

Sistemas e Sinais Discretos

Texto de Apoio

Controladores PID

(Versão Beta 0.1)

Alexandre Manuel Mota
Departamento de Electrónica Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

2 de Outubro de 2018

Conteúdo

1	Controladores PID	1
1.1	Introdução	1
1.2	Controlador <i>ON-OFF</i>	1
1.2.1	Princípio de Funcionamento	1
1.2.2	Diagrama de Blocos (1)	2
1.2.3	Diagrama de Blocos (2)	3
1.3	Controlador Proporcional	4
1.3.1	Princípio de Funcionamento	4
1.3.2	Diagrama de Blocos	5
1.3.3	Exemplo de aplicação	6
1.4	Controlador Proporcional Integral	6
1.4.1	Princípio de Funcionamento	6
1.4.2	Acção Integral (Análise Qualitativa)	7
1.4.3	Diagrama de Blocos	8
1.4.4	Exemplo de aplicação	9
1.4.5	Integral <i>windup</i>	10
1.4.6	Limitação do Controlador Proporcional Integral	11
1.5	Controlador Proporcional Integral Diferencial	11
1.5.1	Princípio de Funcionamento	11
1.5.2	Diagrama de Blocos (1)	12
1.5.3	Diagrama de Blocos (2)	13
1.5.4	Função de Transferência em Malha Fechada	14
1.5.5	Acção Diferencial (Análise Qualitativa)	14
1.5.6	Exemplo de aplicação	15
1.5.7	Diagrama de Blocos (3)	16
1.5.8	Diagrama de Blocos (4)	17
1.5.9	Controlador IPD	17
1.5.10	Controlador PD	18
1.5.11	Outras Abordagens	19
2	Sintonia dos parâmetros dos controladores PID	21

2.1	Métodos “clássicos”	21
2.1.1	Sintonia de Ziegler-Nichols de Malha Aberta	21
2.1.2	Sintonia de Ziegler-Nichols de Malha Fechada	26
2.2	Limitações deste tipo de abordagens	31
2.3	Sintonia por realimentação com relé (<i>Relay Feedback Method</i>) . . .	31
2.3.1	Exemplo de aplicação	33
2.4	Outros métodos	36
3	Controladores PID - Abordagem Discreta	37
3.1	Introdução	37
3.2	Controlador PI Discreto	37
3.2.1	Modelo do controlador	37
3.2.2	Função de Controlo (1)	38
3.2.3	Função de Controlo (2)	39
3.2.4	Escolha do intervalo de amostragem	39
3.2.5	Integral <i>windup</i>	40
3.3	Controlador PID Discreto (1)	40
3.3.1	Modelo do controlador	40
3.3.2	Função de Controlo (1)	41
3.3.3	Função de Controlo (2)	42
3.4	Controlador PID Discreto (2)	42
3.4.1	Modelo do controlador	42
3.4.2	Função de Controlo (1)	44
3.4.3	Função de Controlo (2)	45
3.4.4	Escolha do intervalo de amostragem	45
3.4.5	Exemplo de aplicação	45
3.5	Controlador IPD Discreto	48
3.6	Comparação do desempenho dos controladores PID e IPD discretos	49

Capítulo 1

Controladores PID

1.1 Introdução

De acordo com Willy K. Wojsznis e Terry Blevins o primeiro controlador PID foi desenvolvido por Elmer Sperry em 1911 e a sua primeira análise teórica foi efectuada por Nicolas Minorsky em 1922. Tratava-se, à data, de desenvolver sistemas automáticos de controlo do leme de navios. Desde essa altura até à presente data este tipo de controladores passou por muitas evoluções e tornou-se no tipo de controlador mais comum.

Segundo Desborough e R. Miller com base numa pesquisa, efectuada em 2002, em mais de 11 mil malhas de controlo da indústria petrolífera, química e de papel, 97% dos controladores eram do tipo PID embora muitos desses controladores fossem realmente do tipo proporcional-integral (PI), pois a acção derivativa estava frequentemente desligada.

Apesar da sua idade os sistemas de controlo baseados no controlador PID ainda merecem hoje uma enorme atenção por parte da comunidade científica. De referir, por exemplo, o congresso PID'12 promovido para IFAC (*International Federation for Automatic Control*) em 2012 onde foram apresentados mais de 100 artigos científicos.

1.2 Controlador *ON-OFF*

1.2.1 Princípio de Funcionamento

O controlador mais simples é o controlador *ON-OFF*, também designado por controlador *Bang-Bang*.

Neste tipo de controlador o sinal de erro é aplicado na entrada de um comparador cuja saída actua directamente na entrada do sistema.

O sinal de controlo $u(t)$, para este tipo de controlador, é dado por:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} & \Rightarrow e(t) > 0 \\ U_{\min} & \Rightarrow e(t) < 0 \end{cases}$$

em que $e(t)$ é o sinal de erro definido como $e(t) = r(t) - y(t)$. U_{\max} e U_{\min} são,

respectivamente, o maior e o menor valor que o sinal de controlo $u(t)$ pode tomar. O sinal $u(t)$ pode, por exemplo, ser utilizado para impôr o estado de um relé.

O comportamento do sinal de controlo em função do sinal de erro do controlador *ON-OFF* pode ser descrito, de forma gráfica, pela figura 1.1.

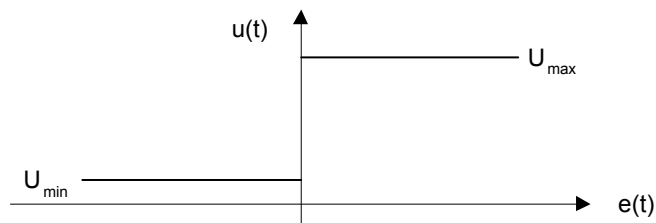


Figura 1.1: Controlador *ON-OFF* - Sinal de Controlo

Dependendo do sinal de erro $e(t)$ o sinal de controlo toma o valor máximo ou mínimo. Partindo do princípio que o ganho estático do sistema é positivo temos que:

- $e(t)$ negativo significa que o sinal de saída $y(t)$ é superior ao sinal de referência $r(t)$, logo o sinal de controlo deve tomar o valor mínimo.
- $e(t)$ positivo significa que o sinal de saída $y(t)$ é inferior ao sinal de referência $r(t)$, logo o sinal de controlo deve tomar o valor máximo.

É imediato concluir que num sistema real o sinal de controlo exibirá uma oscilação permanente. Esta oscilação terá, forçosamente, de se reflectir igualmente no sinal de saída.

1.2.2 Diagrama de Blocos (1)

O diagrama de blocos de um sistema de controlo utilizando um controlador *ON-OFF* é apresentado na figura 1.2 no qual os sinais no domínio do tempo foram substituídos pelas transformadas de Laplace correspondentes.

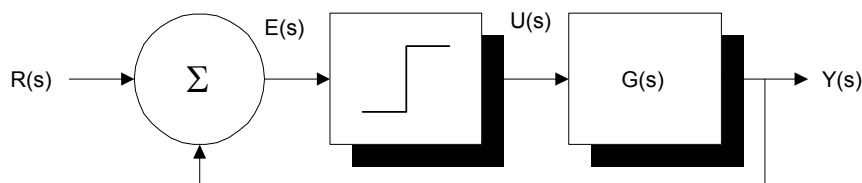


Figura 1.2: Controlador *ON-OFF* - Diagrama de Blocos

O sinal de controlo $U(s)$ possui dois estados possíveis dependentes da posição relativa entre o sinal de saída $Y(s)$ e o sinal de referência $R(s)$.

O sinal de erro, obtido por subtracção do sinal de saída $Y(s)$ do sinal de referência $R(s)$, é aplicado ao elemento não-linear dando origem a $U(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

1.2.3 Diagrama de Blocos (2)

O controlador *ON-OFF* apresenta severas limitações quando é utilizado para controlar sistemas afectados de ruído. No exemplo da figura 1.3, na vizinhança de $r(t)$, o funcionamento do controlador é afectado pelo ruído de $y(t)$ provocando comutações múltiplas na saída.

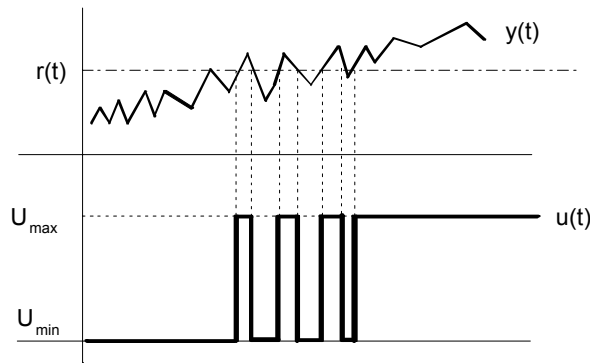


Figura 1.3: Comparação de sinais afectados de ruído

Uma possibilidade de ultrapassar o problema das comutações múltiplas na presença de ruído passa pela introdução de histerese no controlador.

Assim, o comportamento do sinal de controlo em função do sinal de erro do controlador *ON-OFF* com histerese pode ser descrito, de forma gráfica, pela figura 1.4.

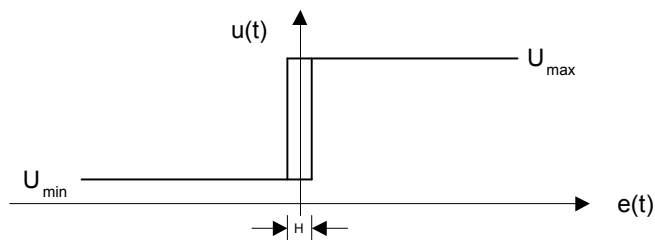


Figura 1.4: Sinal de controlo com histerese

Para valores do sinal de erro inferiores, em módulo, a metade da histerese, a saída do controlador não muda de estado. Como, em qualquer sistema real, a presença de ruído é inevitável, a utilização de histerese é imperativa em aplicações práticas.

1.3 Controlador Proporcional

1.3.1 Princípio de Funcionamento

Uma solução capaz de evitar as oscilações inerentes ao princípio de funcionamento do controlador *ON-OFF* consiste em utilizar um controlador cujo ganho seja reduzido para pequenos valores do erro. Este objectivo pode ser alcançado utilizando uma "banda proporcional" ou Controlador Proporcional.

O sinal de controlo para este tipo de controlador é dado por:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} & \Rightarrow e(t) > +e_o \\ u_o + K_p e(t) & \Rightarrow -e_o \leq e(t) \leq +e_o \\ U_{\min} & \Rightarrow e(t) < -e_o \end{cases}$$

em que u_o é a amplitude do sinal de controlo correspondente a um sinal de erro $e(t)$ nulo, $-e_o$ e $+e_o$ são os valores máximos do sinal de erro, U_{\max} e U_{\min} são, respectivamente, a maior e a menor amplitudes do sinal de controlo e K_p é o ganho do controlador. O comportamento do sinal de controlo em função do sinal de erro no controlador proporcional pode ser descrito, de forma gráfica, pela figura 1.5.

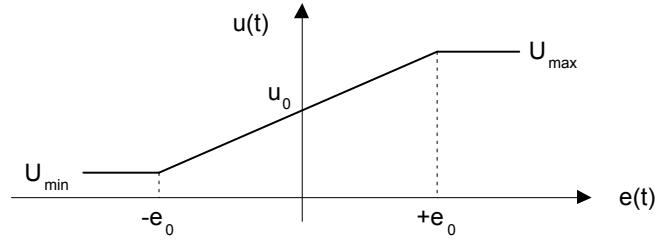


Figura 1.5: Controlador Proporcional - Sinal de Controlo

O controlador apresenta, tal como se pode ver na figura 1.5, um comportamento linear no intervalo $[-e_o, +e_o]$ e um comportamento não-linear (semelhante ao do controlador *ON-OFF*) fora deste intervalo.

Na maioria dos controladores comerciais o ganho proporcional K_p não é referido explicitamente antes sendo a sua **banda proporcional (PB)**. A relação entre os dois é a seguinte:

$$PB = \frac{100}{K_p} \%$$

O que significa que, por exemplo, um ganho K_p unitário corresponde a uma banda proporcional igual a 100%.

Ao longo deste texto utilizar-se-á, contudo, o ganho proporcional quando se referir a componente de ganho.

Utilizando um controlador proporcional é possível eliminar a oscilação permanente intrínseca ao controlador *ON-OFF*. Este objectivo origina, contudo, o aparecimento de um outro problema: não é possível garantir que o erro em estado estacionário seja igual a zero.

É fácil provar esta última afirmação:

Supondo que o erro $e(t)$ é pequeno, o sinal de controlo $u(t)$ é dado pela seguinte expressão:

$$u(t) = u_o + K_p e(t)$$

Isto significa que o sinal de erro $e(t)$ é:

$$e(t) = \frac{u(t) - u_o}{K_p}$$

Em estado estacionário o erro é nulo se e só se uma das seguintes condições fôr verdadeira:

- O ganho K_p é infinito.
- O sinal $u_o = u(t)$.

A primeira condição conduz a um controlador cujo comportamento é semelhante ao do controlador *ON-OFF*.

A segunda condição implica que o sinal u_o seja variável de modo a que o erro em estado estacionário seja sempre nulo para qualquer valor da entrada de referência.

A obtenção automática de um sinal u_o variável capaz de proporcionar um erro estacionário nulo para todo e qualquer valor da entrada de referência conduz ao controlador Proporcional-Integral (**PI**).

Na impossibilidade de se utilizar um controlador PI é possível minimizar o erro estacionário escolhendo para u_o um valor igual a metade da gama de variação do sinal de controlo $u(t)$.

1.3.2 Diagrama de Blocos

Num sistema de controlo do tipo proporcional, cujo diagrama de blocos é apresentado na figura 1.6, o controlador é composto por duas componentes: um bloco subtrator, responsável pela obtenção do sinal de erro $e(t)$, e um bloco de ganho.

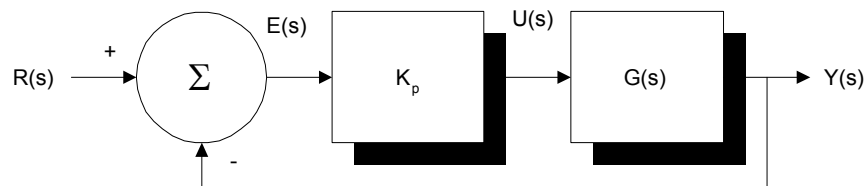


Figura 1.6: Controlador Proporcional

Supondo uma representação do comportamento do sistema através da utilização de transformadas de Laplace (supondo as condições iniciais nulas e $Y(s) = L[y(t)]$, $U(s) = L[u(t)]$, $E(s) = L[e(t)]$ e $R(s) = L[r(t)]$) temos que as expressões do sinal de erro e do sinal de controlo são:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$U(s) = K_p E(s) = K_p (R(s) - Y(s)) \quad (1.1)$$

O sinal de erro corresponde à diferença entre o sinal de referência $R(s)$ e o sinal de saída do sistema $Y(s)$. O sinal de controlo $U(s)$ é igual ao produto do sinal de erro $E(s)$ pelo ganho K_p do controlador.

