

1c) Modelo para el control de Lobesia botrana sin estructura etaria - con SIT (incorporando voltinismo y tasa pulsátil)

El modelo es una extensión del modelo 1b.

Se plantea entonces un modelo de dos compartimentos:

- $W(t)$: población silvestre (machos + hembras, asumiendo proporción 1:1 entre sexos)
- $S(t)$: machos estériles liberados.

Para la formulación consideraremos los siguientes supuestos:

- No se considera la estructura etaria.
- Se agrega una tasa de crecimiento pulsátil (similar a la planteada en el modelo 1a), donde cada pulso se activa en las cercanías de los tiempos donde se observan los picos en la cantidad de polillas detectadas para los diferentes vuelos.
- Incorpora voltinismo.
- El apareamiento es entre una hembra y un macho (competencia entre machos silvestres y estériles), generando la supresión deseada.
- La fecundación con machos estériles no produce descendencia viable.
- Se mantiene una proporción sexual 1:1 en la población silvestre.
- Se considera crecimiento logístico de la población silvestre no se modela en términos de capacidad de carga del sistema.
- Los machos estériles son liberados a tasa constante y sufren mortalidad natural.
- El efecto del control SIT es introducido **reduciendo la tasa de nacimiento efectivo**, no modificando la mortalidad de los silvestres.

Modelo del Sistema

La formulación del modelo es:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = r(t)W \frac{W}{W + 2S} - \mu W - \beta W^2 \\ \frac{dS}{dt} = R - \delta S \end{cases}$$

donde:

- $W(t)$: población silvestre total (machos + hembras, proporción 1:1),

- $S(t)$: cantidad de machos estériles liberados,
- $r(t)$: tasa intrínseca de crecimiento de la población silvestre, donde $r(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t)$, con $r_i(t) = r_{max} \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$
- r_{max} : tasa intrínseca máxima de la campaña.
- t_i : tiempo en que se producen los i-ésimos picos de cantidad de polillas.
- σ_i : duración de la semivida de un adulto para el vuelo i-ésimo.
- β : Tasa asociada a la disminución por denso-dependencia,
- μ : tasa de mortalidad natural de la población silvestre,
- R : tasa de liberación constante de insectos estériles,
- δ : tasa de mortalidad de los machos estériles.

En la primera ecuación $\frac{W}{W+2S}$ es el factor que limita la tasa intrínseca de la especie a partir de la liberación de machos estériles.

La ecuación relacionada con la inyección en el sistema de polillas (asociada al manejo), se modela siguiendo a Ben Dhahbi (1) y considerando el mecanismo de liberación constante de polillas

Puntos de Equilibrio

Buscamos los puntos (W^*, S^*) tales que $\frac{dS}{dt} = 0$ y $\frac{dW}{dt} = 0$.

Para S:

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow S^* = \frac{R}{\delta}$$

Para W:

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow rW \frac{W}{W+2S} - \mu W - \beta W^2 = 0$$

Multiplicamos por $W + 2S$ y dividimos por $W \neq 0$:

$$rW - (\mu + \beta W)(W + 2S) = 0$$

$$W[(r - \mu) - \beta W - 2\beta S] = 2\mu S$$

Sustituyendo $S = \frac{R}{\delta}$, se tiene: $W[(r - \mu) - \beta W - \frac{2\beta R}{\delta}] = \frac{2\mu R}{\delta}$. Trabajando algebraicamente,

$$\beta W^2 - \left(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta}\right)W + \frac{2\mu R}{\delta} = 0$$

$$\text{De donde: } W_{1,2}^* = \frac{r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta} \pm \sqrt{\left(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta}\right)^2 - \frac{8\beta\mu R}{\delta}}}{2\beta}$$

Los puntos de equilibrio tienen coordenadas: $(0, S^*)$, (W_1^*, S^*) y (W_2^*, S^*)

