

# Team notebook

SILUX UFPS

September 20, 2019



## Contents

<b>1</b>	<b>1 - Input Output</b>	<b>1</b>
1.1	Fast IO . . . . .	1
1.2	Optimized Scanner . . . . .	1
<b>2</b>	<b>2 - Data Structures</b>	<b>2</b>
2.1	Disjoint Set . . . . .	2
2.2	Fenwick Tree . . . . .	2
2.3	RMQ . . . . .	2
2.4	Sparse Table . . . . .	3
<b>3</b>	<b>3 - Dynamic Programming</b>	<b>4</b>
3.1	Knapsack . . . . .	4
3.2	Longest Common Subsequence . . . . .	4
3.3	Longest increasing subsequence . . . . .	4
3.4	Max Range Sum . . . . .	5

<b>4</b>	<b>4 - Geometry</b>	<b>5</b>
4.1	Angle . . . . .	5
4.2	Area . . . . .	5
4.3	Collinear Points . . . . .	5
4.4	Convex Hull . . . . .	5
4.5	Euclidean Distance . . . . .	6
4.6	Gometric Vector . . . . .	6
4.7	Perimeter . . . . .	6
4.8	Point in Polygon . . . . .	7
4.9	Point . . . . .	7
4.10	Sexagesimal degrees and radians . . . . .	7
<b>5</b>	<b>5 - Graphs</b>	<b>7</b>
5.1	BFS . . . . .	7
5.2	Bipartite Check . . . . .	8
5.3	DFS . . . . .	8
5.4	Dijkstra . . . . .	8
5.5	FloodFill . . . . .	9
5.6	Floyd Warshall . . . . .	9
5.7	Kruskal . . . . .	10
5.8	LoopCheck . . . . .	10
5.9	Lowest Common Ancestor . . . . .	11
5.10	Maxflow . . . . .	12
5.11	Prim . . . . .	13
5.12	Puentes itmos . . . . .	14
5.13	Tarjan . . . . .	14
5.14	Topological Sort . . . . .	15

<b>6</b>	<b>6 - Math</b>	<b>15</b>
6.1	Binomial Coefficient . . . . .	15
6.2	Catalan Number . . . . .	15
6.3	Euler Totient . . . . .	15
6.4	Extended Euclides . . . . .	16
6.5	Fibonacci mod m . . . . .	16
6.6	Gaussian Elimination . . . . .	16
6.7	Greatest common divisor . . . . .	17
6.8	Lowest Common multiple . . . . .	17
6.9	Miller-Rabin . . . . .	17
6.10	Modular Exponentiation . . . . .	18
6.11	Modular Inverse . . . . .	18
6.12	Modular Multiplication . . . . .	18
6.13	Pisano Period . . . . .	18
6.14	Pollard Rho . . . . .	19
6.15	Prime Factorization . . . . .	19
6.16	Sieve of Eratosthenes . . . . .	19
<b>7</b>	<b>7 - String</b>	<b>20</b>
7.1	KMP's Algorithm . . . . .	20
7.2	Prefix-Function . . . . .	20
7.3	String Hashing . . . . .	20
7.4	Suffix Array Init . . . . .	21
7.5	Suffix Array Longest Common Prefix . . . . .	21
7.6	Suffix Array Longest Common Substring . . . . .	22
7.7	Suffix Array Longest Repeated Substring . . . . .	22
7.8	Suffix Array String Matching Boolean . . . . .	22
7.9	Suffix Array String Matching . . . . .	22
7.10	Suffix Array strncmp . . . . .	23
7.11	Trie . . . . .	23
7.12	Z-Function . . . . .	24
<b>8</b>	<b>8 - Utilities</b>	<b>24</b>
8.1	Binary search . . . . .	24
8.2	Biseccion . . . . .	24
8.3	Bit Manipulation . . . . .	24
8.4	Lower bound . . . . .	24
8.5	Upper bound . . . . .	25

<b>9</b>	<b>9 - Tips and formulas</b>	<b>25</b>
9.1	ASCII Table . . . . .	25
9.2	Formulas . . . . .	26
9.3	Sequences . . . . .	27
9.4	Time Complexities . . . . .	28

## 1 1 - Input Output

### 1.1 Fast IO

---

```
static Scanner in = new Scanner(new BufferedReader(new
    InputStreamReader(System.in)));
static PrintWriter out = new PrintWriter(new BufferedWriter(new
    OutputStreamWriter(System.out)));

//Obligatorio al finalizar la impresion
so.close();
```

---

### 1.2 Optimized Scanner

---

Libreria para recibir las entradas; reemplaza el Scanner original, mejorando su eficiencia.  
 Contiene los metodos next, nextLine y hasNext. Para recibir datos numericos parsear el string leído.

```
static class Scanner {
    BufferedReader br = new BufferedReader(new
        InputStreamReader(System.in));
    StringTokenizer st = new StringTokenizer("");
    int spaces = 0;

    public String nextLine() throws IOException {
        if (spaces-- > 0) return "";
        else if (st.hasMoreTokens()) return new
            StringBuilder(st.nextToken("\n")).toString();
        return br.readLine();
    }

    public String next() throws IOException {
        spaces = 0;
```

```

        while (!st.hasMoreTokens()) st = new
            StringTokenizer(br.readLine());
        return st.nextToken();
    }

    public boolean hasNext() throws IOException {
        while (!st.hasMoreTokens()) {
            String line = br.readLine();
            if (line == null) return false;
            if (line.equals("")) spaces = Math.max(spaces, 0) +
                1;
            st = new StringTokenizer(line);
        }
        return true;
    }
}

```

---

## 2 2 - Data Structures

### 2.1 Disjoint Set

Estructura de datos para modelar una coleccin de conjuntos disyuntos. Permite determinar de manera eficiente a que conjunto pertenece un elemento, si dos elementos se encuentran en un mismo conjunto y unir dos conjuntos disyuntos en un uno.

```

static class dsu {
    int[] par, sz;
    int size; //Cantidad de conjuntos

    dsu(int n) {
        size = n;
        par = new int[n];
        sz = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            par[i] = i;
            sz[i] = 1;
        }
    }

    //Busca el nodo representativo del conjunto de u
    int find(int u) {

```

```

        return par[u] == u ? u : (par[u] = find(par[u]));
    }
    //Une los conjuntos de u y v
    void unite(int u, int v) {
        if ((u = find(u)) == (v = find(v))) return;
        if (sz[u] > sz[v]){
            int aux = u;
            u = v;
            v = aux;
        }
        par[u] = v;
        sz[v] += sz[u];
        size--;
    }
    //Retorna la cantidad de elementos del conjunto de u
    int count(int u) {
        return sz[find(u)];
    }
}

```

---

### 2.2 Fenwick Tree

Estructura de datos que permite procesar consultas por rangos y actualizaciones individuales sobre un arreglo.

```

static int N = 100000;
static int bit[] = new int[N+1];

void add(int k, int val) {
    for (; k <= N; k += k&-k) bit[k] += val;
}

int rsq(int k) {
    int sum = 0;
    for (; k >= 1; k -= k&-k) sum += bit[k];
    return sum;
}

int rsq(int i, int j) { return rsq(j) - rsq(i-1); }

int lower_find(int val) { /// last value < or <= to val
    int idx = 0;
    for(int i = 31-Integer.numberOfLeadingZeros(N); i >= 0; --i) {

```

```

    int nidx = idx | (1 << i);
    if(nidx <= N && bit[nidx] <= val) { /// change <= to <
        val -= bit[nidx];
        idx = nidx;
    }
}
return idx;
}

```

## 2.3 RMQ

Estructura de datos que permite procesar consultas por rangos y actualizaciones individuales sobre un arreglo.

Recibe como parametro en el constructor un arreglo de valores.

