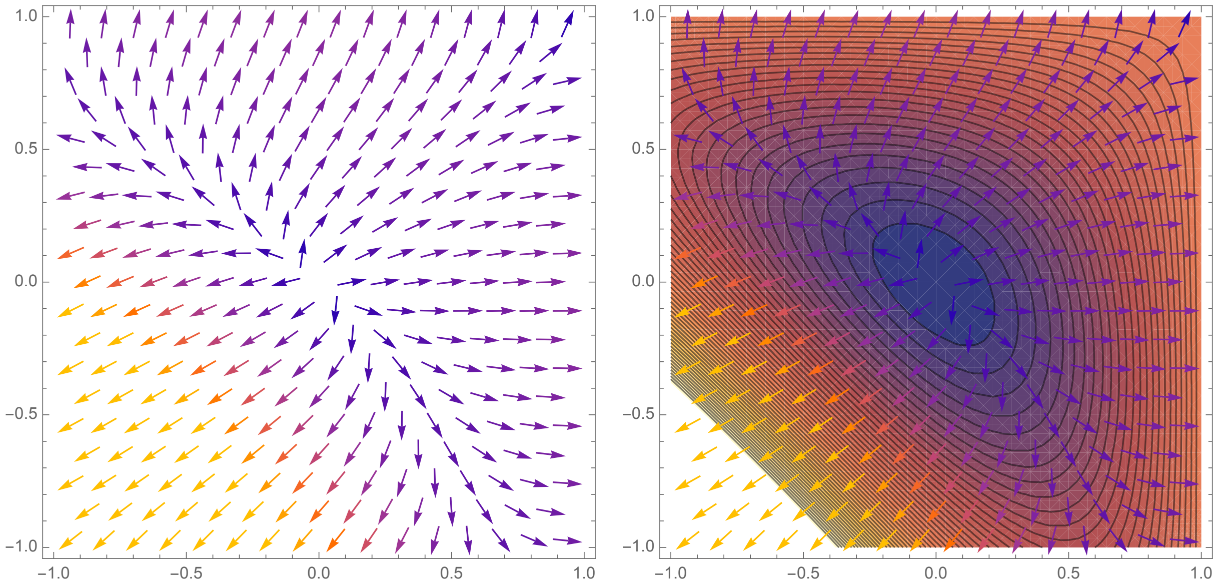
$$|Jac| = \frac{1}{16}\left(\eta^2\left(3\xi^2 - 4\xi + 1\right) - 4\eta\left(\xi^2 + 3\xi - 2\right) + \xi^2 + 8\xi + 15\right)$$

Com os resultados das derivadas parciais, calcula-se o grdiente de $\hat{f}$.

$$\frac{d\hat{f}}{dx} = \frac{2(\eta-1)(\eta(\xi-1)-2)(\eta+2\xi)}{\eta^2\left(3\xi^2-4\xi+1\right) - 4\eta\left(\xi^2+3\xi-2\right) + \xi^2 + 8\xi + 15} + \frac{1}{16}(\xi-1)\left(\xi^2-1\right)(2\eta+\xi)$$

$$\frac{d\hat{f}}{dy} = \frac{(\xi-1)\left(\eta^2(3\xi-1) - \eta(5\xi+7) - 2\xi\right)}{\eta^2\left(3\xi^2-4\xi+1\right) - 4\eta\left(\xi^2+3\xi-2\right) + \xi^2 + 8\xi + 15}$$

Por fim, apresenta-se na Fig. 5.1 o gráfico do gradiente de $\hat{f}$ em função de x e y e seu contorno no domÃnio.



(a) (b)

Figura 5.1: Resultados: a) gradiente de f. b) Contorno de $\hat{f}$.

6 Sinais de Divergente e Rotacional em Campos Vetoriais

7 Conclusão

Referências

1 STEWART, J. Essential calculus: Early transcendentals. Brooks/Cole, a part of the Thomson Corporation, 2007.

2 BECKER, E.; CAREY, G.; ODEN, J. Finite elements: An introduction. Prentice-Hall, n. v. 1, 1981.

A Repositório *GitHub*

O código fonte deste relatório e dos programas utilizados para a resolução dos problemas propostos estão disponíveis no repositório *GitHub* do autor. O repositório pode ser acessado através do link CarlosPuga14/MetodosNumericos_2024S1.