Suponiendo que $r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta} > 0$, y dado que $r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta} > \sqrt{\left(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta}\right)^2 - \frac{8\beta\mu R}{\delta}}$ concluimos que ambas raíces corresponden a puntos de equilibrio positivos. Llamando $\Delta = \sqrt{\left(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta}\right)^2 - \frac{8\beta\mu R}{\delta}}$, obtenemos la expresión de los mismos: $W_{1,2}^* = \frac{\left(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta}\right) \pm \Delta}{2\beta}$

Finalmente se puede asegurar que los puntos de equilibrio tienen coordenadas: $(0, S^*)$, (W_1^*, S^*) y (W_2^*, S^*)

Análisis de Estabilidad Local

Por tratarse de un sistema no autónomo, no podemos llevar a cabo el análisis de estabilidad local completo de la manera usual, pero podemos avanzar en algunos aspectos:

Consideremos el sistema original y definamos:

$$f(W, S) = r(t)W \frac{W}{W + 2S} - \mu W - \beta W^2$$

$$g(W, S) = R - \delta S$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial W} = r(t) \left(\frac{W^2 + 4WS}{(W + 2S)^2} \right) - \mu - 2\beta W$$

Y además que, $\frac{\partial g}{\partial W} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial S} = -\delta$

Escribimos la matriz Jacobiana del sistema y evaluamos en los puntos de equilibrio:

$$J(W^*, S^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial W} \Big|_{(W^*, S^*)} & \frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{(W^*, S^*)} \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial f}{\partial W} \Big|_{(W^*, S^*)} = r(t) \left(\frac{W^2 + 4WS}{(W + 2S)^2} \right) - \mu - 2\beta W \Big|_{(W^*, S^*)}$$

La matriz precedente es triangular y por lo tanto $\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial W} \Big|_{(W^*, S^*)}$ y $\lambda_2 = -\delta$ son los autovalores del sistema.

Para el punto $(0, \frac{R}{\delta})$,

$$J(0, \frac{R}{\delta}) = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{(0, \frac{R}{\delta})} \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Ambos autovalores son negativos, luego la traza es negativa, el determinante positivo y el equilibrio es localmente estable. Además, se trata de un atractor, pues el cuadrado de la traza es positivo.

En definitiva, si la cantidad de polillas es relativamente pequeña, cualquier liberación hace que se extinga la peste.

La información relevante acerca de los puntos de equilibrio positivos se analiza en la siguiente sección.

Condición para Control Global

En el escenario que $r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta} > 0$, para que no existan equilibrios positivos (es decir, para lograr la erradicación de la población silvestre), se debe cumplir la condición $(r - \mu - \frac{2\beta R}{\delta})^2 - \frac{8\beta\mu R}{\delta} < 0$ (corresponde al discriminante negativo en la raíz de la expresión de W^*). Trabajando algebraicamente la inecuación, obtenemos la condición:

$$\frac{\delta}{\beta} \left(\frac{r + \mu}{2} - \sqrt{r\mu} \right) < R < \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{r + \mu}{2} + \sqrt{r\mu} \right)$$

Dado que

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_{max} \exp \left(-\frac{(t - t_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \leq n \cdot r_{max}$$

Y además, que siempre $\frac{r+\mu}{2} - \sqrt{r\mu} > 0$ para todo $r > 0$ y $\mu > 0$, podemos escribir:

$$\frac{\delta}{\beta} \left(\frac{n \cdot r_{max} + \mu}{2} - \sqrt{n \cdot r_{max} \mu} \right) < R < \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{n \cdot r_{max} + \mu}{2} + \sqrt{n \cdot r_{max} \mu} \right)$$

Esta desigualdad constituye la condición de manejo buscada. Es interesante observar que si R es mayor que el extremo superior del intervalo, los puntos de equilibrio positivos reaparecen, lo que indica que liberar por encima de ese umbral, además de ser económicamente más caro (recordemos que la mayor liberación tiene asociado un mayor costo operativo) termina beneficiando el establecimiento de la peste.

