Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Universidad de Sonora
Departamento de Física

Profesor:
Carlos Lizárraga Celaya
Alumno:
Carlos Antonio Sánchez Domínguez

02 mayo del 2021

0.1Ecuaciones Diferenciales Parciales

Parabólica

Para ello consideremos una función de valor real **u(x,y)** de dos variables reales independientes, **x** y **y**. Una PDE lineal de segundo orden de coeficiente constante para **u** toma la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

y en este PDE se clasifica como parabólico si los coeficientes satisfacen la condición:

$$B^2 - AC = 0$$

Por lo general **x** representa la posición unidimensional y **y** representa el tiempo, y el PDE se resuelve sujeto a las condiciones iniciales y de contorno prescritas. El nombre ”parabólico” se usa porque la suposición de los coeficientes es la misma que la condiciones para la ecuación de geometría analítica A^2+2Bxy+ Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 para definir una parábola plana.

Hiperbólica

Una ecuación diferencial parcial hiperbólica de orden **n** es una ecuación diferencial parcial (PDE(que, en términos generales, tiene un problema de valor inicial bien planteado para el primer **n-1** derivados. Mas precisamente, el problema de Cauchy puede resolverse localmente para datos iniciales arbitrarios a lo largo de cualquier hipersuperficie no característica. Muchas de las ecuaciones hiperbólicas tiene un interés contemporáneo sustancial. La ecuación hiperbólica modelo es la ecuación de onda. En una dimensión espacial, esto es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La ecuación tiene la propiedad de que, si **u** y su primera derivada en el tiempo son datos iniciales especificados arbitrariamente en la línea **t** = 0 (con suficientes propiedades de suavidad), entonces existe una solución para todo el tiempo **t**.

Elíptica

Las ecuaciones diferencial parciales lineales de segundo orden (PDE) se clasifican como elípticas, hiperbólica o parabólicas. Cualquier PDE lineal de segundo orden en dos variables se puede escribir en la forma:

$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$ donde **A, B, C, D, E, F y G** son funciones de **x** y **y**, donde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xy} =$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. De manera similar para u_{xx},u_y,u_{yy}. Un PDE escrito en esta forma es elíptico si $B^2 - AC < 0$, con esta convención de nomenclatura inspirada en la ecuación de una elipse plana. Los ejemplos no triviales mas simples de PDE elípticas son la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson.

0.2 Condiciones a la Frontera

Dirichlet

Para una ecuación diferencial ordinaria, por ejemplo:

$$y^{00} + y = 0 \tag{1}$$

las condiciones de frontera de Dirichlet en el intervalo **[a,b]** toman la forma:

$$\mathbf{y(a)} = \alpha, \mathbf{y(b)} = \beta \tag{2}$$

donde α y β se dan números.

Para una ecuación diferencial parcial, por ejemplo:

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{3}$$

donde ∇^2 denota el operador de Laplace, las condiciones de frontera de Dirichlet en un dominio $\Omega \subset R^n$ toman la forma:

$$y(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega \tag{4}$$

donde **f** es una función conocida definida en el límite $\partial\Omega$

Neumann

Para una ecuación diferencial ordinaria, por ejemplo:

$$y^{00} + y = 0 \tag{5}$$

las condiciones de frontera de Dirichlet en el intervalo **[a,b]** toman la forma:

$$y^0(a)=\alpha,\ y^0(b)=\beta$$

donde α y β se dan números.

Para una ecuación diferencial parcial, por ejemplo,

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{6}$$

donde ∇^2 denota el operador de Laplace, las condiciones de frontera de Nuemann en un dominio $\Omega \subset R^n$ toman la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

donde **n** denota la normal (normalmente exterior= al límite ∂Ω, y **f** es una función escalar dada. La derivada normal, que aparece en el lado izquierdo, se define como:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = \nabla y(x) \cdot \hat{n}(x) \qquad (8)$$

donde ∇ y (x) representa el vector gradiente de *y*(*x*), ˆ*n* es la unidad normal y ”·” representa el operador del producto interno. Resulta claro que el limite debe ser lo suficientemente suave para que pueda existir la derivada normal. Por ejemplo, en los puntos de esquina del limite el vector normal no está bien definido.

Robin (mixto)

Las condiciones de contorno de Robin son una combinación ponderada de las condiciones de contorno de Dirichley y las condiciones de contorno de Neumann. Si Ω es el dominio en el que se va a resolver la ecuación dada y ∂Ω denota su limite, la condición de Robin es:

$$\alpha u + b\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad en \quad \partial\Omega \qquad (9)$$

para algunas constantes no cero **a** y **b**. De una función dada **g** definida en ∂Ω. Aquí, **u** es la solución desconocida definida Ω y $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada normal en el límite. Mas en general, **a** y **b** están autorizados a ser funciones (dados), en lugar de constantes.

