探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v): \ \rho > 0, \ \ p > 0, \ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad m = \frac{(\rho + Cp)\, v}{1-v^2}, \quad E = \frac{\rho + Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题1（4分）： 对任意给定的$-1 < t < 1$，定义

$$\tilde{D} = D(1 + tv), \qquad \tilde{m} = m(1 + tv) + tp, \qquad \tilde{E} = E + tm,$$

首先请通过随机实验探索以下不等式是否恒成立（1.5分）

$$\tilde{E} > \sqrt{\tilde{D}^2 + \tilde{m}^2}.$$

然后根据你探索的结果：若成立，请尝试给出**严格的数学证明**；若不成立，请尝试给出**严格的解析的反例**（2.5分）。

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad m = \frac{(\rho + Cp)\,v}{1-v^2}, \quad E = \frac{\rho + Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题2（3.5分）：随机生成很多组满足(3)式的(D, m, E)，通过数学实验探索如下关于x的非线性方程

$$Cx + \frac{m^2}{E+x} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+x)^2}} = E + x$$

是否一定总是有唯一的正根（正解）？（2分）

然后，结合实验观察，然后严格证明你的结论（1.5分）。

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}},\quad m = \frac{(\rho+Cp)\,v}{1-v^2},\quad E = \frac{\rho+Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题3（3分）：随机生成大量的不同组(ρ, p, v)，根据(2)式计算(D, m, E)，通过数学实验，猜想(2)式定义的(D, m, E)是否满足如下恒等式

$$Cp + \frac{m^2}{E+p} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+p)^2}} = E + p.$$

<u>然后证明你的结论</u>。再结合问题2的观察结果，由此你总结到什么规律？

探索性实验

回顾： 设C为一个大于或等于2的常数。设三个自变量ρ, p, v的变化范围为

$$\Omega = \{(\rho, p, v):\ \rho > 0,\ \ p > 0,\ \ |v| < 1\} \tag{1}$$

我们定义以下三个因变量

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad m = \frac{(\rho+Cp)\,v}{1-v^2}, \quad E = \frac{\rho+Cp}{1-v^2} - p. \tag{2}$$

我们在课上做过一个相关数学实验，结果表明：

$$D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}. \tag{3}$$

问题4（1.5分）：事实上，(2)式定义了从自变量(ρ, p, v)到因变量(D, m, E)的一个多元向量值函数，而(3)式表明该函数的值域为

$$A=\{(D, m, E):\ D > 0, E > \sqrt{D^2 + m^2}\}$$

请结合问题2-3的实验观察结果，尝试证明：对任意给定$(D, m, E) \in A$，存在唯一的满足(1)式的(ρ, p, v)使得(2)成立。（1分）

综合问题1（t=0的结果）和问题2、3、4的探索结果，是否表明该多元向量值函数是一个双射？请说明理由（0.5分）