Universidad San Ignacio de Loyola

BIENVENIDO AL CURSO

MATEMÁTICA

Universidad San Ignacio de Loyola

Logro de la semana

Al finalizar la semana, el estudiante:

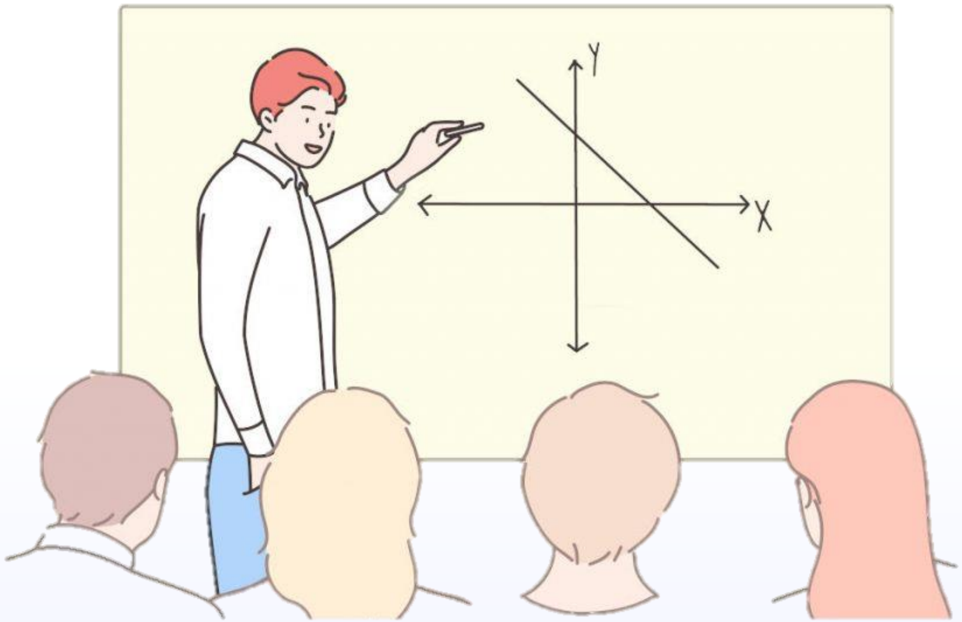
Reconoce una función y describe sus características a partir de sus representaciones simbólicas y gráficas.

Universidad San Ignacio de Loyola

Introducción

Las funciones, en el sentido matemático, **están por todas partes** como por ejemplo en las programación, en los sistemas informáticos, en los teléfonos móviles, en las aplicaciones, en los análisis financieros, en las estadísticas, en los análisis políticos, en los cálculos de precios, en las advertencias de terremotos, en los pronósticos políticos, pronósticos de crecimiento demográfico, pronósticos de sustentabilidad, etc.

La razón de su importancia radica en que las funciones permiten **establecer una conexión o relación entre dos magnitudes a través de modelos matemáticos**.



Índice

SEMANA

9

Universidad San Ignacio de Loyola

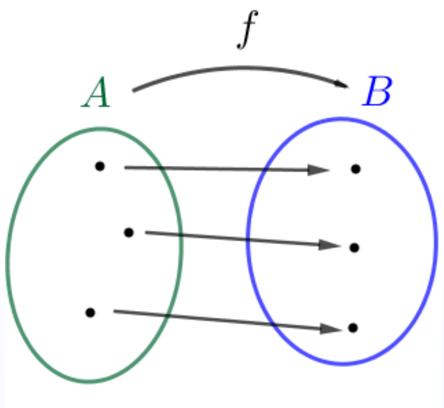
Función

Función

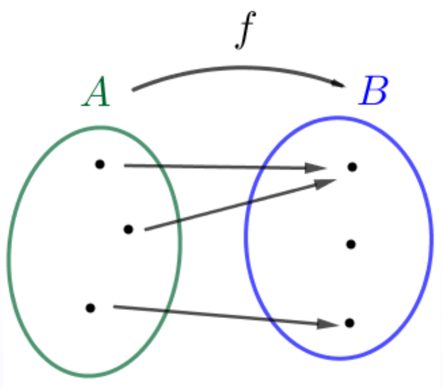
Considere dos conjuntos A y B. Una función (o mapeo) es una correspondencia que para cada $x \in A$ le hace corresponder **un único** elemento $y \in B$, en virtud de alguna regla f.