1.3.3 Exemplo de aplicação

A figura 1.7 apresenta as respostas, em malha fechada, a um degrau unitário de um sistema cuja função de transferência em malha aberta é $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ quando o ganho do controlador (K_p) varia de 0.1 a 1.

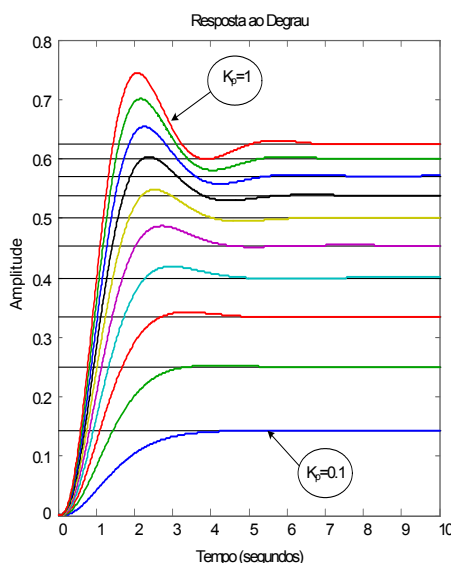


Figura 1.7: Respostas ao degrau de um sistema com controlador P

Como é evidente pela análise da figura 1.7 o sistema exibe, sempre, erro em regime estacionário e a sua resposta dinâmica é tanto mais oscilatória quanto maior é o ganho do controlador.

Será possível aumentar nestas condições, sem restrições, o valor do ganho K_p do controlador no sentido de diminuir o erro em regime estacionário?

A resposta é imediata: não é possível aumentar o ganho K_p sob pena do sistema, a partir de um determinado valor, oscilar ou divergir em malha fechada. Para o presente exemplo é fácil verificar que o limite de estabilidade ocorre para $K_p = 6$.

1.4 Controlador Proporcional Integral

1.4.1 Princípio de Funcionamento

Num sistema de controlo do tipo proporcional integral (PI), cujo o diagrama de blocos é apresentado na figura 1.8, o controlador é composto por 4 componentes:

um bloco subtractor (responsável pela obtenção do sinal de erro), um bloco integrador (responsável pelo cálculo do integral do sinal de erro), um bloco somador e um bloco de ganho.

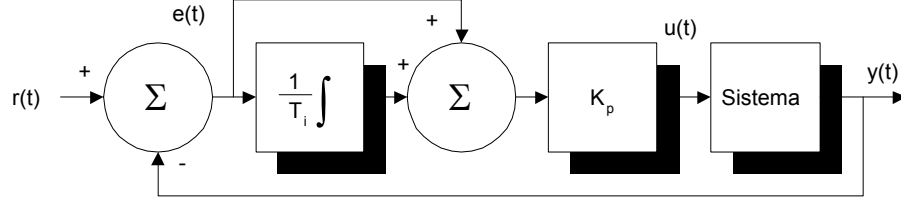


Figura 1.8: Controlador Proporcional Integral

O sinal de controlo, $u(t)$, é definido pela seguinte expressão:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right) \quad (1.2)$$

O sinal de controlo depende do ganho do controlador (K_p), do valor instantâneo do sinal de erro e do integral desse mesmo erro afectado de um factor de escala ($1/T_i$).

Ao parâmetro T_i dá-se o nome de tempo de integração.

1.4.2 Acção Integral (Análise Qualitativa)

Da análise do comportamento do controlador proporcional supondo que o erro $e(t)$ é pequeno o sinal de controlo $u(t)$ é dado pela expressão:

$$u(t) = u_o + K_p e(t)$$

O sinal de erro $e(t)$ é:

$$e(t) = \frac{u(t) - u_o}{K_p}$$

Em estado estacionário o erro é nulo se uma das seguintes condições for verdadeira: $K_p = \infty$ ou $u_o = u(t)$.

A primeira condição conduz a um controlador do tipo *ON-OFF*. A segunda condição implica um sinal u_o variável.

A obtenção automática de um sinal u_o variável é conseguido através da utilização do integral:

$$u_o = \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt$$

O integral do sinal de erro é igual à área debaixo da curva do próprio sinal de erro.

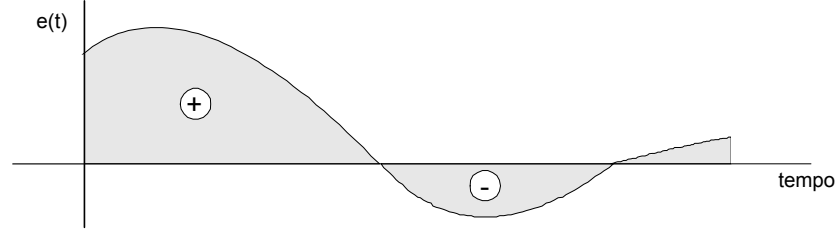


Figura 1.9: Sinal de Erro

A área debaixo da curva do sinal de erro é proporcional ao integral do sinal de erro.

Se o sinal de erro é diferente de zero o sinal u_0 está sempre a aumentar ($e(t) > 0$) ou a diminuir ($e(t) < 0$). Se o sinal de erro é nulo o sinal u_0 mantém-se fixo. Este comportamento elimina o erro em estado estacionário.

É fácil provar esta afirmação.

1. Supondo que o sinal $r(t)$ está constante.
2. Se (por hipótese) o sinal $e(t)$ está constante e diferente de 0 então o sinal de controlo $u(t)$ (devido à acção integral) está a subir ou a descer; (se o sinal $e(t)$ está constante então o produto $K_p e(t)$ também é constante).
3. Se o sinal de controlo $u(t)$ está a subir (ou a descer), o sinal de saída $y(t)$ também se encontra a subir (ou a descer); Então o sinal $e(t) = y(t) - r(t)$ não pode ser constante e contradiz a condição 2.

O que significa que o sinal de erro $e(t)$ quando é constante tem de ser igual a zero.

1.4.3 Diagrama de Blocos

Utilizando as transformadas de Laplace (supondo as condições iniciais nulas), temos que a expressão do sinal de erro e do sinal de controlo são:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (1.3)$$

$$U(s) = K_p \left(E(s) + \frac{1}{sT_i} E(s) \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) E(s)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) (R(s) - Y(s)) \quad (1.4)$$

O diagrama de blocos correspondente é apresentado na figura 1.10.

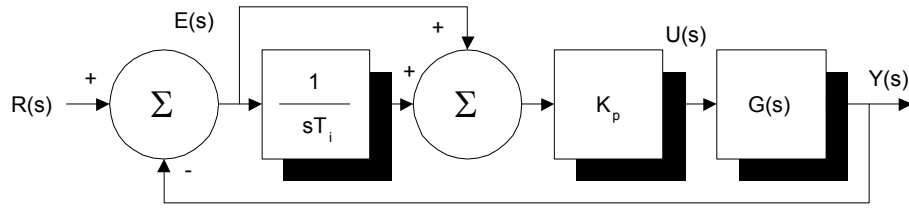


Figura 1.10: Controlador Proporcional Integral

Pelo que a expressão da função de transferência do controlador é:

$$G_R(s) = K_p \left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right) \quad (1.5)$$

É possível concluir que a função de transferência do controlador proporcional integral possui um polo na origem e um zero sobre o eixo real negativo localizado em $s = -(1/T_i)$.

1.4.4 Exemplo de aplicação

A figura 1.11 apresenta as respostas, em malha fechada, a um degrau unitário de um sistema cuja função de transferência em malha aberta é $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ quando o ganho do controlador (K_p) é igual a 1 e o valor de T_i varia de 0.5 a 1.5.

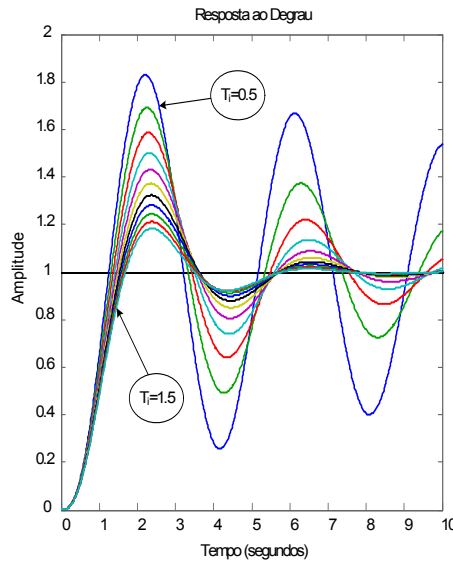


Figura 1.11: Respostas ao degrau de um sistema com controlador PI

Da análise da figura 1.11 o sistema exibe, sempre, erro em regime estacionário nulo e a sua resposta dinâmica é tanto mais oscilatória quanto menor é o ganho

T_i do controlador. É possível verificar que para valores de T_i abaixo de 0.5 o sistema é instável em malha fechada¹.

1.4.5 Integral *windup*

Um controlador que inclua acção integral combinado com um actuador capaz de saturar pode conduzir a comportamentos dinâmicos indesejáveis em malha fechada. Na prática esta situação acontece sempre. Por exemplo uma válvula satura quando está totalmente aberta ou totalmente fechada. Outro exemplo são os amplificadores electrónicos que estão limitados na amplitude dos sinais na saída.

Quando o actuador satura o sistema fica efectivamente em malha aberta. Se o termo integrador continua a acumular o valor do erro a sua saída cresce descontroladamente (*windup*) até que o sinal do erro se altere. Este comportamento pode levar uma grande sobre-elevação do sinal de saída. De notar que o termo integrador, ao possuir um polo na origem, é instável em malha aberta.

A solução para este problema consiste na utilização de uma malha de realimentação adicional para o termo integrador garantindo que o mesmo nunca fica em malha aberta. Uma possibilidade será a apresentada na figura 1.12.

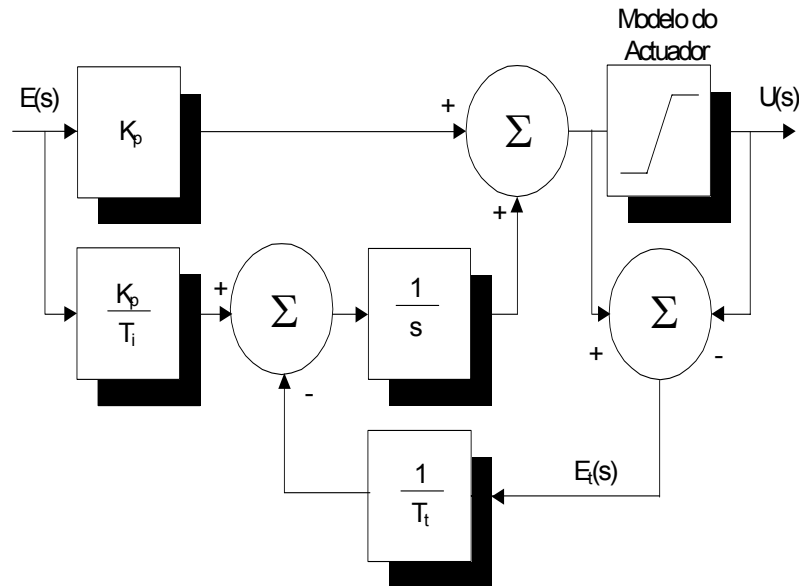


Figura 1.12: Controlador PI com *anti-windup*

No diagrama de blocos da figura 1.12 logo que o sinal de saída do modelo do actuador difere do sinal de entrada correspondente o sinal $E_t(s)$ é positivo fechando a malha do integrador e impedindo que o valor do integral cresça descontroladamente.

¹A justificação para este comportamento é simples e completamente previsível através da análise do mapa de polos do sistema em malha aberta. À medida que T_i vai diminuindo o polo associado vai-se aproximando da origem o que diminui a margem de ganho do sistema.

1.4.6 Limitação do Controlador Proporcional Integral

Apesar do controlador PI eliminar o erro em estado estacionário é incapaz de reagir com base na derivada do erro. Esta limitação é evidente da análise da figura 1.13.

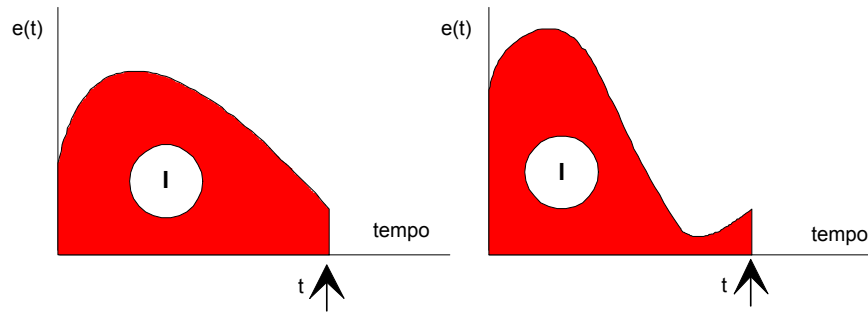


Figura 1.13: Derivada do erro

Supondo as duas áreas iguais: No instante t , nas duas situações, os sinais de controlo são iguais. Contudo, existe uma grande diferença entre as duas situações:

- Na curva da esquerda o erro está a diminuir.
- Na curva da direita o erro está a aumentar.

Esta facilidade pode-se encontrar no controlador PID descrito de seguida.

1.5 Controlador Proporcional Integral Diferencial

1.5.1 Princípio de Funcionamento

Num sistema de controlo do tipo proporcional integral diferencial (PID), cujo o diagrama de blocos é apresentado na figura 1.14, o controlador é um composto por 5 componentes: um bloco subtrator (responsável pela obtenção do sinal de erro), um bloco integrador (responsável pelo cálculo do integral do sinal de erro), um bloco diferenciador (responsável pelo cálculo da derivada do erro), um bloco somador e um bloco de ganho.

