

INSTRUÇÕES

- A prova deve ser realizada INDIVIDUALMENTE e SEM CONSULTA à livros, anotações, etc.
- Todas as questões – sem exceção – devem ser respondidas na folha de respostas (papel almaço) que foi entregue junto com esta folha de enunciado das questões. Questões respondidas fora da folha de respostas não serão corrigidas
- Cada questão consiste em um enunciado e um conjunto de requisitos que uma resposta aceitável deve satisfazer. Respostas dadas que não atendam aos requisitos podem em última instância ser completamente desconsideradas durante a correção da prova. Tenham sempre em mente os requisitos ao dar as suas respostas.
- A interpretação das questões faz parte da avaliação. Caso ache um enunciado ambíguo ou impreciso escreva na folha de resposta sua interpretação e a correspondente resposta.
- O tempo total de prova é de 100 min.

QUESTÕES

1. (2,0 pontos) Utilizando o **princípio de indução matemática**, prove que para qualquer inteiro positivo n , $2^{2n} - 1$ é divisível por 3. **Lembrete:** primeiro, prove a proposição para $n = 1$; em seguida, prove que se a proposição é verdadeira para um valor $n = k$ arbitrário, então ela também é verdadeira para $n = k + 1$.
2. (1,0 ponto) Seja a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida pela fórmula recursiva $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e $f(n+1) = f(n)f(n-1)$. Determine $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$. Mostre todos os cálculos, passo a passo.
3. (1,0 ponto) Defina recursivamente cada uma das sequências $\{a_n\}$ abaixo ($n = 1, 2, 3, \dots$):
a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = n^2$ d) $a_n = 5$
4. (1,0 ponto) Quantas cadeias de quatro dígitos decimais: (a) Não contêm o mesmo dígito três vezes? (b) Terminam com um dígito par? Têm exatamente três dígitos '9'? Mostre o raciocínio passo a passo.
5. (1,0 ponto) Quantos subconjuntos de um conjunto com 10 elementos têm mais de um elemento? Mostre o raciocínio passo a passo.
6. (1,0 ponto) Mostre que se há 30 estudantes em uma classe, então pelo menos dois têm nomes começando com a mesma letra. Faça uma argumentação baseada no princípio da casa do pombo.
7. (1,0 ponto) Quantas relações diferentes existem sobre o conjunto $\{a, b, c, d\}$? Quantas contêm o par (a, a) ? Justifique a sua resposta.
8. Considere as relações abaixo sobre o conjunto $E = \{a, b, c\}$:
 $R_1 = \{(a, b), (b, b), (c, a)\}$
 $R_2 = \{(a, a), (a, c), (c, c), (b, b), (c, a)\}$
 $R_3 = \{(a, b), (a, a), (c, c)\}$
 $R_4 = \{(a, a), (c, c), (a, c), (c, b), (b, b)\}$
 $R_5 = \{(a, a), (b, b)\}$
 $R_6 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$
 $R_7 = \{(a, c), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
 - a) (0,5 ponto) Dentre essas relações, aponte TODAS as que SÃO REFLEXIVAS.
 - b) (0,5 ponto) Dentre essas relações, aponte TODAS as que SÃO SIMÉTRICAS.
 - c) (0,5 ponto) Dentre essas relações, aponte TODAS as que SÃO ANTI-SIMÉTRICAS.
 - d) (0,5 ponto) Dentre essas relações, aponte TODAS as que SÃO TRANSITIVAS.

Boa Sorte!