IMPORTANTE: Para para procesar actualizaciones por rangos se deben descomentar las lineas de Lazy Propagation.

```

static class SegmentTree {
    int[] st; ///, lazy;
    int n, neutro = 1 << 30;

    SegmentTree(int[] arr) {
        n = arr.length;
        st = new int[n << 2];
        ///lazy = new int[n << 2];
        ///Arrays.fill(lazy, neutro);
        build(1, 0, n - 1, arr);
    }

    int query(int i, int j) { return query(1, 0, n - 1, i, j); }
    void update(int i, int j, int val) { update(1, 0, n - 1, i, j, val); }

    int left(int p) { return p << 1; }
    int right(int p) { return (p << 1) | 1; }

    void build(int p, int L, int R, int[] arr) {
        if (L == R) st[p] = arr[L];
        else {
            int m = (L+R)/2, l = left(p), r = right(p);
            build(l, L, m, arr);
            build(r, m + 1, R, arr);
            st[p] = Math.min(st[l], st[r]);
        }
    }
}

```

```

}
/*
void propagate(int p, int L, int R, int val) {
    if (val == neutro) return;
    st[p] = val;
    lazy[p] = neutro;
    if (L != R) {
        lazy[left(p)] = val;
        lazy[right(p)] = val;
    }
}
*/
int query(int p, int L, int R, int i, int j) {
    ///propagate(p, L, R, lazy[p]);
    if (i > R || j < L) return neutro;
    if (i <= L && j >= R) return st[p];
    int m = (L+R)/2, l = left(p), r = right(p);
    l = query(l, L, m, i, j);
    r = query(r, m + 1, R, i, j);
    return Math.min(l, r);
}

void update(int p, int L, int R, int i, int j, int val) {
    ///propagate(p, L, R, lazy[p]);
    if (i > R || j < L) return;
    if (i <= L && j >= R) st[p] = val; ///propagate(p, L, R, val);
    else {
        int m = (L+R)/2, l = left(p), r = right(p);
        update(l, L, m, i, j, val);
        update(r, m + 1, R, i, j, val);
        st[p] = Math.min(st[l], st[r]);
    }
}
}

```

## 2.4 Sparse Table

Estructura de datos que permite procesar consultas por rangos.

```

static int MAX_N = 1000;
static int K = (int)(Math.log(MAX_N)/Math.log(2))+1;
static int st[][] = new int[MAX_N][K];
static int _log2[] = new int[MAX_N+1];

```

```
static int A[] = new int[MAX_N];
int n;

void calc_log2() {
    _log2[1] = 0;
    for (int i = 2; i <= MAX_N; i++) _log2[i] = _log2[i/2] + 1;
}

void build() {
    for (int i = 0; i < n; i++) st[i][0] = A[i];
    for (int j = 1; j <= K; j++)
        for (int i = 0; i + (1 << j) <= n; i++)
            st[i][j] = Math.min(st[i][j-1], st[i + (1 << (j - 1))][j - 1]);
}

int rmq(int i, int j) {
    int k = _log2[j-i+1];
    return Math.min(st[i][k], st[j - (1 << k) + 1][k]);
}
```

## 3 3 - Dynamic Programming

### 3.1 Knapsack

Dados N articulos, cada uno con su propio valor y peso y un tamaño máximo de una mochila, se debe calcular el valor máximo de los elementos que es posible llevar.

Debe seleccionarse un subconjunto de objetos, de tal manera que quepan en la mochila y representen el mayor valor posible.

```
static int MAX_WEIGHT = 40; //Peso máximo de la mochila
static int MAX_N = 1000; //Número máximo de objetos
static int N; //Número de objetos
static int prices[] = new int[MAX_N]; //precios de cada producto
static int weights[] = new int[MAX_N]; //pesos de cada producto
static int memo[][] = new int[MAX_N][MAX_WEIGHT]; //tabla dp

//El metodo debe llamarse con 0 en el id, y la capacidad de la mochila en
w
static int knapsack (int id, int w) {
    if (id == N || w == 0) return 0;
```

```
    if (memo[id][w] != -1) return memo[id][w];
    if (weights[id] > w) memo[id][w] = knapsack(id + 1, w);
    else memo[id][w] = Math.max(knapsack(id + 1, w), prices[id] +
        knapsack(id + 1, w - weights[id]));
    return memo[id][w];
}
//Antes de llamar al metodo, todos los campos de la tabla memo deben
iniciarse a -1
```

### 3.2 Longest Common Subsequence

Dados dos Strings, encuentra el largo de la subsecuencia en común más larga entre ellas.

```
static int M_MAX = 20; // Mximo size del String 1
static int N_MAX = 20; // Mximo size del String 2
static int m, n; // Size de Strings 1 y 2
static char X[]; // toCharArray del String 1
static char Y[]; // toCharArray del String 2
static int memo[][] = new int[M_MAX + 1][N_MAX + 1];

static int lcs (int m, int n) {
    for (int i = 0; i <= m; i++) {
        for (int j = 0; j <= n; j++) {
            if (i == 0 || j == 0) memo[i][j] = 0;
            else if (X[i - 1] == Y[j - 1]) memo[i][j] = memo[i - 1][j - 1] + 1;
            else memo[i][j] = Math.max(memo[i - 1][j], memo[i][j - 1]);
        }
    }
    return memo[m][n];
}
```

### 3.3 Longest increasing subsequence

Halla la longitud de la subsecuencia creciente más larga. MAX debe definirse en el tamaño límite del array, n es el tamaño del array. Si debe admitir valores repetidos, cambiar el < de I[mid] < values[i] por <=

```
static int inf = 2000000000;
```

```

static int MAX = 100000;
static int n;
static int values[] = new int[MAX + 5];
static int L[] = new int[MAX + 5];
static int I[] = new int[MAX + 5];

static int lis() {
    int i, low, high, mid;
    I[0] = -inf;
    for (i = 1; i <= n; i++) I[i] = inf;
    int ans = 0;
    for(i = 0; i < n; i++) {
        low = mid = 0;
        high = ans;
        while(low <= high) {
            mid = (low + high) / 2;
            if(I[mid] < values[i]) low = mid + 1;
            else high = mid - 1;
        }
        I[low] = values[i];
        if(ans < low) ans = low;
    }
    return ans;
}

```

### 3.4 Max Range Sum

Dado un arreglo de enteros, retorna la mxima suma de un rango de la lista.

```

static int maxRangeSum (int[] a) {
    int sum = 0, ans = 0;
    for (int i = 0; i < a.length; i++) {
        if (sum + a[i] >= 0) {
            sum += a[i];
            ans = Math.max(ans, sum);
        } else sum = 0;
    }
    return ans;
}

```

## 4 4 - Geometry

### 4.1 Angle

Dados 3 puntos A, B, y C, determina el valor del angulo ABC (origen en B) en radianes. IMPORTANTE: Definir la clase Point y Vec (Geometric Vector). Si se desea convertir a grados sexagesimales, revisar Sexagesimal degrees and radians.

```

static double angle(Point a, Point b, Point c) {
    Vec ba = toVector(b, a);
    Vec bc = toVector(b, c);
    return Math.acos((ba.x * bc.x + ba.y * bc.y) / Math.sqrt((ba.x *
        ba.x + ba.y * ba.y) * (bc.x * bc.x + bc.y * bc.y)));
}

```

### 4.2 Area

Calcula el area de un polgono representado como un ArrayList de puntos. IMPORTANTE: Definir P[0] = P[n-1] para cerrar el polgono. El algortmo utiliza el metodo de determinante de la matriz de puntos de la figura. IMPORTANTE: Debe definirse previamente la clase Point.

```

public static double area(ArrayList<Point> P) {
    double result = 0.0;
    for (int i = 0; i < P.size()-1; i++) {
        result += ((P.get(i).x * P.get(i + 1).y) - (P.get(i + 1).x *
            P.get(i).y));
    }
    return Math.abs(result) / 2.0;
}

```

### 4.3 Collinear Points

Determina si el punto r est en la misma linea que los puntos p y q. IMPORTANTE: Deben incluirse las estructuras point y vec.

```

static double cross(Vec a, Vec b) {
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}

```

```

}
static boolean collinear(Point p, Point q, Point r) {
    return Math.abs(cross(toVector(p, q), toVector(p, r))) < 1e-9;
}

```

## 4.4 Convex Hull

Retorna el polgono convexo mas pequeno que cubre (ya sea en el borde o en el interior) un set de puntos. Recibe un vector de puntos, y retorna un vector de puntos indicando el polgono resultante. Es necesario que esten definidos previamente:

Estructuras: point y vec

Mtodos : collinear, euclideanDistance, ccw (de inPolygon) y angle.

```

import java.util.ArrayList;
import java.util.Comparator;
import java.util.Collections;

static ArrayList<Point> ConvexHull (ArrayList<Point> P) {
    int i, j, n = (int)P.size();
    if (n <= 3) {
        if (P.get(0).x != P.get(n-1).x || P.get(0).y != P.get(n-1).y)
            P.add(P.get(0));
        return P;
    }
    int P0 = 0;
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (P.get(i).y < P.get(P0).y || (P.get(i).y == P.get(P0).y &&
            P.get(i).x > P.get(P0).x)) P0 = i;
    Point temp = P.get(0); P.set(0, P.get(P0)); P.set(P0, temp);
    Point pivot = P.get(0);
    Collections.sort(P, new Comparator<Point>(){
        public int compare(Point a, Point b) {
            if (collinear(pivot, a, b)) return euclideanDistance(pivot, a) <
                euclideanDistance(pivot, b) ? -1 : 1;
            double d1x = a.x - pivot.x, d1y = a.y - pivot.y;
            double d2x = b.x - pivot.x, d2y = b.y - pivot.y;
            return (Math.atan2(d1y, d1x) - Math.atan2(d2y, d2x)) < 0 ? -1 : 1;
        }
    });
    ArrayList<Point> S = new ArrayList<Point>();
    S.add(P.get(n-1)); S.add(P.get(0)); S.add(P.get(1));

```

```

i = 2;
while (i < n) {
    j = S.size() - 1;
    if (ccw(S.get(j-1), S.get(j), P.get(i))) S.add(P.get(i++));
    else S.remove(S.size() - 1);
}
return S;
}