Esta condición permite determinar valores de R que garanticen un control total mediante uso de SIT.

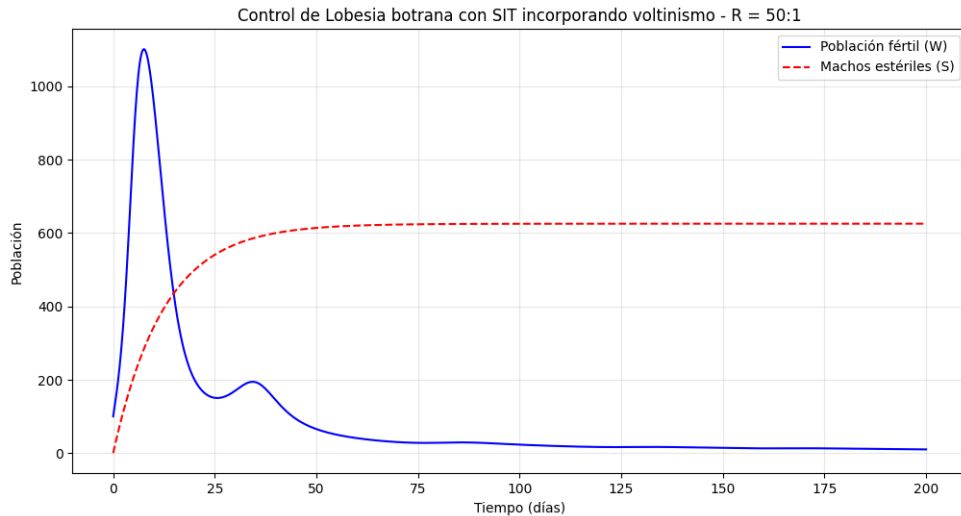
Simulaciones

Se llevaron a cabo simulaciones con diferentes valores de los parámetros.

- $r_{\max} = 2.571$ (tasa máxima de crecimiento por generación)
- $\mu = 0.00010$ (tasa de mortalidad natural)
- $\beta = 0.000931$ (coeficiente de competencia)
- $\delta = 0.05$ (tasa de mortalidad de machos estériles)
- $n = 5$ (número de vuelos)
- $R = 50$ (tasa de liberación de machos estériles), este valor corresponde al objetivo del programa para **contención** de la plaga, ver tabla 9.1, p73 (2)

El script (1c – parte A), ver (3), contiene la simulación de la solución del sistema propuesto.

En la misma, se considera $W_0 = 100$ polillas (población inicial detectada en trampas de Lobesia). Se presenta una gráfica de la evolución de la plaga a partir de estas condiciones.



Conclusiones y trabajo futuro

- Este modelo permite advertir el decrecimiento pulsátil de la plaga.
- Los valores de R se encuentran por debajo del umbral mínimo establecido:

$$\frac{\delta}{\beta} \left(\frac{n \cdot r_{\max} + \mu}{2} - \sqrt{n \cdot r_{\max} \mu} \right) < R < \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{n \cdot r_{\max} + \mu}{2} + \sqrt{n \cdot r_{\max} \mu} \right)$$

