La Fórmula
de
Bailey-Borwein-Plouffe

Wikipedia

1 de marzo de 2019

Resumen

En este artículo se desmuestra la fórmula BBP y se explica cómo calcular con ella dígitos calcular el enésimo dígito de π en base 2 (ó 16) sin necesidad de hallar los precedentes.

Índice

1. Introducción

La *fórmula de Bailey-Borwein-Plouffe* (o *fórmula BBP*) permite calcular el enésimo dígito de π en base 2 ó 16 sin necesidad de hallar los precedentes, de una manera rápida y utilizando muy poco espacio de memoria en la computadora. *Simon Plouffe* junto con *David Bailey* y *Peter Borwein* hallaron esta fórmula el 19 de septiembre de 1995 usando un programa informático llamado `PSLQ` que busca relaciones entre números enteros.

La fórmula BBP tiene la siguiente expresión:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

La demostración de esta igualdad se encuentra más abajo.

2. Demostración de la Fórmula BBP

Lema 2.1. *Para todo número natural n se cumple:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{x^{n-1}}{1-x^8} \right) dx$$

Demostración. Sea n un número natural cualquiera. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+n)} &= \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k+n}}{8k+n} \\
&= \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{8k+n}}{8k+n}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{8k+n-1}\,dx\right) \\
&= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{8k+n-1}\right) dx \\
&= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (x^8)^k\right) dx \\
&= \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^{n-1} \frac{1}{1-x^8}\right) dx
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. *Es cierta la siguiente igualdad (denominada fórmula BBP):*

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Demostración. Son ciertas las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+1)} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+4)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+5)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+6)} \\
&= 4\left(\sqrt{2}^1 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{1-1}}{1-x^8}\,dx\right) - 2\left(\sqrt{2}^4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{4-1}}{1-x^8}\,dx\right) - \left(\sqrt{2}^5 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{5-1}}{1-x^8}\,dx\right) \\
&- \left(\sqrt{2}^6 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{6-1}}{1-x^8}\,dx\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,dx
\end{aligned}$$

Haremos ahora el cambio de variable:

$$\begin{cases} y = x\sqrt{2} \\ dy = dx\sqrt{2} \end{cases}$$

Sustituyendo resulta lo siguiente:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{4\sqrt{2}-\frac{8}{\sqrt{2}^3}y^3-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}^4}y^4-\frac{8}{\sqrt{2}^5}y^5}{1-\frac{1}{\sqrt{2}^8}y^8} \right) \frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$= 16\int_0^1 \frac{4-2y^3-y^4-y^5}{16-y^8}\,dy$$

$$= 16\int_0^1 \frac{y-1}{(y^2-2y+2)(y^2-2)}\,dy$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$= \int_0^1 \left(\frac{8-4y}{y^2-2y+2} + \frac{4y}{y^2-2} \right) dy$$

$$= -2\int_0^1 \frac{2y-2}{y^2-2y+2}\,dy + 4\int_0^1 \frac{1}{1+(y-1)^2}\,dy + 2\int_0^1 \frac{2y}{y^2-2}\,dy$$

$$= -2[\ln(y^2-2y+2)]_0^1 + 4[\arctan(y-1)]_0^1 + 2[\ln(2-y^2)]_0^1$$

$$= -2\ln(1) + 2\ln(1) + 4\arctan(0) - 4\arctan(-1) + 2\ln(1) - 2\ln(2)$$

$$= 4\arctan(1)$$

$$= \pi$$

$\square$

3. Uso de la Fórmula para Calcular los Decimales del Número π

A continuación se muestra el cálculo del enésimo dígito hexadecimal de π. Primero se debe observar que el dígito ubicado en la posición $N+1$ de π en base 16 es el mismo que el primer dígito hexadecimal de $16^N\pi$. En efecto, como en la base 10, multiplicar un número en base 16 por 16 equivale a desplazar la coma decimal un lugar hacia la derecha. De esta manera, multiplicando por 16^N la coma se desplaza N lugares hacia la derecha. El problema original se reduce al cálculo del primer dígito de $16^N\pi$. Usando la fórmula BBP :

$$16^N\pi = \sum_{k=0}^{\infty} 16^{N-k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

El cálculo de los primeros dígitos hexadecimales a la derecha de la coma de este número no es sencillo por dos razones: el número es muy grande y la suma es infinita.

