Teorema 1. *Sean H un espacio con producto interno y $\emptyset \neq M \subseteq H$ un subconjunto convexo y completo. Entonces para cada $u \in H$ existe un único $\tilde{u} \in M$ tal que*

$$\|u - \tilde{u}\| = \inf_{v \in M} \|u - v\|$$

Teorema 2. *Bajo la misma notación que en el teorema anterior, si M es un subespacio cerrado de H, entonces para cada $u \in H$ se cumple $u - \tilde{u} \in M^{\perp}$.*

Teorema 3. *Si $T \in \mathbb{B}(H, K)$, donde H y K son de Hilbert, entonces*

$$Im(T)^{\perp} = Ker(T^*) \text{ y } \overline{Im(T^*)} = \overline{Im(T^*T)}$$

Corolario. *Los estimadores $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k)$ por el método de los mínimos cuadrados de los parámetros $\{\beta_i\}_{i=0}^{k}$ a partir de la muestra $\{(\boldsymbol{x_i}, y_i)\}_{i=1}^{n}$ se calculan como*

$$\boldsymbol{b} = (X^T X)^{-1} X^T \boldsymbol{y}.$$

Demostración. Observemos que queremos hallar $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{k+1}$ que minimice a $\|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{b}\|^2$. Por los Teoremas 1 y 2, tomando $M = Im(X)$, tenemos $\tilde{\boldsymbol{y}} = X\boldsymbol{b}$ para alguna $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{k+1}$ y además $\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{b} \in Im(X)^{\perp} = Ker(X^T)$.

Por lo tanto

$$0 = X^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{b}) = X^T\boldsymbol{y} - X^T X\boldsymbol{b}$$

y como $X^T X$ es invertible por la izquierda (¿Por qué?) se tiene lo pedido.

Saludos, **Héctor**.