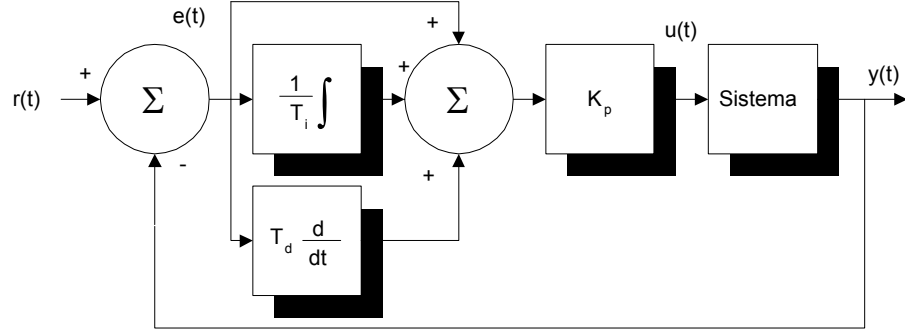


Figura 1.14: Controlador Proporcional Integral Diferencial

O sinal de controlo, $u(t)$, é definido pela seguinte expressão:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1.6)$$

O sinal de controlo depende do ganho do controlador (K_p), do valor instantâneo do sinal de erro, do integral e da derivada desse mesmo erro afectados respectivamente dos factores de escala ($1/T_i$) e T_d .

Ao parâmetro T_i dá-se, como já foi referido anteriormente, o nome de tempo de integração.

Ao parâmetro T_d dá-se o nome de tempo de diferenciação.

1.5.2 Diagrama de Blocos (1)

Utilizando as transformadas de Laplace (supondo as condições iniciais nulas), temos que a expressão do sinal de controlo é:

$$U(s) = K_p \left(E(s) + \frac{1}{sT_i} E(s) + sT_d E(s) \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) E(s)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) (R(s) - Y(s)) \quad (1.7)$$

O diagrama de blocos correspondente é apresentado na figura 1.15.

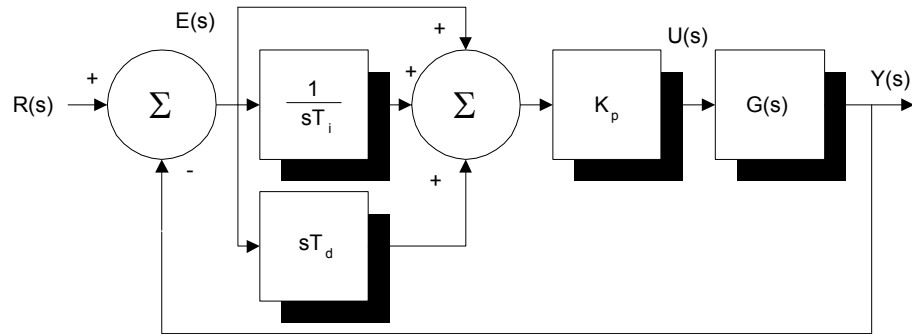


Figura 1.15: Controlador Proporcional Integral Diferencial

Pelo que a função de transferência do controlador é:

$$G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (1.8)$$

ou

$$G_R(s) = K_p \left(\frac{s^2 T_d + s + \frac{1}{T_i}}{s} \right)$$

É possível concluir que a função de transferência do controlador PID possui um polo na origem (responsável pela acção integral) e dois zeros (responsáveis pela resposta transitória) dependentes dos coeficientes T_i e T_d .

É fácil obter a localização destes dois zeros bastando, para o efeito, resolver a equação de segunda ordem que constitui o numerador da expressão do sinal de controlo:

$$s^2 T_d + s + \frac{1}{T_i} = 0$$

Pelo que:

$$s_1, s_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}}{2T_d}$$

É possível ter uma ideia das localizações dos zeros do controlador PID.

São possíveis distinguir facilmente 3 situações:

- $T_i = 4T_d$

Um zero real duplo para $s = -\frac{1}{2T_d}$;

- $T_i > 4T_d$

Dois zeros reais negativos;

- $T_i < 4T_d$

Dois zeros complexos conjugados.

A cada situação corresponderá, necessariamente, um comportamento transitório distinto.

1.5.3 Diagrama de Blocos (2)

A figura 1.16 apresenta um diagrama de blocos alternativo ao da figura 1.15

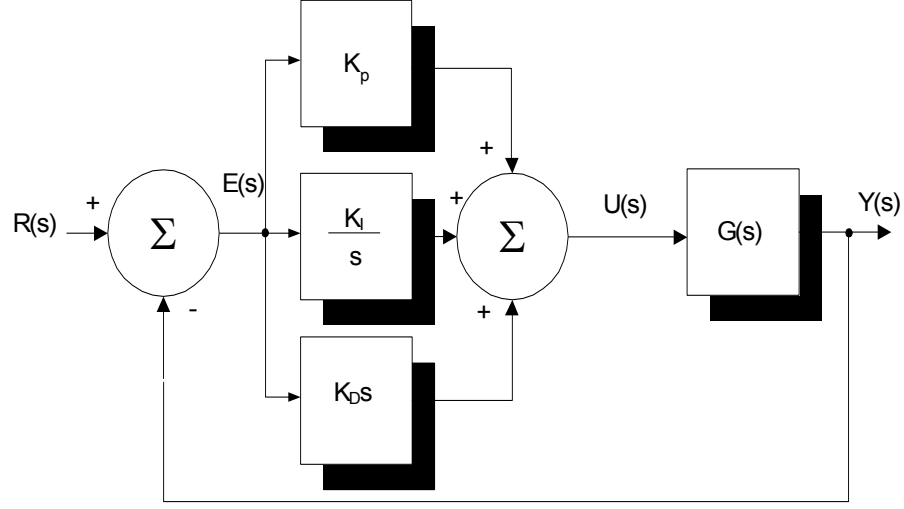


Figura 1.16: Controlador PID - Diagrama de blocos alternativo

Por comparação com a figura 1.15 temos:

$$K_P = K_p$$

$$K_I = \frac{K_p}{T_i}$$

$$K_D = K_p T_d$$

1.5.4 Função de Transferência em Malha Fechada

Com base no diagrama de blocos da figura 1.16 é possível obter a função de transferência em malha fechada.

Supondo que $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ temos:

$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} U(s)$$

$$U(s) = \left(K_D s + \frac{K_I}{s} + K_P \right) (R(s) - Y(s))$$

Desenvolvendo é possível concluir que:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_D s^2 + K_P s + K_I) N(s)}{s D(s) + (K_D s^2 + K_P s + K_I) N(s)} \quad (1.9)$$

Se a função de transferência do sistema a controlar não possuir zeros os zeros de malha fechada correspondem apenas aos introduzidos pelo controlador PID.

1.5.5 Acção Diferencial (Análise Qualitativa)

Com auxílio da figura 1.13 e partindo do pressuposto de que o sinal de referência é constante, é possível concluir que no instante t o sinal de erro do diagrama da

esquerda está a descer o que significa que a acção do controlador está a ser tomada no sentido correcto. No diagrama da direita o sinal de erro está a subir pelo que o controlador deve variar (rapidamente) em sentido contrário para obrigar o sinal de erro a voltar a zero.

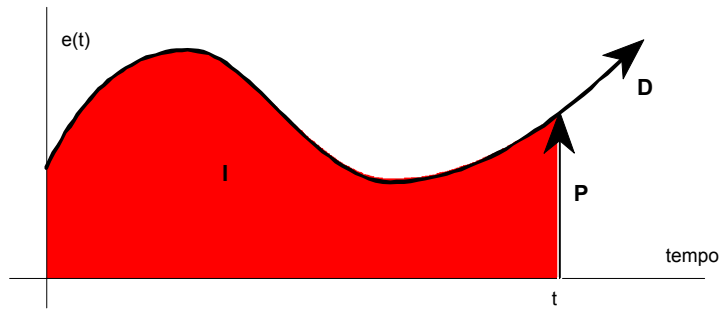


Figura 1.17: Acção proporcional, integral e diferencial

A utilização da derivada do erro na expressão do sinal de controlo permite este tipo de compensação. O sinal de controlo possui, assim, uma componente proporcional à taxa de variação do erro (figura 1.17).

Podemos concluir que no controlador PID o sinal de controlo é proporcional ao:

- valor instantâneo do erro (P);
- integral do erro (I);
- derivada do erro (D).

1.5.6 Exemplo de aplicação

A figura 1.18 apresenta as respostas, em malha fechada, a um degrau unitário de um sistema cuja função de transferência em malha aberta é $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ quando $K_p = T_i = 1$ e T_d varia de 0.1 a 1.

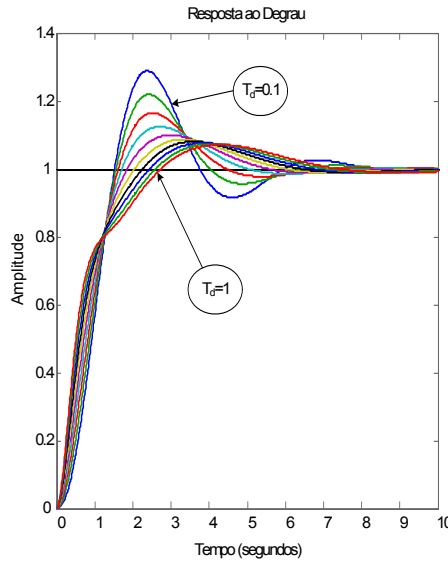


Figura 1.18: Respostas ao degrau de um sistema com controlador PID

Da análise comparativa entre os resultados da figura 1.11 e da figura 1.18 é possível concluir que a presença da acção diferencial diminui a sobre-elevação da resposta em malha fechada.

1.5.7 Diagrama de Blocos (3)

Para evitar os efeitos do ruído o sinal de saída é filtrado (com um filtro passa-baixo) antes de ser calculada a sua derivada. Neste caso a função de transferência do controlador é:

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N}s} \right) \quad (1.10)$$

O valor de N é tipicamente igual a 10.

O que corresponde ao diagrama de blocos da figura 1.19.

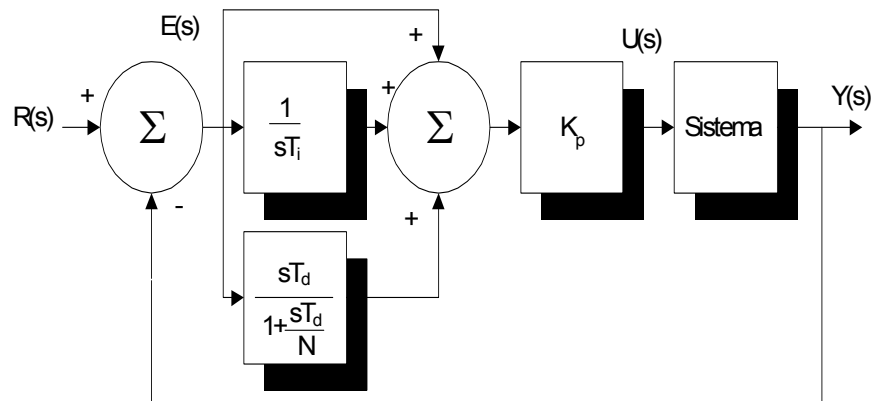


Figura 1.19: Controlador PID com filtragem no termo derivativo

1.5.8 Diagrama de Blocos (4)

Na prática não se utiliza a derivada do sinal de erro mas antes do sinal de saída evitando que variações bruscas no sinal de referência provoquem oscilações indesejáveis no sinal de controlo. A expressão do sinal de controlo será:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

Na prática o sinal de saída é filtrado antes de ser aplicado na entrada do diferenciador o que corresponde ao diagrama de blocos da figura 1.20.

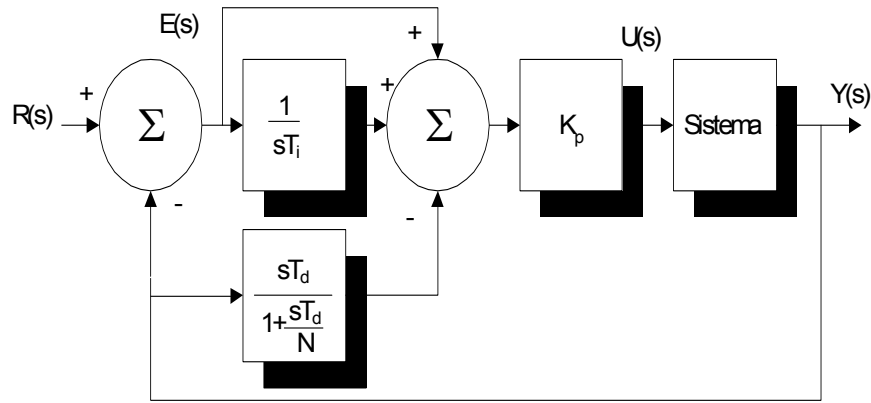


Figura 1.20: Controlador PID com derivada apenas no sinal de saída

A transformada de Laplace do sinal de controlo será dada pela expressão:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) (R(s) - Y(s)) - \frac{K_p T_d s}{1 + \frac{T_d}{N}s} Y(s)$$

1.5.9 Controlador IPD

Como já foi referido anteriormente o controlador PID introduz na malha de realimentação dois zeros. Como é conhecido, e apresentado anteriormente, estes dois zeros mantêm-se na função de transferência de malha fechada e condicionam fortemente a resposta transitória. Seria desejável dispôr de um controlador com as características do controlador PID mas em que a resposta transitória fosse apenas influenciada pelo posicionamento dos polos de malha fechada. Este objectivo é possível de alcançar modificando ligeiramente a estrutura do controlador PID tal como é apresentada na figura 1.21.

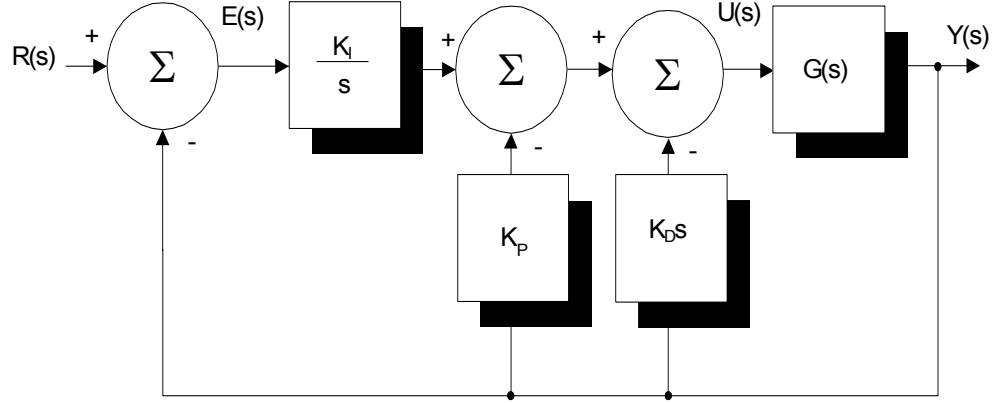


Figura 1.21: Controlador IPD

Com base no diagrama de blocos da figura 1.21 é possível obter a função de transferência em malha fechada.