Definición 3.1. Sea N un número natural no nulo y a un número natural. Definimos $S_N(a)$, $A_N(a)$ y $B_N(a)$ por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S_N(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{N-k}}{8k+a} \\ A_N(a) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{16^{N-k}}{8k+a} \\ B_N(a) &= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{16^{N-k}}{8k+a} \end{aligned}$$

Observación 3.1. Para tódo número natural N no nulo y todo número natural:

$$S_N(a) = A_N(a) + B_N(a)$$

El cálculo de los primeros dígitos hexadecimales de $S_N(a)$ permitirá obtener los de $16^N\pi$, a través de la relación:

$$16^N\pi = 4S_N(1) - 2S_N(4) - S_N(5) - S_N(6)$$

3.1. Cálculo de $B_N(a)$

Aunque $B_N(a)$ es una suma infinita, es muy fácil de calcular porque sus términos son pequeños y decrecen rápidamente. En efecto:

- el prmer término de la suma es $b_N = 1/(8N+a)$. Si se busca el enésimo dígito hexadecimal de π (digamos, por ejemplo, $N = 1000000000$), el primer término es mucho menor que 1.
- Además, cada término tiene un cero más a la derecha de la coma que el precedente, porque para $k \geqslant N$, $b_k > 16b_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{b_k}{b_{k+1}} &= \frac{16^{N-k}}{16^{N-(k+1)}} \frac{8(k+1)+a}{8k+a} \\ &= 16\left(1 + \frac{8}{8k+a}\right) \longrightarrow 16^+ \end{aligned}$$

Finalmente, la suma $B_N(a)$ es de la forma (en el peor caso):

$$\begin{aligned} B_N &= 0,**********\ldots \\ &+ 0,0*********\ldots \\ &+ 0,00********\ldots \\ &+ 0,000*******\ldots \end{aligned}$$

Por lo tanto, para obtener $B_N(a)$ con una precisión de P cifras detrás de la coma, es suficiente calcular los P primeros términos de la suma, agregándose algunos términos más para eviatar errores que aparecen al realizar cálculos con valores aproximados. Así, se calcula:

$$B'_N = \sum_{k=N}^{N+P+10} \frac{16^{N-k}}{8k+a}$$

Como esta suma posee una pequeña cantidad de términos, el tiempo que insume esta operación es insignificante para la computadora.

3.2. Cálculo de $A_N(a)$

El problema para el cálculo de $A_N(a)$ es que los primeros términos son muy grandes (N cifras de base 16 antes de la coma). Sin embargo, al igual que las primeras cifras detrás de la coma, no importa la parte entera, que también es grande. Por lo tanto, puede "eliminarse" usando aritmética modular.

Toda la dificultad se reduce a hallar la parte fraccionaria de $16^{N-k}/(8k+a)$. Para ello realizamos la división entera de 16^{N-k} entre $(8k+a)$. Sabemos que existen números enteros q y r tales que:

- $16^{N-k} = q(8k+a) + r$
- $0 \leqslant r < 8k + a$

Por tanto:

$$\frac{16^{N-k}}{8k+a} = q + \frac{r}{8k+a}$$

siendo $r/(8k+a) < 1$ y por tanto es la parte fraccionaria de $16^{N-k}/(8k+a)$ y

$$\frac{r}{8k+a} = \frac{16^{N-k} \mod (8k+a)}{8k+a}$$

Utilizando el método de la exponenciación binaria, $16^{N-k} \mod (8k+a)$ se calcula rápidamente (con un tiempo de ejecución de $O(\log_2(N-k))$.

