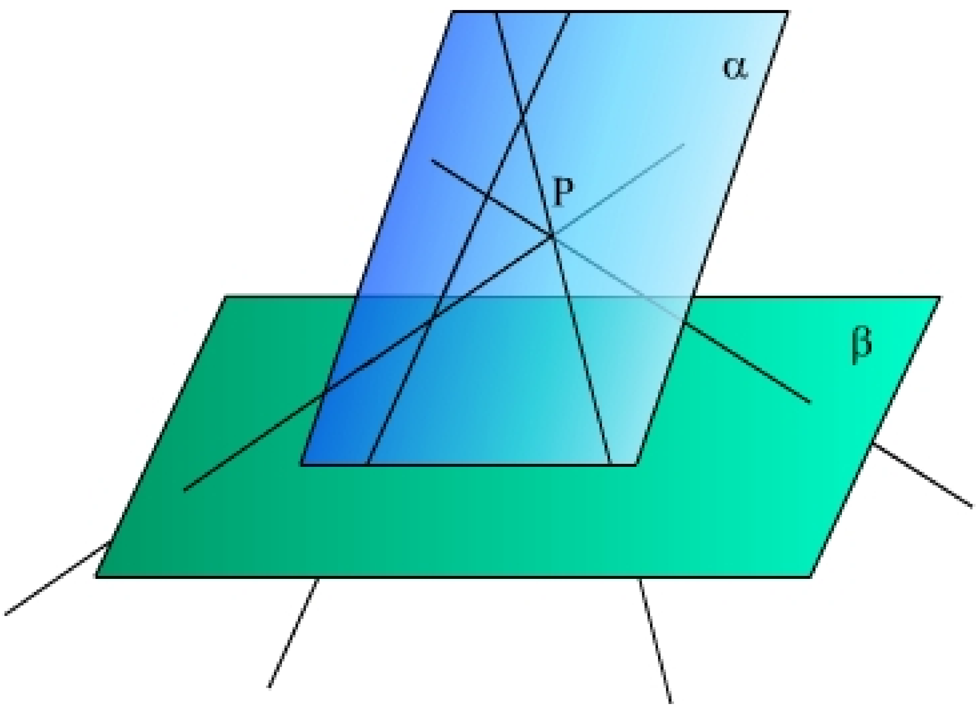
Retas e Planos



Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

2000

Introdução

Este texto é uma versão revisada e atualizada do texto " Retas e Planos" de autoria das professoras Ana Maria Santos Costa, Heliacy Coelho Souza e Maria Christina Fernandes Cardoso. Esta versão, do mesmo modo que a primeira, é um recurso didático utilizado na Disciplina Matemática Básica II - Mat. 002 do Departamento de Matemática da UFBA.

Esperamos contar com o auxílio dos leitores através de críticas, sugestões e correções.

Salvador, 01 de novembro de 1999

As autoras,

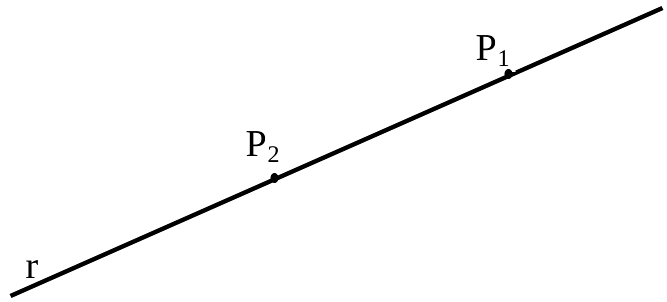
Maria Christina Fernandes Cardoso
Sonia Regina Soares Ferreira
Verlane Andrade Cabral

Índice

CAPÍTULO I – EQUAÇÕES DA RETA

1.1 Equação vetorial

Um dos axiomas da geometria euclidiana diz que dois pontos distintos determinam uma reta. Seja r a reta determinada pelos pontos P_1 e P_2.

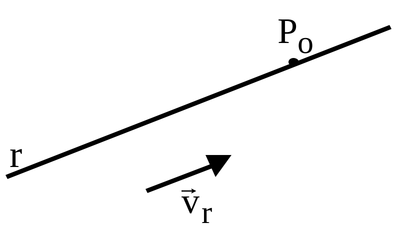


Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são colineares. Como P_1 e P_2 são distintos, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é não nulo, então existe um escalar λ tal que $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$. Assim, P pertence a r se, e somente se, $P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2};\ \lambda \in IR$. Podemos então concluir que todo ponto da reta r satisfaz à equação:

$$\mathbf{X = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2};\quad \lambda \in IR},$$

que é chamada de **equação vetorial** da reta r.

Observemos que o fundamental na determinação da equação vetorial de uma reta, é conhecermos um ponto desta reta e um vetor (não nulo) na sua direção. Um vetor na direção da reta r é chamado vetor direção da reta r, e indicado por $\vec{v}_r$.



$r : X = P_o + h\vec{v}_r;\ h \in IR$

Assim, cada escalar h determina um único ponto P pertencente a r e, reciprocamente, para cada ponto de r, existe um único valor real h tal que $P = P_o + h\,\vec{v}_r$.

1.2 Equações paramétricas e simétricas

Fixado um sistema de coordenadas, sejam $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e $\vec{v}_r = (a, b, c)$. A equação vetorial da reta r, determinada por P_o e $\vec{v}_r$ é:

$$r:(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + h\,(a, b, c);\ h \in IR\ ,$$

que equivale ao sistema $r: \begin{cases} x = x_o + h\,a \\ y = y_o + h\,b \\ z = z_o + h\,c \end{cases} ;h \in IR$ ①

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Se $abc \neq 0$, eliminando o parâmetro h do sistema ①, obtemos

$$\mathbf{r: \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}} \quad ②$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas** da reta r.
As equações em ②, poderiam ser obtidas observando o paralelismo que deve existir entre os vetores:

$$\overrightarrow{P_oP} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \text{ e } \vec{v}_r = (a, b, c),\quad abc \neq 0.$$

Exemplos

1. Determine uma equação da reta r que:

a) passa pelos pontos $P_1(3,-1,1)$ e $P_2(2,1,2)$;

b) passa pelo ponto P(4,1,0) e contém representantes do vetor $\vec{u} = (2,6,-2)$.

Solução:

a) Como P_1 e P_2 são distintos, determinam uma reta de equação vetorial

$X = P_1 + h\,\overrightarrow{P_1P_2};\ h \in IR$, isto é, $r:(x, y, z) = (3,-1,1) + h\,(-1,2,1); h \in R$.

b) $r: x-4=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ (equações simétricas da reta).

2. Verifique se o ponto $P(-1,0,2)$ pertence às retas:

a) $r:(x,y,z)=(-7,-3,-7)+h\,(2,1,3);\ h\in IR$

b) $s:\begin{cases} x=-3+h \\ y=-1+h\ ;h\in IR \\ z=2h \end{cases}$

c) $t:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{2}$

Solução:

a) $P\in r$ se, e somente, existe $h_o\in IR$ tal que:

$$(-1,0,2)=(-7,-3,-7)+h_o\,(2,1,3).$$

Ou seja, $(6,3,9)=h_o(2,1,3)$. É fácil verificar que $h_o=3$ torna a igualdade acima verdadeira, logo $P\in r$.

b) $P\in s$ se, e somente, existe $h_o\in IR$ tal que $\begin{cases} -1=-3-h_o \\ 0=-1+h_o \\ 2=2h_o \end{cases}$
o que é impossível, pois, da primeira equação temos $h_o=-2$ e da segunda $h_o=1$. Logo, $P\notin s$.

c) $P\in t$ se, e somente, $\dfrac{-1+1}{2}=\dfrac{0}{3}=\dfrac{2-4}{2}$. Como $0\neq -1$ temos que $P\notin t$.

3. Seja $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=z$. Determine uma equação de r nas formas vetorial e paramétrica.

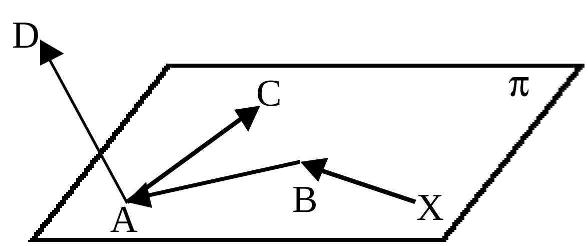
Solução:

Das equações simétricas de r temos $\vec{v}_r = (2,4,1)$ e $P(1,-2,0)$ é um ponto da reta r. Assim, $(x, y, z) = (1,-2,0) + h\,(2,4,1);\ h \in IR$ e $\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = -2 + 4h\,;\, h \in IR \\ z = h \end{cases}$, são equações da reta r nas formas vetorial e paramétrica, respectivamente.

CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DO PLANO

2.1 Equação Vetorial

Um dos axiomas da Geometria Espacial nos diz que três pontos não colineares determinam um plano. Consideremos então π o plano determinado pelos pontos A, B e C. Desejamos encontrar uma condição necessária e suficiente para que um ponto X pertença ao plano π. Observemos então que, como A, B e C são não colineares, os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes com representantes em π. Portanto, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{XB}$ é coplanar com os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Assim, existem escalares t e h tais que $\overrightarrow{XB} = t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}$.

Daí, um ponto X pertence ao plano π se, e somente se,

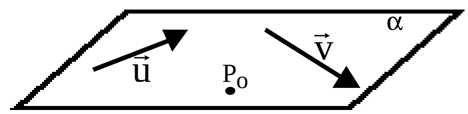
$$X = B + t\,\overrightarrow{BA} + h\,\overrightarrow{AC}\,;\ t, h \in IR.$$

Esta equação é chamada de **equação vetorial do plano p.**

Observemos que o fundamental na determinação da equação de um plano é conhecermos um ponto deste plano e dois vetores linearmente independentes, com representantes no mesmo. Um vetor com representante em um plano é dito **paralelo** ao plano.

Assim, uma equação vetorial de um plano α paralelo aos vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que passa por P_o é :

$$X = P_o + t\vec{u} + h\vec{v};\ \ t, h \in IR\,.$$



Observemos ainda que para cada ponto X do plano, existe um único par ordenado (t, h) satisfazendo a esta equação e reciprocamente.

2. 2 Equações Paramétricas

Fixemos um sistema de coordenadas do espaço. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores linearmente independentes paralelos ao plano α e $P_o(x_o, y_o, z_o)$ um ponto de α . Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser escrita como:

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2)\ ,\ \ t, h \in IR\,.$$

A equação acima equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t + a_2 h \\ y = y_o + b_1 t + b_2 h\ ; \quad t\,, h \in IR\,. \\ z = z_o + c_1 t + c_2 h \end{cases}$$

As equações deste sistema são chamadas **equações paramétricas do plano a .**

Exemplos

1. Dê uma equação vetorial do plano determinado pelos pontos $A = (1,1,0)\,, B = (-1,2,1)$ e $C = (3,2,1)$.

Solução:

Como os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2,1,1)$ e $\overrightarrow{CA} = (-2,-1,-1)$ são linearmente independentes, os pontos A, B e C não são colineares, logo determinam um único plano. Uma equação vetorial do plano ABC é :

$$(x, y, z) = (1,1,0) + t(-2,1,1) + h(2,1,1) \ ; \ \ t, h \in IR$$

2. Dê as equações paramétricas do plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (-1,2,1)$, $\vec{v} = (1,0,3)$ e que passa pelo ponto $P = (2,4,-1)$.

Solução:

Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes então P, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam um plano de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - t + h \\ y = 4 + 2t \qquad ; \qquad t,\ h \in IR \\ z = -1 + t + 3h \end{cases}$$

3. Dê uma equação vetorial do plano β, dado a seguir;

$$\beta : \begin{cases} x = 1 + 2h - t \\ y = -2 + h + 3t \quad ; \qquad t, h \in IR \\ z = 3 + 5h \end{cases}$$

Solução:

Das equações paramétricas de β temos que $P = (1,-2,3)$ é um ponto de β e os vetores $\vec{u} = (2,1,5)$ e $\vec{v} = (-1,3,0)$ são linearmente independentes com representantes em β. Assim, uma equação vetorial de β é dada por ;

$$\beta : \ (x, y, z) = (1,-2,3) + t(2,1,5) + h(-1,3,0) \ ; \ \ t, h \in IR \ .$$

4. Determine as equações paramétricas do plano α paralelo ao vetor $\vec{u} = (5,1,2)$ e que passa pelos pontos $A = (3,-1,1)$ e $B = (2,-1,0)$.

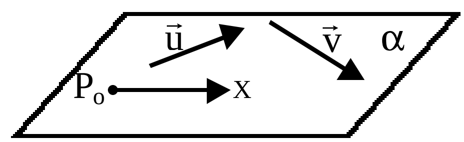
Solução:

Observemos que os vetores $\vec{u} = (5,1,2)$ e $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1)$ são linearmente independentes com representantes no plano α . Assim, as equações paramétricas de α são:

$$\alpha : \begin{cases} x = 3 + 5h - t \\ y = -1 + h \\ z = 1 + 2h - t \end{cases} \quad ; \ t, h \in IR.$$

2. 3 Equação Geral

Seja α o plano determinado pelo ponto $P(x_o, y_o, z_o)$ e pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Lembremos que um ponto X(x, y, z) pertence a α se, somente se, os vetores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares.