```

## 4.5 Euclidean Distance

Halla la distancia euclidean de 2 puntos en dos dimensiones (x,y). Para usar el primer mtodo, debe definirse previamente la clase Point

```

/*Trabajando con la clase Point*/
static double euclideanDistance(Point p1, Point p2) {
    return Math.hypot(p1.x - p2.x, p1.y - p2.y);
}

/*Trabajando con los valores x y y de cada punto*/
static double euclideanDistance(double x1, double y1, double x2, double
    y2){
    return Math.hypot(x2 - x1, y2 - y1);
}

```

## 4.6 Gometric Vector

Dados dos puntos A y B, crea el vector A->B. IMPORTANTE: Debe definirse la clase Point. Es llamado Vec para no confundirlo con vector como coleccin de elementos.

```

static class Vec {
    public double x, y;
    public Vec(double _x, double _y) {
        this.x = _x;
        this.y = _y;
    }
}

static Vec toVector(Point a, Point b) {
    return new Vec(b.x - a.x, b.y - a.y);
}

```

---

```
}

```

---

## 4.7 Perimeter

---

Calcula el perimetro de un polgono representado como un vector de puntos.  
 IMPORTANTE: Definir  $P[0] = P[n-1]$  para cerrar el polgono. La estructura point debe estar definida, al igual que el mtodo euclideanDistance.

```
public static double perimeter (ArrayList<Point> P) {
    double result = 0.0;
    for (int i = 0; i < P.size()-1; i++){
        result += euclideanDistance(P.get(i), P.get(i+1));
    }
    return result;
}
```

---

## 4.8 Point in Polygon

---

Determina si un punto pt se encuentra en el polgono P. Este polgono se define como un vector de puntos, donde el punto 0 y n-1 son el mismo.  
 IMPORTANTE: Deben incluirse las estructuras point y vec, ademas del mtodo angle y el mtodo cross que se encuentra en Collinear Points.

```
static boolean ccw (Point p, Point q, Point r) {
    return cross(toVector(p, q), toVector(p, r)) > 0;
}

static boolean inPolygon (Point pt, ArrayList<Point> P) {
    if (P.size() == 0) return false;
    double sum = 0;
    for (int i = 0; i < P.size()-1; i++) {
        if (ccw(pt, P.get(i), P.get(i+1))) sum += angle(P.get(i), pt, P.get(i+1));
        else sum -= angle(P.get(i), pt, P.get(i+1));
    }
    if(Math.abs(Math.abs(sum) - 2*Math.acos(-1.0)) < 1e-9) return true;
    return false;
}
```

---

## 4.9 Point

---

La clase punto ser la base sobre la cual se ejecuten otros algoritmos.

```
static class Point {
    public double x, y;
    public Point() { this.x = this.y = 0.0; }
    public Point(double _x, double _y){
        this.x = _x;
        this.y = _y;
    }
    public boolean equals(Point other){
        if(Math.abs(this.x - other.x) < 1e-9 && (Math.abs(this.y - other.y) < 1e-9)) return true;
        return false;
    }
}
```

---

## 4.10 Sexagesimal degrees and radians

---

Conversiones de grados sexagesimales a radianes y viceversa.

```
static double DegToRad(double d) {
    return d * Math.PI / 180.0;
}

static double RadToDeg(double r) {
    return r * 180.0 / Math.PI;
}
```

---

# 5 5 - Graphs

## 5.1 BFS

---

Bsqueda en anchura sobre grafos. Recibe un nodo inicial u y visita todos los nodos alcanzables desde u.

BFS tambien halla la distancia mas corta entre el nodo inicial u y los demas nodos si todas las aristas tienen peso 1.

```
static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
```



```

static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static long dist[] = new long[MAX]; //Almacena la distancia a cada nodo
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

void bfs(int u) {
    Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
    q.add(u);
    dist[u] = 0;

    while (!q.isEmpty()) {
        u = q.poll();
        for (int v : g[u]) {
            if (dist[v] == -1) {
                dist[v] = dist[u] + 1;
                q.add(v);
            }
        }
    }
}

static void init() {
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
        dist[i] = -1;
    }
}

```

## 5.2 Bipartite Check

Modificacin del BFS para detectar si un grafo es bipartito.

```

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static int color[] = new int[MAX]; //Almacena el color de cada nodo
static boolean bipartite; //true si el grafo es bipartito
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

void bfs(int u) {
    Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
    q.add(u);
    color[u] = 0;

    while (!q.isEmpty()) {

```

```

        u = q.poll();
        for (int v : g[u]) {
            if (color[v] == -1) {
                color[v] = color[u]^1;
                q.add(v);
            } else if (color[v] == color[u]) {
                bipartite = false;
                return;
            }
        }
    }
}

static void init() {
    bipartite = true;
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
        color[i] = -1;
    }
}

```

## 5.3 DFS

Bsqueda en profundidad sobre grafos. Recibe un nodo inicial u y visita todos los nodos alcanzables desde u.

DFS puede ser usado para contar la cantidad de componentes conexas en un grafo y puede ser modificado para que retorne informacin de los nodos dependiendo del problema.

```

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static boolean[] vis = new boolean[MAX]; //Marca los nodos ya visitados
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

static void dfs(int u) {
    vis[u] = true;
    for (int v : g[u]) {
        if (!vis[v]) dfs(v);
    }
}

static void init() {
    for(int i = 0; i <= N; i++) {

```

```

        g[i] = new ArrayList<>();
        vis[i] = false;
    }
}

```

## 5.4 Dijkstra

Dado un grafo con pesos no negativos halla la ruta de costo mnimo entre un nodo inicial u y todos los dems nodos.

```

static long INF = (1L<<62);
static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<edge> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static boolean[] vis = new boolean[MAX]; //Marca los nodos ya visitados
static int pre[] = new int[MAX]; //Almacena el nodo anterior para
    construir las rutas
static long dist[] = new long[MAX]; //Almacena la distancia a cada nodo
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

```

```

static class edge implements Comparable<edge>{
    int v;
    long w;

    edge(int _v, long _w){
        v = _v;
        w = _w;
    }

    @Override
    public int compareTo(edge o) {
        if(w > o.w)return 1;
        else return -1;
    }
}

```

```

static void dijkstra(int u) {
    PriorityQueue<edge> pq = new PriorityQueue<>();
    pq.add(new edge(u, 0));
    dist[u] = 0;

    while (!pq.isEmpty()) {
        u = pq.poll().v;
    }
}

```

```

        if (!vis[u]) {
            vis[u] = true;
            for (edge nx : g[u]) {
                int v = nx.v;
                if(!vis[v] && dist[v] > dist[u] + nx.w) {
                    dist[v] = dist[u] + nx.w;
                    pre[v] = u;
                    pq.add(new edge(v, dist[v]));
                }
            }
        }
    }
}

static void init() {
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
        dist[i] = INF;
        vis[i] = false;
    }
}

```

## 5.5 FloodFill

Dado un grafo implicito como matriz, "colorea" y cuenta el tamao de las componentes conexas.

Este mtodo debe ser llamado con las coordenadas (i, j) donde se inicia el recorrido, busca cada caracter c1 de la componente, los reemplaza por el caracter c2 y retorna el tamao.

```

static final int tam = 1000; //Tamanio maximo de la matriz
static int dy[] = {1,1,0,-1,-1,-1, 0, 1}; //Posibles movimientos:
static int dx[] = {0,1,1, 1, 0,-1,-1,-1}; // (8 direcciones)
static char grid[][] = new char[tam][tam]; //Matriz de caracteres
static int Y, X; //Tamanio de la matriz

```

```

static int floodfill(int y, int x, char c1, char c2) {
    if (y < 0 || y >= Y || x < 0 || x >= X) return 0;
    if (grid[y][x] != c1) return 0;
    grid[y][x] = c2;
    int ans = 1;
    for (int i = 0; i < 8; i++) {
        ans += floodfill(y + dy[i], x + dx[i], c1, c2);
    }
}

```

```

    }
    return ans;
}

```

---

## 5.6 Floyd Warshall

Dado un grafo halla la distancia mnima entre cualquier par de nodos.  
 $g[i][j]$  guardar la distancia mnima entre el nodo  $i$  y el  $j$ .

```

static final int INF = (1<<30);
static final int MAX = 505; //Cantidad maxima de nodos
static int g[][] = new int[MAX][MAX]; //Matriz de adyacencia
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

static void floydWarshall() {
    for (int k = 0; k < N; k++)
        for (int i = 0; i < N; i++)
            for (int j = 0; j < N; j++)
                g[i][j] = Math.min(g[i][j], g[i][k] + g[k][j]);
}

static void init() {
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        for(int j = 0; j <= N; j++) {
            g[i][j] = INF;
        }
    }
}

```

---

## 5.7 Kruskal

Dado un grafo con pesos halla su rbol cobertor mnimo.  
 IMPORTANTE: Debe agregarse Disjoint Set.

```

static class edge implements Comparable<edge> {
    int u, v, w;
    edge(int _u, int _v, int _w) {
        u = _u;
        v = _v;
        w = _w;
    }
}

