

1b) Modelo para el control de Lobesia botrana sin estructura etaria - con SIT (sin voltinismo)

Actualmente en Mendoza, Argentina, la lucha contra Lobesia botrana por parte de las autoridades de control sanitario se enfoca en el uso de la Técnica de Confusión Sexual mediante el uso de feromonas. Existen pruebas piloto que se han realizado utilizando SIT, pero esto aún no se ha implementado en la escala adecuada como actualmente ocurre con la lucha contra Ceratitis capitata. Por lo tanto, no se cuentan con datos de campo y el siguiente modelo presentado utilizando SIT tiene solamente carácter teórico.

La primera propuesta de modelo consiste en no considerar la estructura etaria inherente a la población (huevo, larva, pupa, adulto) y se concentra en en la fase de adultos, pues la Técnica del Insecto Estéril (SIT) actúa exclusivamente sobre los machos adultos. Tampoco se tiene en cuenta el voltinismo de la población.

Se plantea un modelo de dos compartimentos:

- $W(t)$: población silvestre (machos + hembras, asumiendo proporción 1:1 entre sexos)
- $S(t)$: machos estériles liberados.

Recordemos que el SIT propone realizar la supresión del crecimiento se obtiene mediante la competencia en el apareamiento, dado que las hembras silvestres pueden aparearse con machos estériles, generando huevos viables y con machos estériles, generando huevos inviables. Dada la proporción 1:1 entre sexos, la cantidad de machos salvajes disponibles es $W/2$. La disponibilidad total de machos en el sistema considerado es entonces $W/2 + S$. La probabilidad de apareamiento de una hembra con un macho fértil es $\frac{W/2}{W/2 + S} = \frac{W}{W + 2S}$ (este factor actuará como un modulador del crecimiento de la población). Para la formulación consideraremos los siguientes supuestos:

- El apareamiento es entre una hembra y un macho (competencia entre machos silvestres y estériles).
- La fecundación con machos estériles no produce descendencia viable.
- Se mantiene una proporción sexual 1:1 en la población silvestre.
- Se considera crecimiento logístico del total de la población silvestre limitado por la capacidad de carga K .

- Los machos estériles son liberados a tasa constante y sufren mortalidad natural.
- El efecto del control SIT es introducido **reduciendo la tasa de nacimiento efectivo**, no modificando la mortalidad de los silvestres.

Para el mecanismo de liberación, Ben Dhahbi (1) propone tres diferentes estrategias: liberación constante (este es el caso que elegimos en este apartado), liberación proporcional a la cantidad existente de polillas y un tercer caso que modela saturación en el proceso de liberación.

Modelo del Sistema

La formulación del modelo es:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) \frac{W}{W + 2S} - \mu W \\ \frac{dS}{dt} = R - \delta S \end{cases}$$

donde:

- $W(t)$: población silvestre total (machos + hembras, proporción 1:1),
- $S(t)$: cantidad de machos estériles liberados,
- r : tasa intrínseca de crecimiento de la población silvestre,
- K : capacidad de carga del sistema,
- μ : tasa de mortalidad natural de la población silvestre,
- R : tasa de liberación constante de insectos estériles,
- δ : tasa de mortalidad de los machos estériles.

En la primera ecuación, el factor $1 - W/K$ es el factor asociado a la densodependencia, y $\frac{W}{W+2S}$ el factor que limita la tasa intrínseca de la especie a partir de la liberación de machos estériles.

Puntos de Equilibrio

Para hallar los puntos de equilibrio se igualan las derivadas a cero:

1. Para S :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow S^* = \frac{R}{\delta}$$

2. Para W :

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) \frac{W}{W + 2R/\delta} - \mu W = 0$$

Dividiendo por $W \neq 0$ y simplificando:

$$r \left(1 - \frac{W}{K}\right) \frac{W}{W + 2R/\delta} = \mu$$

Multiplicando ambos lados por $(W + 2R/\delta)$.

$$rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) = \mu \left(W + \frac{2R}{\delta}\right)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos:

$$W^* = \frac{(r - \mu) \pm \sqrt{(r - \mu)^2 - \frac{8r\mu R}{K\delta}}}{2 \cdot \frac{r}{K}}$$

