UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Lista 1

Derivadas, Gradiente, Divergente e Rotacional

Aluno: Carlos Henrique Chama Puga

RA: 195416

Docentes:

Porf. Dr. Philippe Devloo

Dr. Giovane Avancini

Campinas

2024

Sumário

1 Introdução

A primeira lista da disciplina de Métodos Numéricos compreende uma revisão de cálculo, abordando temas como, regra da cadeia e os operadores gradiente, divergente e rotacional. A seguir, uma breve descrição do que foi discutido em aula.

A regra da cadeia é uma técnica utilizada para diferenciar funções compostas por outras funções. O operador gradiente, quando aplicado em uma função escalar, gera um vetor que aponta para a direção de maior crescimento da função. O operador divergente representa a densidade volumétrica de fluxo que sai de um campo vetorial de um volume infinitesimal em torno de um ponto. Por fim, o operador roatcional pode ser definido como a densidade de circulação de um campo vetorial em torno de um ponto, representado pelo vetor cuja direção e magnitude denotam o eixo e a magnitude da circulação máxima.

A lista foi dividida em quatro exercícios, cada um abordando um dos temas supracitados. A seguir, serão apresentados os exercícios e suas respectivas soluções. Realça-se que, durante toda a realização dos exercícios, usou-se as referências (1) e (2) para consulta.

2 Rotacional de Gradiente

Mostre que o rotacional do gradiente de uma função escalar $f(x, y, z)$ é nulo.

2.1 Solução

Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar. O gradiente de f é dado pela Eq. (2.1)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{2.1}$$

A partir de ∇f, pode-se calcular o rotacional de ∇f, dado pela Eq. (2.2)

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

em que $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente.

Calculando o rotacional de ∇f, tem-se que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\hat{k},$$

como as derivadas parciais são comutativas (Teorema de Clairaut), tem-se que

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

3 Divergente de Rotacional

Mostre que o divergente do rotacional de uma função $f(x, y, z)$ é nulo.

3.1 Solução

Assumindo que a função $f(x, y, z)$ é um campo vetorial na forma $f(x, y, z) = (P, Q, R)$ e que as funções $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ são funções escalares, o divergente do rotacional de $f(x, y, z)$ é dado pela Eq. (3.1)

$$\nabla \times f(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

O divergente de $\nabla \times f(x, y, z)$ é dado pela Eq. (3.2)

$$\nabla \cdot \nabla \times f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{3.2}$$

Distribuindo as derivadas parciais obtém-se

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y},$$

como pelo Teorema de Clairut, as derivadas cruzadas são iguais

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0. \tag{3.3}$$

4 Regra da Cadeia em Funções de 2 Variáveis

Dada a função

$$f(x,y) = e^{x(\xi,\eta)} + e^{\sin(x(\xi,\eta)y(\xi,\eta)^3)}$$

calcule o gradiente relativo às coordenadas paramétricas ξ e η, sobre a superfície parametrizada dada por:

$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \cos(\xi^2) + \sin(\eta+1) + 5\xi \\ y(\xi,\eta) = \sin(\xi^3) + \cos(\eta^2) + 7\eta \end{cases} .$$

4.1 Solução

O exercício 3 foi feito utilizando o *software* `Mathematica` e o código utilizado pode ser encontrado no Apêndice A.

O gradiente de f em relação às coordenadas paramétricas ξ e η é dado pela regra da cadeia, expressa pela Eq. (4.1)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

logo, basta evaluar as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ e depois substituir na Eq. (4.1).

Utilizando o `Mathematica` obtém-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y^3 e^{\sin\left(xy^3\right)} \cos\left(xy^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{\sin\left(xy^3\right)} \cos\left(xy^3\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -2\xi \sin\left(\xi^2\right) + 5$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos\left(\eta + 1\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 3\xi^2 \cos\left(\xi^3\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -2\eta \sin\left(\eta^2\right) + 7.$$

Dados a complexidade e o tamanho das funções que compõem o gradiente, optou-se por apresentar um trecho do código utilizado em que o gradiente é calculado. As figuras 4.1 e 4.2 mostram o cálculo das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, respectivamente.

```
dfdξ = dfdx dxdξ + dfdy dydξ
```

$$9\, e^{\text{Sin}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\,\xi^2\,\text{Cos}\left[\xi^3\right]\,\text{Cos}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]$$
$$\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^2+\left(5-2\,\xi\,\text{Sin}\left[\xi^2\right]\right)\Big(e^{5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]}+$$
$$e^{\text{Sin}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\,\text{Cos}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\Big)$$