→ **Notación:** Decimos que f es una función de A a B y se denota como $f: A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$

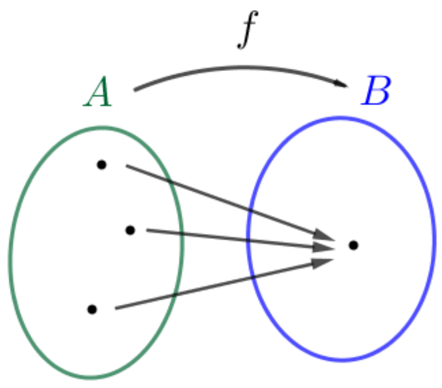
Ejemplo 1



Ejemplo 2



Ejemplo 3



Función: representación en diagrama sagital.(Elaboración propia. Geogebra).

- Si la función f asocia $x \in A$ con $y \in B$, decimos que el valor de f en x es y, y denotamos esto por $y = f(x)$.
- La expresión $y = f(x)$ se lee 'y' es igual a 'efe' de 'x'

Dominio y rango de una función

Llamamos al conjunto A el **dominio** de f, y lo denotamos por $A = D(f) = Dom(f)$.
El conjunto de $y \in B$ que corresponden a algún $x \in A$ se llama el **rango** de f , y se denota por $R(f) = Ran(f)$.
Es decir, $Ran(f) = \{f(x) \,/\, \exists x \left(x \in Dom(f) \wedge y = f(x)\right)\}$ está incluido en B (no se requiere que sea igual a B).

- ❑ Utilizamos el símbolo x para denotar un elemento general del dominio y es llamado el argumento de la función o la **variable independiente**.
- ❑ Como el argumento $x \in A$ varía, el valor $y = f(x) \in B$, en general, varía dependiendo de los valores de x. Por esta razón, la cantidad $y = f(x)$ a menudo se denomina **variable dependiente.**

Ejemplo:

Dada la función $f = \{(-2,3); (-4,0); (1,0); (2,9); (4,-5); (5,-5)\}$, se tiene:

$$D(f) = Dom(f) = \{-2,-4,1,4,5\} \text{ y } Ran(f) = \{3,0,9,-5\}$$

Además, el valor de la función en los valores particulares $x_0 = -2; 1$ y 4 son:

$$f(-2) = 3,\ f(1) = 0 \text{ y } f(4) = -5.$$

Universidad San Ignacio de Loyola

Funciones iguales

Dos funciones f y g se consideran idénticas o iguales, es decir $f = g$, si tienen el mismo dominio A y en cada elemento $x \in A$ los valores $f(x)$ y $g(x)$ son iguales.

Función restricción

Si $X \subset A$ y $f: A \to B$ es una función, denotamos por $f|_X$ a la función $\varphi: X \to B$ que concuerda con la función f en el conjunto X. Más precisamente, $f|_X(x) := \varphi(x)$ siempre que $x \in X$. A La función $f|_X$ se le llama **la restricción** de f a X, y la función $f: A \to B$ se llama una **extensión** o una continuación de φ a A.

Ejemplo:

Dada la función $f = \{(-2,3); (-4,0); (1,0); (2,9); (4,-5); (5,-5)\}$ definida sobre el conjunto $A = \{-2,-4,1,4,5\}$.