```

```

@Override
public int compareTo(edge o) {
    if(w > o.w) return 1;
    else return -1;
}
}

static class par{
    int F, S;

    par(int f, int s){
        F = f;
        S = s;
    }
}

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<par> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static ArrayList<edge> e = new ArrayList<>(); //Lista de aristas
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

static void kruskall() {
    Collections.sort(e);
    dsu ds = new dsu(N);
    int sz = 0;
    for (edge ed: e) {
        if (ds.find(ed.u) != ds.find(ed.v)) {
            ds.unite(ed.u, ed.v);
            g[ed.u].add(new par(ed.v, ed.w));
            g[ed.v].add(new par(ed.u, ed.w));
            if (++sz == N - 1) {
                break;
            }
        }
    }
}

static void init() {
    e.clear();
    for (int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
    }
}

```

---

## 5.8 LoopCheck

Determina si un Grafo DIRIGIDO tiene o no ciclos.  
SE DEBEN LIMPIAR LAS ESTRUCTURAS DE DATOS ANTES DE UTILIZARSE

```
static final int MAX = 10010; //Cantidad maxima de nodos
static int v; //Cantidad de Nodos del grafo
static ArrayList<Integer> ady[] = new ArrayList[MAX]; //Estructura para
    almacenar el grafo
static int dfs_num[] = new int[MAX];
static boolean loops; //Bandera de ciclos en el grafo

/* DFS_NUM STATES
    2 - Explored
    3 - Visited
    -1 - Unvisited
*/

/*
Este metodo debe ser llamado desde un nodo inicial u.
Cortara su ejecucion en el momento que encuentre algun ciclo en el grafo.
*/
static void graphCheck( int u ){
    int j, next;

    if( loops ) return;

    dfs_num[u] = 2;

    for(j = 0; j < ady[u].size(); j++){
        next = ady[u].get(j);

        if( dfs_num[next] == -1 )    graphCheck( next );
        else if( dfs_num[next] == 2 ){
            loops = true;
            break;
        }
    }

    dfs_num[u] = 3;
}

public static void main(String args[]){
```

```
    for( int s = 1; s <= v && !loops; s++ ){ //Por si el grafo es NO
        conexo
        if( dfs_num[s] == -1 ) graphCheck(s);
    }
}
```

## 5.9 Lowest Common Ancestor

Dados los nodos u y v de un arbol determina cual es el ancestro comun mas bajo entre u y v.

\*Tambien puede determinar la arista de peso maximo entre los nodos u y v  
(Para esto quitar los "//")

SE DEBE EJECUTAR EL METODO build() ANTES DE UTILIZARSE

```
static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static final int LOG2 = 17; //log2(MAX)+1
//ArrayList<edge> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static int dep[] = new int[MAX]; //Almacena la profundidad de cada nodo
static int par[][] = new int[MAX][LOG2]; //Almacena los padres para
    responder las consultas
//int rmq[][] = new int[MAX][LOG2]; //Almacena los pesos para responder
    las consultas
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

/*static class edge {
    int v, w;

    edge(int _v, int _w){
        v = _v;
        w = _w;
    }
};*/

static int lca(int u, int v) {
    //int ans = -1;
    if (dep[u] < dep[v]){
        int aux = u;
        u = v;
        v = aux;
    }
    int diff = dep[u] - dep[v];
    for (int i = LOG2-1; i >= 0; i--) {
```

```

        if ((diff & (1 << i)) > 0) {
            //ans = Math.max(ans, rmq[u][i]);
            u = par[u][i];
        }
    }
    //if (u == v) return ans;
    if (u == v) return u;
    for (int i = LOG2-1; i >= 0; i--) {
        if (par[u][i] != par[v][i]) {
            //ans = Math.max(ans, Math.max(rmq[u][i], rmq[v][i]));
            u = par[u][i];
            v = par[v][i];
        }
    }
    //return Math.max(ans, Math.max(rmq[u][0], rmq[v][0]));
    return par[u][0];
}

static void dfs(int u, int p, int d) {
    dep[u] = d;
    par[u][0] = p;
    for (int v /* edge ed*/ : g[u]) {
        //int v = ed.v;
        if (v != p) {
            //rmq[v][0] = ed.w;
            dfs(v, u, d + 1);
        }
    }
}

static void build() {
    for(int i = 0; i < N; i++) dep[i] = -1;
    for(int i = 0; i < N; i++) {
        if(dep[i] == -1) {
            //rmq[i][0] = -1;
            dfs(i, i, 0);
        }
    }
    for(int j = 0; j < LOG2-1; j++) {
        for(int i = 0; i < N; i++) {
            par[i][j+1] = par[ par[i][j] ][j];
            //rmq[i][j+1] = Math.max(rmq[ par[i][j] ][j], rmq[i][j]);
        }
    }
}

```

```

static void init() {
    for (int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
    }
}

```

## 5.10 Maxflow

Dado un grafo, halla el mximo flujo entre una fuente  $s$  y un sumidero  $t$ .  
SE DEBEN LIMPIAR LAS ESTRUCTURAS DE DATOS ANTES DE UTILIZARSE

```

static int n; //Cantidad de nodos del grafo
static ArrayList<Integer> ady[] = new ArrayList[105]; //lista de
    Adyacencia
static int capacity[][] = new int[105][105]; //Capacidad de aristas de la
    red
static int flow[][] = new int[105][105]; //Flujo de cada arista
static int prev[] = new int[105];

static void connect(int i, int j, int cap){
    ady[i].add(j);
    ady[j].add(i);
    capacity[i][j] += cap;
    //Si el grafo es dirigido no hacer esta linea
    //capacity[j][i] += cap;
}

static int maxflow(int s, int t, int n){ //s=fuente, t=sumidero, n=numero
    de nodos
    int i, j, maxFlow, u, v, extra, start, end;
    for( i = 0; i <= n; i++ ){
        for( j = 0; j <= n; j++ ){
            flow[i][j] = 0;
        }
    }

    maxFlow = 0;

    while( true ){
        for( i = 0; i <= n; i++ ) prev[i] = -1;

        Queue<Integer> q = new LinkedList<Integer>();
    }
}

```

```

q.add(s);
prev[s] = -2;

while( !q.isEmpty() ){
    u = q.poll();
    if( u == t ) break;
    for( j = 0; j < ady[u].size(); j++){
        v = ady[u].get(j);
        if( prev[v] == -1 && capacity[u][v] - flow[u][v] > 0 ){
            q.add(v);
            prev[v] = u;
        }
    }
}

if( prev[t] == -1 ) break;

extra = Integer.MAX_VALUE;
end = t;
while( end != s ){
    start = prev[end];
    extra = Math.min( extra, capacity[start][end] - flow[start][end] );
    end = start;
}

end = t;
while( end != s ){
    start = prev[end];
    flow[start][end] += extra;
    flow[end][start] = -flow[start][end];
    end = start;
}

maxFlow += extra;
}

return maxFlow;
}

public static void main( String args[] ){
    //Para cada arista
    connect( s, d, f); //origen, destino, flujo
}

```

## 5.11 Prim

Dado un grafo halla el costo total de su arbol cobertor mnimo.

```

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<edge> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static boolean[] vis = new boolean[MAX]; //Marca los nodos ya visitados
static long ans; //Costo total del arbol cobertor minimo
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

static class edge implements Comparable<edge>{
    int v;
    long w;

    edge(int _v, long _w){
        v = _v;
        w = _w;
    }

    @Override
    public int compareTo(edge o) {
        if(w > o.w) return 1;
        return -1;
    }
}

static void prim() {
    PriorityQueue<edge> pq = new PriorityQueue<>();
    vis[0] = true;
    for (edge ed : g[0]) {
        int v = ed.v;
        if (!vis[v]) pq.add(new edge(v, ed.w));
    }

    while (!pq.isEmpty()) {
        edge ed = pq.poll();
        int u = ed.v;
        if (!vis[u]) {
            ans += ed.w;
            vis[u] = true;
            for (edge e : g[u]) {
                int v = e.v;
                if (!vis[v]) pq.add(new edge(v, e.w));
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}

static void init() {
    ans = 0;
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList();
        vis[i] = false;
    }
}

```

## 5.12 Puentes itmos

Algoritmo para hallar los puentes e itmos en un grafo no dirigido.  
 Requiere de la clase Edge.  
 SE DEBEN LIMPIAR LAS ESTRUCTURAS DE DATOS ANTES DE UTILIZARSE

```

static int n, e; //vertices, arcos
static int MAX=1010;
static ArrayList<Integer> ady[]=new ArrayList [MAX];
static boolean marked[]=new boolean [MAX];
static int prev[]=new int [MAX];
static int dfs_low[]=new int [MAX];
static int dfs_num[]=new int [MAX];
static boolean itmos[]=new int [MAX];
static ArrayList<Edge> bridges;
static int dfsRoot, rootChildren, cont;

/* Recibe el nodo inicial */
static void dfs(int u){
    dfs_low[u] = dfs_num[u] = cont;
    cont++;
    marked[u] = true;
    int j, v;

    for(j = 0; j < ady[u].size(); j++){
        v = ady[u].get(j);
        if( !marked[v] ){
            prev[v] = u;
            //Caso especial
            if( u == dfsRoot ) rootChildren++;
            dfs(v);
        }
    }
}

