Problemas Selectos
LMD
con solución
curso 2018/2019

fco. m. garcía olmedo

8 de marzo de 2019

Índice

1. Inducción

1.1. Razonamiento escueto

Ejercicio 1.1. *Demuestre que para todo número natural* n, $n!n < (n+1)!(n+1)$.

Solution. Para todo número natural n:

$$0 < n^2 + 3n + 1$$

por lo que:

$$n < n^2 + 2n + 1$$

y por tanto:

$$n!n < n!(n^2 + 2n + 1)$$

Se tiene las siguiente igualdades:

$$\begin{aligned} n!n &< n!(n(n+2)+1) \\ &= n!(n(n+1)+n+1) \\ &= n!n(n+1)+n!(n+1) \\ &= (n+1)!n+(n+1)! \\ &= (n+1)!(n+1) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.2. *Demuestre que para todo número natural n tal que $3 \leq n$ se cumple:*

$$6 < n!n$$

Solution. Por inducción sobre n. Si $n = 3$, $3!3 = 18$ y $6 < 18$. Supongamos que $3 \leq n$ y que $6 < n!n$. Entonces:

$$\begin{aligned} 6 &< n!n \\ &< (n+1)!(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto la propiedad es cierta. □

Ejercicio 1.3. *Demuestre que para todo número natural superior a 4, $6(n+1) < n!$.*

Solution. Por inducción sobre n. Para $n = 5$, $6(5+1) = 36 < 120 = 5!$. Supongamos que $5 \leq n$ y $6(n+1) < n!$ y demostremos que $6(n+2) < (n+1)!$. Se tiene:

$$\begin{aligned} (n+1)! - n! - 6 &= n!(n+1) - n! - 6 \\ &= n!n - 6 \\ &> 0 \end{aligned}$$

luego $n! + 6 < (n+1)!$; pero

$$\begin{aligned} 6(n+2) &= 6(n+1)+6 \\ &< n!+6 \\ &< n!+n!n \\ &= n!(n+1) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.4. *Demuestre que para todo número natural no nulo se cumple*

$$n! < n!(n^2+n+1)$$

Solution. Es evidente a partir del hecho de que para todo número natural n, $n!$ es no negativo y de que para todo número natural no nulo n, $1 < n^2+n+1$. □

Ejercicio 1.5. *Demuestre que para todo número natural n tal que $5 \leq n$,*

$$6(n+1) < n!(n^2+n+1)$$

Solution. Para todo número natural n tal que $n \leq 5$, $6(n+1) < n!$ y $n! < n!(n^2+n+1)$; por tanto, $6(n+1) < n!(n^2+n+1)$. □

Ejercicio 1.6. *Demuestre que para todo número natural* n *tal que* $3 \leq n$*,*

$$6(n+1) < n!(n^2+n+1)$$

Solution. Conocemos la veracidad de la relación para todo número natural n tal que $5 \leq n$. Basta comprobar que también vale para $n = 3$ y $n = 4$. $\square$

Ejercicio 1.7. *Demuestre que para todo número natural* n *tal que* $3 \leq n$*,*

$$6(n+1) + n!n < (n+1)!(n+1)$$

Solution. Consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(n+1)!(n+1) - n!n - 6(n+1) &= (n+1)!n + (n+1)! - n!n - 6(n+1) \\
&= (n+1)!n + n!n + n! - n!n - 6(n+1) \\
&= (n+1)!n + n! - 6(n+1) \\
&= n!(n+1)n + n! - 6(n+1) \\
&= n!(n^2+n+1) - 6(n+1)
\end{aligned}$$

luego lo que queremos demostrar es equivalente a que $6(n+1) < n!(n^2+n+1)$ y sabemos que esto es cierto para todo número natural n tal que $3 \leq n$. $\square$

Ejercicio 1.8. *Para todo número natural* n *son equivalentes las siguientes desigualdades:*

1. $n! + 3n^2 + 3n + 1 < (n+1)!$
2. $3n(n+1) + 1 < n!n$

Solution. Basta considerar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
n! + 3n^2 + 3n + 1 < (n+1)! &\text{ sii } 0 < (n+1)! - n! - 3n^2 - 3n - 1 \\
&\text{ sii } 0 < n!(n+1) - n! - 3n^2 - 3n - 1 \\
&\text{ sii } 0 < n!n - 3n(n+1) - 1 \\
&\text{ sii } 3n(n+1) + 1 < n!n
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 1.9. *Demuestre que para todo número natural* n *tal que* $4 \leq n$*,* $3n(n+1) - 1 < n!n$*.*

Solution. Por inducción sobre n. Supongamos $n = 4$;

$$3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 = 59 < 96 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4!4$$

Supongamos ahora que n es un número natural cumpliendo $4 \leq n$ y que $3n(n+1) - 1 < n!n$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
3(n+1)(n+2) - 1 &= 3(n+1)n + 6(n+1) - 1 \\
&< n!n + 6(n+1) \\
&< (n+1)!(n+1)
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 1.10. *Demuestre que para todo número natural* n *tal que* $4 \leq n$*,*

$$n! + 3n^2 + 3n + 1 < (n+1)!$$

Solution. Por sí mismo, como conclusión inmediata de lo anterior. □

Ejercicio 1.11. *Demuestre que para todo número natural n tal que $6 \leq n$ se cumple $n^3 < n!$*

Solution. Por inducción sobre n. Supongamos $n = 6$:

$$6^3 = 216 < 720 = 6!$$

Supongamos que $6 \leq n$ y que $n^3 < n!$. Entonces:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &< n! + 3n^2 + 3n + 1 \\ &< (n+1)!\end{aligned}$$

□

1.2. Razonamiento más profundo

Definición 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $b \neq 0$. Un *par divisor de a por b* es un par de enteros $\langle q, r\rangle$ tales que:

1. $a = bq + r$.
2. $0 \leq r < |b|$.

Lema 1.12. *Supongamos que para todo $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $b \neq 0$ existe un par divisor de a por b. Entonces para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $b \neq 0$ existe un par divisor de a por b y es el siguiente por casos, siempre que $\langle q, r\rangle$ sea un par divisor de $|a|$ por $|b|$:*

1. *Si $0 < a$ y $b < 0$, $\langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)q, r\rangle$ es un par divisor de a por b.*
2. *En el resto de casos, si $r = 0$ entoces $\langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), 0\rangle$ es un par divisor de a por b y si $r \neq 0$, entonces $\langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), |b| - r\rangle$ es un par divisor de a por b.*

Demostración. Supongamos que $\langle q, r\rangle$ es un par divisor de $|a|$ por $|b|$. La casuística es la siguiente:

1. $0 < a$ y $b < 0$; entonces

   $$\begin{aligned}a &= (-b)q + r \\ &= b(-q) + r\end{aligned}$$

   y $0 \leq r < |b|$. Así pues, $\langle -q, r\rangle = \langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)q, r\rangle$.
2. $a < 0$ y $b < 0$; $-a = (-b)q + r$ y $0 \leq r < -b$. Entonces:
   - $r = 0$; como $-a = (-b)q$ se cumple $a = bq$ y así $\langle q, 0\rangle = \langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), 0\rangle$ es un par divisor de a por b.
   - $r > 0$; entonces:

     $$\begin{aligned}a &= bq - r \\ &= bq + 0 - r \\ &= bq + b - b - r \\ &= b(q+1) + (-b - r)\end{aligned}$$

Las condiciones $0 \leq r < -b$ son equivalentes a $b < -r \leq 0$ o también a $0 < -b - r < |b|$. En definitiva, se tiene que $\langle q+1, |b| - r\rangle = \langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), |b| - r\rangle$ es un par divisor de a por b.

3. Si $a < 0$ y $0 < b$; en este caso $-a = qb + r$ y $0 \leq r < b$.

   - $r = 0$; como $-a = bq$ se cumple $a = b(-q)$ y así $\langle -q, 0\rangle = \langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), 0\rangle$ es un par divisor de a por b.
   - $0 < r$; entonces:

$$
\begin{aligned}
a &= -bq - r \\
&= b(-q) - r \\
&= b(-q) + 0 - r) \\
&= b(-q) - b + b - r \\
&= b(-q-1) + (b - r) \\
&= b(-q-1) + (|b| - r)
\end{aligned}
$$

   y también $0 < b - r < b$. En definitiva, $\langle -q-1, b-r\rangle = \langle \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)(q + \operatorname{sgn}(r)), |b| - r\rangle$

□

Teorema 1.13 (teorema de la división). *Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $b \neq 0$ existe un único par divisor de a por b.*

Demostración. Supongamos que $a, b \in \mathbb{N}$ y que $b \neq 0$. La demostración de la **existencia** es por inducción. Si $a = 0$, en tal caso $0 = b0 + 0$ y así $\langle 0, 0\rangle$ es un par divisor de a por b. Supongamos que $a \neq 0$ y que para todo $0 \leq c < a$ existen q_c y r_c tales que $c = q_c b + r_c$. Podemos distinguir dos casos:

1. Si $a < b$ entonces $a = 0b + a$, como $0 \leq a < b$ podemos tomar $q = 0$ y $r = a$.

2. Si $b \leq a$, sea $c = a - b$. En este caso $0 \leq c < a$. Por hipótesis de inducción, $c = q_c b + r_c$, para ciertos q_c y r_c tales que $0 \leq r_c < a$. Pero entonces:

$$
\begin{aligned}
a &= b + c \\
&= b + q_c b + r_c \\
&= b(q_c + 1) + r_c
\end{aligned}
$$

   y $0 \leq r_c < b$. Así pues, en este caso podemos tomar $q = q_c + 1$ y $r = r_c$.

