

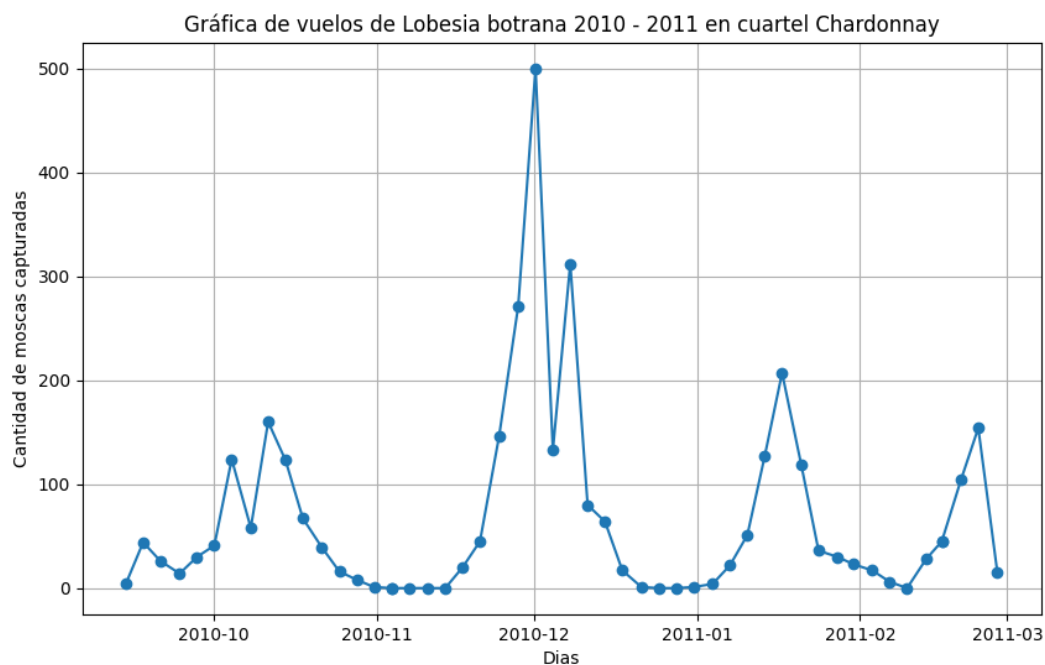
1a) Modelo para dinámica de vuelos de *Lobesia botrana* en estado natural sin estructura etaria (a partir de datos digitalizados)

Silva, S. et al. (1) llevaron a cabo un estudio sobre el comportamiento y la difusión local de *Lobesia botrana* con el objetivo de desarrollar estrategias de control y manejo que contribuyeran a minimizar las pérdidas de productividad. Para ello, se compararon observaciones locales con el modelo de temperatura y tasa de desarrollo propuesto previamente por Touzeau (6), en Francia.

El monitoreo de la plaga se realizó en una finca ubicada en el departamento de Maipú, Mendoza, en un cuartel de Chardonnay, mediante la elaboración de curvas de vuelo de *Lobesia*. Para tal fin, se emplearon trampas tipo Delta, diseñadas específicamente para atraer machos de la polilla del racimo mediante el uso de feromonas sexuales. Se dispuso una trampa por hectárea, instaladas a partir del mes de agosto.

El registro de capturas se llevó a cabo de forma sistemática desde comienzos de septiembre hasta marzo durante cada campaña agrícola, abarcando los ciclos 2010–2011 y 2011–2012.

A partir de los datos obtenidos del conteo de insectos, se presentan las curvas de vuelo del primer ciclo, en la siguiente figura:



con estimaciones cuantitativas de la cantidad de moscas capturadas por fecha durante el periodo 2010–2011. En la zona donde se registraron las mediciones, no se llevaron a cabo acciones de control de la plaga.