```

```

        //Itmos
        if( dfs_low[v] >= dfs_num[u] ) itmos[u] = true;

        //Puentes
        if( dfs_low[v] > dfs_num[u] ) bridges.add(new Edge(
            Math.min(u,v),Math.max(u,v)) );

        dfs_low[u] = Math.min(dfs_low[u], dfs_low[v]);
    }else if( v != prev[u] ) dfs_low[u] = Math.min(dfs_low[u],
        dfs_num[v]);
    }
}

public static void main(String args[]){
    dfs( dfsRoot );
    /* Caso especial */
    itmos[dfsRoot] = ( itmos[ dfsRoot ] && rootChildren > 1 ) ? true :
        false;
}

```

## 5.13 Tarjan

Dado un grafo dirigido halla las componentes fuertemente conexas (SCC).

```

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static boolean[] vis = new boolean[MAX]; //Marca los nodos ya visitados
static Stack<Integer> st = new Stack();
static int[] low = new int[MAX];
static int[] num = new int[MAX];
static int compOf[] = new int[MAX]; //Almacena la componente a la que
    pertenece cada nodo
static int cantSCC; //Cantidad de componentes fuertemente conexas
static int N, M, cont; //Cantidad de nodos y aristas

static void tarjan(int u) {
    low[u] = num[u] = cont++;
    st.push(u);
    vis[u] = true;

    for (int v : g[u]) {
        if (num[v] == -1)
            tarjan(v);
    }
}

```

```

        if (vis[v])
            low[u] = Math.min(low[u], low[v]);
    }

    if (low[u] == num[u]) {
        while (true) {
            int v = st.pop();
            vis[v] = false;
            compOf[v] = cantSCC;
            if (u == v) break;
        }
        cantSCC++;
    }
}

static void init() {
    cont = cantSCC = 0;
    for (int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i].clear();
        num[i] = -1;
    }
}

```

## 5.14 Topological Sort

Dado un grafo acclíco dirigido (DAG), ordena los nodos linealmente de tal manera que si existe una arista entre los nodos  $u$  y  $v$  entonces  $u$  aparece antes que  $v$ .

Este ordenamiento es una manera de poner todos los nodos en una línea recta de tal manera que las aristas vayan de izquierda a derecha.

```

static final int MAX = 100005; //Cantidad maxima de nodos
static ArrayList<Integer> g[] = new ArrayList[MAX]; //Lista de adyacencia
static boolean[] vis = new boolean[MAX]; //Marca los nodos ya visitados
static LinkedList<Integer> topoSort = new LinkedList<>(); //Orden
    topologico del grafo
static int N, M; //Cantidad de nodos y aristas

static void dfs(int u) {
    vis[u] = true;
    for (int v : g[u]) {
        if (!vis[v]) dfs(v);
    }
}

```

```

        topoSort.addFirst(u);
    }

static void init() {
    topoSort.clear();
    for(int i = 0; i <= N; i++) {
        g[i] = new ArrayList<>();
        vis[i] = false;
    }
}

```

## 6 6 - Math

### 6.1 Binomial Coefficient

Calcula el coeficiente binomial  $nCr$ , entendido como el número de subconjuntos de  $k$  elementos escogidos de un conjunto con  $n$  elementos.

```

static long ncr(long n, long r) {
    if (r < 0 || n < r) return 0;
    r = Math.min(r, n - r);
    long ans = 1;
    for (int i = 1; i <= r; i++) {
        ans = ans * (n - i + 1) / i;
    }
    return ans;
}

```

### 6.2 Catalan Number

Guarda en el array Catalan Numbers los números de Catalan hasta MAX.

```

static int MAX = 30;
static long catalan[] = new long[MAX+1];

static void catalanNumbers(){
    catalan[0] = 1;
    for(int i = 1; i <= MAX; i++){
        catalan[i] = (long)(catalan[i-1]*((double)(2*((2 * i)-
            1))/(i + 1))));
    }
}

```



```
    }
}
```

### 6.3 Euler Totient

La función totient de Euler devuelve la cantidad de enteros positivos menores o iguales a  $n$  que son coprimos con  $n$  ( $\text{gcd}(n, i) = 1$ )

\* Dado un valor  $n$  calcula el Euler totient de  $n$ . Debe ejecutarse primero Sieve of Eratosthenes (al menos hasta un número mayor a la raíz cuadrada de  $n$ ).

```
static long eulerTotient (long n) {
    long tot = n;
    for (int i = 0, p = primes.get(i); p*p <= n; p = primes.get(++i)) {
        if (n % p == 0) {
            while (n % p == 0) n /= p;
            tot -= tot / p;
        }
    }
    if (n > 1) tot -= tot / n;
    return tot;
}
```

\* Calcular el Euler totient para todos los números menores o iguales a MAX.

```
static int MAX = 100;
static int[] totient = new int [MAX+1];
static boolean marked = new boolean[MAX+1];

static void eulerTotient() {
    marked[1] = 1;
    for (int i = 0; i <= MAX; i++) totient[i] = i;
    for (int i = 2; i <= MAX; i++) if (!marked[i]) {
        for (int j = i; j <= MAX ; j += i){
            totient[j] -= totient[j] / i;
            marked[j] = 1;
        }
        totient[i] = 0;
    }
}
```

### 6.4 Extended Euclides

El algoritmo de Euclides extendido retorna el  $\text{gcd}(a, b)$  y calcula los coeficientes enteros  $X$  y  $Y$  que satisfacen la ecuación:  $a*X + b*Y = \text{gcd}(a, b)$ .

```
static int x, y;

static int extendedEuclid(int a, int b) {
    if (b == 0) {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
    }
    int d = extendedEuclid(b, a % b);
    int temp = x;
    x = y;
    y = temp - ((a/b)*y);
    return d;
}
```

### 6.5 Fibonacci mod m

Calcula  $\text{fibonacci}(n) \% m$ .

```
static long fib(long n, long m) {
    long a = 0, b = 1, c;
    int log2 = (int) (Math.log(n) / Math.log(2));
    for (int i = log2; i >= 0; i--) {
        c = a;
        a = ((c%m) * (2*(b%m) - (c%m) + m)) % m;
        b = ((c%m) * (c%m) + (b%m) * (b%m)) % m;
        if (((n >> i) & 1) != 0) {
            c = (a + b) % m;
            a = b; b = c;
        }
    }
    return a;
}
```

## 6.6 Gaussian Elimination

Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por eliminacin Gaussiana. matrix contiene los valores de la matriz cuadrada y result los resultados de las ecuaciones. Retorna un vector con el valor de las n incongnitas. Los resultados pueden necesitar redondeo.

```
import java.util.ArrayList;

static int MAX = 100;
static int n = 3;
static double matrix[][] = new double[MAX][MAX];
static double result[] = new double[MAX];

static ArrayList<Double> gauss() {
    ArrayList<Double> ans = new ArrayList<Double>();
    for(int i = 0; i < n; i++) ans.add(0.0);
    double temp;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int pivot = i;
        for (int j = i + 1; j < n; j++) {
            temp = Math.abs(matrix[j][i]) - Math.abs(matrix[pivot][i]);
            if (temp > 0.000001) pivot = j;
        }
        double temp2[] = new double[n];
        System.arraycopy(matrix[i],0,temp2,0,n);
        System.arraycopy(matrix[pivot],0,matrix[i],0,n);
        System.arraycopy(temp2,0,matrix[pivot],0,n);
        temp = result[i];
        result[i] = result[pivot];
        result[pivot] = temp;
        if (!(Math.abs(matrix[i][i]) < 0.000001)) {
            for (int k = i + 1; k < n; k++) {
                temp = -matrix[k][i] / matrix[i][i];
                matrix[k][i] = 0;
                for (int l = i + 1; l < n; l++) {
                    matrix[k][l] += matrix[i][l] * temp;
                }
                result[k] += result[i] * temp;
            }
        }
    }
}

for (int m = n - 1; m >= 0; m--) {
    temp = result[m];
    for (int i = n - 1; i > m; i--) {
```

```
        temp -= ans.get(i) * matrix[m][i];
    }
    ans.set(m,temp / matrix[m][m]);
}
return ans;
}
```

## 6.7 Greatest common divisor

Calcula el mximo comn divisor entre a y b mediante el algoritmo de Euclides

```
public static int gcd(int a, int b) {
    if (b == 0) {
        return a;
    }
    return gcd(b, a % b);
}
```

## 6.8 Lowest Common multiple

Calculo del mnimo comn mltiplo usando el mximo comn divisor. Agregar Greatest Common Divisor.

```
public static int lcm(int a, int b) {
    return a * b / gcd(a, b);
}
```