Supondo que $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ temos:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s)$$

$$U(s) = -(K_D s + K_P)Y(s) + \frac{K_I}{s}(R(s) - Y(s))$$

Desenvolvendo é possível concluir que:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_I N(s)}{sD(s) + (K_D s^2 + K_P s + K_I)N(s)}$$

O controlador IPD não introduz zeros na função de transferência de malha fechada embora a localização dos polos de malha fechada seja a mesma que se obtém com o controlador PID².

1.5.10 Controlador PD

Quando o sistema a controlar não for sujeito a carga e possuir um polo na origem é dispensável a utilização de um controlador com acção integral uma vez que, em malha fechada, o sistema irá possuir erro nulo em estado estacionário. Nesta situação é possível utilizar um controlador do tipo PD cujo diagrama de blocos é apresentado na figura 1.22.

²Como é evidente considerando $K_d = 0$ teremos um controlador IP também sem introdução de zeros.

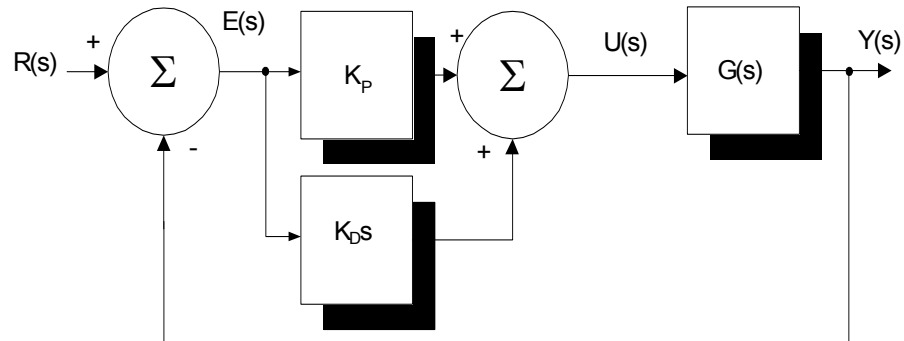


Figura 1.22: Controlador PD

De modo semelhante ao descrito para o controlador PID é possível obter um controlador DP que evita a introdução pelo controlador de zeros em malha fechada.

1.5.11 Outras Abordagens

Existem mais algumas variantes da expressão de um controlador PID. As mesmas não serão aqui alvo de qualquer abordagem. Para mais detalhes consultar, por exemplo, a referência bibliográfica 9.

Capítulo 2

Sintonia dos parâmetros dos controladores PID

Como é evidente do apresentado anteriormente o desempenho de malha fechada de um sistema cujo controlador seja do tipo P, PI ou PID depende dos valores escolhidos para os parâmetros K_p , T_i e T_d . Torna-se então necessário adoptar procedimentos que permitam uma escolha criteriosa dos valores destes parâmetros que conduzam ao comportamento desejado do sistema em malha fechada.

2.1 Métodos “clássicos”

Após a apresentação formal da estrutura de um controlador PID por Callendar et al. em 1936, Ziegler e Nichols apresentam, em 1942 e 1943, duas propostas para a escolha dos respectivos parâmetros. Apesar da idade e das limitações continuam a ser consideradas uma referência. As propostas resultam de uma longa série de experiências no controlo de diversos sistemas e pressupõem que o comportamento do sistema em malha fechada é “optimizado” para rejeitar perturbações de “baixa frequência” resultantes, por exemplo, de variações de carga.

2.1.1 Sintonia de Ziegler-Nichols de Malha Aberta

Aplica-se na entrada do sistema um degrau unitário e observa-se o sinal de saída. Uma vez que o método parte do princípio de que o modelo do sistema a controlar¹ é do tipo:

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT_a} e^{-sL} \quad (2.1)$$

O sinal de saída será semelhante ao representado na figura 2.1.

¹Este modelo, designado usualmente por modelo de Broida ou FOPDT (*First Order Plus Delay Time*), pretende aproximar uma resposta dinâmica de ordem n por uma resposta descrita por um modelo de primeira ordem com tempo morto.

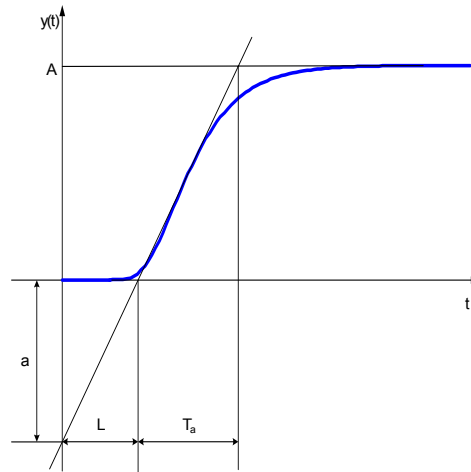


Figura 2.1: Resposta em malha aberta

Da análise visual do gráfico da figura 2.1 é possível identificar o parâmetro L , designado por atraso aparente e o parâmetro T_a , designado por constante de tempo aparente².

Com base no conhecimento destes dois parâmetros o método de sintonia em malha aberta proposto por Ziegler e Nichols sugere que os parâmetros do controlador sejam escolhidos com base na tabela seguinte.

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{RL}$		
PI	$\frac{0.9}{RL}$	$3L$	
PID	$\frac{1.2}{RL}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

Em que o parâmetro R corresponde ao declive $\left(\frac{A}{T_a}\right)$ da recta tangente ao sinal de saída. Se não for possível medir o valor de T_a é possível utilizar o valor de a que facilmente se demonstra ser igual ao produto RL .

Sendo possível medir o valor de T_a os parâmetros do controlador podem, alternativamente, ser escolhidos com base na tabela seguinte.

²Os termos tempo morto aparente e constante de tempo aparente derivam do facto de o modelo utilizado para representar o comportamento dinâmico do sistema a controlar ser uma aproximação do modelo real.

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_a}{AL}$		
PI	$0.9 \frac{T_a}{AL}$	$3 L$	
PID	$1.2 \frac{T_a}{AL}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

Supondo que a expressão do controlador PID é:

$$G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = \frac{1.2T_a}{AL} \left(1 + \frac{1}{s2L} + s\frac{L}{2} \right)$$

Pelo que:

$$G_R(s) = 0.6 \left(\frac{T_a}{A} \right) \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s}$$

O que corresponde a um polo na origem ($s = 0$) e um zero duplo em $s = -\frac{1}{L}$.

O método proposto é essencialmente gráfico e apenas aplicável a sistemas que possam ser representados de forma eficaz através do modelo da equação 2.1. De notar que se o sistema a controlar não possuir tempo morto aparente ($L = 0$) os valores propostos para os parâmetros dos controladores deixam de “fazer sentido”. Por outro lado os parâmetros do controlador PID obtidos com base nesta abordagem conduzem a um sistema em malha fechada (resposta a uma variação da entrada de referência) com um coeficiente de amortecimento próximo de 0.2 (muito pouco amortecido) cuja resposta transitória possui um decaimento de 0.25. Isto significa que por cada período de oscilação a amplitude da mesma cai para um quarto da anterior.

Como foi referido anteriormente os autores do método estavam mais preocupados que o controlador fosse mais eficaz na rejeição de perturbações e menos preocupados em obter uma resposta “óptima” para variações da entrada de referência.

Exemplo de aplicação Considere-se um sistema cuja função de transferência em malha aberta é dada pela expressão:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

A aplicação de um degrau unitário na entrada resulta na resposta apresentada na figura 2.2 de onde é possível obter, após encontrar o ponto da resposta cuja derivada é máxima, o valor de $A \approx 0.42$, de $L \approx 0.64$ segundos e de $T_a \approx 2.37$ segundos.

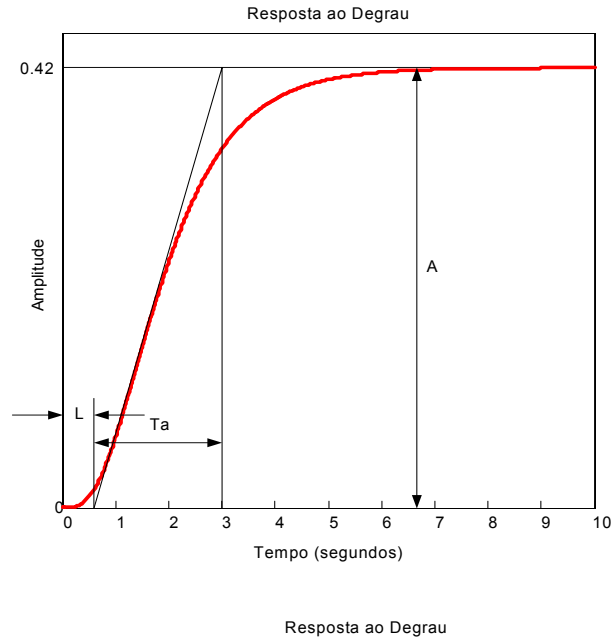


Figura 2.2: Resposta em malha aberta

Com base nos valores obtidos os parâmetros (aproximados) dos três controladores são:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	8.94		
PI	8.05	1.91	
PID	10.73	1.27	0.32

O que corresponde às seguintes três funções de transferência dos controladores:

$$G_{R(P)} = 8.94$$

$$G_{R(PI)} = \frac{15.36s+8.05}{1.91s}$$

$$G_{R(PID)} = \frac{4.34s^2+13.65s+10.73}{s}$$

As respostas em malha fechada, quando a entrada de referência é um degrau unitário, podem ser observadas na figura 2.3.

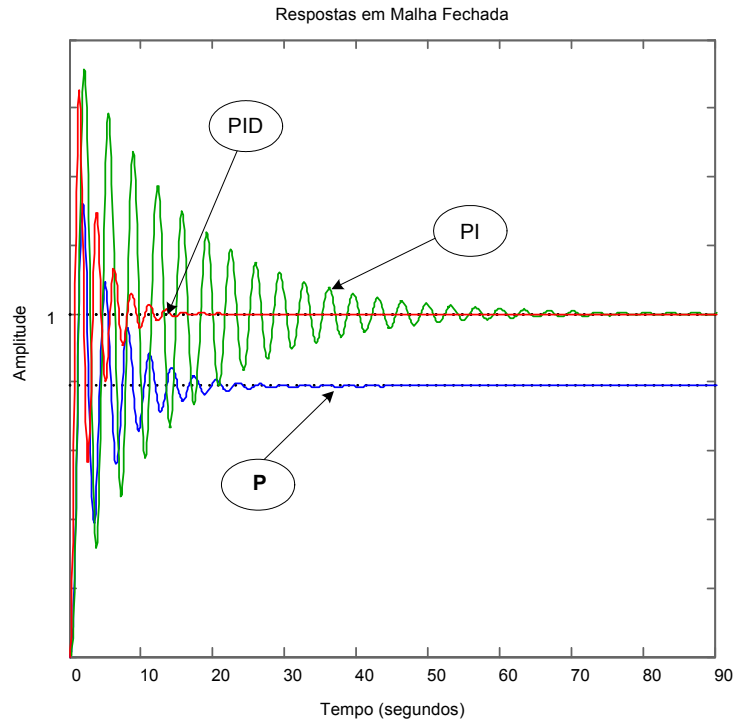


Figura 2.3: Respostas em malha fechada

Da análise da figura 2.3 é imediato concluir que o sistema possui erro em estado estacionário quando o controlador é do tipo proporcional e que o controlador PID é aquele que conduz a uma resposta com menor sobre-elevação (ligeiramente inferior ao PI) e menor tempo de estabelecimento. Apesar do controlador PID conduzir ao melhor desempenho em malha fechada é notória a sobre-elevação do sinal de saída, (próxima dos 70%) o que confirma que este método de ajuste do controlador conduz a sistemas em malha fechada muito pouco amortecidos.

Uma observação importante Os resultados apresentados na figura 2.3 foram obtidos por simulação no **MATLAB** sem que tenha sido introduzida qualquer tipo de limitação na amplitude máxima do sinal de controlo. Na prática isso não é possível pelo que se recomenda alguma prudência na análise destes resultados.

Será admissível (possível) ter sinais de controlo com estas amplitudes ?

Qual o comportamento do sistema, em malha fechada, se existir uma limitação nas amplitudes máximas do sinal de controlo ?

A figura 2.4 apresenta, com recurso ao **Simulink**, as respostas em malha fechada do sistema anterior (com um controlador PID) supondo a presença de um actuador cujo valor máximo da amplitude de saída é, num caso igual a 100 e noutro caso igual a 5.

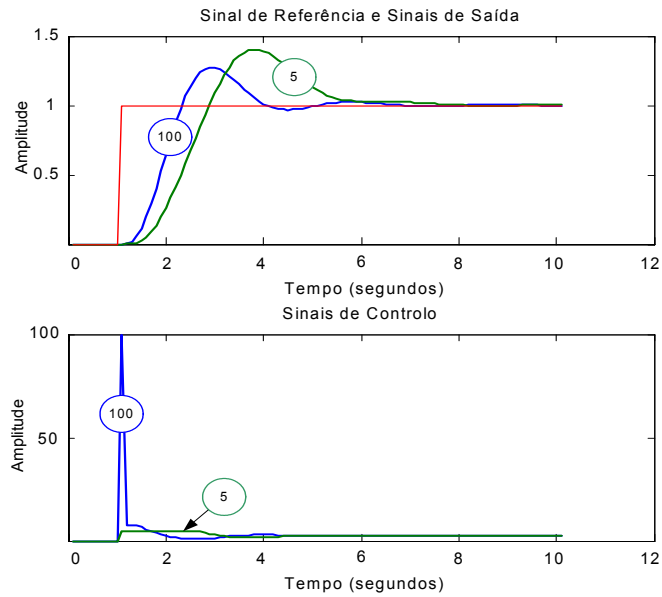


Figura 2.4: Respostas em malha fechada

Da análise da figura 2.4 é imediato concluir que a resposta transitória depende do valor de saturação do actuador.

2.1.2 Sintonia de Ziegler-Nichols de Malha Fechada

Nesta abordagem o sistema é colocado sob controlo de um controlador proporcional tal como é representado na figura 2.5.

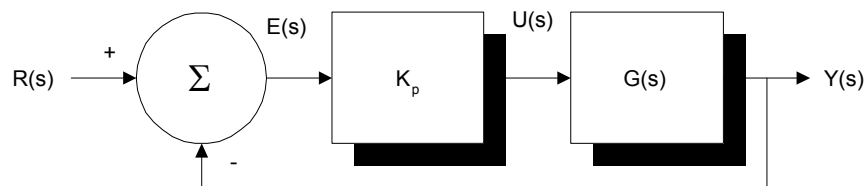


Figura 2.5: Controlador Proporcional

O valor do ganho proporcional é aumentado até ao ponto em que o sistema passa a oscilar com uma amplitude constante³ quando é aplicado um degrau na entrada tal como é representado na figura 2.6

³De notar que o sistema apenas oscilará nestas condições se o excesso de polos (relativamente aos zeros) da sua função de transferência for superior a dois.

