Report

史衍昊

在本研究中，我们首先定义一个由三个自变量构成的区域Ω。在区域中，三个自变量ρ, p, v的变化范围如下：

$$\Omega = \{(\rho, p, v): \rho > 0, p > 0, |v| < 1\}$$

接着再定义三个因变量 D,m,E 如下：

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} \quad m = \frac{(\rho + Cp)v}{1-v^2} \quad E = \frac{(\rho + Cp)}{1-v^2} - p$$

其中 C 是一个大于等于 2 的常数。

问题 1：

（1）在这个问题中，我们首先在$-1 < t < 1$的情况下，定义三个变量如下：

$$\widetilde{D} = D(1 + tv) \quad \widetilde{m} = m(1 + tv) + tp \quad \widetilde{E} = E + tm$$

然后要通过随机实验探索不等式

$$\widetilde{E} > \sqrt{\widetilde{D}^2 + \widetilde{m}^2}$$

我首先利用 rand 函数分别随机生成ρ, p, v的取值，形成三个 1e6 长度的行向量来储存数据。其中ρ, p我采用$\frac{1}{rand} - 1$来生成，因为取值范围为$(0, \infty)$;然后 v 和 t 均用$2 * \mathrm{rand} - 1$来表示，因为取值范围$(-1,1)$。

然后通过位数的对应以及 D,m,E 的表达式我又得到了 D,m,E 的 1e6 种情况。

最后通过$\widetilde{\mathrm{D}}$,$\widetilde{\mathrm{m}}$, $\widetilde{\mathrm{E}}$三者的表达式以及对常数 C 用$\frac{1}{rand}+1$来生成，我又能得到$\widetilde{\mathrm{D}}$,$\widetilde{\mathrm{m}}$, $\widetilde{\mathrm{E}}$的 1e6 种情况。如此一来我就可以对这随机生成的 1e6 组数据验证是否满足

$$\widetilde{\mathrm{E}}-\sqrt{\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2}>0$$

这里值得一提的是，由于 rand 函数不能取到 0 和 1，因此$\frac{1}{rand}+1$不能取到 2，但验证时，C 可以取到 2，因此我在代码中，用 C1 和 C2 进行了区分，C2 总是取 2，并对 C2 做了和 C1 一样的操作，即将 C2 代入了$\widetilde{\mathrm{E}}-\sqrt{\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2}$所有情况的验证。

最后的结果，我用 Check1 和 Check2 两个向量对$\widetilde{\mathrm{E}}-\sqrt{\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2}$的值进行存储。然后用 find 函数找 Check1 和 Check2 两个向量中是否有小于等于 0 的元素。答案如下：

```
ans =

  空的 1×0 double 行向量
```

这也就意味着两个向量都没有小于等于 0 的元素。由于取的值足够多且是随机取值，因此可以认为不等式$\widetilde{\mathrm{E}}>\sqrt{\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2}$是恒成立的。

（2）这个问题的第二步是根据（1）得到的结果来给出严格数学证明。我的证明过程如下：

①首先我的大目标是将$\widetilde{\mathrm{E}}^2-(\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2)$用$\rho, p, v$三个自变量

来进行表示，然后进行证明。

②此时，我选择利用 matlab 中的符号函数计算方式。首先用 syms 定义ρ, p, v三个自变量，再通过 D,m,E 的表达式得到与自变量的关系并进行存储。最后再得到$\widetilde{D}$,$\widetilde{m}$, $\widetilde{E}$关于自变量的表达式。用 Check 来存储$\widetilde{E}^2-(\widetilde{D}^2+\widetilde{m}^2)$的表达式。接下来的步骤就是来分析 Check 是否为一个恒大于 0 的数。

① 第一步我先对 Check 用 simplify 得到 Check1，再对 Check1 进行了 factor 操作来观察 Check1 有哪些因子。结果如下所示：

$$\Big(-1\&p\&p-2\,\rho-2\,c\,p+2\,c\,\rho+c^2\,p-p\,t^2-p\,v^2 +p\,t^2\,v^2-2\,\rho\,t^2\,v^2-4\,\rho\,t\,v-4\,c\,p\,t\,v +4\,c\,\rho\,t\,v+c^2\,p\,t^2\,v^2+2\,c^2\,p\,t\,v-2\,c\,p\,t^2\,v^2 +2\,c\,\rho\,t^2\,v^2\&\frac{1}{v-1}\&\frac{1}{v+1}\Big)$$