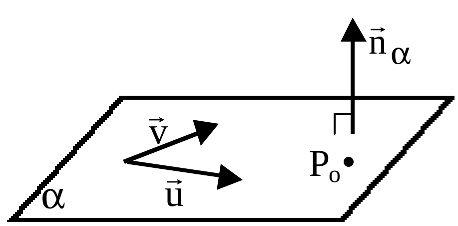
Assim, $[\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$, ou seja, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{P_oX} = 0$. Considerando $\vec{u} \times \vec{v} = (a, b, c)$, podemos escrever:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$ax + by + cz + d = 0 \ , \qquad ①$$

onde $d = -(ax_o + by_o + cz_o)$. A equação ① é chamada de **equação geral do plano α.**



Dizemos que um vetor não nulo é **normal** a um plano se, somente se, é ortogonal a todos os vetores que possuem representantes neste plano. É usual indicarmos um vetor normal ao plano α por $\vec{n}_\alpha$.

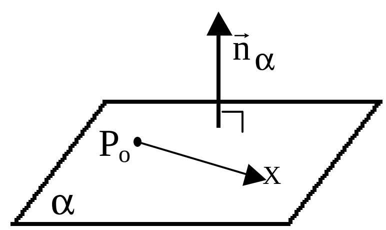
Observemos que os coeficientes **a**, **b** e **c** da equação geral do plano α correspondem às coordenadas de um vetor normal a este plano.

Exemplos

1. Determine uma equação geral do plano α que passa pelo ponto $P=(3,-1,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(-1,1,2)$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$.

Solução 1:
Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e têm representantes em α, podemos considerar $\vec{n}_\alpha$ paralelo ao produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}=(2,2,0)$. Considerando $\vec{n}_\alpha=(2,2,0)$, uma equação geral do plano α tem a forma $2x+2y+d=0$, para um certo valor real de d. Como o ponto P pertence ao plano α suas coordenadas satisfazem a esta equação, assim temos: $2.3+2.(-1)+0.2+d=0$, daí, $d=-4$. Logo, $2x+2y-4=0$ é uma equação do plano α.

Solução 2:
Seja $\vec{n}_\alpha=(1,1,0)$ e X um ponto genérico de α.



Então, $\overrightarrow{P_oX}\cdot\vec{n}_\alpha=0$, ou equivalentemente,

$$(x-3,y+1,z-2)\cdot(1,1,0)=0.$$

Daí, uma equação geral do plano α é $x+y-2=0$.

2. Determine um vetor normal ao plano α nos seguintes casos:

a) $\alpha: X=(1,0,1)+t(2,-1,3)+h(1,1,0)$; $t,h\in IR$.

b) $\alpha:\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+2t-h;\quad t,h\in IR.\\ z=-t+2h\end{cases}$

c) $\alpha: 2x-3y+z-1=0$

Solução :

a) $\vec{n}_\alpha=(2,-1,3)\times(1,1,0)=(-3,3,3)$

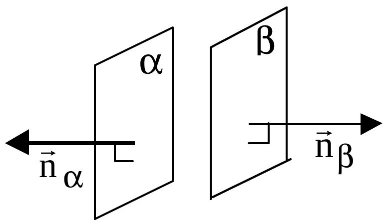
b) $\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)\times(0,-1,2)=(3,-6,-3)$

c) $\vec{n}_\alpha=(2,-3,1)$

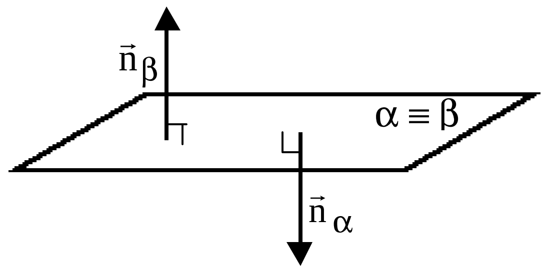
CAPÍTULO III - POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

No espaço IR^3, dois planos α e β são paralelos ou concorrentes. Se os planos α e β são paralelos temos:

Paralelos distintos : $\alpha \cap \beta = \phi$



Paralelos coincidentes : $\alpha \equiv \beta$



Observemos que dois planos são paralelos se, somente se , seus vetores normais são paralelos. Consideremos $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Temos que α e β são paralelos se, somente se, existe um real k tal que:

$$\begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \\ c_1 = kc_2 \end{cases}$$

Se os planos α e β são paralelos e, além disso, possuem um ponto em comum, então eles são coincidentes. Suponhamos que $P(x_1, y_1, z_1)$ seja esse ponto comum. Assim, as coordenadas de P satisfazem às equações de α e β :

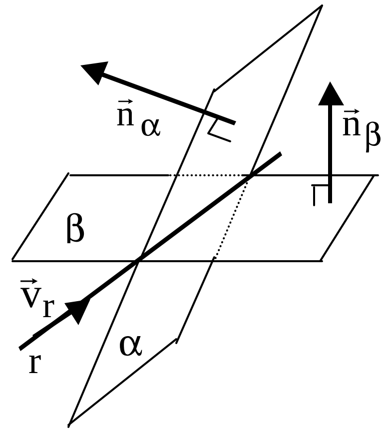
$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} ka_2x_1 + kb_2y_1 + kc_2z_1 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Daí, $d_1 = k(-a_2x_1 - b_2y_1 - c_2z_1)$. Logo, $d_1 = kd_2$.

Se os vetores normais dos planos α e β não são paralelos, então estes planos são concorrentes. Neste caso, eles se interceptam segundo uma reta r. Assim, um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, somente se, suas coordenadas satisfazem ao sistema:

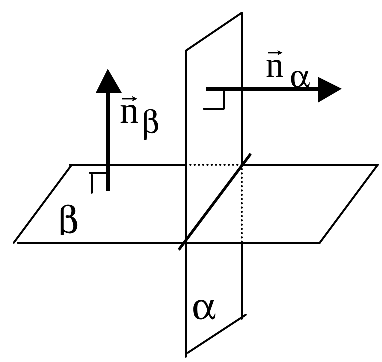


$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema é denominado **equação geral da reta r.**

Observemos que um vetor direção da reta r ,$\vec{v}_r$, possui representantes nos planos α e β. Daí, $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{n}_\alpha$ e ortogonal a $\vec{n}_\beta$. Podemos concluir então que $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são ortogonais dizemos que os planos α e β são perpendiculares. Assim, dois planos são perpendiculares se, somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos planos:

a) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ e $\beta: 4x + 2y - 2z + 2 = 0$.

b) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1);\ t, h \in IR$
e $\beta: 2x + y - z + 1 = 0$.

c) $\alpha:\ X = (1,0,1) + t(2,1,3) + h(0,0,1);\ t, h \in IR$

e $\beta: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t;\quad t, h \in IR \\ z = 2 + 5t - h \end{cases}$

Solução :

a) Observemos que $\vec{n}_\alpha = 2\,\vec{n}_\beta$, assim, os planos α e β são paralelos. Além disso, temos que $d_1 = 2d_2$. Logo, podemos concluir que α e β são coincidentes.

b) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (2,1,3)\times(0,0,1) = (1,-2,0)$ $\vec{n}_\beta = (2,1,-1)$. Como estes vetores não são paralelos, temos que os planos α e β são concorrentes. Se r é a reta interseção de α e β, então a equação geral de r pode ser dada pelo sistema:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Observemos ainda que $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$, assim α e β são perpendiculares.

c) Consideremos os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,-2,0)$ e $\vec{n}_\beta = (-2,4,0)$. Observemos que $\vec{n}_\alpha = -2\,\vec{n}_\beta$, daí, os planos α e β são paralelos. No entanto, $P = (1,0,1)$ pertence ao plano α e não pertence ao plano β. Consequentemente, α e β são estritamente paralelos.

2. Determine uma equação do plano β paralelo a $\alpha : 2x - 6y + 4z - 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (1,0,-2)$.

Solução :

Como o plano β é paralelo ao plano α, temos que $\vec{n}_\beta = k\,\vec{n}_\alpha$, $k \neq 0$. Podemos então considerar $\vec{n}_\beta = (-2,-6,4)$. Assim, podemos escrever: $\beta : 2x - 6y + 4z + d = 0$. Para determinarmos o valor de d basta utilizarmos o fato de que o ponto P pertence a β e por isso, satisfaz a sua equação. Daí, $2.1 - 6.0 + 4.(-2) + d = 0$, ou seja, d = 6. Logo, uma equação geral de β é $2x - 6y + 4z + 6 = 0$.

3. Dados os planos $\alpha : 2x + 4y - z + 1 = 0$ e $\beta : -x + 2y + z + 2 = 0$ determine uma equação vetorial da reta r interseção dos planos α e β.

Solução :

É fácil obtermos uma equação vetorial de uma reta se conhecemos dois de seus pontos. Ora, uma equação geral da reta r pode ser dada pelo sistema:

$$r:\begin{cases}2x+4y-z+1=0\\ -x+2y+z+2=0\end{cases} \qquad ①$$

Assim, basta conseguirmos dois pontos cujas coordenadas satisfaçam a este sistema. Como este sistema é possível e indeterminado, podemos conseguir uma solução considerando $y=0$. Então,

$$\begin{cases}2x-z+1=0\\ -x+z+2=0\end{cases}$$

Daí, $x=-3$, $z=-5$ e $P(-3,0,-5)$ pertence à reta r. De modo análogo, se considerarmos $x=0$ no sistema ①, obteremos $y=-\frac{1}{2}$, $z=-1$ e $Q=(0,-\frac{1}{2},-1)$ pertence à reta r. Daí, o vetor $\vec{v}_r=\overrightarrow{PQ}=(3,-\frac{1}{2},4)$ é um vetor direção da reta r e uma equação vetorial desta reta pode ser dada pela equação:

$$r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(3,-\frac{1}{2},4);\, h\in R\,.$$

Uma outra maneira de determinarmos um vetor direção da reta r é obtida quando utilizamos o fato de que este vetor é paralelo ao vetor $\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$. Assim, podemos considerar $\vec{v}_r=(2,4,-1)\times(-1,2,1)=(6,-1,8)$ e $r:(x,y,z)=(-3,0,-5)+h\,(6,-1,8);\, h\in IR$ é uma equação outra vetorial de r.

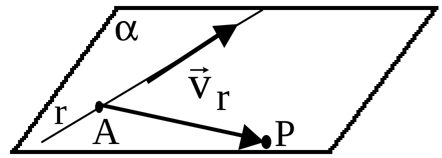
4. Dada a reta $r:(x,y,z)=(1,-2,0)+h\,(2,4,1);\, h\in IR$, determine uma equação geral da mesma.

Solução :

Devemos determinar as equações gerais de dois planos distintos α e β que contém a reta r.

Observemos que se um ponto não pertence a uma reta, o plano determinado por este ponto e esta reta, naturalmente, contém a reta.

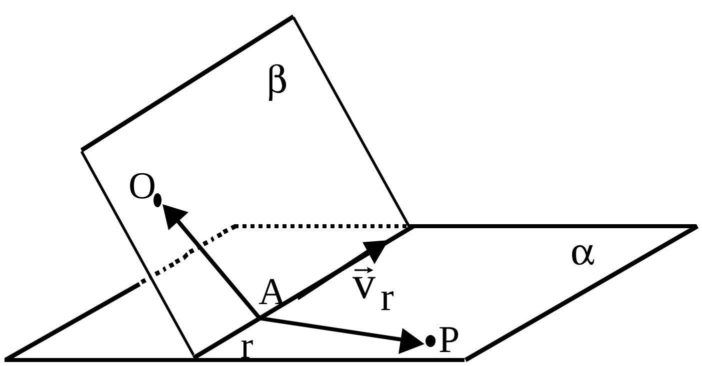
Assim, seja α o plano determinado pela reta r e pelo ponto $P(0,0,-1)$. O vetor normal de α pode ser dado por $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}$, onde A é um ponto de r.



Então, considerando $A(1,-2,0)$ temos que $\vec{n}_\alpha = (-6,1,8)$ e $\alpha: -6x + y + 8z + d = 0$.
Para determinarmos o valor de d, substituimos na equação anterior as cooordenadas de um ponto qualquer de α. Por exemplo, substituindo as coordenadas do ponto P, obtemos : $-6.0 + 0 + 8.(-1) + d = 0$. Daí, $d = 8$ e $\alpha: -6x + y + 8z + 8 = 0$.

A equação geral do plano β é obtida de modo análogo ao utilizado para obtenção da equação do plano α. Chamamos porém a atenção especial para a escolha do ponto: **agora ele deve ser escolhido fora do plano a.**

Considerando o plano β determinado pela reta r e pelo ponto O(0,0,0) temos que:



$\vec{n}_\beta = \vec{v}_r \times \overrightarrow{AO} = (-2,-1,8)$

e $\beta: -2x - y + 8z + d = 0$.

Como o plano β passa pela origem do sistema de coordenadas temos que $d = 0$.