Por el principio de inducción la existencia queda probada para todo $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $b \neq 0$. La existencia en los restantes casos está garantizada por lo establecido en el Lema 1.12. Para la **unidad**, supongamos que existen $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bq + r = bq' + r'$ y que $0 \leq r < |b|$ y que $0 \leq r' < |b|$. Supongamos, para fijar ideas, que $r \leq r'$ y consideremos $a - a$, o sea, $0 = b(q - q') + (r - r')$, o $b(q - q') = r' - r$. Se pueden dar dos casos:

1. $0 < b$. Como $0 \leq r' - r \leq r'$ y $r' < b$, se tiene $0 \leq b(q - q') < b$. De donde, $0 \leq q - q' < 1$ y por tanto $q - q' = 0$, o sea, $q = q'$. Entonces $r' - r = b(q - q') = 0$, de donde $r' = r$.

2. $b < 0$. Como $r' - r = b(q - q')$ y $0 \leq r' - r \leq r \leq -b$, entonces $0 \leq b(q - q') < -b$. Por tanto, $0 \leq q' - q < 1$. Así pues, $q' - q = 0$, o equivalentemente, $q' = q$. Como antes deducimos que $r = r'$.

$\square$

Ejercicio 1.14. *Demuestre que para todo número entero n y para todo número complejo no nulo z, que expresado en forma polar sea —digamos— $\cos\theta_z + i\sin\theta_z$, se cumple que:*

$$z^n = \cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z) \tag{1}$$

Concluya que para todo número complejo no nulo $z = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$ y todo número entero n se cumple (fórmula de De Moivre):[1]

$$z^n = r_z^n(\cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z)) \tag{2}$$

Solution. En primer lugar haremos la demostración de la igualdad (1) cuando n es natural y será por medio del principio de inducción finita. En el **caso base**, tenemos por una parte que:

$$\cos(0\theta_z) + i\sin(0\theta_z) = 1 + 0i = 1 = z^0$$

Supongamos que n es un número natural y que $z^n = \cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z)$ (**hipótesis de inducción**) y demostremos, en el **paso de inducción**, que $z^{n+1} = \cos((n+1)\theta_z) + i\sin((n+1)\theta_z)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
z^{n+1} &= (\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^{n+1}\\
&= (\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^n(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)\\
&= (\cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z))(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)\\
&= \cos(n\theta_z)\cos\theta_z - \sin(n\theta_z)\sin(\theta_z) + i(\cos(n\theta_z)\sin\theta_z + \sin(n\theta_z)\cos(\theta_z))\\
&= \cos((n+1)\theta_z) + i\sin((n+1)\theta_z)
\end{aligned}$$

Por el Principio de Inducción Finita, la igualdad (1) vale para todo número natural n. Si $n < 0$, sea $m = |n| = -n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^n &= (\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^{-m}\\
&= \frac{1}{(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^m}\\
&= \frac{1}{\cos(m\theta_z) + i\sin(m\theta_z)}\\
&= \cos(m\theta_z) - i\sin(m\theta_z)\\
&= \cos(-m\theta_z) + i\sin(-m\theta_z)\\
&= \cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z)
\end{aligned}$$

Por lo que la igualdad (1) vale para todo número entero n. Supongamos ahora que $z = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
z^n &= (r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z))^n\\
&= r_z^n(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)^n\\
&= r_z^n(\cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z))
\end{aligned}$$

lo que demustra la igualdad (2). $\square$

Ejercicio 1.15. *Pruebe que el producto de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 6.*

[1] Recuerde que si $z = a + bi$ es cualquier número complejo no nulo, entonces $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$; es decir $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ lo que es deducido sin más que observar que:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Solution. Sea p la aplicación entre números naturales que al número natural n cualquiera le asigna $p(n) = n(n+1)(n+2)$. El razonamiento es por inducción sobre n según el enunciado $P(i)$ del tenor "6 divide a $p(i)$". Como $p(0) = 0$ está claro que $P(0)$ es cierta (**caso base**). Supongamos que k es un número natural y que $P(k)$ es cierta (**hipótesis de inducción**), es decir, que existe un número natural k' tal que $p(k) = 6k'$; demostremos (en el **paso de inducción**) que como consecuencia $P(k+1)$ es cierta. Para ello consideremos:

$$\begin{aligned} p(k+1) - p(k) &= (k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2) \\ &= (k+3-k)(k+2)(k+3) \\ &= 3(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Al ser consecutivos los números $k+1$ y $k+2$, exactamente uno de los dos es par, por lo que $(k+1)(k+2)$ es par, o sea, existirá un número natural k'' tal que $(k+1)(k+2) = 2k''$. Recapitulando, tenemos que:

$$\begin{aligned} 6k'' &= 3(2k'') \\ &= p(k+1) - p(k) \\ &= p(k+1) - 6k' \end{aligned}$$

y así pues $p(k+1) = 6k'' + 6k' = 6(k'' + k')$, o equivalentemente, $6 \mid p(k+1)$. Por el principio de inducción finita sabemos que para todo número natural i, $P(i)$ es cierta y ello es lo que se quería demostrar. □

Ejercicio 1.16. *Cualesquiera dos números naturales a y b tienen un mínimo común múltiplo, esto es, un número m que es múltiplo común a a y b y es divisor de cualquier otro múltiplo común a ambos.*[2]

Solution. La **primera** solución que damos es **vía** el **Principio del Buen Orden**. Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces el único múltiplo común a ambos es 0, de hecho, el mínimo común múltiplo de a y b. Supongamos ahora que ninguno de ellos es nulo y llamemos M_{ab} al conjunto de los naturales múltiplos comunes a a y b y $V_{ab} = M_{ab} \setminus \{0\}$. El conjunto V_{ab} es no vacío pues al menos contiene a ab. Por el *Principio de Buen Orden*, deberá contener un elemento mínimo m y éste será mínimo común múltiplo de a y de b. En efecto:

- $a \mid m$ y $b \mid m$, pues $m \in V_{ab}$.
- Supongamos que $n \in V_{ab}$. Por el **Teorema de la División**, existen números naturales q y r tales que $n = mq + r$ y $0 \leq r < m$. Se tiene que $r \in M_{ab}$, puesto que $m, n \in V_{ab}$; pero como $r < m$ y m es el mínimo de V_{ab} obligatoriamente estará en $M_{ab} \setminus V_{ab}$, es decir, $r = 0$. Así pues, $m \mid n$.

De lo anterior se deduce que m es un mínimo común múltiplo de a y b, de hecho, el único no negativo que es representado por $[a, b]$. La **segunda** solución es **vía** el concepto de máximo común divisor de números enteros a y b, esto es, un número m que es divisor común a a y b y es múltiplo de cualquier otro divisor común a ambos. Si, en un inocente abuso del lenguaje, la frase "m es máximo común divisor de a y b" es abreviada por $(a, b) = m$, hemos de destacar dos propiedades:

- $(a, 0) = a$ (razone la verdad de esta afirmación)
- $(a, b) = (b, a \mod b)$ (demuestre, como sencillo ejercicio aritmético, la verdad de esta afirmación)

[2]Cuídese de sustituir la expresión "es divisor de" con la de "es menor o igual que". Si así fuera, 15 no podría ser mínimo común múltiplo de 3 y 5, ya que no es menor o igual que -15, cuando 15 y $(-1)15$ cumplen lo necesario para serlo y, por convenio, se ha elegido en el caso de los números enteros al positivo entre los dos asociados como "el" mínimo común múltiplo. Sin salir del ámbito de los número naturales, más doloroso sería razonar con 0, que es múltiplo de cualquier entero; nuestro error lo convertiría en el mínimo común múltiplo de cualquier pareja de números naturales.

Razonemos ahora por el **Segundo Principio de Inducción Finita** según el enunciado $P(k)$ del tenor "para todo número natural m, existe (a,k)". Supongamos, como **hipótesis de inducción**, que n es un número natural y que el resultado es cierto para todo número natural k que cumpla $k < n$. Razonamos por casos:

- $n = 0$; sea cual sea el número natural m se tiene $(m, 0) = m$, es decir, existe un máximo común divisor de m y 0 por cumplir m las propiedades necesarias al efecto.
- $n \neq 0$; por el Teorema de la División, existen números q, r tales que $m = nq + r$ y $0 \leq r < n$ (r el valor que hemos nombrado como $m \mod n$). Como $m \mod n < n$, de la hipótesis de inducción se deduce que existe un máximo común divisor de n y m que, según sabemos, es un máximo común divisor de m y n.

Concluimos que $P(k)$ vale para todo número natural k. Para cualesquiera números enteros m y n, (m,n) representará al único entero no negativo que cumple las propiedades de máximo común divisor. Ahora bien, es fácil entender que:

- para cualesquiera números naturales m y n, $(m,n) \mid m$, por lo que existirá un natural u tal que $(m,n)u = mn$.
- u es un mínimo común múltiplo de m y n, por lo que la existencia de máximo común divisor es garantía suficiente de la existencia de mínimo común múltiplo.

$\square$

Ejercicio 1.17 (Multiplicación por el *Método del Campesino Ruso*). *Sea p la función dada por:*

$$\begin{aligned} p(a,0) &= 0, \\ p(a,b) &= \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \textit{si } b \textit{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \textit{si } b \textit{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a,b) = ab$.

Solution. La demostración es por el **segundo principio de inducción finita** según el enunciado $P(i)$ del tenor:

Para todo número natural m, $p(m,i) = mi$

Supongamos que n es un número natural y que para todo número natural $k < n$ es cierta $P(k)$ (**hip. de inducción**). En el **paso de inducción** demostraremos que $P(n)$ es cierta. En efecto, son posibles dos casos, que distinguiremos por tener cada uno un tratamiento distinto:

- n par; en este caso, a su vez, hay dos posibilidades:
  - $n = 0$; sea cual sea el número natural m, $p(m,0) = 0 = m0$. Así pues vale $P(0)$. Obsérvese que en este caso no es necesario hacer uso de la hipótesis de inducción.
  - $n \neq 0$ y n es par; sea cual sea el número natural m,

$$\begin{aligned} p(m,n) &= p\left(2m, \frac{n}{2}\right) && \text{por definición de } p \\ &= 2m\frac{n}{2} && \text{de la hip. de inducción, ya que } \frac{n}{2} < n \\ &= mn \end{aligned}$$

- n es impar; sea cual sea el número natural m,

$$\begin{aligned}
p(m,n) &= p\left(2m, \frac{n-1}{2}\right) + m && \text{por definición de } p \\
&= 2m\frac{n-1}{2} + m && \text{de la hip. de inducción, ya que } \frac{n-1}{2} < n \\
&= m(n-1) + m \\
&= mn
\end{aligned}$$

Así pues, en aplicación del *Segundo Principio de Inducción Finita*, $P(i)$ es cierta para todo número natural i y ello es lo que se pedía. □

Ejercicio 1.18. *Si n es un número natural cualquiera, sea $f(n) = 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$. Demuestre que para todo número natural n:*

1. $(n^2 - n + 1, n^2 + n + 1) = 1$
2. *$f(n)$ tiene al menos $n+1$ factores primos distintos.*

Solution.