观察到包含因子

$$\frac{p}{1-v^2}$$

② 于是我对 Check 除以了上述因子，得到了 Check2。由于已知条件为$\rho>0, p>0$，于是我尝试将式子写成关于ρ, p的线性组合。于是利用 diff 函数分别对ρ, p求偏导。

得到结果如下：

$$\frac{\partial Check2}{\partial \rho}=2\,(t\,v+1)^2\,(c-1)$$

$$\frac{\partial Check2}{\partial p} = c^2\,t^2\,v^2 + 2\,c^2\,t\,v + c^2 - 2\,c\,t^2\,v^2 - 4\,c\,t\,v$$
$$- 2\,c + t^2\,v^2 - t^2 - v^2 + 1$$

由上述两个偏导数也可以看出$Check2$关于ρ, p分别都是线性的。所以我们可以写成

$$Check2 = a\rho + bp + f$$

的形式。然后我们通过

$$f = Check2 - a\rho - bp$$

来计算f的表达式。很巧的是得到结果$f = 0$

```
remain=simplify(Check2-rho_coefficients*rho-p_coefficients*p)
%------------------------------------
```

令行窗口

```
remain =

0
```

因此

$$Check2 = a\rho + bp$$

③此时我们只需证明$a > 0, b > 0$即可。

对于

$$a = 2\,(t\,v + 1)^2\,(c - 1)$$

由于 c 是一个不小于 2 的常数，所以很明显$a > 0$

对于

$$b = c^2\,t^2\,v^2 + 2\,c^2\,t\,v + c^2 - 2\,c\,t^2\,v^2 - 4\,c\,t\,v - 2\,c$$
$$+ t^2\,v^2 - t^2 - v^2 + 1$$

对于这个式子我们可以通过放缩来估计大小。由于本式可以写成

$$(c-1)^2(1+tv)^2-(t+v)^2$$
$$\geq (1+tv)^2-(t+v)^2$$
$$=(1-t^2)(1-v^2)$$

由此可见$b>0$，因此得证$a>0, b>0$

综上，$Check2>0$. $Check=\frac{\rho}{1-v^2}Check2>0$

故得证$\widetilde{\mathrm{E}}^2-\left(\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2\right)>0$成立

④最后一步是证明$\widetilde{\mathrm{E}}>0$

由于$\widetilde{\mathrm{E}}=E+tm$，而我们已知

$$E^2-D^2-m^2=\frac{(C^2-2C+1-v^2)p+2(C-1)\rho}{1-v^2}$$

因此$E>\sqrt{D^2+m^2}$得到$E>m$，即$\widetilde{\mathrm{E}}=E-tm>0$。故得证

综上所述。$\widetilde{\mathrm{E}}>\sqrt{\widetilde{\mathrm{D}}^2+\widetilde{\mathrm{m}}^2}$恒成立