Logo, $\beta: -2x - y + 8z = 0$, portanto uma equação geral da reta r é

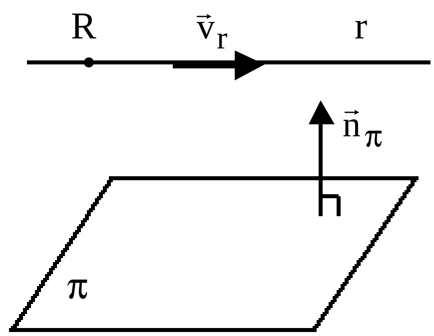
$$r: \begin{cases} -6x + y + 8z + 8 = 0 \\ -2x - y + 8z = 0 \end{cases}$$

CAPÍTULO IV - POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO E DE DUAS RETAS

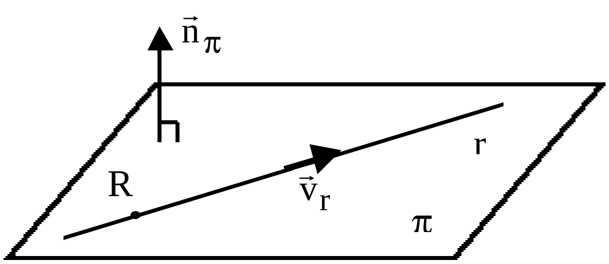
4.1 Posições relativas de uma reta e um plano

As posições de uma reta $r : X = R + t\,\vec{v}_r,\ \ t \in IR$ e um plano π são:

a) r paralela a π
($r \,//\, \pi$)



$r \,//\, \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \notin \pi$

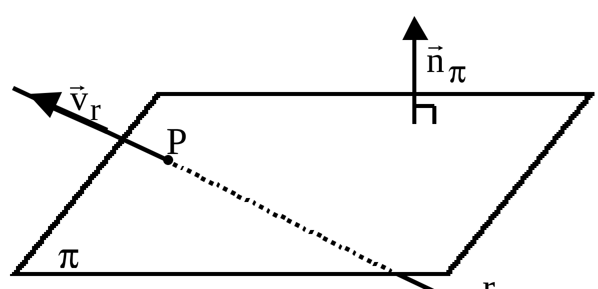


b) r contida em π ($r \subset \pi$)

$r \subset \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R \in \pi$

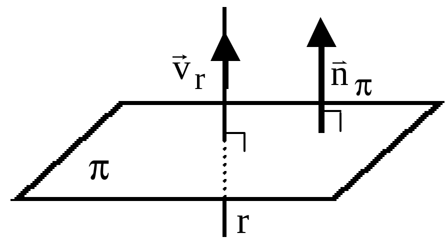
c) r e π concorrentes

($r \cap \pi = \{P\}$)



$r \cap \pi = \{P\} \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$

Caso particular:



Exemplos:

1. Determine a interseção da reta r com o plano π, nos seguintes casos:

a) $r: \ X = (1,6,2) + t\,(1,1,1)\,;\, t \in IR$
$\pi: x - z - 3 = 0$

b) $r: \ x - 1 = y - 2 = 2\,(z - 1)$
$\pi: X = h(6,2,1) + t\,(1,2,1); \ t, h \in IR$

c) $r: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3\,t\,;\, t \in IR \\ z = -t \end{cases}$
$\pi: x + y + 2z - 1 = 0$

Solução:

a) $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,1) \cdot (1,0,-1) = 0$, logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$.
Como R(1,6,2) é um ponto de r, verificamos que $R \notin \pi$. Logo $r \cap \pi = \phi$.

b) Sendo $\vec{v}_r = \left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ e $\vec{n}_\pi = (6,2,1) \times (1,2,1) = (0,-5,10)$, temos que $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Logo, $r \cap \pi = r$ ou $r \cap \pi = \phi$. Como R(1,2,1) é um ponto de r, verificamos que $R \in \pi$. Logo $r \subset \pi$ e consequentemente $r \cap \pi = r$.

b) De $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,3,-1)\cdot(1,1,2) = 2 \neq 0$ concluímos que r e π são concorrentes. Seja $r \cap \pi = \{P\} = \{(a,b,c)\}$. Temos então:

$$(1)\quad a + b + 2c - 1 = 0. \qquad (2)\quad \begin{cases} a = t \\ b = -3 + 3t, \\ c = -t \end{cases} \text{para algum escalar } t.$$

De (1) e (2) obtemos $t = 2$ e $P(2,3,-2)$.

2. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto $A(1,0,-2)$ e é paralela aos planos $\alpha: 2x - y + 2 = 0$ e $\beta: x + z - 3 = 0$.

Solução:

Como $r // \alpha$ e $r // \beta$, temos $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\alpha$ e $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\beta$. Sendo $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ LI, temos que $\vec{v}_r // \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$. Assim podemos considerar

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (1,01) \times (2,-1,0) = (1,2,-1).$$

Daí uma equação vetorial da reta r é:

$$r: X = (1,0,-2) + t\,(1,2,-1);\ t \in IR$$

4.2 Posições relativas de duas retas

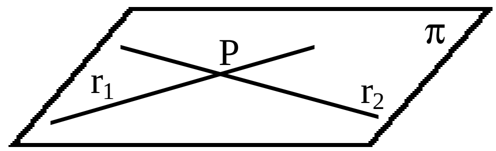
Se duas retas estão contidas no mesmo plano dizemos que são **coplanares**. Caso contrário são denominadas **reversas.**

As retas coplanares podem ser paralelas (distintas ou coincidentes) ou concorrentes.

Resumindo, duas retas r_1 e r_2 podem ser:

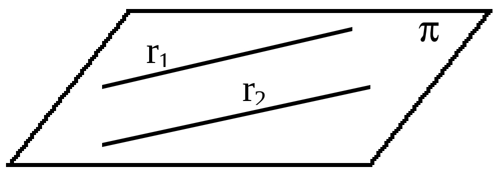
Coplanares

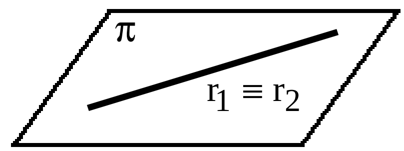
- Concorrentes : $r_1 \cap r_2 = \{P\}$



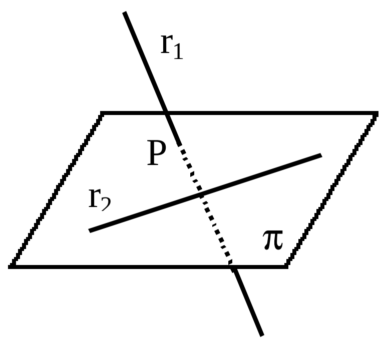
- Paralelas:

  - Distintas : $r_1 \cap r_2 = \phi$
  - Coincidentes : $r_1 \equiv r_2$





Reversas



Estabeleceremos a seguir condições para a identificação da posição relativa de duas retas.

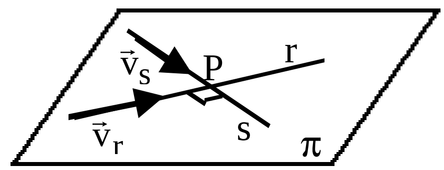
Considere as retas $r : X = R + h\,\vec{v}_r$ e $s : X = S + t\,\vec{v}_s$; $h, t \in IR$.

Se r e s são coplanares então os vetores $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são coplanares e portanto $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$. Reciprocamente, se $[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$ podemos ter:

i) $\vec{v}_r \,//\, \vec{v}_s$, nesse caso r e s são paralelas, logo coplanares.

ii) $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ LI, nesse caso $\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são LD. Como $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são linearmente independentes, então podemos escrever $\overrightarrow{RS}$ como combinação linear de $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Logo, existem escalares h_o e t_o tais que $S = R + h_o\vec{v}_r + t_o\vec{v}_s$. Assim, o plano $\beta: X = R + h\,\vec{v}_r + t\,\vec{v}_s;\ h, t \in IR$, contém as retas r e s, que portanto são coplanares. Observemos ainda que, neste caso as retas são concorrentes.

Um caso particular de retas concorrentes são as retas perpendiculares. Observemos que se duas retas r e s são perpendiculares então $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.



Exemplos

1. Estude a posição relativa dos seguintes pares de retas:

a) $r: \begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s: X = (1,0,2) + h\,(1,-3,7);\ h \in IR$

b) $r: \begin{cases} x = h \\ y = 1 - h \\ z = 4 + 4h \end{cases};\ h \in IR$ e $s: \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 8$

c) $r: X = (-2,1,3) + t(-10,-2,-18);\ t \in IR$ e $s: \dfrac{x-3}{5} = y - 2 = \dfrac{z-12}{9}$

d) $r: X = (4,-3,1) + h(0,2,1);\ h \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases};\ t \in IR$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r \,//\, (2,-1,-1) \times (1,3,-1) = (4,1,7)$ e $\vec{v}_s \,//\, (1,-3,7)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,0,2) e S(1,0,2) pontos de r e s, respectivamente. Assim,

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 28 \neq 0 .$$

Portanto, as retas r e s são reversas.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (1,-1,4)$ e $\vec{v}_s \,//\, (-2,3,1)$ temos que as retas r e s são concorrentes ou reversas. Vamos então considerar R(0,1,4) e S(1,0,8) pontos de r e s, respectivamente.

Assim,

$[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Logo as retas r e s são concorrentes.

c) Como $\vec{v}_r \,//\, (-10,-2,-18)$ e $\vec{v}_s \,//\, (5,1,9)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Além disso, o ponto $R(-2,1,3)$ pertence às retas r e s. Assim, podemos concluir que as retas r e s são coincidentes.

d) Como $\vec{v}_r \,//\, (0,2,1)$ e $\vec{v}_s \,//\, (0,-2,-1)$ temos que as retas r e s são paralelas (distintas ou coincidentes). Observemos que o ponto $R(4,-3,1)$ pertence à reta r, no entanto não pertence à reta s, pois o sistema

$$\begin{cases} 4 = 4 \\ -3 = -1 - 2\,t_o \\ 1 = 3 - t_o \end{cases}$$ não tem solução.

Assim, podemos concluir que as retas r e s são paralelas distintas.

2. Dê uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1,1,1)$ e é paralela à reta s: $\begin{cases} 2x - y + 4z + 3 = 0 \\ x + 5y - z + 6 = 0 \end{cases}$.

Solução:

Sendo r e s retas paralelas podemos considerar $\vec{v}_r = \vec{v}_s$. Como $\vec{v}_s \,//\, (2,-1,4) \times (1,5,-1) = (-19,6,11)$ as equações simétricas de s são:

$$\frac{x+1}{-19} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{11}.$$

3. Mostre que as retas $r: x-2 = -y = z-1$ e $s: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -2-t;\ t \in IR \\ z = 3 \end{cases}$

são concorrentes e determine o ponto de interseção.

Solução:

Sejam $\vec{v}_r = (1,-1,1), \vec{v}_s = (1,-1,0)$ e $R(2,0,1)$ e $S(4,-2,3)$ pontos de r e s,

respectivamente. Então $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ e assim concluímos

que r e s são coplanares. Como não são paralelas pois $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são vetores LI, temos que as retas são concorrentes. Seja $\{P_o\} = \{(x_o, y_o, z_o)\} = r \cap s$.

Então, $x_o - 2 = -y_o = z_o - 1$ e $\begin{cases} x_o = 4 + t_o \\ y_o = -2 - t_o \\ z_o = 3 \end{cases}$.

Daí, $t_o = 0$ e $P_o = (4,-2,3)$.

4. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto P (1,2,3), é concorrente com a reta $s: X = (-1,3,5) + h\,(2,5,1);\ h \in IR$, e tem vetor direção $\vec{v}_r$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (0,1,-4)$.

Solução:

Seja $\{P_o\} = r \cap s$. Então existe um real h_o, tal que $P_o(-1+2h_o, 3+5h_o, 5+h_o)$. Consideremos $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o}$. Como $\vec{v}_r$ é ortogonal a $\vec{u}$, temos que $(-2+2h_o, 1+5h_o, 2+h_o)\cdot(0,1,-4) = 0$. Logo, $h_o = 7$. Assim,

$$P_o = (13,18,12) \quad \text{e} \quad r: X = (1,2,3) + t\,(2,5,1);\ t \in IR.$$

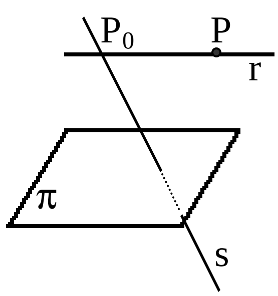
5. Determine uma condição necessária e suficiente para que uma reta r seja paralela ao eixo OX.

Solução:

O eixo OX tem vetor direção $\vec{i} = (1,0,0)$. Então, uma reta r é paralela ao eixo OX se, e somente se, $\vec{v}_r$ é paralelo ao vetor $\vec{i} = (1,0,0)$.

6. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P = (1,0,2)$, é concorrente com a reta $s: X = (1,0,1) + t\,(2,1,1); t \in IR$ e é paralela ao plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Solução:



Seja $\{P_o\} = r \cap s$ então, existe $t \in IR$ tal que $P_o = (1+2t, t, 1+t)$ e $\overrightarrow{PP_o} = (2t, t, t-1)$.

Como $r \,//\, \pi$ temos $(2t, t, t-1)\cdot(2,-3,4) = 0$. Assim, $t = \dfrac{4}{5}$.