Si consideremos el conjunto $X = \{-4,1,4\} \subset A$, la función restricción $f|_X$ está dada por:

$$\varphi(x) := f\Big|_X = \{(-4,0); (1,0);\ (4,-5)\}$$

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Una función (o mapeo) es una correspondencia que para cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder **un único elemento** $y \in \mathbb{R}$, en virtud de alguna regla f.

Notación:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Ejemplo:

Las bien conocidas fórmulas $A = \pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para el área de un círculo y el volumen de una esfera, establecen las siguientes funciones:

- $A(r) = \pi r^2$ es una función con variable independiente r y variable dependiente A. Es decir, el área de una círculo depende de su radio.
- $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ es una función con variable independiente r y variable dependiente V. Es decir, el volumen de una esfera depende de su radio.

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

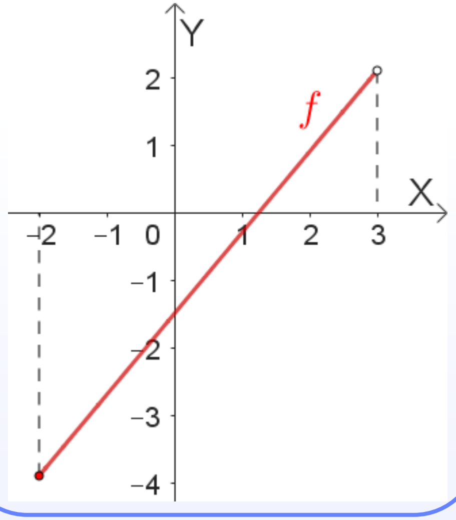
Podemos ilustrar las funciones reales de variable real (o simplemente funciones) en el plano utilizando coordenadas cartesianas.

Sea $f: A \to B$ una función real, es decir, tal que $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. La **gráfica** de f, que denotamos por graf(f), es el subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ cuyos elementos tienen la forma $(x, f(x))$.

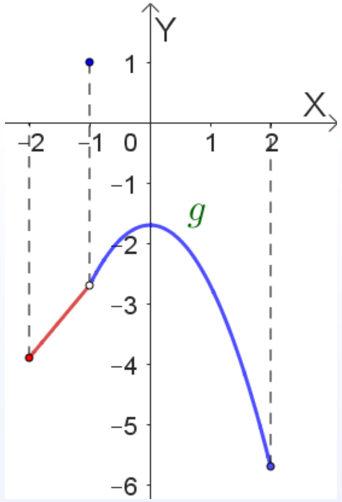
Es decir:

$$\textbf{graf}(\boldsymbol{f}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \;/\; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}$$

Ejemplo 1



Ejemplo 2



Gráfica de una función. (Elaboración propia. Geogebra).

- Esencialmente, una función se identifica con su gráfica y viceversa.
- Toda función cumple con la siguiente propiedad: “ninguna recta vertical puede intersectar a la gráfica, que representa a la función, en más de un punto”.

Función definida por tramos

Sean $F \subset \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ una familia de funciones e Y una familia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.
Una función $f: X \to \mathbb{R}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}$, es una función **definida por tramos**, si existe una colección o familia de funciones $\{f_i: X_i \to \mathbb{R}\}_{i \in J}$ de la forma $f_i = f|_{X_i}$ donde $f \in F$, $X_i \in Y$ y J es un conjunto de índices contable, de modo que:

i. $f(x) = f_i(x)$ si $x \in X_i$ e $i \in J$. (Propiedad de la regla por tramos)
ii. $X = \bigcup X_i$, $i \in J$. (Propiedad del dominio)
iii. $X_i \cap X_j = \emptyset$, para $i, j \in J$ con $i \neq j$. (Propiedad del no solapamiento)
iv. Dados $i, j \in J$ con $i \neq j$. Si $f, g \in F$, $f_i = f|_{X_i}$ y $f_j = g|_{X_j}$ entonces $f \neq g$. (Propiedad de la no redundancia)

Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$g(x) = \begin{cases} -3x - 10 & x \leq -3 \\ 2 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3

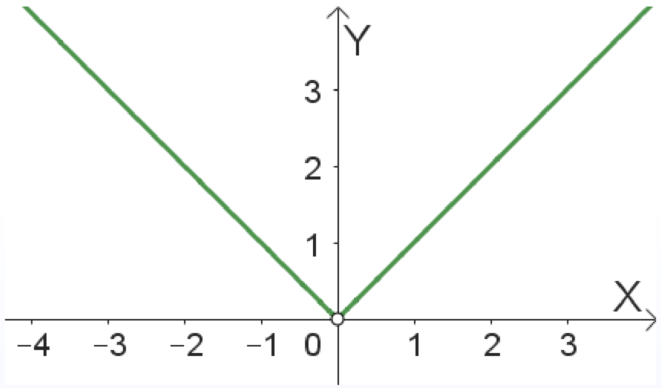
$$h(x) = \begin{cases} e^{5x} & x \leq -2 \\ 3x + 2 & -2 < x \leq 0 \\ \dfrac{5}{x - 3} & 1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x - 5} & x \geq 5 \end{cases}$$

Universidad San Ignacio de Loyola

Función definida por tramos

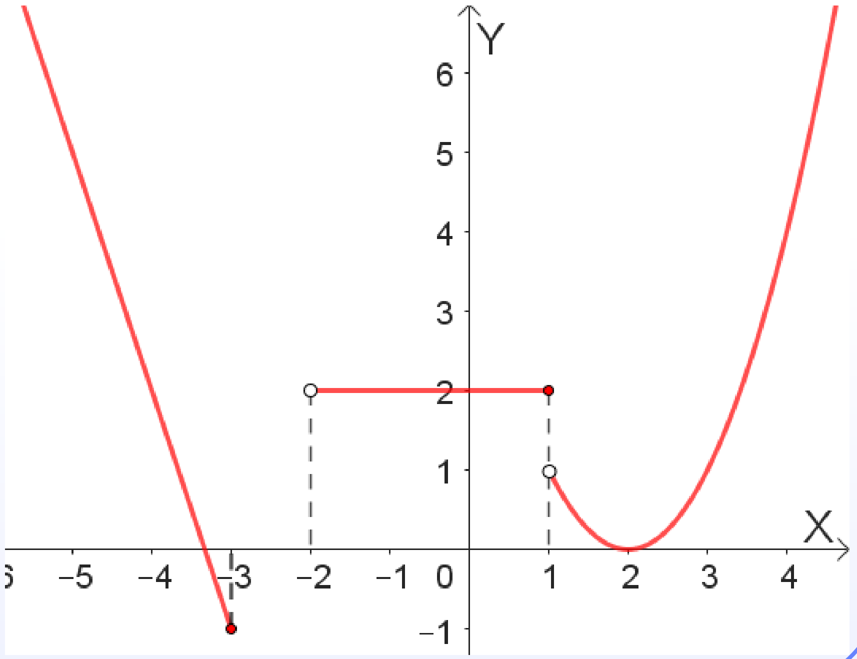
Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



Ejemplo 2

$$g(x) = \begin{cases} -3x - 10 & x \leq -3 \\ 2 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & x > 1 \end{cases}$$



Gráfica de una función definida por tramos. (Elaboración propia. Geogebra).