Supuestos del modelo

A partir de la tabla generada, se probó un modelo MSBPP (Modelo Semi-Físico Basado en Primeros Principios, por sus siglas en inglés), cuyas predicciones se contrastaron con las curvas de vuelo de la figura. Algunas características de la gráfica incluyen picos no periódicos de los vuelos, colapsos abruptos (caídas de la cantidad de polillas a valores cercanos a cero entre vuelos). Se advierte que los vuelos presentan una estacionalidad tenue, posiblemente influenciada por la variabilidad de factores ambientales.

Se plantea un modelo unidimensional donde:

- $W(t)$: población silvestre (machos + hembras)

Para la formulación consideraremos los siguientes supuestos:

- No se considera la estructura etaria.
- La tasa de desarrollo poblacional se descompone en dos componentes: la tasa de nacimientos y la tasa de mortalidad.
- Se agrega una tasa de nacimiento pulsátil, donde cada pulso se activa en las cercanías de los tiempos donde se observan los picos en la cantidad de polillas detectadas para los diferentes vuelos (integra los aportes sucesivos generados por el crecimiento pulsátil asociado a cada uno de los vuelos registrados).
- Incorpora voltinismo.
- El apareamiento es entre una hembra y un macho (se ve afectado por la confusión inducida por las feromonas)
- Se considera crecimiento logístico de la población silvestre, pero no se modela en términos de capacidad de carga del sistema.
- Se añade un término cuadrático que incorpora los efectos de la denso-dependencia, reflejando la limitación del crecimiento poblacional en función de la abundancia.

Se propone un modelo unidimensional no autónomo, en el cual $W(t)$ representa la cantidad de polillas capturadas en trampas en función del tiempo t (expresado en semanas).

Modelo del Sistema

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n r_i(t)W - \mu W - \beta W^2, \text{ donde } i = 1, 2, \dots, n$$

En la presente formulación:

- n : representa el número de vuelos
- $r_i(t) = r_{max} \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$: es la tasa pulsátil (modelada gaussiana)
- μ : mortalidad
- β : coeficiente asociado a densodependencia (no formulada en términos de la capacidad de soporte del sistema).
- r_{max} : tasa intrínseca máxima de la campaña.
- t_i : tiempo en que se producen los i -ésimos picos de cantidad de polillas.
- σ_i : duración de la semivida de un adulto para el vuelo i -ésimo.

Para el planteo de modelos biológicos autónomos, del cual el presente modelo es una extensión, ver, por ejemplo (5).

Observaciones:

- El factor $\sum_{i=1}^n r_i(t)$ suma los efectos de las tasas pulsátiles de cada vuelo.
- No se puede llevar a cabo el estudio cualitativo usual relacionado a sistemas autónomo, dado el carácter temporal de la tasa de desarrollo.
- En términos de la predictibilidad del modelo, contar con buenas estimaciones de los t_i es crucial. La siguiente tabla permite comparar los estudios (1) y (2), para obtener aproximadamente esos valores utilizando el método de Touzeau de las integrales térmicas:

Vuelo	Evento	GD Observado Mendoza (2010-2011) (1)	Fecha Observada Mendoza (2010-2011) (1)	GD Observado Mendoza (2012-2013) (2)	Fecha Observada Mendoza (2012-2013) (2)	GD Observado Mendoza (2013-2014) (2)	Fecha Observada Mendoza (2013-2014) (2)
1º	Pico máximo de capturas	205°C-D	13 de Octubre	196,46 GD	18 de Octubre	211,64 GD	18 de Octubre
2º	Pico máximo de capturas	614°C-D	1 de Diciembre	698,67 GD	7 de Diciembre	758,01 GD	10 de Diciembre
3º	Pico máximo de capturas	1232°C-D	21 de Enero	1222,06 GD	Mediados de Enero	1312,81 GD	16 de Enero
4º	Pico máximo de capturas	N/D*	Mediados de Febrero (posible)	1639,37 GD	Mediados de Febrero	1804,31 GD	18 de Febrero
5º	Pico máximo de capturas	N/D*	N/D	1776,04 GD	Principios de Marzo	2087,69 GD	Segunda quincena de Marzo