Suponiendo que $r - \mu > 0$, y dado que $r - \mu > \sqrt{(r - \mu)^2 - \frac{8r\mu R}{K\delta}}$ concluimos que ambas raíces corresponden a puntos de equilibrio positivos. Llamando $\Delta = \sqrt{(r - \mu)^2 - \frac{8r\mu R}{K\delta}}$, obtenemos la expresión para los mismos: $W_{1,2}^* = \frac{(r - \mu) \pm \Delta}{2 \cdot \frac{r}{K}}$

Finalmente se puede asegurar que los puntos de equilibrio tienen coordenadas: $(0, S^*)$, (W_1^*, S^*) y (W_2^*, S^*)

Análisis de Estabilidad Local

Consideremos el sistema original y definamos:

$$f(W, S) = rW \left(1 - \frac{W}{K}\right) \frac{W}{W + 2S} - \mu W$$

$$g(W, S) = R - \delta S$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial W} = \left(r - \frac{2R}{K}W\right) \frac{W}{W + 2S} + \left(rW - \frac{r}{K}W^2\right) \frac{2S}{(W + 2S)^2} - \mu$$

Calculamos la matriz Jacobiana del sistema y evaluamos en los puntos de equilibrio:

$$J(W^*, S^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)} & \frac{\partial f}{\partial S}\big|_{(W^*, S^*)} \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)} = (\mu \mp \Delta) \frac{W^*}{W^* + \frac{2R}{\gamma}} + (r - \mu \pm \Delta) \left(\frac{K}{2} - \frac{K}{4r} (r - \mu \pm \Delta) \right) \frac{2R/\gamma}{\left(W^* + \frac{2R}{\gamma}\right)^2} - \mu$$

La matriz precedente es triangular y por lo tanto $\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)}$ y $\lambda_2 = -\delta$ son los autovalores del sistema.

Para el punto $(0, \frac{R}{\delta})$,

$$J(0, \frac{R}{\delta}) = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{\partial f}{\partial S}\big|_{(0, \frac{R}{\delta})} \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Ambos autovalores son negativos, luego la traza es negativa, el determinante positivo y el equilibrio es localmente estable. Además, se trata de un atractor, pues el cuadrado de la traza es positivo.

Respecto a los otros dos puntos de equilibrio positivos, en ambos casos la estabilidad depende del signo de la expresión $\frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)}$ (tiene que ver con los valores específicos de los parámetros considerados). Se pueden presentar tres escenarios:

- $\frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)} > 0$. En ese caso el determinante de la traza es negativo y estamos en presencia de una silla hiperbólica (punto de equilibrio inestable).
- $\frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)} < 0$. Análisis similar a $(0, \frac{R}{\delta})$ y se trata de un atractor.
- $\frac{\partial f}{\partial W}\big|_{(W^*, S^*)} = 0$ se trata de una singularidad que amerita un estudio más profundo que el análisis de estabilidad lineal.

En cualquier caso, a los efectos de la aplicación práctica de este modelo, el interés recae en la condición de control global para la peste, desarrollada en la sección siguiente.

Condición para Control Global

Para que no existan equilibrios positivos (es decir, para lograr la erradicación de la población silvestre), se debe cumplir la condición $(r - \mu)^2 < \frac{8r\mu R}{K\delta}$ (corresponde al discriminante negativo en la raíz de la expresión de W^*). Esto corresponde a una tasa de liberación constante:

$$R > (r - \mu)^2 \frac{K\delta}{8r\mu}$$

Esta condición permite determinar valores de R que garanticen un control total mediante uso de SIT.

