Processos Estocásticos – 1ª Avaliação 9,0 2018.1

Aluno: Rhaylson Ribeiro Moreira

Curso: Engenharia Elétrica

1ª) Uma variável aleatória de Bernoulli X só pode assumir dois valores (0 ou 1) com probabilidades de ocorrências dadas por q e p respectivamente. Onde $q = 1 - p$.

a) ※ Média

$$\boxed{E\{X\} = \sum x \cdot f(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p}$$

1,0

※ Variância

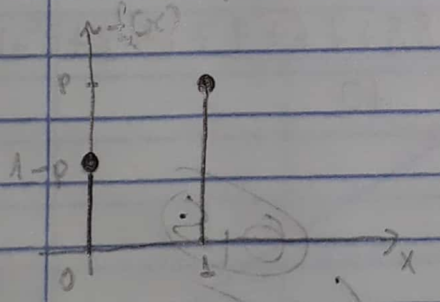
$$VAR\{X\} = E\{X^2\} - \mu_X^2 \qquad (\mu_X = E\{X\})$$

$$E\{X^2\} = \sum x^2 \cdot f(x) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$\boxed{VAR\{X\} = p - p^2 = p(1-p) = pq}$$

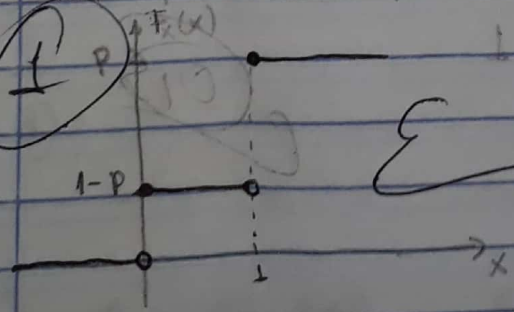
b) ※ Função Densidade

0,5



※ Função Distribuição

1



$$E\{x\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2.

a) $E\{x\} = \frac{1+4+6+5+8+7+9+5+9+10}{10} = \frac{64}{10} = 6{,}4$ (0,5)

$E\{y\} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$

$E\{x^2\} = \frac{1+4^2+6^2+5^2+8^2+7^2+9^2+5^2+9^2+10^2}{10} = \frac{478}{10} = 47{,}8$

$E\{y^2\} = \frac{1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2}{10} = \frac{385}{10} = 38{,}5$

b) $VAR\{x\} = E\{x^2\} - \mu_x^2 = 47{,}8 - 6{,}4^2 = 6{,}84$ (0,5)

$VAR\{y\} = E\{y^2\} - \mu_y^2 = 38{,}5 - 5{,}5^2 = 8{,}25$

c) $CORR(x,y) = \frac{x^T y}{N} = \frac{1\cdot1+4\cdot2+6\cdot3+5\cdot4+8\cdot5+7\cdot6+9\cdot7+5\cdot8+9^2+10^2}{10}$

$CORR(x,y) = \frac{413}{10} = 41{,}3$ (0,5)

d) $COV(x,y) = CORR(x,y) - \mu_x \mu_y$

$COV(x,y) = 41{,}3 - 6{,}4\cdot5{,}5 = 6{,}1$ (0,5)