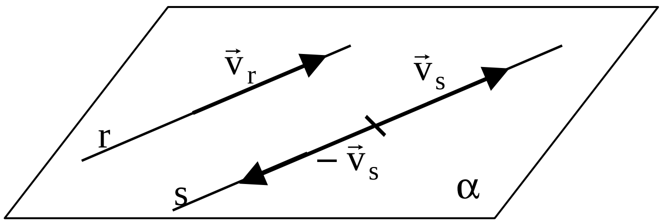
Considerando $\vec{v}_r = (8,4,-1)$, uma equação vetorial de r é:

$$r: X = (1,0,2) + t\,(8,4,-1); t \in IR.$$

CAPÍTULO V - ÂNGULOS

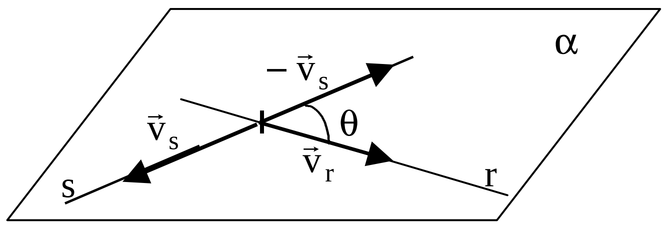
5.1 Ângulo entre duas retas

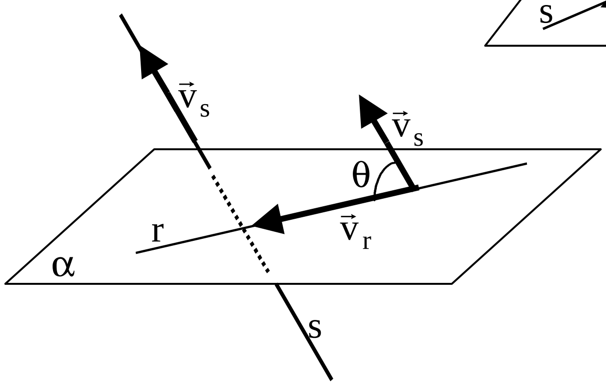
O ângulo entre duas retas r e s, indicado por (r,s), é definido como o menor dos ângulos $(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ e $(\vec{v}_r, -\vec{v}_s)$.



Se r e s são retas paralelas então $(r,s)=0$.

Na figura ao lado, o ângulo $(r,s)=(\vec{v}_r, -\vec{v}_s)=\theta$.





Na figura ao lado, as retas r e s são reversas e $(r,s)=(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\theta$.

Assim, $0 \le (r,s) \le \frac{\pi}{2}$ e $\cos(r,s) = |\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)| = |\cos(\vec{v}_r, -\vec{v}_s)|$.

Logo,

$$\mathbf{(r,s) = arc\cos \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{v}_s|}}$$

Quando $(r,s)=\frac{\pi}{2}$, dizemos que r e s são ortogonais e escrevemos $r \perp s$.

Se r e s são ortogonais e concorrentes dizemos que as retas são perpendiculares. É claro que $\mathbf{r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0}$.

Exemplos

1. Determine os ângulos formados pelas retas r e s, nos seguintes casos:

a) $r: X = \lambda(1,-1,1)\ ;\lambda \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} ;t \in IR$

b) $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s: x + 1 = \dfrac{y-2}{2} = z$.

c) $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases} ;t \in IR$ e $s: \dfrac{x-3}{2} = y + 1 = \dfrac{z+1}{3}$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r = (1,-1,1)$ e $\vec{v}_s = (-1,1,-1)$, as retas r e s são paralelas. Assim, $(r,s) = 0$.

b) Temos $\vec{v}_r = (1,2,-1) \times (1,-1,1) = (1,-2,-3)$ e $\vec{v}_s = (1,2,1)$. Daí,

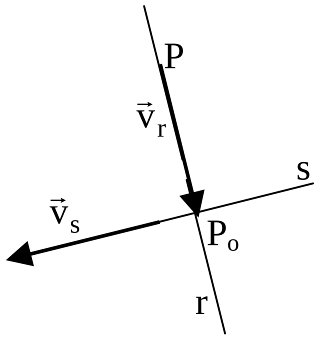
$$(r,s) = \arccos \frac{|1-4-3|}{|\sqrt{14}||\sqrt{6}|} = \arccos \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

c) Como $\vec{v}_r = (-2,2,0)$ e $\vec{v}_s = (2,1,3)$, temos:

$$(r,s) = \arccos \frac{|-4+2+0|}{|\sqrt{8}||\sqrt{14}|} = \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

2. Determine uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(1,1,-2)$ e é perpendicular à reta $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} ;t \in IR$.

Solução:

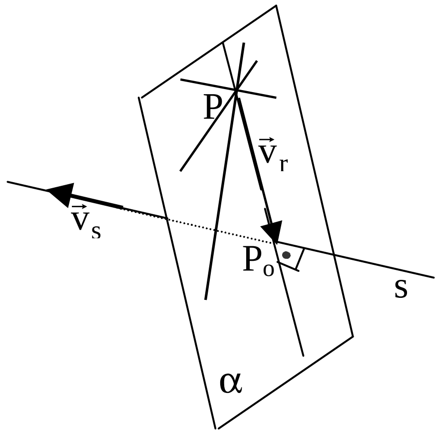


Como r e s são perpendiculares, temos que estas retas são concorrentes e ortogonais. Assim, se P_o é o ponto de concorrência de r e s, existe t_o real, tal que $P_o = (1 + t_o, 2t_o, 2 - t_o)$. Podemos então considerar $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o} = (t_o, 2t_o - 1, 4 - t_o)$. Pela condição de ortogonalidade, temos: $\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{PP_o} = 0$. Assim, $t_o + 2(2t_o - 1) - (4 - t_o) = 0$, daí, $t_o = 1$. Portanto uma equação da reta r é $r : X = (1,1,-2) + \lambda(1,1,3)\ ; \lambda \in IR$.

3. Substituindo, no exemplo anterior, a condição de perpendicularidade por ortogonalidade, o problema tem solução única?

Solução:

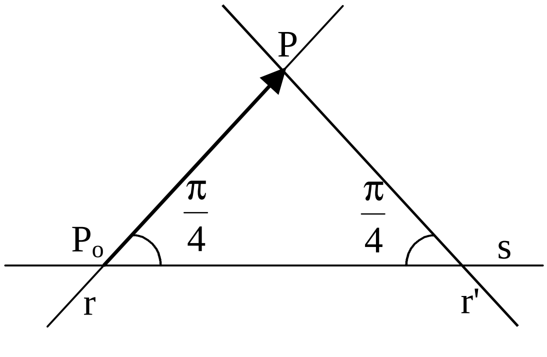
Neste caso, a direção de r poderia ser dada por qualquer vetor ortogonal a $\vec{v}_s$, sem restrições e, portanto, existe uma infinidade de soluções: *toda reta que passa por P e está contida no plano* $\alpha : \overrightarrow{PX} \cdot \vec{v}_s = 0$.



4. Determine uma equação da reta r que passa por $P(1,0,0)$ é concorrente com $s : X = t(1,1,0)\ ; t \in IR$ e $(r, s) = \frac{\pi}{4}$.

Solução:

Observemos inicialmente que o ponto P não pertence à reta s. Assim, se P_o é o ponto de concorrência de r e s, existe t_o real, tal que $P_o = (t_o, t_o, 0)$ e $\vec{v}_r = \overrightarrow{PP_o} = (t_o - 1, t_o, 0)$.



Então,

$$\cos(r,s) = \cos\frac{|(1,1,0)\cdot(t_o-1,t_o,0)|}{\sqrt{2}\sqrt{(t_o-1)^2+t_o{}^2+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

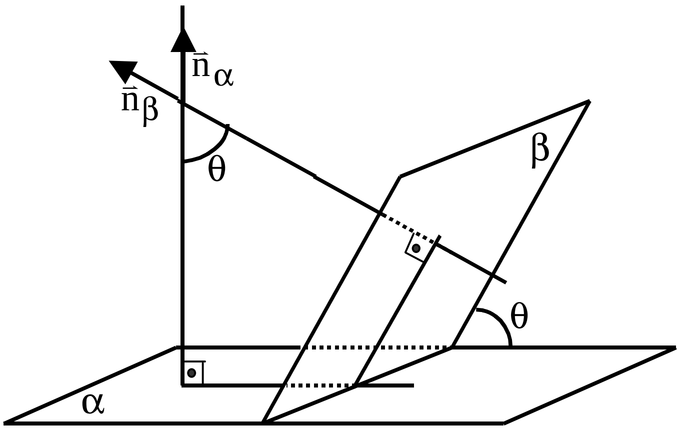
Daí, $|t_o - 1 + t_o| = \sqrt{(t_o-1)^2 + t_o{}^2}$. Logo, $t_o = 0$ ou $t_o = 1$.

Assim, este problema admite duas soluções:

- $t_o = 0$; $r: X = (1,0,0) + t(-1,0,0)\ ; t \in IR$
- $t_o = 1$; $r': X = (1,0,0) + h(0,1,0)\ ; h \in IR$.

5.2 Ângulo entre dois planos

O ângulo entre dois planos α e β , indicado por (α , β), é definido como o menor dos ângulos $(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$ e $(\vec{n}_\alpha, -\vec{n}_\beta)$.



Assim, $0 \le (\alpha,\beta) \le \frac{\pi}{2}$ e

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{arc\,cos}\frac{|\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}}|}$$

Quando $(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}$, dizemos que α e β são ortogonais e escrevemos $\alpha \perp \beta$. É claro que **a ^ b Û** $\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$.

Chamamos reta normal a um plano α a toda reta que tem a direção de $\vec{n}_\alpha$. Assim, podemos dizer que o ângulo entre dois planos é o ângulo formado por duas retas normais a esses planos.

Exemplos

1. Determine o ângulo formado pelos planos α e β, nos seguintes casos:

a) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ e $\beta: x + y + z + 2 = 0$.

b) $\alpha: x + y - z + 5 = 0$ e $\beta: X = t(1,0,1) + h(1,-1,0)$; $t, h \in IR$.

c) $\alpha: \begin{cases} x = t + h \\ y = t \\ z = 1 + h \end{cases}$; $t, h \in IR$ e $\beta: 2x + y + z - 1 = 0$

Solução:

a) Das equações de α e β temos $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,1,1)$. Assim,

$$\cos(\alpha,\beta) = \frac{|(2,1,-1)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Logo, $(\alpha,\beta) = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) $\vec{n}_\alpha = (1,1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,0,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-1)$.

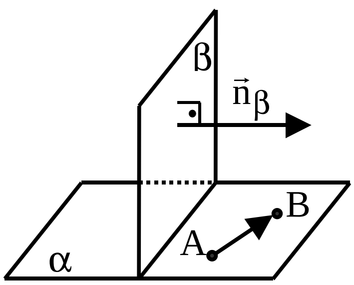
Daí, $\cos(\alpha,\beta) = \dfrac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1$. Logo, $(\alpha,\beta) = 0$.

c) $\vec{n}_\alpha = (1,1,0) \times (1,0,1) = (1,-1,-1)$ e $\vec{n}_\beta = (2,1,1)$.

Assim, $\cos(\alpha,\beta) = \dfrac{|(1,-1,-1)\cdot(2,1,1)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0$. Logo, $(\alpha,\beta) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Determine uma equação do plano α ortogonal ao plano $\beta: 2x - y + z + 1 = 0$ e que passa pelos pontos $A = (1,0,2)$ e $B = (2,1,3)$.

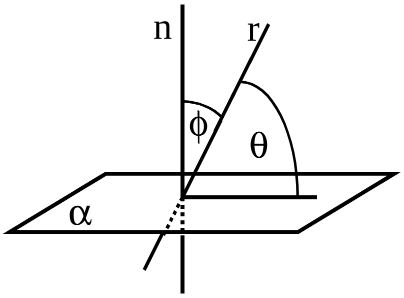
Solução:



Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\vec{n}_\beta = (2,-1,1)$ são L.I. e possuem representantes em α. Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser dado por:

$$\alpha: X = (1,0,2) + t(1,1,1) + h(2,-1,1) \; ; \; t, h \in IR.$$

5.3 Ângulo entre reta e plano



O ângulo entre uma reta r e um plano α, indicado por (r,α), é definido como o complemento do ângulo formado pela reta r e por uma reta n normal ao plano α.
Na figura, temos $\phi = (r,n)$ e $\theta = (r,\alpha)$.

Assim, $0 \le (r,\alpha) \le \dfrac{\pi}{2}$ e pode ser calculado como:

$$\mathbf{(r,\alpha) = \frac{\pi}{2} - (r,n) = \frac{\pi}{2} - arc\cos \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{n}_\alpha|}}$$

ou,

$$\mathbf{(r,\alpha) = arc\,sen \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{n}_\alpha|}}.$$

Quando $(r,\alpha) = \dfrac{\pi}{2}$, dizemos que a reta r e o plano α são perpendiculares e escrevemos $r \perp \alpha$. É claro que $\mathbf{r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{v}_r \,//\, \vec{n}_\alpha}$.