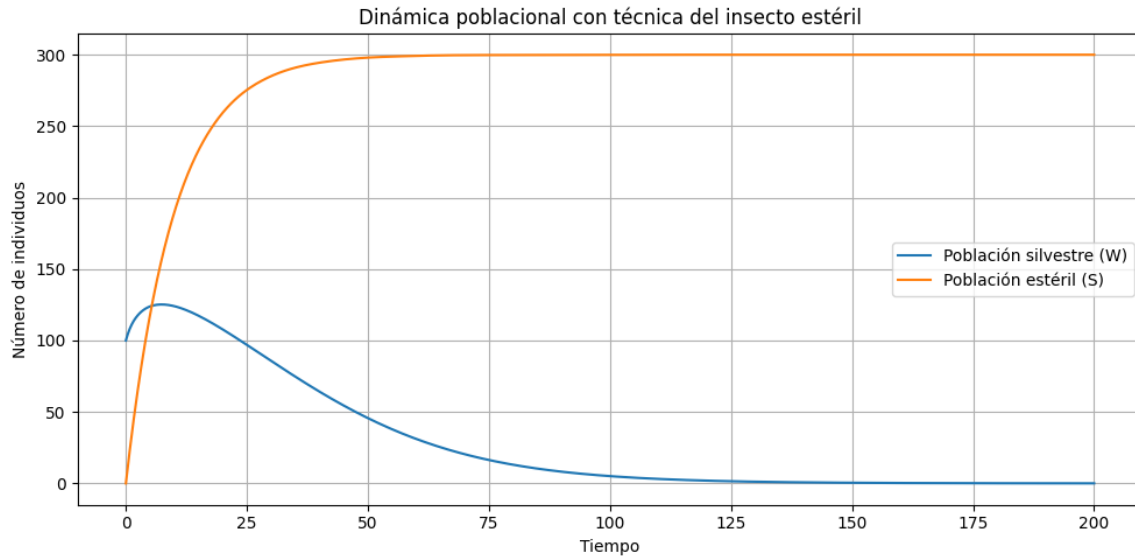
Simulaciones

Se consideraron los siguientes valores para la simulación de las soluciones de la EDO.

- $r = 0.2$ (tasa intrínseca de crecimiento)
- $K = 1000$ (capacidad de carga del ambiente)
- $\mu = 0.05$ (tasa de mortalidad natural de la población silvestre)
- $R = 30$ (tasa de liberación de machos estériles por unidad de tiempo)
- $\delta = 0.1$ (tasa de mortalidad natural de los estériles)

El script (1b) (2) contiene la solución para el sistema propuesto. Para la resolución del sistema propuesto, se utilizó el procedimiento *solve_ivp*, del paquete *Scipy* de Python (3).

La siguiente gráfica permite observar la evolución de la plaga y de los insectos estériles:



De acuerdo al criterio obtenido, con los datos suministrados, dado que $R = 30$, se cumple que:

$$R > (r - \mu)^2 \frac{K\delta}{8r\mu} = 28.13$$

Por lo tanto, el modelo predice que la plaga, bajo estas condiciones, evoluciona a la extinción.

Observaciones

- Este modelo no reproduce el voltinismo de la plaga, pero permite estudiar el crecimiento y decrecimiento de un vuelo en particular de la misma.
- El decrecimiento de la plaga es muy suave, lo que no se observa a partir de los datos de campo (por ejemplo, datos modelo 1a) que muestra caídas abruptas y cíclicas de la misma. Una alternativa de mejora puede ser afectar el crecimiento de la tasa con un factor que acelere la caída, por ejemplo, incluir el factor $e^{-\alpha W}$ y multiplicarlo por la tasa original.
- El modelo no captura la naturaleza pulsátil de la plaga.
- El régimen de tasa constante de suministro de polillas estériles es extremadamente caro, motivo por el cual para el manejo de la plaga se realizan liberaciones de insectos estériles en forma impulsiva, atendiendo a los datos históricos y la relación estériles / fértiles en cada revisión (por ejemplo, con una frecuencia semanal) de las trampas.

Referencias

- 1) Ben Dhahbi, A., Chargui, Y., Boulaaras, S. M., Ben Khalifa, S., Koko, W., & Alresheedi, F. (2020). *Mathematical modelling of the sterile insect technique using different release strategies*. Mathematical Problems in Engineering, 2020, Article ID 8896566, 9 pages. <https://doi.org/10.1155/2020/8896566>
- 2) Bageta, R. (2025). *Script 1c – parte B) [Archivo Jupyter “Modelos Lobesia.ipynb”]* [Notebook de Jupyter]. GitHub. <https://github.com/CarlosRubenBageta/Repositorio-de-modelos-matematicos-para-Lobesia-botrana/Modelos%20Lobesia.ipynb>
- 3) Python Software Foundation. (2023). *Python (versión 3.11) [Lenguaje de programación]*. <https://www.python.org>