En la tabla precedente, la tercera y cuarta columna corresponden a (1), mientras que las cuatro restantes se extractan de (2). Se puede observar que las fechas en que se producen los picos máximos de los vuelos i -ésimos difieren en aproximadamente 1 semana comparando ambos estudios. Esto permite estimar los t_i , de acuerdo con los datos de una

zona en particular utilizando el método de Touzeau para datos regionales. Esto constituye una manera de adaptar el modelo que proponemos a diferentes zonas o países.

Análisis de Estabilidad No Lineal

El sistema planteado no tiene carácter autónomo (depende explícitamente del tiempo t a través de las tasas pulsátiles $r_i(t)$), lo que limita la aplicación directa de las técnicas clásicas de análisis cualitativo para sistemas autónomos.

Los puntos de equilibrio del sistema provienen de igualar a 0 la ecuación del modelo:

$$0 = \left[\sum_{i=1}^n r_i(t) \right] W - \mu W - \beta W^2$$

Resolviendo la ecuación precedente se obtienen en forma explícita los dos equilibrios: $W_1^* = 0$ y $W_2^* = \frac{1}{\beta} [\sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu]$.

Dado que el interés desde el punto de vista del manejo es averiguar acerca de condiciones para que el punto de equilibrio $W_1^* = 0$ sea estable, esta sección está dedicada a estudiar la estabilidad no lineal del mismo.

Sea $\epsilon > 0$ una perturbación pequeña. Definamos $W_1 = W_1^* + \epsilon$. Reemplazando en la ecuación diferencial del sistema original obtenemos:

$$\frac{dW_1}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu \right) W_1 - \beta W_1^2, \text{ donde } i = 1, 2, \dots, n$$

Por la definición de W_1 , para el primer y segundo miembro obtenemos, respectivamente:

$\frac{dW_1}{dt} = \frac{d(W_1^* + \epsilon)}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$, y $(\sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu)\epsilon - \beta\epsilon^2$. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu \right) \epsilon - \beta\epsilon^2, \text{ donde } i = 1, 2, \dots, n$$

Para estabilidad del punto crítico estudiado necesitamos que $\frac{d\epsilon}{dt} < 0$, es decir $\sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu < 0$

Dado que $0 \leq r_i(t) \leq \sum_{i=1}^n r_i(t)$, por definición de $r_i(t)$, para todo t y para todo $i = 1, 2, \dots, n$ obtenemos:

$$r_i(t) - \mu \leq \sum_{i=1}^n r_i(t) - \mu < 0$$

Es decir $r_i(t) < \mu$

Reemplazando $r_i(t)$ por su definición, vemos que: $r_{max} \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) < \mu$

Resolviendo la inecuación obtenemos las ventanas temporales (intervalos) donde el punto de equilibrio $W_1^* = 0$ es estable vienen dadas por:

$\cap_{i=1}^n \{[0, t_{i,1}) \cup (t_{i,2}, \infty)\}$, donde $t_{i,j} = t_i \pm \sigma_i \sqrt{2 \ln\left(\frac{r_{max}}{\mu}\right)}$, con $j = 1, 2$ y siempre que $\mu < r_{max}$

Condición inicial para el Control Global

El modelo planteado describe la dinámica de la plaga sin haber tomado acciones de control para controlar la misma.