Exemplo

1. Determine o ângulo entre r e α, nos seguintes casos:

a) $r: X = (1,0,1) + t(1,0,2)\ ;\ t \in IR$
$\alpha: X = t(1,0,1) + h(1,2,-3)\ ;\ \ t, h \in IR.$

b) $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\alpha: x - 2y - 2z + 1 = 0$

Solução:

a) Como $\vec{v}_r = (1,0,2)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,0,1) \times (1,2,-3) = (-2,4,2)$, temos:

$$\text{sen}\,(r,\alpha) = \frac{|(1,0,2)\cdot(-1,2,1)|}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\ .$$

Logo, $(r,\alpha) = \text{arc sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

b) Temos $\vec{v}_r = (1,-1,0) \times (2,2,-1) = (1,1,4)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,-2,-2)$, assim,

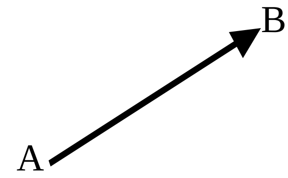
$$\operatorname{sen}(r,\alpha) = \frac{|(1,1,4)\cdot(1,-2,-2)|}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .$$

Logo, $(r,\alpha) = \dfrac{\pi}{4}$.

CAPÍTULO VI - DISTÂNCIA

6.1 Distância entre dois pontos

A distância entre um ponto A e um ponto B é indicada por d(A,B) e definida por $|\overrightarrow{AB}|$.



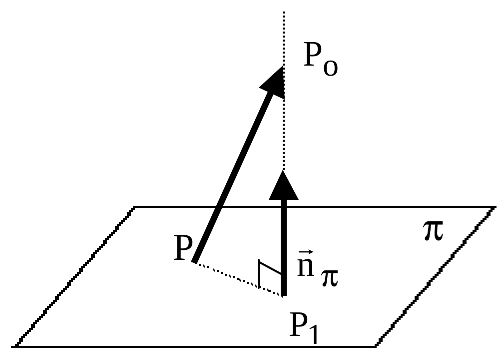
Considerando $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ temos que:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| \; .$$

Daí, $\mathbf{d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$

6.2 Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto P_o e um plano π é indicada por $d(P_o, \pi)$ e definida como a menor entre as distâncias de P_o a pontos de π.



Assim, se P é um ponto qualquer de π, então a distância entre P_o e π é o módulo da projeção do vetor $\overrightarrow{PP_o}$, na direção de $\vec{n}_\pi$.

Considerando $\pi: ax + by + cz + d = 0$ $P_o(x_o, y_o, x_o)$ e P(x, y, z) então:

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|a(x_o - x) + b(y_o - y) + c(z_o - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Logo, $\mathbf{d(P_o, p)| = \dfrac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

Exemplos:

Determine a distância entre o ponto P_o e o plano π nos seguintes casos:
a) $P_o(1,1,2)$ e $\pi: 2x - y + 2z + 4 = 0$

b) $P_o(2,2,4)$ e $\pi: X = (1,0,1) + h(1,1,1) + t(1,2,3)$; $h, t \in IR$.

Solução:

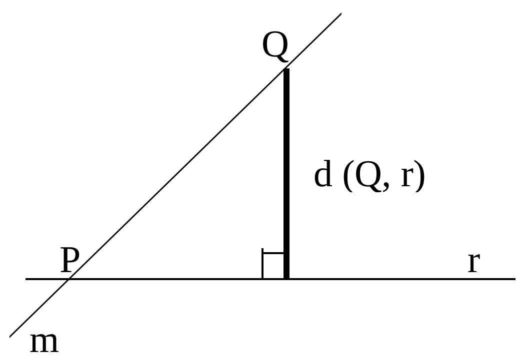
a) $d(P_o, \pi) = \dfrac{|2.1 - 1.1 + 2.2 + 4|}{\sqrt{9}} = 3$

b) Consideremos $P(1,0,1)$ e $\vec{n}_\pi = (1,1,1) \times (1,2,3) = (1,-2,1)$.
Assim,

$$d(P_o, \pi) = |\overrightarrow{PP_o} \cdot \overset{\circ}{\vec{n}}_\pi| = \frac{|1.1 + (-2).2 + 1.3|}{\sqrt{6}} = 0.$$

6.3 Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto Q e uma reta r é indicada por d(Q, r) e definida como a menor entre as distâncias de Q a pontos de r.

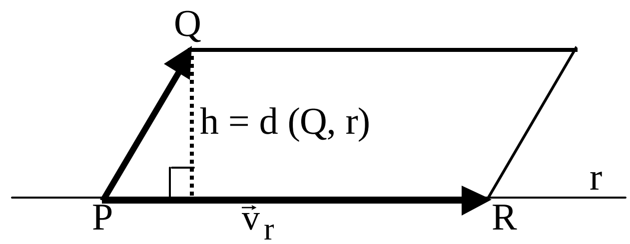


Assim, se $P \in r$ e m é a reta definida pelos pontos P e Q, temos que :

$$d(Q,r) = |\overrightarrow{PQ}|.\operatorname{sen}(r,m) = |\overrightarrow{PQ}| \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{v}_r|}.$$

Logo, $$\mathbf{d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}}.$$

Utilizando a interpretação geométrica do produto vetorial, podemos observar que d(Q,r) é a altura do paralelogramo, cujos lados são representantes dos vetores $\vec{v}_r$ e $\overrightarrow{PQ}$, em relação à base PR, sendo $R = P + \vec{v}_r$.



Exemplos:

Determine d(Q,r) nos seguintes casos:

a) Q(1,1,0) e $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \qquad ; \ t \in IR \\ z = 1 - t \end{cases}$

b) Q(1,2,3) e $r: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Solução:

a) Sejam P(2,0,1) e $\vec{v}_r = (1,2,-1)$.

Então,

$$d(Q,r) = \frac{|(-1,1,-1) \times (1,2,-1)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

b) Sejam $P(0,-7,-4)$ e $\vec{v}_r = (-1,5,3)$.

Então,

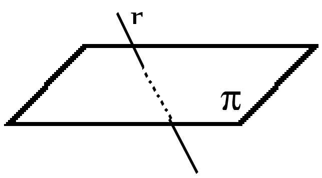
$$d(Q,r) = \frac{|(1,9,7) \times (-1,5,3)|}{\sqrt{35}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}.$$

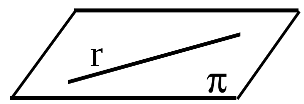
6.4 Distância entre uma reta e um plano

A distância entre a reta r e o plano π é indicada por d(r, π) e definida como a menor distância entre os pontos de r a π.

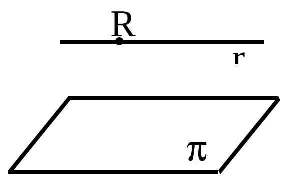
Assim:

a) Se r e π são concorrentes ou se r está contida em π então $d(r,\pi) = 0$.





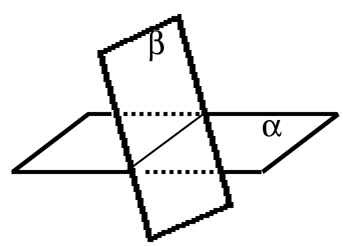
b) Se r é paralela a π então d(r, π) = d(R, π) ; R $\in$ r.



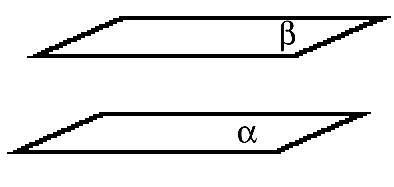
6.5 Distância entre dois planos

A distância entre os planos α e β é indicada por $d(\alpha,\beta)$ e definida como a menor distância entre os pontos de α a β. Assim,

a) Se α e β são concorrentes então $d(\alpha,\beta) = 0$.



b) Se α e β são paralelos então $d(\alpha,\beta) = d(P,\beta)$; $P \in \alpha$.



Exemplos:

1. Calcule $d(r, \pi)$ nos seguintes casos:

a) $r: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi: 3x - y + 2z - 2 = 0$

b) $r: X = (1,2,1) + h(-1,1,0);\ h \in IR$ e $\pi: 3x + 3y + z - 2 = 0$

Solução:

a) Sabemos que $\vec{v}_r \ // \ (2,-1,1) \times (1,1,-1) = (0,3,3)$. Consideremos $\vec{v}_r = (0,1,1)$ e $\vec{n}_\pi = (3,-1,2)$. Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 1$, temos que r e π são concorrentes. Portanto, d(r, π)=0.

b) Como $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ e $R(1,2,1) \notin \pi$, concluímos que r é paralela a π.

Assim, $d(r, \pi) = d(R, \pi) = \dfrac{|3.1 + 3.2 + 1.1 - 2|}{\sqrt{19}} = \dfrac{8\sqrt{19}}{19}$, sendo $R(1,2,1)$ um ponto de r.

2. Calcule $d(\alpha, \beta)$ nos seguintes casos:

a) $\alpha: X = h(1,-1,0) + t(0,1,1);\ h, t \in IR$ e $\beta: 3x + 3y - z + 3 = 0$

b) $\alpha: 2x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $\beta: \begin{cases} x = h \\ y = -h + t \\ z = t \end{cases};\ h, t \in IR$

Solução:

a) Sejam $\vec{n}_\alpha = (1,-1,0) \times (0,1,1) = (-1,-1,1)$ e $\vec{n}_\beta = (3,3,-1)$.
Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são LI temos que α e β são concorrentes. Assim, $d(\alpha, \beta) = 0$.

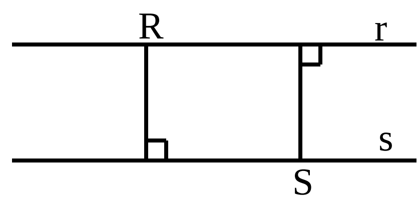
b) Sejam $\vec{n}_\alpha = (2,2,-2)$ e $\vec{n}_\beta = (1,-1,0) \times (0,1,1) = (-1,-1,1)$. Como estes vetores são LD, concluímos que α e β são paralelos. Assim, $d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha) = \dfrac{|2.0 + 2.0 - 2.0 - 1|}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, sendo $P(0,0,0)$ um ponto de β.

6.6 Distância entre duas retas

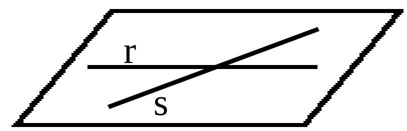
A distância entre as retas r e s é indicada por d(r,s) e definida como a menor distância entre os pontos de r e s.

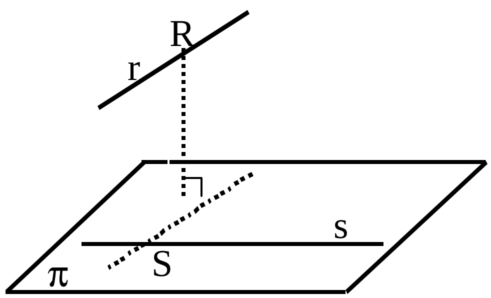
Consideremos as retas $r: X = R + t\vec{v}_r;\ t \in IR$ e $s: X = S + h\vec{v}_s;\ h \in IR$. Assim,

1) Se r é paralela a s então
d(r,s) = d(R,s) = d(S,r) .



2) Se r e s são concorrentes então d(r,s)= 0.



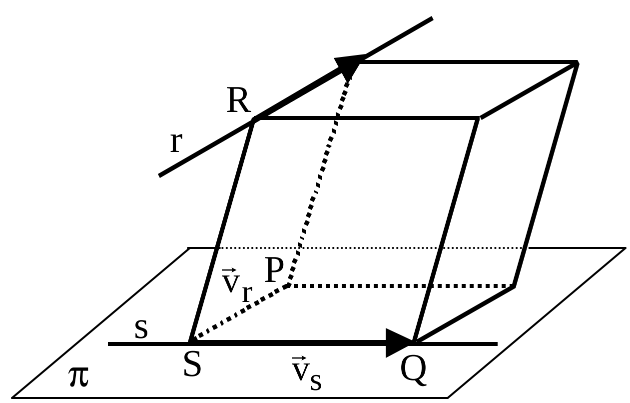


3) Se r e s são reversas então $d(r,s) = d(r,\pi) = d(R,\pi)$, sendo π um plano que contém s e é paralelo a r. Assim,

$$d(r,s) = d(R,\pi) = |\,proj_{\vec{v}_r \times \vec{v}_s} \overrightarrow{RS}\,|$$

Ou seja, $$\mathbf{d(r,s)} = \frac{|[\overrightarrow{\mathbf{RS}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}]|}{|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}|}$$

Da interpretação geométrica de produto misto e produto vetorial, concluímos que d(r,s) é a altura do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores $\overrightarrow{SR}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ em relação à base SPQ, sendo $P = S + \vec{v}_r$ e $Q = S + \vec{v}_s$.