1. Si p fuese un factor primo de (m^2-m+1, m^2+m+1), entonces dividiría a $m^2+m+1-(m^2-m+1) = 2m$; pero como tanto m^2-m+1 como m^2+m+1 son impares, p debe ser impar. Se deduce entonces que p sería un divisor de m y, por tanto, de m^2+m y m^2+m+1; como consecuencia el primo p sería un divisor de 1, lo cual es absurdo. Como consecuencia $(m^2-m+1, m^2+m+1) = 1$.

2. El razonamiento es por inducción sobre n. El valor de $f(0)$ es 7, por lo que $f(0)$ tiene $0+1$, es decir 1, factores. Supongamos, como hipótesis de inducción, que $0 \leq n$ y que el resultado es cierto para n; demostremos que también lo será para $n+1$, que será un número natural no nulo. Sea $g(x) = x^4+x^2+1$; si $0 < n$ entonces $f(n) = g(2^{2^{n-1}})$ y dado que $x^4+x^2+1 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
g(2^{2^{n-1}}) &= (2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1) \\
&= ((2^{2^{n-1}})^2 + 2^{2^{n-1}} + 1)((2^{2^{n-1}})^2 - 2^{2^{n-1}} + 1) \\
&= (m^2 - m + 1)(m^2 + m + 1) && (m = 2^{2^{n-1}})
\end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 2^{2^{n+2}} + 2^{2^{n+1}} + 1 \\
&= (2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)(2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1) \\
&= f(n)(2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1)
\end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, $f(n)$ tiene al menos $n+1$ factores primos distintos; dado que el número $2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1$ es mayor o igual que 3 y $(f(n), 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1) = 1$, entonces $2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1$ tiene todos sus factores primos —y al menos hay uno— distintos a los de $f(n)$, es decir, $f(n+1)$ tiene al menos $n+2$ factores primos.

□

Ejercicio 1.19. *Demuestre que para todo número natural n vale la siguiente igualdad:*

$$11\overset{2n)}{\ldots}1 - 22\overset{n)}{\ldots}2 = (33\overset{n)}{\ldots}3)^2$$

Demostración. Definamos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & g(0) = 0 & h(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n)10^2 + 11 & g(n+1) = g(n)10 + 2 & h(n+1) = h(n)10 + 3 \end{array}$$

En primer lugar demostremos por el *Principio de Inducción Finita* que para todo número natural n, $3g(n) = 2h(n)$; ello puede ser sirviéndonos del enunciado $Q(k)$ del tenor:

$$3g(k) = 2h(k) \tag{3}$$

En efecto, si $n = 0$ entonces $3g(0) = 3 \cdot 0 = 0 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot h(0)$, es decir, vale $Q(0)$. Supongamos que para el número natural n vale $Q(n)$; entonces:

$$\begin{aligned} 3g(n+1) &= 3(g(n)10 + 2) \\ &= 3g(n)10 + 6 \\ &= 2h(n)10 + 6 \\ &= 2(h(n)10 + 3) \\ &= 2h(n+1) \end{aligned}$$

de lo que deducimos que para todo número natural k, vale $Q(k)$. Multiplicando ahora la igualdad (3) por 30 obtenemos que para todo número natural n, $9g(n)10 = 60h(n)$ y por tanto:

$$\begin{aligned} 60h(n) &= (10-1)g(n)10 \\ &= g(n)10^2 - g(n)10 \end{aligned}$$

Se tiene, en definitiva, que para todo número natural n,

$$60h(n) - g(n)10^2 = -g(n)10 \tag{4}$$

Seguidamente demostremos lo que se pide usando el *Principio de Inducción Finita* según el enunciado $P(k)$ del tenor:

$$f(k) - g(k) = h(k)^2$$

En el **caso base** demostremos que vale $P(0)$. En efecto:

$$f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0 = 0^2 = h(0)^2$$

Supongamos que n es un número natural y que para él es cierto $P(n)$ (**hipótesis de inducción**) y demostremos que en consecuencia es cierto $P(n+1)$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(n+1) - g(n+1) &= f(n)10^2 + 11 - (10g(n) + 3) \\ &= f(n)10^2 + 11 - 10g(n) - 3 \\ &= f(n)10^2 - g(n)10 + 9 \\ &= f(n)10^2 + 9 + 60h(n) - g(n)10^2 && \text{por (4)} \\ &= (f(n) - g(n))10^2 + 9 + 60h(n) \\ &= h(n)^2 10^2 + 3^2 + 2 \cdot 3h(n)10 && \text{por h.i.} \\ &= (h(n)10 + 3)^2 \\ &= h(n+1)^2 \end{aligned}$$

lo que significa que para todo número natural n, vale $P(n)$.[3] $\square$

[3] En internet ha circulado la siguiente demostración:

$$\begin{aligned} \frac{10^{2n}-1}{9} - \frac{2(10^n-1)}{9} &= \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} \\ &= \frac{(10^n-1)^2}{3^2} \\ &= \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.20. *Los números de Fibonacci son los números de la sucesión:*

$$f(n) = \begin{cases} 0, & si\ n = 0; \\ 1, & si\ n = 1; \\ f(n-1) + f(n-2), & si\ 1 < n; \end{cases}$$

Demuestre que para todo número natural n se cumple:

$$f(n) < \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Solution. El razonamiento es por el Segundo Principio de Inducción Finita según el enunciado $P(k)$ del tenor:

$$f(k) < \left(\frac{5}{3}\right)^k$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que n es un número natural y que para todo número natural k tal que $k < n$, vale $P(k)$. El razonamiento es por casos:

- $n = 0$; $f(0) = 0 < 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^0$, de donde sabemos que $P(0)$ vale.
- $n = 1$; $f(1) = 1 < \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^1$, de donde sabemos que $P(1)$ vale.
- $n > 1$; considere las siguientes realciones:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2) && \text{(por definición)} \\ &< \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2} && \text{(por hip. induc.)} \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2} (\frac{5}{3} + 1) \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2} \frac{8}{3} \\ &< \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 && \text{(pues } 72 < 75\text{)} \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Por el *Segundo Principio de Inducción Finita* sabemos que para todo número natural n, vale $P(n)$. $\square$

2. Álgebra de Boole

Definición 2.1. Sea φ una expresión booleana. φ es autodual sii, por definición, $\varphi^d = \varphi$.

Ejercicio 2.1. *Compruebe si la expresión booleana:*

$$\varphi = xy + yz + zx$$

es autodual.

Solution. Lo es. En efecto:

$$\begin{aligned}
\varphi^d &= (x+y)(y+z)(z+x) \\
&= x(y+z)(z+x) + y(y+z)(z+x) \\
&= (xy+xz)(z+x) + (yy+yz)(z+x) \\
&= (xy+xz)z + (xy+xz)x + (y+yz)z + (y+yz)x \\
&= xyz + xzz + xyx + xzx + yz + yzz + yx + yzx \\
&= xyz + xz + xy + xz + yz + yz + yx + yzx \\
&= xz + yz + yx + yzx \\
&= (xy + xyz) + yz + zx \\
&= xy + yz + zx
\end{aligned}$$

De donde, $\varphi^d = \varphi$ y esto revela la autodualidad. □

Teorema 2.2. *Sea φ una expresión booleana. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *φ es autodual.*
2. *$f_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1', \ldots, x_n')'$*

Ejercicio 2.3. *Demuestre que si φ y ψ son expresiones booleanas tales que $\varphi = \psi$, entonces son equivalentes:*

1. *φ es autodual.*
2. *ψ es autodual.*

Solution. Supongamos que $\varphi = \psi$ y que φ es autodual. Entonces:

$$\begin{aligned}
\psi^d &= \varphi^d \\
&= \varphi \\
&= \psi
\end{aligned}$$

Esto es suficiente. □

Definición 2.2. Una función booleana es autodual sii, por def., al menos una de las expresiones booleanas que la engendran (y por tanto todas) es autodual.

Definición 2.3. Una función booleana es *neutra* sii, por definición, viene descrita por el mismo número de minterm que de maxterm.

Ejercicio 2.4. *¿Cuántas funciones booleanas neutras de n símbolos de variable hay?*

Solution. Si ha de tener n símbolos de variable, hay 2^n minterm. Si ha de ser neutra, vendrá descrita por 2^{n-1} minterm. La pregunta es cuántas posibles elecciones de estos 2^{n-1} minterm pueden hacerse entre los 2^n minterm. Dada la conmutatividad de la suma en las expresiones, el número buscado es $C(2^n, 2^{n-1})$, es decir:

$$\binom{2^n}{2^{n-1}}$$

□

Ejercicio 2.5. *Diga el número de funciones booleanas neutras con dos símbolos de variable y encuentre todas ellas:*

Solution. El número de tales funciones booleanas es:

$$\begin{aligned}
C(2^n, 2^{n-1}) &= C(4,2) \\
&= \binom{4}{2} \\
&= \frac{4!}{2!2!} \\
&= \frac{24}{4} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Las funciones son:

$$\begin{aligned}
h_0(x,y) &= \sum m(0,1) = x'y' + x'y = x'(y'+y) = x' \\
h_1(x,y) &= \sum m(0,2) = x'y' + xy' = y' \\
h_2(x,y) &= \sum m(0,3) = x'y' + xy = x \equiv y \\
h_3(x,y) &= \sum m(1,2) = x'y + xy' = x \oplus y \\
h_4(x,y) &= \sum m(1,3) = x'y + xy = y \\
h_5(x,y) &= \sum m(2,3) = xy' + xy = x
\end{aligned}$$

□

Definición 2.4. Dado un minterm, su minterm mutuamente exclusivo es el obtenido del primero cambiando cada una de los símbolos de variable que lo forman por el complemento del mismo.