问题 2：

本问题要求我们探究关于x的非线性方程

$$Cx+\frac{m^2}{E+x}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}=E+x$$

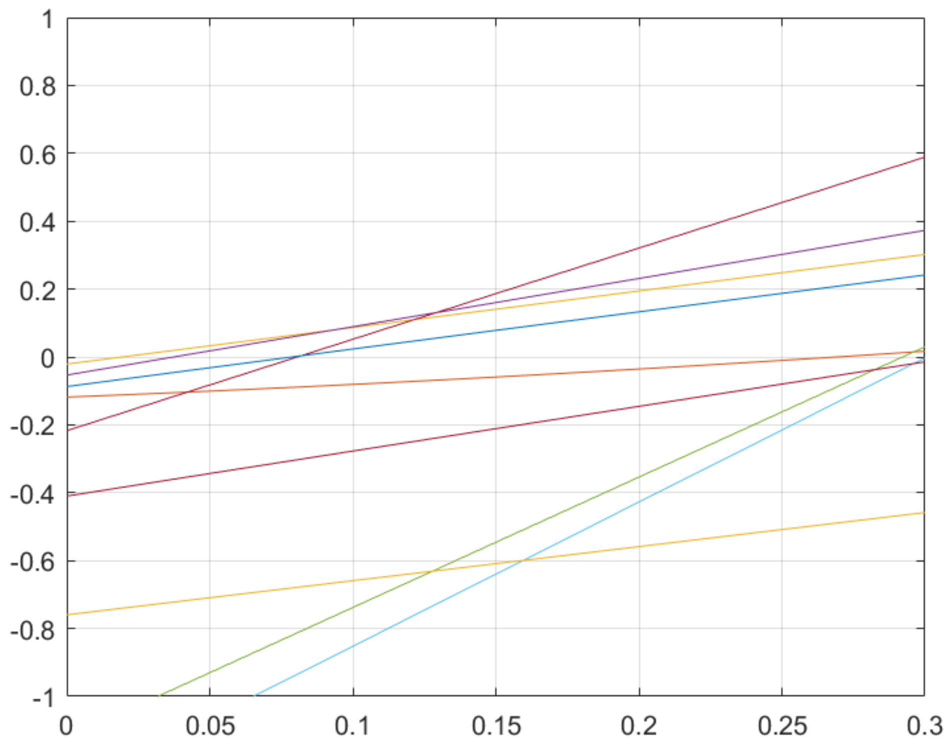
是否一定总有唯一的正根。

（1） 首先是通过在ρ, p, v的定义域内随机取值来观察结论

是否正确。为了更加直观的展现，我决定用函数

$$f(x) = Cx + \frac{m^2}{E+x} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+x)^2}} - E - x$$

和$y = 0$的相交情况来观察。下面我先随机取了几组值并画出了图像。



可以发现画出的所有图线都是关于x线性且单调递增的，并且与$y = 0$在$x > 0$部分有交点。这也就意味着方程

$$Cx + \frac{m^2}{E+x} + D\sqrt{1 - \frac{m^2}{(E+x)^2}} = E + x$$

总是有唯一的正根。

（2） 接下来是严格的理论分析。

首先我们令

$$g(x) = D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}$$

此时 D 是个大于 0 的常数，因此函数$g(x)$是个关于 x 单调递增的函数。

再记剩余部分为函数

$$h(x) = Cx + \frac{m^2}{E+x} - (E+x)$$

得到 $$h'(x) = C - 1 - \frac{m^2}{(E+x)^2}$$

$$= C - 1 - \frac{m^2}{E^2}$$

已知$E > m$，因此$h'(x) > 0$，于是现在得到当$x > 0$时，$f(x)$单调递增

接着为了证明一定和$y = 0$有交点，我们需要利用介值性。于是计算得到下列结果：

$$f(0) = \frac{m^2}{E} + D\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}} - E$$

$$= \frac{m^2 + D\sqrt{E^2 - m^2} - E^2}{E}$$

$$= \frac{D\sqrt{E^2 - m^2} - (E^2 - m^2)}{E}$$

$$= \frac{\sqrt{E^2 - m^2}\left(D - \sqrt{E^2 - m^2}\right)}{E}$$

我们知道$E > \sqrt{D^2 + m^2}$

因此$f(0) < 0$

接下来由于

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(C-1)x - E + \frac{m^2}{E} + D\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}}$$

$$\geq \lim_{x\to\infty}(C-1)x - E = \infty$$

于是根据介值定理，f为连续函数，因此f必然与$y = 0$存在唯一的交点，且交点$x_0 > 0$

综上，问题二得证

问题 3：

本问题是探究$x = p$的情况下，方程

$$Cx + \frac{m^2}{E+x} + D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}} = E + x$$

是否恒成立。

（1） 首先同样用符号计算表示出

$$f(p) = Cx + \frac{m^2}{E+p} + D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+p)^2}} - E - p$$

然后用通过 rand 来对ρ, p, v的取值进行随机生成。在实验过程中我总共生成了 1000 组数据，通过 for 循环，我将每一组数据都用 subs 带入了f进行计算，并把每一组数据最终得到的f的值都存储到了向量 Check 中。最后我用 sum 计算了 Check 函数的分量和，

发现值为 0，这就意味着每个分量都是 0.