Exemplos:

1. Calcule d(r,s) nos seguintes casos:

a) $r: X = (1,0,2) + h(1,1,1);\ h \in IR$ e $s: x - 1 = y + 2 = z - 3$

b) $r: X = (3,-1,1) + t(2,0,1);\ t \in IR$ e $s: \begin{cases} x = 6 - h \\ y = -2 + h\ ; \quad h \in IR \\ z = 1 + h \end{cases}$

c) $r: X = (1,1,1) + h(-1,2,1);\ h \in IR$ e $s: X = (1,1,3) + t(2,1,3);\ t \in IR.$

Solução:

a) As retas r e s são paralelas pois $\vec{v}_r = (1,1,1) = \vec{v}_s$.
Assim, d(r,s) = d(R,s) = d(S,r).
Consideremos $R(1,0,2)$ e $S(1,-2,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$d(r,s) = \frac{|(0,-2,1) \times (1,1,1)|}{|(1,1,1)|} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

b) Temos $\vec{v}_r = (2,0,1)$ e $\vec{v}_s = (-1,1,1)$. Assim, as retas não são paralelas.
Sejam $R(3,-1,1)$ e $S(6,-2,1)$ pontos de r e s, respectivamente. Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, r e s são concorrentes e d(r,s) = 0.

c) Sejam $\vec{v}_r = (-1,2,1)$ e $\vec{v}_s = (2,1,3)$. Assim, as retas não são paralelas.
Consideremos $R(1,1,1)$ e $S(1,1,3)$ pontos de r e s, respectivamente.
Então:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Daí, r e s são reversas .

Logo,

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2) Sejam r: X = (1,2,0) + t(1,1,1); t $\in$ R e s: $\begin{cases} x = ah \\ y = 1 + h \ ; h \in R \\ z = 2 - h \end{cases}$.

Determine a, de modo que :

a) d(r,s)= 0

b) r e s sejam reversas.

Solução:

a) d(r,s) = 0 $\Rightarrow$ r e s são concorrentes ou coincidentes. Sejam $\vec{v}_r = (1,1,1)$, $\vec{v}_s = (a,1,-1)$, R(1,2,0) e S(0,1,2).

Como não existe a real tal que $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ sejam LD, podemos afirmar que d(r,s) = 0 se, e somente se, $\left[\overrightarrow{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=0.$

Mas,

$$\left[\overrightarrow{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}=3-3a.$$

Logo, r e s são concorrentes se, e somente se, a = 1.

b) Da solução do item a), temos que r e s são reversas se, e somente se, $a \in R-\{1\}$.

Exercícios resolvidos

1. Um paralelepípedo ABCDEFGH de base ABCD tem volume igual a 9 unidades. Sabendo-se que $A(1,1,1), B(2,1,2), C(1,2,2),$ o vértice E pertence à reta r de equação $r: x=-y=2-z$ e $(\overrightarrow{AE}, \vec{i})$ é agudo. Determine as coordenadas do vértice E.

Solução:

Como E pertence à reta r, temos $E(t,-t,2-t)$ e $\overrightarrow{AE}=(t-1,-1-t,1-t)$. Assim,

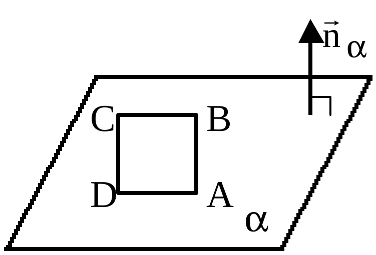
$$|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}]|=\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t-1 & -t-1 & 1-t \end{vmatrix}\right|=|3-t|=9.$$

Logo $t=-6$ ou $t=12$.

Se $t=-6,$ então $\overrightarrow{AE}=(-7,5,7)$ e $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{i}=-7$. Logo $(\overrightarrow{AE},\vec{i})$ é obtuso. Como este valor de t contradiz uma das hipóteses do nosso exercício, consideremos t = 12. Neste caso, $\overrightarrow{AE}=(11,-13,-11)$ e $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{i}=11$ assim, $(\overrightarrow{AE},\vec{i})$ é agudo. Portanto $E=A+\overrightarrow{AE}=(12,-12,-10)$.

2. Um quadrado ABCD está sobre o plano $\alpha: x-y+2z-1=0$. Sabendo-se que $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ são vértices consecutivos. Determine as coordenadas dos outros dois vértices.

Solução:



De $A(1,0,0)$ e $B(0,1,1)$ temos $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$ e de $\alpha: x-y+2z=1$ temos $\vec{n}_\alpha=(1,-1,2)$.

Como $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}\perp\vec{n}_\alpha$ temos:

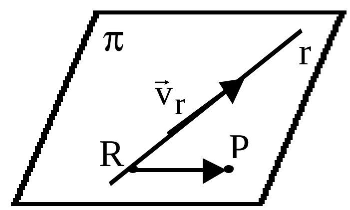
$$\overrightarrow{AD} \,//\, \overrightarrow{AB}\times\vec{n}_\alpha=(3,3,0).$$

Além disso, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$. Considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ temos: $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $D = A + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ e $C = B + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}+2}{2}, 1\right)$.

Podemos observar que considerando $\overrightarrow{AD}^{\circ} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ encontraremos a outra solução do exercício.

3. Determine uma equação do plano π que passa pelo ponto $P(1,0,1)$ e contém a reta de equação $r: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Solução:



Sejam $R(-1,0,0)$ um ponto da reta r e o vetor $\vec{v}_r = (1,1,0) // (0,3,3) = (1,-1,1) \times (2,1,-1)$. Como o ponto $P(1,0,1)$ não pertence à reta r, temos $\overrightarrow{RP} = (2,0,1)$ e $\vec{v}_r$ são vetores LI com representantes em π. Assim, uma equação vetorial do plano π é:

$$\pi : (x, y, z) = (1,0,1) + t\,(2,0,1) + h\,(0,1,1)\,;\ t, h \in IR$$

4. Determine uma condição necessária e suficiente para que um plano $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOZ.

Solução:

Observemos que os vetores $\vec{j} = (0,1,0)$ e (A,B,C) são normais aos planos XOZ e α, respectivamente. Assim, os planos α e XOZ são ortogonais se, somente se, $(A, B, C) \cdot (0,1,0) = 0$. Daí, B = 0.

Observação: De modo análogo, podemos mostrar que as condições necessárias e suficientes para que um plano $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ seja ortogonal ao plano XOY e ao plano YOZ são, respectivamente $C = 0$ e $A = 0$.

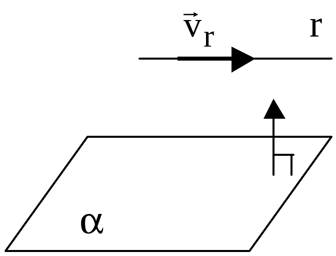
5. Determine uma equação geral de um plano que contém a reta $s:\begin{cases}\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{z+3}{3}\end{cases}$ e é ortogonal ao plano YOZ.

Solução:

Observemos que o plano $\alpha: y-1=\frac{z+3}{3}$ contém a reta s, já que todos os pontos de s satisfazem à equação de α. Além disso, $\alpha: 3y-z-6=0$ é ortogonal a plano YOZ (porque?). Assim, α é o plano procurado.

6. Mostre que um plano $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ é paralelo ao eixo OY se, e somente se, é ortogonal ao plano XOZ.

Solução:



Sabemos que um plano α é paralelo a uma reta r se, e somente se, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{v}_r=0$. Assim, o plano α é paralelo ao eixo OY se, e somente se $0=(A,B,C)\cdot(0,1,0)=B$. Portanto a condição α paralelo ao eixo OY é equivalente a α ortogonal ao plano XOZ.

7. Dados os planos $\alpha: Ax+4y+4z+D=0$ e $\beta: 6x+8y+Cz-2=0$, determine as constantes A, C e D tais que:

a) $d(\alpha,\beta)=\sqrt{41}$

b) O plano α seja ortogonal ao plano β e contém o eixo OX.

Solução:

a) Como $d(\alpha,\beta)\neq 0$ temos que $\alpha\cap\beta=\phi$. Assim, os vetores $\vec{n}_\alpha=(A,4,4)$ e $\vec{n}_\beta=(6,8,C)$ são paralelos e portanto $A=3$ e $C=8$. Tomemos $P(1,-1,0)$ um ponto do plano β. Sabemos que:

$$d(\alpha,\beta)=d(P,\alpha)=\frac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+4\cdot 0+D|}{\sqrt{9+16+16}}=\sqrt{41}.$$

Assim, $|D-1|=41$, logo $D=42$ ou $D=-40$.

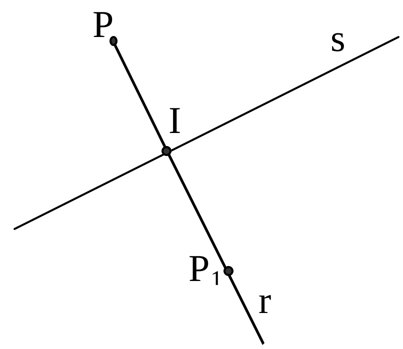
b) Como o plano α contém o eixo OX temos $A=0$ e $D=0$. Da ortogonalidade dos planos α e β temos:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (0,4,4)\cdot(6,8,C) = 32+4C = 0\,.$$

Logo $C=-8$.

8. Determine as coordenadas do ponto P_1, simétrico de $P(1,1,-2)$ em relação à reta $s: x+1=y-1=z$.

Solução:

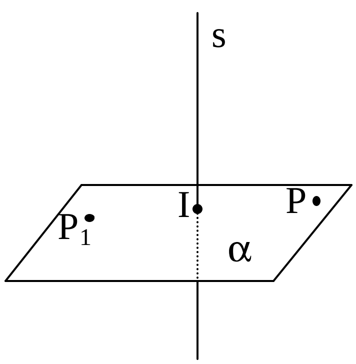


Sejam r a reta perpendicular à reta s que passa pelo ponto P e $\{I\} = r\cap s$. Então, $I=(t-1,1+t,t)$ e podemos considerar $\vec{v}_r = \overrightarrow{PI} = (t-2,t,t+2)$. Como as retas r e s são ortogonais temos:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (t-2,t,t+2)\cdot(1,1,1) = 0$$

Logo, $t=0$ e $\overrightarrow{PI} = (-2,0,2)$. Como $\overrightarrow{IP_1} = \overrightarrow{PI}$ temos $P_1 = I + \overrightarrow{IP_1}$. Assim $P_1 = (-1,1,0)+(-2,0,2) = (-3,1,2)$.

Observação:

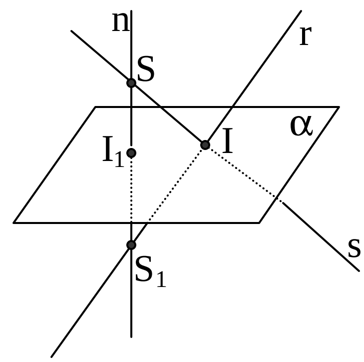


O ponto I também poderia ser determinado através da interseção da reta s com o plano α que passa pelo ponto P e é ortogonal à reta s.

Sendo α perpendicular a s temos: α: $x+y+z+D=0$. Utilizando o fato de que $P\in\alpha$, podemos concluir que $D=0$.

9. Determine uma equação da reta r, simétrica da reta $s:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}\ ;t\in IR$, em relação ao plano $\alpha: x-y+z+1=0$.

Solução:



Observemos que se S e Q são pontos da reta s então S_1 e Q_1, simétricos de S e Q, respectivamente, em relação ao plano α são pontos da reta r.

De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha = (2,1,0)\cdot(1,-1,1) \neq 0$, temos que s e α são concorrentes. Seja $\{I\} = s \cap \alpha$. Então, $I = (1+2t, t, 2)$ e $1+2t-t+2+1=0$. Logo, $t=-4$ e $I(-7,-4,2)$. Assim, as equações paramétricas da reta n, normal a α e concorrente com a reta s em S(1,0,2) são :

$$n: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \quad ; t \in IR \\ z = 2+t \end{cases}.$$

Considerando $\{I_1\} = n \cap \alpha$, temos $I_1 = (1+t, -t, 2+t)$ e $1+t+t+2+t+1=0$. Logo, $t = -\frac{4}{3}$ e portanto $I_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Daí, $S_1 = I_1 + \overrightarrow{SI_1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Como I e S_1 são pontos distintos de r podemos considerar $\vec{v}_r = \frac{3}{4}\overrightarrow{S_1I}$.

Assim, uma equação vetorial de r é :

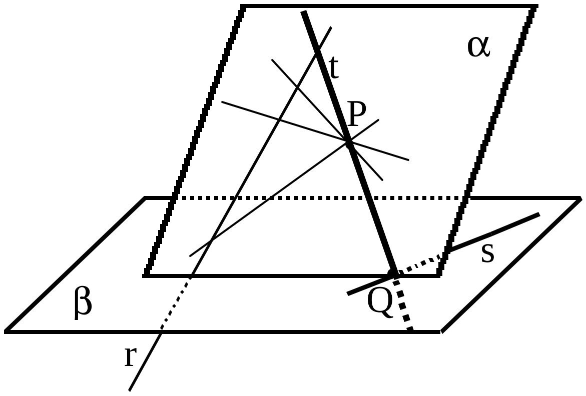
$$X = (-7,-4,2) + h(4,5,-2);\ h \in IR.$$

10. Determine, caso exista, uma reta t que passa pelo ponto $P(1,-2,-1)$ e é concorrentes com as retas r e s.

$$r: \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda - 3;\ \lambda \in IR \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = h-2 \\ y = 1-h \quad ; h \in IR \\ z = h \end{cases}.$$

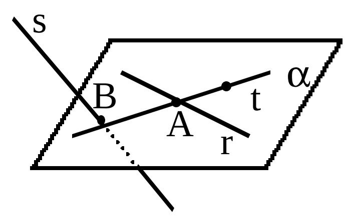
Solução 1:

Podemos verificar que r e s são retas reversas e que $P \notin r$. Assim, o plano α determinado por P e r, contém toda reta que passa por P e é concorrente com r. Logo, a reta t, caso exista, está contida em $\alpha: x - y + z - 2 = 0$.