## 6.9 Miller-Rabin

La funcin de Miller-Rabin determina si un nmero dado es o no un nmero primo. IMPORTANTE: Debe agregarse los mtodos de Modular Exponentiation y Modular Multiplication.

```
public static boolean isPrime(long p) {
    if (p < 2 || (p != 2 && p % 2 == 0)) {
        return false;
    }
    long s = p - 1;
```

```

while (s % 2 == 0) {
    s /= 2;
}
for (int i = 0; i < 5; i++) {
    long a = (long) (Math.random() * p) % (p - 1) + 1;
    long temp = s;
    long mod = modpow(a, temp, p);
    while (temp != p - 1 && mod != 1 && mod != p - 1) {
        mod = modmul(mod, mod, p);
        temp *= 2;
    }
    if (mod != p - 1 && temp % 2 == 0) {
        return false;
    }
}
return true;
}

```

## 6.10 Modular Exponentiation

Realiza la operacin  $(a^b) \% \text{mod}$ .

```

static long modpow( long a, long b, long mod) {
    if (b == 0) return 1;
    if (b % 2 == 0) {
        long temp = modpow(a, b/2, mod);
        return (temp * temp) % mod;
    } else {
        long temp = modpow(a, b-1, mod);
        return (temp * a) % mod;
    }
}

```

## 6.11 Modular Inverse

El inverso multiplicativo modular de  $a \% \text{mod}$  es un entero  $b$  tal que  $(a*b) \% \text{mod} = 1$ . ste existe siempre y cuando  $a$  y  $\text{mod}$  sean coprimos ( $\text{gcd}(a, \text{mod}) = 1$ ).

El inverso modular de  $a$  se utiliza para calcular  $(n/a) \% \text{mod}$  como  $(n*b) \% \text{mod}$ .

\* Se puede calcular usando el algoritmo de Euclides extendido. Agregar Extended Euclides.

```

public static long modInverse(int a, int mod) {
    long d = extendedEuclid(a, mod);
    if (d > 1) {
        return -1;
    }
    return (x % mod + mod) % mod;
}

```

\* Si  $\text{mod}$  es un nmero primo, se puede calcular aplicando el pequeno teorema de Fermat. Agregar Modular Exponentiation.

```

public static long modInverse(int a, int mod) {
    return modpow(a, mod - 2, mod);
}

```

\* Calcular el inverso modular para todos los numeros menores a  $\text{mod}$ .

```

static int inv[];

public static void modInverse(int mod) {
    inv = new int[mod];
    inv[1] = 1;
    for (int i = 2; i < mod; i++) {
        inv[i] = (mod - (mod / i) * inv[mod % i] % mod) % mod;
    }
}

```

## 6.12 Modular Multiplication

Realiza la operacin  $(a * b) \% \text{mod}$  minimizando posibles desbordamientos.

```

public static long modmul(long a, long b, long mod) {
    long x = 0;
    long y = a % mod;
    while (b > 0) {
        if (b % 2 == 1) {
            x = (x + y) % mod;
        }
        y = (y << 1) % mod;
        b >>= 1;
    }
}

```

```

    }
    return x % mod;
}

```

### 6.13 Pisano Period

Calcula el Periodo de Pisano de m, que es el periodo con el cual se repite la Sucesin de Fibonacci modulo m.

IMPORTANTE: Si m es primo el algoritmo funciona (considerable) para  $m < 10^6$ . Debe agregarse Modular Exponentiation (sin el modulo) y Lowest Common Multiple (para `long`).

```

static long period(long m) {
    long a = 0, b = 1, c, pp = 0;
    do {
        c = (a + b) % m;
        a = b; b = c; pp++;
    } while (a != 0 || b != 1);
    return pp;
}

static long pisanoPrime(long p, long e) {
    return modpow(p, e-1) * period(p);
}

static long pisanoPeriod(long m) {
    long pp = 1;
    for (long p = 2; p*p <= m; p++) {
        if (m % p == 0) {
            long e = 0;
            while (m % p == 0) {
                e++;
                m /= p;
            }
            pp = lcm(pp, pisanoPrime(p, e));
        }
    }
    if (m > 1) pp = lcm(pp, period(m));
    return pp;
}

```

### 6.14 Pollard Rho

La funcion Rho de Pollard calcula un divisor no trivial de n. IMPORTANTE: Deben agregarse Modular Multiplication y Greatest common divisor para `long`.

```

public static long pollardRho(long n) {
    long i = 0, k = 2, x = 3, y = 3, d;
    while (true) {
        x = (modmul(x, x, n) + n - 1) % n;
        d = gcd(Math.abs(y - x), n);
        if (d != 1 && d != n) {
            return d;
        }
        if (++i == k) {
            y = x;
            k <<= 1;
        }
    }
}

```

### 6.15 Prime Factorization

Guarda en factors la lista de factores primos de n de menor a mayor.

IMPORTANTE: Debe ejecutarse primero Sieve of Eratosthenes (al menos hasta un numero mayor a la raiz cuadrada de n).

```

static ArrayList<Integer> factors = new ArrayList<>();

public static void primeFactors(long n) {
    factors.clear();
    for (int i = 0, p = primes.get(i); p*p <= n; p = primes.get(++i)) {
        while (n % p == 0) {
            factors.add(p);
            n /= p;
        }
    }
    if (n > 1) factors.add(n);
}

```

## 6.16 Sieve of Eratosthenes

Guarda en `primes` los nmeros primos menores o iguales a `MAX`. Para saber si `p` es un nmero primo, hacer: `if (!marked[p])`

```
static int MAX = 1000000;
static int SQRT = 1000;
static ArrayList<Integer> primes = new ArrayList<>();
static boolean marked[] = new boolean[MAX+1];

static void sieve() {
    marked[1] = true;
    int i = 2;
    for (; i <= SQRT; ++i) if (!marked[i]) {
        primes.add(i);
        for (int j = i*i; j <= MAX; j += i) marked[j] = true;
    }
    for (; i <= MAX; ++i) if (!marked[i]) primes.add(i);
}
```

## 7 7 - String

### 7.1 KMP's Algorithm

Encuentra si el string pattern se encuentra en el string cadena. Debe estar definido el mtodo `prefix_function`.

```
import java.util.ArrayList;

static boolean kmp(String cadena, String pattern) {
    int n=cadena.length();
    int m=pattern.length();
    ArrayList<Integer> tab=prefix_function(pattern);

    for(int i = 0, seen = 0; i < n; i++) {
        while(seen > 0 && cadena.charAt(i) !=
            pattern.charAt(seen)) {
            seen = tab.get(seen-1);
        }
        if(cadena.charAt(i) == pattern.charAt(seen)) seen++;
        if(seen == m) return true;
    }
}
```

```
        return false;
    }
}
```

### 7.2 Prefix-Function

Dado un string `s` retorna un `ArrayList lps` donde `lps[i]` es el largo del prefijo propio ms largo que tambien es sufijo de `s[0]` hasta `s[i]`.  
\*Para retornar el vector de `suffix_link` quitar el comentario `(//)`.

```
static ArrayList<Integer> prefix_function(String s) {
    int n = s.length(), len = 0, i = 1;
    ArrayList<Integer> lps = new ArrayList<>();
    Collections.fill(lps, n);
    lps.set(len, 0);
    while (i < n) {
        if (s.charAt(len) != s.charAt(i)) {
            if (len > 0) len = lps.get(len-1);
            else lps.set(i++, len);
        } else lps.set(i++, ++len);
    }
    //lps.add(0, -1); //Para SuffixLink
    return lps;
}
```

### 7.3 String Hashing

Estructura para realizar operaciones de hashing.

```
static long p[] = {257, 359};
static long mod[] = {1000000007, 1000000009};
static long X = 1000000010;

static class Hashing {
    long[][] h, pot;
    int n;

    public Hashing(String _s) {
        char[] s = _s.toCharArray();
        n = s.length;
        h = new long[2][n + 1];
        pot = new long[2][n + 1];
    }
}
```

```

    for (int i = 0; i < 2; ++i) {
        pot[i][0] = 1;
    }
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 0; j < 2; ++j) {
            h[j][i] = (h[j][i-1] * p[j] + s[i-1]) %
                mod[j];
            pot[j][i] = (pot[j][i-1] * p[j]) % mod[j];
        }
    }
}
//Hash del substring en el rango [i, j)
long hash(int i, int j) {
    long a = (h[0][j] - (h[0][i] * pot[0][j-i] % mod[0]) +
        mod[0]) % mod[0];
    long b = (h[1][j] - (h[1][i] * pot[1][j-i] % mod[1]) +
        mod[1]) % mod[1];
    return a*X + b;
}
}

```

## 7.4 Suffix Array Init

Crea el suffix array. Deben inicializarse las variables s (String original), N\_MAX (Mximo size que puede tener s), y n (Size del string actual).

```

static String s;
static int N_MAX = 30;
static int n;
static char _s[];
static int sa[] = new int[N_MAX];
static int rk[] = new int[N_MAX];
static long rk2[] = new long[N_MAX];

static List<Integer> wrapper = new ArrayList<Integer>() {
    @Override
    public Integer get(int i) { return sa[i]; }

    @Override
    public int size() { return n; }
}