Lema 2.6. *Sean m_1 y m_2 minterm de n símbolos de variable ($1 \leq n$), con respresentaciones decimales respectivas: k_{m_1} y k_{m_2}. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\langle m_1, m_2 \rangle$ es una pareja de minterm mutuamente exclusivos.*
2. *$k_{m_1} + k_{m_2} = 2^n - 1$.*

Ejemplo 2.7. *Las siguientes parejas son de minterm mutuamente exclusivos:*

- *$\langle xyz, x'y'z' \rangle$; $k_{xyz} = 7$, $k_{x'y'z'} = 0$, $7 + 0 = 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$.*
- *$\langle xy'z, x'yz' \rangle$; $k_{xyz} = 5$, $k_{x'y'z'} = 2$, $5 + 2 = 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$.*

Teorema 2.8. *Sea φ una expresión booleana en la que ocurren n símbolos de variable, siendo n cualquier número natural no nulo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *φ es autodual.*
2. *f_φ es neutra y ninguna pareja de los minterm que la describen es una pareja de minterm mutuamente exclusivos.*

Ejercicio 2.9. *¿Cuántas expresiones autoduales con n símbolos de variable hay?*

Solution. Una expresión autodual debe ser neutra y para ello debe ocurrir que el número de sus minterm sea igual al de sus maxterm. Así pues, estará representada por la mitad de los minterm para ese número de símbolos de varialbe, i.e. $2^{n-1} = 2^n/2$ términos. Ahora bien, para cada uno de esos minterm tenemos 2 opciones: incluirlo (y entonces no estará incluido su minterm mutuamente exclusivo) o no (y entonces estará incluido su minterm mutuamente exclusivo); así pues, el número de expresiones autoduales es $2^{2^{n-1}}$. □

Ejercicio 2.10. *Diga el número de expresiones booleanas autoduales con dos símbolos de variable y encuentre todas ellas:*

Solution. El número de tales funciones booleanas es $2^{2^{2-1}} = 2^2 = 4$. Dichas expresiones estarán entre las expresiones con dos símbolos de variable que engendran funciones neutras con dos símbolos de variable. Estas fueron determinadas en el Ejercicio 2.5 y eran:

$$\begin{aligned}
h_0(x,y) &= \sum m(0,1) = x'y' + x'y = x'(y'+y) = x' \\
h_1(x,y) &= \sum m(0,2) = x'y' + xy' = y' \\
h_2(x,y) &= \sum m(0,3) = x'y' + xy = x \equiv y \\
h_3(x,y) &= \sum m(1,2) = x'y + xy' = x \oplus y \\
h_4(x,y) &= \sum m(1,3) = x'y + xy = y \\
h_5(x,y) &= \sum m(2,3) = xy' + xy = x
\end{aligned}$$

pero de ellas hemos de excluir $h_2(x,y) = \sum m(0,3)$, pues $0+3 = 3 = 2^2 - 1$ y $h_3(x,y) = \sum m(1,2)$ pues $1+2 = 3 = 2^2 - 1$. Así pues, las expresiones autoduales sobre dos símbolos de variable son:

- x'
- y'
- x
- y

□

Ejercicio 2.11. *Componga un programa en* `Python` *o* `Haskell` *que dado un número natural no nulo* n*, encuentre (por al menos una expresión que las engendre) todas y cada una de las funciones booleanas de* n *variables que sean autoduales.*

Ejercicio 2.12. *De las siguientes funciones:*

1. $f(x,y,z) = \sum m(0,2,3)$
2. $g(x,y,z) = \sum m(0,1,6,7)$
3. $h(x,y,z) = \sum m(0,1,2,4)$
4. $k(x,y,z) = \sum m(3,5,6,7)$

diga cuales están realizadas por expresiones autoduales.

Solution. El número de minterm posibles para expresar funciones de 3 símbolos de variable son 8. Esto excluye de las consideraciones a $f(x, y, z)$, que no puede provenir de una expresión autodual al ser suma de 3 minterm y no de 4. Para el resto, tengamos en cuenta que $2^3 - 1 = 7$; así pues:

- $g(x, y, z)$ no puede ser autodual, pues por ejemplo $6 + 1 = 7$ aunque también $0 + 7 = 7$.
- $h(x, y, z)$ es autodual, pues: viene descrita por 4 minterm y $0+1 \neq 7$, $0+2 \neq 7$, $0+4 \neq 7$, $1+2 \neq 7$, $1+4 \neq 7$ y $2+4 \neq 7$.
- $k(x, y, z)$ es autodual, pues: viene descrita por 4 minterm y $3+5 \neq 7$, $3+6 \neq 7$, $3+7 \neq 7$, $5+6 \neq 7$, $5+7 \neq 7$ y $6+7 \neq 7$.

□

Ejercicio 2.13. *Compruebe si la expresión booleana:*

$$\varphi = xy + yz + zx$$

es autodual.

Solution. El número de símbolos de variable utilizado para describir φ es 3. Tenemos que $2^{3-1} = 4$ y que $2^3 - 1 = 7$. Por otra parte,

$$f_\varphi(x, y, z) = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

Dado que f_φ viene expresada por 4 minterm y que ninguna pareja de ellos es de miterm mutuamente exclusivo (basta observar que $3 + 5 > 7$), concluimos que f_φ es autodual y que también lo es φ. □

Ejercicio 2.14. *Componga un programa en `Python` o `Haskell` que dada una expresión booleana, decida si es o no autodual.*

Ejercicio 2.15. *En el álgebra de Boole* $\mathbf{D(67830)}$ *calcule:*

1. *sus átomos*
2. $1615 \cdot 2261$
3. $1615 + 2261$
4. $399'$

Solution.

1. Como $67830 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19$, constatamos que efectivamente $\mathbf{D(67830)}$ es un álgebra de Boole y que
$$\mathrm{Atm}(\mathbf{D(67830)}) = \{2, 3, 5, 7, 17, 19\}$$
2. $1615 \cdot 2261 = (1615, 2261) = 323$
3. $1615 + 2261 = [1615, 2261] = \frac{1615 \cdot 2261}{323} = 11305$
4. $399' = \frac{67830}{399} = 170$

□

Ejercicio 2.16. *Sean m y n números naturales no nulos tales que* $\mathbf{D(m)}$ *y* $\mathbf{D(n)}$ *son álgebras de Boole no triviales. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathbf{D(mn)}$ *es un álgebra de Boole.*

2. $(m, n) = 1$.

Demuestre además que si m y n son números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$, $\mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ son álgebras de Boole, entonces $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ son álgebras de Boole isomorfas.

Solution. Sean m y n números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Supongamos $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole y que es isomorfa a $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$; en tal caso $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole. Por tanto, en la factorización de mn como producto de números primos no figura ningún primo elevado a una potencia superior a 1; de donde m y n no tienen ningún factor primo en común, o sea, $(m, n) = 1$. Recíprocamente, supongamos que $(m, n) = 1$. Por la hipótesis general $P(m)$ y $P(n)$ valen; donde $P(r)$ es la afirmación "existe un número natural k_r tal que: $r = \prod_{i=0}^{k_r} p_i$; para todo $0 \leq i \leq k_r$, p_i es primo y $p_i \neq p_j$, siempre que $0 \leq i < j \leq k_r$". Si $(m, n) = 1$, $P(mn)$ vale; por lo que $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole. Por otra parte, supongamos que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Entonces:

- Los átomos del álgebra de Boole $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ son los elementos de

  $$\{\langle p, 1\rangle : p \text{ es primo y } p \mid m\} \cup \{\langle 1, q\rangle : p \text{ es primo y } q \mid n\}$$

  por lo que posee $k_m + k_n + 2$ átomos.

- En las hipótesis, $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole no trivial y su número de átomos es también $k_m + k_n + 2$.

Al ser $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ álgebras de Boole no triviales y tener el mismo número de átomos, deben ser isomorfas. Pero si alguna de ellas, o las dos, son triviales es resultado es a su vez evidente. □

Ejercicio 2.17. *Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Demuestre que para todo $x, y \in B$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $x \leq y$

2. $x + y = y$

3. $x \supset y = 1$

Solution. Sean $x, y \in B$ cualesquiera y supongamos que $x \leq y$, es decir, que $xy = x$. Entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= xy + y \\ &= y + yx \\ &= y \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x + y = y$; entonces:

$$\begin{aligned} x \supset y &= x \supset (x + y) \\ &= x \supset (x' \supset y) \\ &= x' + x + y \\ &= 1 + y \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $x \supset y = 1$; entonces:

$$\begin{aligned} x &= x1 \\ &= x(x \supset y) \\ &= x(x' + y) \\ &= xx' + xy \\ &= 0 + xy \\ &= xy \end{aligned}$$

□

Observación 2.1. En el ambiente del Ejercicio 2.17, supongamos que $xy = x$; entonces:

$$\begin{aligned} x \supset y &= xy \supset y \\ &= x \supset (y \supset y) \\ &= x \supset 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.18. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Demuestre que para todo* $x, y \in B$*, si* $x \uparrow y = 0$ *entonces* $x = 1 = y$

Solution. Sean $x, y \in B$ tales que $x \uparrow y = 0$, o sea, $0 = (xy)'$. Esto es equivalente a que $xy = 1$, es decir, $x = 1 = y$. □