De $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$ concluímos que s e α são concorrentes, seja $\{Q\} = s \cap \alpha$. Como $Q \in s$ temos $Q(h-2, 1-h, h)$, por outro lado, Q também pertence a α daí, $h - 2 - (1-h) + h - 2 = 0$. Consequentemente, $h = \frac{5}{3}$ e $Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Como $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ não é paralelo a $\vec{v}_r = (1,2,1)$, podemos escrever:

$$t : X = P + \lambda \overrightarrow{PQ}; \lambda \in IR$$



Solução 2:

Consideremos que exista uma reta t que passa por P e é concorrente com as retas r e s em A e B, respectivamente.

Assim, $A(\lambda - 1, 2\lambda - 3, \lambda)$, $B(h-2, 1-h, h)$, $\overrightarrow{PA} = (\lambda - 2, 2\lambda - 1, \lambda + 1)$ e $\overrightarrow{PB} = (h-3, 3-h, h+1)$. Como P, A e B são pontos colineares os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são LD. Daí podemos escrever:

$$\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h} = \frac{\lambda + 1}{h+1}$$

De $\frac{\lambda - 2}{h-3} = \frac{2\lambda - 1}{3-h}$ temos $\lambda - 2 = 1 - 2\lambda$. Logo, $\lambda = 1$ e $\overrightarrow{PA} = (-1, 1, 2)$.

Considerando $\vec{v}_t = \overrightarrow{PA}$, as equações paramétricas da reta t são:

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = -2 + a \quad ; a \in IR \\ z = -1 + 2a \end{cases}$$

11. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto Q(2,1,0), é concorrente com a reta $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$ $; t \in IR$ e forma ângulos iguais com os eixos OX e OY.

Solução:

Sejam r a reta que queremos determinar e $\{I\} = r \cap s$. Assim $I = (2 + t, 3t, t)$ e $\vec{v}_r = \overrightarrow{QI} = (t, 3t - 1, t)$. Como $(r, OX) = (r, OY)$ temos a equação:

$$\frac{|(1,0,0) \cdot (t, 3t - 1, t)|}{|\vec{v}_r|} = \frac{|(0,1,0) \cdot (t, 3t - 1, t)\|}{|\vec{v}_r|}.$$

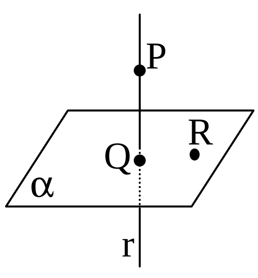
Logo, $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{4}$.

Considerando $t = \frac{1}{2}$, temos $\vec{v}_r \,//\, (1,1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,1,1)\,; h \in IR$.

Considerando $t = \frac{1}{4}$, temos $\vec{v}_r \,//\, (1,-1,1)$ e $r: X = (2,1,0) + h(1,-1,1)\,; h \in IR$.

Como vimos o exercício tem duas soluções.

12 . Da figura abaixo sabe – se que:



i) a reta r é perpendicular ao plano α, tem a direção do vetor $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $P(1,1,-1)$ pertence à reta r.

ii) os pontos Q e $R(-1,0,1)$ pertecem ao plano α.

iii) S = (0,1,2)

Determine:

a) uma equação do plano α.
b) as coordenadas do ponto Q.
c) uma equação do plano QRS.
d) o ângulo entre os planos QRS e α.

e) a distância entre as retas r e RS.
f) uma equação do plano que contém a reta r e é paralelo à reta $t: X = (3,2,0) + h(2,0,-1); h \in IR$
g) uma equação do plano perpendicular ao plano α que contém a reta QS.

Solução:

a) Como $\vec{n}_\alpha // \vec{v}_r = (1,2,-1)$ temos $\alpha: x + 2y - z + d = 0$. Além disso $R(-1,0,1) \in \alpha$, assim d = 2. Logo $\alpha: x + 2y - z + 2 = 0$.

b) As equações paramétricas da reta r são $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} ; t \in IR$.

Como $\{Q\} = r \cap \alpha$ temos:

$$Q(1+t, 1+2t, -1-t) \text{ e } 1 + t + 2(1+2t) - (-1-t) + 2 = 0.$$

Logo, $t = -1$ e $Q(0,-1,0)$.

c) Os vetores $\overrightarrow{QR} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI. Logo, podemos escrever uma equação vetorial do plano QRS como:

$$X = t(-1,1,1) + h(0,2,2); t \text{ e } h \in IR .$$

d) Sabemos que $\vec{n}_\alpha = (1,2,-1)$ e $\vec{n}_{QRS} //(-1,1,1) \times (0,2,2) = (0,2,-2)$.

Assim, $\cos(QRS, \alpha) = \dfrac{|6|}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo $(QRS, \alpha) = 30°$.

e) Sabemos que $\vec{v}_r = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{RS} = (0,1,2) - (-1,0,1) = (1,1,1)$ daí,

$[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -6$. Assim, as retas r e s são reversas.

Logo, $d(r, RS) = \dfrac{|[\vec{v}_r, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{QR}]|}{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{RS}|} = \dfrac{6}{|(3,-2,-1)|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

f) Seja β o plano que queremos determinar. Os vetores $\vec{v}_r = (1,2,-1)$ e $\vec{v}_t = (2,0,-1)$ são LI e têm representantes β , logo uma equação vetorial do plano β é :

$$X = P + \lambda\,(1,2,-1) + \sigma\,(2,0,-1)\,;\ \lambda \text{ e } \sigma \in IR$$

g) Os vetores $\vec{n}_\alpha = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{QS} = (0,2,2)$ são LI e têm representantes no plano que queremos determinar. Assim uma equação deste plano é :

$$X = S + t\,(1,2,-1) + h\,(0,1,1)\,;\ t \text{ e } h \in IR$$

Exercícios propostos

01. Escreva uma equação da reta r nos casos a seguir:

a) r passa pelo ponto $P(-2,-1,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2,1,1)$.

b) r passa pelos pontos $A(1,3,-1)$ e $B(0,2,3)$.

02. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o ponto P pertence à reta r:

a) $P(-2,1,1)$ e $r : X = (1,0,0) + h(-1,2,1);\ h \in IR$

b) $P(2,-1,-7)$ e $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \ ;\ t \in IR \\ z = -5 + 2t \end{cases}$

c) $P\left(2, \frac{1}{2}, 3\right)$ e $r : x - 1 = 2(y - 2) = \frac{z}{3}$

03. Escreva uma equação do plano **a** nos casos a seguir:

a) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2)$ e $B(2,-1,3)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (0,1,2)$.

b) **a** passa pelos pontos $A(3,1,-1)$ e $B(1,0,1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CD}$, sendo $C(1,2,1)$ e $D(0,1,0)$.

c) **a** passa pelos pontos $A(1,0,2), B(1,0,3)$ e $C(2,1,3)$.

04. Verifique em cada um dos itens abaixo se o ponto P dado pertence ao plano π.

a) $P(1,-1,0),\ \pi : X = (2,1,3) + h(1,0,1) + t(0,1,0);\ t$ e $h \in IR$

b) $P(2,1,3),\ \pi : x + y - 2z + 3 = 0.$

c) $P(3,2,2)\ ,\ \pi : \begin{cases} x = 1 - h + t \\ y = 2 - h - t \ ;\ t, h \in IR \\ z = 1 - h \end{cases}$

05. O ponto $P(2,2,-1)$ é o pé da perpendicular traçada do ponto $Q(5,4,-5)$ ao plano π. Determine uma equação de π.

06. Determine um vetor normal ao plano:

a) determinado pelos pontos $P(-1,0,0), Q(0,1,0)$ e $R(0,0,-1)$.
b) $\alpha: 2x - y + 1 = 0$.
c) que passa pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B(2,2,1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (1,-1,3)$.
d) $\alpha: \begin{cases} x = 1 + t + h \\ y = 1 - t + 2h \, ; t \text{ e } h \in IR \\ z = h \end{cases}$

07. Determine as equações dos planos coordenados na forma geral.

08. a) Verifique se $P(1,3,-2)$ pertence a $r: \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$.

b) Escreva uma equação da reta r passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e tem a direção

de um vetor normal ao plano $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t + 3h \, ; \; t \text{ e } h \in IR \\ z = t + h \end{cases}$.

09. Determine a equação geral do plano β paralelo ao plano

$\alpha: \begin{cases} x = 1 + h + 2t \\ y = 2 + 2h + t \, ; h \text{ e } t \in IR \\ z = 3t \end{cases}$ e que

a) passa pelo ponto $P(3,2,0)$;
b) passa pela origem do sistema de coordenadas.

10. Determine uma equação do plano π:

a) que contém o eixo OX e passa pelo ponto $P(5,-2,1)$.
b) que passa pelo ponto $P(-2,1,3)$ e é perpendicular à reta $r: X = (1,0,1) + h(1,-3,2); h \in IR$.

11. Verifique se as retas r e s nos casos a seguir são coplanares:

a) $r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $s: X = (1,0,1) + h(3,-1,1);\ h \in IR$

b) $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z-2}{3}$ e $s: X = (1,-2,2) + h\,(0,1,3)\,;\, h \in IR$

c) $r: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 2 - 3h\,;\, h \in IR \\ z = h \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{z-2}{2}$

12. Determine o valor de **a** para que as retas r e s sejam concorrentes e ache o ponto de interseção, sendo:

$$r: \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{z}{a} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 3h - 1 \\ y = 2h - 5\,;\, h \in IR\,. \\ z = h \end{cases}$$

13. Determine, se possível, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s, nos casos a seguir:

a) $r: X = (1,2,0) + h\,(-1,2,3)\,;\, h \in IR$

$s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = -z$

b) $r: X = (-1,2,1) + h\,(1,2,-1)\,;\, h \in IR$

$s: X = (2,5,-2) + t\,(-2,4,2)\,;\, t \in IR$

c) $r: X = (1,2,3) + h\,(1,0,2)\,;\, h \in IR$

$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 \qquad ;\, t \in IR \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

14. Sejam $\alpha: 2x + By + z + 1 = 0, \beta: x + y + \frac{z}{2} + D = 0,\ s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = h \\ z = A \end{cases}; h \in IR$

e $r:\ x - 1 = -\frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$. Determine, se possível:

a) B, tal que α e β sejam paralelos.
b) B, tal que α e β sejam perpendiculares.
c) D, tal que $r \subset \beta$
d) A, tal que r e s sejam coplanares.

15. Considere os pontos $P(4, a, 4)$ e $Q(0, 3b + 8, b)$, as retas $r: x - 1 = \frac{2 - y}{3} = z$

e $s: X = Q + t\,(1,0,2)$; $t \in IR$ e os planos $\pi_1: mx - 2y + (m+3)z - 1 = 0$ e $\pi_2: X = t(1,-3,1) + h(2,-3,1)$; t e $h \in IR$. Determine, se possível:

a) **a**, de modo que a reta paralela à reta s que passa pelo ponto P seja reversa com a reta r.
b) **b** e **m**, de modo que a reta s seja paralela ao plano π_1.
c) **m**, de modo que os planos π_1 e π_2 sejam concorrentes segundo a reta r.

16. **a)** Determine uma equação da reta s que passa pela origem do sistema de coordenadas, é paralela ao plano $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$ e intercepta a reta $r: x - 1 = \frac{y+2}{3} = z$.

b) Ache uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,3), é paralelo à reta $r: X = (1,2,3) + h(1,2,-1); h \in IR$, e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 4 = 0$.

17. Considere as retas r e t, tais que:

(i) r passa pelo ponto $P(3,1,-1)$ e é paralela à reta $s: \begin{cases} x - y + 3z - 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$;

(ii) t passa pela origem do sistema de coordenadas e seu vetor direção tem ângulos diretores iguais.

Determine:

a) as equações simétricas de r.
b) as equações paramétricas de t.

18. Dado o plano $\pi : X = (0,0,1) + h(1,-1,-1) + t(-1,-2,-4); h, t \in IR$ e a reta AB, sendo A(0,0,0) e B(1,1,1), determine uma equação do plano α que passa pelo ponto onde a reta AB fura o plano π e é paralelo ao plano $\beta : x - 3 = 0$.

19. a) Determine o simétrico de P(2,1,3) em relação:

(i) ao ponto $Q(3,-1,1)$.

(ii) à reta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in IR$.

(iii) ao plano $2x - 2y + 3z = 2$.

b) Encontre uma equação da reta s simétrica da reta $t : x - 2 = y - 1 = z - 3$, em relação ao plano do item a(iii).

20. Determine o ângulo das retas $s : X = (1,0,0) + h(2,1,-1) ; h \in IR$ e $r : \dfrac{x-1}{2} = y = -z$.

21. Determine o ângulo da reta $r : x = -y = z$ com o plano α, nos casos a seguir:

a) $\alpha : 2x - y - z - 1 = 0$;

b) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2h - t \\ y = h + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} ; h, t \in IR$.

22. Determine o ângulo dos planos:

a) $\alpha : x + y - 2z = 0$ e $\beta : -2x + y + 3z - 2 = 0$;

b) $\alpha : \begin{cases} x = 2 - h \\ y = 1 + 2t \\ z = 2h - 3t \end{cases} ; h, t \in IR$ e $\beta : -2x + y + 3z - 2 = 0$.