3.3. Conclusión

Al fin y al cabo, para obtener los primeros dígitos de π en base 16 (ó 2) se deben calcular los primeros dígitos de:

$$\pi_N = 4S'_N(1) - 2S'_N(4) - S'_N(5) - S'_N(6)$$

donde

$$S'_N(a) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{16^{N-k} \mod (8k+a)}{8k+a} + \sum_{k=N}^{N+P+10} \frac{16^{N-k}}{8k+a}$$

4. Complejidad del Método

Para calcular el enésimo dígito de π en base 16 (ó el $4n$-ésimo dígito en base2):

Complejidad Temporal

- $B'_N(a)$; se calcula con complejidad lineal $O(1)$
- $A'_N(a)$; utilizando el método de la exponenciación binaria, sus términos se calculan en $O(\log_2(n))$. Así la suma de n términos, $A'_N(a)$, se calcula en $O(n\log_2(n))$.

Así $S'_N(a)$ se calcula en

$$O(1) + O(n\log_2(n)) = O(n\log_2(n))$$

Finalmente, π_n se calcula en

$$4\,O(n\log_2(n)) = O(n\log_2(n))$$

Así pues, si el tiempo de cálculo es proporcional a $n\log_2(n)$, es casi lineal.

Complejidad Espacial

La complejidad en el uso de memoria es constante, ya que sólo se realizan sumas sucesivas de pequeños números (con una precisión de unos diez decimales es suficiente).

5. Fórmulas Derivadas

- Fórmula original:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

- Para todo $r \in \mathbb{C}$:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4+8r}{8i+1} - \frac{8r}{8i+2} - \frac{4r}{8i+3} - \frac{2+8i}{8i+4} - \frac{1+2r}{8i+5} - \frac{1+2r}{8i+6} + \frac{r}{8i+7}\right)$$

- Cáculo de $\pi\sqrt{2}$:

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+3}\right)$$

- Expresión de π^2:

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2} \right)$$

- Expresión de π^2:

$$\pi^2 = \frac{9}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i} \left(\frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2} \right)$$

- La siguiente expresión permite hallar dígitos aislados de π^2 en base 3 ó 9:

$$\pi^2 = \frac{2}{27} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{729^i} \left(\frac{243}{(12i+1)^2} - \frac{405}{(12i+2)^2} - \frac{81}{(12i+4)^2} - \frac{27}{(12i+5)^2} - \frac{72}{(12i+6)^2} - \frac{9}{(12i+7)^2} - \frac{9}{(12i+8)^2} - \frac{5}{(12i+10)^2} - \frac{1}{(12i+11)^2} \right)$$

- Viktor Adamchick y Stan Wagon (1997):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i} \left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3} \right)$$

- Fabrice Bellard

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{10i}} \left(-\frac{32}{4i+1} - \frac{1}{4i+3} + \frac{256}{10i+1} - \frac{64}{10i+3} - \frac{4}{10i+5} - \frac{4}{10i+7} + \frac{1}{10i+9} \right)$$

6. Los Récords

Para poder comparar, hasta el año 2008 se habían obtenido los primeros $1,241$ billones de decimales de π (aproximadamente $4,123$ billones de bits):

- 7 de octubre de 1996 (Fabrice Bellard): dígito número 400 mil millones en base 2.
- septiembre de 1997 (Fabrice Bellard): billonésimo dígito en base 2.
- febrero de 1999 (Colin Percival): dígito número 40 billones en base 2
- 2001: dígito número 4000 billones en base 2
- 2011: dígito número 10 billones en base 2

7. Cálculo del enésimo decimal

Actualmente, no existe ninguna fórmula eficaz para hallar el enésimo decimal de π en base 10. *Simon Plouffe* ha desarrollado en diciembre de 1996, a partir de una serie muy antigua que calcula π basado en los coeficientes de binomio de Newton, un método para calcular cifras aisladas base 10, pero debido a su complejidad $O(n^3 \log_2(n))$ pierde su utilidad en la práctica. Fabrice Bellard ha mejorado el algoritmo para alcanzar un nivel de complejidad en $O(n^2)$, pero no es suficiente para competir con los métodos convencionales que calculan todos los decimales.

Referencias

[1] Bailey, D.H., Borwein, J.M., Borwein, P.B., and Plouffe, S. The Quest for Pi. *Mathematical Intelligencer*, 16(1):50–57, january 1997.