Ejercicio 2.19. *Sea* n *un número natural y sean* $f, g, k, h \colon B_2^n \longrightarrow B_2$*. Considere la función:*

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \begin{cases} f(x_0, \ldots, x_{n-1}), & si\ k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 1 \\ g(x_0, \ldots, x_{n-1}), & si\ k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

y demuestre que

$$h = kf + \bar{k}g \tag{5}$$

Seguidamente considere el caso particular de $n = 4$*,* $f, g, h \colon B_2^4 \longrightarrow B_2$ *definidas por:* $f(x, y, z) = x \uparrow z$*,* $g(x, y, z) = \bar{y}$ *y* h *según lo siguiente*

$$h(x, y, z, t) = \begin{cases} f(x, y, z), & si\ \bar{x} \leq \bar{t} \\ g(y, z, t), & si\ x < t \end{cases}$$

Aplique (5) a este caso para obtener:

$$h(x, y, z, t) = (t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z} \tag{6}$$

Solution. Supongamos que para $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in B_2^n$ se tiene $k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 1$; entonces

$$\begin{aligned} h(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= k(x_0, \ldots, x_{n-1})f(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \bar{k}(x_0, \ldots, x_{n-1})g(x_0, \ldots, x_{n-1}) \\ &= 1f(x_0, \ldots, x_{n-1}) + 0g(x_0, \ldots, x_{n-1}) \\ &= f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

y si $k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$ se tiene análoga e evidentemente que $h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = g(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Por otra parte, $\bar{x} \leq \bar{t}$ es equivalente a $t \leq x$ y, según el Ejercicio 2.17, esto equivalente a $t \supset x = 1$; por tanto, aquí $k(x, y, z, t) = t \supset x$. La particularización de (5) es:

$$(t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z}$$

pues: si $t \supset x = 0$ entonces $(t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z} = \bar{z}$ y si $t \supset x = 1$, caben dos casos:

- $x \uparrow z = 1$; entonces

$$\begin{aligned}(t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z} &= 1 + \bar{z} \\ &= 1 \\ &= x \uparrow z\end{aligned}$$

- $x \uparrow z = 0$; entonces (cfr. Ejercicio 2.18) $\bar{z} = 0$, luego:

$$\begin{aligned}(t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z} &= 0 + \bar{z} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \\ &= x \uparrow z\end{aligned}$$

de lo que deducimos que si $t \supset x = 1$ entonces $(t \supset x)(x \uparrow z) + \bar{z} = x \uparrow z$. □

Ejercicio 2.20. *Sea* $\mathbf{B}$ *un álgebra de Boole* ***cualquiera****. Demuestre que para todo* $a, b, c \in B$ *son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $a \oplus b \leq c$
2. $ac' = bc'$

Solution. Para cualesquiera $a, b, c \in B$,

$$\begin{aligned}ac'(bc')' &= ac'(b' + c'') \\ &= ac'(b' + c) \\ &= ac'b' + ac'c \\ &= ab'c' + a0 \\ &= ab'c' + 0 \\ &= ab'c'\end{aligned}$$

Por tanto:

$$ac'(bc')' = ab'c' \tag{7}$$

y también (como ecuación es idéntica):

$$bc'(ac')' = a'bc' \tag{8}$$

Supongamos ahora que $a \oplus b \leq c$, o equivaléntemente que $ab' + a'b \leq c$. Entonces, por transitividad, $ab' \leq c$ y $a'b \leq c$ o lo que es equivalente: $ab'c' = 0$ y $a'bc' = 0$. Entonces, por (7), $ac'(bc')' = 0$ y por (8), $bc'(ac')' = 0$. De lo primero se deduce que $ac' \leq bc'$ y de lo segundo que $bc' \leq ac'$. Por la antisimetría de $\leq$, se tiene que $ac' = bc'$. **Recíprocamente**, supongamos que $ac' = bc'$. Entonces $ac'(bc')' = 0$ y $bc'(ac')' = 0$; como antes $ab'c' = 0 = a'bc'$. Deducimos de esto que $ab' \leq c$ y que $a'b \leq c$, de donde:

$$a \oplus b = ab' + a'b \leq c$$

□

Ejercicio 2.21. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras de Boole finitas y* $\langle a, b\rangle \in A \times B$*. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
2. *(*$a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ *y* $b = 0$*) ó (*$a = 0$ *y* $b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$*)*

Solution. Para demostrar que la afirmación 1) implica a la 2), demostremos la implicación contrarrecíproca. Con el fin de articular el razonamiento abreviemos por:

- α la expresión "$a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$"
- β la expresión "$b = 0$"
- φ la expresión "$a = 0$" y
- ψ la expresión "$b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$".

La negación de la afirmación 2) responde a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\varphi \wedge \psi)) &= \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi) \\ &= (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ &= (\neg\alpha \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \vee (\neg\beta \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \\ &= (\neg\alpha \wedge \neg\varphi) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\psi) \vee (\neg\beta \wedge \neg\varphi) \vee (\neg\beta \wedge \neg\psi) \end{aligned}$$

Recordamos ahora que para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\xi, \zeta\}$ se cumple:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \xi \vee \zeta) = \mathrm{Con}(\Gamma, \xi) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \zeta)$$

Por lo que, supuesto lo opuesto de la afirmación 2), bastará con concluir que $\langle a, b\rangle \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ en cada uno de los casos que hemos llegado a distinguir. En definitiva, el razonamiento es por casos según los siguientes (en realidad tres):

- $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y $a \neq 0$ (por $\neg\alpha \wedge \neg\varphi$); si $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ entonces existe $x \in A$ tal que $0 < x < a$. Así pues $\langle 0, 0\rangle < \langle x, b\rangle < \langle a, b\rangle$ y así $\langle a, b\rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $b \neq 0$ y $a \neq 0$ (por $\neg\beta \wedge \neg\varphi$); en este caso se tiene que $\langle 0, 0\rangle < \langle a, 0\rangle < \langle a, b\rangle$ y así $\langle a, b\rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $b \neq 0$ y $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ (por $\neg\beta \wedge \neg\psi$); si $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ entonces existe $y \in B$ tal que $0 < y < b$. Así pues $\langle 0, 0\rangle < \langle a, y\rangle < \langle a, b\rangle$ y así $\langle a, b\rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ (por $\neg\alpha \wedge \neg\psi$); éste es un caso específico de los anteriormente tratados, a menos que alguno de los elementos, a ó b, sea igual a 0. Si $a = 0 = b$ concluimos que $\langle a, b\rangle$ no es un átomo debido a que para serlo es condición necesaria la no nulidad. Si $a \neq 0$ pero $b = 0$, tomaremos $x \in A$ tal que $0 < x < a$ y entonces $\langle 0, 0\rangle < \langle x, 0\rangle < \langle a, b\rangle$ con lo que $\langle a, b\rangle$ no puede ser átomo. Si el caso es $a = 0$ pero $b \neq 0$, un razonamiento análogo nos lleva a que $\langle a, b\rangle$ no puede ser átomo.

Recíprocamente, supongamos que se cumple lo que afirma 2) y demostremos, como conclusión, lo que afirma 1). Supongamos, pues, que $a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y que $b = 0$. Si $\langle x, y\rangle \in A \times B$ y $\langle 0, 0\rangle \leq \langle x, y\rangle \leq \langle a, 0\rangle$; pero al ser a átomo se cumple $x = 0$ ó $x = a$ por lo que en realidad se tiene que $\langle 0, 0\rangle = \langle x, y\rangle$ o $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$ y de ello que $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Si se da que $a = 0$ y $b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$, un razonamiento análogo conduce a que también $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Así pues se tiene demostrada la afirmación 1). $\square$

Ejercicio 2.22. *Considere el álgebra de Boole* $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ *y*

1. *Encuentre sus átomos.*
2. *Exprese cada función de* $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ *por medio de dichos átomos.*
3. *Demuestre que los conjuntos:* $\{+, \cdot, '\}$, $\{+, '\}$, $\{\cdot, '\}$, $\{\supset, 0\}$, $\{\uparrow\}$ *y* $\{\downarrow\}$ *son conjuntos suficientes.*

4. Demuestre que valen las siguientes igualdades:

$$x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$
$$x \supset y = ((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y)$$

Solution. Sabemos que $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ es un álgebra de Boole y que

$$\operatorname{card}(B_2^{B_2 \times B_2}) = 2^4$$

por otra parte, ${\mathbf{B_2}}^4$ es también un álgebra de Boole con 2^4 elementos. Por tanto:

$$\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2}) \cong {\mathbf{B_2}}^4$$

siendo un isomorfismo entre ambas álgebras la aplicación Ψ que aplica a cada elemento f de $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ la cuaterna $\langle f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)\rangle$, es decir, para todo $f \in \mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$:

$$\Psi(f) = \langle f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)\rangle$$

Sabemos por 2.21) que los átomos de ${\mathbf{B_2}}^4$ son cuatro, de hecho los elementos del conjunto

$$\{\langle 1,0,0,0\rangle, \langle 0,1,0,0\rangle, \langle 0,0,1,0\rangle, \langle 0,0,0,1\rangle\}$$

Por tanto, los átomos de $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ deben ser:

$$\begin{aligned}
f_8(x,y) &= x'y' \\
f_4(x,y) &= x'y \\
f_2(x,y) &= xy' \\
f_1(x,y) &= xy
\end{aligned}$$

De esto deducimos que:

$$\begin{aligned}
f_0(x,y) &= f_1(x,y)f_2(x,y) = (xy)(xy') = xyy' \\
f_{12}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) = x'\,y' + x'y = x'(y' + y) = x' \\
f_{10}(x,y) &= f_8(x,y) + f_2(x,y) = x'\,y' + xy' = (x' + x)y' = y' \\
f_9(x,y) &= f_8(x,y) + f_1(x,y) = x'\,y' + xy \\
f_6(x,y) &= f_4(x,y) + f_2(x,y) = x'y + xy' \\
f_5(x,y) &= f_4(x,y) + f_1(x,y) = x'y + xy = (x' + x)y = y \\
f_3(x,y) &= f_2(x,y) + f_1(x,y) = xy' + xy = x(y' + y) = x \\
f_{14}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_2(x,y) = f_{12}(x,y) + f_2(x,y) = x' + xy' = x' + y' \\
f_{13}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_1(x,y) = f_{12}(x,y) + f_1(x,y) = x' + xy = x' + y \\
f_{11}(x,y) &= f_8(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = f_{10}(x,y) + f_1(x,y) = y' + xy = x + y' \\
f_7(x,y) &= f_4(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = f_6(x,y) + f_1(x,y) = xy' + y = x + y \\
f_{15}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = 1
\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra $\{+, \cdot, '\}$ es un conjunto suficiente. Para la demostración de la suficiencia del resto de conjuntos:

1. $\{+, '\}$ es suficiente porque $xy = (x' + y')'$.
2. $\{\cdot, '\}$ es suficiente porque $x + y = (x'y')'$.