23. Determine uma equação da reta s que passa por P(1,0,1) e intercepta a reta $r : x = y = z + 1$, formando um ângulo de $\dfrac{\pi}{3} rd$.

24. Determine uma equação do plano α que passa pelo ponto P(2,1,1), é perpendicular ao plano coordenado yz e $(\alpha,\beta) = \arccos(2/3)\ \text{rd}$, sendo o plano $\beta: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

25. Considere o plano α determinado pelo ponto P(1,2,0) e pela reta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-4}{3}$. Calcule o ângulo que α forma com a reta $s: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$

26. Calcule a distância entre:

a) o ponto P(0,0,2) e a reta $r: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$.

b) o plano $\pi: X = (1,2,-1) + h(3,2,-1) + t(1,1,0);\ h, t \in IR$ e o ponto $P(2,1,-3)$.

c) as retas $r: \dfrac{x-1}{2} = 2 - y = z - 3$ e $s: \begin{cases} \dfrac{x-2}{5} = z \\ y = z - 1 \end{cases}$.

d) as retas $r: X = (1,0,0) + h(-2,4,2);\ h \in IR$ e $s: 2 - x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

e) a reta $r: x = -y = z$ e o plano $\pi: 2x - y - z - 1 = 0$.

27. **a)** Escreva as equações dos planos β e γ paralelos ao plano $\alpha: 2x - 2y - z = 3$ distando dele 5 unidades.

b) Encontre uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de:

(i) A(1,–4,2) e B(7,1,–5) (ii) A(1,2,1), B(1,4,3) e C(3,2,1)

c) Dados os pontos A(2,1,3), B(4,–1,1) e o plano $\alpha: 2x - y + 2z - 3 = 0$, determine uma equação da reta r contida em α, tal que todo ponto de r é equidistante dos pontos A e B.

28. De um triângulo ABC temos as seguintes informações:

(i) $A(1,2,-3)$ (ii) B e C são pontos da reta $r:\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} ;\ t \in IR$.

Determine a altura do triângulo ABC relativa à base BC.

29. Considere $\alpha: 2x+3y-z+1=0$, $P(1,-4,5)$ e $s:\begin{cases} x = y+1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Determine, justificando:

a) d(P,s) b) d(P, α)

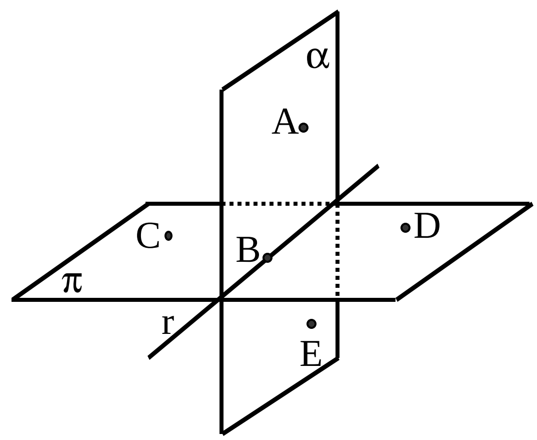
c) uma equação da reta m que satisfaz às três condições:
(i) d(P,m) = 0 (ii) d(m,s) = 0 (iii) d(m, α) = d(P, α).

30. Da figura ao lado sabemos que:

(i) os planos α e $\pi: x-z=0$ são perpendiculares.

(ii) $A(0,2,-1)$ e $B(-1,3,-1)$.

(iii) C e D são pontos de π.



Determine:

a) Uma equação do plano α.

b) As equações paramétricas da reta r interseção dos planos α e π.

c) Uma equação do plano β que passa por A e é paralelo a π.

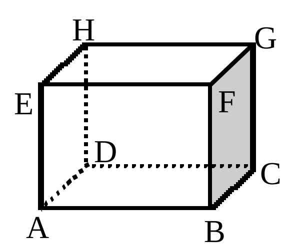
d) A altura do tetraedro ABCD relativa à base BCD.

e) As coordenadas do ponto E, sabendo que o triângulo ABE é equilátero e r contém a altura deste triângulo relativa ao vértice B.

31. Do paralelepípedo dado a seguir sabe-se que:

(i) O plano $ABC: x+y-z+6=0$ e a reta $DG: X = t(1,2,-3),\ t \in IR$.

(ii) O plano ABF é perpendicular ao plano ABC e $F=(0,2,0)$.



Determine:

a) As equações simétricas da reta AF.

b) As equações paramétricas do plano ABF.

c) As coordenadas do ponto D.

d) Uma equação geral do plano EFG.

32. Determine o volume da pirâmide delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $5x - 2y + 4z = 20$.

33. Escreva as equações de uma reta t paralela aos planos α e β, e concorrente com as retas r e s, considerando:

$\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ $\qquad$ $\beta: x + 3y + 2z - 2 = 0$

$r: X = (1,2,1) + h(1,0,2);\ h \in IR$ $\qquad$ $s: X = (2,3,-2) + \lambda(1,-2,3);\ \lambda \in IR$

34. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. Mostre que a equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$, $t \in IR$, representa a família dos planos que contém a reta r, com exceção do plano β. Esta família é chamada de **feixe de planos de eixo r.**

35. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha: x + y + z - 11 = 0$ e $\beta: x - 4y + 5z - 10 = 0$. Determine a equação do plano que contém a reta r, e:

a) passa pelo ponto $A(3,-1,4)$.

b) é paralelo ao plano $9x - 21y + 33z + 1 = 0$.

c) dista 3 unidades da origem do sistema de coordenadas.

d) é perpendicular a α.

e) é paralelo à reta $x = -\frac{y}{2} = -z$.

f) é paralelo ao eixo ox.

Respostas

01. a) $r: (x, y, z) = (-2,-1,3) + t\,(2,1,1);\ t \in IR$

b) $r: x - 1 = y - 3 = \frac{z+1}{-4}$

02. a) $P \notin r$ $\qquad$ b) $P \in r$ $\qquad$ c) $P \notin r$

03. a) $\alpha:(x,y,z)=(1,0,2)+t\,(1,-1,1)+h\,(0,1,2)\,;\ t \text{ e } h\in IR$

b) $\alpha: 3x-4y+z-4=0.$

c) $\alpha:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+t+h \end{cases}\ ;\ t \text{ e } h\in IR$

04. a) $P\notin\pi$ b) $P\in\pi$ c) $P\in\pi$

05. $\pi: 3x+2y-4z-14=0$.

06. a) $(1,-1,1)$ b) $(2,-1,0)$ c) $(2,-1,-1)$ d) $(1,1,-3)$

07. plano OXY : $z=0$; plano OXZ : $y=0$; plano OYZ : $x=0$.

08. a) $P\in r$ **b)** $r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1-3t \end{cases}\ ;\ t\in IR$.

09. a) $2x-y-z-4=0$ **b)** $2x-y-z=0$.

10. a) $\pi: X=t\,(1,0,0)+h\,(5,-2,1)\,;\ t \text{ e } h\in IR$ ou $\pi:\ y+2z=0.$

b) $\pi: x-3y+2z-1=0.$

11. a) Não **b)** Sim **c)** Sim

12. $a=1,\ I(2,-3,1)$.

13. a) $\alpha: -11x+5y-7z+1=0$ **b)** $\beta: x+z=0$ **c)** $\gamma: -2x+z-1=0$

14. a) $B=2$ **b)** $B=-\dfrac{5}{2}$ **c)** $D=1$ **d)** $A=-2$

15. a) $a\neq-4$ **b)** $m=-2$ e $b\neq-\dfrac{17}{5}$

c) $\nexists\ m\in IR$ tal que $\pi_1\cap\pi_2=r$

16. a) $s: X=h\left(1,\dfrac{17}{9},\dfrac{7}{9}\right);\ h\in IR$ **b)** $\alpha: -x+y+z-2=0$

17. a) $r:\ x-3=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **b)** $t:\begin{cases} x=h \\ y=h \\ z=h \end{cases} ;h\in IR.$

18. $\alpha: 4x+3=0$

19. **a)** (i) $P'(4,-3,-1)$ (ii) $P'(0,-1,1)$ (iii) $P'\left(-\dfrac{2}{17},\dfrac{53}{17},-\dfrac{3}{17}\right)$

b) $s: X=(-1,-2,0)+h(15,87,-3)$; $h\in IR$

20. $(r,s)=0°$

21. **a)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$ **b)** $(r,\alpha)=\text{arc sen}\left(\sqrt{\dfrac{3}{29}}\right)$.

22. **a)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{7}{2\sqrt{21}}\right)$ **b)** $(\alpha,\beta)=\text{arc cos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{29}\sqrt{14}}\right)$.

23. $s: X=(1,0,1)+h(\sqrt{2},3+\sqrt{2},-3+\sqrt{2})$; $h\in IR$ e

$s': X=(1,0,1)+t(-\sqrt{2},3-\sqrt{2},-3-\sqrt{2})$; $t\in IR$.

24. $\alpha_1:\ z-1=0$ e $\alpha_2:\ 4y-3z-1=0$.

25. $(\alpha,s)=\text{arc sen}\left(\dfrac{14}{3\sqrt{105}}\right)$.

26. a) $d(P,r)=\sqrt{\dfrac{29}{6}}$ **b)** $d(P,\pi)=0$ **c)** $d(r,s)=\dfrac{32}{\sqrt{62}}$

d) $d(r,s)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **e)** $d(r,\pi)=0$.

27. a) $\beta: 2x-2y-z+12=0$ e $\gamma: 2x-2y-z-18=0$.

b) (i) Plano $\pi: 6x+5y-7z-27=0$. (ii) Reta $s:\begin{cases} x=2 \\ y-2=3-z \end{cases}$

c) $r:\begin{cases} 2x-y+2z-3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$

28. $h = 2\sqrt{2}$ u.c.

29. **a)** $d(P,s) = 2\sqrt{3}$ **b)** $d(P,\alpha) = \sqrt{14}$ **c)** $m: X = (1,-4,5) + t(7,-3,5)\,;\ t \in IR$.

30. **a)** $\alpha: x + y + z - 1 = 0$ **b)** $r: \begin{cases} x = -1 + h \\ y = 3 - 2h \\ z = -1 + h \end{cases}\ ;\ h \in IR$. **c)** $\beta: x - z - 1 = 0$

d) $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $E(-1,2,0)$.

31. a) reta $AF: x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-3}$ b) Plano $ABF: \begin{cases} x = t + h \\ y = 2 + 2t + h \\ z = -3t - h \end{cases}\ , t\,, h \in IR$.

c) $D = (-1,-2,3)$. d) Plano $EFG: x + y - z - 2 = 0$.

32. $V = \dfrac{100}{3}$ u.v.

33. $t: X = (4,-1,4) + h(1,-1,1)\ ;\ h \in IR$.

34. Se r é a reta interseção dos planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, todo ponto de r satisfaz às equações destes planos. Ou seja, se $P(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de r, então $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ e $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0$. Daí, o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ satisfaz à equação $ax + by + cz + d + t(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$. Logo, esta última equação representa um plano que contém a reta r.

Por outro lado, seja $\gamma: \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$ um plano distinto de β e que contém a reta r. Vamos mostrar que existe um $t_0 \in IR$, tal que uma equação do plano γ é $ax + by + cz + d + t_0(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$.
Então, se r está contida em γ as condições seguintes devem ser satisfeitas:

(i) $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{v}_r = 0$ (ii) Todo ponto P de r pertence a γ.

Como r é a interseção de α e β, temos que $\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$, daí, $\vec{n}_\gamma \cdot (\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) = 0$. Ou seja, $[\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = 0$. Logo, os vetores $\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são coplanares. Como $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são linearmente independentes, existem escalares t_1 e t_2, tais que $\vec{n}_\gamma = t_1\vec{n}_\alpha + t_2\,\vec{n}_\beta$. Observe que como γ e β são distintos, t_1 não pode ser igual a zero. Assim, podemos escrever: $\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha + \dfrac{t_2}{t_1}\vec{n}_\beta$.

Fazendo $t_0 = \dfrac{t_2}{t_1}$, temos $\vec{n}_\gamma = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a + t_0a_1, b + t_0b_1, c + t_0c_1)$. Então uma equação do plano γ é :

$$(a + t_0a_1)x + (b + t_0b_1)y + (c + t_0c_1)z + \bar{d} = 0.$$

Utilizando a condição (ii), seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de r, então temos:

$$(a + t_0a_1)x_0 + (b + t_0b_1)y_0 + (c + t_0c_1)z_0 + \bar{d} = 0$$

Daí, $\bar{d} = (-ax_0 - by_0 - cz_0) + t_0(-a_1x_0 - b_1x_0 - c_1z_0) = d + t_0d_1$.
Portanto,

$$\gamma : ax + by + cz + d + t_0(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0.$$

35. **a)** $22x - 3y + 42z - 237 = 0$ **b)** $3x - 7y + 11z - 31 = 0$

c) $2x - 3y + 6z - 21 = 0$ ou $92x + 327y - 96z - 1059 = 0$

d) $x - 14y + 13z - 8 = 0$

e) $3x - 2y + 7z - 32 = 0$ **f)** $5y - 4z - 1 = 0$.