INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR DE CHICONTEPEC

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

NOMBRE DE LA MATERIA:

Métodos Numéricos

SEMESTRE:

4º semestre

NOMBRE DEL ALUMNO:

Carlos Humberto Tejeda Osorio.

NOMBRE DEL DOCENTE:

Ing. Efrén Flores Cruz

TRABAJO:

Resumen unidad 5.

Chicontepec, Ver 29 de abril de 2020

Unidad 5

Polinomio de interpolación de Newton

Utilizar la matriz de Vandermonde para muchos nodos no es buena idea ya que el tiempo de calculo para matrices grandes es excesivo. Es mucho más sencillo utilizar el metodo clásico de las diferencias divididas de Newton. Recordemos su definición, para dos nodos, se llama diferencia dividida de orden uno a:

$$f[X_0, X_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Mientras que la diferencia dividida de orden n se obtiene por recurrencia a partir de las anteriores como:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

El polinomio de Newton en diferencias divididas es entonces:

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[[x_0, x_1]] + + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

El polinomio de interpolación con diferencias divididas de Newton, entre otros es la forma más popular además de las más útil

POLINOMIO DE INTERPOLACION DE LAGRANGE.

En analisis numerico, el polinomio de Lagrange, es el Polinomio que interpola un conjunto de puntos dado en la forma de Lagrange.
Dado que existe un unico polinomio interpolador para un determinado conjunto de puntos, resulta algo confuso llamar a este polinomio el polinomio interpolador de Lagrange. Un nombre mas conciso es interpolación polinomica en la forma de Lagrange.

Se trata de encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \ldots (x_n, f(x_n))$, se construye un cociente $L_{n,k}(x_k)$ con la propiedad de que:

$$L_{n,k}(x_i) = 0 \text{ cuando } i \neq k \text{ y } L_{n,k}(x_k) = 1$$

Se requiere entonces que el numerador contenga.

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$$

Teorema:
Si $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, son $n+1$ numeros distintos y si f es una funcion cuyos valores estan dados en esos numeros, entonces existe un polinomio de grado a lo mas n, con la propiedad de que

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Este polinomio esta dado por:

$$(x_0)L_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

INTERPOLACIÓN SEGMENTADA.

Esta interpolación se llama interpolación segmentaria o interpolación por splines. La idea central es que envez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación.

Cabe mencionar que entre todas, las splines cubicas han resultado ser las mas adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente.

Asi pues, podemos decir de manera informal, que una funcion spline está formada por varios polinomios cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad.

Interpolación Segmentarial Lineal.

Este es el caso mas sencillo. En el, vamos a interpolar una funcion $f(x)$ de la que se nos dan un numero N de pares $(x, f(x))$ por los que tendra que pasar nuestra funcion polinomica $P(x)$. Esta serie de funciones nuestras van a ser lineales esto es, con grado 1: de la forma $P(x) = ax + b$

Definiremos una de estas funciones por cada par de puntos adyacentes, hasta un total de $(N-1)$ funciones haciendolas pasar obligatoriamente por los puntos que van a determinarlas, es decir, la funcion $P(x)$ sera el conjunto de segmentos que unen nodos consecutivos; es por ello que nuestra funcion sera continua en dichos puntos, pero no derivable en general.

Interpolación segmentaria cuadrática.

En este caso, los polinomios $P(x)$ a través de los que construimos el spline tienen grado 2 esto quiere decir que va a tener la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ Como en la interpolación segmentaria lineal, vamos a tener N-1 ecuaciones (donde N son los puntos sobre los que se define la función.). La interpolación cuadrática nos va a asegurar que la función que nosotros generemos a trozos con los distintos $P(x)$ va a ser continua, ya que para sacar las condiciones que ajusten el polinomio, vamos a determinar como condiciones.
Que las partes de la función a trozos $P(x)$ pasen por ese punto. Es decir, que las dos $P_n(x)$ que rodean al $f(x)$ que queremos aproximar, sean igual a $f(x)$ en cada uno de los puntos.
Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos lados de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

REGRESION Y CORRELACION

Muy a menudo se encuentra en la practica que existe una relación entre dos o mas variables por ejemplo los pesos de los hombres adultos depende de cierto modo de sus alturas.

Si todos los valores de las variables cumplen exactamente una relación exacta; entonces se dice que las variables estan perfectamente correlacionadas o que hay una correlacion perfecta entre ellas o, mas sencillamente, que existe una función o una formula que las relaciona.

Por tanto, averiguar la correlación entre dos variables se refiere siempre a Hallar una medida de la relación entre esas dos variables.

Cuando se trata de dos variables solamente, se habla de correlación simple y cuando se trata de mas de dos variables se habla de correlación multiple.

Ahora, Hallar una regresión entre dos variables se refiere siempre a Hallar una formula o ecuacion que represente la relación aproximada entre esas dos variables.

Para estudiar y medir la relación entre dos variables, el primer paso es recoger los datos que muestren los correspondientes valores de las variables consideradas.

MINIMOS CUADRADOS

Minimos cuadrados es un metodo que propociona una forma de encontrar la mejor estimación suponiendo que los errores (es decir, las diferencias con respecto al valor verdadero) sean aleatorias e imparciales.
podemos decir que es un procedimiento de analisis numerico en la que, dados un conjunto de datos (pares ordenados y familia de funciones) se intenta determinar la función continua que mejor se aproxime a los datos (línea de regresion o la linea de mejor ajuste), proporcionando una demostración visual de la relación entre los puntos de los mismos. En su forma mas simple, busca minimizar la suma de cuadrados de las diferencias ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función y los correspondientes datos.
Este metodo se utiliza comunmente para analizar una serie de datos que se obtengan de algun estudio, con el fin de expresar su comportamiento de manera lineal y asi minimizar los errores de los datos tomados.
Su expresión general se basa en la ecuación de una recta $y = mx + b$. Donde m es la pendiente y b el punto de corte, y vienen expresadas de la siguiente manera:

$$m = \frac{n \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2} \qquad b = \frac{\Sigma y \cdot \Sigma x^2 - \Sigma x \cdot \Sigma(x \cdot y)}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2}$$

Σ es el símbolo sumatoria de todos los términos, mientras (x, y) son los datos en estudio y n la cantidad de datos que existen.
El método de mínimos cuadrados calcula a partir de los N pares de datos experimentales (x, y), los valores m y b que mejor ajustan los datos a una recta.

EJERCICIO

CALCULAR EL POLINOMIO DE LAGRANGE USANDO LOS SIGUIENTES DATOS.

X	1	-3	5	7
Y	-2	1	2	-3

Para solucionar el problema deberemos aplicar la siguiente fórmula.

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

donde

$$l_0(x) = \frac{(x+3)(x-5)(x-7)}{(1+3)(1-5)(1-7)} = \frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{96}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(-4)(-8)(-10)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{-320}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{(5)(8)(-2)} = \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{-80}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{(6)(10)(2)} = \frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{120}$$

sostituyendo, el polinomio de Lagrange queda definido como sigue:

$$f(x) = -2\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{96} + \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{-320} + 2\frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{-80} - 3\frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{120}$$

simplificamos, y obtenemos.

$$f(x) = -\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{48} - \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{320} - \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{40} - \frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{40}$$

Tras realizar las diferentes operaciones la ecuacion resultante quedara de la siguiente forma:

$$f(x) = -0.0739x3 + 0,3906x2 + 0.624x - 2,978$$