3. $\{\supset, 0\}$ es suficiente porque:

$$\begin{aligned} x' &= x \supset 0 \\ x + y &= (x \supset 0) \supset y \\ xy &= (x \supset (y \supset 0)) \supset 0 \end{aligned}$$

4. $\{\uparrow\}$ es suficiente porque:

$$\begin{aligned} x' &= (xx)' \\ &= x' + x' \\ &= x \uparrow x \\ x + y &= x'' + y'' \\ &= x' \uparrow y' \\ &= (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) \end{aligned}$$

5. $\{\downarrow\}$ es suficiente porque:

$$\begin{aligned} x' &= (x + x)' \\ &= x'x' \\ &= x \downarrow x \\ xy &= x''y'' \\ &= x' \downarrow y' \\ &= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y)(x + y) \\ &= (x'y')'(x'y')' \\ &= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) \\ x \supset y &= x' + y \\ &= (xy')' \\ &= (xy' + xy')' \\ &= (xy')'(xy')' \\ &= (x''y')'(x''y')' \\ &= (x' \downarrow y) \downarrow (x' \downarrow y) \\ &= ((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.23. *Sobre expresiones boolenas φ definamos la siguiente función p_G que propociona porlinomios con coeficientes de $\mathbb{Z}_2$:*

$$\mathrm{p_G}(\varphi) = \begin{cases} 0, & \textit{si } \varphi \equiv 0 \\ 1, & \textit{si } \varphi \equiv 1 \\ x_i, & \textit{si } \varphi \equiv x_i \\ \mathrm{p_G}(\alpha) + 1, & \textit{si } \varphi \equiv \alpha' \\ \mathrm{p_G}(\alpha)\, \mathrm{p_G}(\beta) + \mathrm{p_G}(\alpha) + \mathrm{p_G}(\beta), & \textit{si } \varphi \equiv \alpha + \beta \\ \mathrm{p_G}(\alpha)\, \mathrm{p_G}(\beta), & \textit{si } \varphi \equiv \alpha \cdot \beta \end{cases}$$

Para cualquier expresión booleana φ, $\mathrm{p_G}(\varphi)$ está bien definida (por el principio de lectura única) y es denominado el Polinomio de Zhegalkine de φ. Encuentre el polinomio de Zhegalkin de las siguientes expresiones booleanas:

1. $x \supset y$
2. $x \uparrow y$ *(Barra de Sheffer (Sheffer stroke) o* NAND, *con notación de Bocheński* Dxy*)*
3. $x \downarrow y$ *(Daga de Quine (Quine dagger) o Flecha de Peirce (Peirce's arrow) o* NOR, *con notación de Bocheński* Xxy*)*
4. $x \equiv y$
5. $x \oplus y$
6. $x \supset (y \supset z)$
7. $(x \supset y) \supset z$

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(x \supset y) &= \mathrm{p_G}(x' + y) \\
&= \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y) + \mathrm{p_G}(x') + \mathrm{p_G}(y) \\
&= (x+1)y + (x+1) + y \\
&= xy + y + x + 1 + y \\
&= xy + x + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(x \uparrow y) &= \mathrm{p_G}(x' + y') \\
&= \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y') + \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y') \\
&= (x+1)(y+1) + x + 1 + y + 1 \\
&= xy + x + y + 1 + x + y \\
&= xy + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(x \downarrow y) &= \mathrm{p_G}(x'y') \\
&= \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y') \\
&= (x+1)(y+1) \\
&= xy + x + y + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(x \equiv y) &= \mathrm{p_G}(x'y' + xy) \\
&= \mathrm{p_G}(x'y')\,\mathrm{p_G}(xy) + \mathrm{p_G}(x'y') + \mathrm{p_G}(xy) \\
&= (x+1)(y+1)xy + (x+1)(y+1) + xy \\
&= x + y + 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(x \oplus y) &= \mathrm{p_G}(x'y + xy') \\
&= \mathrm{p_G}(x'y)\,\mathrm{p_G}(xy') + \mathrm{p_G}(x'y) + \mathrm{p_G}(xy') \\
&= \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y)\,\mathrm{p_G}(x)\,\mathrm{p_G}(y') + \mathrm{p_G}(x')\,\mathrm{p_G}(y) + \mathrm{p_G}(x)\,\mathrm{p_G}(y') \\
&= (x+1)yx(y+1) + (x+1)y + x(y+1) \\
&= (xy+yx)(y+1) + xy + y + xy + x \\
&= x + y
\end{aligned}
$$

El resto del ejercicio es sencillo y análogo a lo anterior. □

Ejercicio 2.24. *El dígito a 7 segmentos se forma iluminando en la pantalla los segmentos apropiados según explica esquemáticamente la Figura 1 y así puede mostrar los números decimales del 0 al 9. El dígito queda construido por iluminación de hasta los segmentos: a,b,c,d,e,f y g, que se activan o desactivan mediante un circuito digital dependiendo del número que ha de ser mostrado; por ejemplo, el dígito 3 requiera la activación de exáctamente los segmentos: a,b,c,d y g. Para mostrar el dígito 7 quedarán desactivados exactamente los segmentos: d, e, f y g.*

El circuito que activa los segmentos adecuados para mostrar uno cualquiera de los dígitos se conoce como Decodificador BCD a 7 segmentos; su entrada es un número BCD de 4-bit entre 0 y 9. Cada una de las 7 salidas del circuito conectan con los siete segmentos.

Para implementar el circuito decodificador de cuatro entradas ($n = 4$) y siete salidas ($m = 7$) debemos hacer una tabla para cada segmento, representando su estado para combinación de entradas. Así pues debemos determinar siete expresiones, una por cada segmento, antes de implementar el circuito.

Puesto que los números representados por una entrada de 4 bits son 16, la tabla de cada función tendrá 16 entradas combinacionales. No obstante las seis últimas combinaciones son "no-importa", ya que ninguna de ellas ocurre al ser las entradas de números BCD de 4 bits. Los estados no-importa ayudarán sin embargo a simplificar las expresiones booleanas para los siete segmentos. Según lo que explican la: Figura 2, Figura 3 y 4, la función booleana $D_{BCD7}(a, b, c, d)$ que codifica el Decodificador BCD a 7 segmentos es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
D_{BCD7}(a,b,c,d) = \langle & a + c + bd + \bar{b}\bar{d}, \\
& \bar{b} + \bar{c}\bar{d} + cd, \\
& b + \bar{c} + d, \\
& a + \bar{b}\bar{d} + \bar{b}c + c\bar{d} + b\bar{c}d, \\
& \bar{b}\bar{d} + c\bar{d}, \\
& a + b\bar{c} + b\bar{d} + \bar{c}\bar{d}, \\
& a + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d}\rangle
\end{aligned}
$$

donde las entradas de la 7-upla que representa a $D_{BCD7}(a, b, c, d)$ corresponden a los segmentos en el orden de la plabra abcdefg.

Ejercicio 2.25. *Considere la función booleana $f\colon B^4 \longrightarrow B$ definida por:*

$$f(x, y, z, u) = \sum m(7, 11, 13, 14, 15)$$

1. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser suma de productos de literales.*
2. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser producto de sumas de literales.*
3. *Calcule el coste de cada una de las expresiones encontradas para f en los apartados 2) y 1) y señale cuál es la del menor.*

Solution. Para la solución del problema nos basaremos en los mapas K de la Figura 5. Del mapa K de la subfigura 5a) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = yzu + xyu + xzu + xyz \tag{9}$$

y del mapa K de la subfigura 5b) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = (x + y)(z + u)(y + u)(x + z)(y + z)(x + u) \tag{10}$$

El análisis de los costes es el siguiente:

- Expresión (9)
  - and: 4
  - or: 1
  - entradas: 16

  que arroja un total de 21
- Expresión (10)
  - and: 1
  - or: 6
  - entradas: 18

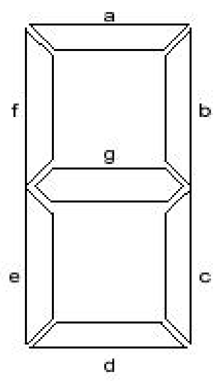
  que arroja un total de 25

□

Ejercicio 2.26. *Sean m y n números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathbf{D(mn)}$ *es un álgebra de Boole.*
2. $(m, n) = 1$.

Demuestre además que si m y n son números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$, $\mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ son álgebras de Boole, entonces $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ son álgebras de Boole isomorfas.



(a) dígito a 7 segmentos

Dígito	Segmentos
0	a,b,c,d,e,f
1	b,c
2	a,b,d,e,g
3	a,b,c,d,g
4	b,c,f,g
5	a,c,d,f,g
6	a,c,d,e,f,g
7	a,b,c
8	a,b,c,d,e,f,g
9	a,b,c,d,f,g

(b) segmentos activos por cada dígito

Figura 1: Dígitos a 7 segmentos y su formación activándolos.