这就意味着$f(p)=0$是恒成立的。因此我们有理由猜测问题中（2）式定义的(D,m,E)是满足

$$Cp+\frac{m^2}{E+p}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+p)^2}}=E+p$$

这个恒等式的。

（2） 现在需要证明上述结论，因此我们记

$$F= Cp+\frac{m^2}{E+p}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+p)^2}}-E-p$$

通过计算，F 可以化为如下表达式：

$$\rho+C\,p+\frac{\rho+C\,p}{v^2-1}-\frac{v^2\,(\rho+C\,p)}{v^2-1}$$
$$=(\rho+C\,p)\left(1+\frac{1}{v^2-1}-\frac{v^2}{v^2-1}\right)=0$$

因而得证。

（3）问题二证明了对于满足题目条件的(ρ,p,v,C)，方程

$$Cx+\frac{m^2}{E+x}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}=E+x$$

在$x>0$上有唯一的根。

而现在在（2）中我们知道了$x=p$恒为此方程的解，而$p>0$，因此我们知道了方程

$$Cx+\frac{m^2}{E+x}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}=E+x$$

在$x>0$上有且只有唯一的解为p

问题 4：

我们知道在前述问题中，

$$\mathrm{D}=\frac{\rho}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}\quad \mathrm{m}=\frac{(\rho+\mathrm{Cp})\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}^2}\quad \mathrm{E}=\frac{(\rho+\mathrm{Cp})}{1-\mathrm{v}^2}-\mathrm{p}$$

定义了一个从$(\rho,p,v)\rightarrow(D,m,E)$的多元向量值函数。

而该函数的值域为

$$A=\{(D,m,E)\colon D>0,E>\sqrt{D^2+m^2}\}$$

（1）现在我们需要我们证明对于$\forall(D,m,E)\in A$，都有唯一对应的(ρ,p,v)使表达式成立。

首先考虑前面的方程

$$Cx+\frac{m^2}{E+x}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}=E+x$$

明显观察到此方程中只包含(D,m,E,C)，而C在我们的假设中只是一个常数。因此

① 在给定(D,m,E)的情况下，我们可以随机选取一个C，不妨就令$C=5$，然后通过此方程，我们便可以确定p的取值。于是现在我们有了(D,m,E,p)

② 观察m,E的表达式，我们可以得到两个变量的直接关系即：

$$E+p=\frac{m}{v}$$

因此由此式我们可以直接得到

$$v=\frac{m}{E+p}\ \&\ |v|<|\frac{m}{E}|<1$$

故得到(D,m,E,p,v)

③最后由$\mathrm{D}=\frac{\rho}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}$我们就得到了

$$\rho=D\sqrt{1-\mathrm{v}^2}$$

回顾三个步骤我们最终得到(ρ,p,v)，但在过程中，由于C取任意值我们都可以得到一个确定的p，在后两个步骤中我们也是通过已知的(D,m,E,p)的值来确定(p,v),因此(ρ,p,v)的值是由(D,m,E)直接得到的而与C无关。

因此$\forall(D,m,E)\in A$，都有唯一对应的(ρ,p,v)使

$$\mathrm{D}=\frac{\rho}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}\quad \mathrm{m}=\frac{(\rho+\mathrm{Cp})\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}^2}\quad \mathrm{E}=\frac{(\rho+\mathrm{Cp})}{1-\mathrm{v}^2}-\mathrm{p}$$

成立，得证。

（3） 要证明该多元向量值函数是一个双射。根据问题 4（1）的探索结果，我们得知此多元向量值函数是一个满射。接下来需要证明该向量值函数是一个单射。考虑到单射的定义，

$$if(D_1,m_1,E_1)=(D_2,m_2,E_2)$$

$$then(\rho_1,p_1,v_1)=(\rho_2,p_2,v_2)$$

此结果显然，因为相同的(D,m,E)会解出唯一的 v，由此得到唯一的(p,v)。由此单射得证。

综上，由于此多元向量值函数既是单射又是满射，故为双射。得证。