Relembrar que o traçado do lugar das raízes de um sistema com 3 polos com parte real negativa cruza o eixo imaginário para um determinado valor do ganho de malha aberta. Nestas condições há dois polos complexos conjugados com parte real nula o que origina uma oscilação permanente de amplitude constante.

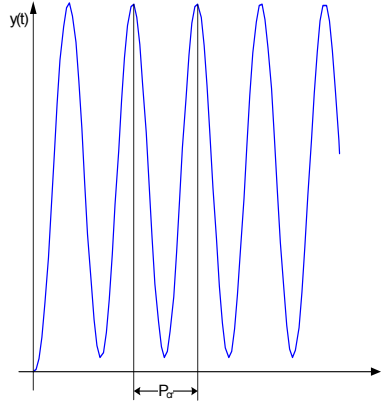


Figura 2.6: Resposta em malha fechada

Nestas condições de ganho, designado por ganho crítico (K_{cr}), é possível medir o período da oscilação (P_{cr}).

Com base no conhecimento destes dois parâmetros o método de sintonia em malha fechada proposto por Ziegler e Nichols sugere que os parâmetros do controlador sejam escolhidos com base na tabela seguinte.

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	
PID	$0.6K_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{2}$	$\frac{P_{cr}}{8}$

Supondo que a expressão do controlador PID é:

$$G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{s\frac{P_{cr}}{2}} + s\frac{P_{cr}}{8} \right)$$

Pelo que:

$$G_R(s) = 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}$$

O que corresponde a um polo na origem ($s = 0$) e um zero duplo em $s = -\frac{4}{P_{cr}}$.

O método proposto é apenas aplicável a sistemas que possam, em condições reais, colocados a oscilar. De referir ainda que se o ganho crítico for ultrapassado o sistema torna-se instável em malha fechada e a oscilação aumentará descontroladamente até algum elemento do sistema saturar. Isto pode ter consequências imprevisíveis. Tal como no método anterior conduz a comportamentos dinâmicos, em malha fechada, muito oscilatórios.

Exemplo de aplicação Considere-se um sistema cuja função de transferência em malha aberta é dada pela expressão:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Fechando a malha com um controlador proporcional verifica-se que o sistema apresenta uma oscilação permanente, de período (P_{cr}) igual a 2.8 segundos para $K_{cr} = 12.6$.

Com base nos valores (aproximados) obtidos os parâmetros dos três controladores são:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	6.3		
PI	5.7	2.3	
PID	7.6	1.4	0.35

Comparando estes valores com os obtidos através do método de malha aberta é imediato concluir que os mesmos são distintos !

O que corresponde às seguintes três funções de transferência dos controladores:

$$G_{R(P)} = 6.3$$

$$G_{R(PI)} = \frac{13.28s+5.67}{2.34s}$$

$$G_{R(PID)} = \frac{3.73s^2+10.62s+7.56}{s}$$

As respostas em malha fechada, quando a entrada de referência é um degrau unitário, podem ser observadas na figura 2.7.

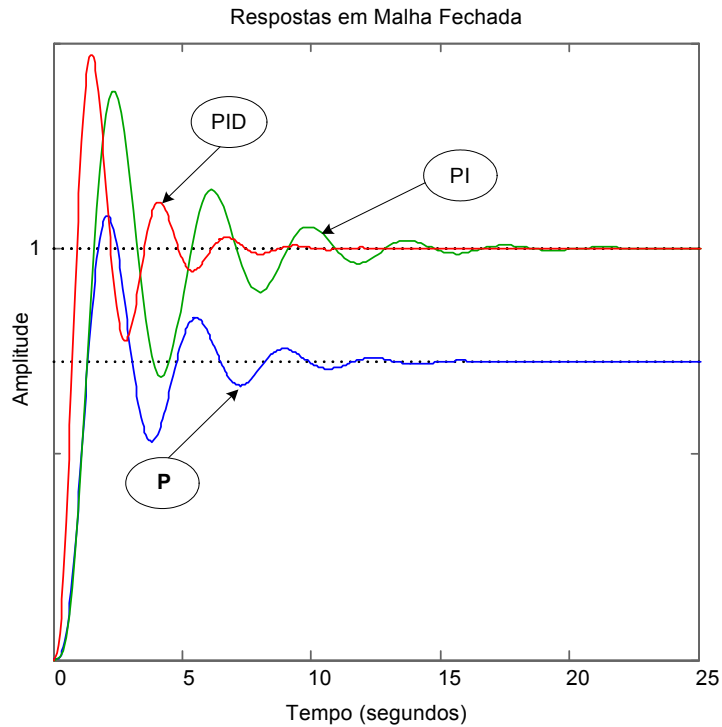


Figura 2.7: Respostas em malha fechada

Outra observação importante Uma análise comparativa entre os parâmetros obtidos para os controladores, para os exemplos apresentados, com base nas duas abordagens propostas por Ziegler e Nichols permitem concluir, de imediato, que os valores são distintos com especial relevo para o valor do ganho proporcional.

Estas diferenças, apesar de serem evidentes (e muito pouco referidas na literatura de referência) reflectem-se, necessariamente nas respostas em malha fechada.

Verifica-se que, em geral, o valor do ganho K_p é sempre superior na abordagem de malha aberta e que os valores de T_i e T_d são “próximos” para os dois métodos.

Resposta ao degrau na entrada *versus* a um degrau de perturbação

Será interessante avaliar as diferenças entre a resposta a uma variação da entrada de referência e a resposta a uma variação da carga (ou a uma perturbação em forma de degrau). Esta avaliação pode ser efectuada recorrendo ao diagrama **Simulink** apresentado na figura 2.8. O sinal de controlo é limitado em amplitude: o valor máximo é de 10 e o mínimo de -10 .

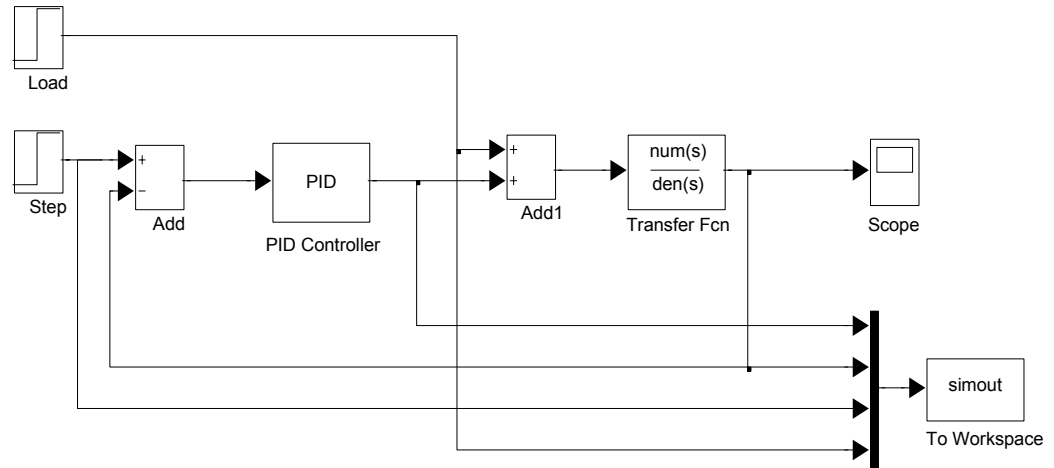
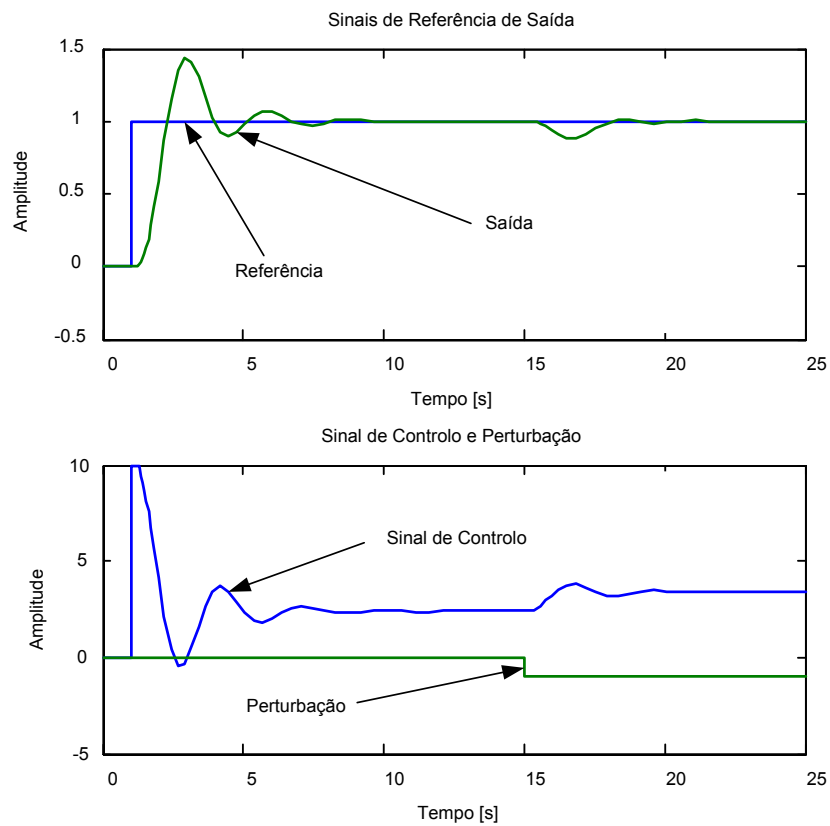


Figura 2.8: PID - Diagrama de simulação

A figura 2.9 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída, do sinal de controlo e da perturbação. Esta última, sob a forma de um degrau adicionado ao sinal de controlo muda de estado no instante de tempo igual a 15 segundos.

Figura 2.9: Resposta ao degrau na entrada *versus* a um degrau de perturbação

Da análise da figura 2.9 é imediato concluir que a resposta a um degrau na entrada de referência é distinta da resposta a uma perturbação. Tal como foi referido anteriormente o ajuste dos parâmetros do controlador PID é, com base nas técnicas de Ziegler e Nichols, “otimizado” para a resposta às perturbações.

2.2 Limitações deste tipo de abordagens

Este tipo de abordagens está datado no tempo (relembrar que o princípio de funcionamento dos métodos foi proposto nos anos quarenta do século passado) e conduzem, como é conhecido, a uma resposta dinâmica demasiado oscilatória devida ao baixo coeficiente de amortecimento de malha fechada. Para além disso o primeiro método de Ziegler-Nichols não é facilmente aplicável a sistemas com polos na origem pois conduz a um comportamento “divergente” na saída quando operado em malha aberta e o segundo método implica que o modelo de malha aberta do sistema a controlar tenha um atraso de fase de mais de 180° e que possa ser colocado num regime oscilatório.

Para o caso de sistemas que incluam um polo na origem, de que são exemplos o nível de um tanque ou a posição angular de um veio de um motor, é possível utilizar o primeiro método desde que seja aplicada na entrada um pulso de duração limitada ou mesmo uma onda quadrada de período adequado e com uma amplitude conhecida centrada em torno de um ponto criteriosamente escolhido. Estas abordagens não serão aqui objecto de mais desenvolvimento.

2.3 Sintonia por realimentação com relé (*Relay Feedback Method*)

Nesta abordagem, proposta por Åström e Hägglund em 1984, o sistema, cujo modelo é dado pela expressão 2.1, é colocado sob controlo de um controlador *on-off* tal como é representado na figura 2.10.

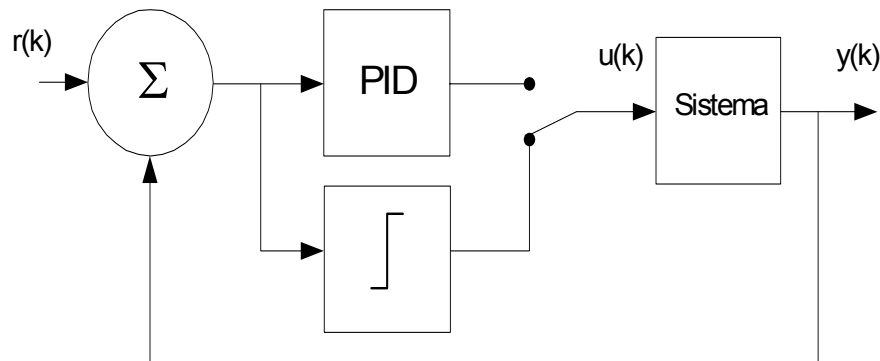


Figura 2.10: Sintonia por realimentação com relé

Se estivermos na presença de um sistema com ruído, o controlador *on-off* (relé) pode, como já foi referido anteriormente, incorporar uma banda de his-

terese.

O método de sintonia baseado em controlo por relé, baseia-se no método de sintonia em malha fechada proposto por Ziegler e Nichols ultrapassando algumas das suas limitações:

- Não se trata de um procedimento de tentativa e erro.
- O sistema a controlar não é levado ao limite de instabilidade.

Ao fechar a malha de realimentação através do relé o sinal de controlo vai, para um grande número de sistemas⁴, oscilar com uma amplitude d igual a $U_{max} - U_{min}$ e um período T_u (frequência ω_u).

Supondo o sinal de controlo é um sinal quadrado de amplitude d a sua expansão em série de Fourier será:

$$u(t) = \frac{4d}{\pi} \left(\sin(\omega_u t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_u t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_u t) + \dots \right)$$

Partindo do princípio de que o sistema é do tipo passa-baixo os harmónicos podem ser ignorados pelo que:

$$u(t) \approx \frac{4d}{\pi} \sin(\omega_u t)$$

Supondo que nestas condições o período de oscilação é próximo do período crítico (P_{cr}) referido na secção anterior o sinal de saída é:

$$y(t) = -a \sin(\omega_u t)$$

Para a frequência ω_u o sinal de saída está em oposição de fase relativamente ao sinal de entrada.

A relação de amplitudes entre estes dois sinais sinusoidais, correspondente ao ganho do sistema em malha aberta para o período crítico, é:

$$K_G = \frac{a}{\frac{4d}{\pi}}$$

Pelo que o ganho crítico será⁵:

$$K_u = \frac{4d}{\pi a}$$

É fácil concluir que esta relação será próxima do ganho crítico K_{cr} do método de sintonia de Ziegler-Nichols de malha fechada.