Input				Output
a	b	c	d	segmento a
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(a) Codif. segmento a

Input				Output
a	b	c	d	segmento b
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(b) Codif. segmento b

Input				Output
a	b	c	d	segmento c
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(c) Codif. segmento c

Input				Output
a	b	c	d	segmento d
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(d) Codif. segmento d

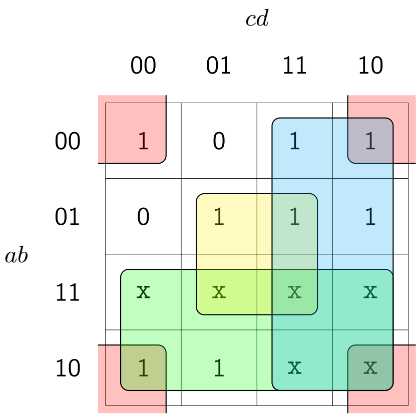
Input				Output
a	b	c	d	segmento e
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(e) Codif. segmento e

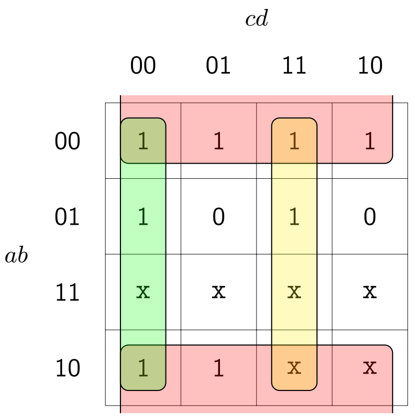
Input				Output
a	b	c	d	segmento f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(f) Codif. segmento f

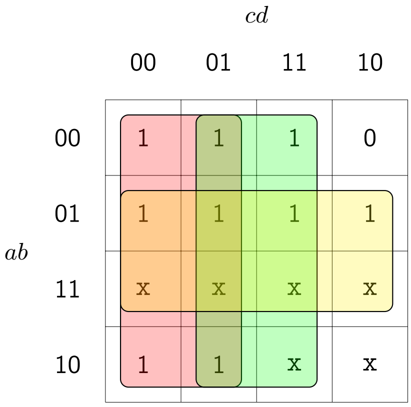
Figura 2: Codificación por segmentos de su activación del a al f.



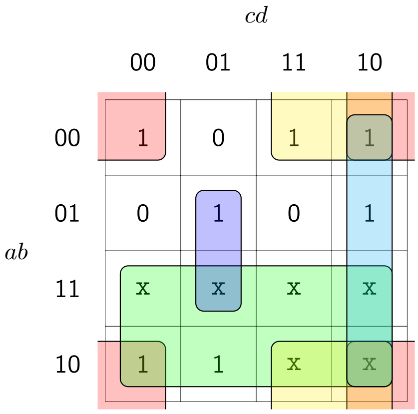
(a) Mapa K segmento a: $a + c + bd + \bar{b}\bar{d}$



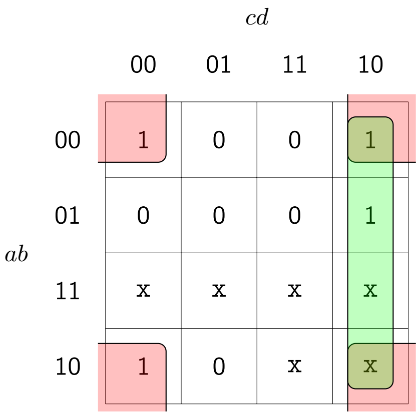
(b) Mapa K segmento b: $\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + cd$



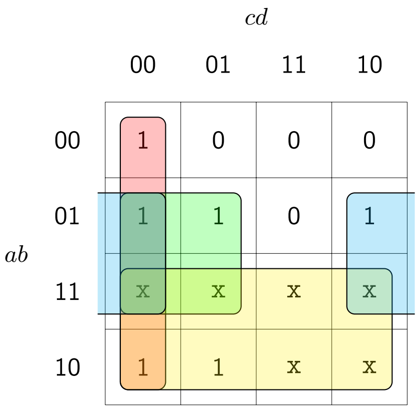
(c) Mapa K segmento c: $b + \bar{c} + d$



(d) Mapa K segmento d: $a + \bar{b}\bar{d} + \bar{b}c + c\bar{d} + b\bar{c}d$



(e) Mapa K segmento e: $\bar{b}\bar{d} + c\bar{d}$

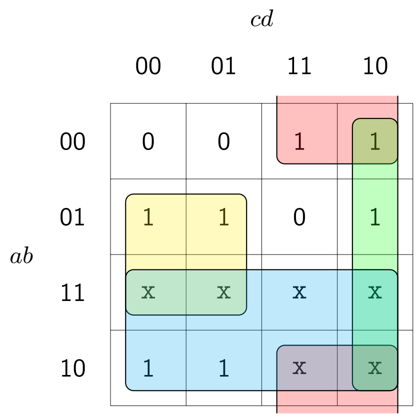


(f) Mapa K segmento f: $a + b\bar{c} + b\bar{d} + \bar{c}\bar{d}$

Figura 3: Mapas K para las funciones de codificación de la activación de los segmentos a a f

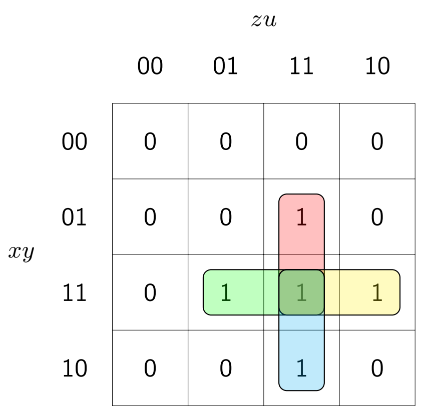
Input				Output
a	b	c	d	segmento g
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(a) Codif. segmento g

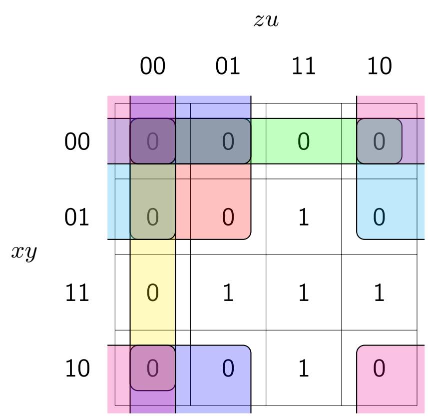


(b) Mapa K segmento g: $a + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d}$

Figura 4: Codificación de activación del segmento g y mapa K correspondiente.



(a) Suma de minterm



(b) Producto de maxterm

Figura 5: Expresiones de f

Solution. Sean m y n números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Supongamos $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole y que es isomorfa a $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$; en tal caso $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole. Por tanto, en la factorización de mn como producto de números primos no figura ningún primo elevado a una potencia superior a 1; de donde m y n no tienen ningún factor primo en común, o sea, $(m, n) = 1$. Recíprocamente, supongamos que $(m, n) = 1$. Por la hipótesis general $P(m)$ y $P(n)$ valen; donde $P(r)$ es la afirmación "existe un número natural k_r tal que: $r = \prod_{i=0}^{k_r} p_i$; para todo $0 \leq i \leq k_r$, p_i es primo y $p_i \neq p_j$, siempre que $0 \leq i < j \leq k_r$". Si $(m, n) = 1$, $P(mn)$ vale; por lo que $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole. Por otra parte, supongamos que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Entonces:

- Los átomos del álgebra de Boole $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ son los elementos de

  $$\{\langle p, 1\rangle : p \text{ es primo y } p \mid m\} \cup \{\langle 1, q\rangle : p \text{ es primo y } q \mid n\}$$

  por lo que posee $k_m + k_n + 2$ átomos.

- En las hipótesis, $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole no trivial y su número de átomos es también $k_m + k_n + 2$.

Al ser $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$ y $\mathbf{D(mn)}$ álgebras de Boole no triviales y tener el mismo número de átomos, deben ser isomorfas. Pero si alguna de ellas, o las dos, son triviales es resultado es a su vez evidente. □

Ejercicio 2.27. *Considere la función booleana $f\colon B^4 \longrightarrow B$ definida por:*

$$f(x, y, z, u) = \sum m(0, 1, 3, 4, 7, 11, 13, 15) + \sum d(9, 12, 14)$$

1. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser suma de productos de literales.*
2. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser producto de sumas de literales.*
3. *Calcule el coste de cada una de las expresiones que se piden para f en los apartados 2) y 1) y compare los costos.*
4. *De una expresión de f con coste menor que el de cualquiera de las anteriores.*

Solution. Para la solución del problema nos basaremos en los mapas K de la Figura 6. Del mapa K de la subfigura 6a) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = x'z'u' + y'u + xu + zu \tag{11}$$

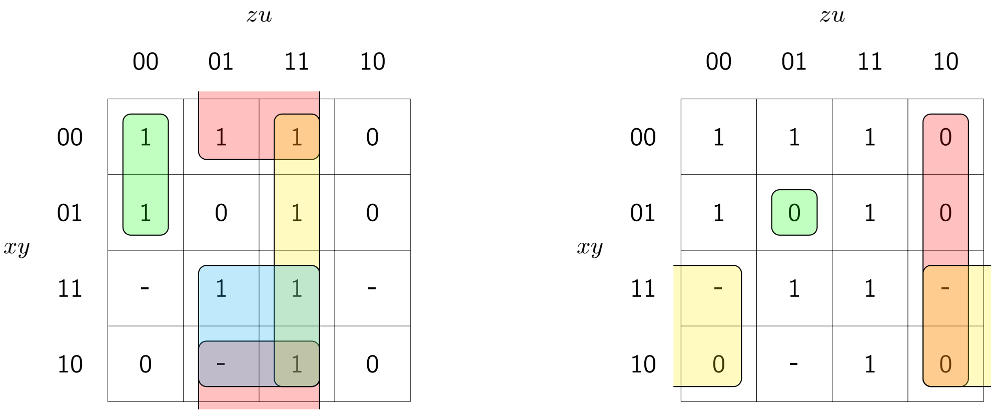
y del mapa K de la subfigura 6b) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = (x' + u)(z' + u)(x + y' + z + u') \tag{12}$$