```

```

@Override
public Integer set(int i, Integer e) {
    int v = sa[i];
    sa[i] = e;
    return v;
}

static void suffixArray() {
    _s = s.toCharArray();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        sa[i] = i; rk[i] = _s[i]; rk2[i] = 0;
    }
    for (int l = 1; l < n; l <= 1) {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            rk2[i] = ((long) rk[i] << 32) + (i + 1 < n ? rk[i + 1] : -1);
        }
        Collections.sort(wrapper, new Comparator<Integer>() {
            @Override
            public int compare(Integer o1, Integer o2) {
                if(rk2[o1.intValue()] > rk2[o2.intValue()]) return 1;
                else if(rk2[o1.intValue()] == rk2[o2.intValue()]) return 0;
                else return -1;
            }
        });
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (i > 0 && rk2[sa[i]] == rk2[sa[i - 1]])
                rk[sa[i]] = rk[sa[i - 1]];
            else rk[sa[i]] = i;
        }
    }
}

```

## 7.5 Suffix Array Longest Common Prefix

Calcula el array Longest Common Prefix para todo el suffix array.  
 IMPORTANTE: Debe haberse ejecutado primero suffixArray(), incluido en Suffix Array Init.java

```

static int lcp[] = new int[N_MAX];

static void calculateLCP() {
    for (int i = 0, l = 0; i < n; i++) {

```

```

    if (rk[i] > 0) {
        int j = sa[rk[i] - 1];
        while (_s[i + 1] == _s[j + 1]) l++;
        lcp[rk[i]] = l;
        if (l > 0) l--;
    }
}
}

```

## 7.6 Suffix Array Longest Common Substring

Busca el substring comn mas largo entre dos strings. Retorna un `int[2]`, con el size del substring y uno de los indices del suffix array. Debe ejecutarse previamente `suffixArray()` y `calculateLCP()`

```

// Los substrings deben estar concatenados de la forma
"string1#string2$", antes de ejecutar suffixArray() y calculateLCS()
// m debe almacenar el size del string2.

```

```

static int[] longestCommonSubstring() {
    int i, ans[] = new int[2];
    ans[0] = -1; ans[1] = 0;
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (((sa[i] < n - m - 1) != (sa[i - 1] < n - m - 1)) && lcp[i] >
            ans[0]) {
            ans[0] = lcp[i]; ans[1] = i;
        }
    }
    return ans;
}

```

## 7.7 Suffix Array Longest Repeated Substring

Retorna un `int[]` con el size y el indice del suffix array en el cual se encuentra el substring repetido mas largo. Debe ejecutarse primero `suffixArray()` y `calculateLCP()`.

```

static int[] longestRepeatedSubstring() {
    int ans[] = new int[2]; ans[0] = -1; ans[1] = -1;
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        if(ans[0] < lcp[i]) {

```

```

            ans[0] = lcp[i]; ans[1] = i;
        }
    }
    return ans;
}

```

## 7.8 Suffix Array String Matching Boolean

Busca el string p en el string s (definido en init), y retorna `true` si se encuentra, o `false` en caso contrario. Debe inicializarse m con el tamao de p, y debe ejecutarse previamente `suffixArray()` de Suffix Array Init.java.

```

static String p;
static int m;

static boolean stringMatching() {
    if(m - 1 > n) return false;
    char [] _p = p.toCharArray();
    int l = 0, h = n - 1, c = 1;
    while (l <= h) {
        c = (l + h) / 2;
        int r = strcmp(_s, sa[c], _p);
        if(r > 0) h = c - 1;
        else if(r < 0) l = c + 1;
        else return true;
    }
    return false;
}

```

## 7.9 Suffix Array String Matching

Busca el string p en el string s (definido en init), y retorna un `int[2]` con el primer y ultimo indice del suffix array que coinciden con la busqueda. Si no se encuentra, retorna `[-1, -1]`. Debe inicializarse m con el tamao de p, y debe ejecutarse previamente `suffixArray()` de Suffix Array Init.java.

```

static String p;
static int m;

```

```

static int[] stringMatching() {
    int[] ans = {-1, -1};
    if(m - 1 > n) return ans;
    char [] _p = p.toCharArray();
    int l = 0, h = n - 1, c = 1;
    while (l < h) {
        c = (l + h) / 2;
        if(strncmp(_s, sa[c], _p) >= 0) h = c;
        else l = c + 1;
    }
    if (strncmp(_s, sa[l], _p) != 0) return ans;
    ans[0] = l;
    l = 0; h = n - 1; c = 1;
    while (l < h) {
        c = (l + h) / 2;
        if (strncmp(_s, sa[c], _p) > 0) h = c;
        else l = c + 1;
    }
    if (strncmp(_s, sa[h], _p) != 0) h--;
    ans[1] = h;
    return ans;
}

```

## 7.10 Suffix Array strcmp

Mtodo utilitario. Necesario para las dos versiones de Matching.

```

static int strcmp(char[] a, int i, char[] b) {
    for (int k = 0; i + k < a.length && k < m - 1; k++) {
        if (a[i + k] != b[k]) return a[i + k] - b[k];
    }
    return 0;
}

```

## 7.11 Trie

(Prefix tree) Estructura de datos para almacenar un diccionario de strings. Debe ejecutarse el mtodo init\_trie. El mtodo dfs hace un recorrido en orden del trie.

```
import java.util.*;
```

```

class Main {

    static int MAX_L = 26; //cantidad de letras del lenguaje
    static char L = 'a'; //primera letra del lenguaje
    static ArrayList<node> trie;

    static class node {
        Integer next[];
        boolean fin;

        public node() {
            next = new Integer[MAX_L];
            this.fin = false;
        }
    }

    static void init_trie() {
        trie = new ArrayList<>();
        trie.add(new node());
    }

    static void add_str(String s) {
        int cur = 0, c;
        for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
            c = s.charAt(i) - L;
            if (trie.get(cur).next[c] == null) {
                trie.get(cur).next[c] = trie.size();
                trie.add(new node());
            }
            cur = trie.get(cur).next[c];
        }
        trie.get(cur).fin = true;
    }

    static boolean contain(String s) {
        int cur = 0, c;
        for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
            c = s.charAt(i) - L;
            if (trie.get(cur).next[c] == null) return false;
            cur = trie.get(cur).next[c];
        }
        return trie.get(cur).fin;
    }
}

```



```

static void dfs(int cur) {
    for (int i = 0; i < MAX_L; ++i) {
        if (trie.get(cur).next[i] != null) {
            //System.out.println((char)(i+L));
            dfs(trie.get(cur).next[i]);
        }
    }
}

public static void main(String[] args) {
    init_trie();
    String s[] = {"hello", "world", "help"};
    for (String c : s) add_str(c);
}
}

```

## 7.12 Z-Function

Dado un string s retorna un arreglo z donde z[i] es igual al mayor numero de caracteres desde s[i] que coinciden con los caracteres desde s[0]

```

static int[] z_function(String ss) {
    StringBuilder s = new StringBuilder(ss);
    int n = s.length();
    int[] z = new int[n];
    for (int i = 1, x = 0, y = 0; i < n; i++) {
        z[i] = Math.max(0, Math.min(z[i - x], y - i + 1));
        while (i + z[i] < n && s.charAt(z[i]) == s.charAt(i + z[i])) {
            x = i; y = i + z[i]; z[i]++;
        }
    }
    return z;
}
}

```

## 8 8 - Utilities

### 8.1 Binary search

Dado un arreglo ordenado ascendentemente de tamaño n, busca el elemento x y devuelve su posición, si no lo encuentra devuelve -1.

```

static int binary_search(int array[], int x){
    int l = 0, r = arr.length-1;
    while (l <= r) {
        int m = (l+r)/2;
        if(array[m] < x) l = m+1;
        else if (array[m] > x) r = m-1;
        else return m;
    }
    return -1;
}

```

## 8.2 Biseccion

Mtodo de biseccion para una funcion f(m)

```

static double eps = 0.0000001;

static double bis(double a, double b) {
    double m = (a+b)/2;
    if(Math.abs(f(m)) < eps) return m;
    if(f(a) * f(m) < 0) return bis(a, m);
    return bis(m, b);
}
}

```

## 8.3 Bit Manipulation

Operaciones a nivel de bits.

n & 1	-> Verifica si n es impar o no
n & (1<<k)	-> Verifica si el k-esimo bit esta encendido o no
n   (1<<k)	-> Enciende el k-esimo bit
n & ~(1<<k)	-> Apaga el k-esimo bit
n ^ (1<<k)	-> Invierte el k-esimo bit
~n	-> Invierte todos los bits
n & -n	-> Devuelve el bit encendido mas a la derecha
~n & (n+1)	-> Devuelve el bit apagado mas a la derecha
n   (n+1)	-> Enciende el bit apagado mas a la derecha
n & (n-1)	-> Apaga el bit encendido mas a la derecha

8.4 Lower bound

Dado un arreglo ordenado ascendentemente de tamao n, busca el elemento x y devuelve la posicin de la primera aparicin de x, si no lo encuentra devuelve la siguiente posicin. Si la posicin se sale del arreglo devuelve -1.

```
static int lower_bound(int arr[], int x) {
    int l = 0, r = arr.length-1;
    if (arr[r] < x) return -1;
    while (l < r) {
        int m = (l+r)/2;
        if (arr[m] < x) l = m+1;
        else r = m;
    }
    return l;
}
```

8.5 Upper bound

Dado un arreglo ordenado ascendentemente de tamao n, busca el elemento x y devuelve la posicin siguiente a la ultima aparicin de x. Si la posicin se sale del arreglo devuelve -1.

```
static int upper_bound(int arr[], int x) {
    int l = 0, r = arr.length-1;
    if (arr[r] <= x) return -1;
    while (l < r) {
        int m = (l+r)/2;
        if (arr[m] <= x) l = m+1;
        else r = m;
    }
    return l;
}
```

9 9 - Tips and formulas

9.1 ASCII Table

Caracteres ASCII con sus respectivos valores numéricos.

