Facultad de Matemáticas

Procesos Estocásticos

Profesor: Jose Vidal Alcalá Burgos

“Proyecto Final”

Equipo:

Cristian Domínguez Gonzalez

Cristofer Torres Tinal

Carlos Trinidad Rodriguez

Ejercicio 1.

Parámetros:

$$L=1000 \qquad T=2$$

$$\sigma^2=0.3 \qquad N=2^M$$

$$\alpha=-0.1 \qquad dt=\frac{T}{N}$$

$$M=11$$

Puente Browniano (PB). Para este ejercicio se necesita estimar la probabilidad de que el PB cruce el nivel α antes del tiempo final T. Sabemos que el punto que esta entre 0 y 2 tiene:

$$P(1) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Y el punto entre 0 y 1 es:

$$P(\frac{1}{2}) \sim N\left(\frac{1}{2}P(1), \frac{\sigma^2}{4}\right)$$

De manera general obtenemos:

$$P\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}T\right) \sim N\left(\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2k}{2^{n+1}}T\right)+P\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}T\right)\right], \frac{\sigma^2}{2^{n+2}}T\right)$$

Donde n es el nivel y $k=0,\ldots,2^n-1$.

Creamos una función bridge() basándonos en la fórmula anterior para construir el PB.

En la primera parte de la función declaramos los parámetros necesarios, ahí se encuentran los vectores **argument** y **val**, donde uno contiene los valores de $\frac{2k+1}{2^{n+1}}T$ y el otro $P\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}T\right)$ respectivamente. Sabiendo que $P(0)=P(2)=0$ asignamos sus respectivos valores.

En la segunda parte, tenemos dos **for** anidados. El primero representa el nivel (n). El segundo representa el número de puntos en el nivel n, aquí se encuentran **indice1** e **indice2** tienen asignados los valores de $\frac{2k}{2^{n+1}}T$ y $\frac{2k+2}{2^{n+1}}T$ respectivamente, buscamos la posición de esos índices en **argument**, que es igual a la posición de su valor en **val**. Así calculamos el valor en $P\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}T\right)$.

En la tercera parte, ordenamos de menor a mayor todos los valores de $P\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}T\right)$ y representamos los datos en forma de puntos equidistantes en el tiempo con ts.

En la cuarta y última parte, se calculan las 1000 muestras del PB, y si el mínimo del puente es menor a α entonces **hits** aumenta en uno. Por lo tanto la probabilidad es

$$\frac{hits}{L}$$

Para calcular el valor de M utilizamos la siguiente formula:

$$O(\sqrt{dt}) \simeq O\left(\sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)}\right)$$

$$\sqrt{dt} \simeq \sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)}$$

$$dt \simeq \frac{1}{L}$$

y sabemos que:

$$dt = \frac{T}{N} = \frac{T}{2^m}$$

al sustituir y despejar nos queda la siguiente formula:

$$T\,L \simeq 2^m$$

Aplicando logaritmo base dos en ambos lados obtenemos el valor de m:

$$\log_2(TL) \simeq \log_2(2^m)$$

$$m \simeq \log_2(2 * 1000)$$

$$m \simeq 10.9657$$

Finalmente utilizamos el valor entero mas cercano a m, que en este caso es 11.

Ejercicio 2.

Similar al “Ejercicio 1”
Utilizaremos la librería “sde” para usar la función BBridge(), la cual toma como parámetros de entrada

$$x_0 = Valor\ inicial$$
$$y_0 = Valor\ final$$

$$t_0 = Tiempo\ inicial$$
$$T = Tiempo\ final$$
$$N = Número\ de\ subintervalos$$

La función BBridge() generará un PB con $\sigma = 1$, por lo que para ajustarlo a las condiciones del “Ejercicio 1” multiplicamos BBridge() por $\sqrt{0.3}$.

Verificamos cuantos de los Puentes Brownianos generados son menores a α y guardamos ese número en **hits**.

Calculamos la probabilidad mediante

$$\frac{hits}{L}$$

Ejercicio 3.

Parámetros:

$L=200000$ $s0=100$

$hits=0$

Donde hits son las veces en las que $S(T)>S_0$ y L es el número de muestras.

El problema pide calcular la $P(S(T)>S_0)$.

Solución:

Dentro del **for** se usan las siguientes dos fórmulas:

$$B(T)\sim\sqrt{T}\,N(0,1) \text{ y } S(T)=S_0 e^{\left[(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma B(T)\right]}$$

y se hace un muestreo hasta L en el si $S(T)>S_0$ **hits** aumenta, así la probabilidad queda definida por:

$$\frac{hits}{L}$$

Calcular analíticamente

$$P(S(T) > S_0)$$

$$S(t) = S_0 e^{\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)\right]}$$

$\sigma^2 = 0.30$
$T = 0.5$

$S_0 = 100$
$\mu = 0.05$

Solución:

Sabemos que

$$S(t) \sim N(0, \sigma^2 T)$$

Para calcular analíticamente la probabilidad transformamos $S(t)$ a una normal estándar restando su media y dividiendo por su desviación estándar.

$$P(S(T) > S_0) = P\left(S_0 e^{\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B(T)\right]} > S_0\right)$$

$$= P\left(e^{\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B(T)\right]} > 1\right)$$

$$= P\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B(T) > 0\right)$$

$$= P\left(\sigma B(T) > -(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T\right)$$

$$= P\left(B(T) > \frac{-(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{B(T)}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{-(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma^2\sqrt{T}}\right)$$

$$= P(z > 0.12909)$$

$$= 0.448643$$