En un escenario de inicio de control de la plaga (mediante técnicas como aplicaciones de químicos, uso de SIT o feromonas para aplicar técnica de confusión sexual), bajo el supuesto que el modelo es válido, es conveniente comenzar la aplicación de cualquiera de estas técnicas en los tiempos que corresponden al complemento de los intervalos de las ventanas temporales recién deducidas, es decir:

$$t \in \{[0, t_{1,1}) \cup (t_{1,2}, t_{2,1}) \cup (t_{2,2}, t_{3,1}) \cup \dots \cup (t_{n,1}, t_{n,2})\}$$

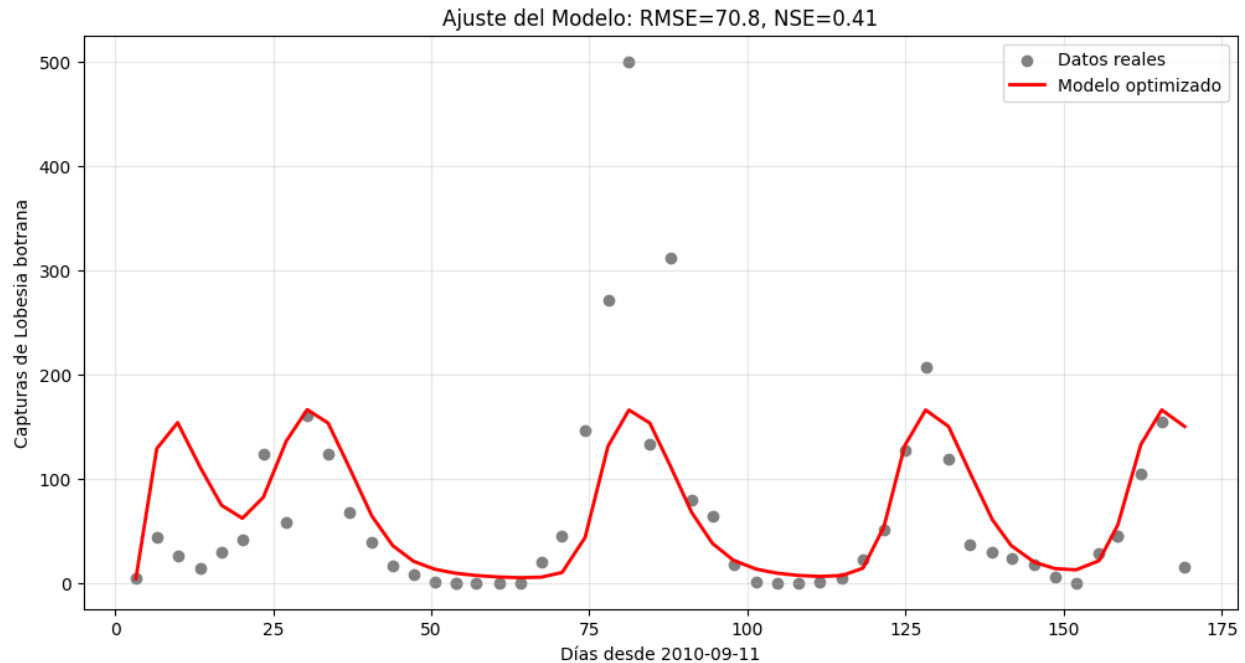
Los extremos de estos intervalos corresponden a los deducidos en la sección anterior.

El motivo de la afirmación previa se basa en que, para las ventanas temporales descritas en la sección anterior, la cantidad de insectos tiende a 0 naturalmente, dado que $W_1^* = 0$ es estable.

Simulaciones

Como se explicó previamente, a partir de la tabla generada con Web Plot Digitalizer se obtuvo una tabla con datos de los 5 vuelos registrados de Lobesia botrana en el período 2010 – 2011 (1). Se elaboró un código en Python (4) para extraer los t_i y calibrar los valores de los parámetros del modelo propuesto.

El procedimiento de extracción de los t_i se llevo a cabo con el procedimiento *argrelextrema* y la calibración, mediante *edo* y *curve_fit* (todos pertenecen al paquete *Scipy* de Python (9)).