Rhaylson Ribeiro Moreira - 1ª Av. Estocásticos 2018.1

3. a) $a = \frac{COV(x,y)}{VAR\{y\}} = \frac{6,1}{8,25} \cong 0,74$

0,5

$b = E\{x\} - a\,E\{y\} = 6,4 - 0,74 \cdot 5,5 = 2,33$

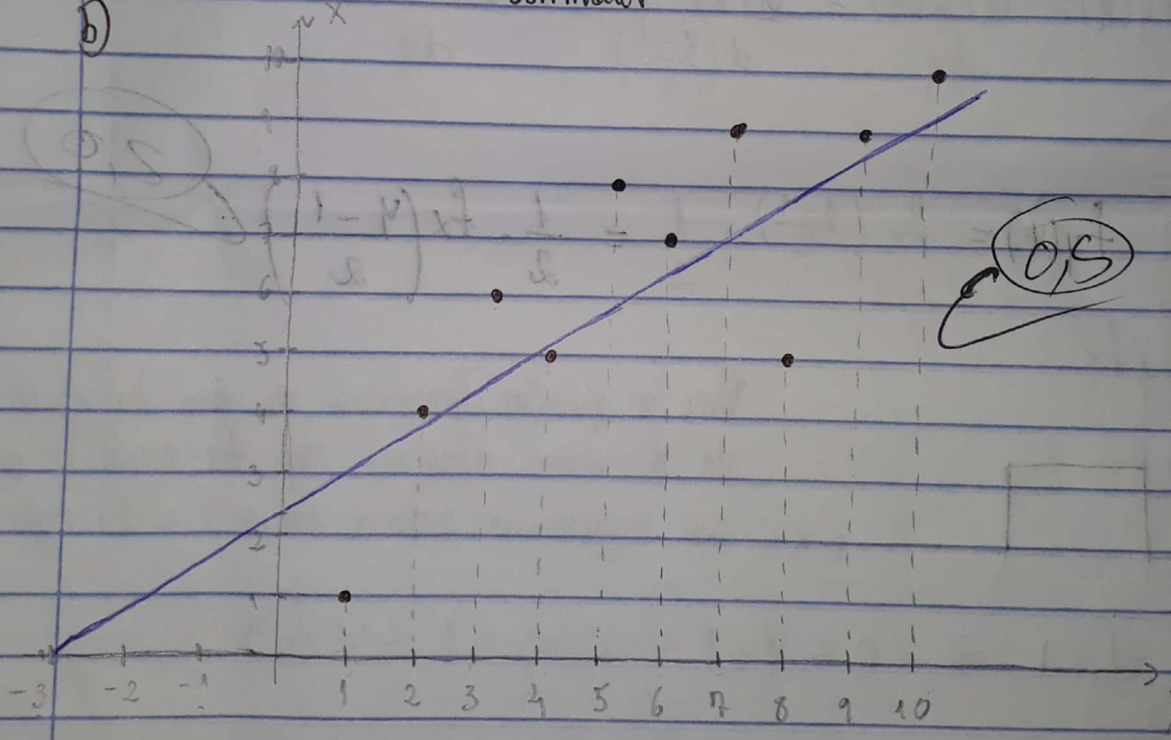
0,5

c) $\hat{X} = 0,74Y + 2,33$

Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1	4	6	5	8	7	9	5	9	10
$\hat{X}$	3,07	3,81	4,55	5,29	6,03	6,77	7,51	8,25	8,99	9,73

Legenda: • Pares (X_i, X_i)
– Estimador

b)



0,5

d) $e = [(1-3,07)^2 + (4-3,81)^2 + (6-4,55)^2 + (5-5,29)^2 + (8-6,03)^2 + (7-6,77)^2 + (9-7,51)^2 + (5-8,25)^2 + (9-8,99)^2 + (10-9,73)^2]/10$

0,5

$e = \frac{23,297}{10} = 2,3297$

4. $Y = 2X + 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X + 1 \leq y) = P(2X \leq y - 1)$$
$$= P(2X \leq y - 1) = P\left(X \leq \frac{y-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

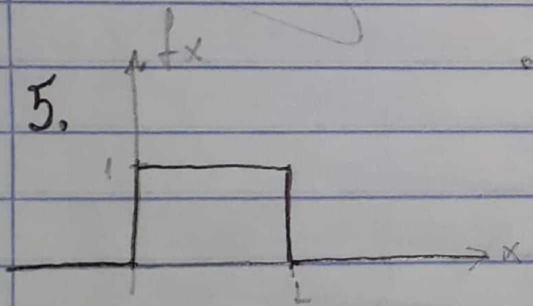
Derivando em relação a Y, aplicando a definição de função densidade de probabilidade e usando a Regra da Cadeia, observamos:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{y-1}{2}\right)}{d\left(\frac{y-1}{2}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{y-1}{2}\right)}{dy}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot f_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

2,0

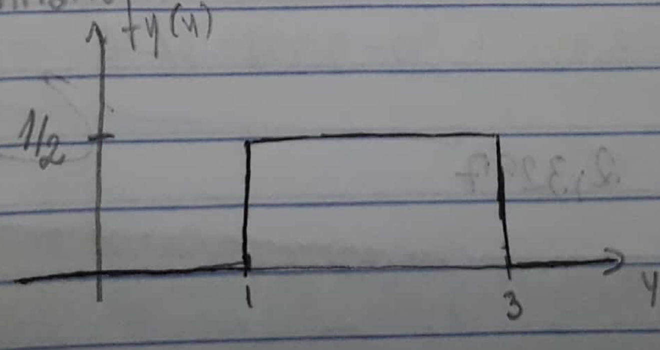
5.



Para a função densidade de probabilidade de Y vamos observar que fx será 1 quando seu argumento estiver entre 0 e 1 logo:

$$0 < \frac{y-1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < y - 1 < 2 \Rightarrow 1 < y < 3$$

logo fy assumirá valor 1/2 quando $1 < y < 3$ e 0 caso contrário



2,0

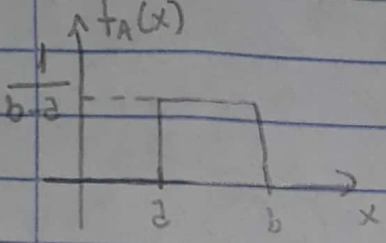
Scanned by CamScanner

6. Se A é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[a,b]$ então a média de a será $\frac{a+b}{2}$

$$E\{X\} = E\{A\cos(\omega t)\} = E\{A\}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{E\{X\} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos(\omega t)}$$

1,0



$$E\{A\} = \int_a^b x \cdot f_A(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_a^b$$

$$E\{A\} = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)}\cdot 2} = \frac{b+a}{2}$$