Características básicas de una función

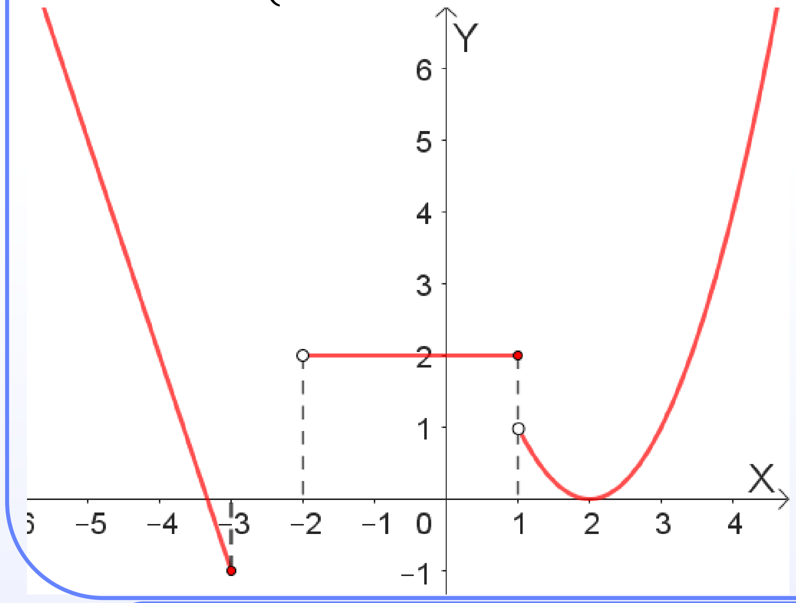
Funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en el intervalo I,

1. Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **creciente** en I.
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **decreciente** en I.

- Las definiciones de funciones crecientes y decrecientes deben satisfacerse **para toda** pareja de puntos x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$.
- Puesto que utilizamos la desigualdad $<$, para comparar los valores de la función, en lugar de $\leq$, en ocasiones se dice que f es **estrictamente creciente o decreciente** en I.
- El intervalo I puede ser acotado o no acotado.
- El intervalo nunca puede consistir de un solo punto.
- Si f cumple alguna de las definiciones anteriores, se la llama **monótona** y al intervalo I se le llama **intervalo de monotonía.**

$$g(x) = \begin{cases} -3x - 10 & x \leq -3 \\ 2 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & x > 1 \end{cases}$$



- La función g es: Decreciente en $]-\infty, -3]$ y en $]1,2]$.
- Creciente en $[2, +\infty[$.
- No es creciente ni decreciente (es constante) en el intervalo $]-2,1]$

Gráfica de una función definida por tramos. (Elaboración propia. Geogebra).

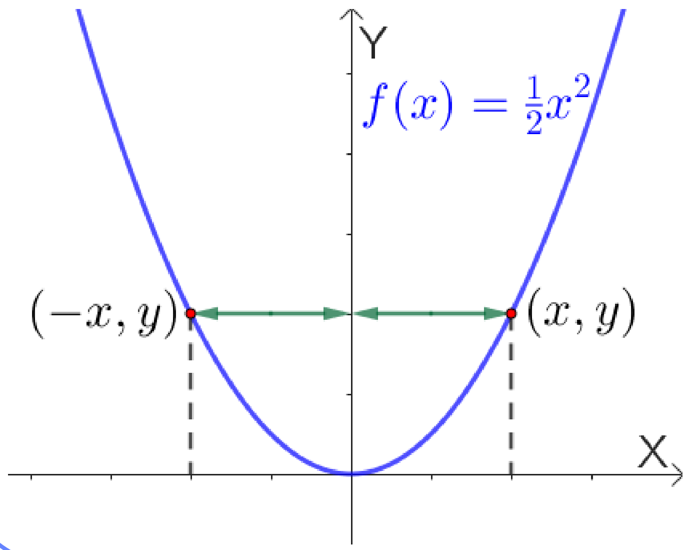
Funciones pares e impares

Sea $f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que,

1. f es **par** si en $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.
2. f es **impar** si en $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