⁴O modelo do sistema em malha aberta deverá ter um excesso de polos que conduzam a um atraso de fase superior a 180° .

⁵Relembrar que o ganho crítico corresponde ao ganho adicional de malha aberta necessário para que à frequência crítica (para o qual o sistema possui um atraso igual 180°) o ganho total seja unitário.

A figura 2.11 apresenta uma fotografia do primeiro controlador comercial baseado no método descrito.

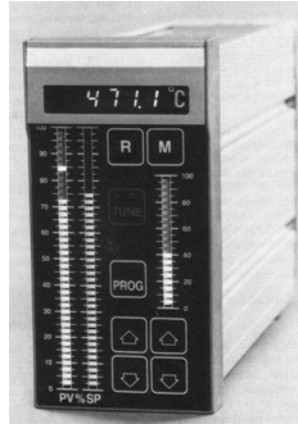


Figura 2.11: Controlador SattControl ECA-40

De notar que a aplicação deste tipo de abordagem, permitindo a obtenção de um controlador auto-ajustável, implica a utilização de um computador. Tal é o caso do controlador ECA-40. Assim o controlador possui dois estados de funcionamento: sintonia e controlo. Na primeira fase a malha é fechada com recurso a um relé permitindo a obtenção de K_u e T_u . Estes dois valores permitem a obtenção dos parâmetros de um controlador PID, por exemplo através de uma tabela semelhante à do método de sintonia em malha fechada de Ziegler-Nichols. Uma vez obtidos os parâmetros a malha é fechada com recurso ao controlador PID.

2.3.1 Exemplo de aplicação

Considere-se o sistema cuja função de transferência é $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$.

O sistema é colocado sob controlo de um controlador *on-off* com $U_{max} = 5$ e $U_{min} = -5$ cuja entrada de referência é constante e igual a zero. Uma vez que temos envolvida a utilização de um computador escolheu-se para intervalo de amostragem o valor de $10ms$ (para mais informação consultar a secção 3 e Sistemas de Controlo 2 - Texto de Apoio - Introdução ao Controlo por Computador).

A figura 2.12 apresenta a evolução do sinal de controlo e do sinal de saída durante a fase de sintonia.

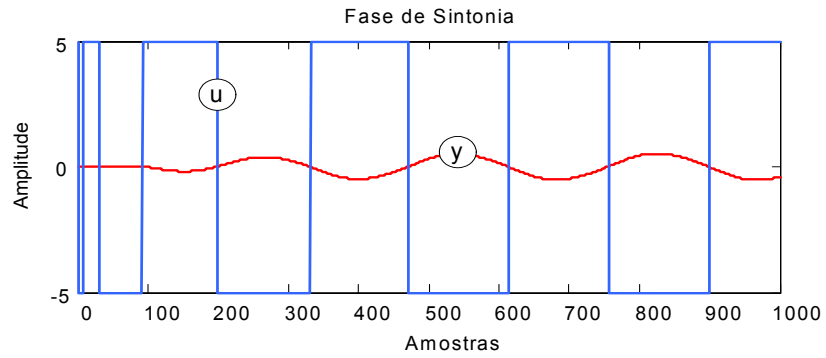


Figura 2.12: *Relay Feedback* - Fase de Sintonia

Com base nos sinais de controlo e de saída é possível, de forma automática⁶, obter:

$$\begin{cases} K_u = 12.15 \\ T_u = 2.86 \end{cases}$$

Comparando com os valores obtidos para K_{cr} e T_{cr} no exemplo anterior é imediato concluir que a aproximação é satisfatória.

A figura 2.13 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída e do sinal de controlo durante a fase de controlo.

⁶Para obter K_u basta obter a relação entre as amplitudes dos sinais de controlo e da saída. Para obter T_u basta obter os instantes de passagem por zero do sinal de saída. Conhecido o intervalo de amostragem o cálculo do período é imediato.

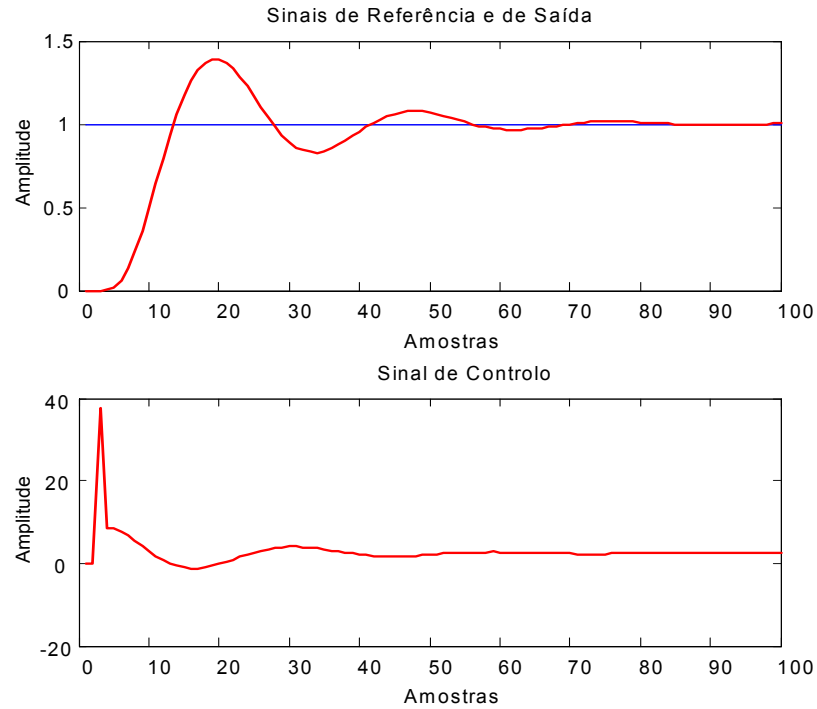


Figura 2.13: *Relay Feedback* - Fase de Controlo

Da análise dos gráficos da figura 2.13 são imediatas duas constatações:

- O comportamento do sinal de saída é semelhante ao apresentado na figura 2.3 relativamente ao controlo PID. Este facto “valida” este método de sintonia.
- O sinal de controlo tem um valor máximo “exagerado”⁷!

A figura 2.14 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída e do sinal de controlo durante a fase de controlo na presença de um actuador cujo valor máximo é de 5 e o mínimo de -5 .

⁷O sinal de referência é igual a 1 e o sinal de controlo atinge no transitório de entrada um valor próximo de 40.

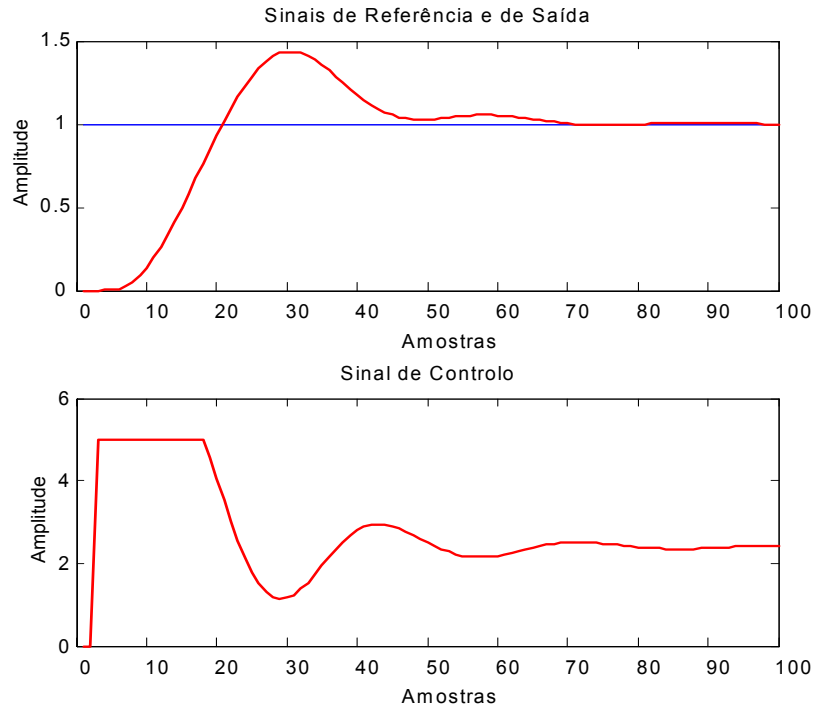


Figura 2.14: *Relay Feedback* - Fase de Controlo (com a presença de um actuador)

Na figura 2.14 é visível a saturação do sinal de controlo durante as primeiras 20 amostras com a consequente alteração da forma da resposta transitória.

2.4 Outros métodos

Existem outros métodos descritos extensivamente (e exhaustivamente) em livros e artigos da especialidade. Alguns baseiam-se em modificações dos métodos empíricos propostos por Ziegler e Nichols. Destes os mais conhecidos são o método de Cohen e Coon, o método de Chien-Hrones-Reswick e a sintonia MIGO e AMIGO. Outros métodos baseiam-se no conhecimento (identificação) efectivo do modelo dinâmico do sistema a controlar. Um destes últimos baseia-se na técnica de posicionamento de polos e é descrito, mais à frente, com algum detalhe.

Capítulo 3

Controladores PID - Abordagem Discreta

3.1 Introdução

A implementação de controladores PID recorrendo a técnicas analógicas é algo do passado. Hoje em dia os controladores PID são, quase em exclusivo, implementados com auxílio de um computador (microprocessador ou microcontrolador). São, de seguida, apresentadas algumas soluções.

3.2 Controlador PI Discreto

3.2.1 Modelo do controlador

Partindo do modelo contínuo do controlador:

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

Aproximando o operador derivada pelo método das diferenças para trás:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{h} = \frac{1 - q^{-1}}{h} x(k) \quad (3.1)$$

em que h é o intervalo de amostragem e q^{-1} é o operador atraso.

É imediato concluir que a aproximação do integral será:

$$\int x dt \approx \frac{h}{1 - q^{-1}} x(k) \quad (3.2)$$

Logo a versão discreta do controlador será:

$$G_R(q^{-1}) = K \left(1 + \frac{h}{(1 - q^{-1}) T_i} \right) \quad (3.3)$$

A expressão 3.3 referida, frequentemente, como forma de posição do algoritmo PI pode ser desenvolvida.

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{(1 - q^{-1}) T_i + h}{(1 - q^{-1}) T_i} \right) = \frac{K(1 - q^{-1}) + \frac{Kh}{T_i}}{1 - q^{-1}}$$

$$G_R(q^{-1}) = \frac{K + \frac{Kh}{T_i} - Kq^{-1}}{1 - q^{-1}}$$

Fazendo:

$$\begin{cases} s_0 = K \left(1 + \frac{h}{T_i} \right) \\ s_1 = -K \end{cases}$$

Temos:

$$G_R(q^{-1}) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}} \quad (3.4)$$

ou

$$G_R(q) = \frac{qs_0 + s_1}{q - 1}$$

É imediato concluir que o controlador possui um polo na origem ($q = 1$) e um zero em $-\frac{s_1}{s_0}$.

3.2.2 Função de Controlo (1)

Com base na expressão 3.4 é possível obter a expressão do sinal de controlo:

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}} (r(k) - y(k))$$

$$u(k)(1 - q^{-1}) = (s_0 + s_1 q^{-1})(r(k) - y(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + (s_0 + s_1 q^{-1})r(k) - (s_0 + s_1 q^{-1})y(k)$$

$$u(k) = u(k-1) + s_0 r(k) + s_1 r(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) \quad (3.5)$$

O que corresponde ao diagrama de blocos representado na figura 3.1.

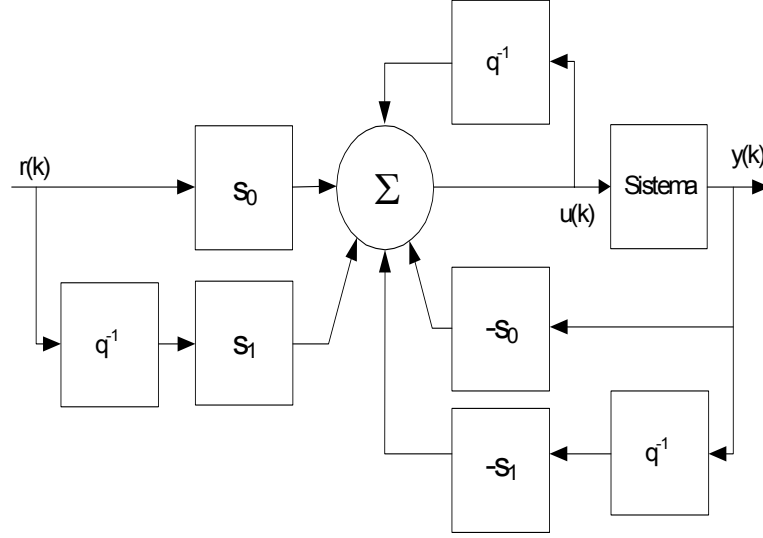


Figura 3.1: Controlador PI discreto

A expressão 3.5 é referida frequentemente como expressão do controlador PI sob a forma de velocidade.

3.2.3 Função de Controlo (2)

Com base na expressão 3.4 é possível obter a expressão do sinal de controlo:

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}} e(k)$$

em que:

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

$$u(k)(1 - q^{-1}) = (s_0 + s_1 q^{-1}) e(k)$$

$$u(k) = u(k-1) + (s_0 + s_1 q^{-1}) e(k)$$

$$u(k) = u(k-1) + s_0 e(k) + s_1 e(k-1) \quad (3.6)$$

Esta última implementação é, em termos computacionais, mais eficiente.

3.2.4 Escolha do intervalo de amostragem

Para um controlador PI discreto a escolha do intervalo de amostragem deve ter em consideração a seguinte expressão:

$$\frac{h}{T_i} = 0.1 \quad \dots \quad 0.3 \quad (3.7)$$

3.2.5 Integral *windup*

Tal como na versão contínua do controlador PI é desejável que a sua versão discreta não esteja também sujeita ao problema do crescimento descontrolado do integral do erro. Uma análise rápida das expressões 3.3 e 3.6 permite concluir facilmente que apenas a primeira, correspondente ao algoritmo de posição, permite aplicar um procedimento de anti-*windup* ao integral do erro.