0.3 Método de Diferencias Finitas

Los métodos de diferencias finitas son una clase de técnicas numéricas para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aproximación de derivadas con diferencias finitas. Tanto el dominio espacial como el intervalo de tiempo (si corresponde) se discretizan o se dividen en un numero finito de paso, y el valor de la solución en estos puntos discretos se aproxima resolviendo ecuaciones algebraicas que contienes diferencias finitas y valores de puntos cercanos. Los métodos de diferencias finitas convierten las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o las ecuaciones diferenciales (PDE), que pueden ser no lineales, en un sistema de ecuaciones lineales que pueden resolverse mediante técnicas de ´algebra matricial.

Aproximación de la primer derivada.

Si se conoce el valor de una función *f*(*x*) en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con *h* peque, utilizando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2) \qquad (10)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primer derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (11)$$

El término O(h^2) denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como *diferencias finitas de $f^0(x_0)$ hacia enfrente, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.

De la misma forma se obtiene el término de diferencias finitas hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (12)$$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una *diferencia finita centrada* de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3) \qquad (13)$$

Aproximación de la segunda derivada.

Podemos utilizar esta ultima ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (14)$$

y substituimos $f(x_0 + h)$ por una diferencia finita hacia atrás

$$f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (15)$$

y la derivada $f^0(x_0)$ por una diferencia finita hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (16)$$

Finalmente obtenemos la diferencia finita centrada de segundo orden para $f^{00}(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3) \qquad (17)$$

Solución de la ecuación de calor

Resolviendo la Ecuación de Calor mediante Diferencias Finitas.

El método de diferencias finitas utiliza Series de Taylor para aproximar las derivadas.

Aproximación de la primera derivada.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con h peque, utilizando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primera derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

El termino $O(h^2)$ denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como *diferencias finitas de* $f^0(x_0)$ *hacia enfrente*, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.
De la misma forma se obtiene el termino de diferencias finitas hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una *diferencia finita centrada* de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Aproximación de la segunda derivada

Podemos utilizar esta última ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y substituimos $f\,(x_0 + h)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y la derivada $f^0(x_0)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finalmente obtenemos la *diferencia finita centrada de segundo orden* para $f^{00}(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Solución de la Ecuación de Calor por un método híbrido (EDP ¿EDO)? Podemos escribir la ecuación del calor como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ &\approx \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \end{aligned}$$

y luego integrar en el tiempo como si tuvo éramos una ecuación diferencial ordinaria.

Para un determinado punto $(jh,\ t)$, tendremos la ecuación diferencial ordinaria $u(jh,\ t) = u_j(t)$

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \kappa \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}$$

Para la cual proporcionamos la condición inicial al tiempo $t = 0$

$$u\,(0) = f(x)$$

Y condiciones a la frontera: $u_0 = c_1$, $uN = c_2$, para el tipo de Dirichlet Del tipo Neumann, $du_0/da = 0$ ´o $da_n/dx = 0$, para casos de equilibrio térmico. Condiciones a la frontera tipo Neumann

Tenemos que definir como estimar la derivada en la frontera, digamos en la frontera $x = L$. Recordando que usamos una aproximación de segundo orden para $\partial^2 u/\partial x^2$, debemos encontrar una aproximación para la primera derivada también de orden h^2

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 0 \\ u_{N+1} &= u_{N-1} \end{aligned}$$

Formalmente u_{N+1} está ”fuera “de nuestro dominio, pero utilizamos esto para determinar la ecuación que se satisface en la frontera, reemplazando $u_{N+1} = u_{N-1}$ en la ecuación del calor obteniendo

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}$$

Enlace= [Fisica-computacional1/Actividad10.ipynb at main · CarlosSanchez03/Fisica-computacional1 · GitHub]

Solución de la ecuación de onda

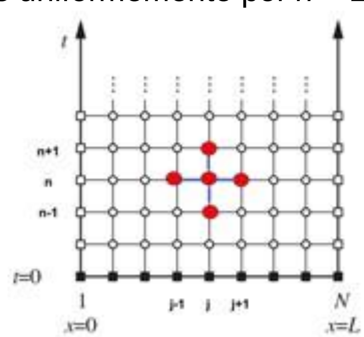
Solución de la Ecuación de Onda en una dimensión por el Método de Diferencias Finitas.

Comenzamos aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden.

Si h es el incremento en la dirección $x = \Delta x$ y $k = \Delta t$ es el incremento en el tiempo. Entonces en un punto de la malla discreta (x, t) tendremos

$$\frac{u(x, t+k) - 2u(x,t) + u(x, t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x,t) + u(x-h, t)}{h^2}$$

Esta ecuación define un esténcil computacional de 5 puntos. Lo que nos permite calcular los valores de u(tú) en el espacio discretizado: $x_0 = 0, x_1, x_2, ..., d_m = L$, $t_0 = 0, t_1, t_2, ..., t_{an} = T$, espaciados uniformemente por $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$.