En la gráfica precedente se representan los datos obtenidos y la curva correspondiente a los valores predichos del modelo optimizado. Los valores optimizados obtenidos de los parámetros fueron:

$$r_{max}=1.571, \mu=0.010, \beta=0.00931, \sigma_i=6.4$$

Las métricas de desempeño calculadas fueron RMSE = 70.8 y NSE (Nash-Sutcliffe Efficiency) = 0.41. Como referencia, NSE > 0.6 se considera un ajuste aceptable.

Conclusiones y trabajo futuro

- El modelo subestima los valores de capturas reales correspondientes al tercer pico (tercer vuelo de *Lobesia botrana*), como puede verse gráficamente.
- Caracteriza adecuadamente los intervalos temporales de la dinámica de la especie, si se conocen con precisión los t_i (ya se aclaró previamente que estos se pueden conocer con un error entre campañas de aproximadamente una semana utilizando el método de Touzeau para datos regionales).
- La definición de $r_i(t)$ no se consideraron variables ambientales (fundamentalmente temperatura) para mejorar la precisión de los resultados. Es muy probable que datos meteorológicos complementarios puedan explicar algunas discrepancias entre los datos observados y el modelo planteado. Una manera que parece natural de reflejar

esto en la tasa de desarrollo variable, seria reemplazar r_{max} por una tasa variable que dependa de la temperatura (que a su vez es función del tiempo) como:

$$r(T(t)) = \sum_{i=1}^n r_i(t)$$

donde $r_i(t) = g(T(t)) \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$ es la tasa pulsátil (modelada gaussiana) y además, $g(T(t))$ es la tasa de desarrollo calculada utilizando, (por ejemplo) las fórmulas de Logan o Briere de la especie incorporando además la dependencia de la temperatura (7).

Referencias

- 1) Silva, S. M. da, Bergas, V., San Blas, G., Buran, M., & otros. (2013, enero). *Aplicación del modelo de Touzeau como herramienta para el control y manejo de la "polilla de la vid" Lobesia botrana (Denis & Schiffmüller) en Mendoza* [Ponencia de conferencia]. ResearchGate. <https://www.researchgate.net/publication/282649704>
- 2) Dagatti, C. V., & Becerra, V. C. (2015). Ajuste de modelo fenológico para predecir el comportamiento de *Lobesia botrana* (Lepidoptera: Tortricidae) en un viñedo de Mendoza, Argentina. *Revista de la Sociedad Entomológica Argentina*, 74(3-4), 117–122. Sociedad Entomológica Argentina.
Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=322043152003>
- 3) Rohatgi, A. (2023). *WebPlotDigitizer (Versión 4.6)* [Software]. Automeris.
- 4) Bageta, C. R. (2025). *Repositorio de modelos matematicos para Lobesia botrana* [Repositorio de código]. GitHub.
<https://github.com/CarlosRubenBageta/Repositorio-de-modelos-matematicos-para-Lobesia-botrana>
- 5) Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Original work published 1988)
- 6) Touzeau, J. (1981). Modélisation de l'évolution de l'Eudemis de la vigne pour la région Midi-Pyrénées. *Bollettino di Zoologia Agraria e di Bachicoltura (Ser II)*, 16, 26–28.
- 7) Rossini, L., Severini, M., Contarini, M., & Speranza, S. (2020a). EntoSim: A ROOT-based simulator to forecast insects' life cycle: Description and application in the case of *Lobesia botrana*. *Crop Protection*, 129, 105024.
<https://doi.org/10.1016/j.cropro.2019.105024>

- 8) Bageta, R. (2025). *Script 1a) [Archivo Jupyter "Modelos Lobesia.ipynb"]* [Notebook de Jupyter]. GitHub. <https://github.com/CarlosRubenBageta/Repositorio-de-modelos-matematicos-para-Lobesia-botrana>
- 9) Python Software Foundation. (2023). *Python (versión 3.11) [Lenguaje de programación]*. <https://www.python.org>