No.	ASCII	No.	ASCII
0	NUL	16	DLE
1	SOH	17	DC1
2	STX	18	DC2
3	ETX	19	DC3
4	EOT	20	DC4
5	ENQ	21	NAK
6	ACK	22	SYN
7	BEL	23	ETB
8	BS	24	CAN
9	TAB	25	EM
10	LF	26	SUB
11	VT	27	ESC
12	FF	28	FS
13	CR	29	GS
14	SO	30	RS
15	SI	31	US

No.	ASCII	No.	ASCII
32	(space)	48	0
33	!	49	1
34	"	50	2
35	#	51	3
36	\$	52	4
37	%	53	5
38	&	54	6
39	,	55	7
40	(	56	8
41	)	57	9
42	*	58	:
43	+	59	;
44	,	60	i
45	-	61	=
46	.	62	¿
47	/	63	?

No.	ASCII	No.	ASCII
64	@	80	P
65	A	81	Q
66	B	82	R

67	C	83	S
68	D	84	T
69	E	85	U
70	F	86	V
71	G	87	W
72	H	88	X
73	I	89	Y
74	J	90	Z
75	K	91	[
76	L	92	\
77	M	93	]
78	N	94	^
79	O	95	-

No.	ASCII	No.	ASCII
96	'	112	p
97	a	113	q
98	b	114	r
99	c	115	s
100	d	116	t
101	e	117	u
102	f	118	v
103	g	119	w
104	h	120	x
105	i	121	y
106	j	122	z
107	k	123	{
108	l	124	
109	m	125	}
110	n	126	~
111	o	127	

## 9.2 Formulas

—p2.2cm—p8.2cm—

Combinación (Coeficiente Binomial) Número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinación con repetición Número de grupos formados por n elementos, partiendo de m tipos de elementos.

$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

Permutación Número de formas de agrupar n elementos, donde importa el orden y sin repetir elementos

$$P_n = n!$$

Permutación múltiple Elegir r elementos de n posibles con repetición

$$n^r$$

Permutación con repetición Se tienen n elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercero c veces, ...

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{P_n}{a!b!c! \dots}$$

Permutaciones sin repetición Número de formas de agrupar r elementos de n disponibles, sin repetir elementos

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Distancia Euclideana  $d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Distancia Manhattan  $d_M(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

Considerando  $r$  como el radio,  $\alpha$  como el ángulo del arco o sector, y  $(R, r)$  como radio mayor y menor respectivamente.

$$\text{Área } A = \pi * r^2$$

$$\text{Longitud } L = 2 * \pi * r$$

$$\text{Longitud de un arco } L = \frac{2 * \pi * r * \alpha}{360}$$

$$\text{Área sector circular } A = \frac{\pi * r^2 * \alpha}{360}$$

$$\text{Área corona circular } A = \pi(R^2 - r^2)$$

Considerando  $b$  como la longitud de la base,  $h$  como la altura, letras minúsculas como la longitud de los lados, letras mayúsculas como los ángulos, y  $r$  como el radio de circunferencias asociadas.

$$\text{Área conociendo base y altura } A = \frac{1}{2} b * h$$

$$\text{Área conociendo 2 lados y el ángulo que forman } A = \frac{1}{2} b * a * \sin(C)$$

$$\text{Área conociendo los 3 lados } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ con } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Área de un triángulo circunscrito a una circunferencia	$A = \frac{abc}{4r}$
Área de un triángulo inscrito a una circunferencia	$A = r(\frac{a+b+c}{2})$
Área de un triangulo equilátero	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Considerando un triangulo rectángulo de lados $a, b$ y $c$ , con vértices $A, B$ y $C$ (cada vértice opuesto al lado cuya letra minuscua coincide con el) y un ángulo $\alpha$ con centro en el vertice $A$ . $a$ y $b$ son catetos, $c$ es la hipotenusa:	
$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$	
$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$	
$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$	
$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{c}{b}$	
$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{a}$	
$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}$	

Propiedad neutro	$(a \% b) \% b = a \% b$
Propiedad asociativa en multiplicación	$(ab) \% c = ((a \% c)(b \% c)) \% c$
Propiedad asociativa en suma	$(a + b) \% c = ((a \% c) + (b \% c)) \% c$

  

Pi	$\pi = \text{acos}(-1) \approx 3.14159$
e	$e \approx 2.71828$
Número áureo	$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$

9.3 Sequences

Listado de secuencias mas comunes y como hallarlas.

—p1.8cm—p8.6cm—	
22cmEstrellas octangulares	0, 1, 14, 51, 124, 245, 426, 679, 1016, 1449, 1990, 2651, ...

$f(n) = n * (2 * n^2 - 1).$	
22cmEuler totient	1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6,...
$f(n) = \text{Cantidad de números naturales } \leq n \text{ coprimos con n.}$	
22cmNúmeros de Bell	1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, ...
Se inicia una matriz triangular con $f[0][0] = f[1][0] = 1$ . La suma de estos dos se guarda en $f[1][1]$ y se traslada a $f[2][0]$ . Ahora se suman $f[1][0]$ con $f[2][0]$ y se guarda en $f[2][1]$ . Luego se suman $f[1][1]$ con $f[2][1]$ y se guarda en $f[2][2]$ trasladandose a $f[3][0]$ y así sucesivamente. Los valores de la primera columna contienen la respuesta.	
22cmNúmeros de Catalán	1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...
$f(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$	
22cmNúmeros de Fermat	3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, ...
$f(n) = 2^{(2^n)} + 1$	
22cmNúmeros de Fibonacci	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...
$f(0) = 0; f(1) = 1; f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n > 1$	
22cmNúmeros de Lucas	2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...
$f(0) = 2; f(1) = 1; f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n > 1$	
22cmNúmeros de Pell	0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, ...
$f(0) = 0; f(1) = 1; f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$ para $n > 1$	
22cmNúmeros de Tribonacci	0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, ...
$f(0) = f(1) = 0; f(2) = 1; f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$ para $n > 2$	
22cmNúmeros factoriales	1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ...
$f(0) = 1; f(n) = \prod_{k=1}^n k$ para $n > 0$ .	
22cmNúmeros piramidales cuadrados	0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, ...
$f(n) = \frac{n * (n+1) * (2 * n + 1)}{6}$	
22cmNúmeros primos de Mersenne	3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, ...

$f(n) = 2^{p(n)} - 1$ donde $p$ representa valores primos iniciando en $p(0) = 2$ .	
22cmNúmeros tetraedrales	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, ...
$f(n) = \frac{n * (n + 1) * (n + 2)}{6}$	
22cmNúmeros triangulares	0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, ...
$f(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$	
22cmOEIS A000127	1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, 386, 562, ...
$f(n) = \frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)}{24}$	
22cmSecuencia de Narayana	1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, ...
$f(0) = f(1) = f(2) = 1; f(n) = f(n - 1) + f(n - 3)$ para todo $n > 2$ .	
22cm Secuencia de Silvestre	2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, 10650056950807, ...
$f(0) = 2; f(n + 1) = f(n)^2 - f(n) + 1$	
22cmSecuencia de vendedor perezoso	1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, ...
Equivale al triangular(n) + 1. Máxima número de piezas que se pueden formar al hacer n cortes a un disco.	
$f(n) = \frac{n(n + 1)}{2} + 1$	

22cmSuma de los divisores de un número 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, ...

Para todo  $n > 1$  cuya descomposición en factores primos es  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  se tiene que:

$$f(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} * \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} * \dots * \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

9.4 Time Complexities

Aproximación del mayor número n de datos que pueden procesarse para cada una de las complejidades algoritmicas. Tomar esta tabla solo como referencia.

Complexity	n
$O(n!)$	11
$O(n^5)$	50
$O(2^n * n^2)$	18
$O(2^n * n)$	22
$O(n^4)$	100
$O(n^3)$	500
$O(n^2 \log_2 n)$	1.000
$O(n^2)$	10.000
$O(n \log_2 n)$	$10^6$
$O(n)$	$10^8$
$O(\sqrt{n})$	$10^{16}$
$O(\log_2 n)$	-
$O(1)$	-