Primero tendremos que calcular el primer nivel de $u(x, k)$ en $t = k$, usando solo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos similar al que utilizamos en la Ecuación de Calor.
Una vez hecho esto, ya podremos calcular todos los valores futuros de $u(x,t+k)$ ya que se conocen los valores de $u(x, t)$ y $u(x,t - k)$.
Ecuación de Onda en diferencias finitas.
Si definimos $u(x, t) = u(jh,nk) = u^n$, la ecuación de onde la podemos expresar.

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

Y despejamos para el valor desconocido u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Donde hemos introducido la constante $C^2 = c^2k^2/h^2$, conocida como la constante de Courant.

Como no podemos aplicar el test de 5 puntos pata calcular el primer nivel usaremos un test similar de 4 puntos con la información de la condición inicial para calcular $u(x, t = k)$. Remplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0$$

Lo que indica que $u_j^1 = u_j^{-1}$.
Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1} usando el esta de 5 puntos.

Enlace= Fisica-computacional1/Actividad11.ipynb at main · CarlosSanchez03/Fisica-computacional1 · GitHub

Solución de la Ecuación de Poisson

Se busca la solución de la ecuación $-\nabla^2 u = f$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x,y)_\Gamma = g(x,y)$$

No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Solo requerimos conocer los valores a la frontera.
Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a,b) \times (c,d)$, sobre el cual generamos una malla

$x_i = a + ih_x$ $i = 0,1,2,...,M$ $y_k = c$
$+ kh_y$ $k = 0,1,2,...,N$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{(b-a)}{M} \\ h_y &= \frac{(d-c)}{N} \end{aligned}$$

Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1},y_k) - 2u(x_i,y_k) + u(x_{i-1},y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(\langle_{\S}^{\ni}) \\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i,y_{k+1}) - 2u(x_i,y_k) + u(x_i,y_{k-1}}{h_y^2} + \mathcal{O}(\langle_{\dagger}^{\ni}) \end{aligned}$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i,y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

$$-\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} - \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k} + \mathcal{O}(\langle_{\S}^{\ni}, \langle_{\dagger}^{\ni})$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$\begin{aligned} &- \left(\frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{h_y^2}\right) \\ &+ 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) U_{i,k} = f_{i,k} \end{aligned}$$

Donde los valores de $i = 1,2,...,M - 1$ y $k = 1,2,...,N - 1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad.

Supongamos por conveniencia que $h_x = h_y = h$, entonces el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson se simplifica

$$4Ui,k - Ui-1,k - Ui,k-1 - Ui+1,k - Ui,k+1 = h2fi,k$$

Resolvamos el caso $M = N = 5$.

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Definimos las siguientes matrices de los puntos internos

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix};$$

las cuales las integramos en un vector **U**

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \\ \mathbf{U_3} \end{bmatrix}$$

Los puntos de la frontera se encuentran definidos por las condiciones de Dirichlet Primer grupo de valores internos:

$i = 1, k = 1$: $4U1,1 - U1,2 - U2,1 = h2f1,1 + U1,0 + U0,1$

$i = 2, k = 1$: $4U2,1 - U1,1 - U3,1 - U2,2 = h2f2,1 + U2,0$

$i = 3, k = 1$: $4U3,1 - U2,1 - U3,2 = h2f3,1 + U3,0 + U4,1$

Matricialmente el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,0} + U_{0,1} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} + U_{4,1} \end{bmatrix}$$

De forma similar, trabajando en la segunda columna interior obtenemos una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \end{bmatrix}$$

Por ultimo de la tercera columna interior obtenemos la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,3} + U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3} + U_{3,4} \end{bmatrix}$$

En resumen, las expresiones anteriores se pueden expresar como

$$-\mathbf{U}i-1 + B\mathbf{U}i - \mathbf{U}i+1 = h2\mathbf{f}i + \mathbf{g}i$$

El vector **g** surge de los valores de la

Finalmente, la ecuaci´on matricial de diferencias se puede compactar como

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Donde la matriz A es una matriz de estructura tridiaginal de $(M - 2)^2 \times (M - 2)^2$ de la forma

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix}$$

Y la matriz de valores desconocidos **U** y valores conocidos **F** son de dimensiones $R^{(M-2)2}$.

La matriz *I* es la matriz identidad $(M-2)\times(M-2)$ y el vector **F** de la derecha de dimensiones

$(M-2)^2 \times 1$, esta dado por

Enlace de la actividad 12 = [Fisica-computacional1/Actividad_12.ipynb at main · CarlosSanchez03/Fisica-computacional1 · GitHub]

Resumen y conclusiones

A lo largo de estas tres actividades, abordamos temas como la resolución de diferenciales parciales, y dependiendo el resultado del determinante, lo asociábamos con tras familias de diferenciales. Como es el caso de las parabólicas, elípticas e hiperbólicas.

Estas tres ultimas actividades significaron un reto para mí, ya que tuve que dedicar mucho tiempo en saber interpretar los datos, pero gracias a la información otorgado por el docente, la actividad fue más sencilla.

Referencias

https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_partial_differential_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_partial_differential_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/hect/Ecuaciones_en_Derivadas_Parciales/ libro_Gabrile.pdf