3.3 Controlador PID Discreto (1)

3.3.1 Modelo do controlador

Partindo do modelo contínuo do controlador:

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + T_d s \right)$$

Aproximando, tal como no caso do controlador PI, os operadores derivada (s) por $(1 - q^{-1})/h$ e integral ($1/s$) por $h/(1 - q^{-1})$ podemos escrever:

$$\frac{1}{sT_i} \rightarrow \frac{h}{T_i} \left(\frac{1}{1 - q^{-1}} \right)$$

e

$$T_d s \rightarrow \frac{T_d}{h} (1 - q^{-1})$$

Pelo que:

$$G_R(q^{-1}) = K \left(1 + \frac{h}{T_i} \left(\frac{1}{1 - q^{-1}} \right) + \frac{T_d}{h} (1 - q^{-1}) \right)$$

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{(1 - q^{-1}) T_i + h}{(1 - q^{-1}) T_i} + \frac{(1 - q^{-1}) T_d}{h} \right)$$

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{(1 - q^{-1}) T_i h + h^2 + (1 - q^{-1})^2 T_i T_d}{(1 - q^{-1}) T_i h} \right)$$

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{T_i h - q^{-1} T_i h + h^2 + T_i T_d - 2 T_i T_d q^{-1} + T_i T_d q^{-2}}{(1 - q^{-1}) T_i h} \right)$$

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{h + \frac{h^2}{T_i} + T_d - (h + 2 T_d) q^{-1} + T_d q^{-2}}{(1 - q^{-1}) h} \right)$$

$$G_R(q^{-1}) = K \left(\frac{1 + \frac{h}{T_i} + \frac{T_d}{h} - \left(1 + \frac{2 T_d}{h} \right) q^{-1} + \frac{T_d}{h} q^{-2}}{1 - q^{-1}} \right)$$

Fazendo:

$$\begin{cases} s_0 = K \left(1 + \frac{h}{T_i} + \frac{T_d}{h} \right) \\ s_1 = -K \left(1 + \frac{2T_d}{h} \right) \\ s_2 = \frac{KT_d}{h} \end{cases}$$

Temos:

$$G_R(q^{-1}) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} \quad (3.8)$$

É imediato concluir que o controlador possui um polo na origem e dois zeros.

3.3.2 Função de Controlo (1)

Com base na expressão 3.8 é possível obter a expressão do sinal de controlo:

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} (r(k) - y(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + (s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}) (r(k) - y(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + s_0 r(k) + s_1 r(k-1) + s_2 r(k-2) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) - s_2 y(k-2)$$

O que corresponde ao diagrama de blocos representado na figura 3.2.

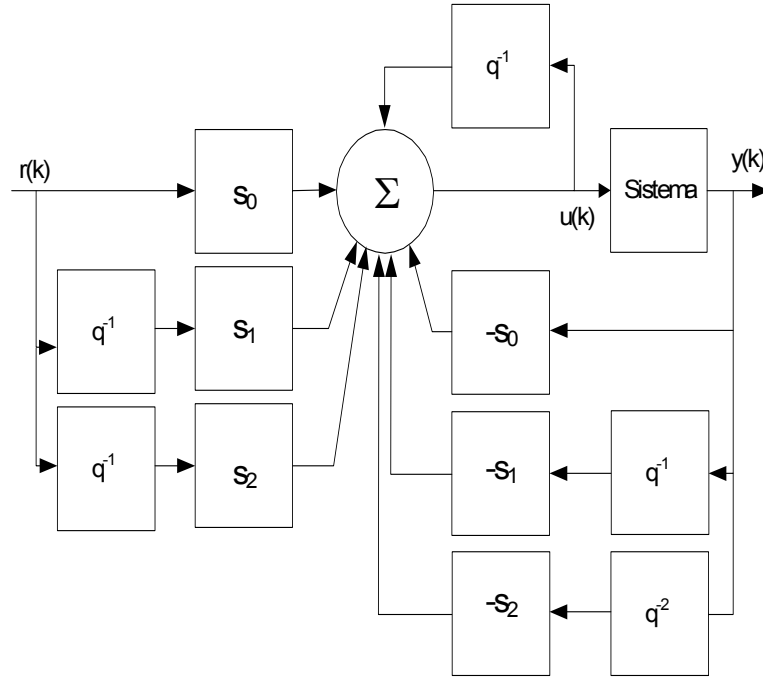


Figura 3.2: Controlador PID Discreto (1)

3.3.3 Função de Controlo (2)

Com base na expressão 3.8 é possível obter a expressão do sinal de controlo:

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} e(k) \\ e(k) &= r(k) - y(k) \\ u(k) &= u(k-1) + (s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}) e(k) \\ u(k) &= u(k-1) + s_0 e(k) + s_1 e(k-1) + s_2 e(k-2) \end{aligned}$$

Esta versão discreta do controlador PID deve, na prática, ser evitada devido ao facto de não incluir pré-filtragem no termo derivativo.

3.4 Controlador PID Discreto (2)

3.4.1 Modelo do controlador

Partindo do modelo contínuo do controlador:

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N}s} \right)$$

Aproximando, mais uma vez, os operadores derivada (s) por $(1 - q^{-1})/h$ e integral ($1/s$) por $h/(1 - q^{-1})$ podemos escrever:

$$\frac{1}{sT_i} \rightarrow \frac{h}{T_i} \left(\frac{1}{1 - q^{-1}} \right)$$

e

$$T_d s \rightarrow \frac{T_d}{h} (1 - q^{-1})$$

$$\frac{1}{1 + \frac{T_d}{N}s} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{T_d}{Nh} (1 - q^{-1})} = \frac{\frac{Nh}{Nh+T_d}}{1 - \frac{T_d}{Nh+T_d} q^{-1}}$$

Pelo que:

$$\begin{aligned} G_R(q^{-1}) &= K \left(1 + \frac{h}{T_i} \frac{1}{1 - q^{-1}} + \frac{\left(\frac{Nh}{Nh+T_d} \right) \frac{T_d}{h} (1 - q^{-1})}{1 - \frac{T_d}{Nh+T_d} q^{-1}} \right) \\ G_R(q^{-1}) &= K \left(1 + \frac{h}{T_i} \frac{1}{1 - q^{-1}} + \frac{\frac{NT_d}{Nh+T_d} (1 - q^{-1})}{1 - \frac{T_d}{Nh+T_d} q^{-1}} \right) \end{aligned}$$

Fazendo:

$$X = -\frac{T_d}{Nh + T_d}$$

Podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
 G_R(q^{-1}) &= K \left(1 + \frac{h}{T_i} \frac{1}{1 - q^{-1}} - \frac{X}{1 + Xq^{-1}} N (1 - q^{-1}) \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{T_i (1 - q^{-1}) + h}{T_i (1 - q^{-1})} - \frac{X}{1 + Xq^{-1}} N (1 - q^{-1}) \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{1 - q^{-1} + \frac{h}{T_i}}{1 - q^{-1}} - \frac{XN (1 - q^{-1})}{1 + Xq^{-1}} \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{\left(1 - q^{-1} + \frac{h}{T_i}\right) (1 + Xq^{-1}) - XN (1 - q^{-1}) (1 - q^{-1})}{(1 - q^{-1}) (1 + Xq^{-1})} \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{1 - q^{-1} + \frac{h}{T_i} + \left(1 - q^{-1} + \frac{h}{T_i}\right) Xq^{-1} - XN (1 - 2q^{-1} + q^{-2})}{(1 - q^{-1}) (1 + Xq^{-1})} \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{1 - q^{-1} + \frac{h}{T_i} + Xq^{-1} - Xq^{-2} + X\frac{h}{T_i}q^{-1} - XN + 2XNq^{-1} - XNq^{-2}}{(1 - q^{-1}) (1 + Xq^{-1})} \right) \\
 G_R(q^{-1}) &= K \left(\frac{1 + \frac{h}{T_i} - XN + \left(X \left(1 + \frac{h}{T_i} + 2N\right) - 1\right) q^{-1} - X(1 + N) q^{-2}}{(1 - q^{-1}) (1 + Xq^{-1})} \right)
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\begin{cases} s_0 = K \left(1 + \frac{h}{T_i} - XN \right) \\ s_1 = K \left(X \left(1 + \frac{h}{T_i} + 2N \right) - 1 \right) \\ s_2 = -KX(1 + N) \\ r_1 = X \end{cases}$$

Temos:

$$G_R(q^{-1}) = \frac{s_0 + s_1q^{-1} + s_2q^{-2}}{(1 - q^{-1})(1 + r_1q^{-1})} \quad (3.9)$$

e

$$G_R(q) = \frac{s_0q^2 + s_1q + s_2}{(q - 1)(q + r_1)}$$

O que corresponde a um controlador com dois polos (um na origem) e dois zeros.

3.4.2 Função de Controlo (1)

O sinal de controlo será:

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{(1 - q^{-1})(1 + r_1 q^{-1})} (r(k) - y(k))$$

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{1 + (r_1 - 1)q^{-1} - r_1 q^{-2}} (r(k) - y(k))$$

$$u(k) (1 + (r_1 - 1)q^{-1} - r_1 q^{-2}) = (s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}) (r(k) - y(k))$$

$$u(k) + (r_1 - 1)u(k-1) - r_1 u(k-2) = s_0 r(k) + s_1 r(k-1) + s_2 r(k-2) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) - s_2 y(k-2)$$

$$u(k) = (1 - r_1)u(k-1) + r_1 u(k-2) + s_0 r(k) + s_1 r(k-1) + s_2 r(k-2) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) - s_2 y(k-2)$$

O que corresponde ao diagrama de blocos representado na figura 3.3.

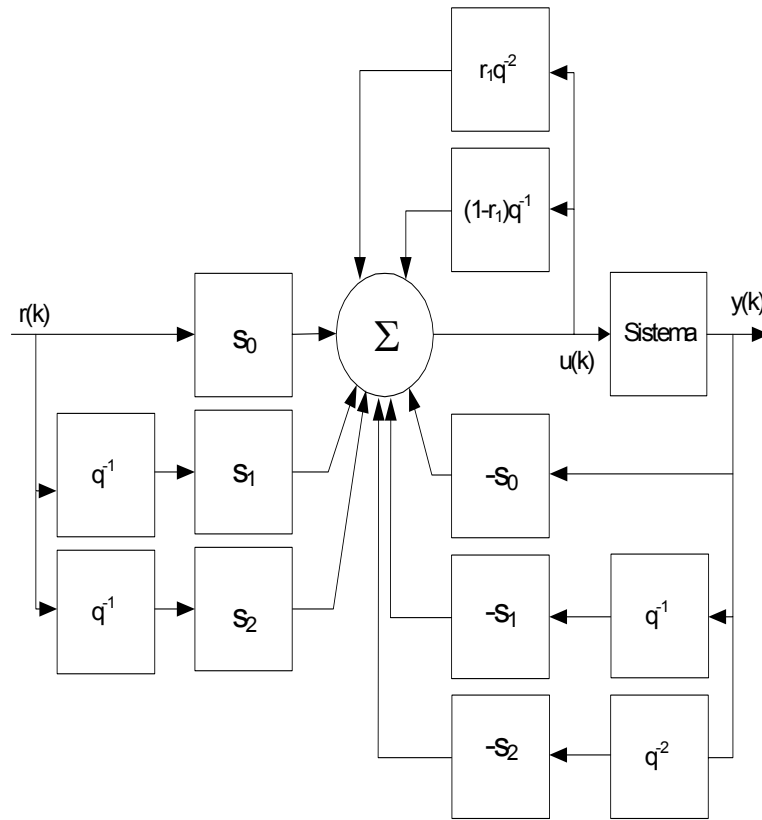


Figura 3.3: Controlador PID discreto (2)

3.4.3 Função de Controlo (2)

Alternativamente temos:

$$u(k) = \frac{s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}}{(1 - q^{-1})(1 + r_1 q^{-1})} e(k)$$

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

$$u(k) = (1 - r_1)u(k-1) + r_1 u(k-2) + s_0 e(k) + s_1 e(k-1) + s_2 e(k-2)$$

3.4.4 Escolha do intervalo de amostragem

Para este controlador PID discreto a escolha do intervalo de amostragem deve ter em consideração a seguinte expressão:

$$\frac{hN}{T_d} = 0.2 \quad \dots \quad 0.6$$

3.4.5 Exemplo de aplicação

Considere-se, de novo, o sistema cuja função de transferência em malha aberta é dada pela expressão:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

O objectivo é controlar o sistema utilizando, em alternativa, as duas estruturas do controlador PID discreto apresentadas atrás.

Com base no método de Ziegler-Nichols de malha fechada temos:

$$\begin{cases} K_p \approx 7.6 \\ T_i \approx 1.4 \\ T_d \approx 0.35 \end{cases}$$

Supondo que N é igual a 10 temos que:

$$h = 0.2 \frac{T_d}{N} \quad \dots \quad 0.6 \frac{T_d}{N} = 0.007 \quad \dots \quad 0.021$$

Pelo que escolhendo $h = 0.01$ segundos temos para os coeficientes do controlador sem filtro:

$$\begin{cases} s_0 = 273.2 \\ s_1 = -538.6 \\ s_2 = 265.5 \end{cases}$$

E para os coeficientes do controlador com filtragem:

$$\begin{cases} s_0 = 66.5 \\ s_1 = -131.2 \\ s_2 = 64.7 \\ r_1 = -0.78 \end{cases}$$

A figura 3.4 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, dos sinais de saída e dos sinais de controlo para os dois controladores na situação em que não existe ruído no sinal de saída.

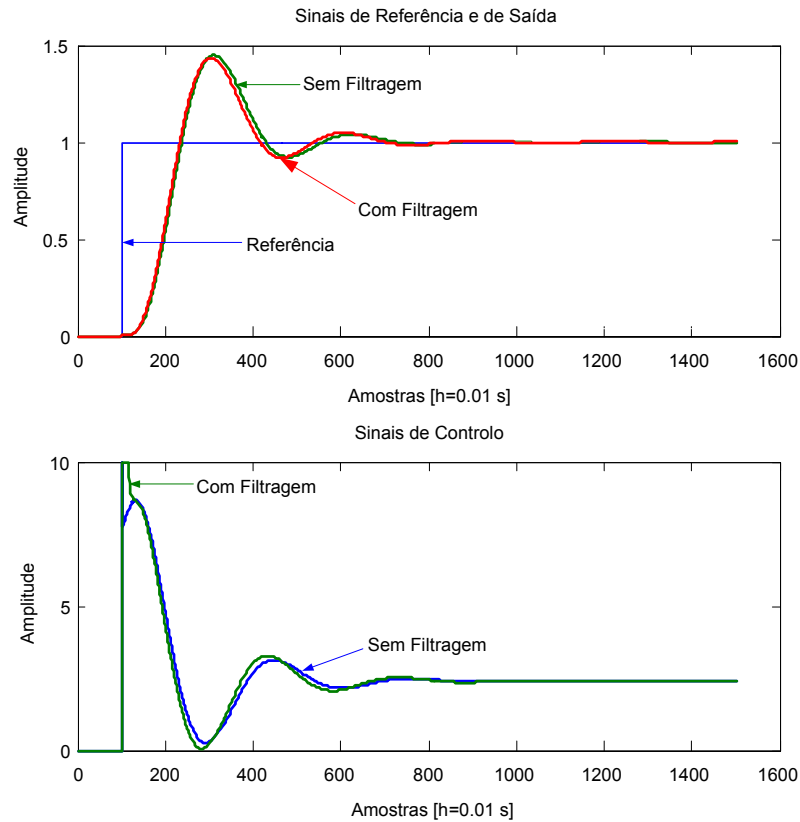


Figura 3.4: Comportamento em malha fechada (sistemas sem ruído)

Uma análise rápida da figura 3.4 permite concluir que, sob estas condições, o desempenho dos dois controladores é muito semelhante conduzindo a um comportamento dinâmico em malha fechada praticamente idêntico.