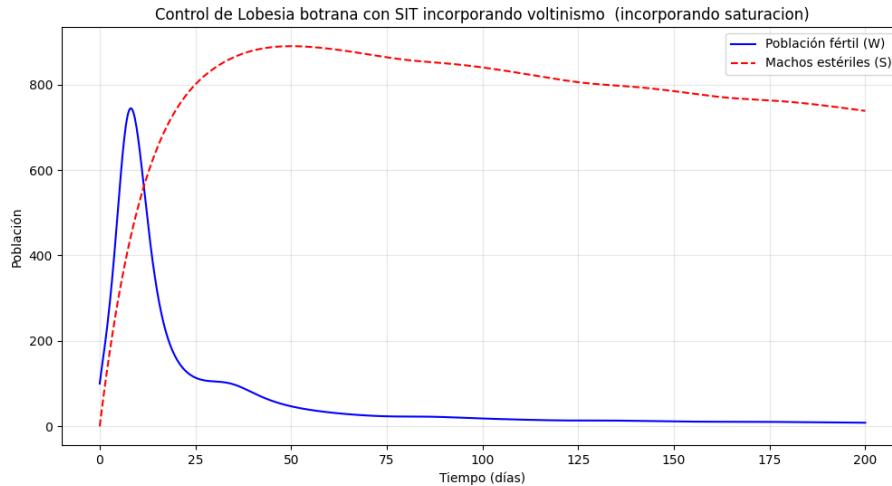
Según los valores propuestos de los parámetros, la desigualdad anterior toma valores $343.24 < R < 347.16$, por lo que la liberación elegida ($R = 50$), solo logra contener la plaga, no eliminarla (se puede ver al correr el script que W tiende asintóticamente al valor de 10 moscas, a medida que t aumenta).

- El régimen de tasa constante de suministro de polillas estériles es extremadamente caro, motivo por el cual para el manejo de la plaga se realizan liberaciones de insectos estériles en forma impulsiva, atendiendo a los datos históricos y la relación estériles / fértiles en cada revisión (por ejemplo, con una frecuencia semanal) de las trampas.
- La definición de $r_i(t)$ no considera variables ambientales (fundamentalmente temperatura) para mejorar la precisión de los resultados. Es muy probable que datos meteorológicos complementarios puedan explicar algunas discrepancias entre los datos observados y el modelo planteado. La tasa de desarrollo puede reformularse utilizando (por ejemplo) las fórmulas de Logan o Briere de la especie.
- Ben Dhahbi en (1) explora otras estrategias de liberación en sus modelos, que podrían dar lugar a extensiones del modelo que planteamos, tales como tasas de liberación:
 - a) proporcional a la población fértil y
 - b) que tenga en cuenta el efecto de saturación.

De acuerdo con la segunda estrategia, se han desarrollado modelos de tipo:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = r(t)W \frac{W}{W+2S} - \mu W - \beta W^2 \\ \frac{dS}{dt} = R \frac{W}{1+\lambda W} - \delta S \end{cases}, \text{ que tiene en cuenta el efecto de saturación,}$$

considerando una función de generación dependiente de W : $R(W) = R_1 \frac{W}{1+\lambda W}$ tipo Holling II. Se muestra una simulación de las soluciones de este modelo para propósitos informativos. Hasta el momento, no se ha podido calibrar con datos de campo, aunque el comportamiento de la curva de liberación es similar al criterio de manejo desplegado por ISCAMEN para el manejo de *Ceratitis capitata*. Ver (3), script 1c – parte B) escrito en Python (4).



Referencias

- 1) Ben Dhahbi, A., Chargui, Y., Boulaaras, S. M., Ben Khalifa, S., Koko, W., & Alresheedi, F. (2020). *Mathematical modelling of the sterile insect technique using different release strategies*. Mathematical Problems in Engineering, 2020, Article ID 8896566, 9 pages. <https://doi.org/10.1155/2020/8896566>
- 2) FAO/IAEA. (2017). *Guideline for packing, shipping, holding and release of sterile flies in area-wide fruit fly control programmes* (2.^a ed., J. L. Zavala-López & W. R. Enkerlin, Eds.). FAO/IAEA. <https://www.iaea.org/publications/11098>
- 3) Bageta, R. (2025). *Script 1c – parte B* [Archivo Jupyter “Modelos Lobesia.ipynb”] [Notebook de Jupyter]. GitHub. <https://github.com/CarlosRubenBageta/Repositorio-de-modelos-matematicos-para-Lobesia-botrana>
- 4) Python Software Foundation. (2023). *Python (versión 3.11)* [Lenguaje de programación]. <https://www.python.org>