Figura 4.1: Cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \xi}$.

```
dfdη = dfdx dxdη + dfdy dydη
```

$$3\, e^{\text{Sin}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\,\text{Cos}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]$$
$$\left(7+2\,\eta\,\text{Sin}\left[\eta^2\right]\right)\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^2+\text{Cos}[1+\eta]\,\Big(e^{5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]}+$$
$$e^{\text{Sin}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]}\,\text{Cos}\left[\left(5\,\xi+\text{Cos}\left[\xi^2\right]+\text{Sin}[1+\eta]\right)\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\right]\left(7\,\eta-\text{Cos}\left[\eta^2\right]+\text{Sin}\left[\xi^3\right]\right)^3\Big)$$

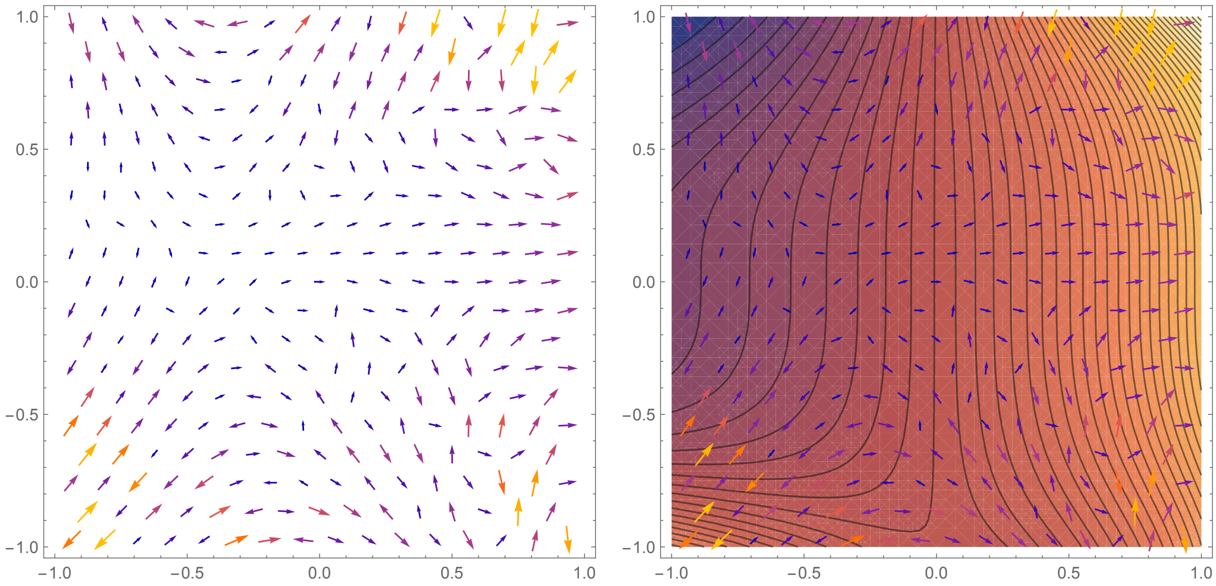
Figura 4.2: Cálculo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \eta}$.

Apresenta-se também a comparação entre os resultados obtidos pela regra da cadeia programada e pelas funções nativas do `Mathematica`

```
gradF = Grad[f, {ξ, η}];
% // TeXForm

gradChainF = {dfdξ, dfdη};

gradChainF - gradF // Simplify

{0, 0}
```

Figura 4.3: Comparação entre gradientes: $gradF$ - `Mathematica` e $gradChainF$ - Regra da Cadeia.

Como mostrado pela Fig. 4.3, os resultados alcançados pela regra da cadeia e pelo `Mathematica` são iguais, já que a diferença entre os gradientes é nula. Tal fato confirma que a implementação da regra da cadeia está correta. Por fim, plota-se os gráficos do gradiente de $f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ na Fig. 4.4.



(a) (b)

Figura 4.4: Resultados: a) gradiente de f. b) Contorno de f.

5 Derivações em Funções Mapeamento

6 Conclusão

Referências

1 STEWART, J. Essential calculus: Early transcendentals. Brooks/Cole, a part of the Thomson Corporation, 2007.

2 BECKER, E.; CAREY, G.; ODEN, J. Finite elements: An introduction. Prentice-Hall, n. v. 1, 1981.

A Repositório *GitHub*

O código fonte deste relatório e dos programas utilizados para a resolução dos problemas propostos estão disponíveis no repositório *GitHub* do autor. O repositório pode ser acessado através do link CarlosPuga14/MetodosNumericos_2024S1.