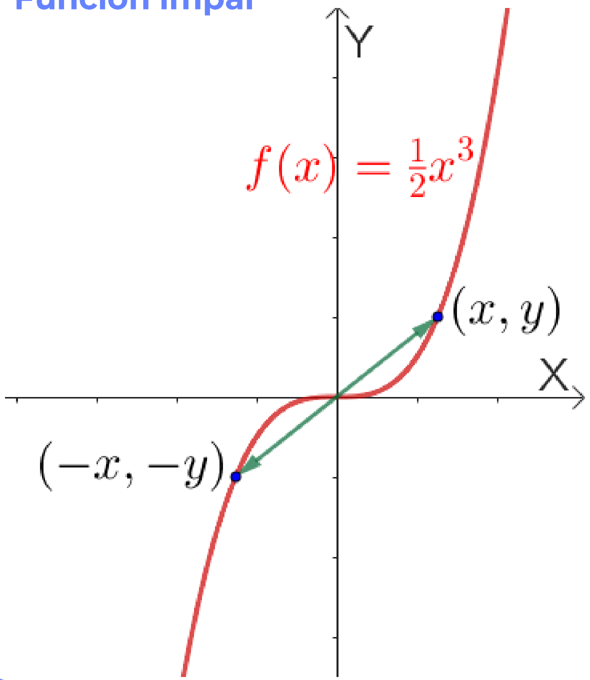
- La gráfica de una **función par** es simétrica con respecto al eje Y.
- La gráfica de una **función impar** es simétrica con respecto al origen de coordenadas

Función par



Gráfica de una función par. (Elaboración propia. Geogebra).

Función impar



Gráfica de una función impar. (Elaboración propia. Geogebra).

Universidad San Ignacio de Loyola

Intersección de la gráfica de una función con el eje de las ordenadas

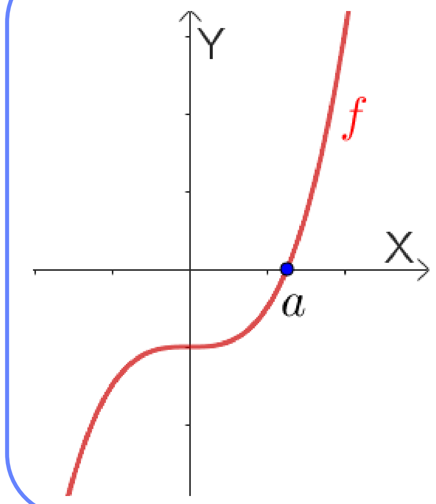
La gráfica de toda función $f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ puede cortar al eje Y como máximo en un punto.

Los ceros de una función

Sea $f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Resolver es la ecuación

$$f(x) = 0, \forall x \in Dom(f),$$

Significa **determinar los ceros** de f.
Geométricamente, el problema se reduce a determinar los puntos de corte de la gráfica de la función f con el eje de abscisas, para todo $x \in Dom(f)$.



- La gráfica de f intersecta al eje de abscisas en un punto $a \in Dom(f)$ lo que
- significa que $x = a$ es un cero de la función f.

Cero de una función par. (Elaboración propia. Geogebra).

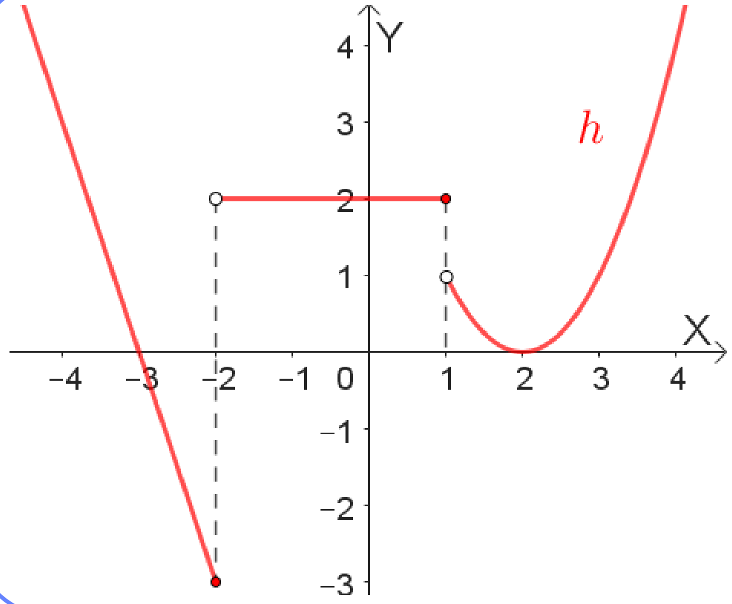
Los signos de una función

Sea $f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Determinar su signo implica resolver las inecuaciones:

$$\boldsymbol{f(x) < 0 \text{ o } f(x) > 0, \forall x \in Dom(f).}$$

A partir de su representación gráfica,

- El conjunto solución de $f(x) > 0$ estará conformado por todo aquellos puntos del dominio para los cuales la gráfica de f está situada por encima del eje de abscisas.
- El conjunto solución de $f(x) < 0$ estará conformado por todo aquellos puntos del dominio para los cuales la gráfica de f está situada por debajo del eje de abscisas.



Gráfica de una función definida por tramos. (Elaboración propia. Geogebra).

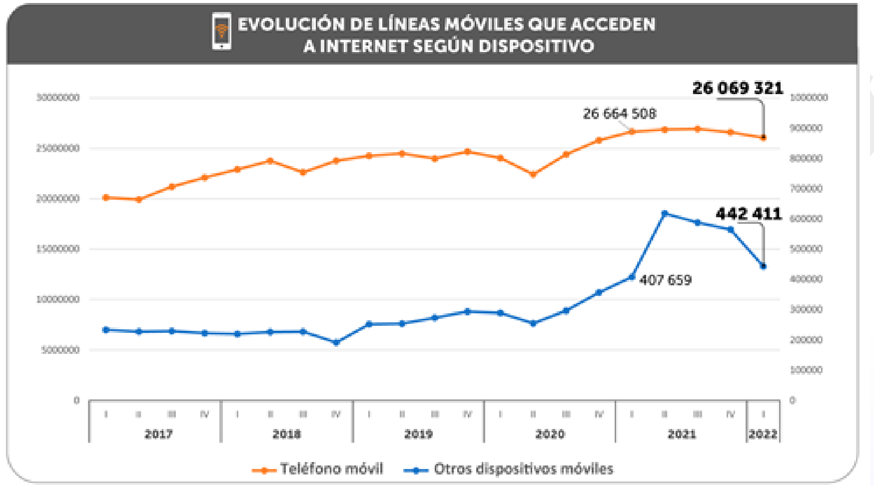
- Los cero de h son $x = -3$ y $x = 2$.
- La función h es positiva ($h(x) > 0$) en:
  $]-\infty, -3[\, \cup\,]-2,2[\, \cup\,]2, +\infty[$.
- La función h es negativa ($h(x) < 0$) en $]-3, -2]$.

$$h(x) = \begin{cases} -3x - 9 & x \leq -2 \\ 2 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

Reflexionamos:

Observa el gráfico, ¿consideras que la información que muestra el gráfico tiene el comportamiento de una función?

¡Quiero escucharte!



Fuente: PUNKU – OSIPTEL (fecha de corte 10/06/2022)

Fuente: [Internet móvil en Perú – Osiptel](#).

Comparte tu opinión con nosotros y explícanos, en términos de la monotonía, el comportamiento del acceso a internet según cada dispositivo.

¡Éxitos!

Referencias

- Chumpitaz Malpartida, L. (2013). *La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería* (Tesis de maestría). https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4514
- Laczkovich, M y Sós, V. (2015). *Real Analysis: Foundations and Functions of One Variable*. Springer.
- Thomas, G. (2010). *Cálculo una variable*. Pearson Educación.
- Zorich, V. (2004). *Mathematical Analysis I.* Springer


Universidad San Ignacio de Loyola
¡GRACIAS!