El análisis de los costos es el siguiente:

- Expresión (11)
  - and: 1
  - or: 4
  - entradas: 13

  que arroja un total de 18
- Expresión (12)
  - and: 1



(a) Suma de minterm

(b) Producto de maxterm

Figura 6: Expresiones de f

- or: 3
- entradas: 11

que arroja un total de 15

No obstante:

$$f(x, y, z, u) = x'z'u' + (y' + x + z)u$$

cuyo costo es 14, pues

- and: 2
- or: 2
- entradas: 10

Sin embargo, esta solución ni es POS ni SOP. □

Ejercicio 2.28. *Considere la función booleana $f\colon B^4 \longrightarrow B$ definida por:*

$$f(x, y, z, u) = \sum m(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

1. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser suma de productos de literales.*
2. *Calcule una expresión minimal de f a condición de ser producto de sumas de literales.*
3. *Calcule el coste de cada una de las expresiones que se piden para f en los apartados 2) y 1) y compare los costos.*

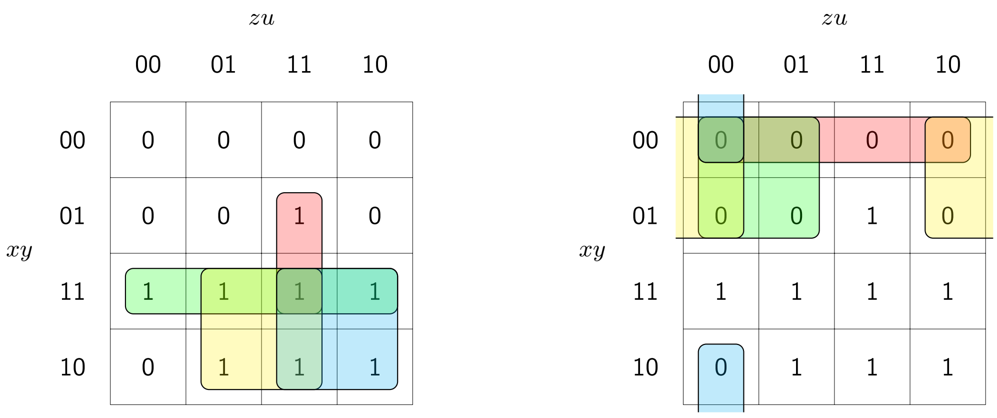
Solution. Para la solución del problema nos basaremos en los mapas K de la Figura 7. Del mapa K de la subfigura 7a) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = xy + xz + xu + yzu \tag{13}$$

y del mapa K de la subfigura 7b) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = (x + y)(x + z)(x + u)(y + z + u) \tag{14}$$

El análisis de los costos es el siguiente:



(a) Suma de minterm

(b) Producto de maxterm

Figura 7: Expresiones de f

- Expresión (13)
  - and: 4
  - or: 1
  - entradas: 13

  que arroja un total de 18
- Expresión (14)
  - and: 1
  - or: 4
  - entradas: 13

  que arroja un total de 18

Ambas expresiones tiene el mismo costo. □

Ejercicio 2.29. *Sea la expresión booleana*

$$\varphi \equiv (x'y) \uparrow (x \supset (z \downarrow y'))$$

y $f(x, y, z)$ *la función booleana asociada a* φ. *Encuentre:*

1. $p_G(\varphi)$
2. *La forma normal disyuntiva perfecta de* f *(expresión de* f *como suma de minterm)*
3. *La forma normal conjuntiva perfecta de* f *(expresión de* f *como producto de maxterm)*
4. *Una expresión minimal a condición de ser SOP.*

Solution.

1. Calculemos $\mathrm{p_G}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{p_G}(\varphi) &= \mathrm{p_G}((x'y) \uparrow (x \supset (z \downarrow y'))) \\
&= \mathrm{p_G}(x'y)\,\mathrm{p_G}(x \supset (z \downarrow y')) + 1 \\
&= (x+1)y(x\,\mathrm{p_G}(z \downarrow y') + x + 1) + 1 \\
&= (x+1)y(x(z(y+1) + z + (y+1) + 1) + x + 1) + 1 \\
&= (x+1)y(x(zy + z + z + y + 1 + 1) + x + 1) + 1 \\
&= (x+1)y(xyz + xy + x + 1) + 1 \\
&= xyz + xy + xy + xy + xyz + xy + xy + y + 1 \\
&= xy + y + 1 \\
&= \mathrm{p_G}(y \supset x)
\end{aligned}$$

   y así pues:

$$(x'y) \uparrow (x \supset (z \downarrow y')) = y \supset x = x + y'$$

   Deducimos que f no depende de z y que $x+y'$ es una expresión minimal como suma de productos, pues es SOP y no admite simplificación alguna (confírmelo con un mapa K). Calculemos ahora las formas normales de f:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x + y' \\
&= x \cdot 1 + y' \cdot 1 \\
&= x(y + y') + y'(x + x') \\
&= xy + xy' + xy' + x'y' \\
&= xy + xy' + x'y' \\
&= xy(z + z') + xy'(z + z') + x'y'(z + z') \\
&= x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz \\
&= \sum m(0,1,4,5,6,7)
\end{aligned}$$

   Así pues,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \prod M(2,3) \\
&= (x + y' + z)(x + y' + z')
\end{aligned}$$

   Como observación al margen: al ser $f(0,0,0) = 1$, sabemos que $\mathrm{p_G}(\varphi)(0,0,0) = 1$; así pues, sin necesidad del cálculo de $\mathrm{p_G}(\varphi)$, sabemos que el término independiente del polinomio de Zhegalkine debe ser igual a 1.

□

Ejercicio 2.30. *Mediante el algoritmo de Quine-McCluskey (y no otro, ahora) encuentre razonadamente todas las expresiones minimales de la función:*

$$f(x,y,z,u) = \sum m(4,5,7,12,14,15)$$

a condición de estar éstas expresadas como suma de productos. Determine al menos una expresión de f que teniendo igual costo que cualquiera de las expresiones minimales encontradas, sin embargo no esté expresada como suma de productos.

Solution.

1. **Generación de implicantes primos**; la tabla de la Figura 8 recoge la marcha del proceso y los resultados.

2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; es la que aparece en la Figura 9, donde no aparece ningún implicante primo esencial ni columnas ni filas dominadoras.

3. **Resolución de la tabla de implicantes primos**; se puede llevar a cabo por el algoritmo de Petrick. Encontramos la situación de la siguiente tabla:

para cubrir a	basta usar
4	p_1 ó p_2
5	p_1 ó p_3
7	p_3 ó p_5
12	p_2 ó p_4
14	p_4 ó p_6
15	p_5 ó p_6

lo que nos lleva a formular la frase P del metalenguaje que expresa el modo de cubrir la totalidad de los los minterms como una expresión booleana según:

$$(P_1 + P_2)(P_1 + P_3)(P_3 + P_5)(P_2 + P_4)(P_4 + P_6)(P_5 + P_6)$$

que debemos transformar en suma de productos:

$$\begin{aligned} P &= (P_1 + P_2)(P_1 + P_3)(P_3 + P_5)(P_2 + P_4)(P_4 + P_6)(P_5 + P_6) \\ &= (P_1 + P_2P_3)(P_4 + P_2P_6)(P_5 + P_3P_6) \\ &= (P_1 + P_2P_3)(P_4 + P_2P_6)P_5 + (P_1 + P_2P_3)(P_4 + P_2P_6)P_3P_6 \\ &= (P_1 + P_2P_3)P_4P_5 + (P_1 + P_2P_3)P_2P_5P_6 \\ &+ (P_1 + P_2P_3)P_4P_3P_6 + (P_1 + P_2P_3)P_2P_3P_6 \\ &= P_1P_4P_5 + P_2P_3P_4P_5 + P_1P_2P_5P_6 + P_2P_3P_5P_6 \\ &+ P_1P_3P_4P_6 + P_2P_3P_4P_6 + P_1P_2P_3P_6 + P_2P_3P_6 \end{aligned}$$

donde para simplificar hemos usado $(x + y)(x + z) = x + yz$ (ley distributiva) y $x + xy = x$ (ley de absorción). Por tanto, para dar la expresión mínima que buscamos nos basaremos en:

columna 1			columna 2		
4	0100	✓	{4,5}	010_	*
5	0101	✓	{4,12}	_100	*
12	1100	✓	{5,7}	01_1	*
7	0111	✓	{12,14}	11_0	*
14	1110	✓	{7,15}	_111	*
15	1111	✓	{14,15}	111_	*

Figura 8: Generación de implicantes primos

		4	5	7	12	14	15
{4,5}	010_	○	○				
{4,12}	_100	○			○		
{5,7}	01_1		○	○			
{12,14}	11_0				○	○	
{7,15}	_111			○			○
{14,15}	111_					○	○

Figura 9: Tabla de implicantes primos

pseudónimo	implicante	patrón	representa
p_1	{4,5}	010_	$\bar{x}y\bar{z}$
p_2	{4,12}	_100	$y\bar{z}\bar{u}$
p_3	{5,7}	01_1	$\bar{x}yu$
p_4	{12,14}	11_0	$xy\bar{u}$
p_5	{7,15}	_111	yzu
p_6	{14,15}	111_	xyz

y será cualquiera de las siguientes 2 opciones:

implicantes			$f(x,y,z,u)$
p_1	p_4	p_5	$\bar{x}y\bar{z}+xy\bar{u}+yzu$
p_2	p_3	p_6	$y\bar{z}\bar{u}+\bar{x}yu+xyz$

El costo de cualquiera de estas expresiones de f es:

- $+$: 1
- $\cdot$: 3
- entradas: 12
- total: 16

También $f(x,y,z,u)=y(\bar{x}\bar{z}+x\bar{u}+zu)$ que vuelve a tener costo 16.

□