Adicionando ruído de “alta-frequência” (neste caso um um sinal aleatório cuja frequência fundamental é de 1KHz e cuja amplitude de pico é igual a 0.01 - correspondente a 1% do sinal de saída - ou seja um nível de ruído que pode ser considerado “muito” baixo) à saída do sistema todo o cenário se modifica.

A figura 3.5 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída e do sinal de controlo nas condições descritas.

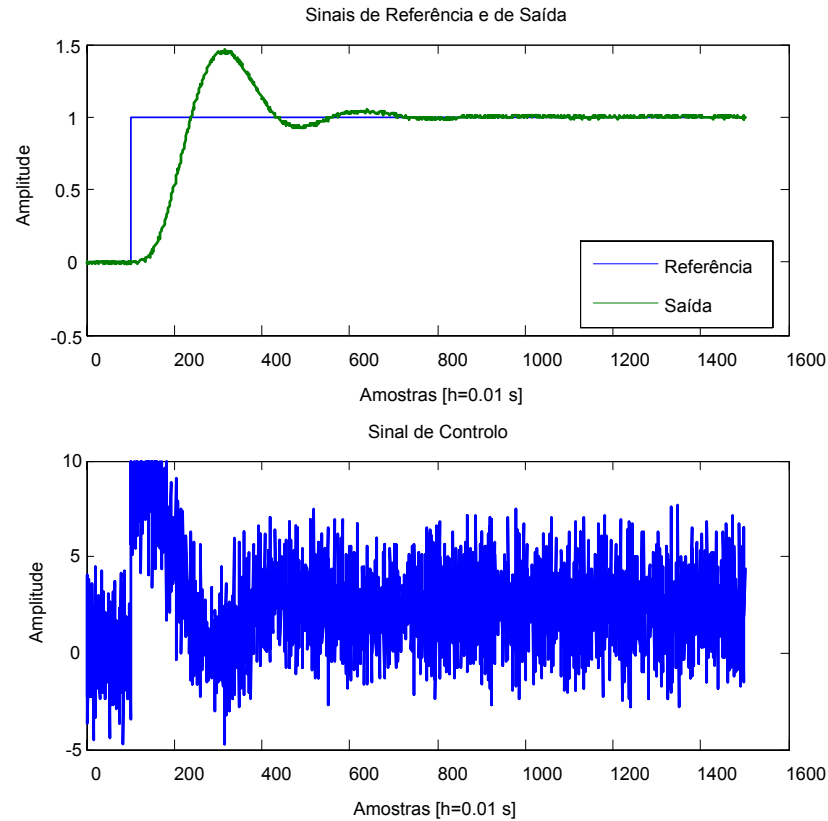


Figura 3.5: Comportamento em malha fechada (sistema com ruído) sem filtragem no termo derivativo

Da análise da figura 3.5 é imediato concluir que o sinal de controlo apresenta uma oscilação de amplitude “considerável”. Tal resulta do facto da acção derivativa estar a “reagir” às variações do sinal de saída provocando variações no sinal de controlo. Este “comportamento” por parte do controlador não consegue compensar as oscilações no sinal de saída mas introduz um enorme “stress” no sinal de controlo que, numa situação real, estaria a impor o estado de um actuador. Esta situação, na prática, não é aceitável.

A figura 3.6 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída e do sinal de controlo quando se utiliza um controlador PID com pré-filtragem no termo derivativo.

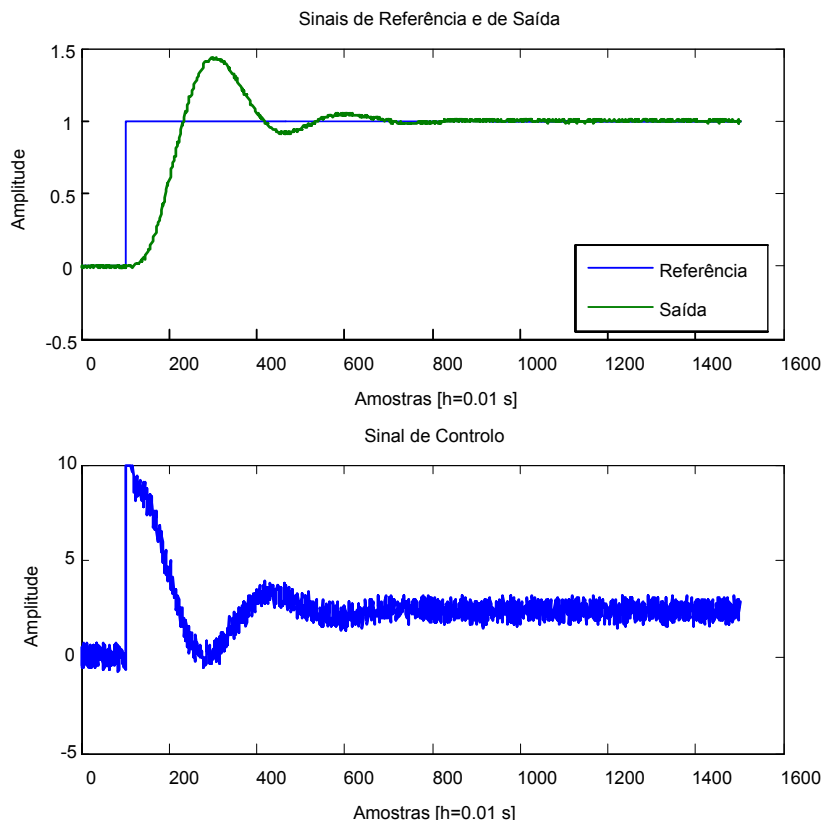


Figura 3.6: Comportamento em malha fechada (sistema com ruído) com filtragem no termo derivativo

Da análise da evolução do sinal de controlo apresentado na figura 3.6 é facilmente visível a menor oscilação do sinal de controlo evidenciando claramente o melhor desempenho deste tipo de controlador¹.

3.5 Controlador IPD Discreto

Com base na análise do diagrama da figura 1.21 e nas deduções apresentadas anteriormente relativas ao controlador PID discreto é muito simples implementar a versão discreta do controlador IPD.

Partindo da expressão do sinal de erro:

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

Temos para o integral do erro:

$$v_1(k) = v_1(k-1) + K_p \frac{h}{T_i} e(k)$$

¹Um sinal de controlo menos oscilatório introduz, necessariamente, menos *stress* no elemento actuador prolongando o seu tempo de “vida útil”. Em termos mais técnicos aumenta o MTBF (*Mean Time Between Failures*) do actuador.

Para o termo proporcional:

$$v_2(k) = -K_p y(k)$$

Para o termo derivativo:

$$v_3(k) = -K_p \frac{T_d}{h} (y(k) - y(k-1))$$

Pelo que o sinal de controlo será:

$$u(k) = v_1(k) + v_2(k) + v_3(k)$$

3.6 Comparação do desempenho dos controladores PID e IPD discretos

O objectivo é comparar o desempenho no controlo de um mesmo sistema utilizando, em alternativa, os controladores PID e IPD discretos a variações da entrada de referência e na presença de perturbações. Ambos os algoritmos não incluem filtragem no termo derivativo.

Considere-se, mais uma vez, o sistema cuja função de transferência em malha aberta é dada pela expressão:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Considera-se ainda que ocorre uma variação da entrada de referência semelhante à do exemplo apresentado anteriormente e que o sistema sofre a influência de uma perturbação na entrada que se soma à acção do sinal de controlo semelhante à apresentada na figura 2.8.

A figura 3.7 apresenta a evolução temporal do sinal de referência, do sinal de saída, do sinal de controlo e do sinal de perturbação para os dois controladores.

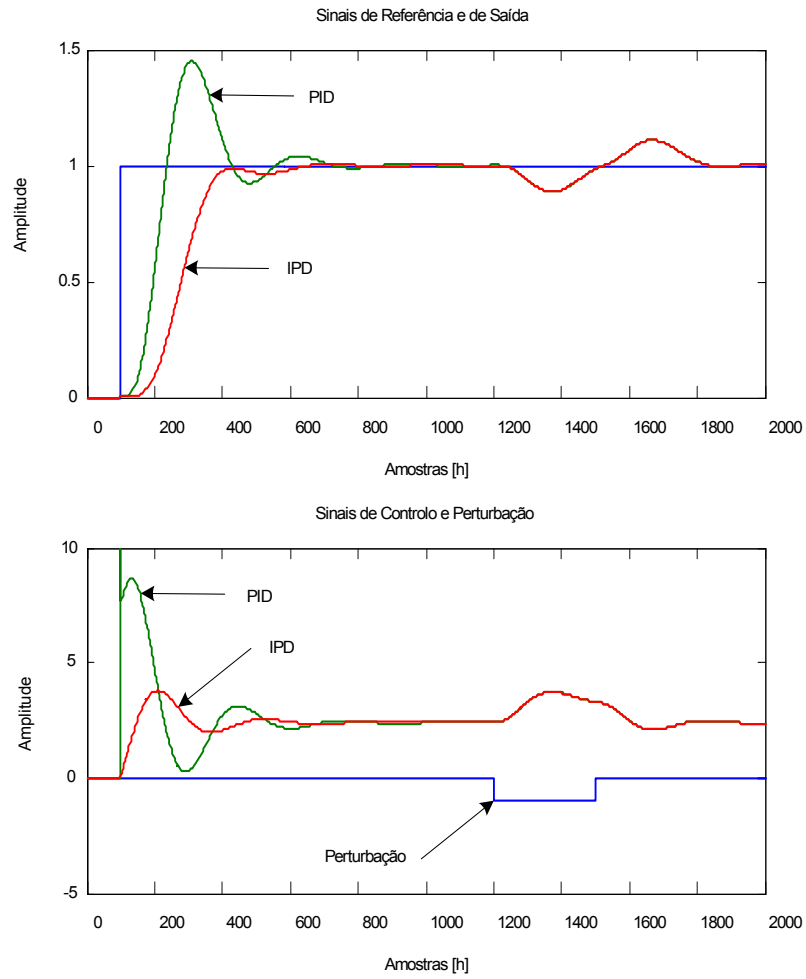


Figura 3.7: Comparação entre o desempenho dos controladores PID e IPD discretos

Da análise da figura 3.7 é imediato concluir que o comportamento de ambos os controladores é idêntico na presença de uma perturbação e (previsivelmente) distinto na resposta a uma variação do sinal de referência.

Bibliografia

1. Feedback Systems, Karl Johan Åström and Richard M. Murray, Version v2.11b, 28 September 2012.
2. Feedback Control of Dynamic Systems, Gene Franklin, J. David Powell and Abbas Emami-Naeini, Fourth Edition, Prentice Hall 2002.
3. Digital Control of Dynamic Systems, Gene Franklin, J. David Powell and Michael Workman, Third Edition, Addison-Wesley, 1998.
4. Teoria dos Sistemas de Controlo Lineares, Antonio Pereira de Melo, Universidade de Aveiro, 2010.
5. Process Control in Practice, Tore Hägglund, Chartwell-Bratt, 1991.
6. Automatic Tuning of PID Controllers, K.J Åström and T. Hägglund, Instrument Society of America, 1988.
7. PID Controllers - Theory Design and Tuning, Åström K.J and T. Hägglund, Instrument Society of America, 1995.
8. Advanced PID Control, K.J Åström and T. Hägglund, Instrument Society of America, 2006.
9. Autotuning of PID Controllers, A Relay Feedback Approach, Cheng-Ching Yu, Springer-Verlag, 2006.
10. Practical PID Control, Antonio Visioli, Springer-Verlag, 2006.
11. HANDBOOK OF PI AND PID CONTROLLER TUNING RULES, Aidan O'Dwyer, Imperial College Press, 2009.
12. Digital Control Systems - Design, Identification and Implementation, Ioan D. Landau and Gianluca Zito, Springer-Verlag, 2006.
13. Computer Controlled Systems: Theory and Design, Karl Johan Åström and Björn Wittenmark, Prentice Hall, 1997.
14. Linear Feedback Control - Analysis and Design with MATLAB, Dingyü Xue, YangQuan Chen and Derek P. Atherton, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
15. Nicolas Minorsky and the Automatic Steering of Ships, S. Bennett, IEEE Xplore, 1984.

16. Time Lag in a Control System, A. Callender, D. Hartree and A. Porter, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Volume 235, Issue 756, pp. 415-444, 1936.
17. Optimum Settings for Automatic Controllers, J.G. Ziegler and N. B. Nichols, Transactions of the ASME, 1942.
18. Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins, K.J. Åström and T. Hägglund, Automatica, Vol. 20, No. 5. 1984.
19. Revisiting the Ziegler-Nichols step response for PID Control, K.J. Åström and T. Hägglund, Journal of Process Control 14, 2004.
20. The Control Handbook - Control System Fundamentals, William S. Levine, CRC Press, 2011.
21. Industrial Digital Control Systems, K. Warwick and D. Rees, IEE Control Engineering Series, 1986.
22. Controlo Digital: Exercícios Resolvidos - Exemplos em MATLAB/SIMULINK, Urbano Nunes, Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores, Faculdade de Ciências, Universidade de Coimbra, 2005.
23. Evolving PID tuning rules, Willy K. Wojsznis and Terry Blevins, Control Engineering, 03/13/2013.
24. Increasing customer value of industrial control performance monitoring—Honeywell’s experience, L. Desborough and R. Miller, Sixth International Conference on Chemical Process Control. AIChE Symposium Series Number 326 (Vol. 98), 2002.
25. IFAC Conference on Advances in PID Control, Brescia, 28-30 March 2012 (<http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/PID-12/>).
26. PID Control in the Third Millenium, R. Vilanova and A. Visioli, Springer-Verlag, 2012.
27. Control of Integral Processes with Dead Time, A. Visioli and Q. Zhong, Springer-Verlag, 2011.
28. Feedback Control, Stephen Dodds, Springer-Verlag, 2015.